

## Lec-25. 正态总体参数的假设检验

主讲教师: 吴利苏 ([wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn))

主 页: [wulisu.cn](http://wulisu.cn)

# 本次课内容

## 1. 单个正态总体均值的检验

- $\sigma^2$  已知, 检验  $\mu$ :  $Z$  检验
- $\sigma^2$  未知, 检验  $\mu$ :  $t$  检验

## 2. 两个正态总体均值差的检验

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  未知, 检验  $\mu_1 - \mu_2$ :  $t$  检验

## 3. 基于成对数据的检验

## 4. 单个正态总体方差的检验

- $\mu$  未知, 检验  $\sigma^2$ :  $\chi^2$  检验

## 5. 两个正态总体方差商的检验

- $\mu_1, \mu_2$  未知, 检验  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$ :  $F$  检验

## 1.1. $\sigma^2$ 已知, 检验 $\mu$ : Z 检验

- 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  已知.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  样本.
- $x_1, \dots, x_n$  是  $X_1, \dots, X_n$  的样本观测值.

假设问题 (显著水平为  $\alpha$ )

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0,$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0,$$

其中  $\mu_0$  是已知的常数.

## 双边假设

- 双边假设

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

其中  $\mu_0$  是已知的常数.

- 检验统计量  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ .
- 拒绝域  $|z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2}$ .

## 左边假设

- 左边假设

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0,$$

其中  $\mu_0$  是已知的常数.

- 检验统计量  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ .
- 拒绝域  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$ .

## 左边假设

- 右边假设

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0,$$

其中  $\mu_0$  是已知的常数.

- 检验统计量  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ .
- 拒绝域  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$ .

## 1.2. $\sigma^2$ 未知, 检验 $\mu$ : $t$ 检验

- 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  未知.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  样本.
- $x_1, \dots, x_n$  是  $X_1, \dots, X_n$  的样本观测值.

假设问题 (显著水平为  $\alpha$ )

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0,$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0,$$

其中  $\mu_0$  是已知的常数.

## 双边假设

- 双边假设

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- 检验统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ .
- 拒绝域

$$|t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha/2}(n-1).$$



## 左边假设

- 左边假设

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0,$$

其中  $\mu_0$  已知.

- 检验统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ .
- 拒绝域  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1)$ .

## 右边假设

- 右边假设

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0,$$

其中  $\mu_0$  已知.

- 检验统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ .
- 拒绝域

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_\alpha(n-1).$$

## 例

某种元件的寿命  $X$ (以  $h$  计) 服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma^2$  均未知. 现测得 16 只元件的寿命如下

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于 225 h?

解: 按题意需检验

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 225, \quad H_1 : \mu > 225.$$

取  $\alpha = 0.05$ . 则此检验问题的拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1)$$

现在  $n = 16$ ,  $t_{0.05}(15) = 1.7531$ .

又算得  $\bar{x} = 241.5$ ,  $s = 98.7259$ , 即有

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 0.6685 < 1.7531$$

$t$  没有落在拒绝域中, 故接受  $H_0$ , 即认为元件的平均寿命不大于 225 h.

## 2.1. $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 已知, 检验 $\mu_1 - \mu_2$ : $Z$ 检验

两个正态总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  已知. 假设 ( $\delta$  通常取为 0)

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta, \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

- 当  $H_0$  成立时,  $\mu_1 - \mu_2$  的无偏估计  
 $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\delta, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ .
- 检验统计量:  $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$ .
- 拒绝域  $|z| \geq z_{\alpha/2}$ .

## 2.2. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知, 检验 $\mu_1 - \mu_2$ : $t$ 检验

两个正态总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  未知. 假设

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta, \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

- 检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

- 检验拒绝域

$$|t| = \frac{|\bar{x} - \bar{y} - \delta|}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$$

- 参数  $\sigma^2$  的无偏估计量

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

- 检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

- 由  $P_{H_0}\{|t| \geq k\} = \alpha$ , 得拒绝域

$$|t| = \frac{|\bar{x} - \bar{y} - \delta|}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$$

## 右边检验

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta, \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta$$

- 检验统计量和拒绝域

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_\alpha (n_1 + n_2 - 2)$$



## 左边检验

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta, \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

- 检验统计量和拒绝域

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq -t_\alpha (n_1 + n_2 - 2).$$

## 例

用两种方法 (A 和 B) 测定冰自  $-0.72^{\circ}\text{C}$  转变为  $0^{\circ}\text{C}$  的水的融化热 (以  $\text{cal/g}$  计). 测得以下的数据: 方法 A

79.98	80.04	80.02	80.04	80.03	80.03	
80.04	79.97	80.05	80.03	80.02	80.00	80.02

方法 B:

80.02	79.94	79.98	79.97
79.97	80.03	79.95	79.97

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体  $N(\mu_1, \sigma^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma^2)$ ,  $\mu_1, \mu_2, \sigma^2$  均未知, 试检验假设 (取显著性水平  $\alpha = 0.05$ )

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0, H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0.$$

解:  $n_1 = 13, \bar{x}_A = 80.02, s_A^2 = 0.024^2,$

$n_2 = 8, \bar{x}_B = 79.98, s_B^2 = 0.031^2,$

$$s_W^2 = \frac{12 \times s_A^2 + 7 \times s_B^2}{19} = 0.0007178.$$

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_w \sqrt{1/13 + 1/8}} = 3.323 > t_{0.05}(13 + 8 - 2) = 1.7291.$$

故拒绝  $H_0$ , 认为  $\mu_1 > \mu_2$ , 即方法 A 比方法 B 测得的融化热要大. □

### 3. 基于成对数据的检验

#### 例

有两台光谱仪  $I_x, I_y$ , 用来测量 9 块试块材料中某种金属的含量, 得到 9 对观察值如下.

$x$ (%)	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y$ (%)	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d=x-y$ (%)	0.10	0.09	-0.12	0.18	-0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

间能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异 (取  $\alpha = 0.01$ )?

- 对数据检验的数据是成对地收集得到的.

- 对数据检验的数据是成对地收集得到的.
- 对数据检验采用了比较的思想, 比通常的单个样本推断更让人信服. 这种方法在医学和生物研究领域广泛存在.

- 对数据检验的数据是成对地收集得到的.
- 对数据检验采用了比较的思想, 比通常的单个样本推断更让人信服. 这种方法在医学和生物研究领域广泛存在.
- 成对数据检验的基本思想是将双样本问题转为单样本问题.

- 对数据检验的数据是成对地收集得到的.
- 对数据检验采用了比较的思想, 比通常的单个样本推断更让人信服. 这种方法在医学和生物研究领域广泛存在.
- 成对数据检验的基本思想是将双样本问题转为单样本问题.
- 上例中的  $D_i = X_i - Y_i$  可看为独立同分布的.



- 假设成对数据  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .

- 假设成对数据  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .
- 设差值  $D_i = X_i - Y_i, i = 1, \dots, n$ .

- 假设成对数据  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .
- 设差值  $D_i = X_i - Y_i, i = 1, \dots, n$ .
- 设  $D_i$  为正态总体  $N(\mu_D, \sigma_D^2)$  的样本. 为比较两总体均值是否有显著差异, 可考虑如下的检验问题:

$$H_0 : \mu_D = 0, \quad H_1 : \mu_D \neq 0$$

$$H_0 : \mu_D \leq 0, \quad H_1 : \mu_D > 0$$

$$H_0 : \mu_D \geq 0, \quad H_1 : \mu_D < 0$$

## 双边检验

假设

$$H_0 : \mu_D = 0, \quad H_1 : \mu_D \neq 0$$

记

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i, \quad S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2,$$

- 检验统计量  $t = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ ,
- 拒绝域  $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$ .

## 右边检验

假设

$$H_0 : \mu_D \leq 0, \quad H_1 : \mu_D > 0$$

- 检验统计量和拒绝域

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \geq t_\alpha(n-1).$$

## 左边检验

假设

$$H_0 : \mu_D \geq 0, \quad H_1 : \mu_D < 0$$

- 检验统计量和拒绝域

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1).$$

## 例

有两台光谱仪  $I_x, I_y$ , 用来测量 9 块试块材料中某种金属的含量, 得到 9 对观察值如下.

$x$ (%)	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y$ (%)	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d=x-y$ (%)	0.10	0.09	-0.12	0.18	-0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

间能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异  
(取  $\alpha = 0.01$ )?

解: 假设

$$H_0 : \mu_D = 0, H_1 : \mu_D \neq 0$$

现在  $n = 9, t_{\alpha/2}(8) = t_{0.005}(8) = 3.3554$ , 拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \right| \geq 3.3554$$

由观察值得

$$\bar{d} = 0.06, s_d = 0.1227, |t| = \frac{0.06}{0.1227/\sqrt{9}} = 1.467 < 3.3554.$$

$|t|$  的值不落在拒绝域内, 故接受  $H_0$ , 认为两台仪器的测量结果并无显著异. □



## 例

做实验以比较人对红光或绿光的反应时间 (以 s 计). 测量数据如下:

红光 (x)	0.30	0.23	0.41	0.53	0.24	0.36	0.38	0.51
绿光 (y)	0.43	0.32	0.58	0.46	0.27	0.41	0.38	0.61
d=x-y	-0.13	-0.09	-0.17	0.07	-0.03	-0.05	0.00	-0.10

设  $D_i = X_i - Y_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  是来自正态总体  $N(\mu_D, \sigma_D^2)$  的样本,  $\mu_D, \sigma_D^2$  均未知, 试检验假设 (取显著性水平  $\alpha = 0.05$ )

$$H_0 : \mu_D \geq 0, H_1 : \mu_D < 0.$$

解:  $n = 8, \bar{d} = -0.0625, s_d = 0.0765$ , 而

$$\frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{8}} = -2.311 < -t_{0.05}(7) = -1.8946.$$

故拒绝  $H_0$ , 认为  $\mu_D < 0$ , 即认为人对红光的反应时间小于对绿光的反应时间, 也就是人对红光的反应要比绿光快. □

#### 4. $\mu$ 未知, 检验 $\sigma^2$ : $\chi^2$ 检验

设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma^2$  未知,  $X_1, \dots, X_n$  是总体  $X$  的样本, 双边检验

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

其中  $\sigma_0^2$  是已知常数.

- $\sigma^2$  的无偏估计量为样本方差  $S^2$ , 且在原假设成立时

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1).$$

- 检验统计量  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$
- 拒绝域

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq k_1, \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq k_2.$$

$P\{\text{拒绝 } H_0 | \text{当 } H_0 \text{ 为真}\}$

$$= P_{\sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq k_1, \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right\} = \alpha.$$

为计算方便, 习惯上取

$$P \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \right\} = \frac{\alpha}{2}, P \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right\} = \frac{\alpha}{2}.$$

- 所以,

$$k_1 = \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1),$$

$$k_2 = \chi_{\alpha/2}^2(n-1).$$

- 拒绝域

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1), \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1).$$

## 单边检验

右边检验  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2, \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

- 拒绝域

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_\alpha^2(n-1).$$

左边检验:  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

- 拒绝域

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1).$$

## 例

某厂生产的某种型号的电池, 其寿命 (以 h 计) 长期以来服从方差  $\sigma^2 = 5000$  的正态分布, 现有一批这种电池, 从它的生产情况来看, 寿命的波动性有所改变. 现随机取 26 只电池, 测出其寿命的样本方差  $s^2 = 9200$ . 问根据这数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化 (取  $\alpha = 0.02$ )?

解: 显著性水平  $\alpha = 0.02$  下检验假设

$$H_0 : \sigma^2 = 5000, \quad H_1 : \sigma^2 \neq 5000.$$

$$n = 26, \sigma_0^2 = 5000,$$

$$\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.01}^2(25) = 44.314,$$

$$\chi_{1-\alpha/2}^2(25) = \chi_{0.99}^2(25) = 11.524.$$

所以拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq 44.314 \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq 11.524.$$

由观察值  $s^2 = 9200$  得  $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 46 > 44.314$ , 所以拒绝  $H_0$ .



$\mu_1, \mu_2$  未知, 检验  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$ :  $F$  检验

设  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  是来自  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  的样本,  
 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  是来自  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的样本, 两样本相互独立. 并记  $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$  分别为两样本的均值和方差. 设  $\mu_1, \mu_2$  未知, 检验假设 (显著水平  $\alpha$ )

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

- 检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

- 在原假设成立时,

$$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- 拒绝域

$$F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1), \text{ 或 } F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1).$$

## 单边检验

左边检验:  $H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ ,  $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

- 检验统计量  $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ .
- 拒绝域  $F \leq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2-1, n_1-1)}$

右边检验:  $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ ,  $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

- 检验统计量  $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ .
- 拒绝域  $F \geq F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ .

## 例

用两种方法 (A 和 B) 测定冰自  $-0.72^{\circ}\text{C}$  转变为  $0^{\circ}\text{C}$  的水的融化热 (以  $\text{cal/g}$  计). 测得以下的数据: 方法 A

79.98	80.04	80.02	80.04	80.03	80.03	
80.04	79.97	80.05	80.03	80.02	80.00	80.02

方法 B:

80.02	79.94	79.98	79.97
79.97	80.03	79.95	79.97

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体  $N(\mu_A, \sigma_A^2)$  和  $N(\mu_B, \sigma_B^2)$ ,  $\mu_A, \mu_B, \sigma_A^2, \sigma_B^2$  均未知, 试检验假设 (取显著性水平  $\alpha = 0.01$ )

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2, \quad H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2.$$

解:  $n_1 = 13, n_2 = 8, \alpha = 0.01$ ,  
所以拒绝域为

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \geq F_{0.005}(12, 7) = 8.18,$$

或

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \leq F_{0.095}(12, 7) = \frac{1}{F_{0.005}(7, 12)} = \frac{1}{5.52} = 0.18.$$

现在  $s_A^2 = 0.024^2, s_B^2 = 0.031^2, s_A^2/s_B^2 = 0.60$ .

$$0.18 < 0.60 < 8.18$$

故接受  $H_0$ , 认为两总体方差相等.

□

两总体方差相等也称两总体具有方差齐性.

$\sigma^2$  已知, 检验  $\mu$  的假设

	双边假设	右边假设	左边假设
	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$
检验统计量	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$		
拒绝域	$ z  \geq z_{\alpha/2}$	$z \geq z_{\alpha}$	$z \leq -z_{\alpha}$

$\sigma^2$  未知, 检验  $\mu$  的假设 (★★★★★)

	双边假设	右边假设	左边假设
	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$
检验统计量	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$		
拒绝域	$ t  \geq t_{\alpha/2}$	$t \geq t_{\alpha}$	$t \leq -t_{\alpha}$

$\sigma_1^2, \sigma_2^2$  已知, 检验  $\mu_1 - \mu_2$  的假设

	双边假设	右边假设	左边假设
	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$
检验统计量	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$		
拒绝域	$ z  \geq z_{\alpha/2}$	$z \geq z_{\alpha}$	$z \leq -z_{\alpha}$



$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  未知, 检验  $\mu_1 - \mu_2$  的假设

	双边假设	右边假设	左边假设
	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$
检验统计量	$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$		
拒绝域	$ t  \geq t_{\alpha/2}$	$t \geq t_{\alpha}$	$t \leq -t_{\alpha}$

## $\mu$ 未知, 检验 $\sigma^2$ 的假设

	双边假设 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	右边假设 $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	左边假设 $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$
检验统计量	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$		
拒绝域	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2$  或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2$	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2$

## $\mu_1, \mu_2$ 未知, 检验 $\sigma_1^2/\sigma_2^2$ 的假设

	双边假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	右边假设 $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	左边假设 $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$
检验统计量	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$		
拒绝域	$F \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或  $F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$F \geq F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$F \leq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

## 成对数据, 检验 $\mu_D$ 的假设

	双边假设	右边假设	左边假设
	$H_0 : \mu_D = 0$	$H_0 : \mu_D \leq 0$	$H_0 : \mu_D \geq 0$
	$H_1 : \mu_D \neq 0$	$H_1 : \mu_D > 0$	$H_1 : \mu_D < 0$
检验统计量	$t = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$		
拒绝域	$ t  \geq t_{\alpha/2}$	$t \geq t_{\alpha}$	$t \leq -t_{\alpha}$