# 线性代数-17

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 26 日

# 本次课内容

1. 相似对角化

2. 实对称矩阵的正交相似对角化

3. 二次型和对称矩阵

- 矩阵 $A$ 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP = \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 $P$, 使得 $AP = P\mathbf{\Lambda}$. 令 $P = (P_1, \cdots, P_n)$, 则

$$
\begin{aligned}
A(P_1, \cdots, P_n) &= (P_1, \cdots, P_n) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 & & & \\ & \boldsymbol{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda}_n \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\lambda}_1 P_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n P_n)
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$ $AP_i = \boldsymbol{\lambda}_i P_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$, $P_1, \cdots, P_n$ 线性无关.

$\Leftrightarrow$ $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

# 可对角化

**定理 (可对角化)**

$n$ 阶方阵 $A$ 可相似对角化当且仅当 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

**定理 (可对角化)**

$n$ 阶方阵 $A$ 可相似对角化当且仅当 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**定理 (可对角化)**

$n$ 阶方阵 $A$ 可相似对角化当且仅当 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- （推论）若 $n$ 阶方阵 $A$ 有 $n$ 个互异的特征值，则 $A$ 可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.

**定理 (可对角化)**

$n$ 阶方阵 $A$ 可相似对角化当且仅当 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- （推论）若 $n$ 阶方阵 $A$ 有 $n$ 个互异的特征值，则 $A$ 可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.
- 若 $n$ 阶方阵 $A$ 可相似对角化，则可通过求 $A$ 的所有线性无关特征向量来求可逆阵 $P$.
- 可逆阵 $P$ 不唯一，并且可能是复矩阵.

# 例题

**例 (例 10)**

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

是否可对角化？若能，

1) 求可逆阵 $P$ 和对角阵 $\Lambda$, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;
2) 求 $\varphi(A) = A^3 + 2A^2 - 3A$. （与 P43 例 15 对比）

**例 (例 10)**

问矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$$

是否可对角化？若能，

1) 求可逆阵 $P$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$；

2) 求 $\varphi(A)=A^3+2A^2-3A$. （与 P43 例 15 对比）

解法：1. 求特征多项式 $f(\boldsymbol{\lambda})=|A-\boldsymbol{\lambda}E|$，由 $f(\boldsymbol{\lambda})=0$ 得特征值；

2. 依次解 $(A-\boldsymbol{\lambda}_iE)X=0$ 的基础解系，得特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 对应的特征向量；

3. 给出可逆阵 $P$.

**例 (例 11)**

问 $t$ 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化.

**例 (例 11)**

问 $t$ 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化.

- 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的每个特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的重数为 $n_i$；$(A-\boldsymbol{\lambda}_iE)X=0$ 的基础解系包含向量的个数为 $m_i=n-R(A-\boldsymbol{\lambda}_iE)$. 则

$$A \text{ 可对角化} \Leftrightarrow \text{对每个特征值 } \boldsymbol{\lambda}_i\text{，都有 } n_i=m_i.$$

# 实对称的正交相似对角化

**定义**

若存在正交阵 $P$, 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 $A$ 可以正交相似对角化.

# 实对称的正交相似对角化

**定义**

若存在正交阵 $P$, 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 $A$ 可以正交相似对角化.

**定理 (定理 5)**

设 $A$ 为实矩阵, 则 $A$ 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^{T}$.

# 实对称的正交相似对角化

**定义**

若存在正交阵 $P$, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 $A$ 可以正交相似对角化.

**定理 (定理 5)**

设 $A$ 为实矩阵, 则 $A$ 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

- 性质 1: 实对称阵的特征值必为实数.
- 性质 2: 实对称阵的不同特征值对应的特征向量必正交.

**例 (例 12)**

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一个正交阵 $P$, 使 $P^{-1}AP = \mathbf{\Lambda}$ 为对角阵.

**例 (例 12)**

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一个正交阵 $P$, 使 $P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解法: 1. 计算 $|A - \boldsymbol{\lambda} E|$, 求 $A$ 的特征值;

2. 求 $(A - \boldsymbol{\lambda}_i E)X = 0$ 的基础解系, 得 $A$ 的线性无关特征向量;

3. 将基础解系正交化、单位化;

4. 写 $P^{-1}AP = P^TAP = \boldsymbol{\Lambda}$, 注意特征值与特征向量对应顺序.

**例 (例 13)**

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $A^n$.

# 下次课预告：二次型和对称矩阵

**例 (P53 习题 1-(5))**

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

# 下次课预告：二次型和对称矩阵

**例 (P53 习题 1-(5))**

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$ 和对称阵 $A$ 一一对应.
- Section-5、6、7 的中心任务: 化简二次型/对称阵.
  寻找可逆 (正交) 线性变换 $X=PY$, 使得
  $$f(X)=f(PY)=Y^TP^TAPY=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$$
  矩阵语言：寻找可逆 (正交) 阵 $P$，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

**例 (P53 习题 1-(5))**

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$ 和对称阵 $A$ 一一对应.
- **Section-5、6、7** 的中心任务: 化简二次型/对称阵.
  寻找可逆 (正交) 线性变换 $X=PY$, 使得

$$f(X)=f(PY)=Y^TP^TAPY=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$$

矩阵语言：寻找可逆 (正交) 阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

## 小结

- 相似对角化;
- 实对称阵的正交相似对角化.

## 作业

- Page$_{139}$-Page$_{140}$：16、19-1、20、23、24、26-2.

# 欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 26 日