Lec-12. 两个随机变量函数的分布 (续)

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：wulisu.cn

目录

$Z=\frac{Y}{X}$ 和 $Z=XY$ 的分布

设 (X,Y) 为连续型随机变量，则 $Z=\frac{Y}{X}$, $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)\,dx,$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})\,dx.$$

$$F_{Y/X}(z) = P\{\, Y/X \le \, z\} = \iint\limits_{y/x \le z} f(x, y)\, dxdy$$

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P\{\, Y/X \le z\} = \iint\limits_{y/x \le z} f(x,\, y)\, dxdy \\
&= \iint\limits_{y/x \le z, x<0} f(x,\, y)\, dxdy + \iint\limits_{y/x \le z, x>0} f(x,\, y)\, dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0} \int_{zx}^{+\infty} f(x,\, y)\, dydx + \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{zx} f(x,\, y)\, dydx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) = P\{\,Y/X \le z\} &= \iint\limits_{y/x\le z} f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{y/x\le z, x<0} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{y/x\le z, x>0} f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dydx \\
&\overset{y=xu}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P\{\,Y/X \le z\} = \iint\limits_{y/x\le z} f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{y/x\le z, x<0} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{y/x\le z, x>0} f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dydx \\
&\xlongequal{y=xu} \int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P\{\, Y/X \le z\} = \iint\limits_{y/x \le z} f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{y/x \le z, x<0} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{y/x \le z, x>0} f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dydx \\
&\xlongequal{y=xu} \int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} |x|f(x,xu)\,dudx = \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x,xu)\,dx\right) du
\end{aligned}
$$

- 类似可证 $Z = XY$ 的概念密度 (作业)

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})\, dx.$$

- 特别地, X, Y 相互独立时,

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(zx)\, dx,$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx.$$

例

某公司提供一种地震保险. 保费 Y 的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{25} e^{-y/5} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

保险赔付 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

设 X 与 Y 相互独立, 求 $Z = Y/X$ 的概率密度.

解: 当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$.

当 $z>0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(zx)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} x\cdot\frac{1}{5}e^{-x/5}\cdot\frac{xz}{25}e^{-xz/5}\,dx \\
&= \frac{z}{125}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x\cdot\frac{1+z}{5}}\,dx = \frac{z}{125}\int_0^{+\infty} x^{3-1}e^{-x}\,dx \\
&= \frac{z}{125}\cdot\frac{\Gamma(3)}{((1+z)/5)^3} \\
&= \frac{2z}{(1+z)^3}.
\end{aligned}
$$

$\square$

$M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设 X, Y 是相互独立的随机变量,

- $$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} \\ &= P\{X \le z\}P\{Y \le z\} = F_X(z)F_Y(z) \end{aligned}$$

$M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设 X, Y 是相互独立的随机变量,

- $$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} \\ &= P\{X \le z\}P\{Y \le z\} = F_X(z)F_Y(z) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= P\{N \le z\} = 1 - P\{N > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\ &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \end{aligned}$$

$M = \max\{X_1, ..., X_n\}$ 和 $N = \min\{X_1, ..., X_n\}$ 的分布

设 $X_1, ..., X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,

- $F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)...F_{X_n}(z)$,

$M=\max\{X_1,...,X_n\}$ 和 $N=\min\{X_1,...,X_n\}$ 的分布

设 $X_1,...,X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，

- $F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)...F_{X_n}(z)$,
- $F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]...[1-F_{X_n}(z)]$.

$M=\max\{X_1,...,X_n\}$ 和 $N=\min\{X_1,...,X_n\}$ 的分布

设 $X_1,...,X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,

- $F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)...F_{X_n}(z)$,
- $F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]...[1-F_{X_n}(z)]$.
- 特别地, 当 $X_1,...,X_n$ 有相同分布函数时

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\qquad F_{\min}=1-[1-F(z)]^n.$$

例

已知 X, Y 的分布函数.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0; \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - 0.5e^{-y} & y \geq 0; \\ 0.5e^{y} & y < 0, \end{cases}$$

X 与 Y 相互独立, 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数.

解: $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$.
当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$,
当 $z \geq 0$ 时,
$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z) = (1 - e^{-z})(1 - 0.5e^{-z})$,
所以

$$F_Z(z) = \begin{cases} (1 - e^{-z})(1 - 0.5e^{-z}) & z \geq 0; \\ 0 & z < 0. \end{cases} \qquad \square$$

例

设 X, Y 相互独立, 均服从 $U(0,1)$, 求 $M=\max\{X, Y\}$ 的概率密度.

解: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0; \\ x & 0 < x < 1; \\ 1 & x \ge 0; \end{cases}$$

$$F_{\max}(x) = F^2(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0; \\ x^2 & 0 < x < 1; \\ 1 & x \ge 0; \end{cases}$$

$$f_{\max}(x) = F'_{\max}(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

□

例

设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成, 连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当 L_1 损坏时, L_2 开始工作)

设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y. 已知其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 且 $\alpha \neq \beta$, 试分别就三种连接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解:(i) 串联, 由于 L_1, L_2 中一个损坏时, 系统 L 就停止工作, 则 L 的寿命为 $Z = \min\{X, Y\}$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \alpha e^{-\alpha x} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \beta e^{-\beta y} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$F_{\min}(z) = \begin{cases} 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

(ii) 并联, $Z=\max\{X, Y\}$

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}(1-e^{\alpha z})(1-e^{\beta z}) & z>0;\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0;\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

(iii) 备用情况 $Z = X + Y$.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy \\
&= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y}\,dy \\
&= \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}\,dy \\
&= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right).
\end{aligned}
$$

$$
f(z) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right) & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}
$$

$\square$