

## 《线性代数》第四章作业 (6 月 11 日提交)

临班 370

2023 年 6 月 3 日

班级: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

1. 判断题 (错误请给出说明或反例. 每题 2 分, 共 30 分):

(1) 两个同型矩阵  $A, B$  等价

$$\Leftrightarrow R(A) = R(B).$$

$\Leftrightarrow A, B$  具有相同的标准形.

$\Leftrightarrow A$  可以经过有限次初等行变换和初等列变换化为矩阵  $B$ .

$\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$ .

(2) (等价不变量) 若矩阵  $A \sim B$ , 则

①  $A, B$  具有相同的阶次.

②  $R(A) = R(B)$  (等价的完全不变量).

③  $A, B$  的行 (列) 向量组的线性相关性相同.

④ 若  $A, B$  为方阵, 则  $A$  可逆当且仅当  $B$  可逆.

(3) (行等价不变量) 若矩阵  $A \sim^r B$ , 则

①  $A, B$  具有相同的阶次.

②  $R(A) = R(B)$ .

③  $A, B$  的列向量组的线性相关性相同.

④ 若  $A, B$  为方阵, 则  $A$  可逆当且仅当  $B$  可逆.

⑤  $AX = 0$  和  $BX = 0$  同解 (即具有相同的解集).

- (4) 设  $A$  为方阵, 若  $A$  经过若干次初等行变换变为矩阵  $B$ , 则  $|A| = |B|$ .
- (5) 若  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解, 则  $R(A) = R(B)$ .
- (6) 两个向量组等价当且仅当这两个向量组的秩相等.
- (7) 向量组  $I: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可由  $II: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示, 则  $r \leq s$ .
- (8) 向量组  $I: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的秩为  $p$ , 向量组  $II: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的秩为  $q$ .  
若向量组  $I$  可以向量组  $II$  线性表示, 则  $p \leq q$ .
- (9) 矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  进行有限次初等行变换化为矩阵  $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ .  
若  $\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ , 则  $\beta_3 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2$ .
- (10) 若向量  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则  $\alpha_1, \alpha_3$  线性无关.
- (11)  $A_{m \times n} B_{n \times l} = O, B \neq 0$ , 则  $R(A) < n$ .
- (12) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 向量组  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 则  $\alpha_1$  可以由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表示,  $\alpha_4$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.
- (13)  $A_{m \times n}$  为列满秩矩阵, 即  $R(A) = n$   
 $\Leftrightarrow$  矩阵  $A$  的标准形为  $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$ .  
 $\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$ .  
 $\Leftrightarrow A$  可以经过有限次初等行变换化为矩阵  $B$ .  
 $\Leftrightarrow A$  的列向量组线性无关.  
 $\Leftrightarrow$  齐次线性方程组  $AX = 0$  只有唯一零解.  
 $\Rightarrow$  左消去律成立. 即若  $AX = AY$ , 则  $X = Y$ .  
 $\Rightarrow$  左保秩. 即  $R(AB) = R(B)$ .
- (14)  $A_{n \times n}$  为可逆矩阵  
 $\Leftrightarrow$  存在矩阵  $B$ , 使得  $AB = E$ .  
 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ , 即矩阵  $A$  为非奇异的.  
 $\Leftrightarrow R(A) = n$ , 即矩阵  $A$  为满秩的.  
 $\Leftrightarrow A \sim E_n \Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{s}{\sim} E$ .  
 $\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = E$ .  
 $\Leftrightarrow A$  可以经过有限次初等行变换化为矩阵  $E$ .  
 $\Leftrightarrow A$  的列 (行) 向量组线性无关.  
 $\Leftrightarrow$  齐次线性方程组  $AX = 0$  只有唯一零解.  
 $\Leftrightarrow A$  没有零特征值.  
 $\Rightarrow$  左右消去律成立. 即若  $AX = AY$ , 则  $X = Y$ ; 若  $XA = YA$ , 则  $X = Y$ .

$\Rightarrow$  保秩. 即  $R(AB) = R(BA) = R(B)$ .

(15)  $R(A_{m \times n}) = 1$

$\Leftrightarrow$  存在非零向量  $\alpha, \beta$ , 使得  $A = \alpha\beta^T$ .

$\Leftrightarrow A$  的行 (列) 向量组两两成比例.

$\Rightarrow$  若  $A$  为方阵, 则  $A^k = (\alpha^T \beta)^{k-1} A$ .

2. 填空题 (每空 3 分, 共 18 分):

(1) 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是它的 3 个解向量.  $\alpha_1 = (2, 3, 4, 5)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (2, 4, 6, 8)^T$ , 则该方程组的通解为\_\_\_\_\_.

(2) 已知 4 阶矩阵  $A$  的秩为 3,  $\alpha_1, \alpha_2$  为非齐次线性方程  $AX = \beta (\beta \neq 0)$  的两个不相等的解, 则  $AX = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.

(3) 设 3 阶方阵  $A$  的各行元素之和均为 0, 且  $R(A) = 2$ , 则  $AX = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.

(4) 设  $n$  阶方阵  $A$  的各行元素之和均为 0, 且  $R(A) = n - 1$ , 则  $AX = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.

(5) 已知向量组  $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 = (2, 3, 4, 5)^T, \alpha_3 = (3, 4, 5, 6)^T, \alpha_4 = (4, 5, 6, 7)^T$ , 则该向量组的秩为\_\_\_\_\_.

(6) 向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$  线性相关, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

3. 计算题 (每题 10 分, 共 40 分):

(1) 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$  列向量组的一个最大无关组, 并将

其余列向量用最大无关组线性表示.

(2)  $\lambda$  取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2, \end{cases}$$

① 有唯一解; ② 无解; ③ 无穷多个解, 并求通解.

(3) 设矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ , 其中  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关,  $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ ,  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ . 求方程  $AX = \beta$  的通解.

$$(4) \text{ 求解非齐次线性方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 & = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = 1. \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 3 \end{cases}$$

4. 证明题 (每题 4 分, 共 12 分):

(1) 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关,

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \end{cases}$$

证明  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关.

(2)  $A_{m \times n} B_{n \times s} = 0$ , 证明  $R(A) + R(B) \leq n$ .

(3) 证明:  $R(A^T A) = R(A)$ .

(提示: 先证  $A^T A X = 0$  和  $A X = 0$  同解. 然后由解集的秩  $R_S = n - r$  得证.)

5. 附加题 (20 分):

(1) 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关,  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) K_{n \times m}$ . 证明向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  的秩为  $R(K)$ .

矩阵的语言: 已知  $A$  列满秩, 证明  $R(AK) = R(K)$ .

提示: 设  $R(K) = r$ , 取矩阵  $K$  列向量组的最大无关组, 不妨设为  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ . 则

$$\beta_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \gamma_i.$$

所以证明  $\beta_1, \dots, \beta_r$  为  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  的最大无关组即可.

根据最大无关组定义只需要证明: ①  $\beta_1, \dots, \beta_r$  线性无关; ② 任意  $\beta_i$  可由  $\beta_1, \dots, \beta_r$  线性表示.