

《线性代数》第五章作业 (6 月 18 日提交)

临班 370

2023 年 6 月 3 日

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

(注意: 本章所有矩阵都默认为实矩阵.)

1. 判断题:

(1) (相似不变量) 若矩阵 A, B 相似, 则

- ① 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.
- ② A, B 具有相同的阶次.
- ③ $R(A) = R(B)$, 从而 $A \sim B$.
- ④ A, B 的特征多项式相等.
- ⑤ A, B 的特征值相等.
- ⑥ $|A| = |B|$. 进一步, A 可逆当且仅当 B 可逆.
- ⑦ $\text{tr}A = \text{tr}B$.

(2) 矩阵 A_n 可以相似对角化

- \Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.
- $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.
- \Leftrightarrow 每个特征值的代数重数和几何重数相等.
- \Leftrightarrow 极小多项式是一次因式的乘积.
- \Leftarrow 实对称矩阵以及和实对称相似的矩阵可相似对角化.
- \Leftarrow 具有 n 个互不相同特征值的矩阵可相似对角化.

(3) (合同不变量) 若矩阵 A, B 是合同的, 则

- ① 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^T A P = B$.
- ② A, B 具有相同的阶次.
- ③ $R(A) = R(B)$, 从而 $A \sim B$.
- ④ A, B 的正定性相同.
- ⑤ A, B 行列式的符号相同.
- ⑥ A 可逆当且仅当 B 可逆.

(4) 矩阵 A 可以合同对角化

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵.

$\Leftrightarrow A^T = A, A$ 为对称阵. 任意对称矩阵都可以合同对角化.

(5) (正交相似不变量) 若矩阵 A, B 是正交相似的, 则

- ① 存在正交矩阵 P , 使得 $P^{-1} A P = P^T A P = B$. 即是相似也是合同.
- ② A, B 具有相同的阶次.
- ③ $R(A) = R(B)$, 从而 $A \sim B$.
- ④ A, B 的特征多项式相等.
- ⑤ A, B 的特征值相等.
- ⑥ $|A| = |B|$. 进一步, A 可逆当且仅当 B 可逆.
- ⑦ $\text{tr} A = \text{tr} B$.
- ⑧ A, B 的正定性相同.

(6) 矩阵 A 可以正交相似对角化

\Leftrightarrow 存在正交矩阵 P , 使得 $P^T A P = P^{-1} A P$ 为对角矩阵.

$\Leftrightarrow A^T = A, A$ 为对称阵. 任意对称矩阵都可以正交相似对角化.

2. 计算题:

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 计算:

① $\psi(A) = A^{10} - 5A^8 + 3E$.

② $|\psi(A)|$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似. 求:

① x, y .

② 求一个正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(3) 设二次型 $f(X) = X^TAX = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$.

① 写出二次型 f 的矩阵;

② 求正交变换 $X = PY$, 把二次型 f 化为标准形.

③ 判断 f 是否为正定二次型.

④ 证明: $\min_{X \neq 0} \frac{f(X)}{X^TX} = 2$.

4. 证明题:

(1) 设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的特征值, 证明 $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值.

5. 思考题:

- 矩阵 A 相似对角矩阵 Λ 是指: 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$. 思考这里的可逆矩阵 P 是否唯一. 若不唯一, 则设 P_1 和 P_2 都使得 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = \Lambda$, 问 P_1 和 P_2 的列向量有什么关系?
- 矩阵 A 正交相似对角矩阵 Λ 是指: 存在正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$. 思考这里的 P 是否唯一. 若不唯一, 则设 P_1 和 P_2 都使得 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = \Lambda$, 问 P_1 和 P_2 的列向量又有什么关系?