线性代数-18

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 26 日

本次课内容

1. 二次型和对称矩阵

2. 二次型的化简

3. 合同不变量和正定二次型

例 (P53 习题 1-(5))

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

例 (P53 习题 1-(5))

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

- 二次型 $f(X) = X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- 中心任务: 化简二次型/对称阵.
  寻找可逆 (正交) 线性变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^TP^TAPY = k_1y_1^2 + \cdots + k_ny_n^2$$

矩阵语言：寻找可逆 (正交) 矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

例 (P53 习题 1-(5))

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- **中心任务: 化简二次型/对称阵.**
  寻找可逆 **(**正交**)** 线性变换 $X=PY$**,** 使得

$$f(X)=f(PY)=Y^TP^TAPY=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$$

矩阵语言：寻找可逆 **(**正交**)** 矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵**.**

定义

含 n 个变量二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

称为二次型.

定义

含 n 个变量二次齐次函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

- 只含平方项的二次型

$$f=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

称为标准形(或法式).

定义

含 n 个变量二次齐次函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

- 只含平方项的二次型

$$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

称为标准形(或法式).

- 在标准式的基础上，若 $\lambda_i=1,-1,0$，则称 f 为规范形.

二次型的表示

- 组合式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.
$$

二次型的表示

- 组合式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$\Rightarrow f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

- 矩阵式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- 对任意矩阵 A, $f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T+A}{2} X$, 其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

二次型和对称矩阵

- 对任意矩阵 A, $f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T+A}{2} X$, 其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

- 二次型和对称矩阵是一一对应的
- 若 A 为对称阵, 则称 A 为二次型 $f(X) = X^T A X$ 的矩阵. 称二次型 f 为对称矩阵 A 的二次型.
- 二次型的秩被定义为对称矩阵 的秩, i.e. $R(f) = R(A)$.
- 二次型的化简 $\Leftrightarrow$对称矩阵 的化简.

- 例: $f(x_1,x_2)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=X^T\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}X$
- 通过配方知

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= a\left(x_1+\frac{b}{a}x_2\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)x_2^2 \\ &= \left(\sqrt{a}x_1+\frac{b}{\sqrt{a}}x_2\right)^2+\left(\sqrt{c-\frac{b^2}{a}}x_2\right)^2 \end{aligned}$$

- 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1+\frac{b}{a}x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{a}x_1+\frac{b}{\sqrt{a}}x_2 \\ z_2 = \sqrt{c-\frac{b^2}{a}}x_2 \end{cases}$$

- 则有标准形 $f=ay_1^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)y_2^2$ 和规范形 $f=z_1^2+z_2^2$.

- 例: $f(X)=X^T\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}X$
- 取（可逆）线性变换

$$X=PY,\quad \text{其中 } P=\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$X=QZ,\quad \text{其中 } Q=\begin{pmatrix}\sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}}\\ 0 & \sqrt{c-\frac{b^2}{a}}\end{pmatrix}^{-1}$$

- 则有标准形 $f(X)=f(PY)=Y^TP^TAPX=Y^T\begin{pmatrix}a & \\ & c-\frac{b^2}{a}\end{pmatrix}Y$

  规范形 $f=f(QZ)=Z^TQ^TAQZ=Z^T\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}Z$.

二次型化简: 任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

- 设 $f(X) = X^T A X$ 为二次型, A 为对称矩阵 $(A^T = A)$.
- 定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化: 即对于任意对称矩阵 A, 存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^T AP = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

二次型化简: 任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

- 设 $f(X) = X^T AX$ 为二次型, A 为对称矩阵 $(A^T = A)$.
- 定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化: 即对于任意对称矩阵 A, 存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为对角阵.

- 对于任意二次型 f, 存在正交变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = X^T AX = Y^T P^T APY = Y^T \Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

例 (例 14)

化简二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

解法: 将二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 正交相似对角化, 则 $X = PY$ 即为所求.

例

化简二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

并求所用变换矩阵.

解法：有平方项则配平方，无平方项则凑平方项.

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4(y_2 + y_3)(y_2 - y_3) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2. \end{aligned}$$

(对称) 矩阵的合同关系

- 二次型 $f(X) = X^TAX$, 取可逆变换 $X = PY$, 则

$$f = X^TAX = Y^TP^TAPY$$

定义

若存在可逆阵 P, 使得
$$B = P^TAP,$$
则称矩阵 A, B **合同**, 记为 $A \overset{\text{合同}}{\sim} \mathrm{B}$.

给定对称矩阵 A，如果存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^T A P = \Lambda$$

为对角阵，则称对称阵 A 可以合同对角化.

- 此时，Λ 称为对称阵 A 的 (合同) 标准形;
- 进一步，若 Λ 的对角线元素只能取 $1, -1, 0$, 则 Λ 称为对称阵 A 的 (合同) 规范形.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的<u>阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性</u>.
- 二次型的标准型 $f = \boldsymbol{\lambda}_1 x_1^2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p;
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数, 记为 q;
- $p - q$ 称为二次型的符号差;
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \boldsymbol{\lambda}_1 x_1^2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p;
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数，记为 q;
- $p - q$ 称为二次型的符号差;
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

定理（定理 7：惯性定理）

正负惯性指数是合同不变量.

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \boldsymbol{\lambda}_1 x_1^2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p;
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数，记为 q;
- $p - q$ 称为二次型的符号差;
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

定理（定理 7：惯性定理）

正负惯性指数是合同不变量.

注：实对称矩阵 A, B 合同 $\Leftrightarrow A, B$ 的正负惯性指数相同.

定理 (定理 8)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n;$

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C, 使得对称阵 $A = C^TC$.

定理 (定理 8)

$f(X)=X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X\neq 0,\ f(X)>0;$

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p=n;$ (正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C, 使得对称阵 $A=C^TC$.

定理 (定理 8)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n;$ (正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C, 使得对称阵 $A = C^TC$.

正定矩阵的性质:

- 若实对称阵 A 为正定的, 则 A^{-1}, A^T, A^* 也都为正定矩阵.
- 若实对称阵 A, B 为正定的, 则 $A + B$ 也是正定矩阵.

定理 (定理 9)

$f(X) = X^T AX$ 或对称矩阵 A 为负定的，

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) < 0$;

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

定理 (定理 9)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow\ \forall X \neq 0,\ f(X) < 0;$

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n;$ (负定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

二次型和对称阵的负定性

定理 (定理 9)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) < 0$;

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

回顾:

- 主子式：行指标、列指标相同的子式.
- 顺序主子式：前 k 行、前 k 列构成的子式.
- 注意：第六版教材没有区分主子式和顺序主子式，描述有歧义。定理 9 以第七版为准！

性质

如果实对称矩阵 A 和 B 合同, 则

- A 和 B 的正/负惯性指数都相同.
- A 和 B 的符号差相同.
- A 正定当且仅当 B 正定, A 负定当且仅当 B 负定.
- A 和 B 等价. 从而, A 和 B 的阶次、秩、可逆性相同.

例 (例 17)

判断二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性.

正（负）定矩阵的应用:

- 若 $f = ax^2 + bxy + cy^2$ 正定，则二次曲线 $f = 1$ 为平面上的椭圆.
- 若 $f = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ 正定，则二次曲面 $f = 1$ 为三维空间中的椭球面.
- 二元函数极值点的刻画:

定理 (同济高等数学下 P113)

二元函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近光滑，$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$，令

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

若 H 正定，则 $f(x_0, y_0)$ 为极小值; 若 H 负定，则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

小结

- 二次型和对称矩阵;
- 二次型化标准形: 正交变换法(和配方法);
- 对称矩阵的合同和正定性.

作业

- 思考题：设 A, B 是 n 阶实对称矩阵，若 A 和 B 合同（i.e. 存在可逆矩阵 P，使得 $P^TAP = B$），则称 A 和 B 属于同一个合同类. 问 n 阶实对称矩阵的合同类最多有多少个?
（提示：正负惯性指数是对称阵合同的完全不变量，所以只需考虑正负惯性指数的所有可能取值，即满足 $0 \leq p+q \leq n$ 的正整数 p, q 的所有可能取值.）
- Page$_{141}$：29-1、32-1、34-1、35.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 26 日