# Lec-3. 几何概型、条件概率

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：wulisu.cn

## 目录

## 几何概型　(样本空间无限)

当随机试验的样本空间是某个区域，并且任意一点落在度量 (长度，面积，体积) 相同的子区域是等可能的，则事件 $A$ 的概率可定义为

$$P(A) = \frac{S_A}{S},$$

其中 $S$ 是样本空间的度量，$S_A$ 是事件 $A$ 的子区域的度量.

当古典概型的试验结果为连续无穷多个时，就归结为几何概型.

### 例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到 $T$ 点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人 $t(t < T)$ 时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到 $T$ 时内的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

### 例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到 $T$ 点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人 $t(t < T)$ 时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到 $T$ 时内的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

解: 设 $x$ 和 $y$ 分别为甲乙两人到达的时刻,
$0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T$, 两人会面的充要条件
$|x-y| \leq t$.

$$P = \frac{S_A}{S} = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2}.$$

□

**例**

在长度为 $a$ 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

**例**

在长度为 $a$ 的线段内任取两点，将其分为三段，求这三段可构成三角形的概率.

解：设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\}$,

$A = \{\text{构成三角形}\}$

$$A\text{发生} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y > a - x - y; \\ y + (a - x - y) > x; \\ x + (a - x - y) > y. \end{cases}$$

**例**

在长度为 $a$ 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S=\{(x,y)|0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}$,

$A=\{\text{构成三角形}\}$

$$A\text{发生} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y>a-x-y; \\ y+(a-x-y)>x; \\ x+(a-x-y)>y. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \frac{a}{2}<x+y<a; \\ 0<x<\frac{a}{2}; \\ 0<y<\frac{a}{2}. \end{cases}$

**例**

在长度为 $a$ 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x+y < a\}$,

$A = \{$构成三角形$\}$

$$A\text{发生} \iff \begin{cases} x+y > a-x-y; \\ y+(a-x-y) > x; \\ x+(a-x-y) > y. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \frac{a}{2} < x+y < a; \\ 0 < x < \frac{a}{2}; \\ 0 < y < \frac{a}{2}. \end{cases}$ $\quad P(A) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}.$ □

## 条件概率

**例 (引例)**

将一枚硬币抛两次, 观察正反面. 设 $A$ 为至少有一次为正面, $B$ 为两次相同面. 求已知 $A$ 发生的条件下 $B$ 发生的概率.

解: 样本空间 $S=\{HH,HT,TH,TT\}$,
$A=\{HH,HT,TH\}$, $B=\{HH,TT\}$.
由于事件 $A$ 已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而其中事件 $B$ 包含的基本事件只占其中的一种，所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$$

表示在 $A$ 发生的条件下, $B$ 发生的条件概率.

在这个例子中, 若不知道事件 $A$ 发生，则事件 $B$ 发生的概率为 $P(B)=\frac{2}{4}$. 所以

$$P(B|A)\neq P(B).$$

其原因在于事件 $A$ 的发生改变了样本空间，使它由原来的 $S$ 缩减为新的样本空间 $S_A=A$.

## 条件概率的定义

**定义**

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, P(A)>0$$

称为事件 $A$ 发生的条件下事件 $B$ 发生的**条件概率**.

## 条件概率是概率

**性质 ($P(\cdot \mid B)$ 是概率)**

- 非负性: $P(B|A) \geq 0$;
- 规范性: $P(S|A) = 1$;
- 可列可加性: $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ 满足 $B_i \cap B_j = \varnothing, \forall i \neq j$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$.

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$.
- 加法公式

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A).$$

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$.
- 加法公式

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 B_2|A).$$

- $C \subset B \Longrightarrow P(C|A) \leq P(B|A)$.

**例**

一个盒子有 4 只产品, 其中 3 只一等品, 1 只二等品. 从中取两次, 每次任取一只作不放回抽样. 设事件 $A$ 为第一次取到的是一等品. $B$ 为第二次取到的是一等品. 求 $P(B|A)$.

解: 将产品编号: 1,2,3 一等品, 4 为二等品. 以 $(i,j)$ 表示第一次, 第二次分别取到第 $i$ 号, 第 $j$ 号产品. 则

$$S=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\\ (3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)(4,3)\}$$

含 $12=C_4^1C_3^1$ 个样本点.

$$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\\ (3,1),(3,2),(3,4)\}$$

含 $9=C_3^1C_3^1$ 个样本点.

$$AB=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

含 $6=C_3^1C_2^1$ 个样本点. 所以,

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{3}.$$

□

## 乘法定理

- 设 $P(A) > 0$, 则有乘法公式,

$$P(AB) = P(B|A)P(A).$$

- 设 $P(B) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

## 乘法定理的推广

- 三个事件 $A, B, C$ 满足 $P(AB) > 0$,

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

- $n$ 个事件 $A_1, \cdots, A_n$, $P(A_1 \cdots A_{n-1}) > 0$,

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})\times \\ \cdots \times P(A_2|A_1)P(A_1).$$

**例**

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$.
求 $P(A \cup B), P(\bar{A}|A \cup B)$.

**例**

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$.
求 $P(A \cup B)$, $P(\bar{A}|A \cup B)$.

解: $P(AB) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{12}$,
$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1}{2}$. 所以
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}|A \cup B) &= 1 - P(A|A \cup B) \\ &= 1 - \frac{P(A \cap (AUB))}{P(A \cup B)} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$\square$

**例**

设袋中有 5 个红球, 4 个白球, 采用不放回抽样, 每次取一个, 取 3 次.

**(1)** 求前两次中至少有一次取到红球的概率.

**(2)** 已知前两次中至少有一次取到红球, 求前两次中恰有一次取到红球的概率.

**(3)** 求第 1,2 次取到红球第 3 次取到白球的概率.

解: 记 $A_i=\{$第$i$次取到红球$\}$, $i=1,2,3$, 则第 $i$ 次取到白球为 $\bar{A}_i$.
$B=\{$前两次至少有一次取到红球$\}$,
$C=\{$前两次恰有一次取到红球$\}$.
(1) $P(\bar{B})=P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$
$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{6}$.
(2) $P(BC)=P(A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1A_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}$,
$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}}{\frac{5}{6}}=\frac{2}{3}$
或 $P(C|B)=1-P(\bar{C}|B)=1-\frac{B\bar{C}}{P(B)}=1-\frac{P(A_1A_2)}{P(B)}=\frac{2}{3}$.
(3)

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\bar{A}_3)&=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2)\\&=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{10}{63}.\end{aligned}$$

□

**例**

设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下打破的概率为 $\frac{1}{2}$, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 $\frac{7}{10}$, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 $\frac{9}{10}$, 试求落下三次未打破的概率.

解: $A_i=\{$第$i$次落下打破$\}$, $i=1,2,3$,
$B=\{$落下三次未打破$\}$.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \\ &= P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\ &= (1-\frac{9}{10})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{1}{2}) = \frac{3}{200}. \end{aligned}$$

或 $\bar{B}=A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$,
$A_1, \bar{A}_1A_2, \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ 互不相容, 则
$P(\bar{B})=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$.
$P(\bar{A}_1A_2)=P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)=\frac{7}{10}(1-\frac{1}{2})=\frac{7}{20}$.
$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)$. $\square$

## 样本空间的划分

**定义**

设 $S$ 为样本空间, $B_1, B_2, ..., B_n$ 为一组事件. 若

**(i)** 不重: $B_iB_j = \varnothing, \forall i \neq j$.

**(ii)** 不漏: $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = S$.

## 样本空间的划分

**定义**

设 $S$ 为样本空间, $B_1, B_2, ..., B_n$ 为一组事件. 若

**(i)** 不重: $B_iB_j = \varnothing, \forall i \neq j.$

**(ii)** 不漏: $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = S.$

- 若 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为 $S$ 的一个划分, 则每次试验 $B_1, B_2, ..., B_n$ 中必有且仅有一个发生.

**例**

甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了 5 点. 设样本空间
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{乙赢}\} = \{6\} \\ B &:= \{\text{平局}\} = \{5\} \\ C &:= \{\text{乙输}\} = \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

则事件 $A, B, C$ 为样本空间 $S$ 的一个划分.

## 全概率公式

**定理**

设 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为 $S$ 的一个划分，且 $P(B_i) > 0(i = 1, 2, ..., n)$，则有全概率公式:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

证明: $A = AS = AB_1 \cup ... \cup AB_n,$

$$(AB_i) \cap (AB_j) = \varnothing,$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1) + ... + P(AB_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + ... + P(A|B_n)P(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i) \qquad \square \end{aligned}$$

注: 全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率问题, 分解为若干个简单事件的概率计算问题, 最后用概率的可加性求出最终结果. (化整为零)

# 贝叶斯 (Bayes) 公式

**定理**

设 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为 $S$ 的一个划分，且 $P(B_i) > 0$，$P(A) > 0$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)} = \frac{p_i q_i}{\sum p_j q_j}$$

其中 $p(B_i) = p_i$，$P(A|B_i) = p_i$.

证: 由条件概率, 全概率公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}. \qquad \square$$

注: 特别地, $n = 2$, $B_1, B_2$ 是 $S$ 的一个划分. 记
$B_1 = B$, $B_2 = \bar{B}$, 则
$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$.
$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$.
$P(\bar{B}|A) = \frac{P(A\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$.

**例**

有一批同型号的节能灯, 已知其中由一厂生产的占 15%, 二厂生产的占 80%, 三厂生产的占 5%. 又知这三厂的节能灯次品率分别为 2%, 1%, 3%. 问

**(1)** 从这批节能灯中任取一件, 求它是次品的概率.

**(2)** 从这批节能灯中任取一件, 发现是次品, 那么它分别是由各厂生产的概率是多少?

解: $A = \{取到的是一只次品\}$,
$B_i = \{取到的产品是 i 厂的节能灯\}$, $i = 1, 2, 3$ 为 $S$ 的一个划分. 则有

$$P(B_1) = 0.15, \quad P(B_2) = 0.80, \quad P(B_3) = 0.05$$

$$P(A|B_1) = 0.0.02, \quad P(A|B_2) = 0.01, \quad P(A|B_3) = 0.03.$$

(1) 由全概率公式

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.0125.$$

(2) 贝叶斯 (Bayes) 公式 $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{3} P(B_j)P(A|B_j)}$

$P(B_1|A) = 0.24$, $P(B_2|A) = 0.64$, $P(B_3|A) = 0.12$. $\square$

**例**

对以往数据分析，当机器调整良好时，产品合格率为 98%，而当机器发生故障时合格率为 55%，每天早上机器开动时，机器调整良好时概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格时，机器调整良好的概率.

解: $A=\{$产品合格$\}$, $B_i=\{$机器调整良好$\}$, 求 $P(B|A)$.

$P(A|B)=0.98$, $P(A|\bar{B})=0.55$, $P(B)=0.95$, $P(\bar{B})=0.05$.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=0.97.$$

95% 是由以往数据分析得到的先验概率, 0.97% 是得到信息之后再重新加以修正的后验概率. □

**例**

根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有 5% 的假阳性及 3% 的假阴性. 若设
$A = \{试验反应是阳性\}$,
$C = \{被诊断患有癌症\}$. 则 $P(A|\bar{C}) = 0.05$, $P(\bar{A}|C) = 0.03$. 已知某群体 $P(C) = 0.005$, 问这种方法能否用于普查?

解:

$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C}P(A|\bar{C}))}=0.089.$$

若用于普查, 100 个阳性病人中被诊断患有癌症的大约 $8\sim 9$ 个. 所以不宜用于普查. 若阳性要作进一步检查. □

**例**

一小学举办家长开放日，欢迎家长参加活动. 小明的母亲参加的概率为 80%. 若母亲参加，则父亲参加的概率为 30%；若母亲不参加，则父亲参加的概率为 90%.

**(1)** 求父母都参加的概率；

**(2)** 求父亲参加的概率；

**(3)** 在已知父亲参加的条件下，求母亲参加的概率.