

# 线性代数-1

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学, 数学学院

主讲：吴利苏，数学学院

邮箱：wulisu@sdust.edu.cn （最佳联系方式）

主页：<http://wulisu.cn/>

办公室：实训楼 1708(右)

QQ 群：524610124 (线性代数 2022)



教材：《线性代数》第六版，同济大学

参考书：Introduction to linear algebra, Gilbert Strang


作业：周一课前收发/扫描全能王 pdf 格式

收件人 吴利苏<wulisu@sdust.edu.cn>;

[添加抄送](#) - [添加密送](#) | [分别发送](#)

主题 土木4班-姓名-学号-线代作业2

 继续添加 |   超大附件  照片 |   文档  表情  截屏  地图  样式

 土木4班-姓名-学号-线代作业2.pdf (11.43M) [添加到正文](#) [删除](#)

正文 **B** *I* U          <HTML>

吴利苏 老师,

你好。附件是 土木/化工 张三(学号) 的第 3 周线性代数作业, 请查收。

张三

- 最终成绩 = 期末成绩 \*0.6+ 线上成绩 \*0.2+ 平时成绩 \*0.2
- 线上成绩：期末考试 30 分，章测试 30 分，平时成绩 40 分（其中平时成绩中学习进度 30 分，学习行为 10 分）
- 平时成绩（20 分）：少交一次作业扣 2 分，迟交一次作业扣 1 分，旷课一次扣 5 分.

# 本次课内容

1. 线性代数导论

2、行列式的定义 1

# 何为线性代数？

---

- 代数 (Algebra)

# 何为线性代数？

- 代数 (Algebra)
  - 数：整数 ( $\mathbb{Z}$ )、有理数 ( $\mathbb{Q}$ )、实数 ( $\mathbb{R}$ )、复数 ( $\mathbb{C}$ );

# 何为线性代数？

- 代数 (Algebra)

- 数：整数 ( $\mathbb{Z}$ )、有理数 ( $\mathbb{Q}$ )、实数 ( $\mathbb{R}$ )、复数 ( $\mathbb{C}$ );
- 结构：

{ 一元结构：相反数、开根号、 $x^2$ 、 $\sin x$ ;  
二元结构： $+$   $-$   $\times$   $/$ ;  
更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、...



# 何为线性代数？

- 代数 (Algebra)

- 数：整数 ( $\mathbb{Z}$ )、有理数 ( $\mathbb{Q}$ )、实数 ( $\mathbb{R}$ )、复数 ( $\mathbb{C}$ );
- 结构：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2、\sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \dots \end{array} \right.$$

- 线性代数 (Linear algebra)

# 何为线性代数？

- 代数 (Algebra)

- 数：整数 ( $\mathbb{Z}$ )、有理数 ( $\mathbb{Q}$ )、实数 ( $\mathbb{R}$ )、复数 ( $\mathbb{C}$ );
- 结构：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2、\sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \dots \end{array} \right.$$

- 线性代数 (Linear algebra)

- 集合 + 线性结构

# 何为线性代数？

- 代数 (Algebra)

- 数：整数 ( $\mathbb{Z}$ )、有理数 ( $\mathbb{Q}$ )、实数 ( $\mathbb{R}$ )、复数 ( $\mathbb{C}$ );
- 结构：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2、\sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \dots \end{array} \right.$$

- 线性代数 (Linear algebra)

- 集合 + 线性结构
  - 线性性质

$$f(k \cdot A + l \cdot B) = k \cdot f(A) + l \cdot f(B)$$

# 何为线性代数？

- 代数 (Algebra)

- 数：整数 ( $\mathbb{Z}$ )、有理数 ( $\mathbb{Q}$ )、实数 ( $\mathbb{R}$ )、复数 ( $\mathbb{C}$ );
- 结构：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2、\sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \dots \end{array} \right.$$

- 线性代数 (Linear algebra)

- 集合 + 线性结构
  - 线性性质

$$f(k \cdot A + l \cdot B) = k \cdot f(A) + l \cdot f(B)$$

- 线性代数就是具有线性结构的代数。

# 何为线性代数？

- 代数 (Algebra)

- 数：整数 ( $\mathbb{Z}$ )、有理数 ( $\mathbb{Q}$ )、实数 ( $\mathbb{R}$ )、复数 ( $\mathbb{C}$ );
- 结构：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2, \sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \dots \end{array} \right.$$

- 线性代数 (Linear algebra)

- 集合 + 线性结构
  - 线性性质

$$f(k \cdot A + l \cdot B) = k \cdot f(A) + l \cdot f(B)$$

- 线性代数就是具有线性结构的代数.
- 例如：数、向量、线性方程组、矩阵、内积、行列式.

# 线性代数的中心问题：解线性方程组

例 (鸡兔同笼)

今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何？

解：设鸡  $x$  兔  $y$ , 则

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases} \quad (1)$$

消元得

$$\begin{cases} x = \frac{35 \times 4 - 94 \times 1}{1 \times 4 - 2 \times 1} = 23 \\ y = \frac{94 \times 1 - 35 \times 2}{1 \times 4 - 2 \times 1} = 12 \end{cases}$$

故鸡兔各 23、12 只.

# 线性方程组和行列式

记

$$a \times d - b \times c \triangleq \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{cases} x = \frac{35 \times 4 - 94 \times 1}{1 \times 4 - 2 \times 1} = \frac{\begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 94 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} \\ y = \frac{94 \times 1 - 35 \times 2}{1 \times 4 - 2 \times 1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 2 & 94 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

- 将线性方程组 (1) 中未知量的系数表示为向量的形式，则

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 35 \\ 95 \end{pmatrix}$$

- 将线性方程组 (1) 中线性方程表示为内积的形式，则

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 35 \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 94 \end{cases}$$



- 将线性方程组 (1) 中线性方程表示为内积的形式, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 94 \end{pmatrix}$$

- 通过对矩阵的讨论和计算, 就能解决:
  - 线性方程组是否有解? 有唯一解? 有无穷解?
  - 线性方程组有解时, 解的形式和解之间的关系.
  - 线性方程组无解时, 可分析近似解.
  - 对大规模线性方程组 (未知量多、方程多、未知量与方程个数不等), 亦有可分析的手段.

# 如何学（好）线性代数？

- 学习线代可能的困难：概念较抽象、知识点较零散、做题时可能不容易有思路.

本课程的学习步骤：

- Step-1: 务必掌握理解基本概念、定义和结论;
- Step-2: 熟悉应用基本计算方法;
- Step-3: 学完每章节后及时整理回顾, 通过做题把零散知识点联系在一起.

# 第一章 行列式 (determinant)

- 1) 行列式的定义: 1.1–1.3
- 2) 行列式的性质: 1.4
- 3) 行列式的展开: 1.5
- 4) 行列式的计算

# 二阶行列式

## 1.1、二阶行列式

二阶行列式就是一个  $2 \times 2$  数阵表示的一个数,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中

- $a_{ij}$  表示行列式的第  $i$  行  $j$  列的元素, 称为行列式的  $(i, j)$  元;
- $a_{11}, a_{22}$  称为主对角元,  $a_{12}, a_{21}$  称为副对角元;
- 对角线法则: 二阶行列式的值为主对角元之积减去副对角元之积的差.

# $n$ 阶行列式

定义 ( $n$  阶行列式的递归定义)

$n$  阶行列式为  $n^2$  个数排成  $n$  行  $n$  列的数阵决定的一个数，其值可以递归定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

其中  $M_{ij}$  为划掉行列式的第  $i$  行和第  $j$  列, 得到的  $n-1$  阶行列式, 称为  $(i,j)$  元  $a_{ij}$  的余子式.

- $n$  阶行列式通常可简记为  $D$ 、 $D_n$  或  $\det(a_{ij})$ ,  $a_{ij}$  为行列式的  $(i,j)$  元;
- 行列式的本质是数.

## 例题

例 (下三角行列式)

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证明:

## 例题

例 (对角行列式)

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证明:



## 例题

例 (三阶行列式的对角线法则)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

## 课堂练习

例

分别用行列式的递归定义和对角线法则计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

解:

- 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

- $n$  阶行列式的递归定义

$$D_n = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}M_{1n}$$

- 利用行列式的递归定义证明 P3 公式 (6), 尝试思考等号右边每一项的正负号和下标之间的关系.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

- P21. 1-(1)(2)、3、4-(5).

# 欢迎提问和讨论

主讲: 吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)