线性代数-18

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 6 日

本次课内容

1. 方阵的相似对角化

2. 实对称矩阵的正交相似对角化

相似对角化

定义

若存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

为对角阵, 则称 A可以相似对角化(或可对角化), Λ 为 A 的相似标准形.

- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义

若存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

为对角阵, 则称 A可以相似对角化(或可对角化), Λ 为 A 的相似标准形.

- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 对角化问题: 是否存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

引入

- 矩阵 A 可相似对角化

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $AP = P\boldsymbol{\Lambda}$.

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $AP = P\boldsymbol{\Lambda}$.令 $P = (P_1, \cdots, P_n)$, 则

$$A(P_1, \cdots, P_n) = (P_1, \cdots, P_n)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 & & & \\ & \boldsymbol{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\lambda}_1 P_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n P_n)$$

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $AP=P\boldsymbol{\Lambda}$.令 $P=(P_1,\cdots,P_n)$, 则

$$\begin{aligned} A(P_1,\cdots,P_n) &= (P_1,\cdots,P_n)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 & & & \\ & \boldsymbol{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda}_n \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{\lambda}_1 P_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n P_n) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $AP_i=\boldsymbol{\lambda}_i P_i,\ \ i=1,2,\cdots,n,$ $P_1,\cdots,P_n$ 线性无关.

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $AP=P\boldsymbol{\Lambda}$.令 $P=(P_1,\cdots,P_n)$, 则

$$
\begin{aligned}
A(P_1,\cdots,P_n) &= (P_1,\cdots,P_n)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 & & & \\ & \boldsymbol{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda}_n \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\lambda}_1 P_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n P_n)
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$ $AP_i=\boldsymbol{\lambda}_i P_i,\ i=1,2,\cdots,n,\ P_1,\cdots,P_n$ 线性无关.

$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 (可对角化定理)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 (可对角化定理)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

定理 (可对角化定理)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值，则 A 可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.

定理 (可对角化定理)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值，则 A 可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.
- 若 n 阶方阵 A 可相似对角化，则可通过求 A 的所有线性无关特征向量来求可逆阵 P.
- 可逆阵 P 不唯一，并且可能是复矩阵.

例 (例 1)

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

是否可对角化？若能，求可逆阵 P 和对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

例 (例 1)

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

是否可对角化？若能，求可逆阵 P 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda}$.

解法：1. 求特征多项式 $f(\boldsymbol{\lambda}) = |\boldsymbol{\lambda}E - A|$, 由 $f(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ 得特征值;

2. 依次解 $(\boldsymbol{\lambda}_i E - A)X = 0$ 的基础解系，得特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 对应的特征向量;

3. 给出可逆阵 P.

例 (例 4)

问 t 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化.

例 (例 4)

问 t 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可对角化.

- 设 n 阶矩阵 A 的每个特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的重数为 n_i；$(\boldsymbol{\lambda}_i E - A)X = 0$ 的基础解系包含向量的个数为 $m_i = n - R(\boldsymbol{\lambda}_i E - A)$. 则

$$A \text{ 可对角化} \Leftrightarrow \text{对每个特征值 } \boldsymbol{\lambda}_i\text{，都有 } n_i = m_i.$$

例 (例 4)

问 t 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化.

- 设 n 阶矩阵 A 的每个特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的重数为 n_i；$(\boldsymbol{\lambda}_i E-A)X=0$ 的基础解系包含向量的个数为 $m_i=n-R(\boldsymbol{\lambda}_i E-A)$. 则

$$A \text{ 可对角化} \Leftrightarrow \text{对每个特征值 } \boldsymbol{\lambda}_i\text{，都有 } n_i=m_i.$$

- n_i 称为特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的代数重数，m_i 称为特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的几何重数.

例 (例 4)

问 t 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化.

- 设 n 阶矩阵 A 的每个特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的重数为 n_i；$(\boldsymbol{\lambda}_iE-A)X=0$ 的基础解系包含向量的个数为 $m_i=n-R(\boldsymbol{\lambda}_iE-A)$. 则

$$A\text{ 可对角化} \Leftrightarrow \text{对每个特征值 } \boldsymbol{\lambda}_i\text{，都有 } n_i=m_i.$$

- n_i 称为特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的代数重数, m_i 称为特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的几何重数.
- 若只判断矩阵 A 是否可以对角化, 则只需求所有特征值 $\boldsymbol{\lambda}_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n$ 和所有 $R(\boldsymbol{\lambda}_iE-A)$ 即可.

例 (例 5)

证明 4 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似.

例 (例 5)

证明 4 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似.

- 若 A 可对角化, 则 $A \overset{\text{相似}}{\sim} B \Longleftrightarrow$ 特征值相同.

即对于可对角化矩阵, 特征值是完全相似不变量.

设 A 为 n 阶矩阵.

- $R(A)=1 \Leftrightarrow A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量 $\Leftrightarrow$ 行列成比例.

$\Longrightarrow$ A 的特征值为 $\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_2=\cdots=\boldsymbol{\lambda}_n=0$.
且 $\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$;
$\boldsymbol{\lambda}_2=0$ 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\beta}^TX=0$ 的基础解系.

- A 可对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}\neq 0$, 即 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq 0$.

例

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&8&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}(1,2,3),\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1,0).$$

实对称的正交相似对角化

定义

若存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 A可正交相似对角化.

定义

若存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 A可正交相似对角化.

- 正交相似对角化问题: 是否存在正交矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP$$

为对角阵.

定理 (定理 7)

实矩阵 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

定理 (定理 7)

实矩阵 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

- 性质 1: 实对称阵的特征值必为实数.
- 性质 2: 实对称阵的不同特征值对应的特征向量必正交.
- 性质 3: 实对称阵的每个特征值的代数重数与几何重数相等.

定理 (定理 7)

实矩阵 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

- 性质 1：实对称阵的特征值必为实数.
- 性质 2：实对称阵的不同特征值对应的特征向量必正交.
- 性质 3：实对称阵的每个特征值的代数重数与几何重数相等.

推论 (例 2)

实对称矩阵 $A \overset{\text{相似}}{\sim} B \Longleftrightarrow$ 特征值相同.

例 (例 1)

设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一个正交阵 P, 使 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

例 (例 1)

设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

求一个正交阵 P, 使 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解法：1. 计算 $|\boldsymbol{\lambda}E-A|$, 求 A 的特征值;

2. 求 $(\boldsymbol{\lambda}_iE-A)X=0$ 的基础解系, 得 A 的线性无关特征向量;

3. 将基础解系正交化、单位化;

4. 写 $P^{-1}AP=P^TAP=\boldsymbol{\Lambda}$, 注意特征值与特征向量对应顺序.

例 (例 1)

设矩阵
$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
求一个正交阵 P, 使 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解法：1. 计算 $|\boldsymbol{\lambda} E-A|$, 求 A 的特征值; （可先尽量行变换化简）

2. 求 $(\boldsymbol{\lambda}_i E-A)X=0$ 的基础解系, 得 A 的线性无关特征向量;

3. 将基础解系正交化、单位化;

4. 写 $P^{-1}AP=P^TAP=\boldsymbol{\Lambda}$, 注意特征值与特征向量对应顺序.

已知特征值和特征向量，求矩阵

- 已知 $A\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{\xi}_i, i = 1, 2, 3$.
  令 $P = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$ 和 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3)$, 则

$$P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda} \Rightarrow A = P\boldsymbol{\Lambda}P^{-1}.$$

- 已知 $A\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3$.
  令 $P = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$ 和 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3)$, 则

$$P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda} \Rightarrow A = P\boldsymbol{\Lambda}P^{-1}.$$

- 若 A 为实对称矩阵, 已知正交阵 P 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $P^TAP = P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda}$, 则

$$A = P\boldsymbol{\Lambda}P^T.$$

例 (例 3)

已知 3 阶实对称矩阵的特征值为 $\boldsymbol{\lambda}_1 = -1, \boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_3 = 1$, $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为对应于特征值 -1 的特征向量. 求矩阵 A.

例 (例 3)

已知 3 阶实对称矩阵的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1$, $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 为对应于特征值 -1 的特征向量. 求矩阵 A.

- 若 A 为实对称矩阵, 已知正交阵 $P=(P_1,P_2,P_3)$ 和 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2)$, 使得 $P^TAP=P^{-1}AP=\Lambda$. 则

$$A=P\Lambda P^T=P(\lambda_2 E+\mathrm{diag}(\lambda_1-\lambda_2,0,0))P^T$$
$$=\lambda_2 E+(\lambda_1-\lambda_2)P_1P_1^T.$$

例 (例 4)

已知 3 阶实对称矩阵的各行元素之和均为 3, 且向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是线性方程组 $AX = 0$ 的两个解. 求矩阵 A.

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为一元 n 次多项式.

- 若 A 可对角化, 即存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1} A P = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

  则

$$f(A) = P \cdot \operatorname{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}.$$

设
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
为一元 n 次多项式.

- 若 A 可对角化, 即存在可逆矩阵 P, 使得
$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$
则
$$f(A)=P\cdot\mathrm{diag}(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n))\cdot P^{-1}.$$
- 若 A 为对称矩阵, 则存在正交矩阵 P, 使得
$$P^{-1}AP=P^TAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$
则
$$f(A)=P\cdot\mathrm{diag}(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n))\cdot P^T.$$

例 (192 页例 1)

已知

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-2\end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP=\Lambda$. 求 $\varphi(A)=A^k$. （与 Lecture-6 例题对比）

例 (197 页斐波那契数列通项)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求 A^n 和 $(1,0)A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

例 (197 页斐波那契数列通项)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求 A^n 和 $(1,0)A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

解:

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n+1} & \boldsymbol{\lambda}_1^{n} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n} \\ \boldsymbol{\lambda}_1^{n} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n} & \boldsymbol{\lambda}_1^{n-1} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1,0)A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{\lambda}_1^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

为斐波那契数列的第 $n+1$ 项.

例 (197 页斐波那契数列通项)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求 A^n 和 $(1,0)A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. （提示: $\boldsymbol{\lambda}_i^2 + 1 = \sqrt{5}\boldsymbol{\lambda}_i$）

解:

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n+1} & \boldsymbol{\lambda}_1^{n} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n} \\ \boldsymbol{\lambda}_1^{n} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n} & \boldsymbol{\lambda}_1^{n-1} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1,0)A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{\lambda}_1^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}_2^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

为斐波那契数列的第 $n+1$ 项.

例 (P58 习题 3-(5))

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

下次课预告：二次型和对称矩阵

例 (P58 习题 3-(5))

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- 第六章的中心任务: 化简二次型/对称阵.
  寻找可逆 (正交) 线性变换 $X=PY$, 使得
  $$f(X)=f(PY)=Y^TP^TAPY=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$$
  矩阵语言：寻找可逆 (正交) 阵 P，使得 P^TAP 为对角阵.

例 (P58 习题 3-(5))

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- 第六章的中心任务: 化简二次型/对称阵.
  寻找可逆 (正交) 线性变换 $X=PY$, 使得
  $$f(X)=f(PY)=Y^TP^TAPY=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$$
  矩阵语言：寻找可逆 (正交) 阵 P, 使得 P^TAP 为对角阵.

小结

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化

    $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

    $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量

    $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 $=$ 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 $=$ 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\Lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}$.

- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化
    $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵
    $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量
    $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 = 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 = 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\Lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}$.
- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化

    $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

    $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量

    $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 $=$ 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 $=$ 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\Lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}$.
- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化

    $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

    $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量

    $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 $=$ 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 $=$ 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathbf{diag}(f(\boldsymbol{\Lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}$.
- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化

    $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

    $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量

    $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 $=$ 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 $=$ 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\Lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}$.
- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = P^TAP = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathbf{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^T$.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 6 日