

## Lec-14. 方差

主讲教师：吴利苏 ([wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn))

主    页：[wulisu.cn](http://wulisu.cn)

# 本次课内容

1. 方差的定义

2. 方差的计算

3. 方差的性质

4. 切比雪夫不等式

## 引理

### 例

有两批灯泡，寿命分布如下：

X	$X < 950$	$950 \leq X \leq 1050$	$X > 1050$
n	0.005	0.99	0.005

Y	$Y = 700$	$700 < Y < 1300$	$Y = 1300$
n	0.5	0	0.5

假设平均寿命都是  $E(X) = E(Y) = 1000h$ ,  
如何判定这两批灯泡的质量好坏.

- 随机变量  $X$  的均值： $E(X)$
- $X$  对于均值的离差： $X - E(X)$
- $X$  对于均值的平均离差： $E(X - E(X)) = 0$

- 随机变量  $X$  的均值： $E(X)$
- $X$  对于均值的离差： $X - E(X)$
- $X$  对于均值的平均离差： $E(X - E(X)) = 0$
- 反映随机变量波动性可以用：

$$E[X - E(X)]^2$$

$\Rightarrow$  方差.

## 方差

### 定义

设  $X$  是一个随机变量, 若  $E\{[X - E(X)]^2\}$  存在, 则称它为  $X$  的**方差**, 记为  $D(X)$ , 即

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

将  $\sqrt{D(X)}$  记为  $\sigma(X)$ , 称为**标准差**或**均方差**.

## 方差

### 定义

设  $X$  是一个随机变量, 若  $E\{[X - E(X)]^2\}$  存在, 则称它为  $X$  的**方差**, 记为  $D(X)$ , 即

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

将  $\sqrt{D(X)}$  记为  $\sigma(X)$ , 称为**标准差**或**均方差**.

$D(X)$  或  $\sigma(X)$  体现  $X$  取值的波动性, 是衡量  $X$  取值分散程度的数字特征. 若  $D(X)$  较小, 则  $X$  取值比较集中; 反之, 若  $D(X)$  越大, 则说明  $X$  取值较分散.

## 方差的计算

- 令  $g(X) = [X - E(X)]^2$ , 则

$$D(X) = E(g(X)).$$

方差是  $X$  的函数  $g(X)$  的数学期望.



## 方差的计算

- 离散型:  $P\{X = x_k\} = p_k,$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - E(X))^2 p_k.$$

- 连续型:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx.$$

## 常见离散型随机变量的方差

- 两点分布  $X \sim 0-1(p)$

$$E(X) = p, D(X) = p(1 - p).$$

- 二项分布  $X \sim b(n, p)$

$$E(X) = np, D(X) = np(1 - p).$$

- 泊松分布  $X \sim \pi(\lambda)$

$$E(X) = \lambda, D(X) = \lambda.$$

- 几何分布  $X \sim Geom(p)$

$$E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{p-1}{p^2}.$$

## 常见连续型随机变量的方差

- 均匀分布  $X \sim U(a, b)$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- 指数分布  $X \sim E(\theta)$

$$E(X) = \theta, D(X) = \theta^2.$$

- 正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2.$$

## 性质

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

## 性质

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明:

$$\begin{aligned} D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= E\{X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

□

## 例

设  $E(X) = \mu$ ,  $D(X) = \sigma^2 \neq 0$ . 记

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

$$\text{则 } E(X^*) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = 0$$

$$\begin{aligned} D(X^*) &= E(X^{*2}) - [E(X^*)]^2 \\ &= E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2} E((X - \mu)^2) = 1. \end{aligned}$$

$X^*$  为  $X$  的标准化变量.

## 方差的性质

### 性质

1. 设  $C$  是常数, 则有  $D(C) = 0$ .
2. 设  $X$  是随机变量,  $a$  是常数, 则

$$D(aX) = a^2 D(X), D(X + C) = D(X)$$

特别地,  $D(X) = D(-X)$ .

## 方差的性质

### 性质

**3.** 设  $X, Y$  是两个随机变量, 则有

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}.$$

特别地, 若  $X$  与  $Y$  独立, 则

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$



证明:

$$\begin{aligned}D(X + Y) &= E\{[(X + Y) - E(X + Y)]^2\} \\&= E\{[(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2\} \\&= D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}\end{aligned}$$

□

证明:

$$\begin{aligned}D(X + Y) &= E\{[(X + Y) - E(X + Y)]^2\} \\&= E\{[(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2\} \\&= D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}\end{aligned}$$

□

- 由性质 1-3, 若  $X, Y$  相互独立, 则

$$D(aX + bY + C) = a^2 D(X) + b^2 D(Y).$$

- 进一步, 若  $X_1, \dots, X_n$  相互独立, 则

$$D(c_0 + \sum_i^n c_i X_i) = \sum_i^n c_i^2 D(X_i).$$

## 方差的性质

### 性质

**4.**  $D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X = E(X)\} = 1.$

## 方差的性质

### 性质

**4.**  $D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X = E(X)\} = 1.$

证明: (充分性)  $P\{X = E(X)\} = 1$ , 则有  
 $P\{X^2 = (E(X))^2\} = 1$ , 则

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0.$$

(必要性) 通过切比雪夫不等式证明.

□

例

设  $X$  的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0; \\ 1-x & 0 \leq x < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

求  $D(X)$ .

例

设  $X$  的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0; \\ 1-x & 0 \leq x < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

求  $D(X)$ .

$$\text{解: } E(X) = \int_{-1}^0 x(1+x)dx + \int_0^1 x(1-x)dx = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^0 x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^3(1-x)dx = \frac{1}{6}$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6}.$$

□

## 例

设活塞的直径 (以 cm 计)  $X \sim N(22.40, 0.03^2)$ , 气缸的直径为  $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$ .  $X, Y$  相互独立, 任取一只活塞, 求活塞能装入气缸的概率.

## 例

设活塞的直径 (以 cm 计)  $X \sim N(22.40, 0.03^2)$ , 气缸的直径为  $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$ .  $X, Y$  相互独立, 任取一只活塞, 求活塞能装入气缸的概率.

解:  $X - Y \sim N(-0.10, 0.05^2)$

$$\begin{aligned} P\{X < Y\} &= P\{X - Y < 0\} \\ &= P\left\{\frac{X - Y - (-0.1)}{0.05} < \frac{0 - (-0.1)}{0.05}\right\} \\ &= \Phi(2) = 0.9772. \end{aligned}$$





例

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

求  $Y = X^2$  的方差  $D(Y)$ .

例

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

求  $Y = X^2$  的方差  $D(Y)$ .

$$\text{解: } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$$

$$D(X^2) = E(X^4) - (E(X^2))^2 = 20 - 2\pi^2.$$

□

例

设

X	-2	0	1	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

求  $D(2X^3 + 5)$ .

例

设

X	-2	0	1	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

求  $D(2X^3 + 5)$ .

解:  $E(X^6) = \frac{493}{6}$ ,  $E(X^3)^2 = \frac{1}{9}$

$$D(2X^3 + 5) = 4D(X^3) = 4(E(X^6) - (E(X^3))^2) = \frac{2954}{9}. \quad \square$$

## 切比雪夫不等式 (Chebyshev)

### 定理

设  $X$  具有  $E(X) = \mu$ ,  $D(X) = \sigma^2$ , 则对任意正数  $\varepsilon$ , 有

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

## 切比雪夫不等式 (Chebyshev)

### 定理

设  $X$  具有  $E(X) = \mu$ ,  $D(X) = \sigma^2$ , 则对任意正数  $\varepsilon$ , 有

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

意义：分布未知,  $E(X)$  和  $D(X)$  存在的条件下, 估计

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

## 切比雪夫不等式 (Chebyshev)

证:

$$\begin{aligned} P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} &= \int_{|x - \mu| \geq \varepsilon} f(x) dx \\ &\leq \int_{|x - \mu| \geq \varepsilon} \frac{|x - \mu|^2}{\varepsilon^2} f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

□

## 方差性质 4 的证明

### 性质

设  $D(X) = 0$ , 则  $P\{X = E(X)\} = 1$ .

证明: (反证法) 假设  $P\{X = E(X)\} < 1$ , 则存在  $\varepsilon > 0$ , 有

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} > 0.$$

但由切比雪夫不等式, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 有

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

矛盾. 故  $P\{X = E(X)\} = 1$ .



## 小结

- $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2.$
- $D(aX) = a^2 D(X)$
- $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}.$   
特别地, 若  $X$  与  $Y$  独立, 则

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

- 切比雪夫不等式:

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

其中  $\mu = E(X)$ ,  $\sigma^2 = D(X)$ .

## 常见离散型随机变量的期望与方差

	分布律	$E(X)$	$D(X)$
$X \sim 0-1(p)$	$P_k = p^k(1-p)^{1-k}, k=0, 1$	$p$	$p(1-p)$
$X \sim b(n, p)$	$P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$ $k=0, 1, \dots, n$	$np$	$np(1-p)$
$X \sim \pi(\lambda)$	$P_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$ $k=0, 1, \dots, n$	$\lambda$	$\lambda$
$X \sim Geom(p)$	$P_k = p(1-p)^{k-1},$ $k=1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{p-1}{p^2}$

## 常见连续型随机变量的期望与方差

	概率密度	$E(X)$	$D(X)$
$X \sim U(a, b)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{else} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim \text{Exp}(\theta)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$	$\theta$	$\theta^2$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$ $-\infty < x < \infty.$	$\mu$	$\sigma^2$