线性代数-11：第二、三章习题课

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 13 日

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 解的存在性.

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.
  - 无解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})>R(A)$.
    (等价说法 $R(A,\boldsymbol{\beta})\neq R(A)$ 或 $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)+1$).

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.
  - 无解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})>R(A)$.
    (等价说法 $R(A,\boldsymbol{\beta})\neq R(A)$ 或 $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)+1$).
  - 有解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.
  - 无解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})>R(A)$.
    (等价说法 $R(A,\boldsymbol{\beta})\neq R(A)$ 或 $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)+1$).
  - 有解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
    - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=n$.
      (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩**.)**
      (A 为方阵时**,** 此时 A 可逆，可用 **Carmer** 法则**.)**

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.
  - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) > R(A)$.
    (等价说法 $R(A, \boldsymbol{\beta}) \neq R(A)$ 或 $R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) + 1$).
  - 有解 $\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A)$.
    - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) = n$.
      (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)
      (A 为方阵时, 此时 A 可逆， 可用 Carmer 法则.)
    - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) < n$.

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.
  - 无解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})>R(A)$.
    (等价说法 $R(A,\boldsymbol{\beta})\neq R(A)$ 或 $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)+1$).
  - 有解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
    - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=n$.
      (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)
      (A 为方阵时, 此时 A 可逆，可用 Carmer 法则.)
    - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)<n$.
- 齐次线性方程组 $AX=0$ 解的存在性.

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.
  - 无解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta}) > R(A)$.
    (等价说法 $R(A,\boldsymbol{\beta}) \neq R(A)$ 或 $R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A)+1$).
  - 有解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A)$.
    - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A) = n$.
      (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)
      (A 为方阵时, 此时 A 可逆，可用 Carmer 法则.)
    - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A) < n$.
- 齐次线性方程组 $AX = 0$ 解的存在性.
  - 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.
    (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.
  - 无解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})>R(A)$.
    (等价说法 $R(A,\boldsymbol{\beta})\neq R(A)$ 或 $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)+1$).
  - 有解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
    - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=n$.
      (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)
      (A 为方阵时，此时 A 可逆，可用 Carmer 法则.)
    - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)<n$.
- 齐次线性方程组 $AX=0$ 解的存在性.
  - 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$.
    (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)
  - 有非零解（或无穷解）$\Leftrightarrow R(A)<n$.

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.
  - 无解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta}) > R(A)$.
    (等价说法 $R(A,\boldsymbol{\beta}) \neq R(A)$ 或 $R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A)+1$).
  - 有解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A)$.
    - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A) = n$.
      (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)
      (A 为方阵时，此时 A 可逆，可用 Carmer 法则.)
    - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A) < n$.
- 齐次线性方程组 $AX=0$ 解的存在性.
  - 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$.
    (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)
  - 有非零解（或无穷解）$\Leftrightarrow R(A)<n$.
- 方程组 $AX=B$ 解的存在性.

线性方程组–回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.
  - 无解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})>R(A)$.
    (等价说法 $R(A,\boldsymbol{\beta})\neq R(A)$ 或 $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)+1$).
  - 有解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
    - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=n$.
      (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)
      (A 为方阵时, 此时 A 可逆，可用 Carmer 法则.)
    - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)<n$.
- 齐次线性方程组 $AX=0$ 解的存在性.
  - 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$.
    (其中 n 为未知量个数，此时系数矩阵 A 列满秩.)
  - 有非零解（或无穷解）$\Leftrightarrow R(A)<n$.
- 方程组 $AX=B$ 解的存在性.
  - 有解 $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$.

矩阵和线性方程组

- 主要工具:

矩阵和线性方程组

- 主要工具:
  - 初等行变换.

矩阵和线性方程组

- 主要工具:
  - 初等行变换.
- 基本要求:

矩阵和线性方程组

- 主要工具:
  - 初等行变换.
- 基本要求:
  - 通过初等行变换把矩阵化为行最简形.

矩阵和线性方程组

- 主要工具：
  - 初等行变换.
- 基本要求:
  - 通过初等行变换把矩阵化为行最简形.
- 基本题型：

矩阵和线性方程组

- 主要工具:
  - 初等行变换.
- 基本要求:
  - 通过初等行变换把矩阵化为行最简形.
- 基本题型:
  - 求解矩阵方程 $AX = B$.
    81 页例 6，83 页 5 和 6，91 页 9、10 和 11.

矩阵和线性方程组

- 主要工具：
  - 初等行变换.
- 基本要求：
  - 通过初等行变换把矩阵化为行最简形.
- 基本题型：
  - 求解矩阵方程 $AX = B$.
    81 页例 6，83 页 5 和 6，91 页 9、10 和 11.
  - 讨论含参量线性方程组何时无解、有唯一解、有无穷解，并在有无穷解时求通解.
    116 页例 3 和例 4，107 页例 4，108 页例 6，113 页 5、6、7 和 9，118 页 6 和 7，121 页 5、6、7、8、9.

本次课内容

1. 讨论含参量方阵的秩：
   行列式 or 初等变换
2. 多项式和摄动法
3. 矩阵的幂级数
4. 秩和方阵的等价分类
5. 秩和伴随矩阵
6. 分块矩阵的初等变换
7. 特殊矩阵
8. 矩阵的多项式

1. 讨论含参方阵的秩：行列式 or 初等变换

含参线性方程组

例

设

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = 1 \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

116 页例 3

例

设

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + \boldsymbol{\lambda} x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + \boldsymbol{\lambda} x_3 & = 1 \end{cases}$$

讨论 $\boldsymbol{\lambda}$ 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

- 初等变换法：$(A, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{r}$ 行阶梯形，讨论 $R(A)$ 和 $R(A, \boldsymbol{\beta})$. 求无穷解时，行阶梯形 $\xrightarrow{r}$ 行最简形. 初等变换时，注意分母不要出现参数.
- 行列式法: $|A| = 0$ 解出未知参数，分别单独讨论. 求 $|A|$ 时，先尽量用行变换化简，方便后面单独讨论.

1. 讨论含参方阵的秩：行列式 or 初等变换

循环矩阵的秩

循环矩阵的秩

- 循环矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}_n$$

  其中 $b \neq 0$.
- 则

$$R(A) = \begin{cases} 1, & 若\ a = b \\ n-1, & 若首行之和等于零,\ a + (n-1)b = 0 \\ n, & 其他. \end{cases}$$

- 88 页 1-1， 89 页 6， 91 页 2-4.

2. 多项式和摄动法

115 页例 2

例

设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 为 n 次多项式. 证明: 如果 $f(x)$ 至少有 $n+1$ 个不同的零点, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明:

例

设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 为 n 次多项式. 证明: 如果 $f(x)$ 至少有 $n+1$ 个不同的零点, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明:

推论

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为两个 n 次多项式. 证明: 如果 $f(x) - g(x)$ 至少有 $n+1$ 个不同的零点, 则 $f(x) \equiv g(x)$.

- 若方阵 $A = (a_{ij})$ 满足:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |aij|, i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称 A 为严格对角占优矩阵.

- 例如

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 若方阵 $A=(a_{ij})$ 满足:

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|aij|, i=1,2,\cdots,n,$$

则称 A 为严格对角占优矩阵.

- 例如

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-1&1\\2&5&0&2\\0&1&-3&1\\1&1&0&3\end{pmatrix}.$$

- 严格对角占优矩阵是可逆的.

严格对角占优矩阵

- 若方阵 $A=(a_{ij})$ 满足:

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |aij|, i=1,2,\cdots,n,$$

则称 A 为严格对角占优矩阵.

- 例如

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 严格对角占优矩阵是可逆的.

- 对任意矩阵 A, x 足够大时, $xE+A$ 是严格对角占优的, 故可逆

摄动法

- 一些结论在可逆的条件下往往容易得到，不可逆情况可以借助“摄动法”转为可逆条件下证明.

- 一些结论在可逆的条件下往往容易得到，不可逆情况可以借助“摄动法”转为可逆条件下证明.

例 (93 页 19)

证明 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

- 一些结论在可逆的条件下往往容易得到，不可逆情况可以借助“摄动法”转为可逆条件下证明.

例 (93 页 19)

证明 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

- A 可逆时, $|A| \neq 0$. 对 $AA^* = |A|E$ 两边取行列式 $\Longrightarrow |A| \cdot |A^*| = |A|^n \xLongrightarrow{|A|\neq 0} |A^*| = |A|^{n-1}$.

- 一些结论在可逆的条件下往往容易得到，不可逆情况可以借助“摄动法”转为可逆条件下证明.

例 (93 页 19)

证明 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

- A 可逆时, $|A| \neq 0$. 对 $AA^* = |A|E$ 两边取行列式 $\Longrightarrow |A| \cdot |A^*| = |A|^n \overset{|A|\neq 0}{\Longrightarrow} |A^*| = |A|^{n-1}$.
- A 不可逆时, 如何证?

摄动法

- 考虑 $xE+A$, 令

$$f(x)=|(xE+A)^*|,\qquad g(x)=|xE+A|^{n-1}$$

取充分多的互不相同的 x_i, 使得 x_iE+A 可逆. 从而

$$|(x_iE+A)^*|=|x_iE+A|^{n-1}.$$

即 $f(x_i)=g(x_i)$. 所以 $f(x)-g(x)$ 有足够多的互不相同的零点, 根据上面推论, 有 $f(x)\equiv g(x)$. 所以

$$f(0)=g(0), i.e.|A^*|=|A|^{n-1}.$$

3. 矩阵的幂级数

例 (91 页 7)

已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$. 求 A^{-1}.

例 (91 页 7)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\a^2&a&1&0\\a^3&a^2&a&1\end{pmatrix}$. 求 A^{-1}.

- 建议 $(A,E)\xrightarrow{r}(E,A^{-1})$.
- 令 $B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\end{pmatrix}$, 则 $B^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\a^2&0&0&0\\0&a^2&0&0\end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\a^3&0&0&0\end{pmatrix}$,

  $B^4=B^5=\cdots=O$.

  故 $A=E+B+B^2+B^3$, $A^{-1}=E-B$.

例 (91 页 7)

已知 $B^n = O$, 证明 $(E-B)^{-1} = E + B + B^2 + \cdots + B^{n-1}$.

例 (91 页 7)

已知 $B^n = O$, 证明 $(E-B)^{-1} = E + B + B^2 + \cdots + B^{n-1}$.

- 对比幂级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots .$$

例 (91 页 7)

已知 $B^n = O$, 证明 $(E-B)^{-1} = E + B + B^2 + \cdots + B^{n-1}$.

- 对比幂级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots .$$

- 在研究生阶段的线性代数中，可以用矩阵的幂级数定义矩阵函数

$$e^A, \sin A, \cdots .$$

4. 秩和方阵的等价分类

思考题：设 A, B 都为 n 阶方阵. 若 $A \sim B$, 则称 A 和 B 属于同一个等价类. 问 n 阶方阵全体有多少个等价类?

思考题：设 A, B 都为 n 阶方阵. 若 $A \sim B$, 则称 A 和 B 属于同一个等价类. 问 n 阶方阵全体有多少个等价类?

- $n+1$ 个等价类, 且每一个等价类里的标准形分别是:

$$R_0 = O, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, R_n = E_n.$$

1. 设 A 为 n 阶方阵,
   - $R(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$;

1. 设 A 为 n 阶方阵,
   - $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$;
   - $R(A)=1 \Leftrightarrow A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量 $\Leftrightarrow A$ 的任意两行（两列）成比例;

1. 设 A 为 n 阶方阵,

- $R(A)=0 \Leftrightarrow A = O$;
- $R(A)=1 \Leftrightarrow A = \boldsymbol{\alpha\beta}^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量
  $\Leftrightarrow A$ 的任意两行（两列）成比例;
- $R(A)=n \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E$
  $\Leftrightarrow A$ 可以写出有限个初等矩阵的乘积
  $\Leftrightarrow AX=0$ 只有唯一零解
  $\Leftrightarrow A$ 的列（行）向量组线性无关
  $\Leftrightarrow A$ 没有零特征值.

2. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵,

- $R(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$;
- $R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量 $\Leftrightarrow$ 行列成比例.

- $R(A_{m\times n}) = n \Leftrightarrow A$ 列满秩

$\Leftrightarrow A \sim \binom{E_n}{O} \Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} \binom{E_n}{O}$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $PA = \binom{E_n}{O}$

$\Rightarrow$ 左消去律成立: 若 $AX = AY \leftrightarrow X = Y$,

或 $AX = 0 \leftrightarrow X = 0$.

$R(AB)$

- $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, 则 AB 为 m 阶方阵, BA 为 n 阶方阵.
- $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$, $R(BA) \le \min\{R(A), R(B)\}$,

	AB	BA
$m > n$	不可逆	
$R(A) = m < n$		不可逆
$R(A) = n < m$	不可逆	
$R(A) = n = m$	$R(AB) = R(B)$	$R(BA) = R(B)$

- $R(A^TA) = R(A) = R(AA^T)$,

	AA^T	A^TA
$m > n$	不可逆	
$R(A) = m < n$		不可逆
$R(A) = n < m$	不可逆	

- AB 和 BA 有相同特征值. （Chap-5）

5. 秩和伴随矩阵

例 (93 页 18)

设 A 为 n 阶方阵, 则

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n; \\ 1, & R(A) = n-1; \\ 0, & R(A) \leq n-2. \end{cases}$$

例 (93 页 18)

设 A 为 n 阶方阵, 则

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n; \\ 1, & R(A) = n-1; \\ 0, & R(A) \leq n-2. \end{cases}$$

- $R(A) = n \Leftrightarrow R(A^*) = n, A^* = |A| \cdot A^{-1}, |A^*| = |A|^{n-1}$;
- $R(A) = n-1 \Leftrightarrow R(A^*) = 1$;
- $R(A) \leq n-2 \Leftrightarrow A^* = O$.

6. 分块矩阵的初等变换

- 分块矩阵的初等变换：若矩阵 A 可逆，令 $r_2 - CA^{-1}r_1$，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

- 分块矩阵的初等变换：若矩阵 A 可逆，令 $r_2 - CA^{-1}r_1$，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例 (88 页秩的性质 7)

若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$，则 $R(A) + R(B) \leq n$.

- 分块矩阵的初等变换：若矩阵 A 可逆，令 $r_2 - CA^{-1}r_1$，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例 (88 页秩的性质 7)

若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$，则 $R(A) + R(B) \leq n$.

证明：

$$\begin{aligned} R(A) + R(B) &= R\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \leq R\begin{pmatrix} E & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \\ &= R\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= n \end{aligned}$$

7. 特殊矩阵

设 A 为 n 阶方阵,

- 若存在 n 使得 $A^n = A$, 则称 A 为幂等矩阵.

设 A 为 n 阶方阵,

- 若存在 n 使得 $A^n = A$, 则称 A 为幂等矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = E$, 则称 A 为幂幺矩阵;
  特别地, 若 $A^2 = E$, 则称 A 为对合矩阵.

几种特殊矩阵

设 A 为 n 阶方阵,

- 若存在 n 使得 $A^n = A$, 则称 A 为幂等矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = E$, 则称 A 为幂幺矩阵;
  特别地, 若 $A^2 = E$, 则称 A 为对合矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = O$, 则称 A 为幂零矩阵.

设 A 为 n 阶方阵,

- 若存在 n 使得 $A^n = A$, 则称 A 为幂等矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = E$, 则称 A 为幂幺矩阵;
  特别地, 若 $A^2 = E$, 则称 A 为对合矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = O$, 则称 A 为幂零矩阵.
- 若 $AA^T = E$, 则称 A 为正交矩阵.

设 A 为 n 阶方阵,

- 若存在 n 使得 $A^n = A$, 则称 A 为幂等矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = E$, 则称 A 为幂幺矩阵;
  特别地, 若 $A^2 = E$, 则称 A 为对合矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = O$, 则称 A 为幂零矩阵.
- 若 $AA^T = E$, 则称 A 为正交矩阵.

设 A 为 n 阶方阵,

- 若存在 n 使得 $A^n = A$, 则称 A 为幂等矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = E$, 则称 A 为幂幺矩阵;
  特别地, 若 $A^2 = E$, 则称 A 为对合矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = O$, 则称 A 为幂零矩阵.
- 若 $AA^T = E$, 则称 A 为正交矩阵.

例

- 若 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = 1$, 则 $A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 为幂等矩阵.
- 初等矩阵 $E(i,j)$ 为对合矩阵.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为幂零矩阵.
- $H = E - 2XX^T$ 为正交矩阵, 其中 $X^TX = 1$.

例 (泡利矩阵)

泡利矩阵是对合矩阵.

$$\boldsymbol{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

在量子力学中，泡利矩阵是泡利方程中描述磁场和自旋之间相互作用的一项.

8. 矩阵的多项式

例

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

求 A^{10}, B^9, B^6.

例

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求 A^{10}, B^9, B^6.

- 二项式展开：$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n$.

例

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

求 A^{10}, B^9, B^6.

- 二项式展开：$(x+y)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}y+\cdots+C_n^{n-1}xy^{n-1}+y^n$.
- 若存在可逆阵 P 使得 $A=P\Lambda P^{-1}$, 其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角矩阵, 则

$$f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}=P\cdot\mathrm{diag}(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n))\cdot P^{-1}.$$

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 13 日