线性代数-2

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 11 月 20 日

本次课内容

1. 逆序数和行列式的定义 2

2. 行列式的性质

回顾

- n 阶行列式的递归定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

- 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

定义 (n 阶行列式的直接定义)

n 阶行列式为 n^2 个数排成 n 行 n 列的数阵决定的一个数，其值可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

- 把 n 个不同元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列，简称排列.

排列及其逆序数

- 把 n 个不同元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列，简称排列.
- $1, 2, \cdots, n$ 有多少种排列可能？（$n\,!$）

排列及其逆序数

- 把 n 个不同元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列，简称排列.
- $1, 2, \cdots, n$ 有多少种排列可能？($n\,!$)
  - 二阶行列式有 $2 = 2 \cdot 1$ 项，三阶行列式有 $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ 项. 恰好与可能的排列数对应.

- 把 n 个不同元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列，简称排列.
- $1, 2, \cdots, n$ 有多少种排列可能？（$n\,!$）
  - 二阶行列式有 $2 = 2 \cdot 1$ 项，三阶行列式有 $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ 项. 恰好与可能的排列数对应.
- 规定一个标准排列，通常令 $12 \cdots n$ 为标准排列. 排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中某两个元素的次序与标准排列中次序不同时，就称为一个逆序. 例如设标准排列是 123，则排列 321 中的 3 和 1 就是一个逆序.

排列及其逆序数

- 把 n 个不同元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列，简称排列.
- $1,2,\cdots,n$ 有多少种排列可能？（$n\,!$）
  - 二阶行列式有 $2=2\cdot 1$ 项，三阶行列式有 $6=3\cdot 2\cdot 1$ 项. 恰好与可能的排列数对应.
- 规定一个标准排列，通常令 $12\cdots n$ 为标准排列. 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中某两个元素的次序与标准排列中次序不同时，就称为一个逆序. 例如设标准排列是 123，则排列 321 中的 3 和 1 就是一个逆序.
- 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中的所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

排列及其逆序数

- 把 n 个不同元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列，简称排列.
- $1, 2, \cdots, n$ 有多少种排列可能？（$n\,!$）
  - 二阶行列式有 $2 = 2 \cdot 1$ 项，三阶行列式有 $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ 项. 恰好与可能的排列数对应.
- 规定一个标准排列，通常令 $12 \cdots n$ 为标准排列. 排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中某两个元素的次序与标准排列中次序不同时，就称为一个逆序. 例如设标准排列是 123，则排列 321 中的 3 和 1 就是一个逆序.
- 排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中的所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$.
- 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

求逆序数

- 考虑 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个元素. 设标准排列为 $12\cdots n$, $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列. 设 t_i 为 p_i 前面的元素中比 p_i 大的元素的个数, 则

$$t(p_1p_2\cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n.$$

求逆序数

- 考虑 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个元素. 设标准排列为 $12\cdots n$, $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列. 设 t_i 为 p_i 前面的元素中比 p_i 大的元素的个数, 则

$$t(p_1p_2\cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n.$$

同理, 设 l_i 为 p_i 后面的元素中比 p_i 小的元素的个数, 则

$$t(p_1p_2\cdots p_n) = l_1 + l_2 + \cdots + l_n.$$

求逆序数

- 考虑 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个元素. 设标准排列为 $12\cdots n$, $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列. 设 t_i 为 p_i 前面的元素中比 p_i 大的元素的个数, 则

$$t(p_1p_2\cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n.$$

同理, 设 l_i 为 p_i 后面的元素中比 p_i 小的元素的个数, 则

$$t(p_1p_2\cdots p_n) = l_1 + l_2 + \cdots + l_n.$$

例

求排列 32514 的逆序数.

三阶行列式定义中的正负号

例

讨论 $1, 2, 3$ 所有全排列的奇偶性.

解:

例

讨论 1, 2, 3 所有全排列的奇偶性.

解:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- 奇排列对应的项为负; 偶排列对应的项为正.

定义 (n 阶行列式的直接定义)

n 阶行列式为 n^2 个数排成 n 行 n 列的数阵决定的一个数，其值可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $t(p_1p_2\cdots p_n)$ 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

注: n 阶行列式的递归定义和直接定义是等价的.

注:

- n 阶行列式共有 $n!$ 项;
- 每一项都是位于不同行不同列的元素的乘积;
- 每一项都可写为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$, 其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的某个排列;
- $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时, 对应项取正号;
  $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时, 对应项取负号;

例 (反下三角行列式)

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解:

行列式定义小结

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}
$$

$$
= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n}
$$

$$
= \sum_{q_1 q_2 \cdots q_n} (-1)^{t(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}
$$

$$
= a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} M_{n1}
$$

1.4 行列式的性质

性质 1: 行列式与其转置行列式相等

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为 D 的转置行列式.

例 (下三角行列式的转置行列式为上三角行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质

$$D^T = D.$$

注：行列式计算中行和列的地位是一样的.

性质 2: 交换两行 (列), 行列式变号.

性质

交换行列式的两行 *(列)*, 行列式变号.

推论

行列式的两行 *(列)* 相同, 则行列式为 0.

性质 3: 某行 (列) 乘数 k, 等价于行列式乘数 k

性质

行列式的某一行 *(列)* 中的所有元素都乘同一数 k, 等于用数 k 乘此行列式.

推论

行列式中某行 *(列)* 所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

性质

行列式中如果有两行 (列) 元素成比例, 则此行列式等于零.

性质

若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则该行列式是如下两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6: 某行 (列)k 倍加到另一行 (列), 行列式不变

性质

把行列式的某一行（列）的各元素乘同一个数然后加到另一行（列）对应的各元素上去，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式计算的一些规定

- 行列式的三种变换：
  - 交换两行 (列)：$r_i \leftrightarrow r_j$, $c_i \leftrightarrow c_j$
  - 某行（列）乘以数 k：$r_i \times k$, $c_i \times k$
  - 一行（列）的 k 倍加到另一行列上去：$r_j + kr_i$, $c_j + kc_i$
- 行：Row，用 r_i 表示第 i 行
  列：Column，用 c_j 表示第 j 列
- 行变换放在等号的上面，列变换放在等号的下面
- 在每一个变换中，被改变的行（列）的符号写在前面.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \xlongequal[c_1 - c_2]{} \begin{vmatrix} a_{31} - a_{32} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} - a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} - a_{12} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

注：多个变换时，需要一步一步算. 计算行列式时，切忌眼高手低、想当然！

思考

- 你认为行列式的哪种操作最有用?
- 交换行（列）可通过另外两个操作实现.

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\xlongequal{r_1+r_3}
\begin{vmatrix} a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_3-r_1}
\begin{vmatrix} a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_1+r_3}
\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix}
\xlongequal{r_1\times(-1)}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

例题：数字行列式化上（下）三角形，再求行列式.

例

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解:

例

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解:

- 行列式的每行 (列) 的各元素之和相等，可尝试求和法.

例题：爪形行列式

例

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & c & c & \cdots & c \\ c & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 全不为 0.

解:

例题：友矩阵的行列式

例

证明

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

证明:

例题：分块行列式

例

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

证明:

例题：稀疏行列式化分块行列式

例

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

解:

例

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$$

解:

小结

- 行列式的直接定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

- 行列式的性质.

作业

- 求 2413 的逆序数 $t(2413)$，并根据行列式的定义计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

- P21-23. 4-(2)(4)、6-(2)

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn