Lec-11. 随机变量的函数的分布

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：wulisu.cn

目录

1. 离散型随机变量函数的分布

2. 连续型随机变量函数的分布

- $Z = X + Y$ 的分布
- $Z = \frac{X}{Y}$ 的分布，$Z = XY$ 的分布
- $M = \max\{X, Y\}$ 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

两个随机变量函数的分布

- 已知随机变量 X, Y 的分布和二元函数 $g(x, y)$
  $\Longrightarrow$ 求 $Z = g(X, Y)$ 的分布.

离散型随机变量函数的分布

若离散型随机变量 (X, Y) 联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},$$

则 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$\begin{aligned} P\{Z = z_k\} &= P\{g(X, Y) = z_k\} \\ &= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

例

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X+Y$, (2) $|X-Y|$ 的分布律.

解:

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	3	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

例

设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P	0.3	0.7

Y	2	4
P	0.6	0.4

求 $Z = X + Y$ 的分布律.

解.

Y \ X	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例

X, Y 相互独立且具有同一分布律

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布律.

解:

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$P\{\max\{X, Y\} = i\} = P\{X = i, Y < i\} + P\{X \le i, Y = i\}.$$

$\max\{X, Y\}$	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

连续型随机变量函数的分布

已知连续型随机变量 (X, Y), 求 $Z = g(X, Y)$ 的概率分布函数或概率密度函数.

- 先求 Z 的分布函数,

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$$
$$= P\{g(X, Y) \leq Z\} = \iint_{g(x,y)\leq z} f(x, y)\, dxdy.$$

- 再通过求导得到概率密度函数,

$$f_Z(z) = F'_Z(z).$$

例

设 (X, Y) 的概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x & 0 < x < 1, 0 < y < x; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z = X - Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\
&= P\{X - Y \le Z\} = \iint_{x-y\le z} f(x,y)\,dxdy.
\end{aligned}
$$

z 的取值不同, 积分区域不同.

1. $z \le 0$ 时, 不与 $f(x,y)$ 的非零区域相交. $F_Z(z) = 0$.

2. $0 < Z < 1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\int\int_{x-y\le z} f(x,y)\,dxdy &= 1 - \int\int_{x-Y>z} f(x,y)\,dxdy \\
&= 1 - \int^1 z \int_0^{x-z} 3x\,dydx = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3.
\end{aligned}
$$

3. $Z \ge 1$ 时, $F_Z(z) = 1$.

故 $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3(1-z^2)}{2} & 0 < z < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$Z = X + Y$ 的分布

连续型 (X, Y), $f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 的分布函数
$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \int\int_{x+y\le z} f(x, y)\,dxdy =$
$\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\,dx)\,dy$.(化为累次积分, 固定 y.)
表示成一个非负函数从 $-\infty$ 到 z 的积分, 作变换 $u = x + y$, 原式 $= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{z} f(u - y, y)\,du)\,dy =$
$\int_{-\infty}^{z}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u - y, y)\,dy)\,du = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\,du$.
$(f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} = f(z - y.y)\,dy)$
根据 X, Y 的对称性, $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\,dx$.
又若 X 和 Y 相互独立, $f_Z(z) =$

例

设 X 和 Y 是相互独立的, 服从 $N(0,1)$, 其概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

解: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx=\frac{1}{2\pi}=$
$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx=$
$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}dt=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$.
$Z\sim N(0,2)$.
故 X, Y 相互独立且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,
$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 则 $X+Y=Z$ 仍然服从正态分布
且 $Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

例. 在一简单电路中, 两电阻 R_1 和 R_2 串联, 设 R_1, R_2 相互独立, 它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10-x}{50} & 0\le x\le 10;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$ 求总电阻

$R=R_1+R_2$ 的概率密度.

解: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx,$

被积函数不为 0 时

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0<x<10;\\ 0<z-x<10\end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases}0<x<10;\\ z-10<x<z\end{cases}$$

$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)\,dx & 0\le z<10;\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)\,dx & 10\le z<20;\end{cases} =$$

例. 设 X, Y 相互独立, 且分别服从参数为 α,θ; β,θ 的 Γ 分布 $(X\sim\Gamma(\alpha,\theta),\ Y\sim\Gamma(\beta,\theta))$, 概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}\quad \alpha,\theta>0$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^{\beta}\Gamma(\beta)}y^{\beta-1}e^{-\frac{y}{\theta}} & y>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}\quad \beta,\theta>0$$

证 $Z = X + Y$ 服从参数为 $\alpha+\beta, \theta$ 的 Γ 分布, 即 $X + Y \sim \Gamma(\alpha+\beta, \theta)$.

证明: $Z = X + Y$ 的概率密度为

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$,

被积函数不为 0 时 $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; \\ z - x > 0 \end{cases}$

(1) $z < 0$, $f_Z(z) = 0$,

(2) $Z > 0$,

$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\frac{(z-x)}{\theta}} dx =$

$\frac{e^{-\frac{z}{\theta}}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1} dx$

作变换, 令 $x = zt$, 则原式

n 个相互独立的 Γ 分布变量之和的情况.
若 $X_1, ..., X_n$ 相互独立且 X_i 服从参数为 α_i, β 的 Γ 分布, 则 $\sum X_i$ 服从参数 $\sum \alpha_i, \beta$ 的 Γ 分布.
(Γ 分布可加性)

$Z = \frac{X}{Y}$ 的分布, $Z = XY$ 的分布

(X, Y) 为连续型随机变量, $f(x, y)$, 则 $Z = \frac{X}{Y}$, $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量. 其概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz)\, dx$$

,

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})\, dx$$

.

$F_{Y/X}(z) = P\{Y/X \leq z\} = \int\int_{y/x \leq z} f(x, y)\, dxdy =$
$\int\int_{y/x<z, x<0} f(x, y)\, dxdy + \int\int_{y/x<z, x>0} f(x, y)\, dxdy =$

例. 某公司提供一种地震保险. 保费 Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}\frac{y}{25}e^{-y/5} & y>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$ 保险赔付 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5} & x>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$ 设 X 与 Y 相互独立, 求 $Z=Y/X$ 的概率密度.

解: 当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$.

当 $z>0$ 时, $f_Z(z)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{5}e^{-x/5}\cdot\frac{xz}{25}e^{-xz/5}dx=\frac{z}{125}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x\cdot\frac{1+z}{5}}dx=\frac{z}{125}\int_0^{+\infty}x^{3-1}e^{-x}dx=\frac{z}{125}\frac{\Gamma(3)}{((1+z)15)^3}=\frac{2z}{(1+z)^3}$.

$M = \max\{X, Y\}$ 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设 X, Y 是两个相互独立的随机变量. 分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$. 求 $M = \max\{X, Y\}$, 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数.

$F_{\max}(z) = P\{M \leq z\} = P\{X \leq, Y \leq z\} = P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\} = F_X(z)F_Y(z)$.

$F_{\min}(z) = P\{N \leq z\} = 1 - P\{N > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$

推广到 n 个相互独立. $X_1, \ldots, X_n$, $F_{X_i}(x_i)$,

$M = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $N = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

例. 已知 X, Y 的分布函数.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0; \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - 0.5e^{-y} & y \geq 0; \\ 0.5e^{-y} & y < 0, \end{cases}$$

X 与 Y 相互独立, 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数.

解: $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\max\{X, Y\} \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\} = F_X(z)F_Y(z)$.

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$,

当 $z \geq 0$ 时

例. 设 X, Y 相互独立, 均服从 $U(0,1)$, 求 $M = \max\{X, Y\}$ 的概率密度.

解: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0; \\ x & 0 < x < 1; \\ 1 & x \ge 0; \end{cases}$$

$$f_{\max}(x) = F'_{\max}(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & x \le 0; \end{cases}$$

例. 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成, 连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当 L_1 损坏时, L_2 开始工作)

设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y. 已知其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$, 且 $\alpha \neq \beta$, 试分别就以三种连接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解:(i) 串联. 由于 L_1, L_2 中一个损坏时, 系统 L

例

设

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1;\\ 0.3 & 1\le x<2;\\ 1 & x\ge 2,\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0;\\ 0.4 & 0\le x<1;\\ 1 & x\ge 1,\end{cases}$$

$$P\{X=1,\, Y=0\}=0.1,$$

求 (1) $(X,\, Y)$ 的联合分布律, (2) $P\{X=k|\, Y=0\}$,
(3) $Y=0$ 时的条件分布函数.

解: (1)

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
1	0.1	0.2	0.3
2	0.3	0.4	0.7
$p_{\bullet j}$	0.4	0.6	1

(2) $P\{X=k|\,Y=0\}=\frac{P\{X=k,\,Y=0\}}{P\{\,Y=0\}}=\begin{cases}\frac{1}{4} & k=1;\\ \frac{3}{4} & k=2.\end{cases}$

(3)

$$F_{X|\,Y}(x|0)=P\{X\le x|\,Y=0\}=\begin{cases}0 & x<1;\\ 0.25 & 1\le x<2;\\ 1 & x\ge 2.\end{cases}$$