10-2 证明：数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$|A| = a_{11} > 0$

假设命题对 $n-1$ 成立.

现考虑

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

将 $|A|$ 按一行展开，得

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

如果 $|A_{11}| = \max\{|A_{11}|, |A_{12}|, \cdots, |A_{1n}|\}$

则 $$|A| = a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{1i} A_{1i}$$

$$\geqslant a_{11}A_{11} - \sum_{i=2}^{n} |a_{1i}| \cdot |A_{1i}|$$

$$\geqslant \left(a_{11} - \sum_{i=2}^{n} |a_{1i}|\right) A_{11} > 0$$

这里的 A_{11} 为 $n-1$ 阶满足条件行列式，由归纳假设 $A_{11} > 0$

命题得证!

下面只需证 $|A_{11}| = \max\{|A_{11}|, |A_{12}|, \cdots, |A_{1n}|\}$

反证，设 $A_{1i} = \max\{|A_{11}|, |A_{12}|, \cdots, |A_{1n}|\}$，$i \neq 1$

则考虑

$$|a_{i1}A_{11} + \cdots + a_{ii}A_{1i} + \cdots + a_{in}A_{1n}|$$

$$\geq |a_{ii} \cdot A_{1i}| - |\sum_{j\neq i} a_{ij} \cdot A_{1j}|$$

$$\geq |a_{ii} \cdot A_{1i}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \cdot |A_{1j}|$$

$$\geq |a_{ii}||A_{1i}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \cdot |A_{1i}|$$

$$= \left(a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right) \cdot |A_{1i}| > 0$$

而我们知道

$$a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \cdots + a_{in}A_{1n} = 0. \quad i \neq 1$$

推出 $0 = |a_{i1}A_{11} + \cdots + a_{in}A_{1n}| > 0$ 矛盾.

∴ 假设不成立，命题得证. □

注意，这题1，2问的证明的不等式的放缩想法是一样的，都是把最大元剥离出来，过程中利用 $|a|-|b| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$.

7题：

分析：要证 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 为解，

只需验证对任意 i，

① $a_{i1}M_1 - a_{i2}M_2 + \cdots + a_{in}\cdot(-1)^{n-1}M_n = 0$

回忆第二章我们计算 $x_1A_{i1} + x_2A_{i2} \cdots + x_{in}A_{in}$ 时，我们将行列式第 i 行换成 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后的行列式的值就是 $x_1A_{i1} + \cdots + x_{in}A_{in}$

∴这里①式的值为下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(两行相等)}$$

第一问可证.

如果 $r(A)=n-1$，则基础解系中有 $n-r=1$ 个向量，设为 η_1，则方程组通解为

$$x=k_1\eta_1 \quad , \forall k\in P$$

而 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 为非0解.

$\therefore (M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)=k_0\eta_1 \quad , k_0\neq 0$

$\therefore \eta_1=\frac{1}{k_0}(M_1, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$

$\therefore x=k_1\eta_1=\frac{k_1}{k_0}(M_1 \cdots (-1)^{n-1}M_n)$

第二问可证 $\square$