

线性代数-20

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 12 日

本次课内容

1. 等价关系和等价不变量/性
2. 线性代数学了什么？

等价关系

把 x 和 y 之间的某种关系记为 $x \sim y$. 若集合 S 上一个二元关系“ \sim ”满足如下性质:

- 自反性: $\forall x \in S, x \sim x$;
- 对称性: $\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 传递性: $\forall x, y, z \in S$, 若 $x \sim y, y \sim z$, 则 $x \sim z$.

则称 \sim 为 S 上的一个等价关系.

等价关系

把 x 和 y 之间的某种关系记为 $x \sim y$. 若集合 S 上一个二元关系 " \sim " 满足如下性质:

- 自反性: $\forall x \in S, x \sim x$;
- 对称性: $\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 传递性: $\forall x, y, z \in S$, 若 $x \sim y, y \sim z$, 则 $x \sim z$.

则称 \sim 为 S 上的一个等价关系.

例

1. 在实数集 \mathbb{R} 上, " $=$ " 是一个等价关系. " $<$ " 和 " $>$ " 不是等价关系.
2. 设 $S = \{\text{平面上所有直线}\}$, "平行" 是一个等价关系.
3. 设 $S = \{\text{所有三角形}\}$, "全等" 和 "相似" 是等价关系.
4. 整数集 \mathbb{Z} 上, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x, y$ 奇偶性相同, 则 " \sim " 是等价关系.
5. 设 S 是人的集合, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 性别相同, 则 " \sim " 是等价关系.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

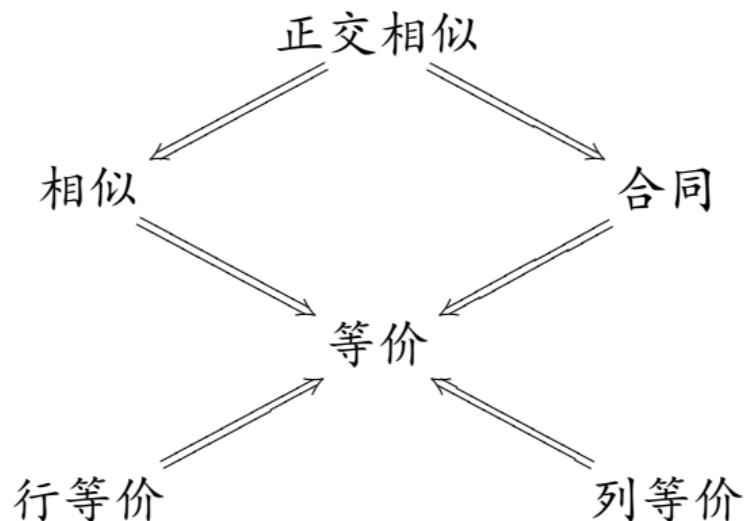
- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.
- 正交相似: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在正交阵 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 正交相似.

线性代数中的等价关系

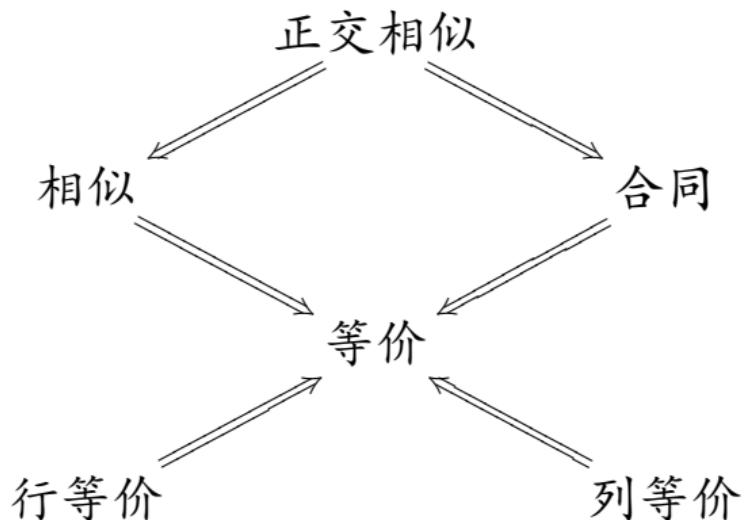
矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.
- 正交相似: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在正交阵 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 向量组等价: 设 A, B 是两个向量组, 若 A, B 可相互线性表示, 则称向量组 A 和 B 等价.

矩阵等价关系之间的联系



矩阵等价关系之间的联系



- 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow (0, A) \xsim{c} (B, 0)$

等价类

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 属于同一个等价类.

- 集合 S 上的等价关系把 S 中所有元素进行了分类, 每一类对应一个等价类.
- 研究集合 S 上的不同的等价关系相当于从不同的角度观察 S 中元素.

等价类

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 属于同一个等价类.

- 集合 S 上的等价关系把 S 中所有元素进行了分类, 每一类对应一个等价类.
- 研究集合 S 上的不同的等价关系相当于从不同的角度观察 S 中元素.

例

设 S 是教室中所有同学的集合,

1. 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性别相同, 则 \sim 把 S 分为两类 (男/女).
2. 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的星座相同, 则 \sim 把 S 分为 12 类.
3. 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的班级相同, 则 \sim 把 S 分为 3 类 (4 类).

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m, n\} + 1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵 (超纲: 一般情况为 Jordan 标准形)
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵 / 标准形
行等价/列等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形 / 列最简形

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m, n\} + 1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵 (超纲: 一般情况为 Jordan 标准形)
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵 / 标准形
行等价/列等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形 / 列最简形

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m, n\} + 1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵 (超纲：一般情况为 Jordan 标准形)
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵 / 标准形
行等价/列等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形 / 列最简形

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m, n\} + 1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵 (超纲: 一般情况为 Jordan 标准形)
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵 / 标准形
行等价 / 列等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形 / 列最简形

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m, n\} + 1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵（超纲：一般情况为 Jordan 标准形）
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵 / 标准形
行等价 / 列等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形 / 列最简形

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m, n\} + 1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵（超纲：一般情况为 Jordan 标准形）
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵/标准形
行等价/列等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形/列最简形

对角化问题: 每个等价类中, 一个矩阵化为最简单矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A , 存在可逆 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

对角化问题: 每个等价类中, 一个矩阵化为最简单矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A , 存在可逆 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 相似: n 阶方阵可相似对角化 \Leftrightarrow 有 n 个线性无关特征向量.

即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 \Leftrightarrow 存在可逆 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

对角化问题: 每个等价类中, 一个矩阵化为最简单矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A , 存在可逆 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 相似: n 阶方阵可相似对角化 \Leftrightarrow 有 n 个线性无关特征向量.

即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 \Leftrightarrow 存在可逆 P , 使得
 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- 合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.

即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A , 存在可逆 P , 使得 P^TAP 为标准形/规范形.

对角化问题: 每个等价类中, 一个矩阵化为最简单矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A , 存在可逆 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 相似: n 阶方阵可相似对角化 \Leftrightarrow 有 n 个线性无关特征向量.

即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 \Leftrightarrow 存在可逆 P , 使得
 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- 合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.

即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A , 存在可逆 P , 使得 P^TAP 为标准形/规范形.

- 正交相似: 任意 n 阶实对称阵可正交相似对角化.

即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A , 存在正交 P , 使得
 $P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 为标准形.

对角化问题: 每个等价类中, 一个矩阵化为最简单矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A , 存在可逆 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 相似: n 阶方阵可相似对角化 \Leftrightarrow 有 n 个线性无关特征向量.

即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 \Leftrightarrow 存在可逆 P , 使得
 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- 合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.

即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A , 存在可逆 P , 使得 P^TAP 为标准形/规范形.

- 正交相似: 任意 n 阶实对称阵可正交相似对角化.

即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A , 存在正交 P , 使得

$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 为标准形.

- 行等价/列等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵都可以通过初等行/列变换化为行/列阶梯形和行/列最简形.

等价不变量和等价不变性

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

等价不变量和等价不变性

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 则

- 等价的元素之间所具有的相同的性质称为等价不变性;
- 等价的元素之间所具有的相同数量特征称为等价不变量.

等价不变量和等价不变性

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 则

- 等价的元素之间所具有的相同的性质称为等价不变性;
- 等价的元素之间所具有的相同数量特征称为等价不变量.

性质

对于集合 S 上的等价关系 \sim , 设 p 是一个等价不变性/量. 则

- 若 $x \sim y$, 则 $p(x) = p(y)$;
- 若 $p(x) \neq p(y)$, 则 $x \not\sim y$.

完全不变量和完全不变性

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系.

$\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同, 则称 p 是一个完全不变性/量.

完全不变量和完全不变性

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系.

$\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同, 则称 p 是一个完全不变性/量.

例

S 是教室中所有同学的集合, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的班级相同. 则学号的倒数第三个数字是一个完全不变量.

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	<u>秩</u>	是	$A \sim B \stackrel{\text{同型}}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	<u>特征值</u>	否	$A \stackrel{\text{相似}}{\sim} B \stackrel{\text{可对角化}}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	<u>正负惯性指数</u>	是	$A \stackrel{\text{合同}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \stackrel{\text{正交}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/ 列等价			$A \stackrel{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T);$ $A \stackrel{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	<u>秩</u>	是	$A \sim B \stackrel{\text{同型}}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	<u>特征值</u>	否	$A \stackrel{\text{相似}}{\sim} B \stackrel{\text{可对角化}}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	<u>正负惯性指数</u>	是	$A \stackrel{\text{合同}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \stackrel{\text{正交}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/ 列等价			$A \stackrel{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T);$ $A \stackrel{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	<u>秩</u>	是	$A \sim B \stackrel{\text{同型}}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	<u>特征值</u>	否	$A \stackrel{\text{相似}}{\sim} B \stackrel{\text{可对角化}}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	<u>正负惯性指数</u>	是	$A \stackrel{\text{合同}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \stackrel{\text{正交}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/ 列等价			$A \stackrel{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T);$ $A \stackrel{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	<u>秩</u>	是	$A \sim B \stackrel{\text{同型}}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	<u>特征值</u>	否	$A \stackrel{\text{相似}}{\sim} B \stackrel{\text{可对角化}}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	<u>正负惯性指数</u>	是	$A \stackrel{\text{合同}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \stackrel{\text{正交}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/ 列等价			$A \stackrel{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T);$ $A \stackrel{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	<u>秩</u>	是	$A \sim B \xrightleftharpoons{\text{同型}} R(A) = R(B)$
相似	<u>特征值</u>	否	$A \xrightleftharpoons{\text{相似}} B \xrightleftharpoons{\text{可对角化}}$ 特征值相同
合同	<u>正负惯性指数</u>	是	$A \xrightleftharpoons{\text{合同}} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \xrightleftharpoons{\text{正交}} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/ 列等价			$A \stackrel{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T);$ $A \stackrel{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	<u>秩</u>	是	$A \sim B \stackrel{\text{同型}}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	<u>特征值</u>	否	$A \stackrel{\text{相似}}{\sim} B \stackrel{\text{可对角化}}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	<u>正负惯性指数</u>	是	$A \stackrel{\text{合同}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \stackrel{\text{正交}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/ 列等价			$A \stackrel{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T);$ $A \stackrel{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q , 使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q , 使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法: 初等行变换、左行右列.

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q , 使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法: 初等行变换、左行右列.
- (完全) 等价不变量: 矩阵的秩.

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q , 使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法: 初等行变换、左行右列.
- (完全) 等价不变量: 矩阵的秩.
- 矩阵的等价把 $m \times n$ 阶矩阵全体分为了 $\min\{m, n\} + 1$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵: 标准形.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似.

- 相似不变量: 特征值、特征多项式.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似.

- 相似不变量: 特征值、特征多项式.
- 矩阵的相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵: **Jordan** 标准形.
可对角化等价类中最简单的矩阵: 对角形.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似.

- 相似不变量: 特征值、特征多项式.
- 矩阵的相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵: Jordan 标准形.
可对角化等价类中最简单的矩阵: 对角形.
- 相似对角化问题: 是否和对角形矩阵相似.
特征值和特征多项式是两个可对角化矩阵相似的完全不变量.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^TAP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^TAP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

- 主要方法: 二次型.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^TAP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

- 主要方法: 二次型.
- (完全) 等价不变量: 正负惯性指数.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^TAP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

- 主要方法: 二次型.
- (完全) 等价不变量: 正负惯性指数.
- 矩阵的合同把 n 阶实对称矩阵全体分为了 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵: 规范形.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^TAP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

- 主要方法: 二次型.
- (完全) 等价不变量: 正负惯性指数.
- 矩阵的合同把 n 阶实对称矩阵全体分为了 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵: 规范形.
- 相似对角化问题: 实对称矩阵一定和某个对角形矩阵合同.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

- 主要方法: 二次型.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

- 主要方法: 二次型.
- 等价不变量: 特征值 (完全不变量)、正负惯性指数.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

- 主要方法: 二次型.
- 等价不变量: 特征值 (完全不变量)、正负惯性指数.
- 矩阵的正交相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵: 标准形.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

- 主要方法: 二次型.
- 等价不变量: 特征值 (完全不变量)、正负惯性指数.
- 矩阵的正交相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵: 标准形.
- 正交相似对角化问题: 实对称矩阵一定可以正交相似对角化.

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价。

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价.
- 等价不变量：向量组的秩

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价.
- 等价不变量：向量组的秩
- 向量组的等价把 n 维向量组全体分为了无穷多类.
每个等价类中包含向量最少的向量组：最大无关组.

线性代数学了什么？

- 一个主体：

- 一个主体：
 - 矩阵

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (**Chap 2-4**)

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
 - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
 - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)
- 3 + 1 + 1 个等价关系：

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
 - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：
 - 矩阵的等价、相似、合同;

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
 - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：
 - 矩阵的等价、相似、合同;
 - 矩阵的正交相似（相似且合同）；

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
 - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：
 - 矩阵的等价、相似、合同；
 - 矩阵的正交相似（相似且合同）；
 - 向量组的等价.

复习提纲

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
 - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：
 - 矩阵的等价、相似、合同;
 - 矩阵的正交相似（相似且合同）；
 - 向量组的等价.
- 3 个重要不变量：

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
 - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：
 - 矩阵的等价、相似、合同;
 - 矩阵的正交相似（相似且合同）；
 - 向量组的等价.
- 3 个重要不变量：
 - 矩阵的秩;

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
 - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：
 - 矩阵的等价、相似、合同;
 - 矩阵的正交相似（相似且合同）；
 - 向量组的等价.
- 3 个重要不变量：
 - 矩阵的秩;
 - 方阵的特征值

- 一个主体：
 - 矩阵
- 两个基本问题：
 - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
 - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：
 - 矩阵的等价、相似、合同;
 - 矩阵的正交相似（相似且合同）；
 - 向量组的等价.
- 3 个重要不变量：
 - 矩阵的秩;
 - 方阵的特征值
 - 实对称矩阵的正负惯性指数.

矩阵世界

矩阵分解

对应章节

(在 Linear Algebra for Everyone 中)

矩阵 ($m \times n$)

1.4 $A = CR$

行秩 = 列秩

$A = U\Sigma V^T$ 7.1

SVD: 单位正交基底 U, V

方阵 ($n \times n$)

可逆

$\det(A) \neq 0, \text{all } \lambda \neq 0$

奇异

$\exists \lambda = 0, \det(A) = 0$

4.4 $A = QR$

格拉姆-施密特

三角化

2.3 $A = LU$

U 有一个零行

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A5 正规

$A^T A = AA^T$
可通过正交矩阵对角化

$A = Q\Lambda Q^T$

正交

$Q^{-1} = Q^T$
 $\text{all } |\lambda| = 1$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

可对角化

6.2 $A = X\Lambda X^{-1}$

对角化

$A = XJX^{-1}$ A7

J = 约旦型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 对称

$S = S^T$, 所有 λ 都是实数

$S = Q\Lambda Q^T$ 6.3

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3 半正定

$\text{all } \lambda \geq 0, \text{all } A^T A$

4.2 投影

$P^2 = P = P^T, \lambda = 1 \text{ or } 0$

I

O

对角

6.3

$\text{all } \lambda > 0$

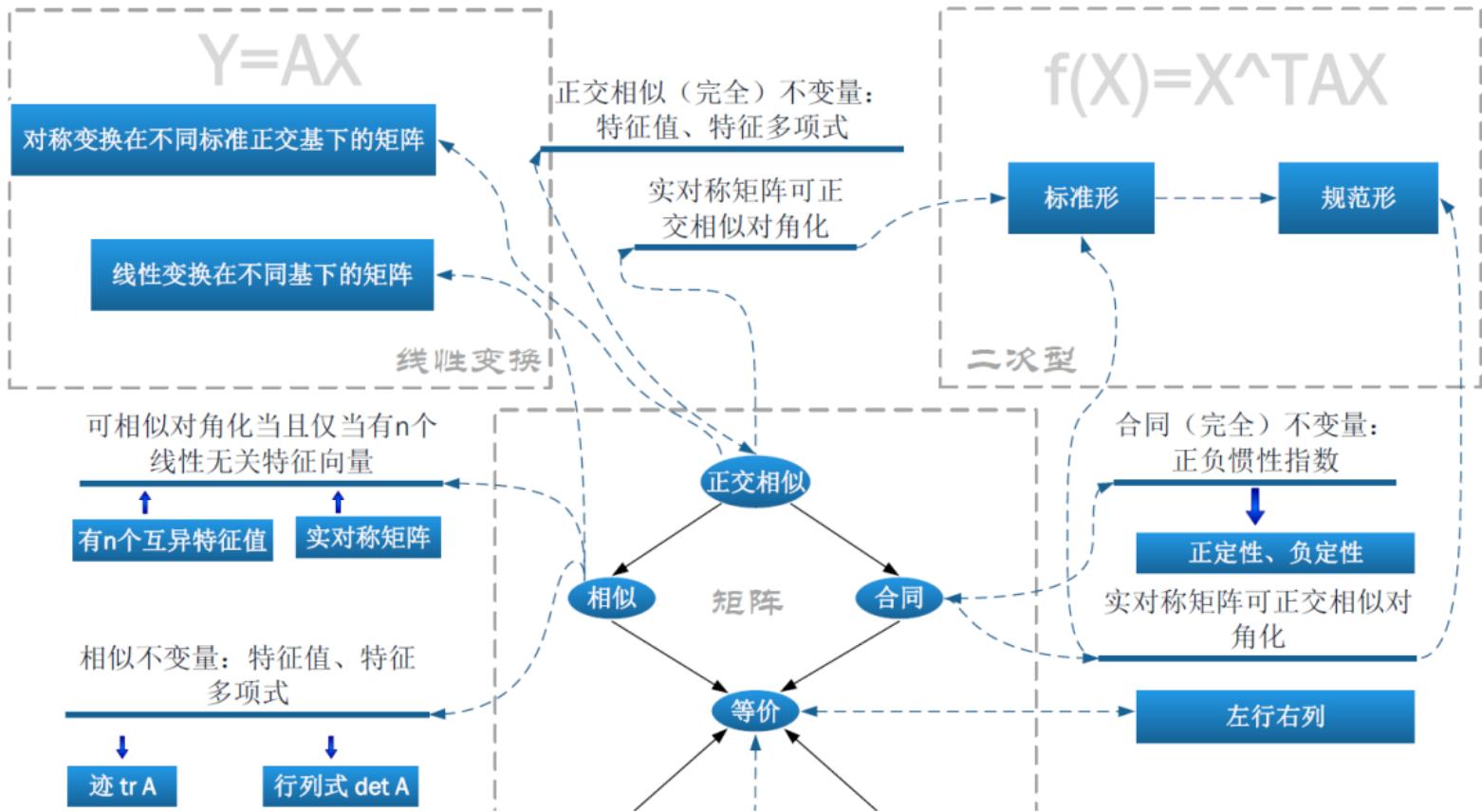
Σ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

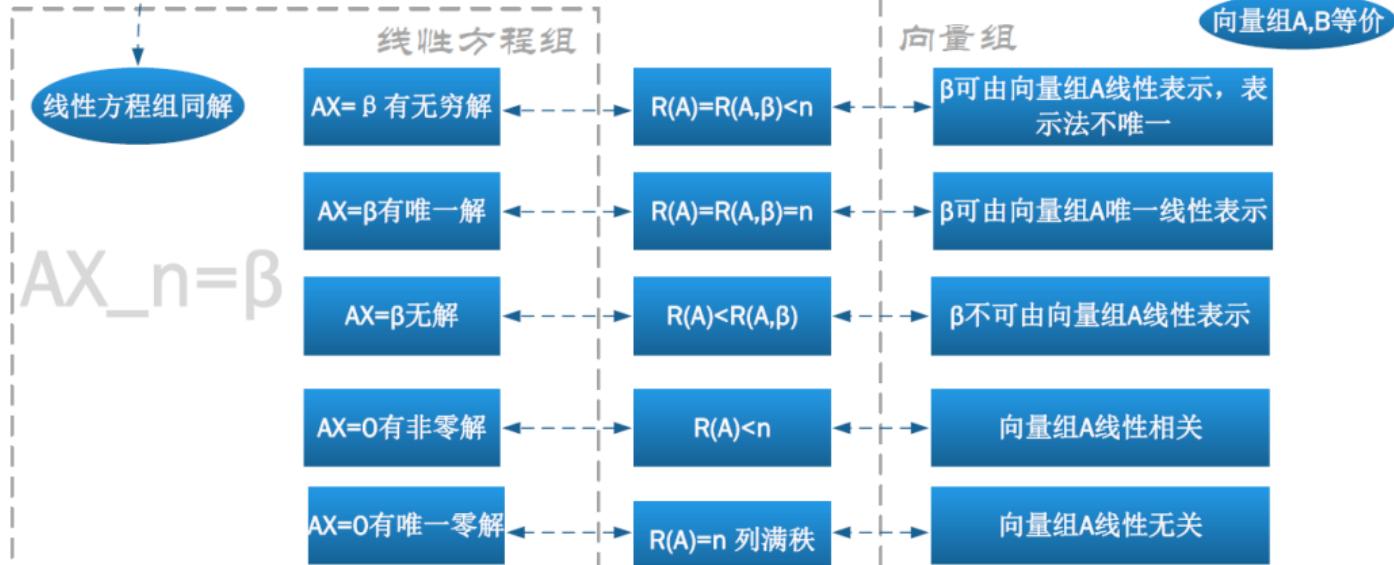
$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ \longleftrightarrow $A^+ = V\Sigma^+U^T$ 3.5, 7.4







等价 (完全) 不变量: 秩



已知

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

问

1. A, B 是否等价?
2. A, B 是否相似?
3. A, B 是否合同?
4. A, B 是否正交相似?
5. A, B 的列向量组是否等价?

已知

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

问

1. A, B 是否等价?
2. A, B 是否相似?
3. A, B 是否合同?
4. A, B 是否正交相似?
5. A, B 的列向量组是否等价?

若算力不足, 可对 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 考虑上面问题.

已知

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

问

1. A, B 是否等价? ($R(A) = R(B)?$)
2. A, B 是否相似? (特征值相同?)
3. A, B 是否合同? (正负惯性指数相同?)
4. A, B 是否正交相似? (相似 + 合同?)
5. A, B 的列向量组是否等价? ($R(A) = R(B) = R(A, B)?$)

若算力不足, 可对 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 考虑上面问题.

答疑环节

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 12 日

一些必须会做的题

- Page₂₅ 例 1;
Page₈₁ 例 6;
Page₁₁₆ 例 3;
Page₁₃₅ 例 2(两种证法);
Page₁₄₅ 例 6;
Page₂₁₆ 例 1.
- Page₆₂ 例 4;
Page₁₆₄ 例 5.