

线性代数-16

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 22 日

本次课内容

1. 正交向量组
2. Schmidt 正交化
3. 正交矩阵和正交变换
4. 线性变换和矩阵的相似 (补充)

- 内积

$$(X, Y) = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

- 若 $(X, Y) = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 一组两两正交的非零向量.

正交向量组

- 内积

$$(X, Y) = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

- 若 $(X, Y) = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 一组两两正交的非零向量.

定理 (定理 11: 正交向量组必线性无关)

若 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是正交向量组, 证明 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

正交向量组

例 (例 1)

已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

正交. 求一个非零向量 α_3 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

标准正交基的定义

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 $V (V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量, 若

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为 V 的一组基 (最大无关组);
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 两两正交;
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 都为单位向量,

则称 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为 V 的一组标准正交基.

标准正交基的定义

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 $V (V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量, 若

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为 V 的一组基 (最大无关组);
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 两两正交;
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 都为单位向量,

则称 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为 V 的一组**标准正交基**.

- 只满足前两个条件的向量组称为 V 的一组**正交基**.

例子

例

设 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 为 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基, 求 $\beta = (1, 2, 3)^T$ 在这组基下的坐标.

例子

例

设 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 为 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基, 求 $\beta = (1, 2, 3)^T$ 在这组基下的坐标.

- 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为 V 的一组标准正交基,

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r \in V$$

则 $\lambda_i = (\beta, \alpha_i)$.

例子

例

设 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 为 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基, 求 $\beta = (1, 2, 3)^T$ 在这组基下的坐标.

- 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为 V 的一组标准正交基,

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r \in V$$

则 $\lambda_i = (\beta, \alpha_i)$.

- 如何获得向量空间的标准正交基?

例子

例

设 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 为 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基, 求 $\beta = (1, 2, 3)^T$ 在这组基下的坐标.

- 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为 V 的一组标准正交基,

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r \in V$$

则 $\lambda_i = (\beta, \alpha_i)$.

- 如何获得向量空间的标准正交基?
—Schmidt 正交化.

Schmidt 正交化：从一般基得到正交基的算法

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一组基，

- 正交化 (Schmidt 正交化)：

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

...

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_r, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})} \beta_{r-1},$$

- 单位化：

$$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \dots, e_r = \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}.$$

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_r)$$

性质

在 Schmidt 正交化过程中, 对任意 $k = 1, \dots, r$, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 与 β_1, \dots, β_k 等价. 特别地, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_r 等价.

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_r)$$

性质

在 Schmidt 正交化过程中, 对任意 $k = 1, \dots, r$, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 与 β_1, \dots, β_k 等价. 特别地, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_r 等价.

- 两个向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow A, B$ 可以相互线性表示.

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_r)$$

性质

在 *Schmidt* 正交化过程中, 对任意 $k = 1, \dots, r$, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 与 β_1, \dots, β_k 等价. 特别地, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_r 等价.

- 两个向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow A, B$ 可以相互线性表示.

推论

- 正交向量组是线性无关向量组;
- 反之, 线性无关向量组可以 *Schmidt* 正交化为正交向量组.

例 3

例

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 用 Schmidt 正交化把这组向量标准正交化.

正交矩阵的概念和性质

定义 (定义 4: 正交矩阵)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^T A = E \quad (\text{i.e. } A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为 正交矩阵, 简称 正交阵.

正交矩阵的概念和性质

定义 (定义 4: 正交矩阵)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^T A = E \quad (\text{i.e. } A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为 正交矩阵, 简称 正交阵.

- 矩阵 A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的列 (行) 向量组是 \mathbb{R}^n 的标准正交基.
- A 是正交矩阵, 则 $|A| = \pm 1$.
- A 是正交矩阵, 则 A^{-1} 和 A^T 也是正交矩阵.
- A, B 是正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

例 4

例

验证矩阵下面矩阵为正交矩阵.



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



$$R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 (Lecture-5)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^T \alpha = 1$,

$$H = E - 2\alpha\alpha^T.$$

证明 H 为对称阵, 且 $HH^T = E$.

所以 H 为一个正交矩阵.

向量空间上的线性变换

例 (Lecture-5: 线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

则得 n 维向量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. 矩阵 $A = (a_{ij})$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

向量空间上的线性变换

例 (Lecture-5: 线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

则得 n 维向量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. 矩阵 $A = (a_{ij})$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

- 线性变换和 n 阶方阵一一对应.

正交变换

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵, 则线性变换 $Y = PX$ 称为正交变换.

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵, 则线性变换 $Y = PX$ 称为正交变换.

- 正交变换保持内积不变.

$$(PX, PY) = (PX)^T PY = X^T P^T PY = X^T Y = (X, Y).$$

- 正交变换保持长度不变, 保持夹角不变.

例 (Lecture-5)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^T \alpha = 1$,

$$H = E - 2\alpha\alpha^T.$$

则 $H^T = H$, 且 $HH^T = E$.

- 所以, H 是正交矩阵, $Y = HX$ 是一个正交变换 (称为镜面反射).

- 正交向量组、标准正交基;
- Schmidt 正交化;
- 正交矩阵和正交变换;

补充：线性变换的严格定义

定义

设 $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为一个变换（自身到自身的映射）。若满足

- $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n, \rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2);$
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}, \rho(k \cdot X) = k \cdot \rho(X),$

则称 ρ 是一个线性变换。

取定向量空间 \mathbb{R}^n 的一组基 ξ_1, \dots, ξ_n , 设 $\rho(\xi_i)$ 的坐标为 α_i ,

$$\rho(\xi_i) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$$

则对 \mathbb{R}^n 中任意向量 $y = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n = (\xi_1, \dots, \xi_n) X$,

$$\begin{aligned}\rho(y) &= \rho(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n) \\&= x_1 \rho(\xi_1) + \dots + x_n \rho(\xi_n) \\&= (\xi_1, \dots, \xi_n)(x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n) \\&= (\xi_1, \dots, \xi_n) A X \\&:= (\xi_1, \dots, \xi_n) Y\end{aligned}$$

所以线性变换在基 ξ_1, \dots, ξ_n 下可以用 $Y = AX$ 表示.

设 η_1, \dots, η_n 为向量空间 \mathbb{R}^n 的另外一组基. 设从基 ξ_1, \dots, ξ_n 到基 η_1, \dots, η_n 的基变换公式为

$$(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)P,$$

其中可逆矩阵 P 为过渡矩阵.

则

$$y = (\xi_1, \dots, \xi_n)X = (\eta_1, \dots, \eta_n)P^{-1}X := (\eta_1, \dots, \eta_n)X'$$

$$\rho(y) = (\xi_1, \dots, \xi_n)Y = (\eta_1, \dots, \eta_n)P^{-1}Y := (\eta_1, \dots, \eta_n)Y'$$

从而由 $(\xi_1, \dots, \xi_n)AX = (\xi_1, \dots, \xi_n)Y$ 知

$$(\eta_1, \dots, \eta_n)P^{-1}APX' = (\eta_1, \dots, \eta_n)P^{-1}PY' = (\eta_1, \dots, \eta_n)Y'$$

所以线性变换在基 η_1, \dots, η_n 下可以用 $Y' = P^{-1}APX'$ 表示.

第五章主题：方阵的相似

综上：方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是同一个线性变换 ρ 在不同基下的矩阵。
这种关系被定义为矩阵的相似关系。

定义

设 A, B 为 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 P 使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称矩阵 A, B 相似，记为 $A \xrightarrow{\text{相似}} B$.

- 若 A 和 B 相似，则 A 和 B 等价。

所以，将相似的方阵 A 和 B 记为 $A \xrightarrow{\text{相似}} B$.

设线性变换 ρ 在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \quad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为过渡矩阵. 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是相似的.

设线性变换 ρ 在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \quad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为过渡矩阵. 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量：方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 所具有的共性.
- 是否存在一个可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵?
(等价地, 是否存在一组基, 使线性变换的表示简单?)
- 是否存在一个正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP$ 为对角矩阵?
(等价地, 是否存在一组标准正交基, 使线性变换的表示简单?)

设线性变换 ρ 在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \quad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为过渡矩阵. 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量: 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 所具有的共性.

Section-1. 特征值和特征多项式

- 是否存在一个可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵?
(等价地, 是否存在一组基, 使线性变换的表示简单?)

Section-2. 相似对角化

- 是否存在一个正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP$ 为对角矩阵?
(等价地, 是否存在一组标准正交基, 使线性变换的表示简单?)

Section-3. 对称阵的正交相似对角化

设线性变换 ρ 在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \quad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为过渡矩阵. 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量: 方阵 A 和 $P^{-1}AP$ 所具有的共性.

Section-1. 特征值和特征多项式

- 是否存在一个可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵?
(等价地, 是否存在一组基, 使线性变换的表示简单?)

Section-2. 相似对角化

- 是否存在一个正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP$ 为对角矩阵?
(等价地, 是否存在一组标准正交基, 使线性变换的表示简单?)

Section-3. 对称阵的正交相似对角化

- Section-3 的应用: 第六章. 二次型的化简

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 22 日