

# 线性代数-12

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 15 日

## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .

## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ .

## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$ .

## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$ .
- 向量组  $B$  和向量组  $A$  等价  $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .

## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$ .
- 向量组  $B$  和向量组  $A$  等价  $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .
- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < m$ .

## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$ .
- 向量组  $B$  和向量组  $A$  等价  $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .
- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < m$ .
- 向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R(A) = m$ , 列满秩.

## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$ .
- 向量组  $B$  和向量组  $A$  等价  $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .
- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < m$ .
- 向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R(A) = m$ , 列满秩.
- 部分向量组线性相关  $\Rightarrow$  整体向量组线性相关.



## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$ .
- 向量组  $B$  和向量组  $A$  等价  $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .
- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < m$ .
- 向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R(A) = m$ , 列满秩.
- 部分向量组线性相关  $\Rightarrow$  整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关  $\Rightarrow$  部分向量组线性无关.

## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$ .
- 向量组  $B$  和向量组  $A$  等价  $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .
- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < m$ .
- 向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R(A) = m$ , 列满秩.
- 部分向量组线性相关  $\Rightarrow$  整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关  $\Rightarrow$  部分向量组线性无关.
- 个数大于维数向量组必线性相关.

## 回顾

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ;

矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$ .
- 向量组  $B$  和向量组  $A$  等价  $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .
- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < m$ .
- 向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R(A) = m$ , 列满秩.
- 部分向量组线性相关  $\Rightarrow$  整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关  $\Rightarrow$  部分向量组线性无关.
- 个数大于维数向量组必线性相关.
- 向量组  $A$  线性无关, 再加向量  $\beta$  线性相关  $\Rightarrow \beta$  可由向量组  $A$  线性表示, 且表示唯一. ( $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) = m$ .)

# 向量组的等价和矩阵的等价

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ; 矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ .

- 同型矩阵  $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$   
 $\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$   
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$ .

# 向量组的等价和矩阵的等价

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ; 矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ .

- 同型矩阵  $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$   
 $\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$   
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$ .
- 同维数向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  向量组  $A, B$  可以相互线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $AX = B$  和  $BY = A$  都有解  
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .  
 $\Leftrightarrow (A, O) \overset{c}{\sim} (O, B)$ .

# 向量组的等价和矩阵的等价

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ; 矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ .

- 同型矩阵  $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$   
 $\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$   
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$ .
- 同维数向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  向量组  $A, B$  可以相互线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $AX = B$  和  $BY = A$  都有解  
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .  
 $\Leftrightarrow (A, O) \overset{c}{\sim} (O, B)$ .
- 初等变换的角度看向量组等价:

$$(A, O) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (A, B) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (O, B).$$

# 向量组的等价和矩阵的等价

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ; 矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ .

- 同型矩阵  $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$   
 $\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$   
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$ .
- 同维数向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  向量组  $A, B$  可以相互线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $AX = B$  和  $BY = A$  都有解  
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .  
 $\Leftrightarrow (A, O) \overset{c}{\sim} (O, B)$ .
- 初等变换的角度看向量组等价:

$$(A, O) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (A, B) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (O, B).$$

- 如果  $m = n$ , 则向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  矩阵  $A \overset{c}{\sim} B$ .

# 向量组的等价和矩阵的等价

向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $B: \beta_1, \dots, \beta_n$ ; 矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ .

- 同型矩阵  $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$   
 $\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$   
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$ .
- 同维数向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  向量组  $A, B$  可以相互线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $AX = B$  和  $BY = A$  都有解  
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$ .  
 $\Leftrightarrow (A, O) \overset{c}{\sim} (O, B)$ .
- 初等变换的角度看向量组等价:

$$(A, O) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (A, B) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (O, B).$$

- 如果  $m = n$ , 则向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  矩阵  $A \overset{c}{\sim} B$ .
- 如果向量组  $B$  是向量组  $A$  的部分向量组, 则向量组  $A, B$  等价  
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$ .



# 本次课内容

1. 最大无关组和向量组的秩
2. 向量组的秩和矩阵的秩

# 最大无关组

设向量组  $A_0 : \alpha_1, \dots, \alpha_r$  是向量组  $A : \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的一个部分组, 若

- 向量组  $A_0 : \alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关;
  - 向量组  $A$  中任意  $r+1$  个向量 (若存在的话) 都线性相关,
- 则称向量组  $A_0$  为向量组  $A$  的一个最大线性无关组 (最大无关组).

# 最大无关组

设向量组  $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  是向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的一个部分组, 若

- 向量组  $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关;
  - 向量组  $A$  中任意  $r+1$  个向量 (若存在的话) 都线性相关,
- 则称向量组  $A_0$  为向量组  $A$  的一个最大线性无关组 (最大无关组).

- 最大无关组  $A_0$  和向量组  $A$  等价.

# 最大无关组

设向量组  $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  是向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的一个部分组, 若

- 向量组  $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关;
  - 向量组  $A$  中任意  $r+1$  个向量 (若存在的话) 都线性相关,
- 则称向量组  $A_0$  为向量组  $A$  的一个最大线性无关组 (最大无关组).

- 最大无关组  $A_0$  和向量组  $A$  等价.

## 定义

最大无关组所含向量的个数  $r$  称为向量组  $A$  的秩, 记为  $R_A$  或  $R(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

# 最大无关组

设向量组  $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  是向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的一个部分组, 若

- 向量组  $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关;
  - 向量组  $A$  中任意  $r+1$  个向量 (若存在的话) 都线性相关,
- 则称向量组  $A_0$  为向量组  $A$  的一个最大线性无关组 (最大无关组).

- 最大无关组  $A_0$  和向量组  $A$  等价.

## 定义

最大无关组所含向量的个数  $r$  称为向量组  $A$  的秩, 记为  $R_A$  或  $R(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

注: 只含零向量的向量组的秩规定为 0.

## 最大无关组的等价定义：极大无关组

### 推论

设向量组  $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  是向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的一个部分组, 若

- 向量组  $A_0$  线性无关;
  - 向量组  $A$  中任意一个向量都可由向量组  $A_0$  线性表示,
- 则  $A_0$  为向量组  $A$  的一个最大无关组.

# 最大无关组的等价定义：极大无关组

## 推论

设向量组  $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  是向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的一个部分组, 若

- 向量组  $A_0$  线性无关;
  - 向量组  $A$  中任意一个向量都可由向量组  $A_0$  线性表示,
- 则  $A_0$  为向量组  $A$  的一个最大无关组.

## 例 (例 8)

全体  $n$  维向量构成的向量组记为  $\mathbb{R}^n$ .  $e_1, \dots, e_n$  为  $\mathbb{R}^n$  的一个最大无关组, 故  $\mathbb{R}^n$  的秩为  $n$ .

# 最大无关组的等价定义：极大无关组

## 推论

设向量组  $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  是向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的一个部分组, 若

- 向量组  $A_0$  线性无关;
  - 向量组  $A$  中任意一个向量都可由向量组  $A_0$  线性表示,
- 则  $A_0$  为向量组  $A$  的一个最大无关组.

## 例 (例 8)

全体  $n$  维向量构成的向量组记为  $\mathbb{R}^n$ .  $e_1, \dots, e_n$  为  $\mathbb{R}^n$  的一个最大无关组, 故  $\mathbb{R}^n$  的秩为  $n$ .

- 最大无关组的意义: 无限向量组用有限向量组 (最大无关组) 来表示.



## 例题 9

例  
设

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

的全体解向量构成的向量组为  $S$ , 求  $R_S$ .

## $R(A)$ 和 $R_A$ 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

## $R(A)$ 和 $R_A$ 的关系

### 定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 定理 1-4 中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R_B \leq R_A$ .
- 向量组  $B$  和向量组  $A$  等价  $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$ .
- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R_A < m$ .
- 向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R_A = m$ .

## $R(A)$ 和 $R_A$ 的关系

### 定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 定理 1-4 中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

- 向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$ .
- 向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Rightarrow R_B \leq R_A$ .
- 向量组  $B$  和向量组  $A$  等价  $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$ .
- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R_A < m$ .
- 向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R_A = m$ .

因此, 可以不用在意  $R(A)$  中的大写字母  $A$  是表示向量组, 还是表示矩阵.

## 例题

例 (例 10)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

求矩阵  $A$  的列向量组的一个最大无关组，并把其余向量用最大无关组线性表示.

## 例 11

例 (例 11)

向量组  $B$  可由向量组  $A$  线性表示, 且  $R_A = R_B$ , 证明: 向量组等价.

(提示: 合并向量组.)

## 练习

例 (P110: 12)

设向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_r$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times r},$$

向量组  $A$  线性无关. 证明:  $R_B = R(K)$ .

几点注释:

- 向量组  $B$  线性无关  $\Leftrightarrow R_B = r \Leftrightarrow R(K) = r$ .
- 若  $s = r$ , 则  $K$  为方阵. 此时, 向量组  $B$  线性无关  $\Leftrightarrow K$  可逆.
- 矩阵描述:  $B = AK_{s \times r}$ ,  $A$  列满秩, 则  $R(B) = R(K)$ ;  
特别地,  $B$  列满秩当且仅当  $K$  列满秩;  
 $s = r$  时,  $B$  列满秩当且仅当  $K$  可逆.

## 练习

例 (P110: 12)

设向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_r$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times r},$$

向量组  $A$  线性无关. 证明:  $R_B = R(K)$ .

几点注释:

- 向量组  $B$  线性无关  $\Leftrightarrow R_B = r \Leftrightarrow R(K) = r$ .
- 若  $s = r$ , 则  $K$  为方阵. 此时, 向量组  $B$  线性无关  $\Leftrightarrow K$  可逆.
- 矩阵描述:  $B = AK_{s \times r}$ ,  $A$  列满秩, 则  $R(B) = R(K)$ ;  
特别地,  $B$  列满秩当且仅当  $K$  列满秩;  
 $s = r$  时,  $B$  列满秩当且仅当  $K$  可逆.



## 练习

例 (P110: 12)

设向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_r$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times r},$$

向量组  $A$  线性无关. 证明:  $R_B = R(K)$ .

几点注释:

- 向量组  $B$  线性无关  $\Leftrightarrow R_B = r \Leftrightarrow R(K) = r$ .
- 若  $s = r$ , 则  $K$  为方阵. 此时, 向量组  $B$  线性无关  $\Leftrightarrow K$  可逆.
- 矩阵描述:  $B = AK_{s \times r}$ ,  $A$  列满秩, 则  $R(B) = R(K)$ ;  
特别地,  $B$  列满秩当且仅当  $K$  列满秩;  
 $s = r$  时,  $B$  列满秩当且仅当  $K$  可逆.

## 练习

例 (P110: 12)

设向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_r$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times r},$$

向量组  $A$  线性无关. 证明:  $R_B = R(K)$ .

几点注释:

- 向量组  $B$  线性无关  $\Leftrightarrow R_B = r \Leftrightarrow R(K) = r$ .
- 若  $s = r$ , 则  $K$  为方阵. 此时, 向量组  $B$  线性无关  $\Leftrightarrow K$  可逆.
- **矩阵描述:**  $B = AK_{s \times r}$ ,  $A$  列满秩, 则  $R(B) = R(K)$ ;  
特别地,  $B$  列满秩当且仅当  $K$  列满秩;  
 $s = r$  时,  $B$  列满秩当且仅当  $K$  可逆.

## 小结

- 向量组的秩、最大无关组.
- 求向量组的秩和最大无关组，用最大无关组表示其他向量.
- 向量组的秩和矩阵的秩的关系.

- Page110-Page111: 10、13-(2)、14-(2)、16 (12 和 19 二选一)。

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2023 年 12 月 15 日