线性代数-14

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 22 日

本次课内容

1. 向量空间

2. 向量的内积: 欧式空间

向量空间的定义

- 设 $V \neq \varnothing$ 为 n 维向量的集合 (向量组),
  若 V 对向量的加法和数乘两种运算封闭: $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, 有

(1). $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$;
(2). $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha} \in V$.

则称 V 为一个向量空间.

- 设 $V \neq \varnothing$ 为 n 维向量的集合 (向量组),
  若 V 对向量的加法和数乘两种运算封闭: $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, 有

  (1). $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$;
  (2). $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha} \in V$.

  则称 V 为一个向量空间.
- 条件 (1) 和 (2) 与下面描述等价:

  ⋆ $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}$, 则 $k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} \in V$.

向量空间的定义

- 设 $V \neq \varnothing$ 为 n 维向量的集合 (向量组),
  若 V 对向量的加法和数乘两种运算封闭: $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, 有

$$(1).\ \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V;$$
$$(2).\ \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha} \in V.$$

  则称 V 为一个向量空间.
- 条件 (1) 和 (2) 与下面描述等价:

$$\star\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}, \text{ 则 } k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} \in V.$$

- 向量空间必包含零向量.
  所以, 若 $\mathbf{0} \notin V$, 则 V 不是向量空间.

向量空间

- 上述加法和数乘两种运算称为向量空间 V 上的线性结构.
- 向量组 $\xrightarrow{+\text{线性结构}}$ 向量空间.
- 集合 $\xrightarrow{+\text{线性结构}}$ 线性空间. Chapter 7（选学）.
- 向量空间/线性空间 $\xrightarrow{+\text{内积}}$ 欧式空间.

例

下列哪些向量组构成向量空间，

1. n 维向量全体 $\mathbb{R}^n$;
2. 集合 $V = \{X = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$;
3. 集合 $V = \{X = (1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$;
4. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解集 $S = \{X \mid AX = 0\}$;
5. 非齐次线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的解集 $S = \{X \mid AX = \boldsymbol{\beta}\}$;
6. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为两个 n 维向量，集合 $V = \{\boldsymbol{\lambda\alpha} + \boldsymbol{\mu\beta} \mid \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}\}$.

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1. n 维向量全体 $\mathbb{R}^n$; $\surd$
2. 集合 $V=\{X=(0,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$;$\surd$
3. 集合 $V=\{X=(1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$;$\times$
4. 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解集 $S=\{X \mid AX=0\}$;$\surd$
5. 非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解集 $S=\{X \mid AX=\boldsymbol{\beta}\}$; $\times$
6. $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为两个 n 维向量, 集合 $V=\{\boldsymbol{\lambda\alpha}+\boldsymbol{\mu\beta} \mid \boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}\}$.$\surd$

例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1. n 维向量全体 $\mathbb{R}^n$; $\surd$
2. 集合 $V=\{X=(0,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$;$\surd$
3. 集合 $V=\{X=(1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$;$\times$
4. 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解集 $S=\{X\mid AX=0\}$;$\surd$ <解空间>
5. 非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解集 $S=\{X\mid AX=\boldsymbol{\beta}\}$; $\times$
6. $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为两个 n 维向量，集合 $V=\{\boldsymbol{\lambda\alpha}+\boldsymbol{\mu\beta}\mid\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}\}$.$\surd$
   < 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$生成的空间 >

生成空间

由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$生成的空间定义为

$$V = \{X = \boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 或 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$.

由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$生成的空间定义为

$$V = \{X = \boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 或 $\mathsf{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$.

- $$\mathbb{R}^2 = L\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$

生成空间

由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$生成的空间定义为

$$V = \{X = \boldsymbol{\lambda}_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_m \boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 或 $\mathsf{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$.

- $$\mathbb{R}^2 = L\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$
- $$\mathbb{R}^3 = L(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}).$$

子空间的定义

定义

设 V_1 为向量空间 V 的一个非空子集. 若 V_1 也是一个向量空间, 则称 V_1 为向量空间 V 的子空间, 可记为 $V_1 < V$.

子空间的定义

定义

设 V_1 为向量空间 V 的一个非空子集. 若 V_1 也是一个向量空间, 则称 V_1 为向量空间 V 的子空间, 可记为 $V_1 < V$.

- 例: $V = \{X = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.
- 例: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为两个 n 维向量, 集合 $L = \{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

向量空间的基和维数

- 向量组 $\xrightarrow{+\text{线性结构}}$ 向量空间.
- 向量组的最大无关组 $\longrightarrow$ 向量空间的基.
- 向量组的秩 $\longrightarrow$ 向量空间的维数.

- 向量组 $\xrightarrow{\text{+线性结构}}$ 向量空间.
- 向量组的最大无关组 $\longrightarrow$ 向量空间的基.
- 向量组的秩 $\longrightarrow$ 向量空间的维数.

定义 (定义 11)

设 V 为向量空间，$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \in V$, 若满足

(i) $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

(ii) V 中的任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间 V 的一组基，r 称为向量空间 V 的维数, 记为 $\dim V = r$. 此时称 V 为 r 维向量空间.

例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1. n 维向量全体 $\mathbb{R}^n$;

2. $V = \{X = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$;

3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\}$;

4. n 维向量组 $A : \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的生成空间 $L = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1. n 维向量全体 $\mathbb{R}^n$;
   $\dim \mathbb{R}^n = n$
2. $V = \{X = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$;
3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\}$;
4. n 维向量组 $A : \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的生成空间 $L = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$.

例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1. n 维向量全体 $\mathbb{R}^n$;
   $\dim \mathbb{R}^n = n$
2. $V = \{X = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$;
   $\dim V = n - 1$
3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\}$;
4. n 维向量组 $A : \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的生成空间 $L = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

例子

例

求下列向量空间的一组基和维数，

1. n 维向量全体 $\mathbb{R}^n$;
   $\dim \mathbb{R}^n = n$
2. $V = \{X = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$;
   $\dim V = n - 1$
3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\}$;
   $\dim S = n - R(A)$
4. n 维向量组 $A : \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的生成空间 $L = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

例子

例

求下列向量空间的一组基和维数，

1. n 维向量全体 $\mathbb{R}^n$;
   $\dim \mathbb{R}^n = n$
2. $V = \{X = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$;
   $\dim V = n - 1$
3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\}$;
   $\dim S = n - R(A)$
4. n 维向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的生成空间 $L = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.
   $\dim L = R_A$.

定义 (定义 12)

取定向量空间的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

数组 $x_1, \cdots, x_r$ 称为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标.

定义 (定义 12)

取定向量空间的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

数组 $x_1, \cdots, x_r$ 称为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标.

关于坐标的一些常用写法:

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)X_{\boldsymbol{\beta}}$$

定义 (定义 12)

取定向量空间的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

数组 $x_1, \cdots, x_r$ 称为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标.

关于坐标的一些常用写法:

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)X_{\boldsymbol{\beta}}$$

- 称基本单位向量 $e_1, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基 (自然基).

例 5

例

设

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，并求 $\boldsymbol{\beta}$ 在这组基下的坐标.

解法：解矩阵方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$. 对 $(A, \boldsymbol{\beta})$ 进行初等行变换.

例 7

例

已知向量空间 $V = \{\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. 求

- V 的一组基;
- $\dim V$.

例 (Lecture-13)

设向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)K_{s\times t},$$

向量组 A 线性无关. 证明: $R_B=R(K)$.

令向量空间 $V=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$. 设 $\boldsymbol{\beta}_i$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 下的坐标为 X_i, 即

$$\boldsymbol{\beta}_i=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)X_i,$$

则

$$K=(X_1,\cdots,X_t).$$

$R_B=R(K)$, 即 $L(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$ 的维数为坐标向量组的秩.

基变换公式

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 都为 $\mathbb{R}^3$ 的基.

$$\mathbb{R}^3 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$$

- 向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 可由向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)P.$$

上式称为 $\mathbb{R}^3$ 从基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的基变换公式.

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都为 $\mathbb{R}^3$ 的基.

$$\mathbb{R}^3 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

- 向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P.$$

上式称为 $\mathbb{R}^3$ 从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的基变换公式.

矩阵 $P = A^{-1}B$ 称为从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

坐标变换公式

- 任意向量 $X=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

称为两组基之间的坐标变换公式.

例

设 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为

$$I:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$II:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$$

1. 求从基 I 到基 II 的过渡矩阵;
2. 向量 X 在基 I 下的坐标为 $(-2,1,2)^T$, 求向量 X 在基 II 下的坐标.

定义

设 $f: V \to W$ 是向量空间 V 到 W 的一个映射, 若

- $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \forall \alpha, \beta \in V$;
- $f(\lambda \cdot \alpha) = \lambda \cdot f(\alpha), \forall \alpha \in V, \lambda \in \mathbb{R}$,

则称 f 为向量空间 V 到 W 的一个线性映射.

两个向量空间之间的线性映射 (补充)

定义

设 $f\colon V \to W$ 是向量空间 V 到 W 的一个映射, 若

- $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \forall \alpha, \beta \in V$;
- $f(\lambda \cdot \alpha) = \lambda \cdot f(\alpha), \forall \alpha \in V, \lambda \in \mathbb{R}$,

则称 f 为向量空间 V 到 W 的一个线性映射.

- 特别地, 向量空间 V 到自身的线性映射称为线性变换.

两个向量空间之间的线性映射 (补充)

定义

设 $f\colon V \to W$ 是向量空间 V 到 W 的一个映射, 若

- $f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = f(\boldsymbol{\alpha}) + f(\boldsymbol{\beta}), \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$;
- $f(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot f(\boldsymbol{\alpha}), \forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$,

则称 f 为向量空间 V 到 W 的一个线性映射.

- 特别地, 向量空间 V 到自身的线性映射称为线性变换.

性质 (线性映射与矩阵)

设 $\dim V = m, \dim W = n$, 则存在一个 $n \times m$ 矩阵 A, 使得

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = A\boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V.$$

定义

设 $f\colon V \to W$ 是向量空间 V 到 W 的一个映射, 若

- $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \forall \alpha, \beta \in V$;
- $f(\lambda \cdot \alpha) = \lambda \cdot f(\alpha), \forall \alpha \in V, \lambda \in \mathbb{R}$,

则称 f 为向量空间 V 到 W 的一个线性映射.

- 特别地, 向量空间 V 到自身的线性映射称为线性变换.

性质 (线性映射与矩阵)

设 $\dim V = m, \dim W = n$, 则存在一个 $n \times m$ 矩阵 A, 使得

$$f(\alpha) = A\alpha, \forall \alpha \in V.$$

- 固定 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 则 $A = (f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_m))$.

定义

设 n 维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称 $(X, Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ 为向量 X 与 Y 的内积.

- 内积有时也被记为 $[X, Y]$, $< X, Y >$.
- $(X, Y) = X^T Y = Y^T X$.

内积的性质

- 对称性：$(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质：
  - $(\boldsymbol{\lambda} X, Y) = \boldsymbol{\lambda}(X, Y) = (X, \boldsymbol{\lambda} Y), \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$;
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y)$;
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2)$.
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

内积的性质

- 对称性：$(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质：
  - $(\boldsymbol{\lambda} X, Y) = \boldsymbol{\lambda}(X, Y) = (X, \boldsymbol{\lambda} Y), \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$;
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y)$;
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2)$.
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组 $\xrightarrow{+\text{线性结构}}$

内积的性质

- 对称性：$(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质：
  - $(\boldsymbol{\lambda} X, Y) = \boldsymbol{\lambda}(X, Y) = (X, \boldsymbol{\lambda} Y), \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$;
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y)$;
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2)$.
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组 $\xrightarrow{+\text{线性结构}}$ 向量空间

内积的性质

- 对称性：$(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质：
  - $(\boldsymbol{\lambda} X, Y) = \boldsymbol{\lambda}(X, Y) = (X, \boldsymbol{\lambda} Y), \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$;
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y)$;
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2)$.
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组 $\xrightarrow{+\text{线性结构}}$ 向量空间 $\xrightarrow{+\text{内积}}$

内积的性质

- 对称性：$(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质：
  - $(\boldsymbol{\lambda} X, Y) = \boldsymbol{\lambda}(X, Y) = (X, \boldsymbol{\lambda} Y), \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$;
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y)$;
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2)$.
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组 $\xrightarrow{+\text{线性结构}}$ 向量空间 $\xrightarrow{+\text{内积}}$ 欧式空间.

内积的性质

- 对称性：$(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质：
  - $(\boldsymbol{\lambda} X, Y) = \boldsymbol{\lambda}(X, Y) = (X, \boldsymbol{\lambda} Y), \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$;
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y)$;
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2)$.
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组 $\xrightarrow{+\text{线性结构}}$ 向量空间 $\xrightarrow{+\text{内积}}$ 欧式空间.
- 在欧式空间中可以讨论向量的长度，角度，垂直 (正交)等几何概念.

长度的定义

- 称
$$||X|| = \sqrt{(X,X)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$
为 n 维向量 X 的长度 (或范数).
- 向量长度满足以下性质:
  - 非负性: $X = 0 \Leftrightarrow (X,X) = 0$, $X \neq 0 \Leftrightarrow (X,X) > 0$;
  - 齐次性: $||\boldsymbol{\lambda} X|| = |\boldsymbol{\lambda}| \cdot ||X||$
- 若 $||X|| = 1$, 则称 X 为单位向量.
- 若 $\alpha \neq 0$, 则 $X = \frac{\alpha}{||\alpha||}$ 为一个单位向量, 此过程称为单位化.

夹角和正交的定义

- 设 X, Y 为 n 维非零向量，则

$$\theta = \arccos \frac{(X, Y)}{||X|| \cdot ||Y||}$$

  称为向量 X, Y 的夹角.
- 若 $(X, Y) = 0$, 则称向量 X 和 Y 正交.

小结

- 向量空间、解空间、生成空间、子空间、基、维数、坐标;
- 基变换公式、过渡矩阵、坐标变换公式;
- 内积、长度、夹角、正交.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 22 日