

线性代数-13

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 12 日

本次课内容

1. 向量空间

2. 向量的内积: 欧式空间

向量空间的定义

- 设 $V \neq \emptyset$ 为 n 维向量的集合 (向量组),
若 V 对向量的加法和数乘两种运算封闭: $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 有
 - (1). $\alpha + \beta \in V$;
 - (2). $\lambda \cdot \alpha \in V$.则称 V 为一个向量空间.

向量空间的定义

- 设 $V \neq \emptyset$ 为 n 维向量的集合 (向量组),
若 V 对向量的加法和数乘两种运算封闭: $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 有
 - (1). $\alpha + \beta \in V$;
 - (2). $\lambda \cdot \alpha \in V$.则称 V 为一个向量空间.
- 注: 加法和数乘两种运算称为向量空间 V 上的线性结构.
上述条件 (1) 和 (2) 与下面描述等价:
 - ★ $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}$, 则 $k\alpha + l\beta \in V$.

向量空间的定义

- 设 $V \neq \emptyset$ 为 n 维向量的集合 (向量组),
若 V 对向量的加法和数乘两种运算封闭: $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 有
 - (1). $\alpha + \beta \in V$;
 - (2). $\lambda \cdot \alpha \in V$.则称 V 为一个向量空间.
- 注: 加法和数乘两种运算称为向量空间 V 上的线性结构.
上述条件 (1) 和 (2) 与下面描述等价:
 - * $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}$, 则 $k\alpha + l\beta \in V$.
- 向量空间 \Leftarrow 非空向量组 + 线性结构.

向量空间的定义

- 设 $V \neq \emptyset$ 为 n 维向量的集合 (向量组),
若 V 对向量的加法和数乘两种运算封闭: $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 有
 - (1). $\alpha + \beta \in V$;
 - (2). $\lambda \cdot \alpha \in V$.则称 V 为一个向量空间.
- 注: 加法和数乘两种运算称为向量空间 V 上的线性结构.
上述条件 (1) 和 (2) 与下面描述等价:
 - ★ $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}$, 则 $k\alpha + l\beta \in V$.
- 向量空间 \Leftarrow 非空向量组 + 线性结构.
- Chapter 6 (选学): 线性空间 \Leftarrow 非空集合 + 线性结构.
- 欧式空间 \Leftarrow 向量空间/线性空间 + 内积结构.

例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1. n 维向量全体 \mathbb{R}^n ;
2. 集合 $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$;
3. 集合 $V = \{X = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$;
4. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解集 $S = \{X \mid AX = 0\}$;
5. 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的解集 $S = \{X \mid AX = \beta\}$;
6. α, β 为两个 n 维向量, 集合 $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1. n 维向量全体 \mathbb{R}^n ; ✓
2. 集合 $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$; ✓
3. 集合 $V = \{X = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$; ✗
4. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解集 $S = \{X \mid AX = 0\}$; ✓
5. 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的解集 $S = \{X \mid AX = \beta\}$; ✗
6. α, β 为两个 n 维向量, 集合 $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. ✓

例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1. n 维向量全体 \mathbb{R}^n ; ✓
2. 集合 $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$; ✓
3. 集合 $V = \{X = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$; ✗
4. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解集 $S = \{X \mid AX = 0\}$; ✓ <解空间>
5. 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的解集 $S = \{X \mid AX = \beta\}$; ✗
6. α, β 为两个 n 维向量, 集合 $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. ✓ <向量 α, β 生成的空间 >

等价向量组生成相同向量空间

由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 生成的空间定义为

$$L = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为 $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 或 $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.

等价向量组生成相同向量空间

由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 生成的空间定义为

$$L = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为 $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 或 $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.

例 (例 18)

设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 和 β_1, \dots, β_s 等价, 记

$$L_1 = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{X = \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_s \beta_s \mid \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}\}$$

证明: $L_1 = L_2$.

等价向量组生成相同向量空间

由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 生成的空间定义为

$$L = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为 $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 或 $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.

例 (例 18)

设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 和 β_1, \dots, β_s 等价, 记

$$L_1 = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{X = \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_s \beta_s \mid \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}\}$$

证明: $L_1 = L_2$.

- 等价向量组生成的向量空间相同.

子空间的定义

定义

设 V_1 为向量空间 V 的一个非空子集. 若 V_1 也是一个向量空间, 则称 V_1 为向量空间 V 的**子空间**, 可记为 $V_1 < V$.

子空间的定义

定义

设 V_1 为向量空间 V 的一个非空子集. 若 V_1 也是一个向量空间, 则称 V_1 为向量空间 V 的**子空间**, 可记为 $V_1 < V$.

- 例: $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ 为 \mathbb{R}^n 的子空间.
- 例: α, β 为两个 n 维向量, 集合 $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ 为 \mathbb{R}^n 的子空间.

基和维数的定义

- 向量组 $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$ 向量空间.
- 向量组的最大无关组 \longrightarrow 向量空间的基.
- 向量组的秩 \longrightarrow 向量空间的维数.

基和维数的定义

- 向量组 $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$ 向量空间.
- 向量组的最大无关组 \longrightarrow 向量空间的基.
- 向量组的秩 \longrightarrow 向量空间的维数.

定义

设 V 为向量空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V$, 若满足

- (i) $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
 - (ii) V 中的任一向量都可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表示,
- 则称向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一组基, r 称为向量空间 V 的维数, 记为 $\dim V = r$. 此时称 V 为 r 维向量空间.

例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1. n 维向量全体 \mathbb{R}^n ;
2. $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$;
3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\}$;
4. n 维向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的生成空间 $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1. n 维向量全体 \mathbb{R}^n ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2. $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\};$

3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\};$

4. n 维向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的生成空间 $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m).$

例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1. n 维向量全体 \mathbb{R}^n ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2. $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$;

$$\dim V = n - 1$$

3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\}$;

4. n 维向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的生成空间 $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1. n 维向量全体 \mathbb{R}^n ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2. $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$;

$$\dim V = n - 1$$

3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\}$;

$$\dim S = n - R(A)$$

4. n 维向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的生成空间 $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1. n 维向量全体 \mathbb{R}^n ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2. $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$;

$$\dim V = n - 1$$

3. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $S = \{X \mid AX = 0\}$;

$$\dim S = n - R(A)$$

4. n 维向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的生成空间 $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

$$\dim L = R_A.$$

坐标的定义

定义 (定义 9)

取定向量空间的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, 则 V 中任一向量 β 可唯一表示为

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r,$$

数组 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 称为向量 β 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 下的坐标.

坐标的定义

定义 (定义 9)

取定向量空间的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, 则 V 中任一向量 β 可唯一表示为

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r,$$

数组 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 称为向量 β 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 下的坐标.

关于坐标的一些常用写法:

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) X_\beta$$

例 24

例
设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = (\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 \mathbb{R}^3 的一组基, 并求 β_1, β_2 在这组基下的坐标.

解法: 解矩阵方程 $AX = B$. 对 (A, B) 进行初等行变换.

例子

例 (Lecture-12, Page110-12)

设向量组 $B: \beta_1, \dots, \beta_r$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times r},$$

向量组 A 线性无关. 证明: $R_B = R(K)$.

令向量空间 $V = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$. 设 β_i 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 下的坐标为 X_i , 即

$$\beta_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) X_i,$$

则

$$K = (X_1, \dots, X_r).$$

$R_B = R(K)$, 则 $L(\beta_1, \dots, \beta_r)$ 的维数为坐标向量组的秩.

基变换公式

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都为 \mathbb{R}^3 的基.

$$\mathbb{R}^3 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

- 向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P.$$

上式称为 \mathbb{R}^3 从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的基变换公式.

基变换公式

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都为 \mathbb{R}^3 的基.

$$\mathbb{R}^3 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

- 向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P.$$

上式称为 \mathbb{R}^3 从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的基变换公式.

矩阵 $P = A^{-1}B$ 称为从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

坐标变换公式

• 任意向量 $X = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

称为两组基之间的坐标变换公式.

例 26

例

设 \mathbb{R}^3 的两组基为

$$I: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$II: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. 求从基 I 到基 II 的过渡矩阵;
2. 向量 X 在基 I 下的坐标为 $(-2, 1, 2)^T$, 求向量 X 在基 II 下的坐标.

内积的定义

定义

设 n 维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称 $(X, Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ 为向量 X 与 Y 的**内积**.

- 内积有时也被记为 $[X, Y]$, $\langle X, Y \rangle$.
- $(X, Y) = X^T Y = Y^T X$.

内积的定义

定义

设 n 维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称 $(X, Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ 为向量 X 与 Y 的**内积**.

- 内积有时也被记为 $[X, Y]$, $\langle X, Y \rangle$.
- $(X, Y) = X^T Y = Y^T X$.
- 向量组 $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$

内积的定义

定义

设 n 维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称 $(X, Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ 为向量 X 与 Y 的**内积**.

- 内积有时也被记为 $[X, Y]$, $\langle X, Y \rangle$.
- $(X, Y) = X^T Y = Y^T X$.
- 向量组 $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$ 向量空间

内积的定义

定义

设 n 维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称 $(X, Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ 为向量 X 与 Y 的**内积**.

- 内积有时也被记为 $[X, Y]$, $\langle X, Y \rangle$.
- $(X, Y) = X^T Y = Y^T X$.
- 向量组 $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$ 向量空间 $\xrightarrow{+ \text{内积}}$

内积的定义

定义

设 n 维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称 $(X, Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ 为向量 X 与 Y 的**内积**.

- 内积有时也被记为 $[X, Y]$, $\langle X, Y \rangle$.
- $(X, Y) = X^T Y = Y^T X$.
- 向量组 $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$ 向量空间 $\xrightarrow{+ \text{内积}}$ 欧式空间.

内积的定义

定义

设 n 维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称 $(X, Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ 为向量 X 与 Y 的**内积**.

- 内积有时也被记为 $[X, Y]$, $\langle X, Y \rangle$.
- $(X, Y) = X^T Y = Y^T X$.
- 向量组 $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$ 向量空间 $\xrightarrow{+ \text{内积}}$ 欧式空间.
- 有了内积之后, 就可以讨论向量的长度, 角度, 垂直 (正交) 等几何概念.

内积的性质

- 对称性: $(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质:
 - $(\lambda X, Y) = \lambda(X, Y) = (X, \lambda Y), \lambda \in \mathbb{R};$
 - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y);$
 - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2);$
- 半正定性/非负性: $(X, X) \geq 0$
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

长度的定义

- 称

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

为 n 维向量 X 的长度 (或范数).

- 向量长度满足以下性质:

- 非负性: $X=0 \Leftrightarrow (X, X)=0$, $X \neq 0 \Leftrightarrow (X, X) > 0$;
- 齐次性: $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$

- 若 $\|X\| = 1$, 则称 X 为单位向量.

- 若 $\alpha \neq 0$, 则 $X = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 为一个单位向量, 此过程称为单位化.

夹角和正交的定义

- 设 X, Y 为 n 维非零向量, 则

$$\theta = \arccos \frac{(X, Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

称为向量 X, Y 的夹角.

- 若 $(X, Y) = 0$, 则称向量 X 和 Y 正交.

小结

- 向量空间、解空间、生成空间、子空间、基、维数、坐标；
- 基变换公式、过渡矩阵、坐标变换公式；
- 内积、长度、夹角、正交.

作业

- Page₁₁₁-Page₁₁₂: 21、23、24
- 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 两两正交, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 12 日