线性代数-18

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学，数学学院

本次课内容

1. 二次型和对称矩阵
2. 二次型的化简
3. 合同不变量和正定二次型

二次型和对称矩阵

定义

含 n 个变量二次齐次函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

- 例如二次曲线：$ax^2+bxy+cy^2=1$
- $\Rightarrow a(x+\frac{b}{2a}y)^2+(c-\frac{b^2}{4a})y^2=1$

二次型和对称矩阵

- 组合式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$\Rightarrow f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

- 组合式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$\Rightarrow f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$

- 矩阵式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(X)=X^TAX$, 通常取 A 为对称阵.

- 对任意矩阵 A, $f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T+A}{2} X$, 其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

- 对任意矩阵 A, $f(X) = X^TAX = X^T\frac{A^T+A}{2}X$, 其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}X = X^T\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix}X$$

- 若 A 为对称阵，则称 A 为二次型 $f(X) = X^TAX$ 的矩阵.
- 二次型和对称矩阵是一一对应的
- 二次型的化简 $\Leftrightarrow$<u>对称矩阵</u> 的化简.
- 二次型的秩 =<u>对称矩阵</u> 的秩, i.e. $R(f) = R(A)$.

二次型化简: 任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

- 设 $f(X) = X^T AX$ 为二次型, A 为对称矩阵 $(A^T = A)$.
- 定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化, 即存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为对角阵.

二次型化简: 任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

- 设 $f(X) = X^T AX$ 为二次型, A 为对称矩阵 $(A^T = A)$.
- 定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化, 即存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为对角阵.

- 对于二次型, 存在正交变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = X^T AX = Y^T P^T APY = Y^T \Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

二次型化简：任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

- 设 $f(X) = X^TAX$ 为二次型，A 为对称矩阵 ($A^T = A$).
- 定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化，即存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为对角阵.

- 对于二次型，存在正交变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = X^TAX = Y^TP^TAPY = Y^T\Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

- 只含平方项的二次型 $f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 称为二次型 $f(X)$ 的标准式(或法式).

二次型化简: 任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

- 设 $f(X) = X^T AX$ 为二次型, A 为对称矩阵 $(A^T = A)$.
- 定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化, 即存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为对角阵.

- 对于二次型, 存在正交变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = X^T AX = Y^T P^T APY = Y^T \Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

- 只含平方项的二次型 $f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 称为二次型 $f(X)$ 的标准式(或法式).
- 在标准式的基础上, 若 $\lambda_i = 1, -1, 0$, 则称 f 为二次型 $f(X)$ 的规范形. 标准形都可以化为规范形.

例 (例 14)

化简二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

解法: 将二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 正交相似对角化, 则

$X = PY$ 即为所求.

例

化简二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

并求所用变换矩阵.

解法: 有平方项则配平方，无平方项则凑平方项.

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4(y_2 + y_3)(y_2 - y_3) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2. \end{aligned}$$

(对称) 矩阵的合同关系

- 二次型 $f(X) = X^T AX$, 取可逆变换 $X = PY$, 则

$$f = X^T AX = Y^T P^T APY$$

- 若存在可逆阵 P, 使得 $B = P^T AP$, 则称矩阵 A, B **合同**.
- 合同是一种等价关系:
  - 自反性: A 和 A 自身合同;
  - 对称性: A 和 B 合同, 则 B 和 A 合同;
  - 传递性: A 和 B 合同, B 和 C 合同, 则 A 和 C 合同.
- 若存在可逆矩阵 P, 使得 $P^T AP = \Lambda$ 为对角阵, 则称对称阵 A 可以**合同对角化**. 此时, Λ 称为对称阵 A 的合同标准形; 进一步, 若 Λ 的对角线元素只能取 $1, -1, 0$, 则 Λ 称为对称阵 A 的合同规范形.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的 A, B 具有相同的阶次、秩、对称性

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的 A, B 具有相同的阶次、秩、对称性正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的 A, B 具有相同的阶次、秩、对称性正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p;
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数，记为 q;
- $p - q$ 称为二次型的符号差;
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

- 合同不变量/性：合同的 A, B 具有相同的阶次、秩、对称性正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p;
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数，记为 q;
- $p - q$ 称为二次型的符号差;
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

定理 (定理 7：惯性定理)

正负惯性指数是合同不变量.

- 合同不变量/性：合同的 A, B 具有相同的阶次、秩、对称性正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p;
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数，记为 q;
- $p - q$ 称为二次型的符号差;
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

定理 (定理 7：惯性定理)

正负惯性指数是合同不变量.

注：正负惯性指数是两个对称矩阵合同的完全不变量. 即对称矩阵 A, B 合同当且仅当 A, B 的正负惯性指数相同.

$f(X) = X^T AX$ 或对称矩阵 A 为正定的，

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0,\ f(X) > 0$;

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C，使得对称阵 $A = C^T C$.

$f(X)=X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的，

$\Leftrightarrow\ \forall X\neq 0,\ f(X)>0;$

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p=n;$ (正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C，使得对称阵 $A=C^TC.$

二次型和对称阵的正定性

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0,\ f(X) > 0$;

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n$; (正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C, 使得对称阵 $A = C^TC$.

正定矩阵的性质:

- 若实对称阵 A 为正定的, 则 A^{-1}, A^T, A^* 也都为正定矩阵.
- 若实对称阵 A, B 为正定的, 则 $A + B$ 也是正定矩阵.

$f(X) = X^T AX$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow\ \forall X \neq 0,\ f(X) < 0;$

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n;$

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正.

$f(X) = X^T AX$ 或对称矩阵 A 为负定的，

$\Leftrightarrow \ \forall X \neq 0, f(X) < 0;$

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n$;　　(负定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负；

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为负定的，

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0,\ f(X) < 0$;

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

回顾:

- 主子式：行指标、列指标相同的子式.
- 顺序主子式：前 k 行、前 k 列构成的子式.
- 注意：教材没有区分主子式和顺序主子式，P137 定理 9 中的主子式表示前 k 行和 k 列构成的子式.

例 (例 17)

判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性.

正定性和负定性的应用

正（负）定矩阵的应用:

- 若 $f = ax^2 + bxy + cy^2$ 正定，则二次曲线 $f = 1$ 为平面上的椭圆.
- 若 $f = ax^2 + bx^2 + cy^2 + dxy + exz + fyz$ 正定，则二次曲面 $f = 1$ 为三维空间中的椭球面.
- 二元函数极值点的刻画：

定理 (同济高等数学下 P113)

二元函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近光滑，$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$，令

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

若 H 正定，则 $f(x_0, y_0)$ 为极小值; 若 H 负定，则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

小结

- 二次型和对称矩阵；
- 二次型化标准形：正交变换法和配方法；
- 对称矩阵的合同和正定性.

作业

- 思考题：n 阶实对称矩阵的合同类型最多有多少个？
（提示：正负惯性指数是对称阵合同的完全不变量，所以只需考虑正负惯性指数的所有可能取值，即满足 $0 \leq p+q \leq n$ 的正整数 p, q 的所有可能取值.）
- P140-141：28-(1)、31-(1)、33-(1).

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2022 年 11 月 2 日