

# 线性代数-12

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 14 日

# 本次课内容

1. 向量组的线性表示
2. 向量组的线性相关性

- 将线性方程组  $A_{m \times n} X_n = \beta_m$  的系数矩阵  $A$  进行列分块,

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = \beta.$$

- 将线性方程组  $A_{m \times n} X_n = \beta_m$  的系数矩阵  $A$  进行列分块,

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = \beta.$$

- 向量组: 若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合.  
例如  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$  是一个含  $n$  个  $m$  维向量的向量组,  
记为  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ .

- 将线性方程组  $A_{m \times n} X_n = \beta_m$  的系数矩阵  $A$  进行列分块,

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = \beta.$$

- 向量组: 若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合.  
例如  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$  是一个含  $n$  个  $m$  维向量的向量组,  
记为  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ .
- 线性组合: 形如

$$\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

的表达式称为向量组  $A$  的一个线性组合.

## 向量组

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$$

所有列向量构成列向量组:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

所有行向量构成行向量组:

$$\beta_1^T = (1, 2, 1, -2), \beta_2^T = (2, 3, 0, -1), \beta_3^T = (1, -1, -5, 7).$$

# 向量的线性表示

- 若

$$\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

则称向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示.

- $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta$  有解

# 向量的线性表示

- 若

$$\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

则称向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示.

- $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta$  有解  
 $\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$



# 向量的线性表示

- 若

$$\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

则称向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示.

- $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta$  有解  
 $\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ .

定理 (定理 1)

向量  $\beta$  可由向量组  $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_n$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .

注: 任意有序的向量组  $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_n$  与矩阵  $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$  一一对应. 为方便, 我们把矩阵  $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$  也记为  $A$ .

注:

给定  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  和  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

注:

给定  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  和  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

- $n$  维零向量可由任意  $n$  维向量组线性表示:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \dots + 0 \cdot \alpha_m.$$

注:

给定  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  和  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

- $n$  维零向量可由任意  $n$  维向量组线性表示:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \dots + 0 \cdot \alpha_m.$$

- 向量组中任一向量都可由这个向量组线性表示:

$$\alpha_i = 0 \cdot \alpha_1 + \dots + 0 \cdot \alpha_{i-1} + 1 \cdot \alpha_i + 0 \cdot \alpha_{i+1} + \dots + 0 \cdot \alpha_m.$$

注:

给定  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  和  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

- $n$  维零向量可由任意  $n$  维向量组线性表示:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \dots + 0 \cdot \alpha_m.$$

- 向量组中任一向量都可由这个向量组线性表示:

$$\alpha_i = 0 \cdot \alpha_1 + \dots + 0 \cdot \alpha_{i-1} + 1 \cdot \alpha_i + 0 \cdot \alpha_{i+1} + \dots + 0 \cdot \alpha_m.$$

- 设  $n$  维向量组

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^T$ ,  
则有

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

我们称  $e_1, e_2, \dots, e_n$  为  $n$  维基本单位向量组.

例  
设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

证明向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 并求出表达式.

解法: 求解线性方程组  $AX = \beta$ ,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简形}.$$

例  
设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a+2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix},$$

问  $a, b$  取何值时,

- $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.
- $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表示唯一.
- $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表示不唯一.

## 向量组的线性表示

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_l$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示



## 向量组的线性表示

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_l$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  向量组  $B$  中每一个向量  $\beta_i$  都可由向量组  $A$  线性表示

## 向量组的线性表示

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_l$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  向量组  $B$  中每一个向量  $\beta_i$  都可由向量组  $A$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)X = (\beta_1, \dots, \beta_l)$  有解

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}_{m \times l}$$

## 向量组的线性表示

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_l$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  向量组  $B$  中每一个向量  $\beta_i$  都可由向量组  $A$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)X = (\beta_1, \dots, \beta_l)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$ .

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}_{m \times l}$$

## 向量组的线性表示

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_l$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  向量组  $B$  中每一个向量  $\beta_i$  都可由向量组  $A$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)X = (\beta_1, \dots, \beta_l)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$ .

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}_{m \times l}$$

定理 (定理 2)

向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_l$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$ .

## 向量组的等价

● 若向量组  $A, B$  可以相互线性表示, 则称向量组  $A, B$  等价.  
向量组的等价满足反身性、对称性、传递性, 是一种等价关系.

例 (128 页例 3)

证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和三维基本单位向量组  $e_1, e_2, e_3$  等价, 其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

# 向量组的等价和矩阵的等价

## 性质

- 若矩阵  $A \overset{r}{\sim} B$ , 则  $A, B$  的行向量组等价;
- 若矩阵  $A \overset{c}{\sim} B$ , 则  $A, B$  的列向量组等价.

# 向量组的等价和矩阵的等价

## 性质

- 若矩阵  $A \stackrel{r}{\sim} B$ , 则  $A, B$  的行向量组等价;
- 若矩阵  $A \stackrel{c}{\sim} B$ , 则  $A, B$  的列向量组等价.

证明:  $A_{m \times n} \stackrel{c}{\sim} B_{m \times n}$ , 则存在可逆矩阵  $Q$ , 使得

$$AQ = B$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

则  $B$  的列向量组可由  $A$  的列向量组线性表示, 反之, 由  $BQ^{-1} = A$  得  $A$  的列向量组线性表示可由  $B$  的列向量组线性表示.

## 向量组的等价

- 若向量组  $A, B$  可以相互线性表示, 则称向量组  $A, B$  等价.



## 向量组的等价

- 若向量组  $A, B$  可以相互线性表示, 则称向量组  $A, B$  等价.
- 向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  向量组  $A, B$  可以相互线性表示

## 向量组的等价

- 若向量组  $A, B$  可以相互线性表示, 则称向量组  $A, B$  等价.
- 向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  向量组  $A, B$  可以相互线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $AX = B$  和  $BY = A$  都有解

## 向量组的等价

- 若向量组  $A, B$  可以相互线性表示, 则称向量组  $A, B$  等价.
- 向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  向量组  $A, B$  可以相互线性表示
  - $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $AX=B$  和  $BY=A$  都有解
  - $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$  且  $R(B) = R(B, A)$

## 向量组的等价

- 若向量组  $A, B$  可以相互线性表示, 则称向量组  $A, B$  等价.
- 向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  向量组  $A, B$  可以相互线性表示
  - $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $AX = B$  和  $BY = A$  都有解
  - $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$  且  $R(B) = R(B, A)$
  - $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B, A) = R(B).$

## 向量组的等价

- 若向量组  $A, B$  可以相互线性表示, 则称向量组  $A, B$  等价.
- 向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  向量组  $A, B$  可以相互线性表示
  - $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $AX = B$  和  $BY = A$  都有解
  - $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$  且  $R(B) = R(B, A)$
  - $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B, A) = R(B)$ .

### 推论 (1)

向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  和向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  等价  
 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B)$ .

## “秩”定理

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$

## “秩”定理

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$   
 $\Rightarrow R(B) \leq R(A, B) = R(A).$

## “秩”定理

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$   
 $\Rightarrow R(B) \leq R(A, B) = R(A).$

### 推论 (2)

向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Rightarrow R(B) \leq R(A).$



例  
设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和向量组  $\beta_1, \beta_2$  等价.

思路: 求  $R(A), R(A, B), R(B)$ ,

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行阶梯/行最简形}.$

例  
设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

其中  $t \in \mathbb{R}$  为参数.

- $t$  取何值时, 证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  和向量组  $\beta_1, \beta_2$  等价.
- 向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  和向量组  $\beta_1, \beta_2$  等价时, 写出相应线性表示.

例

设  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  构成  $n \times m$  矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , 证明基本单位向量组  $e_1, \dots, e_n$  可由  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

例

设  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  构成  $n \times m$  矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , 证明基本单位向量组  $e_1, \dots, e_n$  可由  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

注:

- 矩阵描述: 存在矩阵  $K$ , 使得  $AK = E_n \Leftrightarrow R(A) = n$ ;
- 矩阵方程描述:  $AX = E$  有解  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

# 线性相关性

## 定义

给定向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . 若存在不全为 0 的数  $k_1, \dots, k_n$ , 使得

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_n \alpha_n = O,$$

则称向量组  $A$  线性相关.

若仅当  $k_1 = \dots = k_n = 0$  时,  $k_1 \alpha_1 + \dots + k_n \alpha_n = O$  才成立, 则称向量组  $A$  线性无关.

# 线性相关性

## 定义

给定向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . 若存在不全为 0 的数  $k_1, \dots, k_n$ , 使得

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_n \alpha_n = O,$$

则称向量组  $A$  线性相关.

若仅当  $k_1 = \dots = k_n = 0$  时,  $k_1 \alpha_1 + \dots + k_n \alpha_n = O$  才成立, 则称向量组  $A$  线性无关.

- 只含 1 个零向量的向量组线性相关.
- 2 个三维向量线性无关  $\Leftrightarrow$  不共线.
- 3 个三维向量线性无关  $\Leftrightarrow$  不共面.

# 线性相关性

- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow AX_n = O$  有非零解  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;  
向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow AX_n = O$  有唯一零解  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

# 线性相关性

- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow AX_n = O$  有非零解  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;  
向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow AX_n = O$  有唯一零解  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

定理 (定理 4)

向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;

向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .



# 线性相关性

- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow AX_n = O$  有非零解  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;  
向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow AX_n = O$  有唯一零解  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

## 定理 (定理 4)

向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;

向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

## 推论 (1)

$n$  个  $n$  维向量线性无关  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ .

# 线性相关性

- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow AX_n = O$  有非零解  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;  
向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow AX_n = O$  有唯一零解  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

## 定理 (定理 4)

向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;

向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

## 推论 (1)

$n$  个  $n$  维向量线性无关  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ .

## 推论 (2)

当  $m > n$  时,  $m$  个  $n$  维向量线性相关. 特别地,  $n+1$  个  $n$  维向量必线性相关.

例  
证明  $n$  维基本单位向量  $e_1, \dots, e_n$  线性无关.

## 例 2

例  
设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

讨论向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性相关性.

### 例 3

例

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性无关,  $a, b, c$  取何值时, 向量组  $a\alpha_1 - \alpha_2, b\alpha_2 - \alpha_3, c\alpha_3 - \alpha_1$  线性相关.

## 例 4\*\*\*

例

已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,

$$\begin{cases} \beta_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 &= \alpha_3 + \alpha_1 \end{cases}$$

证向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关.

## 例 4\*\*\*

例

已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,

$$\begin{cases} \beta_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 &= \alpha_3 + \alpha_1 \end{cases}$$

证向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关.

证明 1: 设有  $x_1, x_2, x_3$  使得

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$$

.....

得  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . 故  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关.

# 性质

- $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关,  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示, 且表达式唯一.
  - $AX = \beta$ ,  $R(A, \beta) = R(A) = m$ ,  $A$  列满秩, 则有唯一解.
- 设向量组  $A$  是向量组  $B$  的一个部分向量组, 则
  - $A$  线性相关  $\Rightarrow B$  线性相关, 即部分相关  $\Rightarrow$  整体相关;
  - $B$  线性无关  $\Rightarrow A$  线性无关, 即整体无关  $\Rightarrow$  部分无关.
- 设向量组  $A$  是向量组  $B$  中的向量尾端增加一些分量后得到的向量组, 则
  - $A$  线性相关  $\Rightarrow B$  线性相关, 即长尾相关  $\Rightarrow$  短尾相关;
  - $B$  线性无关  $\Rightarrow A$  线性无关, 即短尾无关  $\Rightarrow$  长尾无关.
- $B: \beta_1, \dots, \beta_s$  可由  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示, 且  $s > m$ , 则  $B$  线性相关.  
即可以被包含向量个数更少的向量组线性表示的向量组, 必线性相关.



# 性质

- $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关,  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示, 且表达式唯一.
  - $AX = \beta$ ,  $R(A, \beta) = R(A) = m$ ,  $A$  列满秩, 则有唯一解.
- 设向量组  $A$  是向量组  $B$  的一个部分向量组, 则
  - $A$  线性相关  $\Rightarrow B$  线性相关, 即部分相关  $\Rightarrow$  整体相关;
  - $B$  线性无关  $\Rightarrow A$  线性无关, 即整体无关  $\Rightarrow$  部分无关.
- 设向量组  $A$  是向量组  $B$  中的向量尾端增加一些分量后得到的向量组, 则
  - $A$  线性相关  $\Rightarrow B$  线性相关, 即长尾相关  $\Rightarrow$  短尾相关;
  - $B$  线性无关  $\Rightarrow A$  线性无关, 即短尾无关  $\Rightarrow$  长尾无关.
- $B: \beta_1, \dots, \beta_s$  可由  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示, 且  $s > m$ , 则  $B$  线性相关.  
即可以被包含向量个数更少的向量组线性表示的向量组, 必线性相关.

# 性质

- $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关,  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示, 且表达式唯一.
  - $AX = \beta$ ,  $R(A, \beta) = R(A) = m$ ,  $A$  列满秩, 则有唯一解.
- 设向量组  $A$  是向量组  $B$  的一个部分向量组, 则
  - $A$  线性相关  $\Rightarrow B$  线性相关, 即部分相关  $\Rightarrow$  整体相关;
  - $B$  线性无关  $\Rightarrow A$  线性无关, 即整体无关  $\Rightarrow$  部分无关.
- 设向量组  $A$  是向量组  $B$  中的向量尾端增加一些分量后得到的向量组, 则
  - $A$  线性相关  $\Rightarrow B$  线性相关, 即长尾相关  $\Rightarrow$  短尾相关;
  - $B$  线性无关  $\Rightarrow A$  线性无关, 即短尾无关  $\Rightarrow$  长尾无关.
- $B: \beta_1, \dots, \beta_s$  可由  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示, 且  $s > m$ , 则  $B$  线性相关.  
即可以被包含向量个数更少的向量组线性表示的向量组, 必线性相关.

# 性质

- $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关,  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示, 且表达式唯一.
  - $AX = \beta$ ,  $R(A, \beta) = R(A) = m$ ,  $A$  列满秩, 则有唯一解.
- 设向量组  $A$  是向量组  $B$  的一个部分向量组, 则
  - $A$  线性相关  $\Rightarrow B$  线性相关, 即部分相关  $\Rightarrow$  整体相关;
  - $B$  线性无关  $\Rightarrow A$  线性无关, 即整体无关  $\Rightarrow$  部分无关.
- 设向量组  $A$  是向量组  $B$  中的向量尾端增加一些分量后得到的向量组, 则
  - $A$  线性相关  $\Rightarrow B$  线性相关, 即长尾相关  $\Rightarrow$  短尾相关;
  - $B$  线性无关  $\Rightarrow A$  线性无关, 即短尾无关  $\Rightarrow$  长尾无关.
- $B: \beta_1, \dots, \beta_s$  可由  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示, 且  $s > m$ , 则  $B$  线性相关.  
即可以被包含向量个数更少的向量组线性表示的向量组, 必线性相关.

## 向量个数角度:

- 部分线性相关  $\Rightarrow$  整体线性相关;

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  线性相关  $\Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  线性相关.

- 整体线性无关  $\Rightarrow$  部分线性无关;

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  线性无关  $\Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  线性无关.

## 向量维数角度:

- 长尾相关  $\Rightarrow$  短尾相关;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \textcolor{red}{x_4} \\ \textcolor{red}{x_5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \textcolor{red}{y_4} \\ \textcolor{red}{y_5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \textcolor{red}{z_4} \\ \textcolor{red}{z_5} \end{pmatrix} \text{长尾相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{短尾相关}.$$

- 短尾无关  $\Rightarrow$  长尾无关;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{短尾无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \textcolor{red}{x_4} \\ \textcolor{red}{x_5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \textcolor{red}{y_4} \\ \textcolor{red}{y_5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \textcolor{red}{z_4} \\ \textcolor{red}{z_5} \end{pmatrix} \text{长尾无关}.$$

## 例 7

例

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 向量组  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 证明:

- $\alpha_1$  可由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表示;
- $\alpha_4$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

## 例 8

例

已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

若  $A\alpha$  与  $\alpha$  线性相关, 求  $a$ .

## 线性表示的判定

- $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示

$$\Leftrightarrow \beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) X_n = \beta \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$



# 线性表示的判定

- $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示

$$\Leftrightarrow \beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) X_n = \beta \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

- 向量组  $B: \beta_1, \cdots, \beta_l$  可由向量组  $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$  线性表示

$$\Leftrightarrow \text{向量组 } B \text{ 中每一个向量 } \beta_i \text{ 都可由向量组 } A \text{ 线性表示}$$

$$\Leftrightarrow \text{矩阵方程 } (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) X = (\beta_1, \cdots, \beta_l) \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow R(A, B) = R(A).$$

# 线性表示的判定

- $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示

$$\Leftrightarrow \beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

$$\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

- 向量组  $B: \beta_1, \cdots, \beta_l$  可由向量组  $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$  线性表示

$$\Leftrightarrow \text{向量组 } B \text{ 中每一个向量 } \beta_i \text{ 都可由向量组 } A \text{ 线性表示}$$

$$\Leftrightarrow \text{矩阵方程 } (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)X = (\beta_1, \cdots, \beta_l) \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow R(A, B) = R(A).$$

- 向量组  $A, B$  等价

$$\Leftrightarrow \text{向量组 } A, B \text{ 可以相互线性表示}$$

$$\Leftrightarrow \text{矩阵方程 } AX = B \text{ 和 } BY = A \text{ 都有解}$$

$$\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B, A) = R(B).$$

# 线性相关的判定

- 向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性相关  
 $\Leftrightarrow$  存在不全为 0 的数  $k_1, \dots, k_n$  使得

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_n \alpha_n = O,$$

$\Leftrightarrow n$  元齐次线性方程组  $AX_n = O$  有非零解

$\Leftrightarrow$  矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  的秩小于列向量的个数,  $R(A) < n$

$\Leftrightarrow$  向量组  $A$  中至少有一个向量能由其余  $n-1$  个向量线性表示.

## 线性无关的判定

- 向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性无关  
 $\Leftrightarrow$  若  $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = O$ , 则必有

$$k_1 = \dots = k_n = 0$$

$\Leftrightarrow n$  元齐次线性方程组  $AX_n = O$  只有零解

$\Leftrightarrow$  矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  的秩等于列向量的个数,  $R(A) = n$ , 列满秩

$\Leftrightarrow$  向量组  $A$  中任何一个向量都不能由其余  $n-1$  个向量线性表示.

第三章是用矩阵语言来描述线性方程组, 而这一章是用向量语言 (几何语言) 来描述线性方程组.

- 向量组、线性组合、线性表示、向量组的等价、线性相关和线性无关;
- 判断是否可以线性表示、是否等价、是否线性相关和线性无关.
- 本次课结论: 联系线性方程组解的存在性和秩的关系.

# 作业

- Page<sub>132</sub> 3,4,6,7
- Page<sub>140</sub> 1-(3),2,3,7-(2),8
- Page<sub>148</sub> 2-(2),3,6,7,8
- Page<sub>156</sub> 1-(4)(5),2-(2),5,7

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2025 年 10 月 14 日