

线性代数-4

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 11 日

本次课内容

1. 经典行列式

2. 行列式的计算技巧（选讲）

- 行列式的定义和展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$
$$= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$$

(行列式展开定理)

$$= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n}$$

- 行列式的五条性质

- 1) $D^T = D$.
- 2) 交换两行 (列), 则行列式变号.
- 3) 某行 (列) 乘数 k , 则行列式乘数 k .
- 4) 一行 (列) 可加, 则行列式可加.
- 5) 某行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列) 上去, 则行列式不变.

- 行列式的三种操作

- $r_i \leftrightarrow r_j$.
- $r_i \times k$.
- $r_j + r_i \times k$.

- 化简行列式方向: 化多零、化低阶、化已知.

- 上(下)三角行列式
- 循环行列式
- 爪形行列式
- Vandermonde 行列式

经典行列式

1. 下(上)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

2. Vandermonde 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

3. 爪形行列式 ($a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \neq 0$)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ y_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} = \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i y_i}{a_i} \right) a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

4. 循环行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

行列式的一些计算技巧

- 定义计算
- 化上（下）三角形行列式/降阶法

行列式的一些计算技巧

- 定义计算
- 化上（下）三角形行列式/降阶法
- 求和法 (加边法)
- 升阶法，化爪形行列式
- 拆分法
- 递推法/数学归纳法
- Vandermonde 行列式相关
- 求根法

求和法 (循环行列式)

例 (1)

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160.$$

升阶法 (每行/列有相同或成比例元素时)

例 (2)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix}$$

拆分法 (行/列中有 +、- 号时)

例 (3)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

例 (4. 三对角行列式)

证明

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

例 (4. 三对角行列式)

证明

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

提示: 按照第一行展开 $D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$.

例 (5)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

Vandermonde 行列式相关

例 (5)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

提示：凑 Vandermonde 行列式，求 x^3 项的系数

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}.$$

求根法 (含参量, 值是多项式时)

例 (6)

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

练习

尝试用求根法计算 4 阶 Vandermonde 行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}.$$

作业

- 整理本幻灯片中例 (5) 的解题过程.
(即本周作业 6-(2) 要求两种方法证明.)
- Fibonacci 数列: $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$, 通项关系为

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

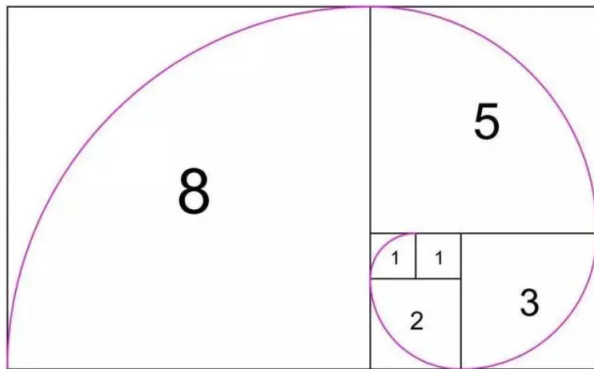
请写出一个三对角行列式, 使得 $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, 并以此求 Fibonacci 数列通项.

- 用升阶法计算循环行列式 (作业 7-2)

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

Fibonacci 数列、黄金比例、鸚鵡螺线

- Fibonacci 数列: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- 黄金比例: $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\dots$
- 这个幻灯片的长宽比: 16:10=1.6.



鹦鹉螺



欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn