Lec-2. 等可能概型（古典概型）、几何概型

主讲教师：吴利苏 (wulisu@sdust.edu.cn)
主　　页：http://wulisu.cn

目录

1. 古典概型
2. 例子
   - 取球模型
   - 超几何分布问题
   - 生日问题
   - 抽签问题
   - 随机数整除模型
   - 配对问题
3. 几何概型
   - 会面问题

引例

- 抛硬币观察正反面，样本空间

$$S = \{H, T\}.$$

- 掷骰子观察点数，样本空间

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

古典概型

共同点:

- (有限性) 样本空间 S 中样本点有限.
- (等可能性) 出现每一个样本点的概率相等.

古典概型

共同点:

- (有限性) 样本空间 S 中样本点有限.
- (等可能性) 出现每一个样本点的概率相等.

满足以上两个特点的试验称为等可能概型(古典概型).

古典概型概率计算公式

设古典概型的样本空间 $S=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 由 n 个样本点构成, A 为任一包含 k 个样本点的事件, 则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}.$$

例 (取球模型)

设袋中有 6 只球, 其中 4 只白球, 2 只红球, 从袋中取球两次, 每次随机取一只.

- 无放回取样, 第一次取一只球, 不放回, 第二次从剩余的球中再取一球.
- 放回抽样, 第一次取一只球, 放回, 第二次从全部的球中再取一球.

求

(1) 取到两只白球的概率.

(2) 取到两只同色球的概率.

(3) 取到两次球中至少有一只白球的概率.

解: 设 A 表示事件取到两只白球, B 表示事件取到两只同色球, C 表示事件至少有一只白球.

(a) 无放回取样:

(1) 样本空间中的元素为 $6\times5=30$, 事件 A 包含 $4\times3=12$, 则 $P(A)=\frac{4\times3}{6\times5}=\frac{2}{5}$.

(2) $P(B)=\frac{2\times1}{6\times5}=\frac{1}{15}$, $P(A)+P(B)=\frac{7}{15}$.

(3)$P(C)=1-P(B)=\frac{14}{15}$. 或者

$P(C)=\frac{4\times3}{6\times5}+\frac{4\times2}{6\times5}+\frac{2\times4}{6\times5}=\frac{14}{15}$.

(b) 放回抽样:

(1) 样本空间中的元素为 $6\times6=36$, 事件 A 包含 $4\times4=16$, 则 $P(A)=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}$.

(2) $P(B)=\frac{2\times2}{6\times6}=\frac{1}{9}$, $P(A)+P(B)=\frac{5}{9}$.

(3)$P(C)=1-P(B)=\frac{8}{9}$. □

例 (超几何分布问题)

设 N 件产品, 其中有 D 件次品, 从中取出 n 件, 问其中恰有 $k\,(k \le D)$ 件次品的概率是多少?

例 (超几何分布问题)

设 N 件产品, 其中有 D 件次品, 从中取出 n 件, 问其中恰有 k $(k \le D)$ 件次品的概率是多少?

解: $P = \frac{C_D^k C_{N-D}^{D-k}}{C_N^n}$. $\square$

例 (生日问题)

某班 30 个学生都是同一年出生的，求

(1) 有 10 个学生生日是 1 月 1 日，另外 20 个是 12 月 31 日的概率.

(2) 至少有两人生日相同的概率?

例 (生日问题)

某班 30 个学生都是同一年出生的, 求

(1) 有 10 个学生生日是 1 月 1 日, 另外 20 个是 12 月 31 日的概率.

(2) 至少有两人生日相同的概率?

解: 记 A 为事件: 有 10 个学生生日是 1 月 1 日, 另外 20 个是 12 月 31 日.

$$P(A) = \frac{C_{30}^{10} C_{20}^{20}}{365^{20}}.$$

记 B 为事件: 至少有两人生日相同.

$$P(B) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-29)}{365^{30}} \approx 0.706.$$

□

例 (抽签问题)

袋中有 a 只白球, b 只红球, $k\,(k \leq a+b)$ 个人依次在袋中取一只球.

- 放回抽样;
- 不放回抽样.

求第 i 个人取到白球的概率.

解: (1) $p=\frac{a}{a+b}$.
(2) 总样本点 $(a+b)(a+b-1)...(a+b-k+1)=A_{a+b}^{k}$.
第 i 个取到白球 $C_a^1 A_{a+b-1}^{k-1}$,

$$P=\frac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}.$$

$\square$

即 k 个人取球虽先后次序不同, 各人取得白球的概率是一样的. 放不放回概率也一样一样. 类似地买彩票, 抽奖, 抓阄等, 也是如此.

例 (随机数整除模型)

从 $1 \sim 2000$ 的整数中随机地取一个数. 问取到的整数既不能被 6 整除, 又不能被 8 整除的概率是多少?

例 (随机数整除模型)

从 $1 \sim 2000$ 的整数中随机地取一个数. 问取到的整数既不能被 6 整除, 又不能被 8 整除的概率是多少?

解: 记 A 为事件能被 6 整除. 记 B 为事件能被 8 整除.

$$
\begin{aligned}
P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\
&= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(AB)).
\end{aligned}
$$

其中 $P(A) = \frac{333}{2000}$, $P(B) = \frac{250}{2000}$, $P(AB) = \frac{83}{2000}$(被最小公倍数 24 整除).

所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1500}{2000} = \frac{3}{4}$. $\square$

练习

掷 3 颗均匀的骰子, 求点数之和为 4 的概率.

练习

掷 3 颗均匀的骰子，求点数之和为 4 的概率.

解: 记 A 为事件点数之和为 4.

样本空间中的元素为个数 $6 \times 6 \times 6$,

A 包含 $\{1,1,2\}$, $\{1,2,1\}$, $\{2,1,1\}$.

$$P(A) = \frac{3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{72}.$$

$\square$

例 (配对问题)

从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 问

(1) 恰有两只配对成双的概率.

(2) 至少有两只配对成双的概率.

例 (配对问题)

从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 问

(1) 恰有两只配对成双的概率.

(2) 至少有两只配对成双的概率.

解: (1) $P = \dfrac{C_6^1 C_5^2 C_2^1 C_2^1}{C_{12}^4} = \dfrac{16}{33}$.

(2) $P = 1 - \dfrac{C_6^4 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1}{C_{12}^4}$. $\square$

例

将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中取去, 这 15 名新生中有 3 名优秀. 问

(1) 每个班级分配到一名优秀的概率.

(2) 3 名优秀分配到同一个班级的概率.

例

将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中取去, 这 15 名新生中有 3 名优秀. 问

(1) 每个班级分配到一名优秀的概率.

(2) 3 名优秀分配到同一个班级的概率.

解: (1) 总样本点 $C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$, 每个班级分配到一名优秀 $3!\, C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$.

$$P = \frac{3!\, C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}.$$

(2) $P = \frac{C_3^1 C_{12}^2 C_{10}^5 C_5^5}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}.$ □

例

设有甲、乙、丙三个班级，思考下面试验的样本点数分别是多少？

(1) 15 名新生随机地平均分配到三个班级;

例

设有甲、乙、丙三个班级，思考下面试验的样本点数分别是多少？

(1) 15 名新生随机地平均分配到三个班级;

(2) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求其中一个班分 3 人，一个班分 5 人，一个班分 7 人;

例

设有甲、乙、丙三个班级，思考下面试验的样本点数分别是多少？

(1) 15 名新生随机地平均分配到三个班级;

(2) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求其中一个班分 3 人，一个班分 5 人，一个班分 7 人;

(3) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求甲班分 3 人，乙班分 5 人，丙班分 7 人;

例

设有甲、乙、丙三个班级，思考下面试验的样本点数分别是多少？

(1) 15 名新生随机地平均分配到三个班级;

(2) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求其中一个班分 3 人，一个班分 5 人，一个班分 7 人;

(3) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求甲班分 3 人，乙班分 5 人，丙班分 7 人;

(4) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求其中一个班分 3 人，其余两个班分别分 6 人;

解:

(1) $C_{15}^{5}C_{10}^{5}C_{5}^{5}$;

(2) $C_{15}^{3}C_{12}^{5}C_{7}^{7}\cdot A_{3}^{3}$;

(3) $C_{15}^{3}C_{12}^{5}C_{7}^{7}$;

(4) $C_{15}^{3}C_{12}^{6}C_{6}^{6}\cdot 3$.

$\square$

例

某接待站在某一周曾接待过 12 次来访, 已知所有这 12 次接待都是在周二和周四. 问是否可推断接待时间是规定的?

例

某接待站在某一周曾接待过 12 次来访, 已知所有这 12 次接待都是在周二和周四. 问是否可推断接待时间是规定的?

解: 假设没有规定. 每天的接待是等可能的.
总样本点 7^{12}. 12 次接待都是周二和周四 2^{12}.

$$P = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003.$$

小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的 (实际推断原理).
所以, 可推断接待时间是规定的. □

几何概型 (样本空间无限)

当随机试验的样本空间是某个区域，并且任意一点落在度量 (长度，面积，体积) 相同的子区域是等可能的，则事件 A 的概率可定义为

$$P(A) = \frac{S_A}{S},$$

其中 S 是样本空间的度量，S_A 是事件 A 的子区域的度量.

这类样本空间无限的概率模型称为几何概型.

例 (会面问题)

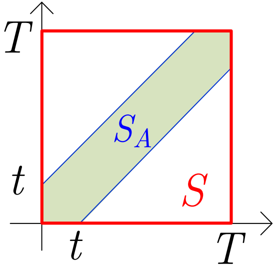
甲乙两人相约 0 点到 T 点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人 $t(t < T)$ 时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到 T 时内的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到 T 点这段时间内在某地会面，先到者等候另一个人 $t(t<T)$ 时，过时就离去，假定每个人在指定的 0 到 T 时内的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

解: 设 x 和 y 分别为甲乙两人到达的时刻，
$0 \le x \le T, 0 \le y \le T$，两人会面的充要条件
$|x-y| \le t$.

$$P = \frac{S_A}{S} = \frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}.$$



例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

例

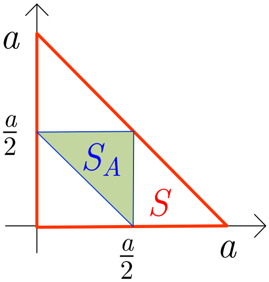
在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\}$,

$A = \{$构成三角形$\}$

$$A\text{发生} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y > a - x - y; \\ y + (a - x - y) > x; \\ x + (a - x - y) > y. \end{cases}$$



例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

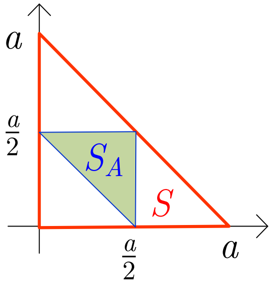
解: 设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S=\{(x,y)|0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}$,

$A=\{\text{构成三角形}\}$

$$A\text{发生} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y>a-x-y; \\ y+(a-x-y)>x; \\ x+(a-x-y)>y. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{a}{2}<x+y<a; \\ 0<x<\frac{a}{2}; \\ 0<y<\frac{a}{2}. \end{cases}$$



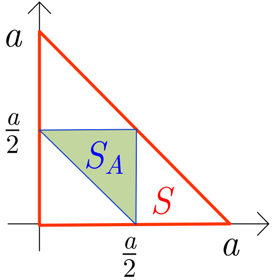
例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S=\{(x,y)|0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}$,

$A=\{$构成三角形$\}$



$$A\text{发生} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y>a-x-y; \\ y+(a-x-y)>x; \\ x+(a-x-y)>y. \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} \frac{a}{2}<x+y<a; \\ 0<x<\frac{a}{2}; \\ 0<y<\frac{a}{2}. \end{cases} \qquad P(A)=\frac{\frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}. \qquad \square$$