

# 线性代数-8

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学, 数学学院

## 回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换：

## 回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行,  $r_i \leftrightarrow r_j$ ;

## 回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行,  $r_i \leftrightarrow r_j$ ;
  - 某一行乘非零常数倍,  $r_i \times k$ ;

# 回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换：
  - 交换两行,  $r_i \leftrightarrow r_j$ ;
  - 某一行乘非零常数倍,  $r_i \times k$ ;
  - 某行加上另外一行的  $k$  倍,  $r_i + kr_j$ .

## 回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换：
  - 交换两行,  $r_i \leftrightarrow r_j$ ;
  - 某一行乘非零常数倍,  $r_i \times k$ ;
  - 某行加上另外一行的  $k$  倍,  $r_i + kr_j$ .
- 矩阵的等价：

## 回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:

- 交换两行,  $r_i \leftrightarrow r_j$ ;
- 某一行乘非零常数倍,  $r_i \times k$ ;
- 某行加上另外一行的  $k$  倍,  $r_i + kr_j$ .

- 矩阵的等价:

- 若  $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$ , 则称  $A, B$  行等价, 记为  $A \sim^r B$ ;

# 回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:

- 交换两行,  $r_i \leftrightarrow r_j$ ;
- 某一行乘非零常数倍,  $r_i \times k$ ;
- 某行加上另外一行的  $k$  倍,  $r_i + kr_j$ .

- 矩阵的等价:

- 若  $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$ , 则称  $A, B$  行等价, 记为  $A \overset{r}{\sim} B$ ;
- 若  $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$ , 则称  $A, B$  列等价, 记为  $A \overset{c}{\sim} B$ ;



## 回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:

- 交换两行,  $r_i \leftrightarrow r_j$ ;
- 某一行乘非零常数倍,  $r_i \times k$ ;
- 某行加上另外一行的  $k$  倍,  $r_i + kr_j$ .

- 矩阵的等价:

- 若  $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$ , 则称  $A, B$  行等价, 记为  $A \overset{r}{\sim} B$ ;
- 若  $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$ , 则称  $A, B$  列等价, 记为  $A \overset{c}{\sim} B$ ;
- 若  $A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} B$ , 则称  $A, B$  等价, 记为  $A \sim B$ .

## 本次课内容

1. 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准矩阵
2. 初等变换和初等矩阵
3. 初等变换的应用

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\xrightarrow[r_3 \times (-\frac{1}{3})]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

- 通过六步初等变换，矩阵下方的 0 不断变多。
- 矩阵 (3) 和 (4) 下方的零构成一个阶梯形状。

# 行阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵：
  - 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
  - 每个台阶只有一行；
  - 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 行阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵：

- 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
- 每个台阶只有一行；
- 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素。

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 反例：

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非 0 行的首个非 0 元为 1；
  - 这些非 0 元所在的列其他元素都为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非 0 行的首个非 0 元为 1；
  - 这些非 0 元所在的列其他元素都为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵：

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

# 行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵:

- 行阶梯形;
- 非 0 行的首个非 0 元为 1;
- 这些非 0 元所在的列其他元素都为 0.

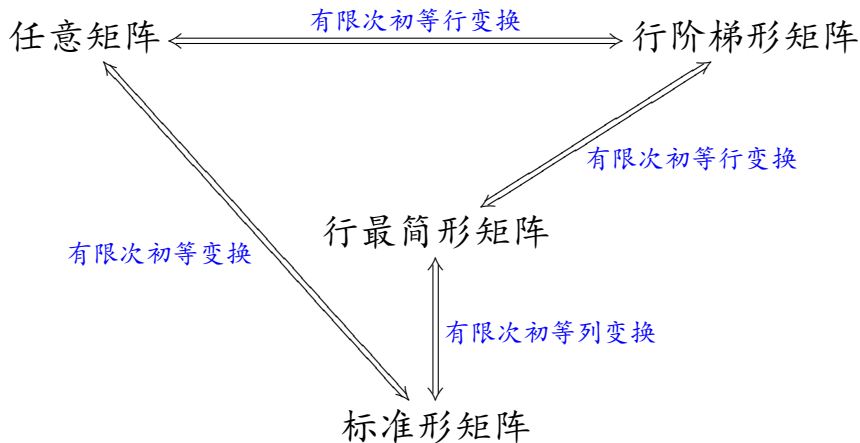
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

- 阶梯形矩阵  $\supset$  行最简形矩阵  $\supset$  标准形矩阵.





## 例题

例

将下面矩阵化为标准形

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 初等变换和初等矩阵

- 将单位矩阵  $E$  经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵 (Elementary Matrix).

# 初等变换和初等矩阵

- 将单位矩阵  $E$  经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵 (Elementary Matrix).
- 三种初等变换:
  - $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$ ;
  - $r_i \times k, c_i \times k (k \neq 0)$ ;
  - $r_i + kr_j, c_i + kc_j$ .

$r_i \leftrightarrow r_j$  和  $E_m(i, j)$

- 交换单位阵  $E$  的第  $i, j$  行 (列), 记为  $E_m(i, j)$ .

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix} = E_4(1, 3)$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix} = E_4(1, 3)$$

- 单位阵  $E$  的第  $i$  行 (列) 乘非 0 常数  $k$ , 记为  $E_m(i(k))$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \times k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4(2(k))$$

- 单位阵  $E$  的第  $i$  行加上第  $j$  行的  $k$  倍, 记为  $E_m(ij(k))$ . 或  
单位阵  $E$  的第  $j$  列加上第  $i$  行的  $k$  倍, 记为  $E_m(ij(k))$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + kr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4(31(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 + kc_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4(1, 3)$$

# 初等变换和初等矩阵

- $A$  左乘初等矩阵  $\Leftrightarrow$  对  $A$  进行相应初等行变换.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

- $A$  右乘初等矩阵  $\Leftrightarrow$  对  $A$  进行相应初等列变换.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$



# 初等变换和初等矩阵

- $E_m(i, j)A_{m \times n} \Leftrightarrow r_i \leftrightarrow r_j;$
- $A_{m \times n}E_n(i, j) \Leftrightarrow c_i \leftrightarrow c_j;$
- $E_m(i(k))A_{m \times n} \Leftrightarrow r_i \times k;$
- $A_{m \times n}E_n(i(k)) \Leftrightarrow c_i \times k;$
- $E_m(ij(k))A_{m \times n} \Leftrightarrow r_i + kr_j;$
- $A_{m \times n}E_n(ij(k)) \Leftrightarrow$

# 初等变换和初等矩阵

- $E_m(i, j)A_{m \times n} \Leftrightarrow r_i \leftrightarrow r_j;$
- $A_{m \times n}E_n(i, j) \Leftrightarrow c_i \leftrightarrow c_j;$

- $E_m(i(k))A_{m \times n} \Leftrightarrow r_i \times k;$
- $A_{m \times n}E_n(i(k)) \Leftrightarrow c_i \times k;$

- $E_m(ij(k))A_{m \times n} \Leftrightarrow r_i + kr_j;$
- $A_{m \times n}E_n(ij(k)) \Leftrightarrow c_j + kc_i.$

## 性质 (左行右列)

对矩阵  $A_{m \times n}$  进行一次初等行变换, 相当于左乘一个  $m$  阶初等矩阵;  
对矩阵  $A_{m \times n}$  进行一次初等列变换, 相当于右乘一个  $n$  阶初等矩阵.

# 初等变换和初等矩阵

- 初等变换的逆矩阵对应初等矩阵的逆矩阵：
  - $E(i, j)^{-1} = E(i, j);$
  - $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}));$
  - $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k)).$

# 初等矩阵和可逆矩阵

性质

方阵  $A$  可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_l$ , 使得  $A = P_1 P_2 \cdots P_l$ .

# 初等矩阵和可逆矩阵

## 性质

方阵  $A$  可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_l$ , 使得  $A = P_1 P_2 \cdots P_l$ .

## 推论

可逆矩阵  $A$  的标准形是单位阵.

# 矩阵的等价和初等矩阵

## 定理

$A, B$  都为  $m \times n$  矩阵, 则

- $A \overset{r}{\sim} B$  当且仅当存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$ , 使  $PA = B$ ;
- $A \overset{c}{\sim} B$  当且仅当存在  $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使  $AQ = B$ ;
- $A \sim B$  当且仅当存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  和  $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使  $PAQ = B$ .

# 矩阵的等价和初等矩阵

## 定理

$A, B$  都为  $m \times n$  矩阵, 则

- $A \overset{r}{\sim} B$  当且仅当存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$ , 使  $PA = B$ ;
- $A \overset{c}{\sim} B$  当且仅当存在  $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使  $AQ = B$ ;
- $A \sim B$  当且仅当存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  和  $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使  $PAQ = B$ .

## 推论

方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E$ .

## 初等变换的应用 1

- 应用 1: 已知矩阵  $A, B$  等价, 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = B$ .



## 初等变换的应用 1

- 应用 1: 已知矩阵  $A, B$  等价, 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = B$ .

$$P(A : E) = (PA : P) = (B : P)$$

$$(A : E) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (B : P)$$

## 初等变换的应用 1

- 应用 1: 已知矩阵  $A, B$  等价, 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = B$ .

$$P(A : E) = (PA : P) = (B : P)$$

$$(A : E) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (B : P)$$

- 思路: 对  $(A : E)$  作初等行变换, 把  $A$  变为  $B$ , 则单位阵  $E$  记录了相应初等行变换化为可逆矩阵  $P$ .

## 例子

例

设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$  的行最简形矩阵为  $F$ , 求  $F$ . 并求一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = F$ .

## 例子

例

设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$  的行最简形矩阵为  $F$ , 求  $F$ . 并求一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = F$ .

- 这里的  $P$  不唯一. ( $A$  可逆时,  $P$  唯一.)

## 初等变换的应用 2

- 应用 2: 判断方阵  $A$  是否可逆并求逆矩阵. 即  $PA = E$  是否能求出可逆  $P$ .

## 初等变换的应用 2

- 应用 2: 判断方阵  $A$  是否可逆并求逆矩阵. 即  $PA = E$  是否能求出可逆  $P$ .

$$P(A : E) = (PA : P) = (E : P = A^{-1})$$

$$(A : E) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (B : A^{-1})$$

## 初等变换的应用 2

- 应用 2: 判断方阵  $A$  是否可逆并求逆矩阵. 即  $PA = E$  是否能求出可逆  $P$ .

$$P(A : E) = (PA : P) = (E : P = A^{-1})$$

$$(A : E) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (E : A^{-1})$$

- 思路: 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A \stackrel{r}{\sim} E$ . 对  $(A : E)$  作初等行变换, 把  $A$  变为  $E$ , 则  $(A : E)$  中的单位阵  $E$  记录了相应初等行变换化为  $A^{-1}$ .
- 注: 也可

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

## 例子

例  
设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ , 证明  $A$  可逆, 并求  $A^{-1}$ .



## 初等变换的应用 3

- 应用 3: 求  $A^{-1}B$  和  $BA^{-1}$ .  
(更一般地, 解矩阵方程  $AX = B$  和  $XA = B$ .)

## 初等变换的应用 3

- 应用 3: 求  $A^{-1}B$  和  $BA^{-1}$ .  
(更一般地, 解矩阵方程  $AX = B$  和  $XA = B$ .)

$$P(A : B) = (PA : PB) = (E : A^{-1}B)$$

$$(A : B) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (E : A^{-1}B)$$

## 初等变换的应用 3

- 应用 3: 求  $A^{-1}B$  和  $BA^{-1}$ .  
(更一般地, 解矩阵方程  $AX = B$  和  $XA = B$ .)

$$P(A : B) = (PA : PB) = (E : A^{-1}B)$$

$$(A : B) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (E : A^{-1}B)$$

- 思路: 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E$ . 对  $(A : B)$  作初等行变换, 把  $A$  变为  $E$ , 则  $B$  记录了相应初等行变换化为  $A^{-1}B$ .
- 注: 也可  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$  求  $BA^{-1}$ .

## 初等变换和线性方程组求解

例

求解矩阵方程  $AX = B$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

# 初等变换和线性方程组求解

例

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 & = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 & = 0. \end{cases}$$

# 小结

- 1、 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵;
- 2、 初等矩阵和初等变换;
- 3、 初等变换的应用.
  - 求  $A^{-1}$ ;
  - 解矩阵方程  $AX = B$  和  $XA = B$ .

- P77-P78. 1-(4), 2, 4-(2), 6-(1).

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2022 年 9 月 25 日