《线性代数》第四章作业（6 月 11 日提交）

临班 370

2023 年 5 月 23 日

班级:______________ 姓名:_____________ 学号:_________________

1. 判断题（错误请给出说明或反例. 每题 2 分，共 30 分）:

(1) 两个同型矩阵 A, B 等价

$\Leftrightarrow R(A) = R(B)$

$\Leftrightarrow A, B$ 具有相同的标准形

$\Leftrightarrow A$ 可以经过有限次初等行变换和初等列变换化为矩阵 B.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $PAQ = B$.

(2) (等价不变量) 若矩阵 $A \sim B$, 则

① A, B 具有相同的阶次.

② $R(A) = R(B)$ (等价的完全不变量).

③ A, B 的行 (列) 向量组的线性相关性相同.

④ 若 A, B 为方阵, 则 A 可逆当且仅当 B 可逆.

(3) (行等价不变量) 若矩阵 $A \overset{r}{\sim} B$, 则

① A, B 具有相同的阶次.

② $R(A) = R(B)$.

③ A, B 的列向量组的线性相关性相同.

④ 若 A, B 为方阵, 则 A 可逆当且仅当 B 可逆.

⑤ $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解 (即具有相同的解集).

(4) 设 A 为方阵, 若 A 经过若干次初等行变换变为矩阵 B, 则 $|A| = |B|$.

(5) 若 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解, 则 $R(A) = R(B)$. (6) 两个向量组等价当且仅当这两个向量组的秩相等.

(7) 向量组 $I : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可由 $II : \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表示, 则 $r \le s$.

(8) 向量组 $I : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的秩为 p, 向量组 $II : \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 的秩为 q. 若向量组 I 可以向量组 II 线性表示, 则 $p \le q$.

(9) 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 进行有限次初等行变换化为矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 若 $\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 则 $\beta_3 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2$.

(10) 若向量 α_1, α_2 线性无关, α_2, α_3 线性无关, 则 α_1, α_3 线性无关.

(11) $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, $B \ne 0$, 则 $R(A) < n$.

(12) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则 α_1 可以由 α_2, α_3 线性表示, α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(13) $A_{m\times n}$ 为列满秩矩阵, 即 $R(A) = n$

$\Leftrightarrow$ 矩阵 A 的标准形为 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $PA = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

$\Leftrightarrow$ A 可以经过有限次初等行变换化为矩阵 B.

$\Leftrightarrow$ A 的列向量组线性无关.

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有唯一零解.

$\Rightarrow$ 左消去律成立. 即若 $AX = AY$, 则 $X = Y$.

$\Rightarrow$ 左保秩. 即 $R(AB) = R(B)$.

(14) $A_{n\times n}$ 为可逆矩阵

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵 B, 使得 $AB = E$.

$\Leftrightarrow$ $|A| \ne 0$, 即矩阵 A 为非奇异的.

$\Leftrightarrow$ $R(A) = n$, 即矩阵 A 为满秩的.

$\Leftrightarrow A \sim E_n \Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $PA = E$).

$\Leftrightarrow$ A 可以经过有限次初等行变换化为矩阵 E.

$\Leftrightarrow$ A 的列 (行) 向量组线性无关.

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有唯一零解.

$\Leftrightarrow$ A 没有零特征值.

$\Rightarrow$ 左右消去律成立. 即若 $AX = AY$, 则 $X = Y$; 若 $XA = YA$, 则 $X = Y$.

$\Rightarrow$ 保秩. 即 $R(AB)=R(BA)=R(B)$.

(15) $R(A_{m\times n})=1$

$\Leftrightarrow$ 存在非零向量 α,β, 使得 $A=\alpha\beta^T$.

$\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组两两成比例.

$\Rightarrow$ 若 A 为方阵, 则 $A^k=(\alpha^T\beta)^{k-1}A$.

2. 填空题 (每空 3 分，共 18 分)：

(1) 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的 3 个解向量. $\alpha_1=(2,3,4,5)^T,\alpha_2+\alpha_3=(2,4,6,8)$, 则该方程组的通解为__________.

(2) 已知 4 阶矩阵 A 的秩为 3, α_1,α_2 为非齐次线性方程 $AX=\beta(\beta\neq 0)$ 的两个不相等的解，则 $AX=0$ 的通解为__________.

(3) 设 3 阶方阵 A 的各行元素之和均为 0, 且 $R(A)=2$, 则 $AX=0$ 的通解为__________.

(4) 设 n 阶方阵 A 的各行元素之和均为 0, 且 $R(A)=n-1$, 则 $AX=0$ 的通解为__________.

(5) 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,3,4,5)^T,\alpha_3=(3,4,5,6)^T,\alpha_4=(4,5,6,7)^T$, 则该向量组的秩为__________.

(6) 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},,\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ 线性相关, 则 $a=$__________.

3. 计算题 (每题 10 分，共 40 分)：

(1) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&1&2\\1&1&1&4\\4&-6&-2&4\\3&6&7&9\end{pmatrix}$ 列向量组的一个最大无关组, 并将其余列向量用最大无关组线性表示.

(2) λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3 &=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3 &=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3 &=-2,\end{cases}$$

① 有唯一解； ② 无解；③无穷多个解, 并求通解.

(3) 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$, $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$. 求方程 $AX=\beta$ 的通解.

(4) 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2 & =5 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4 & =1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4 & =3 \end{cases}$.

4. 证明题 (第题 4 分，共 12 分)：

(1) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，

$$\begin{cases} \beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ \beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ \beta_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4 \\ \beta_4=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4 \end{cases}$$

证明 β_1,β_2,β_3 线性无关.

(2) 设 A 为 $n\times m$ 矩阵, B 为 $m\times n$ 矩阵, 其中 $n<m$. 若 $AB=E$, 证明 B 的列向量组线性无关.

(3) $A_{m\times n}B_{n\times s}=0$, 证明 $R(A)+R(B)\le n$.

5. 附加题 (20 分)：

(1) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)K_{n\times m}$. 证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的秩为 $R(K)$.

矩阵的语言：已知 A 列满秩, 证明 $R(AK)=R(K)$.

提示: 设 $R(K)=r$, 取矩阵 K 列向量组的最大无关组, 不妨设为 $\gamma_1,\cdots,\gamma_r$. 则

$$\beta_i=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\gamma_i.$$

所以证明 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 的最大无关组即可.

根据最大无关组定义只需要证明：① $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关; ② 任意 β_i 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表示.