

# Lec-10. 条件分布，相互独立的随机变量

主讲教师：吴利苏 ([wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn))

主    页：[wulisu.cn](http://wulisu.cn)

# 目录

1. 二维连续型随机变量的条件分布

2. 二维随机变量的独立性

3.  $n$  维随机变量的边缘分布和独立性

## 二维连续型随机变量的条件分布

- 对于连续型随机变量  $X, Y$ ,

$$P\{X = x\} = 0, \quad P\{Y = y\} = 0, \quad \forall x, y.$$

无法定义  $P\{X = x | Y = y\}$ . 所以不能直接用条件概率引入条件分布函数.

## 二维连续型随机变量的条件分布

- 对于连续型随机变量  $X, Y$ ,

$$P\{X = x\} = 0, \quad P\{Y = y\} = 0, \quad \forall x, y.$$

无法定义  $P\{X = x|Y = y\}$ . 所以不能直接用条件概率引入条件分布函数.

- 给定  $y$ , 对任意  $\varepsilon, x$ , 考虑条件概率

$$P\{X \leq x|y < Y \leq y + \varepsilon\}.$$

若  $P\{y < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$  则有

$$\begin{aligned} P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} &= \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x \left[ \int_y^{y+\varepsilon} f(x, y) dy \right] dx}{\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y) dy} \end{aligned}$$

若  $P\{y < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$  则有

$$\begin{aligned} P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} &= \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x \left[ \int_y^{y+\varepsilon} f(x, y) dy \right] dx}{\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y) dy} \end{aligned}$$

当  $\varepsilon$  很小时, 上式近似于

$$\frac{\varepsilon \int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{\varepsilon f_Y(y)} \approx \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

- 若对于固定的  $y$ ,  $f_Y(y) > 0$ , 则称

$$\frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \triangleq f_{X|Y}(x|y)$$

为在  $Y = y$  的条件下  $X$  的 **条件概率密度**.

- 称

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx &= \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx \\ &\triangleq F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} \end{aligned}$$

为在  $Y = y$  的条件下  $X$  的 **条件分布函数**.

## 二维连续型条件分布的含义

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx \approx P\{X \leq x | y < Y \leq y+\varepsilon\}.$$



## 二维连续型条件分布的含义

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx \approx P\{X \leq x | y < Y \leq y+\varepsilon\}.$$

注

- 非负性:  $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$ .
- 规范性:  $F_{X|Y}(\infty|y) = 1$ .

类似可定义在  $X = x$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度和条件分布函数.

- $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)},$
- $F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y|X = x\} = \int_{-\infty}^y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy.$

类似可定义在  $X = x$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度和条件分布函数.

- $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)},$
- $F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y | X = x\} = \int_{-\infty}^y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy.$

注

- 联合分布  $\Rightarrow$  边缘分布 + 条件分布.
- 联合分布  $\Leftarrow$  边缘分布 + 条件分布.
- 联合分布  $\nLeftarrow$  边缘分布.
- 联合分布  $\nLeftarrow$  条件分布.

## 例

设二维随机变量  $(X, Y)$  在  $G: x^2 + y^2 \leq 1$  上服从均匀分布, 即有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in G; \\ 0 & \text{其他,} \end{cases}$$

求条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$ .

$$\text{解: } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} & -1 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

当  $-1 < y < 1$  时

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

## 例

设  $X$  在区间  $(0, 1)$  上随机地取值, 当观察到  $X = x \in (0, 1)$  时, 设  $Y$  在  $(x, 1)$  上随机地取值, 求  $Y$  的概率密度.

$$\text{解: } f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

关于  $Y$  的边缘概率密度

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx \\ &= \begin{cases} -\ln(1-y) & 0 < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

# 二维随机变量的独立性



## 相互独立的随机变量

事件  $A, B$ , 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则  $A, B$  相互独立.

## 相互独立的随机变量

事件  $A, B$ , 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则  $A, B$  相互独立.

下面引入两个随机变量的独立性.

## 相互独立的随机变量

### 定义

设  $F(x, y)$  及  $F_X(x)$ ,  $F_Y(y)$  分别是二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数及边缘分布函数. 若对于任意  $x, y$  有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\},$$

即  $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ , 则称  $X$  和  $Y$  是相互独立的.

- 离散型  $(X, Y)$ .
  - $X$  和  $Y$  相互独立  $\Leftrightarrow$   
 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},$   
即  $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}.$
- 连续型  $(X, Y)$ .
  - $X$  和  $Y$  相互独立  $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  几乎处处成立.

## 注

- 联合分布  $\Rightarrow$  边缘分布 + 条件分布 + 独立性.  
一般, 联合分布  $\nLeftarrow$  边缘分布 or 条件分布.

## 注

- 联合分布  $\Rightarrow$  边缘分布 + 条件分布 + 独立性.  
一般, 联合分布  $\nRightarrow$  边缘分布 or 条件分布.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立, 则

联合分布  $\Leftrightarrow$  边缘分布 = 条件分布.

## 注

- 联合分布  $\Rightarrow$  边缘分布 + 条件分布 + 独立性.  
一般, 联合分布  $\nRightarrow$  边缘分布 or 条件分布.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立, 则

联合分布  $\Leftrightarrow$  边缘分布 = 条件分布.

在独立性前提下, 只需知道联合分布、边缘分布、条件分布三者之一, 便可求其余两个分布.

例

已知  $(X, Y)$  的联合分布律

X \ Y	Y		$P\{X = x_i\}$
	0	1	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

判断  $X, Y$  的独立性.



解: 逐个检验  $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ .

$$P\{X=1, Y=0\} = \frac{1}{6} = P\{X=1\}P\{Y=0\}$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{2}{6} = P\{X=1\}P\{Y=1\}$$

$$P\{X=2, Y=0\} = \frac{1}{6} = P\{X=2\}P\{Y=0\}$$

$$P\{X=2, Y=1\} = \frac{2}{6} = P\{X=2\}P\{Y=1\}$$

则  $X$  和  $Y$  相互独立.



若

X \ Y	Y		$P\{X = x_i\}$
	0	1	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{1}{6} \neq P\{X = 1\}P\{Y = 0\}$$

只要有一对  $i, j$  使得  $p_{ij} \neq p_{i\bullet}p_{\bullet j}$  就能判断  $X, Y$  不独立.

例

设  $X$  和  $Y$  相互独立, 已知  $(X, Y)$  的联合分布律

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X = x_i\}$
1	0.01	0.2		
2	0.03			
$P\{Y = y_j\}$				

求出联合分布律.

解:  $X, Y$  相互独立, 则  $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$

$$P\{Y=0\} = 0.04,$$

$$P\{Y=0\}P\{X=1\} = P\{X=1, Y=0\},$$

$$\text{则 } P\{X=1\} = 0.25. \quad P\{X=2\} = 0.75.$$

$$P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\}, \text{ 则}$$

$$P\{Y=1\} = 0.8, \quad P\{Y=2\} = 0.16.$$

$$P\{X=2, Y=1\} = 0.6, \quad P\{X=2, Y=2\} = 0.12. \quad \square$$

例

$(X, Y)$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$X, Y$  是否相互独立?

## 例

$(X, Y)$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$X, Y$  是否相互独立?

$$\text{解: } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 3e^{-3y} & y > 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  相互独立.

例

$(X, Y)$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$X, Y$  是否相互独立?

$$\text{解: } f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & 0 < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

当  $0 < y < x < 1$  时,  $f(x, y) = 0$ , 而  $f_X \cdot f_Y > 0$ . 故  $X, Y$  不相互独立. □



### 例 (★)

设  $(X, Y)$  为二维正态随机变量, 证明  $X, Y$  相互独立  $\Leftrightarrow \rho = 0$ .

## 例 (★)

设  $(X, Y)$  为二维正态随机变量, 证明  $X, Y$  相互独立  $\Leftrightarrow \rho = 0$ .

证:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

证: 若  $\rho = 0$ , 则对任意  $x, y$

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y),$$

即  $X$  和  $Y$  相互独立.

反之, 若  $X$  和  $Y$  相互独立,  $f(x, y), f_X(x), f_Y(y)$  连续. 故, 对任意的  $x, y$ , 有

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

特别地, 令  $x = \mu_1, y = \mu_2, f(\mu_1, \mu_2) = f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$ , 则

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2},$$

从而  $\rho = 0$ .

□

## 例

一负责人到达办公室的时间均匀分布在  $8 \sim 12$  时, 其秘书到达办公室时间均匀分布在  $7 \sim 9$  时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间差不超过  $5\min(\frac{1}{12}h)$  的概率.

解: 设  $X, Y$  分别表示负责人和秘书到达办公室的时间.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 8 < x < 12; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 7 < y < 9; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$X, Y$  相互独立,

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 8 < x < 12, 7 < y < 9; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$P\{|X - Y| \leq \frac{1}{12}\} = \iint_G f(x, y) dx dy = \frac{1}{48}.$$

# $n$ 维随机变量的边缘分布和独立性

## $n$ 维随机变量的分布函数

$n$  维随机变量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

## $n$ 维连续型随机变量

若存在非负函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  使得对任意的  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

则称  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为连续型的随机变量, 称  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的概率密度函数.



## $n$ 维随机变量的边缘分布函数

- 称

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \dots, \infty)$$

为  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  关于  $X_1$  的**边缘分布函数**.

- 称

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \dots, \infty)$$

为  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  关于  $(X_1, X_2)$  的**边缘分布函数**.

## $n$ 维连续型随机变量的边缘分布函数

- 连续型随机变量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  关于  $X_1$  的**边缘概率密度函数**为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n.$$

- 关于  $(X_1, X_2)$  的**二维边缘概率密度函数**为

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_3 dx_4 \dots dx_n.$$

- 类似可得  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的 **$k(1 \leq k < n)$  维边缘概率密度**.

## $n$ 维随机变量的独立性

- 若对任意  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n),$$

则称  $X_1, \dots, X_n$  是相互独立的.

- 若对任意  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ ,

$$F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = F_1(x_1, \dots, x_m) F_2(y_1, \dots, y_n),$$

其中  $F_1, F_2, F$  分别为  $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n),$   
 $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$  的分布函数. 则称  $(X_1, \dots, X_m),$   
 $(Y_1, \dots, Y_n)$  是相互独立的.

## $n$ 维随机变量的独立性

### 定理

设  $(X_1, \dots, X_m)$  和  $(Y_1, \dots, Y_n)$  相互独立, 则

- (1) 对任意  $i, j$ ,  $X_i$  和  $Y_j$  相互独立.
- (2) 若  $h, g$  是连续函数, 则  $h(X_1, \dots, X_m)$  和  $g(Y_1, \dots, Y_n)$  相互独立.

注: 数理统计部分会用到这个结论.

1.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$  求  $f_X(x)$ .

2.  $f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$  求  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$ .

3.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 8 < x < 12, 7 < y < 9; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$

求  $\iint_{|x-y| \leq \frac{1}{12}} f(x, y) dx dy$ .

4.  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$  求  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x, y) dx$ .