

线性代数-18

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 2 日

本次课内容

1. 方阵的相似对角化
2. 实对称矩阵的正交相似对角化

相似对角化

定义

若存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或可对角化), Λ 为 A 的相似标准形.

- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

相似对角化

定义

若存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或可对角化), Λ 为 A 的相似标准形.

- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 对角化问题: 是否存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

引入

- 矩阵 A 可相似对角化

- 矩阵 A 可相似对角化
 \Leftrightarrow 存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为对角阵.

- 矩阵 A 可相似对角化
 - \Leftrightarrow 存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为对角阵.
 - \Leftrightarrow 存在可逆阵 P , 使得 $AP = P\Lambda$.

- 矩阵 A 可相似对角化

\Leftrightarrow 存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为对角阵.
 \Leftrightarrow 存在可逆阵 P , 使得 $AP = P\Lambda$. 令 $P = (P_1, \dots, P_n)$, 则

$$A(P_1, \dots, P_n) = (P_1, \dots, P_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 P_1, \dots, \lambda_n P_n)$$

- 矩阵 A 可相似对角化

\Leftrightarrow 存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为对角阵.
 \Leftrightarrow 存在可逆阵 P , 使得 $AP = P\Lambda$. 令 $P = (P_1, \dots, P_n)$, 则

$$\begin{aligned} A(P_1, \dots, P_n) &= (P_1, \dots, P_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 P_1, \dots, \lambda_n P_n) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow AP_i = \lambda_i P_i, i = 1, 2, \dots, n, P_1, \dots, P_n$ 线性无关.

- 矩阵 A 可相似对角化

\Leftrightarrow 存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为对角阵.
 \Leftrightarrow 存在可逆阵 P , 使得 $AP = P\Lambda$. 令 $P = (P_1, \dots, P_n)$, 则

$$\begin{aligned} A(P_1, \dots, P_n) &= (P_1, \dots, P_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 P_1, \dots, \lambda_n P_n) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow AP_i = \lambda_i P_i, i = 1, 2, \dots, n, P_1, \dots, P_n$ 线性无关.
 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

可对角化

定理 (可对角化定理)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

可对角化

定理 (可对角化定理)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵, 比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

可对角化

定理 (可对角化定理)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵, 比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值, 则 A 可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.

定理 (可对角化定理)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵, 比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值, 则 A 可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.
- 若 n 阶方阵 A 可相似对角化, 则可通过求 A 的所有线性无关特征向量来求可逆阵 P .
- 可逆阵 P 不唯一, 并且可能是复矩阵.

例题

例 (例 1)

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

是否可对角化？若能，

- 1) 求可逆阵 P 和对角阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;
- 2) 求 $\varphi(A) = A^k$. (与 Lecture-6 例题对比)

例题

例 (例 1)

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

是否可对角化？若能，

- 1) 求可逆阵 P 和对角阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;
- 2) 求 $\varphi(A) = A^k$. (与 Lecture-6 例题对比)

解法：1. 求特征多项式 $f(\lambda) = |A - \lambda E|$, 由 $f(\lambda) = 0$ 得特征值;
2. 依次解 $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的基础解系, 得特征值 λ_i 对应的特征向量;
3. 给出可逆阵 P .

例题

例 (例 4)

问 t 取何值时, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可对角化.

例题

例 (例 4)

问 t 取何值时, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可对角化.

- 设 n 阶矩阵 A 的每个特征值 λ_i 的重数为 n_i ; $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的基础解系包含向量的个数为 $m_i = n - R(A - \lambda_i E)$. 则

A 可对角化 \Leftrightarrow 对每个特征值 λ_i , 都有 $n_i = m_i$.

例题

例 (例 4)

问 t 取何值时, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可对角化.

- 设 n 阶矩阵 A 的每个特征值 λ_i 的重数为 n_i ; $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的基础解系包含向量的个数为 $m_i = n - R(A - \lambda_i E)$. 则

A 可对角化 \Leftrightarrow 对每个特征值 λ_i , 都有 $n_i = m_i$.

- n_i 称为特征值 λ_i 的代数重数, m_i 称为特征值 λ_i 的几何重数.

例题

例 (例 5)

证明 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似.

例题

例 (例 5)

证明 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似.

- 若 A 可对角化, 则 $A \xrightarrow{\text{相似}} B \implies$ 特征值相同.

即对于可对角化矩阵, 特征值是完全相似不变量.

实对称的正交相似对角化

定义

若存在正交阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 A 可以正交相似对角化.

实对称的正交相似对角化

定义

若存在正交阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 A 可以正交相似对角化.

- 正交相似对角化问题: 是否存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP$$

为对角阵.

实对称的正交相似对角化

定理 (定理 7)

实矩阵 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

定理 (定理 7)

实矩阵 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

- 性质 1: 实对称阵的特征值必为实数.
- 性质 2: 实对称阵的不同特征值对应的特征向量必正交.
- 性质 3: 实对称阵的每个特征值的代数重数与几何重数相等.

实对称的正交相似对角化

定理 (定理 7)

实矩阵 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

- 性质 1: 实对称阵的特征值必为实数.
- 性质 2: 实对称阵的不同特征值对应的特征向量必正交.
- 性质 3: 实对称阵的每个特征值的代数重数与几何重数相等.

推论 (例 2)

实对称矩阵 $A \xrightarrow{\text{相似}} B \iff$ 特征值相同.

例题 ★★

例 (例 1)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一个正交阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

例题 ★★

例 (例 1)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一个正交阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

- 解法:
1. 计算 $|A - \lambda E|$, 求 A 的特征值;
 2. 求 $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的基础解系, 得 A 的线性无关特征向量;
 3. 将基础解系正交化、单位化;
 4. 写 $P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$, 注意特征值与特征向量对应顺序.

实对称矩阵的多项式

- A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^T$.

实对称矩阵的多项式

- A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^T$.

例 (197 页斐波那契数列通项)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求 A^n 和 $(1, 0)A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

下次课预告：二次型和对称矩阵

例 (P58 习题 3-(5))

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3\end{aligned}$$

下次课预告：二次型和对称矩阵

例 (P58 习题 3-(5))

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

- 二次型 $f(X) = X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- Section-5、6、7 的中心任务: 化简二次型/对称阵.
寻找可逆(正交)线性变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^TP^TAPY = k_1y_1^2 + \cdots + k_ny_n^2$$

矩阵语言: 寻找可逆(正交)阵 P , 使得 P^TAP 为对角阵.

下次课预告：二次型和对称矩阵

例 (P58 习题 3-(5))

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

- 二次型 $f(X) = X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- **Section-5、6、7** 的中心任务: 化简二次型/对称阵.
寻找可逆(正交)线性变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^TP^TAPY = k_1y_1^2 + \cdots + k_ny_n^2$$

矩阵语言: 寻找可逆(正交)阵 P , 使得 P^TAP 为对角阵.

- 方阵相似对角化;

- n 阶矩阵 A 可相似对角化

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

$\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关特征向量

\Leftrightarrow 每个特征值的重数 = 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数
(代数重数 = 几何重数)

- 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
- 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
- 若存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}$.

- 实对称阵的正交相似对角化.

- A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;

- n 阶矩阵 A 可相似对角化

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

$\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关特征向量

\Leftrightarrow 每个特征值的重数 = 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数
(代数重数 = 几何重数)

- 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
- 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
- 若存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}$.

- 实对称阵的正交相似对角化.

- A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;

- n 阶矩阵 A 可相似对角化

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

$\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关特征向量

\Leftrightarrow 每个特征值的重数 = 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数
(代数重数 = 几何重数)

- 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
- 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
- 若存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}$.

- 实对称阵的正交相似对角化.

- A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;

- n 阶矩阵 A 可相似对角化

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

$\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关特征向量

\Leftrightarrow 每个特征值的重数 = 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数
(代数重数 = 几何重数)

- 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
- 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
- 若存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}$.

- 实对称阵的正交相似对角化.

- A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^T$.

- 方阵相似对角化;

- n 阶矩阵 A 可相似对角化

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

$\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关特征向量

\Leftrightarrow 每个特征值的重数 = 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数
(代数重数 = 几何重数)

- 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
- 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
- 若存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}$.

- 实对称阵的正交相似对角化.

- A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^T$.

例题

例 (例 3)

已知 3 阶实对称矩阵的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为对应于特征值 -1 的特征向量. 求矩阵 A .

例题

例 (例 4)

已知 3 阶实对称矩阵的各行元素之和均为 3, 且向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是线性方程组 $AX = 0$ 的两个解. 求矩阵 A .

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 2 日