

## Lec-4. 独立性

主讲教师：吴利苏 ([wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn))

主页：<http://wulisu.cn>

# 目录

## 1. 条件概率例题

## 2. 独立性

## 3. 例题

## 例

有一批同型号的节能灯, 已知其中由一厂生产的占 15%, 二厂生产的占 80%, 三厂生产的占 5%. 又知这三厂的节能灯次品率分别为 2%, 1%, 3%. 问

- (1) 从这批节能灯中任取一件, 求它是次品的概率.
- (2) 从这批节能灯中任取一件, 发现是次品, 那么它分别是由各厂生产的概率是多少?

解:  $A = \{\text{取到的是一只次品}\}$ ,  
 $B_i = \{\text{取到的产品是 } i \text{ 厂的节能灯}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  为  $S$  的一个划分. 则有

$$P(B_1) = 0.15, \quad P(B_2) = 0.80, \quad P(B_3) = 0.05$$

$$P(A|B_1) = 0.002, \quad P(A|B_2) = 0.01, \quad P(A|B_3) = 0.03.$$

(1) 由全概率公式

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.0125.$$

(2) 贝叶斯 (Bayes) 公式  $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^3 P(B_j)P(A|B_j)}$

$$P(B_1|A) = 0.24, \quad P(B_2|A) = 0.64, \quad P(B_3|A) = 0.12. \quad \square$$

## 例

对以往数据分析, 当机器调整良好时, 产品合格率为 98%, 而当机器发生故障时合格率为 55%, 每天早上机器开动时, 机器调整良好时概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格时, 机器调整良好的概率.

解:  $A = \{\text{产品合格}\}$ ,  $B = \{\text{机器调整良好}\}$ , 求  $P(B|A)$ .

$$P(A|B) = 0.98, P(A|\bar{B}) = 0.55, P(B) = 0.95, \\ P(\bar{B}) = 0.05.$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} = 0.97. \quad \square$$

95% 是由以往数据分析得到的先验概率,  
97% 是得到信息之后再重新加以修正的后验概率.

## 例

根据以往的临床记录, 某种诊断癌症的试验具有如下效果: 设

$A = \{\text{试验反应是阳性}\},$

$C = \{\text{被诊断患有癌症}\}.$

则  $P(A|C) = 0.95, P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.95.$

已知某群体  $P(C) = 0.005$ , 试求  $P(C|A)$ , 问这种方法能否用于普查?

解:

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})} = 0.087.$$

若用于普查, 则准确性只有 8.7%, 也就是 1000 个具有阳性反应的病人中只有 87 人确定患癌症. 所以不宜用于普查. 若阳性需要作进一步检查. □



## 独立性

- 一般情况下,

$$P(B|A) \neq P(B).$$

## 独立性

- 一般情况下,

$$P(B|A) \neq P(B).$$

- 但若

$$P(B|A) = P(B)$$

## 独立性

- 一般情况下,

$$P(B|A) \neq P(B).$$

- 但若

$$P(B|A) = P(B)$$

$\Rightarrow A, B$  独立.

## 例

有 10 件产品，其中 8 件为正品，2 件次品. 从中取 2 次，每次取 1 件.

(1) 采用不放回抽样;

(2) 采用放回抽样.

设  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到正品}\}$ ,  $i = 1, 2$ . 比较  $P(A_2|A_1)$  与  $P(A_2)$ .

## 例

有 10 件产品，其中 8 件为正品，2 件次品. 从中取 2 次，每次取 1 件.

(1) 采用不放回抽样;

(2) 采用放回抽样.

设  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到正品}\}$ ,  $i = 1, 2$ . 比较  $P(A_2|A_1)$  与  $P(A_2)$ .

解:

- 不放回抽样:  $P(A_2|A_1) = \frac{7}{9} \neq P(A_2) = \frac{8}{10}$ .
- 放回抽样:  $P(A_2|A_1) = \frac{8}{10} = P(A_2)$ . □

因此, 放回抽样时,  $A_1$  的发生对  $A_2$  的发生概率不影响.

$$P(A_2 | A_1) = P(A_2) \Rightarrow P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2)$$

且另一方面

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1) P(A_2)}{P(A_2)} = P(A_1),$$

即  $A_2$  的发生对  $A_1$  的发生概率也不影响.  
此时就称事件  $A_1$  与  $A_2$  相互独立.

## 独立性

### 定义

设  $A, B$  两事件, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称  $A$  与  $B$  相互独立, 简称**独立**.

## 独立性

### 定义

设  $A, B$  两事件, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称  $A$  与  $B$  相互独立, 简称**独立**.

之所以用上述方式定义, 一是因为  $A$  与  $B$  的对称性, 二是不需要条件概率存在的条件, 即事件的概率可以为 0.



## 定理

- $P(AB) = P(A)P(B) \stackrel{P(A)>0}{\iff} P(B|A) = P(B).$
- $P(AB) = P(A)P(B) \stackrel{P(B)>0}{\iff} P(A|B) = P(A).$

## 定理

- $P(AB) = P(A)P(B) \xLeftrightarrow{P(A)>0} P(B|A) = P(B).$
- $P(AB) = P(A)P(B) \xLeftrightarrow{P(B)>0} P(A|B) = P(A).$

直观来看, 若  $A$  与  $B$  相互独立, 则不论  $A$  是否发生, 都不能提供  $B$  是否发生的信息, 反之也是. 这就有下面的性质.

## 定理

下列说法等价 (TFAE).

- $A, B$  独立;
- $\bar{A}, B$  独立;
- $A, \bar{B}$  独立;
- $\bar{A}, \bar{B}$  独立.

证明：仅证

$$P(AB) = P(A)P(B) \iff P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}).$$

当  $P(AB) = P(A)P(B)$  时,

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(A - AB) \\ &= P(A) - P(AB) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(\bar{B}). \end{aligned}$$

反之也成立.



## 多事件的独立性

### 定义

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $n$  个随机事件, 若对  $2 \leq k \leq n$ , 均有:

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}),$$

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立.

## 三事件的独立性

特别地, 对于事件  $A, B, C$  相互独立的定义为:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{array} \right.$$

## 三事件的独立性

特别地, 对于事件  $A, B, C$  相互独立的定义为:

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

两两独立  $\stackrel{?}{\Rightarrow}$  相互独立?

## 三事件的独立性

特别地, 对于事件  $A, B, C$  相互独立的定义为:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{array} \right\} \text{ 两两独立}$$

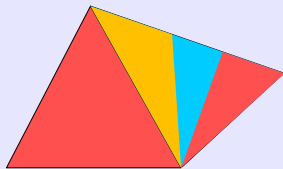
两两独立  $\stackrel{\times}{\Rightarrow}$  相互独立?



## 例

有一个正四面体, 现在给一面涂上红色, 一面涂黄色, 一面涂蓝色, 还有一面涂红黄蓝. 现任取一面, 令

$A = \{\text{含红色}\}$ ,  $B = \{\text{含黄色}\}$ ,  $C = \{\text{含蓝色}\}$ .  
问  $A, B, C$  是否两两独立? 是否相互独立?



解: 对四面红, 黄, 蓝, 三色分别标 1, 2, 3, 4.

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 4\}, B = \{2, 4\},$$

$$C = \{3, 4\}.$$

$$AB = BC = AC = ABC = \{4\}.$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = P(ABC) = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

故, 两两独立但不相互独立.

## 推论

- (1) 若  $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 3)$  相互独立, 则其中任意  $k (2 \leq k \leq n)$  个事件也相互独立.
- (2) 若  $n$  个事件  $A_1, \dots, A_n$  相互独立, 则将  $A_1, \dots, A_n$  中任意个事件换成它们的对立事件, 所得  $n$  个事件仍相互独立.
- (3) 若  $A_1, \dots, A_n$  相互独立, 则

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_n) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) \end{aligned}$$

## 例 (射击问题)

设每一名机枪手击落飞机的概率都是 0.2, 若 10 名机枪手同时射击一架飞机, 问击落飞机的概率.

## 例 (射击问题)

设每一名机枪手击落飞机的概率都是 0.2, 若 10 名机枪手同时射击一架飞机, 问击落飞机的概率.

解:  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 人击落飞机}\}, i = 1, \dots, 10.$

$B = \{\text{击落飞机}\}.$

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10},$$

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{10}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_{10})$$

$$= 1 - 0.8^{10} = 0.893.$$



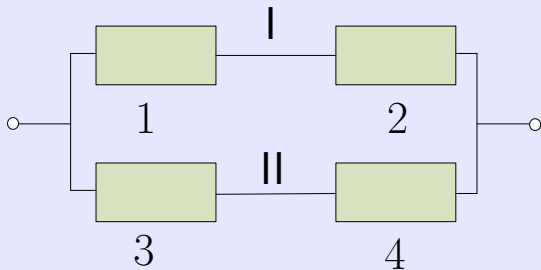
实际问题中,常常不是用定义去验证事件的独立性,而是由实际情形来判断其独立性.

一般,出现  $A, B$  没有关联或关联很微弱,或出现"各自", "同时", "互不干扰", "独立地"等字眼,则可认为  $A, B$  是独立的.

一旦确定事件是相互独立的,在计算积事件的概率时,尽可转化为事件概率的乘积进行计算.

## 例

设有 4 个独立构成的系统, 设每个元件能正常运行的概率为  $P_i$ . 求系统正常运行的概率.



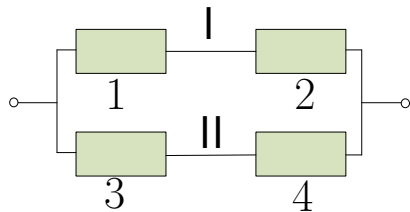
解:

$A_i = \{\text{第} i \text{ 个元件运行正常}\},$

$i = 1, 2, 3, 4.$

$A = \{\text{系统正常运行}\}.$

系统由  $I, II$  两条线路组成, 当且仅当至少有一条线路中的两个元件正常工作时, 系统正常运行.  $A = A_1A_2 \cup A_3A_4,$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - \\ &\quad P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4). \end{aligned}$$



## 例

某技术工人长期进行某项技术操作, 他经验丰富, 因嫌按规定操作太过烦琐, 就按照自己的方法进行, 但这样做有可能发生事故, 设他每次操作发生事故的概率为  $P = 0.0001$ , 独立重复进行了  $n$  次. 求

- (1)  $n$  次都不发生事故的概率;
- (2) 至少有一次发生事故的概率.

解:  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 不发生事故}\}, i = 1, \dots, n.$

$B = \{n \text{ 次都不发生}\}, C = \{\text{至少有一次}\}.$

则  $A_1, \dots, A_n$  相互独立.  $P(A_i) = 1 - p = 0.9999.$

$$P(B) = P(A_1 \dots A_n) = (1 - p)^n,$$

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - (1 - p)^n,$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $P(C) \rightarrow 1.$  □

实际推断原理: 小概率事件  $P(A) = 0.0001$ , 进行一次试验,  $A$  几乎不发生.

但"小概率事件"在大量独立重复试验中"至少有一次发生"几乎是必然的. 不能忽视.

例如,  $n = 7000, P(C) = 0.5053 > 0.5.$

### 例

甲, 乙, 丙三人同时对飞机射击. 三人击中的概率分别为  $0.4, 0.5, 0.7$ . 飞机被一人击中而被击落的概率  $0.2$ , 被两人击中落下的概率为  $0.6$ , 被三人击中必定落下. 求飞机被击落的概率.

解:  $A_i = \{\text{恰有 } i \text{ 人击中}\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $A = \{\text{甲击中}\}$ ,  
 $B = \{\text{乙击中}\}$ ,  $C = \{\text{丙击中}\}$ ,  $D = \{\text{飞机被击落}\}$ .

$A_0, A_1, A_2, A_3$  是  $S$  的一个划分, 且  $P(D|A_0) = 0$ ,  
 $P(D|A_1) = 0.2$ ,  $P(D|A_2) = 0.6$ ,  $P(D|A_3) = 1$ .

全概率公式  $P(D) = \sum_{i=0}^3 P(D|A_i)P(A_i)$ .

- $A_0 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .

$$P(A_0) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0.6 \times 0.5 \times 0.3 = 0.09.$$

- $A_1 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ . 互斥

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C) \\ &= P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) \\ &= 0.36 \end{aligned}$$

- $A_2 = AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC.$

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C) \\ &= 0.41. \end{aligned}$$

- $A_3 = ABC.$

$$P(A_3) = P(A)P(B)P(C) = 0.14.$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A_0)P(A_0) + P(D|A_1)P(A_1) + \\ &\quad P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3) \\ &= 0.458. \end{aligned} \quad \square$$