

# 线性代数-18

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 11 月 4 日

1. 二次型和对称矩阵
2. 二次型的化简
3. 对称矩阵的合同
4. 正定性

例 (P53 习题 1-(5))

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

# 二次型

含  $n$  个变量二次齐次函数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

# 二次型

含  $n$  个变量二次齐次函数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

● 二次型的求和号表示:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

## 二次型和对称矩阵

- 二次型的矩阵表示:

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 二次型和对称矩阵

- 二次型的矩阵表示:

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 二次型通常简记为  $f(X) = X^TAX$ , 其中  $A$  为对称矩阵.

## 二次型和对称矩阵

- 二次型的矩阵表示:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 二次型通常简记为  $f(X) = X^TAX$ , 其中  $A$  为对称矩阵.
- 二次型的秩被定义为 对称矩阵 的秩, i.e.  $R(f) = R(A)$ .



- 对任意矩阵  $A$ ,

$$f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T + A}{2} X,$$

其中  $\frac{A^T + A}{2}$  为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

- 对任意矩阵  $A$ ,

$$f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T + A}{2} X,$$

其中  $\frac{A^T + A}{2}$  为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

- 一个二次型  $f(X)$  一般对应多个矩阵, 但二次型和对称矩阵是一一对应的. 称对称矩阵  $A$  为二次型  $f(X) = X^T A X$  的矩阵, 称二次型  $f$  为 对称矩阵  $A$  的二次型.

## 二次型的标准形和规范形

- 只含平方项的二次型

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

称为标准形(或法式).

- 在标准式的基础上, 若  $\lambda_i = 1, -1, 0$ , 则称

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$$

为规范形.

- 对应的矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O \end{pmatrix}.$$

## 二次型的中心任务：将二次型化为标准形和规范形

化简二次型:

寻找可逆 (正交) 线性变换  $X = PY$ , 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

为标准形或规范形.

## 二次型的中心任务：将二次型化为标准形和规范形

化简二次型:

寻找可逆 (正交) 线性变换  $X = PY$ , 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

为标准形或规范形.

化简对称矩阵:

寻找可逆 (正交) 矩阵  $P$ , 使得  $P^T A P$  为对角矩阵.

## 二次型化简：任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

定理 (定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化)

对于任意对称矩阵  $A$ , 存在正交阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

为对角阵.

推论 (定理 6)

对于任意二次型  $f(X) = X^TAX$ , 一定存在正交变换  $X = PY$ , 使得

$$f = X^TAX = Y^TP^TAPY = Y^T\Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

## 二次型化简：任意二次型都可在某可逆变换下化为规范形

### 推论

任意二次型  $f(X) = X^T A X$ ，一定存在可逆变换  $X = CZ$ ，使得  $f(CZ)$  为规范形。

证明：存在正交变换  $X = PY$ ，使得

$$f = X^T A X = Y^T P^T A P Y = Y^T \Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

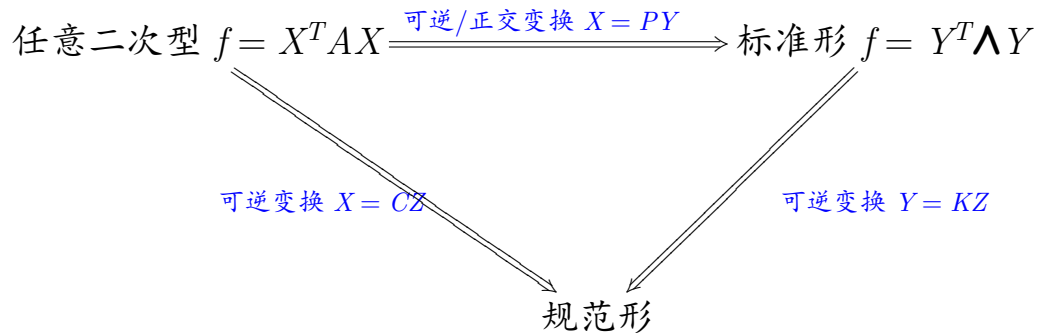
不妨设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  不等于 0,  $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0$ .

取  $X = PY = PKZ$ ，其中  $K = \text{diag} \left( \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}}, 1, \dots, 1 \right)$ ，则

$$f = X^T A X = Y^T P^T A P Y = Z^T K^T (P^T A P) K Z = Z^T K^T \Lambda K Z$$

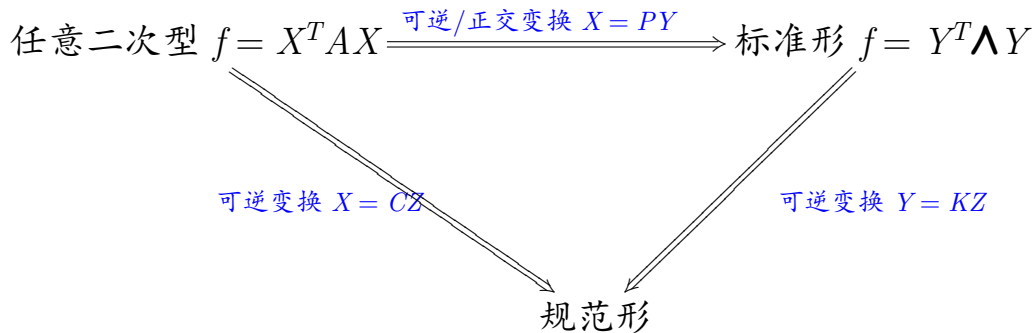
为规范形。

# 二次型化简





# 二次型化简



- 所有的变换都不唯一;
- 标准形不唯一, 但正交变换下的标准形是唯一的;
- 规范形是唯一的.

## 二次型化简：正交相似对角化

例 (例 14)

设二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

- (1) 求正交变换  $X = PY$ , 将二次型  $f$  化为标准形;
- (2) 求可逆变换  $X = CZ$ , 将二次型  $f$  化为规范形.

## 二次型化简：正交相似对角化

例 (例 14)

设二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

- (1) 求正交变换  $X = PY$ , 将二次型  $f$  化为标准形;
- (2) 求可逆变换  $X = CZ$ , 将二次型  $f$  化为规范形.

解法: 将二次型的矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  正交相似对角化, 则

$X = PY$  即为所求.

## 二次型化简：配方法（选学）

例

用配方法化简二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

并求所用变换矩阵.

## 二次型化简：配方法（选学）

例

用配方法化简二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

并求所用变换矩阵.

解法：有平方项则配平方，无平方项则凑平方项.

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4(y_2 + y_3)(y_2 - y_3) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2. \end{aligned}$$

## (对称) 矩阵的合同关系

- 二次型  $f(X) = X^T A X$ , 取可逆变换  $X = PY$ , 则

$$f = X^T A X = Y^T P^T A P Y$$

## (对称) 矩阵的合同关系

- 二次型  $f(X) = X^T A X$ , 取可逆变换  $X = PY$ , 则

$$f = X^T A X = Y^T P^T A P Y$$

定义

若存在可逆阵  $P$ , 使得

$$P^T A P = B,$$

则称矩阵  $A, B$  合同, 记为  $A \stackrel{\text{合同}}{\sim} B$ .

给定对称矩阵  $A$ , 如果存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^T A P = \Lambda$$

为对角阵, 则称对称阵  $A$  可以合同对角化.



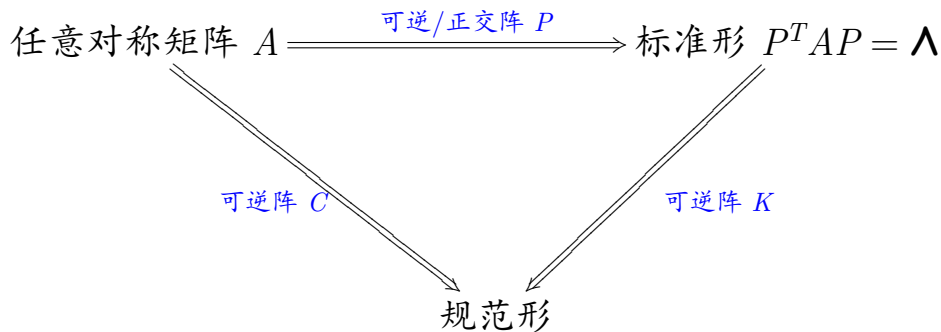
给定对称矩阵  $A$ , 如果存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^T A P = \Lambda$$

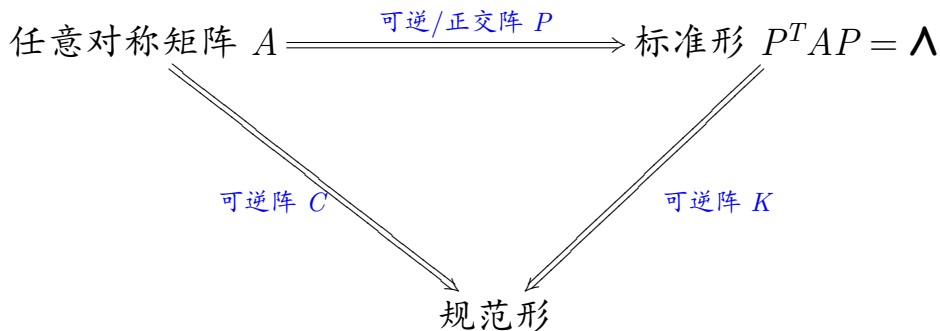
为对角阵, 则称对称阵  $A$  可以合同对角化.

- 此时,  $\Lambda$  称为对称阵  $A$  的(合同)标准形;
- 进一步, 若  $\Lambda$  的对角线元素只能取  $1, -1, 0$ , 则  $\Lambda$  称为对称阵  $A$  的(合同)规范形.

# 对称矩阵合同对角化



# 对称矩阵合同对角化



- 所有的可逆阵/正交阵都不唯一;
- 标准形不唯一, 但正交阵下的标准形是唯一的;
- 规范形是唯一的.

## 合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵  $A, B$  具有相同的阶次、秩、

## 合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵  $A, B$  具有相同的阶次、秩、正(负)惯性指数、正(负)定性.

## 合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵  $A, B$  具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、正（负）定性.
- 二次型的标准型  $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$  中正项的个数 称为二次型的正惯性指数，记为  $p$ ;
- 二次型标准型中负项的个数 称为二次型的负惯性指数，记为  $q$ ;
- 秩  $R(f) = R(A) = p + q$ .

## 合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵  $A, B$  具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、正（负）定性.
- 二次型的标准型  $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$  中正项的个数 称为二次型的正惯性指数，记为  $p$ ;
- 二次型标准型中负项的个数 称为二次型的负惯性指数，记为  $q$ ;
- 秩  $R(f) = R(A) = p + q$ .

定理 (定理 7: 惯性定理-正负惯性指数是合同不变量)

如果矩阵  $A$  和  $B$  合同, 则他们的正负惯性指数相等.

## 合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵  $A, B$  具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、正（负）定性.
- 二次型的标准型  $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$  中正项的个数 称为二次型的正惯性指数，记为  $p$ ;
- 二次型标准型中负项的个数 称为二次型的负惯性指数，记为  $q$ ;
- 秩  $R(f) = R(A) = p + q$ .

定理 (定理 7: 惯性定理-正负惯性指数是合同不变量)

如果矩阵  $A$  和  $B$  合同, 则他们的正负惯性指数相等.

注: 实对称矩阵  $A, B$  合同  $\Leftrightarrow A, B$  的正负惯性指数相同.



## 二次型和对称阵的正定性

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为正定的,

## 二次型和对称阵的正定性

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

## 二次型和对称阵的正定性

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$  正惯性指数  $p = n;$

## 二次型和对称阵的正定性

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$  正惯性指数  $p = n;$

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的特征值全为正;

## 二次型和对称阵的正定性

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$  正惯性指数  $p = n;$

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的顺序主子式全为正;

## 二次型和对称阵的正定性

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$  正惯性指数  $p = n;$

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $C$ , 使得对称阵  $A = C^T C$ .

## 二次型和对称阵的正定性

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$  正惯性指数  $p = n$ ; (正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $C$ , 使得对称阵  $A = C^T C$ .

# 二次型和对称阵的正定性

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$  正惯性指数  $p = n;$  (正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $C$ , 使得对称阵  $A = C^T C$ .

正定矩阵的性质:

- 若实对称阵  $A$  为正定的, 则  $A^{-1}, A^T, A^*$  也都为正定矩阵.
- 若实对称阵  $A, B$  为正定的, 则  $A + B$  也是正定矩阵.



## 二次型和对称阵的负定性

定理 (定理 9)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为负定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) < 0;$

$\Leftrightarrow$  负惯性指数  $q = n;$

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正.

## 二次型和对称阵的负定性

定理 (定理 9)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为负定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) < 0;$

$\Leftrightarrow$  负惯性指数  $q = n;$  (负定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正.

# 二次型和对称阵的负定性

## 定理 (定理 9)

$f(X) = X^T A X$  或对称矩阵  $A$  为负定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) < 0;$

$\Leftrightarrow$  负惯性指数  $q = n;$

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$  对称阵  $A$  的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正.

## 回顾:

- 主子式: 行指标、列指标相同的子式.
- 顺序主子式: 前  $k$  行、前  $k$  列构成的子式.
- 注意: 第六版教材没有区分主子式和顺序主子式, 描述有歧义.  
定理 9 以第七版为准!

## 性质

如果实对称矩阵  $A$  和  $B$  合同, 则

- $A$  和  $B$  的正/负惯性指数都相同.
- $A$  正定当且仅当  $B$  正定,  $A$  负定当且仅当  $B$  负定.
- $A$  和  $B$  等价. 从而,  $A$  和  $B$  的阶次、秩、可逆性相同.

## 例题

例 (例 17)

判断二次型  $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$  的正定性.

## 例题

例 (例 17)

判断二次型  $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$  的正定性.

思路:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- 方法一: 判断三个顺序主子式的正负.
  - 全正  $\Rightarrow$  正定; 负正负  $\Rightarrow$  负定; 其他情况  $\Rightarrow$  不正定也不负定.
- 方法二: 判断三个特征值的正负.
  - 全正  $\Rightarrow$  正定; 全负  $\Rightarrow$  负定; 其他情况  $\Rightarrow$  不正定也不负定.

# 正定性和负定性的应用

## 正(负)定矩阵的应用:

- 若  $f = ax^2 + bxy + cy^2$  正定, 则二次曲线  $f = 1$  为平面上的椭圆.
- 若  $f = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$  正定, 则二次曲面  $f = 1$  为三维空间中的椭球面.
- 二元函数极值点的刻画:

定理 (同济高等数学下 P113)

二元函数  $z = f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  附近光滑,  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ , 令

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

若  $H$  正定, 则  $f(x_0, y_0)$  为极小值; 若  $H$  负定, 则  $f(x_0, y_0)$  为极大值.

## 小结

- 二次型和对称矩阵;
- 二次型化标准形: 正交变换法 (和配方法);
- 对称矩阵的合同和正定性.



- 思考题：设  $A, B$  是  $n$  阶实对称矩阵，若  $A$  和  $B$  合同 (i.e. 存在可逆矩阵  $P$ ，使得  $P^T A P = B$ )，则称  $A$  和  $B$  属于同一个合同类. 问  $n$  阶实对称矩阵的合同类最多有多少个？  
(提示：正负惯性指数是对称阵合同的完全不变量，所以只需考虑正负惯性指数的所有可能取值，即满足  $0 \leq p + q \leq n$  的正整数  $p, q$  的所有可能取值.)
- Page<sub>141</sub>：29-1、32-1、34-1、35.

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2024 年 11 月 4 日