

《线性代数》第二章作业 (5 月 14 日提交)

临班 370

2023 年 4 月 12 日

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

1. 判断题 (错误请给出说明或反例. 每题 2 分, 共 20 分):

- (1) $|A + B| = |A| + |B|$.
- (2) $|k \cdot A| = k \cdot |A|$.
- (3) $|AB| = |BA|$.
- (4) $AB = BA$.
- (5) $A^*A = AA^*$.
- (6) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
- (7) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
- (8) $A^2 = O$, 则 $A = O$.
- (9) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- (10) 若 $AX = AY, A \neq O$, 则 $X = Y$.

2. 填空题 (每空 3 分, 共 15 分):

- (1) 已知矩阵 $A, B, C = (c_{ij})_{s \times n}$, 满足 $AC = CB$, 则 B 是 _____ 阶矩阵.
- (2) 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $X =$ _____.
- (3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^* =$ _____, $A^{-1} =$ _____.
- (4) n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 4A - E = 0$, 则 $A^{-1} =$ _____.

3. 计算题 (每题 10 分, 共 50 分):

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 用二项式展开计算 A^{10} .

(2) 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $A = \alpha\beta^T$, 求 A^{100} .

(3) 用 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$, 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

(4) A 为 4 阶方阵, $|A| = 2$, 求 $|(\frac{1}{2}A)^{-1} - 3A^*|$.

(5) 求矩阵 X , 使得 $AX = 2X + A$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 证明题 (第 (1) 题 5 分, 第 (2) 题 10 分, 共 15 分):

(1) $AB = A + B$, 证明 $A - E$ 可逆.

(2) 设列向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 满足 $X^T X = 1$, $H = E - 2XX^T$.

证明: H 为对称矩阵, 且 $HH^T = E$.