Lec-5. 随机变量、离散型随机变量

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：http://wulisu.cn

目录

1. 随机变量
2. 离散型随机变量
3. 典型离散型随机变量
   - （0-1）分布
   - 二项分布
   - 泊松分布
   - 几何分布

试验结果的量化

对样本空间 S 中的样本点 e 的描述一般有以下两种情况.

- 量化的:
  - 降雨量;
  - 候车人数;
  - 发生交通事故的次数;···
- 非量化的:
  - 明天天气 (晴, 多云···);
  - 化验结果 (阳性, 阴性);···

试验结果的量化

对样本空间 S 中的样本点 e 的描述一般有以下两种情况.

- 量化的:
  - 降雨量;
  - 候车人数;
  - 发生交通事故的次数;$\cdots$
- 非量化的:
  - 明天天气 (晴, 多云$\cdots$);
  - 化验结果 (阳性, 阴性);$\cdots$

中心问题: 将试验结果数量化.

引例

例

在一袋中有红球, 白球, 任意取一个观察颜色.

$S = \{红, 白\}$,

令 $X(e) = \begin{cases} 1 & e = 红; \\ 0 & e = 白. \end{cases}$

引例

例

在一袋中有红球，白球，任取一个观察颜色.

$S = \{红，白\}$,

令 $X(e) = \begin{cases} 1 & e = 红; \\ 0 & e = 白. \end{cases}$

X 将样本空间 S 数量化

$$X : S \longrightarrow \{0, 1\}.$$

随机变量

定义

设随机试验的样本空间为 $S=\{e\}$, 若

$$X=X(e)$$

为定义在 S 上的实函数, 则称 $X=X(e)$ 为随机变量.

注

(1) 随机变量 $X: S \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个映射, 其自变量具有随机性;

注

(1) 随机变量 $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个映射, 其自变量具有随机性;

(2) 随机事件可表示为 $A = \{e : X(e) \in I\} = \{X \in I\}$, $I \subset \mathbb{R}$;

注

(1) 随机变量 $X: S \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个映射, 其自变量具有随机性;

(2) 随机事件可表示为
$A = \{e : X(e) \in I\} = \{X \in I\}, I \subset \mathbb{R}$;

(3) 对于 $i \neq j$, 则必有 $\{X = i\} \cap \{X = j\} = \varnothing$, 一对一;

注

(1) 随机变量 $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个映射, 其自变量具有随机性;

(2) 随机事件可表示为
$A = \{e : X(e) \in I\} = \{X \in I\}$, $I \subset \mathbb{R}$;

(3) 对于 $i \neq j$, 则必有 $\{X = i\} \cap \{X = j\} = \varnothing$, 一对一;

(4) 随机变量一般用大写英文字母 X, Y, Z 或希腊字母 ξ, η 表示.

例

一枚硬币抛三次, 观察正反.

样本空间为

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}.$$

若 X 表示 3 次中出现正面的次数, 则

- $A = \underline{\{\text{正面出现了一次}\}} = \{HTT, TTH, THT\}$
  $= \{e : X(e) = 1\} = \underline{\{X = 1\}};$
- $B = \{3\text{ 次出现的情况相同}\} = \{X = 0 \text{ or } 3\};$
- $C = \{\text{正面至少出现一次}\} = \{X \geq 1\}.$

常见的两类随机变量:

- 离散型随机变量;
- 连续型随机变量.

离散型随机变量

定义

若随机变量 X 的取值为有限个或可数个，则称 X 为离散型随机变量.

例

- 观察掷一个骰子出现的点数，则 X 的取值: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- 记 X 为连续射击命中时的射击次数，则 $X = 1, 2, \ldots$

离散型随机变量的概率分布律 (简称分布律)

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

离散型随机变量的概率分布律 (简称分布律)

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

分布律的内容 $\begin{cases} \text{随机变量的所有可能取值} \\ \text{取每个可能取值相应的概率} \end{cases}$

离散型随机变量的概率分布律 (简称分布律)

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

分布律的内容 $\begin{cases} \text{随机变量的所有可能取值} \\ \text{取每个可能取值相应的概率} \end{cases}$

分布律的另一表示形式:

$P(X = x_k) = p_k, \ \ k = 1, 2, \cdots$

性质

- 非负性: $p_k \geq 0$;
- 规范性: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

性质

- 非负性: $p_k \geq 0$;
- 规范性: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

例

掷骰子.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

例

设一汽车在开往目的地的道路上需要经过 4 组信号灯, 每组信号灯以 $\frac{1}{2}$ 的概率允许或禁止通过, 以 X 表示汽车首次停下时, 它已通过的信号灯的组数. (每组 2 信号灯的工作是相互独立的) 求 X 的分布律.

例

设一汽车在开往目的地的道路上需要经过 4 组信号灯，每组信号灯以 $\frac{1}{2}$ 的概率允许或禁止通过，以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的组数. (每组 2 信号灯的工作是相互独立的) 求 X 的分布律.

解：设 $p = \frac{1}{2}$ 表示每组信号灯禁止汽车通过的概率.

X	0	1	2	3	4
P_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

$P\{X = k\} = (1-p)^k p = \frac{1}{2^{k+1}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4.$ $\square$

例

设随机变量 X 所有可能取值为 $1, 2, ..., n$, 且 $P\{X = k\} = ak$, $k = 1, ...n$. 求 a.

例

设随机变量 X 所有可能取值为 $1, 2, \dots, n$, 且 $P\{X = k\} = ak$, $k = 1, \dots n$. 求 a.

解: 由分布律的规范性,

$$\sum_{k=1}^{n} P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{n} ak = a\frac{n(n+1)}{2} = 1,$$

得 $a = \frac{2}{n(n+1)}$. □

例

设一袋中装有标号为 $1, 2, 2, 3, 3, 3$ 数字的六个球. 现从中任取一球, 用 X 表示取到球上标有的数字. 求

(1) X 的分布律;

(2) $P\{X \le \frac{2}{7}\}$, $P\{0.5 \le X \le 2\}$.

解: (1) X 的所有可能取值为 $1, 2, 3.$

$p\{X=1\}=\frac{1}{6}$, $P\{X=2\}=\frac{1}{3}$, $P\{X=2\}=\frac{1}{2}$.

X	1	2	3
P_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

(2) $P\{X \leq \frac{2}{7}\} = P(\varnothing) = 0$,

$P\{0.5 \leq X \leq 2\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} = \frac{1}{2}$. $\square$

典型的离散型随机变量：

- （0-1）分布；
- 二项分布；
- 泊松分布；
- 几何分布.

（0-1）分布

定义

若 X 的概率分布律为

X	0	1
P_k	$1-p$	p

其中 $0 < p < 1$, 则称 X 服从**（0-1）分布**或**两点分布**. 记为 $X \sim$ 0-1(p) 或者 $X \sim b(1, p)$.

（0-1）分布

定义

若 X 的概率分布律为

X	0	1
P_k	$1-p$	p

其中 $0 < p < 1$, 则称 X 服从（0-1）分布或两点分布. 记为 $X \sim$ 0-1(p) 或者 $X \sim b(1,p)$.

其分布律亦可写为：

$$P\{X=k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1.$$

若样本空间只包含两个元素 $S = \{e_1, e_2\}$, 则总能在 S 上定义一个服从 (0-1) 分布的随机变量:

$$X = \begin{cases} 0, & e = e_1; \\ 1, & e = e_2. \end{cases}$$

若样本空间只包含两个元素 $S = \{e_1, e_2\}$, 则总能在 S 上定义一个服从 (0-1) 分布的随机变量:

$$X = \begin{cases} 0, & e = e_1; \\ 1, & e = e_2. \end{cases}$$

比如:

- 质检是否合格
- 考试是否通过
- 对新生婴儿的性别进行登记
- 马路乱停车是否会受罚
- 检验种子是否发芽
- 表白是否成功

伯努利 (Bernoulli) 试验

- 只有两个可能结果的试验，称为伯努利试验；
- 将一个伯努利试验独立重复进行 n 次，称为 n 重伯努利试验.

伯努利 (Bernoulli) 试验

- 只有两个可能结果的试验, 称为伯努利试验;
- 将一个伯努利试验独立重复进行 n 次, 称为 n 重伯努利试验.

在 n 重伯努利试验中,

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

其中 $k=0,1,\ldots,n$. 上式称为二项概率公式.

二项分布

定义

若 X 的概率分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,...,n$$

其中 $n>0, 0<p<1$, 则称 X 服从参数 n,p 的二项分布, 记 $X\sim b(n,p)$.

二项分布

定义

若 X 的概率分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,...,n$$

其中 $n>0, 0<p<1$, 则称 X 服从参数 n,p 的二项分布, 记 $X\sim b(n,p)$.

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	q^n

$n = 1$ 时, 二项分布化为

$$P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1$$

所以 (0-1) 分布为 $b(1, p)$.

例

按规定, 某种型号电子元件的使用寿命超过 $1500h$ 的为一级品. 已知某一大批产品的一级品概率为 0.2, 现从中抽查 20 次, 问 20 只元件中恰有 k 只为一级品的概率.

解: 不放回抽样, 但由于总量很大, 抽查的数量相对于来说又很小, 可近似当作放回抽样.
我们把检查一只元件看它是否为一级品看成一次试验, 20 只看成 20 次伯努利试验, 以 X 记 20 只一级品的只数. $X \sim b(20, 0.2)$,
$P\{X = k\} = C_{20}^{k} \cdot 0.2^{k} \cdot 0.8^{20-k}$, $k = 0, 1, ..., 20$. □

$P\{X = 0\} = 0.012$, $P\{X = 1\} = 0.058$, $P\{X = 4\} = 0.218$, $P\{X = 5\} = 0.125$,
当 k 增加时, $P\{X = k\}$ 先增到最大值, 随后减少.
对于固定的 n, p, 二项分布都具有这一性质.

例

某人进行射击, 假设每次命中率为 0.02, 独立射击 400 次. 求至少击中两次的概率.

例

某人进行射击，假设每次命中率为 0.02，独立射击 400 次．求至少击中两次的概率．

解：将一次射击看成一次试验．设击中次数为 X，$X \sim b(400, 0.02)$．

$P\{X = k\} = C_{400}^{k} 0.02^{k} \cdot 0.98^{400-k}$, $k = 0, 1, ..., 400.$

$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - 0.98^{400} - 400 \cdot 0.02 \cdot 0.98^{399} = 0.9972.$ $\square$

例

设有 80 台同类型设备, 各台工作是相互独立的, 发生故障的概率是 0.01, 且一台设备故障能由一人处理. 考虑两种配备维修工人的方案.

(1) 由 4 人维护, 每人 20 台;

(2) 3 人共同维护 80 台.

比较两种方法在设备发生故障时不能及时维护的概率.

解: (1), 以 X 记由 1 人维护的 20 台中同一时刻发生故障的台数, A_i 表示第 i 人维护的 20 台中发生故障时不能及时维修. 则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P(A_1) = P\{X \geq 2\}$

$X \sim b(20, 0.01)$, $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - 0.99^{20} - 20 \cdot 0.01 \cdot 0.99^{19} = 0.0169.$

(2), Y 记 80 台中同一时刻发生故障的台数.

$Y \sim b(80, 0.01)$

$$P\{Y \geq 4\} = 1 - \sum_{k=0}^{3} C_{80}^{k} 0.01^k \cdot 0.99^{80-k} = 0.0087.$$

在后一种情况尽管任务重了, 但工作效率提高了. 工作方法很重要.

泊松 (Poisson) 分布

定义

若 X 的概率分布律为：

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\qquad k=0,1,2,\ldots$$

其中 $\lambda>0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X\sim\pi(\lambda)$.

- 非负性 $P\{X=k\} \geq 0.$
- 规范性

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

泊松分布的用途

如果某事件以固定强度 λ, 随机且独立地出现. 该事件在单位时间内出现的次数可以看成泊松分布. 比如:

- 一本书一页中的印刷错误数;
- 某人一天收到的微信数量;
- 某医院在一天中的急诊患者人数;
- 某放射性物质射出的粒子;
- 显微镜下某区域中的白血球.

泊松定理

用泊松分布来逼近二项分布的定理

定理

设 $\boldsymbol{\lambda} > 0$ 是一常数，n 是任意正整数，设 $np_n = \boldsymbol{\lambda}$，则对于任一固定的非负整数 k，有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\boldsymbol{\lambda}^k e^{-\boldsymbol{\lambda}}}{k!}.$$

证明: 记 $p_n = \frac{\lambda}{n}$.

$$C_n^k {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left[1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

k 固定, $n \to \infty$ 时,
$1 \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdots (1-\frac{k-1}{n}) \to 1$, $(1-\frac{\lambda}{n})^n \to e^{-\lambda}$, $(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} \to 1$.
得证. $\square$

条件 $np_n = \boldsymbol{\lambda}$ 意味着 n 很大时, p_n 必定很小. 二项分布的概率值可以以 $\boldsymbol{\lambda} = np$ 的泊松分布值近似.

$$C_n^k {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} \approx \frac{\boldsymbol{\lambda}^k e^{-\boldsymbol{\lambda}}}{k!}.$$

例

计算机硬件公司制造特殊型号的微型芯片，次品率达 0.1%，各芯片成为次品相互独立. 求 1000 只产品中至少有 2 只次品的概率. 以 X 记产品中的次品数，$X \sim b(1000, 0.001)$.

例

计算机硬件公司制造特殊型号的微型芯片，次品率达 0.1%，各芯片成为次品相互独立．求 1000 只产品中至少有 2 只次品的概率．以 X 记产品中的次品数，$X \sim b(1000, 0.001)$.

解：

$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - 0.999^{1000} - 1000 \cdot 0.999^{999} \cdot 0.001 \approx 0.2642411.$

利用 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. $(\lambda = np)$

$\lambda = 1000 \times 0.001 = 1$, $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - e^{-1} - e^{-1} \approx 0.2642411.$ □

一般当 $n \geq 20$, $P \leq 0.05$（另一种说法 $n > 10$, $P < 0.1$）时，用泊松分布近似计算.

几何分布

定义

若 X 的概率分布律为:

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\ldots$$

其中 $0<p<1$, 则称 X 服从参数为 p 的几何分布. 记为 $X\sim \mathsf{Geom}(p)$.

X	1	2	...	k	...
P_k	p	qp	...	$q^{k-1}p$	...

用途: 在重复多次的伯努利试验中, 试验进行到某种结果出现第一次为止, 此时的试验总次数服从几何分布.

例

设某批产品的次品率为 p, 对该产品作有放回的抽样调查, 直到第一次抽到一只次品为止. 那么所抽到的产品数 X 是一个随机变量, 求 X 的分布律.

例

设某批产品的次品率为 p, 对该产品作有放回的抽样调查, 直到第一次抽到一只次品为止. 那么所抽到的产品数 X 是一个随机变量, 求 X 的分布律.

解: $X=1,2,...,$ $A_i=\{$第i个产品是正品$\}$,

$$
\begin{aligned}
P\{X=k\} &= P(A_1A_2...A_{k-1}\bar{A}_k) \\
&= P(A_1)...P(A_{k-1})P(\bar{A}_k) \\
&= (1-p)^{k-1}p.
\end{aligned}
$$

□