

《线性代数》第三章作业 (5 月 28 日提交)

临班 370

2023 年 6 月 21 日

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

1. 判断题 (错误请给出说明或反例. 每题 2 分, 共 20 分): **红错**

(1) 行等价的两个增广矩阵对应的线性方程组同解.

(2) 等价的两个增广矩阵对应的线性方程组同解. (**行等价**)

(3) n 阶方阵 A 可经过若干次初等列变换变为矩阵 B , 则存在可逆矩阵 P 使得 $PA = B$. (**左行右列**)

(4) $R(A + B) \geq R(A) + R(B)$. (**$B = -A = E$**)

(5) $R(A) = R(B)$, 则 A 与 B 等价. (**同型**)

(6) 任意矩阵 A 可以写成初等矩阵的乘积. (**可逆阵**)

(7) A 为方阵, A 可逆当且仅当 $AX = 0$ 有非零解. (**A 可逆当且仅当 $AX = 0$ 有唯一零解**)

(8) 若 $AX = AY, A \neq O$, 则 $X = Y$. (**A 列满秩**)

(9) A 列满秩, $AX = AY$, 则 $X = Y$.

(10) $R(A) = r$, 则 A 的 $r - 1$ 阶子式都不为 0, 至少一个 r 阶子式为 0.

(**$R(A) = r$: 任意 $r + 1$ 阶子式都为 0, 存在一个非零 r 阶子式**)

3. 计算题 (每题 20 分, 共 80 分):

(1) 用初等变换求解矩阵方程 $AX = 2X + A$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

提示: 化到行最简形, 由 $A - 2E \sim E$ 说明 A 可逆 (不用计算 $|A - 2E| \neq 0$).

(2) λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda - 1 \end{cases}$$

① 有唯一解; ② 无解; ③ 无穷多个解.

注意: 通过系数矩阵的秩, 增广矩阵的秩, 未知元个数三者关系判断解的存在形.

化为行阶梯形即可求秩; 初等变换时, 含参量因式不可作分母、不可消去.

(3) 分别用逆矩阵法, Carmer 法则, 和初等变换方法, 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0 \end{cases}$$

注意: 求解方程组优先推荐初等变换.

(4) 令

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

利用初等行变换把矩阵 A 化为行最简形矩阵 B , 从而求矩阵 A 的秩. 进一步, 求可逆矩阵 P , 使得 $PA = B$.

提示: 化 (A, E) 为行最简形, 行最简形的后 3 列即为可逆 P .