《线性代数》第五章作业（6 月 18 日提交）

临班 370

2023 年 6 月 21 日

班级：______________ 姓名：_____________ 学号：_________________

（注意：本章所有矩阵都默认为实矩阵.）

1. 判断题：(全正确)

(1) (相似不变量) 若矩阵 A, B 相似, 则

① 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$.

② A, B 具有相同的阶次.

③ $R(A) = R(B)$, 从而 $A \sim B$.

④ A, B 的特征多项式相等.

⑤ A, B 的特征值相等.

⑥ $|A| = |B|$. 进一步，A 可逆当且仅当 B 可逆.

⑦ $trA = trB$.

(2) 矩阵 A_n 可以相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

$\Leftrightarrow$ 每个特征值的代数重数和几何重数相等.

$\Leftrightarrow$ 极小多项式是一次因式的乘积.

$\Leftarrow$ 实对称矩阵以及和实对称相似的矩阵可相似对角化.

$\Leftarrow$ 具有 n 个互不相同特征值的矩阵可相似对角化.

(3) (合同不变量) 若矩阵 A, B 是合同的, 则

① 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^TAP = B$.

② A, B 具有相同的阶次.

③ $R(A) = R(B)$, 从而 $A \sim B$.

④ A, B 的正定性相同.

⑤ A, B 行列式的符号相同.

⑥ A 可逆当且仅当 B 可逆.

(4) 矩阵 A 可以合同对角化
$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 P^TAP 为对角矩阵.
$\Leftrightarrow$ $A^T = A, A$ 为对称阵. 任意对称矩阵都可以合同对角化.
(5) (正交相似不变量) 若矩阵 A, B 是正交相似的, 则

① 存在正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$. 即是相似也是合同.

② A, B 具有相同的阶次.

③ $R(A) = R(B)$, 从而 $A \sim B$.

④ A, B 的特征多项式相等.

⑤ A, B 的特征值相等.

⑥ $|A| = |B|$. 进一步，A 可逆当且仅当 B 可逆.

⑦ $trA = trB$.

⑧ A, B 的正定性相同.

(6) 矩阵 A 可以正交相似对角化
$\Leftrightarrow$ 存在正交矩阵 P, 使得 $P^TAP = P^{-1}AP$ 为对角矩阵.
$\Leftrightarrow$ $A^T = A, A$ 为对称阵. 任意对称矩阵都可以正交相似对角化.

2. 计算题：

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 计算：

① $\psi(A) = A^{10} - 5A^8 + 3E$.

② $|\psi(A)|$.

解：先求可逆阵 P（或正交阵 P，下面 $P^{-1} = P^T$ 计算更方便）使得 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-1, 1, 5) = \Lambda$,
则 $A = P\mathrm{diag}(-1, 1, 5)P^{-1}$.
$\psi(A) = P \cdot \psi(\Lambda) \cdot P^{-1} = P \cdot \mathrm{diag}(\psi(-1), \psi(1), \psi(5)) \cdot P^{-1}$.
$|\psi(A)| = \psi(-1)\psi(1)\psi(5)$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似. 求：

① x, y.

② 求一个正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

提示：利用特征值相同，或者迹和行列式相同

(3) 设二次型 $f(X) = X^TAX = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$.

① 写出二次型 f 的矩阵;

② 求正交变换 $X = PY$, 把二次型 f 化为标准形.

③ 判断 f 是否为正定二次型.

④ 证明：$\min_{X \neq 0} \frac{f(X)}{X^TX} = 2$.

提示：需要掌握, 原版本有误已修改.

4. 证明题：

(1) 设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的特征值，证明 $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值.
提示：利用定义 $A^*X = \frac{|A|}{\lambda}X$ 或者 $|A^* - \frac{|A|}{\lambda E|=0}$

5. 思考题：

- 矩阵 A 相似对角矩阵 Λ 是指：存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$. 思考这里的可逆矩阵 P 是否唯一. 若不唯一，则设 P_1 和 P_2 都使得 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}AP_2=\Lambda$，问 P_1 和 P_2 的列向量有什么关系？
答：不唯一，同一个特征值对应的列向量组（线性无关的特征向量）等价.
- 矩阵 A 正交相似对角矩阵 Λ 是指：存在正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$. 思考这里的 P 是否唯一. 若不唯一，则设 P_1 和 P_2 都使得 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}AP_2=\Lambda$，问 P_1 和 P_2 的列向量又有什么关系？
答：不唯一，同一个特征值对应的标准正交列向量组（两两正交的单位特征向量）等价.