Lec-24. 0-1 分布参数的区间估计、单侧置信区间

主讲教师: 吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页: wulisu.cn

本次课内容

0-1 分布参数的区间估计

正态总体均值与方差的单侧置信区间

假设检验

- 假设检验的相关概念

其他总体均值的区间估计

总体 X 的均值为 μ, 方差为 σ^2, 非正态分布或不知分布形式. 样本为 $X_1, \ldots, X_n$. 当 n 充分大 (一般 $n > 50$) 时, 由中心极限定理知,

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

设 $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间

- σ^2 已知时, 置信区间近似为 $(\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$.
- σ^2 未知时, 置信区间近似为 $(\overline{X} \pm z_{\alpha/2}S/\sqrt{n})$.

例

某市随机抽取 100 个家庭，调查知道其中有 60 家拥有私家车. 试根据此调查结果，求该市拥有私家车比例 p 的置信水平为 95% 近似置信区间.

解: $\hat{p} = \bar{x} = \frac{600}{1000} = 0.6, s^2 \approx \hat{p}(1-\hat{p}) = 0.24, z_{0.025} = 1.96$. 代入近似置信区间

$$\left(\bar{X} - z_{0.025} S/\sqrt{n}, \quad \bar{X} + z_{0.025} S/\sqrt{n}\right)$$

得近似置信区间为 $(0.512, 0.688)$. □

0-1 分布参数的区间估计

总体 $X \sim b(1, p)$, $X_1, \cdots, X_n$ $(n > 50)$ 为样本.

- 则未知参数 p 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间近似为

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2$, $b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)$, $c = n\bar{X}^2$.

总体 $X \sim b(1, p)$ 的分布律为

$$P\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1,$$

其中 p 未知参数.

$$\mu = p, \sigma^2 = p(1-p).$$

由中心极限定理

$$\frac{\sum X_i - E(\sum X_i)}{\sqrt{D(\sum X_i)}} = \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$$

.

则

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha$$

等价于

$$P\left\{\left|\frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha.$$

故

$$(n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\bar{X} + z_{\alpha/2})p + n\bar{X}^2 < 0.$$

记 $a = n + z_{\alpha/2}^2$, $b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)$, $c = n\bar{X}^2$, 则由

$$ap^2 + bp + c < 0$$

解得

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < p < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

例

现从一批产品中取 100 个样本, 得一级品 60 个. 求这批产品得一级品率 p 的置信水平为 0.95 的置信区间.

例

现从一批产品中取 100 个样本, 得一级品 60 个. 求这批产品得一级品率 p 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解: $n = 100$, $\bar{x} = 0.6$, $1 - \alpha = 0.95$,
$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84$,
$b = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2) = -123.84$, $c = n\bar{x}^2 = 36$. 则
$p_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0.5$, $p_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0.69$.
故 p 的置信水平为 0.95 的置信区间为
$(0.5, 0.69)$. $\square$

单侧置信区间

定义

若

$$P\{\theta > \underline{\theta}(X_1, ..., X_n)\} \geq 1 - \alpha,$$

则 $(\underline{\theta}, \infty)$ 称为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, $\underline{\theta}$ 称为单侧置信下限.

若

$$P\left\{\theta < \overline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)\right\} \geq 1 - \alpha,$$

则 $(-\infty, \overline{\theta})$ 称为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, $\overline{\theta}$ 称为单侧置信上限.

单侧置信区间和双侧置信区间的关系

$\underline{\theta}$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha_1$ 的单侧置信下限,
$\overline{\theta}$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha_2$ 的单侧置信上限,
$\Longrightarrow (\underline{\theta}, \overline{\theta})$是 θ 的置信水平为 $1-\alpha_1-\alpha_2$ 的双侧置信区间.

证明: $P\{\underline{\theta} < \theta\} \geq 1-\alpha_1, \quad P\{\theta < \overline{\theta}\} \geq 1-\alpha_2$
由加法公式,

$$\begin{aligned} P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} &= P\{\underline{\theta} < \theta\} + P\{\theta < \overline{\theta}\} - 1 \\ &\geq 1-\alpha_1-\alpha_2. \end{aligned}$$

□

正态总体均值的单侧置信区间 (σ^2 未知)

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知, $X_1, \ldots, X_n$ 是一个样本.

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

- 则 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), +\infty\right).$$

- 单侧置信下限 $\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$.
- 则 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\left(-\infty, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right).$$

- 单侧置信上限 $\overline{\mu} = \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$.

正态总体方差的单侧置信区间 (μ 未知)

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知, $X_1, \ldots, X_n$ 是一个样本.

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 则 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right).$$

- 单侧置信上限 $\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$.
- σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, +\infty\right).$$

- 单侧置信下限 $\underline{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$.

例

从一批灯泡中随机地取 5 只作寿命试验，测得寿命 (以 h 计) 为

$$1050, 1100, 1120, 1250, 1280$$

设灯泡寿命服从正态分布，求灯泡寿命均值地置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

例

从一批灯泡中随机地取 5 只作寿命试验, 测得寿命 (以 h 计) 为

$$1050, 1100, 1120, 1250, 1280$$

设灯泡寿命服从正态分布, 求灯泡寿命均值地置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解: $1-\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$,
$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318$. $\bar{x}=1160$, $s^2=9950$.
$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065$. □

假设检验

- 假设检验. 首先提出关于总体的假设, 然后根据样本对所提出的假设作出决策(接受 or 拒绝).
- 如何利用样本值对一个具体的假设进行推验?
- 通常借助于直观分析和理论分析相结合的做法. 基本原理: 实际推断原理 (小概率事件在一次试验中几乎不可能发生).

例

某车间用一台包装机包装葡萄糖，包得的袋装糖重是一个随机变量，服从正态分布．当机器正常时，其均值为 0.5 kg，标准差为 0.015 kg．某日开工后检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装地 9 袋糖，称得净重为

$$\begin{array}{ccccc} 0.497 & 0.506 & 0.518 & 0.524 & 0.498 \\ 0.511 & 0.520 & 0.515 & 0.512 & \end{array}$$

问机器是否正常？

分析：用 μ 和 σ 分别表示这一天袋装糖重总体 X 得均值和方差. 由长期实践可知, 标准差较稳定, 设为 $\sigma = 0.015$. 则

$$X \sim N(\mu, 0.015^2), \qquad \text{其中 } \mu \text{ 未知.}$$

- 如何根据样本值判断 $\mu = 0.5$ 还是 $\mu \neq 0.5$?
  - 提出两个对立假设 $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$ 和 $H_1 : \mu \neq \mu_0$;
  - 根据一个合理的法则, 利用已知样本作出决策：接受 H_0 or 拒绝 H_0.
  - 如果作出的判断是接受 H_0, 则 $\mu = \mu_0$, 则认为机器是正常的, 否则认为不正常的.

由于要检验的假设涉及总体均值, 故可借助于样本均值.

- $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计量, $\bar{X}$ 的观察值 $\bar{x}$ 一定程度上可以反映 μ 的大小. 因此若 H_0 为真, 则 $|\bar{x}-\mu_0|$ 不应该太大. 所以当 H_0 为真时,

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

不应该太大.

下面, 衡量 $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的大小.

选定一个适当的正数 k.

- 若 $\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k$, 则拒绝假设 H_0;
- 若 $\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < k$, 则接受假设 H_0.

给定一个较小的数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 考虑

$$P\{\text{ 拒绝} H_0 \mid H_0 \text{为真}\} \leq \alpha,$$

即

$$P\left\{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k \mid H_0 \text{为真}\right\} \leq \alpha.$$

为确定 k，取等号

$$P\left\{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k \mid H_0\text{为真}\right\} = \alpha.$$

因为当 H_0 为真时, $Z = \frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 所以

$$k = z_{\alpha/2}.$$

- 若 $\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}$, 则拒绝假设 H_0;
- 若 $\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$, 则接受假设 H_0.

假设检验得过程如下：

解：取 $\alpha = 0.05$, 则 $k = z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

$n = 9$, $\sigma = 0.015$, $\bar{x} = 0.511$.

所以

$$\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.2 > 1.96.$$

所以拒绝 H_0, 认为包装机工作不正常. $\square$

以上所采取得检验法是符合实际推断原理的.

由于 α 通常取得很小, 一般取 $\alpha = 0.01, 0.05$.

因此当 H_0 为真 (即 $\mu = \mu_0$) 时,

$\left\{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}\right\}$ 是一个小概率事件.

根据实际推断原理, 就可以认为:

如果 H_0 为真, 由一次试验得到不等式

$$\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}$$

观察值 $\bar{x}$, 几乎是不会发生的.

在一次试验中,

- 若
$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2},$$
则我们有理由怀疑原来的假设 H_0 的正确性, 因而拒绝 H_0.
- 若
$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2},$$
则没有理由拒绝 H_0, 因而接受 H_0.

显著性水平

在上例中， 当样本容量 n 固定, 选定 α 后, k 就可以确定.

- 若 $|z| = \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k$, 则称 $\bar{x}$ 与 μ_0 的差异是显著的, 则我们拒绝 H_0.
- 若 $|z| = \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < k$, 则称 $\bar{x}$ 与 μ_0 的差异是不显著的, 则我们接受 H_0.
- α 称为显著性水平. $\bar{x}$ 与 μ 的有无显著差异的判断是在显著性水平 α 之下作出的.
- 检验统计量 $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

原假设与备择假设

假设检验问题常叙述为:

在显著性水平 α 下, 检验假设

$$H_0 : \mu = \mu_0, \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

或称为" 在显著水平 α 下, 针对 H_1 检验 H_0".

- H_0 称为原假设或零假设;
- H_1 称为备择假设(意指在原假设被拒绝后可供选择的假设).

拒绝域与临界点

- 当检验统计量取某个区域 C 中的值时，我们拒绝原假设 H_0，则称区域 C 为拒绝域.
- 拒绝域的边界点称为临界点.

如前面的实例中，拒绝域为

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2},$$

临界点为 $z = z_{\alpha/2}$.

两类错误

由于样本的随机性，任一检验规则在应用时，都有可能发生错误的判断——两类错误.

	原假设为真	原假设不真
根据样本拒绝原假设	第 I 类错误	正确
根据样本接受原假设	正确	第 II 类错误

- 第 I 类错误：拒绝真实的原假设 (弃真).
- 第 II 类错误：接受错误的原假设 (取伪).

- $$\begin{aligned} P_1 &= P\{\text{第 I 类错误}\} \\ &= P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = \alpha \end{aligned}$$

- $$P_2 = P\{\text{第 II 类错误}\} = P\{\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 不真}\}$$

在确定检验法则时, 我们应尽可能使 P_1, P_2 都较小. 但当样本容量一定时, 若减少犯第一类错误的概率, 则犯第二类错误的概率往往增大.
若要使犯两类错误的概率都减小, 只能增加样本容量.

显著性检验

- 只对犯第一类错误的概率加以控制, 而不考虑犯第二类错误的概率的检验, 称为**显著性检验**.

双边备择假设与双边假设检验

在 $H_0 : \mu = \mu_0$, 和 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ 中,

- 备择假设 H_1 表示, μ 可能大于 μ_0, 也可能小于 μ_0, 称为双边备择假设.
- 这样的假设检验称为双边假设检验.

单边检验

但有时, 我们只关心总体均值是否增大或减少,

- 形如 $H_0: \mu \leq \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ 的假设检验称为右边检验.
- 形如 $H_0: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ 的假设检验称为左边检验.
- 右边与左边检验统称为单边检验.

单边检验的拒绝域

设总体 $X \sim N(\mu.\sigma^2)$, σ^2 为已知, $X_1, \ldots, X_n$ 是来自 X 的样本, 给定显著性水平 α.

- 右边检验 $H_0 : \mu \leq \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ 的拒绝域

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha.$$

- 左边检验 $H_0 : \mu \geq \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ 的拒绝域

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha.$$

证: 右边检验. 因 H_0 中的全部 μ 都比 H_1 中的 μ 要小, 当 H_1 为真时, 观察值往往偏大. 拒绝域

$$\bar{x} \geq k.$$

下面确定常数 k.

$$\begin{aligned}
P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\} &= P_{\mu\leq\mu_0}\{\bar{x} \geq k\} \\
&= P_{\mu\leq\mu_0}\{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\bar{k}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\} \\
&\leq P_{\mu\leq\mu_0}\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\bar{k}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\}
\end{aligned}$$

要控制 $P\{拒绝 H_0 \mid H_0 为真\} \leq \alpha$, 只需令

$$P_{\mu \leq \mu_0}\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\bar{k}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\} = \alpha,$$

则 $\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \to k = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$. 拒绝域为

$$\bar{x} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha, \qquad 即\, z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha.$$

类似, 左边检验 $H_0: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ 的拒绝域为

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha.$$

假设检验的一般步骤

1. 根据实际问题的要求, 提出原假设 H_0 与备择假设 H_1.
2. 给定显著性水平 α 以及样本容量 n.
3. 确定检验统计量以及拒绝域形式.
4. 按 $P\{当H_0为真时, 拒绝H_0\} = \alpha$ 求出拒绝域.
5. 取样, 根据样本观察值确定接受还是拒绝 H_0.

例

公司从生产商购买牛奶, 公司怀疑生产商在牛奶中掺水以牟利, 通过测定牛奶的冰点, 可以检验出牛奶是否掺水. 天然牛奶的冰点温度近似服从正态分布, 均值 $\mu_0 = -0.545\,^\circ\mathrm{C}$, 标准差 $\sigma = 0.008\,^\circ\mathrm{C}$, 牛奶掺水可使冰点温度升高而接近水的冰点温度 ($0\,^\circ\mathrm{C}$), 测得生产商提交得 5 批牛奶得冰点温度, 其均值为 $\bar{x} = -0.535\,^\circ\mathrm{C}$, 问是否可以认为生厂商在牛奶中掺水? 取 $\alpha = 0.05$.

解: 假设检验

$$H_0: \mu \leq \mu_0 = -0.545(\text{即牛奶未掺水}),$$

$$H_1: \mu \geq \mu_0(\text{即牛奶掺水}),$$

这是右边检验问题, 其拒绝域为

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma\sqrt{n}} \geq z_{0.05} = 1.645$$

$z = 2.7951 > 1.645$. z 的值落在拒绝域中, 所以在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0，即认为生产商中掺了水. □

例

设 $(X_1, ..., X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu, 9)$ 的一个样本, 其中 μ 为未知参数, 检验

$$H_0 : \mu = \mu_0, \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

聚居于

$$w_1 = \{(x_1, ..., x_n) || \bar{x} - \mu_0| \geq C\}.$$

(1) 确定常数 C, 使得显著性水平为 $\alpha = 0.05$.
(2) 在固定样本容量 $n = 25$ 的情况下, 分析犯两类错误的概率 α 和 β 之间的关系.

解: (1) 若 H_0 成立, 则 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{3/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

$P\{(X_1, ..., X_n) \in w_1\} = P\{|\bar{X} - \mu_0| \geq C\}$

$P\{\frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|}{\sqrt{n}} \geq \frac{\sqrt{n}C}{3}\} = 2(1 - \Phi(\frac{\sqrt{n}C}{3})) = 0.05$

$\Phi(\frac{\sqrt{n}C}{3}) = 0.975$, $\frac{\sqrt{n}C}{3} = 1.96$, 则 $C = \frac{5.88}{\sqrt{n}}$.

(2)$n=25$, 若 H_0 成立, 则

$P\{(x_1,...,x_n)\in w_1\}=2(1-\Phi(\frac{5C}{3}))=\alpha$.

若 H_0 不成立, 不妨假设 $\mu=\mu_1\neq\mu_0$.

$$\begin{aligned}\beta &= P\{(X_1,...,X_n)\in w_1\}\\ &= P\{|\bar{X}-\mu_0|<C\}\\ &= P\{-C+\mu_0<\bar{X}<C+\mu_0\}\\ &= P\{\frac{5}{3}(-C+\mu_0-\mu)<\frac{5}{3}(\bar{X}-\mu)<\frac{5}{3}(C+\mu_0-\mu)\}\\ &= \Phi(\frac{5}{3}(-C+\mu_0-\mu_1))-\Phi(\frac{5}{3}(-C+\mu_0-\mu_1)).\end{aligned}$$

当 C 较小时, α 较大, β 较小.

当 C 较大时, α 较小, β 较大. $\square$