线性代数-16

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 26 日

本次课内容

1. 正交向量组
2. Schmidt 正交化
3. 正交矩阵和正交变换
4. 线性变换和矩阵的相似 (补充)

正交向量组

- 内积
$$(X, Y) = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
- 若 $(X, Y) = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组：一组两两正交的非零向量.

正交向量组

- 内积
$$(X, Y) = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
- 若 $(X, Y) = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组：一组两两正交的非零向量.

定理 (定理 11：正交向量组必线性无关)

若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, 则证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

例 (例 1)

已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

求与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 均正交的单位向量 $\boldsymbol{\beta}$.

标准正交基的定义

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间 $V(V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量, 若

- $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V 的一组基 (最大无关组);
- $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 两两正交;
- $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 都为单位向量,

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V 的一组标准正交基.

标准正交基的定义

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间 $V(V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量, 若

- $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V 的一组基 (最大无关组);
- $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 两两正交;
- $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 都为单位向量,

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V 的一组标准正交基.

- 只满足前两个条件的向量组称为 V 的一组正交基.

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，求 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,3)^T$ 在这组基下的坐标.

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 求 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,3)^T$ 在这组基下的坐标.

- 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V 的一组标准正交基,

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_r \boldsymbol{\alpha}_r \in V$$

则 $\boldsymbol{\lambda}_i = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i)$.

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，求 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,3)^T$ 在这组基下的坐标.

- 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V 的一组标准正交基，

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_r\boldsymbol{\alpha}_r \in V$$

  则 $\boldsymbol{\lambda}_i = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i)$.
- 如何获得向量空间的标准正交基?

例子

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，求 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,3)^T$ 在这组基下的坐标.

- 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V 的一组标准正交基，

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_r\boldsymbol{\alpha}_r \in V$$

  则 $\boldsymbol{\lambda}_i = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i)$.

- 如何获得向量空间的标准正交基？

  —Schmidt 正交化.

Schmidt 正交化：从一般基得到正交基的算法

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间 V 的一组基，

- 正交化 (Schmidt 正交化)：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1, \\
&\cdots \\
\boldsymbol{\beta}_r &= \boldsymbol{\alpha}_r - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{r-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r-1})}\boldsymbol{\beta}_{r-1},
\end{aligned}$$

- 单位化：

$$e_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{||\boldsymbol{\beta}_1||}, e_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{||\boldsymbol{\beta}_2||}, \cdots, e_r = \frac{\boldsymbol{\beta}_r}{||\boldsymbol{\beta}_r||}.$$

性质

在 Schmidt 正交化过程中, 对任意 $k = 1, \cdots, r$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 等价. 特别地, $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 等价.

性质

在 Schmidt 正交化过程中，对任意 $k = 1, \cdots, r$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 等价. 特别地，$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 等价.

- 两个向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ A, B 可以相互线性表示.

性质

在 Schmidt 正交化过程中，对任意 $k = 1, \cdots, r$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 等价. 特别地，$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 等价.

- 两个向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ A, B 可以相互线性表示.

推论

- 正交向量组是线性无关向量组;
- 反之，线性无关向量组可以 Schmidt 正交化得到正交向量组.

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 用 Schmidt 正交化把这组向量标准正交化.

定义 (定义 21)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^TA = E \ \ (i.e.\ A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为<u>正交矩阵</u>, 简称<u>正交阵</u>.

定义 (定义 21)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^TA = E \ \ (i.e. \ A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为正交矩阵, 简称正交阵.

- 矩阵 A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的列 (行) 向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.
- A 是正交矩阵, 则 $|A| = \pm 1$.
- A 是正交矩阵, 则 A^{-1} 和 A^T 也是正交矩阵.
- A, B 是正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

例

验证下面矩阵为正交矩阵.

- $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $$R_Z(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} & -\sin\boldsymbol{\theta} & 0 \\ -\sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 (Lecture-5)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = 1$,

$$H = E - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T.$$

则 H 为对称阵, 且 $HH^T = E$. 所以 H 为一个正交矩阵.

例 (Lecture-5：线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

则得 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y=AX.$$

例 (Lecture-5：线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，取**线性变换**如下，

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

则得 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})$ 表示上面线性变换，则有

$$Y=AX.$$

- **线性变换和 n 阶方阵一一对应.**

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵, 则线性变换 $Y = PX$ 称为正交变换.

正交变换

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵, 则线性变换 $Y = PX$ 称为正交变换.

- 正交变换保持内积不变.

$$(PX, PY) = (PX)^T PY = X^T P^T PY = X^T Y = (X, Y).$$

- 正交变换保持长度不变, 保持夹角不变.

例 (Lecture-5)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$,

$$H=E-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T.$$

则 $H^T=H$, 且 $HH^T=E$.

- 所以, H 是正交矩阵, $Y=HX$ 是一个正交变换 (称为镜面反射).

小结

- 正交向量组、标准正交基;
- Schmidt 正交化;
- 正交矩阵和正交变换;

定义

设 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为一个变换 (自身到自身的映射). 若满足

- $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, $f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2)$;
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}$, $f(k \cdot X) = k \cdot f(X)$,

则称 f 是一个线性变换.

补充：线性变换的另一种定义

定义

设 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为一个变换 (自身到自身的映射). 若满足

- $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, $f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2)$;
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}$, $f(k \cdot X) = k \cdot f(X)$,

则称 f 是一个线性变换.

- 取定 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 则存在 n 阶方阵, 使得 $f(X) = AX$ (Lec 14).

例

设 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个线性变换，

- 取 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，此时 $f(X) = AX$;
- 取 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的另外一组基，此时 $f(Y) = BY$

问矩阵 A 和 B 的关系？

例

设 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个线性变换,

- 取 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 此时 $f(X) = AX$;
- 取 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的另外一组基, 此时 $f(Y) = BY$

问矩阵 A 和 B 的关系?

解: 设 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)P = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, 其中 P 为过渡矩阵. 任取

$$\alpha = (\xi_1, \cdots, \xi_n)X = (\eta_1, \cdots, \eta_n)Y \in \mathbb{R}^n$$

则

$$\begin{aligned} f(\alpha) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)AX &= (\eta_1, \cdots, \eta_n)BY \\ &= (\xi_1, \cdots, \xi_n)PBP^{-1}X. \end{aligned}$$

所以 $A = PBP^{-1}$, 即 $B = P^{-1}AP$.

综上: 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是同一个线性变换在不同基下的矩阵.
这种关系被定义为矩阵的相似关系.

定义

设 A, B 为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 P 使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称矩阵 A, B 相似, 记为 $A \overset{相似}{\sim} B$.

- 若 A 和 B 相似, 则 A 和 B 等价.
  所以, 将相似的方阵 A 和 B 记为 $A \overset{相似}{\sim} B$.

设线性变换 f 在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \qquad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为过渡矩阵. 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是相似的.

设线性变换 f 在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \qquad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为过渡矩阵. 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量：方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 所具有的共性.
- 是否存在一个可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵?
  (等价地, 是否存在一组基，使线性变换的表示简单?)
- 是否存在一个正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP$ 为对角矩阵?
  (等价地, 是否存在一组标准正交基，使线性变换的表示简单？)

设线性变换 f 在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \qquad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为过渡矩阵. 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量：方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 所具有的共性.

  Section-1. 特征值和特征多项式
- 是否存在一个可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵?
  (等价地, 是否存在一组基，使线性变换的表示简单?)

  Section-2. 相似对角化
- 是否存在一个正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP$ 为对角矩阵?
  (等价地, 是否存在一组标准正交基，使线性变换的表示简单？)

  Section-3. 对称阵的正交相似对角化

设线性变换 f 在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \qquad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为过渡矩阵. 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量：方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 所具有的共性.

  Section-1. 特征值和特征多项式
- 是否存在一个可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵?
  (等价地, 是否存在一组基，使线性变换的表示简单?)

  Section-2. 相似对角化
- 是否存在一个正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP$ 为对角矩阵?
  (等价地, 是否存在一组标准正交基，使线性变换的表示简单？)

  Section-3. 对称阵的正交相似对角化
- Section-3 的应用：第六章. 二次型的化简

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 26 日