

Lec-3. 几何概型、条件概率

主讲教师：吴利苏 (wulisu@sdust.edu.cn)

主页：wulisu.cn

目录

1. 几何概型

- 会面问题

2. 条件概率

3. 乘法定理

4. 全概率公式和贝叶斯公式

几何概型 (样本空间无限)

当随机试验的样本空间是某个区域, 并且任意一点落在度量 (长度, 面积, 体积) 相同的子区域是等可能的, 则事件 A 的概率可定义为

$$P(A) = \frac{S_A}{S},$$

其中 S 是样本空间的度量, S_A 是事件 A 的子区域的度量.

当古典概型的试验结果为连续无穷多个时, 就归结为几何概型.

例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到 T 点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人 $t(t < T)$ 时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到 T 时的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到 T 点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人 $t(t < T)$ 时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到 T 时的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

解: 设 x 和 y 分别为甲乙两人到达的时刻,
 $0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T$, 两人会面的充要条件
 $|x - y| \leq t$.

$$P = \frac{S_A}{S} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2}.$$

例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a - x - y$.

$$S = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\},$$

$$A = \{\text{构成三角形}\}$$

$$A \text{ 发生} \iff \begin{cases} x + y > a - x - y; \\ y + (a - x - y) > x; \\ x + (a - x - y) > y. \end{cases}$$

例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a - x - y$.

$$S = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\},$$

$$A = \{\text{构成三角形}\}$$

$$A \text{ 发生} \iff \begin{cases} x + y > a - x - y; \\ y + (a - x - y) > x; \\ x + (a - x - y) > y. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{a}{2} < x + y < a; \\ 0 < x < \frac{a}{2}; \\ 0 < y < \frac{a}{2}. \end{cases}$$

例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a - x - y$.

$$S = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\},$$

$$A = \{\text{构成三角形}\}$$

$$A \text{ 发生} \iff \begin{cases} x + y > a - x - y; \\ y + (a - x - y) > x; \\ x + (a - x - y) > y. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{a}{2} < x + y < a; \\ 0 < x < \frac{a}{2}; \\ 0 < y < \frac{a}{2}. \end{cases} \quad P(A) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}.$$

□

条件概率

例（引例）

将一枚硬币抛两次，观察正反面. 设 A 为至少有一次为正面， B 为两次相同面. 求已知 A 发生的条件下 B 发生的概率.

解: 样本空间 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$,

$A = \{HH, HT, TH\}$, $B = \{HH, TT\}$.

由于事件 A 已经发生, 所以这时试验的所有可能结果只有三种, 而其中事件 B 包含的基本事件只占其中的一种, 所以

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

表示在 A 发生的条件下, B 发生的条件概率.

在这个例子中, 若不知道事件 A 发生, 则事件 B 发生的概率为 $P(B) = \frac{2}{4}$. 所以

$$P(B|A) \neq P(B).$$

其原因在于事件 A 的发生改变了样本空间, 使它由原来的 S 缩减为新的样本空间 $S_A = A$.

条件概率的定义

定义

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) > 0$$

称为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

条件概率是概率

性质 ($P(\cdot | B)$ 是概率)

- 非负性: $P(B|A) \geq 0$;
- 规范性: $P(S|A) = 1$;
- 可列可加性: B_1, \dots, B_n, \dots 满足 $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A).$$

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A).$

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A).$
- 加法公式

$$P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) - P(B_1 B_2 | A).$$

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A).$
- 加法公式

$$P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) - P(B_1 B_2 | A).$$

- $C \subset B \implies P(C|A) \leq P(B|A).$

例

一个盒子有 4 只产品, 其中 3 只一等品, 1 只二等品. 从中取两次, 每次任取一只作不放回抽样. 设事件 A 为第一次取到的是一等品. B 为第二次取到的是一等品. 求 $P(B|A)$.

解: 将产品编号: 1,2,3 为一等品, 4 为二等品. 以 (i, j) 表示第一次, 第二次分别取到第 i 号, 第 j 号产品. 则

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

含 $12 = C_4^1 C_3^1$ 个样本点.

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$$

含 $9 = C_3^1 C_3^1$ 个样本点.

$$AB = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$$

含 $6 = C_3^1 C_2^1$ 个样本点. 所以,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{3}.$$

乘法定理

- 设 $P(A) > 0$, 则有乘法公式,

$$P(AB) = P(B|A)P(A).$$

- 设 $P(B) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

乘法定理的推广

- 三个事件 A, B, C 满足 $P(AB) > 0$,

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

- n 个事件 A_1, \dots, A_n , $P(A_1 \cdots A_{n-1}) > 0$,

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 \cdots A_{n-2}) \times \\ \cdots \times P(A_2 | A_1) P(A_1).$$

例

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}.$$

求 $P(A \cup B), P(\bar{A}|A \cup B)$.

例

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}.$$

求 $P(A \cup B), P(\bar{A}|A \cup B)$.

$$\text{解: } P(AB) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{12},$$

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1}{2}. \text{ 所以}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}|A \cup B) &= 1 - P(A|A \cup B) \\ &= 1 - \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



例

设袋中有 5 个红球, 4 个白球, 采用不放回抽样, 每次取一个, 取 3 次.

- (1) 求前两次中至少有一次取到红球的概率.
- (2) 已知前两次中至少有一次取到红球, 求前两次中恰有一次取到红球的概率.
- (3) 求第 1,2 次取到红球第 3 次取到白球的概率.

解: 记 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到红球}\}$, $i = 1, 2, 3$, 则第 i 次取到白球为 \bar{A}_i .

$B = \{\text{前两次至少有一次取到红球}\}$,

$C = \{\text{前两次恰有一次取到红球}\}$.

$$(1) P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{5}{6}.$$

$$(2) P(BC) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8},$$

$$P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{或 } P(C|B) = 1 - P(\bar{C}|B) = 1 - \frac{P(\bar{B}\bar{C})}{P(B)} = 1 - \frac{P(A_1 A_2)}{P(B)} = \frac{2}{3}.$$

(3)

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \bar{A}_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1 A_2) \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{10}{63}. \end{aligned}$$

□

例

设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下打破的概率为 $\frac{1}{2}$, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 $\frac{7}{10}$, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 $\frac{9}{10}$, 试求落下三次未打破的概率.

解: $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次落下打破}\}, i = 1, 2, 3,$
 $B = \{\text{落下三次未打破}\}.$

$$\begin{aligned}P(B) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \\&= P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1) \\&= (1 - \frac{9}{10})(1 - \frac{7}{10})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{200}.\end{aligned}$$

或 $\bar{B} = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3,$

$A_1, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 互不相容, 则

$$P(\bar{B}) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3).$$

$$P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1) = \frac{7}{10}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{7}{20}.$$

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1).$$

样本空间的划分

定义

设 S 为样本空间, B_1, B_2, \dots, B_n 为一组事件. 若

- (i) 不重: $B_i B_j = \emptyset, \forall i \neq j$.
- (ii) 不漏: $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$.

样本空间的划分

定义

设 S 为样本空间, B_1, B_2, \dots, B_n 为一组事件. 若

- (i) 不重: $B_i B_j = \emptyset, \forall i \neq j$.
- (ii) 不漏: $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$.

- 若 B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分, 则每次试验 B_1, B_2, \dots, B_n 中必有且仅有一个发生.

例

甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了 5 点. 设样本空间

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A := \{\text{乙赢}\} = \{6\}$$

$$B := \{\text{平局}\} = \{5\}$$

$$C := \{\text{乙输}\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

则事件 A, B, C 为样本空间 S 的一个划分.

全概率公式

定理

设 B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则有全概率公式:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \\ &\quad \dots + P(A|B_n)P(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

证明: $A = AS = AB_1 \cup \dots \cup AB_n$,
 $(AB_i) \cap (AB_j) = \emptyset$,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1) + \dots + P(AB_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i). \quad \square \end{aligned}$$

注: 全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率问题, 分解为若干个简单事件的概率计算问题, 最后用概率的可加性求出最终结果. (化整为零)

贝叶斯 (Bayes) 公式

定理

设 B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0$, $P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)} = \frac{p_i q_i}{\sum p_j q_j}$$

其中 $p(B_i) = p_i$, $P(A|B_i) = p_i$.

证: 由条件概率, 全概率公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}.$$

□

注: 特别地, $n = 2$, B_1, B_2 是 S 的一个划分. 记 $B_1 = B, B_2 = \bar{B}$, 则

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}).$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}.$$

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(A\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}.$$

例

一小学举办家长开放日, 欢迎家长参加活动. 小明的母亲参加的概率为 80%. 若母亲参加, 则父亲参加的概率为 30%; 若母亲不参加, 则父亲参加的概率为 90%.

- (1) 求父母都参加的概率;
- (2) 求父亲参加的概率;
- (3) 在已知父亲参加的条件下, 求母亲参加的概率.

例

有一批同型号的节能灯, 已知其中由一厂生产的占 15%, 二厂生产的占 80%, 三厂生产的占 5%. 又知这三厂的节能灯次品率分别为 2%, 1%, 3%. 问

- (1) 从这批节能灯中任取一件, 求它是次品的概率.
- (2) 从这批节能灯中任取一件, 发现是次品, 那么它分别是由各厂生产的概率是多少?

解: $A = \{\text{取到的是一只次品}\},$
 $B_i = \{\text{取到的产品是}i\text{厂的节能灯}\}, i = 1, 2, 3$ 为 S 的一个划分. 则有

$$P(B_1) = 0.15, \quad P(B_2) = 0.80, \quad P(B_3) = 0.05$$

$$P(A|B_1) = 0.002, \quad P(A|B_2) = 0.01, \quad P(A|B_3) = 0.03.$$

(1) 由全概率公式

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.0125.$$

(2) 贝叶斯 (Bayes) 公式
$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^3 P(B_j)P(A|B_j)}$$

$$P(B_1|A) = 0.24, \quad P(B_2|A) = 0.64, \quad P(B_3|A) = 0.12. \quad \square$$

例

对以往数据分析, 当机器调整良好时, 产品合格率为 98%, 而当机器发生故障时合格率为 55%, 每天早上机器开动时, 机器调整良好时概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格时, 机器调整良好的概率.

解: $A = \{\text{产品合格}\}$, $B_i = \{\text{机器调整良好}\}$, 求 $P(B|A)$.

$$P(A|B) = 0.98, P(A|\bar{B}) = 0.55, P(B) = 0.95, \\ P(\bar{B}) = 0.05.$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} = 0.97.$$

95% 是由以往数据分析得到的先验概率, 0.97% 是得到信息之后再重新加以修正的后验概率. \square

例

根据以往的临床记录, 某种诊断癌症的试验具有 5% 的假阳性及 3% 的假阴性. 若设

$A = \{\text{试验反应是阳性}\},$

$C = \{\text{被诊断患有癌症}\}.$ 则 $P(A|\bar{C}) = 0.05,$

$P(\bar{A}|C) = 0.03.$ 已知某群体 $P(C) = 0.005,$ 问这种方法能否用于普查?

解:

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})} = 0.089.$$

若用于普查, 100 个阳性病人中被诊断患有癌症的大约 8~9 个. 所以不宜用于普查. 若阳性要作进一步检查. □