

线性代数-9

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 3 日

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + kr_j, c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + kc_j$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + kr_j, c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + kc_j$$

- 矩阵的等价:

$$A \overset{r}{\sim} B, A \overset{c}{\sim} B, A \sim B;$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + kr_j, c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + kc_j$$

- 矩阵的等价:

$$A \overset{r}{\sim} B, A \overset{c}{\sim} B, A \sim B;$$

- 矩阵的等价化简:

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + kr_j, c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + kc_j$$

- 矩阵的等价:

$$A \overset{r}{\sim} B, A \overset{c}{\sim} B, A \sim B;$$

- 矩阵的等价化简:

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

- 初等矩阵:

$$E(i, j), E(i(k)), E(ij(k));$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
 - 求可逆 P , 使得 $PA = B \Rightarrow (A \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B \ P)$;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
 - 求可逆 P , 使得 $PA = B \Rightarrow (A \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B \ P)$;
 - 求 $A^{-1} \Rightarrow (A \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E \ A^{-1})$;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
 - 求可逆 P , 使得 $PA = B \Rightarrow (A \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B \ P)$;
 - 求 $A^{-1} \Rightarrow (A \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E \ A^{-1})$;
 - 求 $A^{-1}B \Rightarrow (A \ B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E \ A^{-1}B)$;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
 - 求可逆 P , 使得 $PA = B \Rightarrow (A \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B \ P)$;
 - 求 $A^{-1} \Rightarrow (A \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E \ A^{-1})$;
 - 求 $A^{-1}B \Rightarrow (A \ B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E \ A^{-1}B)$;
 - 解 $AX = \beta \Rightarrow (A \ \beta) \xrightarrow{\text{行变换}} \text{行最简形}$;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
 - 求可逆 P , 使得 $PA = B \Rightarrow (A \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B \ P)$;
 - 求 $A^{-1} \Rightarrow (A \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E \ A^{-1})$;
 - 求 $A^{-1}B \Rightarrow (A \ B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E \ A^{-1}B)$;
 - 解 $AX = \beta \Rightarrow (A \ \beta) \xrightarrow{\text{行变换}} \text{行最简形}$;
 - 注：求可逆 Q , 使得 $AQ = B$; A^{-1} ; BA^{-1} ; $X^T A = \beta^T$ 用列分块，初等列变换.

本次课内容

矩阵的秩和线性方程组解的存在性

- 如何判断 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$?

- 根据定义, 如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B , 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.

- 如何判断 $A \sim B$?

- 根据定义, 如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B , 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.
- 根据初等变换和初等矩阵的联系, 如果存在可逆 P 和可逆 Q , 使得 $PAQ = B$, 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.

- 如何判断 $A \sim B$?
 - 根据定义, 如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B , 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.
 - 根据初等变换和初等矩阵的联系, 如果存在可逆 P 和可逆 Q , 使得 $PAQ = B$, 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \not\sim B$ 吗?

- 如何判断 $A \sim B$?
 - 根据定义, 如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B , 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.
 - 根据初等变换和初等矩阵的联系, 如果存在可逆 P 和可逆 Q , 使得 $PAQ = B$, 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \not\sim B$ 吗?
- 有! 研究等价矩阵 A 和 B 的共性:
(不变性/不变量: 在有限初等变换下保持不变的性质和数量)

- 如何判断 $A \sim B$?

- 根据定义, 如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B , 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.
- 根据初等变换和初等矩阵的联系, 如果存在可逆 P 和可逆 Q , 使得 $PAQ = B$, 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.

- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \not\sim B$ 吗?

- 有! 研究等价矩阵 A 和 B 的共性:

(不变性/不变量: 在有限初等变换下保持不变的性质和数量)

- 例如等价的方阵具有相同的可逆性, 若 A 可逆, B 不可逆, 则必有 $A \not\sim B$.

- 如何判断 $A \sim B$?

- 根据定义, 如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B , 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.
- 根据初等变换和初等矩阵的联系, 如果存在可逆 P 和可逆 Q , 使得 $PAQ = B$, 则 $A \sim B$, 否则 $A \not\sim B$.

- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \not\sim B$ 吗?

- 有! 研究等价矩阵 A 和 B 的共性:

(不变性/不变量: 在有限初等变换下保持不变的性质和数量)

- 例如等价的方阵具有相同的可逆性, 若 A 可逆, B 不可逆, 则必有 $A \not\sim B$.

- 矩阵的秩, 一个等价完全不变量: 两个同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow A, B$ 的秩相同.

k 阶子式

- k 阶子式: 任取矩阵 $A_{m \times n}$ 的 k 行 k 列, $k \leq \min\{m, n\}$, 其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式, 称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k 阶子式

- k 阶子式: 任取矩阵 $A_{m \times n}$ 的 k 行 k 列, $k \leq \min\{m, n\}$, 其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式, 称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k 阶子式

- k 阶子式: 任取矩阵 $A_{m \times n}$ 的 k 行 k 列, $k \leq \min\{m, n\}$, 其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式, 称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

k 阶子式

- k 阶子式: 任取矩阵 $A_{m \times n}$ 的 k 行 k 列, $k \leq \min\{m, n\}$, 其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式, 称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

- 区分 k 阶子式、子块、余子式、代数余子式.

定义

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D , 而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的**最高阶非零子式**, 数 r 称为 A 的**秩**, 记为 $R(A)$ 或 $r(A)$.

定义

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D , 而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的**最高阶非零子式**, 数 r 称为 A 的**秩**, 记为 $R(A)$ 或 $r(A)$.

$$\bullet R(O) := 0, \quad R(E_n) = n, \quad R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r.$$

矩阵的秩

定义

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D , 而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的**最高阶非零子式**, 数 r 称为 A 的**秩**, 记为 $R(A)$ 或 $r(A)$.

- $R(O) := 0, \quad R(E_n) = n, \quad R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r.$
- **行阶梯形矩阵的秩为非零行的行数.**

矩阵的秩

定义

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D , 而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的**最高阶非零子式**, 数 r 称为 A 的**秩**, 记为 $R(A)$ 或 $r(A)$.

- $R(O) := 0, \quad R(E_n) = n, \quad R \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r.$

- **行阶梯形矩阵的秩为非零行的行数.**

- $R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

- 证明思路：有限次初等变换不改变方阵的行列式是否为零这一结论.

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

- 证明思路：有限次初等变换不改变方阵的行列式是否为零这一结论.
- $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆 P, Q 使得 $PAQ = B$.

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

- 证明思路：有限次初等变换不改变方阵的行列式是否为零这一结论.
- $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆 P, Q 使得 $PAQ = B$.
所以矩阵与可逆矩阵相乘, 秩不变, i.e.

$$R(A) = R(PAQ) = R(PA) = R(AQ).$$

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

- 证明思路：有限次初等变换不改变方阵的行列式是否为零这一结论.
- $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆 P, Q 使得 $PAQ = B$.
所以矩阵与可逆矩阵相乘, 秩不变, i.e.

$$R(A) = R(PAQ) = R(PA) = R(AQ).$$

- 计算 $R(A)$: 通过初等行变换把 A 化为行阶梯形,

$$R(A) = \text{行阶梯形的非零行数}.$$

例题

例

求 $R(A)$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例题

例
设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix},$$

已知 $R(A) = 2$, 求 λ 和 μ .

秩的性质

性质

$$1) \ 0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$$

秩的性质

性质

1) $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$

2) $R(A^T) = R(A);$

秩的性质

性质

1) $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$

2) $R(A^T) = R(A);$

3) A, B 同型, 则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$

秩的性质

性质

- 1) $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2) $R(A^T) = R(A);$
- 3) A, B 同型, 则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$
- 4) 若 P, Q 可逆, 则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ);$

秩的性质

性质

- 1) $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2) $R(A^T) = R(A);$
- 3) A, B 同型, 则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$
- 4) 若 P, Q 可逆, 则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ);$
- 5) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B),$
特别地, $R(A) \leq R(A, \beta) \leq R(A) + 1;$

秩的性质

性质

- 1) $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2) $R(A^T) = R(A);$
- 3) A, B 同型, 则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$
- 4) 若 P, Q 可逆, 则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ);$
- 5) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B),$
特别地, $R(A) \leq R(A, \beta) \leq R(A) + 1;$
- 6) $R(A + B) \leq R(A) + R(B);$

秩的性质

性质

- 1) $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2) $R(A^T) = R(A);$
- 3) A, B 同型, 则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$
- 4) 若 P, Q 可逆, 则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ);$
- 5) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B),$
特别地, $R(A) \leq R(A, \beta) \leq R(A) + 1;$
- 6) $R(A + B) \leq R(A) + R(B);$
- 7) $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\};$

秩的性质

性质

- 1) $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2) $R(A^T) = R(A);$
- 3) A, B 同型, 则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$
- 4) 若 P, Q 可逆, 则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ);$
- 5) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B),$
特别地, $R(A) \leq R(A, \beta) \leq R(A) + 1;$
- 6) $R(A + B) \leq R(A) + R(B);$
- 7) $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\};$
- 8) 若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = O$, 则 $R(A) + R(B) \leq n.$

例题

例

证明：若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = C$, 且 $R(A) = n$, 则 $R(B) = R(C)$.

例题

例

证明：若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = C$, 且 $R(A) = n$, 则 $R(B) = R(C)$.

- $R(A_{m \times n}) = n$, 则称 A 为列满秩矩阵;
 $R(A_{m \times n}) = m$, 则称 A 为行满秩矩阵;
 $R(A_{m \times n}) = n = m$, 则称 A 为满秩矩阵.

例题

例

证明：若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = C$, 且 $R(A) = n$, 则 $R(B) = R(C)$.

- $R(A_{m \times n}) = n$, 则称 A 为列满秩矩阵;
 $R(A_{m \times n}) = m$, 则称 A 为行满秩矩阵;
 $R(A_{m \times n}) = n = m$, 则称 A 为满秩矩阵.
- $AB = O$, A 列满秩, 则 $B = O$.
即 A 列满秩, 则有左消去律; 同理, B 行满秩, 则有右消去律.

例题

例

证明：若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = C$, 且 $R(A) = n$, 则 $R(B) = R(C)$.

- $R(A_{m \times n}) = n$, 则称 A 为列满秩矩阵;
 $R(A_{m \times n}) = m$, 则称 A 为行满秩矩阵;
 $R(A_{m \times n}) = n = m$, 则称 A 为满秩矩阵.
- $AB = O$, A 列满秩, 则 $B = O$.
即 A 列满秩, 则有左消去律; 同理, B 行满秩, 则有右消去律.
- A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 满秩.

例题

例

设 A 为 n 阶矩阵, 证明 $R(A + E) + R(A - E) \geq n$.

线性方程组解的存在性

秩的应用：判断 $AX = \beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m \times n}X = \beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A) < R(A, \beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta)$;
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta) = n$;
 - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta) < n$.

秩的应用：判断 $AX = \beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m \times n}X = \beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A) < R(A, \beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta)$;
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta) = n$;
 - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta) < n$.

推论

齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$.

秩的应用：判断 $AX = \beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m \times n}X = \beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A) < R(A, \beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta)$;
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta) = n$;
 - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta) < n$.

推论

齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$.

- 求解 $AX = \beta \Rightarrow$ 通过初等行变换化增广矩阵 (A, β) 为行最简形，判断解的存在性并求解.

例题

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 & = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 & = 0 \end{cases}$$

例题

例
设

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

定理

$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

- 1、秩的定义、求 $R(A)$;
- 2、判断线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性，并求解.

练习

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 0 \end{cases}$$

- Page79-Page80. 10-(3)、15-(3)、18.

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 3 日