线性代数-5

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 11 月 29 日

本次课内容

1. 矩阵的定义
2. 特殊矩阵
3. 矩阵的应用
4. 矩阵的运算

定义 (矩阵)

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}, (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$, 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常可记为大写字母的 A、$A_{m\times n}$、(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$.

矩阵

定义 (矩阵)

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}, (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$, 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常可记为大写字母的 A、$A_{m\times n}$、(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$.

- 元素为实数的矩阵称为实矩阵; 元素为复数的矩阵称为复矩阵.

- 方阵.
  $m=n$, 即行数和列数都为 n 的矩阵, 称为 n 阶方阵. 此时可记为 A_n.

$$A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 方阵.
  $m=n$, 即行数和列数都为 n 的矩阵, 称为 n 阶方阵. 此时可记为 A_n.
  $$A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
- 行矩阵（行向量）.
  $m=1$, 即只有一行的矩阵,
  $$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
  称为行矩阵, 也称为行向量. 为避免混肴, 行矩阵也记为
  $$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

特殊矩阵

- 列矩阵（列向量）.
  $n=1$, 即只有一列的矩阵,

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵, 也称为列向量.

- 列矩阵（列向量）.
  $n=1$, 即只有一列的矩阵,
  $$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$
  称为列矩阵, 也称为列向量.
- **零矩阵.**
  $a_{ij}=0, \forall i,j$, 元素全为零的矩阵. 记为 O.

- **上 (下) 三角矩阵.**
  $a_{ij} = 0, i > j$, 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能是对角元和主对角线之上的元素.

$$A_{上} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 上 (下) 三角矩阵.
  $a_{ij}=0, i>j$, 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能是对角元和主对角线之上的元素.

$$A_{上}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_{下}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=0, i>j$, 即主对角线上方元素全为零的方阵, 称为下三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能是对角元和主对角线之下的元素.

- 对角矩阵.
  $a_{ij}=0, i\neq j$, 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角阵可简记为 $D=\textbf{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

- 对角矩阵.

  $a_{ij}=0, i\neq j$, 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  对角阵可简记为 $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

- 单位矩阵.

$$a_{ij}=\boldsymbol{\delta}_{ij}=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$$

  即对角元全为 1 的对角阵, 称为单位阵. 记为 E_n 或 E.

- 对称矩阵.
  $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{对} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 对称矩阵.
  $a_{ij}=a_{ji},\forall i,j$, 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{对}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_{反}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 反对称矩阵.
  $a_{ij}=-a_{ji},\forall i,j$, 即沿着对角线对称元素互为相反数的方阵, 称为对称阵.

例 (线性方程组的矩阵表示)

m 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B=(A\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组的矩阵表示可写为 $AX=\boldsymbol{\beta}$.

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$B=(A\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

则线性方程组的矩阵表示可写为 $AX=\boldsymbol{\beta}$.

其中 A 称为线性方程组的系数矩阵, B 称为线性方程组的增广矩阵;

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B=(A\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组的矩阵表示可写为 $AX=\boldsymbol{\beta}$.
其中 A 称为线性方程组的系数矩阵, B 称为线性方程组的增广矩阵;
X 和 $\boldsymbol{\beta}$ 分别称为线性方程组的未知量矩阵和常数项矩阵.

例 (线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{2}$$

则得到 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

矩阵的应用–矩阵和线性变换

例 (线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{2}$$

则得到 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示上面线性变换，则有

$$Y=AX.$$

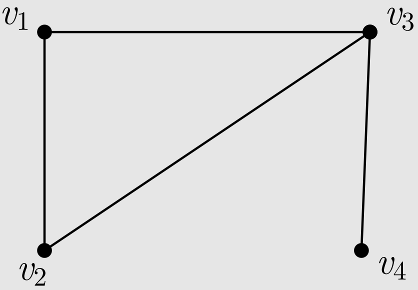
- 线性变换和 n 阶方阵一一对应.

例 (图的关联矩阵)

- 图 (Graph).

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{点 } v_i, v_j \text{ 之间有边}, \\ 0, & \text{点 } v_i, v_j \text{ 之间无边}. \end{cases}$$

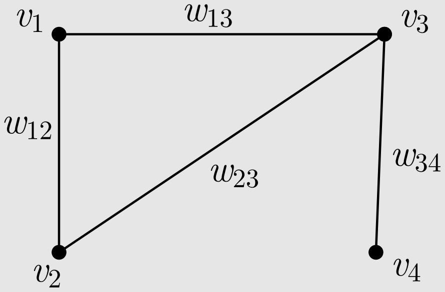
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



例 (图的矩阵表示)

- 加权图 (Weighted Graph).

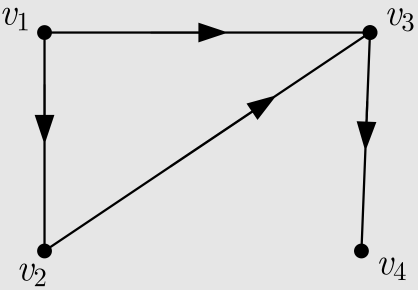
$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ w_{12} & 0 & w_{23} & 0 \\ w_{31} & w_{32} & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & w_{34} & 0 \end{pmatrix}$$



例 (图的矩阵表示)

- 有向图 (Direct Graph).

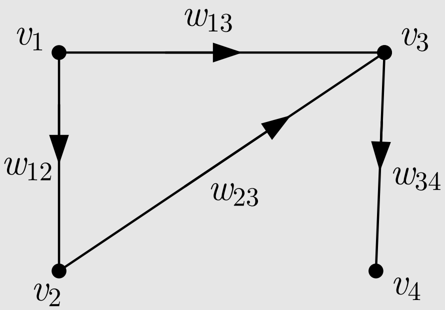
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



例 (图的矩阵表示)

- 有向加权图 (Direct Weighted Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



例 (数字图像的存储和处理)

- 数字图像在计算机等电子设备中都是以矩阵的形式存储和显示的.
  - 比如，一张 600*800 像素的图像在计算机中就是一个 600×800 的矩阵.
    - 二值图像的矩阵的 a_{ij} 取值为 0 和 1;
    - 灰度图像的矩阵的 a_{ij} 取值为 $0 - 255$(即一字节 8 位二进制数的范围);
    - 彩色图像的矩阵的 a_{ij} 取值为一个三维向量 (R, G, B).
- 对图像的处理和编辑就是对矩阵的处理.
  - 算法思想一般是：用一个低阶方阵 (称为模板或者算子) 去改变图像矩阵的每一个像素值,

- 二阶 Laplace 检测算子：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4_{\triangle} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4_{\triangle} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8_{\triangle} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

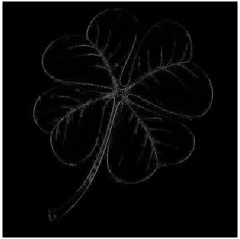


图: 边缘提取

矩阵的运算

- $A = B$
- $A + B$
- $\boldsymbol{\lambda} \cdot A$
- AB
- $A^k \& f(A)$
- A^T
- $|A|$
- A^*
- $\mathrm{tr}(A)$

矩阵的相等

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $m=m'$, $n=n'$, 则称 A 和 B 是同型矩阵.

矩阵的相等

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $m=m'$, $n=n'$, 则称 A 和 B 是同型矩阵.
- 对于同型矩阵 A,B,

$$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij},\forall i,j$$

矩阵的相等

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $m=m'$, $n=n'$, 则称 A 和 B 是同型矩阵.
- 对于同型矩阵 A, B,

$$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}, \forall i,j$$

- 例:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 若 A, B 同型，则

$$A+B \triangleq (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 若 A,B 同型，则

$$A+B \triangleq (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

- 性质：
  - 交换律: $A+B=B+A$
  - 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 若 A,B 同型，则

$$A+B \triangleq (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

- 性质：
  - 交换律: $A+B=B+A$
  - 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$
- 负矩阵：

$$-A \triangleq (-a_{ij})$$

矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 若 A,B 同型，则

$$A+B \triangleq (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

- 性质：
  - 交换律: $A+B=B+A$
  - 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$
- 负矩阵：

$$-A \triangleq (-a_{ij})$$

- 矩阵减法：A,B 同型

$$A-B \triangleq A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})$$

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的数乘

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

- $$\boldsymbol{\lambda} A \triangleq (\boldsymbol{\lambda} a_{ij})_{m\times n}$$

矩阵的数乘

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

-
$$\boldsymbol{\lambda} A \triangleq (\boldsymbol{\lambda} a_{ij})_{m\times n}$$

- 性质：
  - 结合律: $(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu})A=\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu}A)$
  - 矩阵对数的分配律：$(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})A=\boldsymbol{\lambda}A+\boldsymbol{\mu}A$
  - 数对矩阵的分配律：$\boldsymbol{\lambda}(A+B)=\boldsymbol{\lambda}A+\boldsymbol{\lambda}B$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $n=m'$ 同型，则

$$AB \triangleq (c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{1n})_{m\times n'}$$

c_{ij} 为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的内积.

矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $n=m'$ 同型，则

$$AB \triangleq (c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{1n})_{m\times n'}$$

c_{ij} 为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的内积.

- 性质：
  - 不满足交换律: AB 和 BA 可能不相等.
  - 结合律：$(AB)C=A(BC)$
  - 数乘和矩阵乘法可交换：$\boldsymbol{\lambda}(AB)==(\boldsymbol{\lambda}A)B=A(\boldsymbol{\lambda}B)$
  - 分配律：$A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$
  - **EA=AE=A**

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1} a_{ik} b_{kj}$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1} a_{ik} b_{kj}$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1} a_{ik} b_{kj}$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- AB 和 BA 可能不同型（*i.e.* 不相等）.

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解:

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解：

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解：

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

- AB 和 BA 同型当且仅当 A 和 B 是同阶方阵。但即使同型也可能不相等.

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解：

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

- AB 和 BA 同型当且仅当 A 和 B 是同阶方阵。但即使同型也可能不相等.
- 特别地，对两个 n 阶方阵 A, B, 若 $AB = BA$, 则称方阵 A 和 B 是可交换的.

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解：

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

- AB 和 BA 同型当且仅当 A 和 B 是同阶方阵。但即使同型也可能不相等.
- 特别地，对两个 n 阶方阵 A, B, 若 $AB = BA$, 则称方阵 A 和 B 是可交换的.
- 纯量阵 $\boldsymbol{\lambda} E$ 与任何同阶方阵可交换.

- 设 A 为 n 阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k\text{ 个 }A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$

例

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

证明 $A^k = \boldsymbol{\lambda}^{k-1} A$.

- 矩阵多项式：将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的 x 换为方阵 A，

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的 x 换为方阵 A,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

  - $(AB)^k = A^k B^k$,
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$,
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$,

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的 x 换为方阵 A,

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E.$$

- 只有 A,B 可交换时, 下面等式才成立.
  - $(AB)^k=A^kB^k$,
  - $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$,
  - $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$,

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的 x 换为方阵 A,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

- 只有 A,B 可交换时, 下面等式才成立.
  - $(AB)^k = A^k B^k$,
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$,
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$,
- 矩阵 A 的任意两个矩阵多项式是可交换的,

$$f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

矩阵的转置

- 令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，定义 A 的转置

$$A^T \triangleq (a_{ji})_{n\times m}$$

- 性质：
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(\boldsymbol{\lambda} A)^T = \boldsymbol{\lambda} A^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$
- 例：计算 $(AB)^T$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

转置和对称矩阵

- A 为对称阵，当且仅当 $A^T = A$.
- A 为反对称阵，当且仅当 $A^T = -A$.

例

设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $X^T X = 1$,

$$H = E - 2XX^T.$$

证明 H 为对称阵，且 $HH^T = E$.

证明:

方阵的行列式

- A 为 n 阶方阵，则可以给出 A 的行列式，记为 $\det A$ 或 $|A|$.
- 性质：
  - $|A^T| = |A|$
  - $|\boldsymbol{\lambda} A| = \boldsymbol{\lambda}^n |A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$
  - $|A + B| \neq |A| + |B|$

方阵的伴随矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- A 的伴随矩阵A^* 定义为:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

  其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.
- 注意: A^* 中的 A_{ij} 的指标有个转置!!!

方阵的伴随

例

求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵

性质

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

方阵的迹

- A 为 n 阶方阵，A 的迹 $\mathrm{tr}A$ 定义为

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

- 性质:
  - $\mathrm{tr}A^T = \mathrm{tr}A$
  - $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\lambda} A) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathrm{tr}A$
  - $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$

小结

- $A = B$
- $A + B$
- $\boldsymbol{\lambda} \cdot A$
- AB
- $A^k \& f(A)$
- A^T
- $|A|$
- A^*
- $\operatorname{tr} A$

作业

- Page52-53. 1-(5)、2、5、6-(2)、7-(2).

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 11 月 29 日