# 《线性代数》第五章作业（6 月 18 日提交）

临班 370

2023 年 5 月 23 日

班级:______________ 姓名:_____________ 学号:_________________

（注意：本章所有矩阵都为实矩阵.）

1. 判断题:

(1) (相似不变量) 若矩阵 $A, B$ 相似, 则

① 存在可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP = B$.

② $A, B$ 具有相同的阶次.

③ $R(A) = R(B)$, 从而 $A \sim B$.

④ $A, B$ 的特征多项式相等.

⑤ $A, B$ 的特征值相等.

⑥ $|A| = |B|$. 进一步，$A$ 可逆当且仅当 $B$ 可逆.

⑦ $trA = trB$.

(2) 矩阵 $A_n$ 可以相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

$\Leftrightarrow$ $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

$\Leftrightarrow$ 每个特征值的代数重数和几何重数相等.

$\Leftrightarrow$ 极小多项式是一次因式的乘积.

$\Leftarrow$ 实对称矩阵以及和实对称相似的矩阵可相似对角化.

$\Leftarrow$ 具有 $n$ 个互不相同特征值的矩阵可相似对角化.

(3) (合同不变量) 若矩阵 $A, B$ 是合同的, 则

① 存在可逆矩阵 $P$, 使得 $P^TAP = B$.

② $A, B$ 具有相同的阶次.

③ $R(A) = R(B)$, 从而 $A \sim B$.

④ $A, B$ 的正定性相同.

⑤ $A, B$ 行列式的符号相同.

⑥ $A$ 可逆当且仅当 $B$ 可逆.

(4) 矩阵 $A$ 可以合同对角化
$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $P$, 使得 $P^TAP$ 为对角矩阵.
$\Leftrightarrow$ $A^T = A, A$ 为对称阵. 任意对称矩阵都可以合同对角化.
(5) (正交相似不变量) 若矩阵 $A, B$ 是正交相似的, 则

① 存在正交矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$. 即是相似也是合同.

② $A, B$ 具有相同的阶次.

③ $R(A) = R(B)$, 从而 $A \sim B$.

④ $A, B$ 的特征多项式相等.

⑤ $A, B$ 的特征值相等.

⑥ $|A| = |B|$. 进一步，$A$ 可逆当且仅当 $B$ 可逆.

⑦ $trA = trB$.

⑧ $A, B$ 的正定性相同.

(6) 矩阵 $A$ 可以合同对角化
$\Leftrightarrow$ 存在正交矩阵 $P$, 使得 $P^TAP = P^{-1}AP$ 为对角矩阵.
$\Leftrightarrow$ $A^T = A, A$ 为对称阵. 任意对称矩阵都可以正交相似对角化.

2. 计算题：

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 计算：

① $\psi(A)=A^10-5A^8+3E$.

② $|\psi(A)|$.

(2) 设二次型 $f(X)=X^TAX=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$.

① 写出二次型 $f$ 的矩阵;

② 求正交变换 $X=PY$, 把二次型 $f$ 化为标准形.

③ 判断 $f$ 是否为正定二次型.

④ 证明：$\min_{X\neq 0}\frac{f(X)}{X^TX}=2$.

4. 证明题：

(1) 设 $\lambda$ 为 $n$ 阶可逆矩阵 $A$ 的特征值，证明 $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 $A^*$ 的特征值.