22.

$f(x_0)=0 \iff x-x_0 \mid f(x)$

$\iff \exists\, q(x),\ s.t.\ f(x)=(x-x_0)\cdot q(x)$

$\iff (x-x_0, f(x)) = x-x_0$

$f(x_0)\neq 0 \iff x-x_0 \nmid f(x)$

$\iff f(x_0)=r(x_0)$，其中 $r(x)=f(x)-(x-x_0)q(x)$.

$\iff (x-x_0, f(x))=1$

证明：$\Rightarrow$ 若 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的 k 重根.

则 $(x-x_0)^k \mid f(x)$，且 $(x-x_0)^{k+1} \nmid f(x)$

即 $\exists\, q(x)$, s.t

$$f(x)=(x-x_0)^k\cdot q(x)$$

其中 $q(x_0)\neq 0$ (即 $x-x_0 \nmid q(x)$)

由 Leibniz 公式知

$$f^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \left[(x-x_0)^k\right]^{(j)} q^{(i-j)}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{i} C_i^j \cdot A_k^j (x-x_0)^{k-j} q^{(i-j)}(x)$$

$\because$ 当 $0 \leq i < k$ 时. $k-i>0$

$$f^{(i)}(x_0)=0$$

当 $i=k$ 时

$$f^{(k)}(x_0)=C_k^k \cdot A_k^k \cdot 1 \cdot q^{(k-k)}(x)$$

$$=q(x_0) \neq 0$$

$\Leftarrow$ $f(x_0)=0$，知 $x-x_0 \mid f(x)$

可设 $f(x)=(x-x_0)\cdot q_1(x)$

$\therefore f'(x)=q_1(x)+(x-x_0)q_1'(x)$

则 $f'(x_0)=q_1(x_0)=0$

$\therefore x-x_0 \mid q_1(x)$

$\therefore$ 可设 $f(x)=(x-x_0)^2 \cdot q_2(x)$

由数学归纳，设 $f(x)=(x-x_0)^i q_i(x)$，$i \leq k-1$

则 $$f^{(i)}(x)=\sum_{j=0}^{i} C_i^j A_i^j (x-x_0)^{i-j} q_i^{(i-j)}(x)$$

$\therefore f^{i}(x_0)=q_i(x_0)=0$

$\therefore x-x_0 \mid q_i(x)$

则可设 $f(x)=(x-x_0)^{i+1}q_{i+1}(x)$.

（这里 $q_i(x)=(x-x_0)\cdot q_{i+1}(x)$）

由归纳，可设 $f(x)=(x-x_0)^k q_k(x)$

而 $f^{(k)}(x_0)=q_k(x_0)\neq 0$

知 $x-x_0\nmid q_k(x)$.

$\therefore (x-x_0)^{k+1}\nmid f(x)$

即 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一个k重根 $\square$

26、单位根.

$$x^n=1 \Rightarrow x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=1,\cdots,n$$

$$=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

（欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$）

注：$x_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$x_k = x_1^k,\ \forall k = 1, \cdots, n$,

$\overline{x_k} = x_{n-k},\ \forall k = 1, \cdots, n-1$,

$x_n = x_1^n = 1$.

思考下面说法是否正确？

$\forall p \in N^+$，若 $(p, n) = 1$，则

$x_p, x_p^1, \cdots, x_p^n$ 遍历 $x^n = 1$ 的所有单位根.

解：

在复数域 $\mathbb{C}$ 上

$$x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} (x - x_1^k) \\ (x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x-1) \\ \prod_{k=1}^{n} \left(x - e^{\frac{2k\pi}{n} i}\right) \end{cases}$$

在实数域 $\mathbb{R}$ 上，

（$\mathbb{R}[x]$ 中任意多项式可分解为至多二次的因式乘积）

若 n 为奇数，则 $x^n=1$ 的 n 个单位根中

有 $\frac{n-1}{2}$ 对共轭复根，和为1.

此时

$$x^n-1=(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots\underset{\substack{\| \\ x-\overline{x_2}}}{(x-x_{n-2})}\underset{\substack{\| \\ x-\overline{x_1}}}{(x-x_{n-1})}\cdot(x-x_n)$$

$$=(x-x_1)(x-\overline{x_1})\times(x-x_2)(x-\overline{x_2})\times\cdots$$
$$\times(x-x_{\frac{n-1}{2}})(x-\overline{x_{\frac{n-1}{2}}})\times(x-1)$$

$$=\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(x^2-(x_k+\overline{x_k})x+x_k\overline{x_k})\times(x-1)$$

$$=(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1)$$

若 n 为偶数，则 $x^n=1$ 有 $\frac{n-2}{2}$ 对共轭复根

和 $x=\pm 1$

此时

$$x^n-1=(x+1)(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\cdot x+1\right)$$

(2)

12-1) 证明：

令 $h_i(x) \triangleq \frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} = \prod_{k\neq i}\frac{(x-a_k)}{(a_i-a_k)}$

则 $h_i(a_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ ，$\forall a_j$

设 $H(x)\triangleq\sum_{i=1}^{n}h_i(x)$.

$$H(a_j) = \sum_{i=1}^{n} h_i(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = 1$$

$\forall a_j$.

∵ $a_1 \cdots a_n$ 互不相同，$\partial H(x) = n-1$.

∴ $H(x) \equiv 1$，$\forall x$.

（n个点可以确定一个至多n-1次多项式 见定理9，或 待定系数，用范德蒙德行列式）

-2. $f(x) = F(x)q(x) + r(x)$，$\partial r < \partial F = n$

∴ $f(a_j) = F(a_j)q(a_j) + r(a_j)$

$= r(a_j)$. $\forall j = 1, \cdots, n$.

令 $g(x) = \sum_i \dfrac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} = \sum_i f(a_i)h_i(x)$

$\partial g \leq n-1$

$\therefore \; g(a_j) = \sum_i f(a_i) h_i(a_j)$

$= \sum_i f(a_i) \delta_{ij}$

$= f(a_j), \; \forall j = 1, \cdots, n$

$\therefore \; r(a_j) = g(a_j), \; \forall j = 1, \cdots, n$

$\therefore \; r(x) \equiv g(x), \; \forall x.$

$\boxed{}$.