

# 线性代数-9

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 9 月 25 日

## 回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + kr_j; c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + kc_j.$$

## 回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + kr_j; c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + kc_j.$$

- 矩阵的等价:

$$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B;$$

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B;$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

## 回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + kr_j; c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + kc_j.$$

- 矩阵的等价:

$$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B;$$

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B;$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

- 矩阵的等价化简:

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

## 回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i, j), E(i(k)), E(ij(k));$$

## 回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i, j), E(i(k)), E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系——左行右列：

## 回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i, j), E(i(k)), E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系——左行右列：

## 回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i, j), E(i(k)), E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系——左行右列：

定理 (婴儿版本)

$$A \xrightarrow{\text{一次初等行变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } P, \text{ 使得 } PA = B.$$

$$A \xrightarrow{\text{一次初等列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } Q, \text{ 使得 } AQ = B.$$



## 回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i, j), E(i(k)), E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系——左行右列：

### 定理 (婴儿版本)

$$A \xrightarrow{\text{一次初等行变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } P, \text{ 使得 } PA = B.$$

$$A \xrightarrow{\text{一次初等列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } Q, \text{ 使得 } AQ = B.$$

### 定理 (成年版本)

$$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B \Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } P, \text{ 使得 } PA = B.$$

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } Q, \text{ 使得 } AQ = B.$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } P, Q, \text{ 使得 } PAQ = B.$$

## 回顾：矩阵的初等变换

- 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  可表示为有限多个初等矩阵乘积  
 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$

## 回顾：矩阵的初等变换

- 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  可表示为有限多个初等矩阵乘积  
 $\Leftrightarrow A \stackrel{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \stackrel{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ;
- 矩阵的等价化简：

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$

## 回顾：矩阵的初等变换

- 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  可表示为有限多个初等矩阵乘积  
 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ;
- 矩阵的等价化简：

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$

- 初等变换的应用：

## 回顾：矩阵的初等变换

- 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  可表示为有限多个初等矩阵乘积  
 $\Leftrightarrow A \stackrel{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \stackrel{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ;
- 矩阵的等价化简：

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆  $P$ , 使得  $PA = B \Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$ ;

## 回顾：矩阵的初等变换

- 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  可表示为有限多个初等矩阵乘积  
 $\Leftrightarrow A \stackrel{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \stackrel{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ;
- 矩阵的等价化简：

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$

- 初等变换的应用：

- 求可逆  $P$ , 使得  $PA = B \Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$ ;
- 求  $A^{-1} \Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$ ;

## 回顾：矩阵的初等变换

- 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  可表示为有限多个初等矩阵乘积  
 $\Leftrightarrow A \stackrel{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \stackrel{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ;
- 矩阵的等价化简：

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆  $P$ , 使得  $PA = B \Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$ ;
  - 求  $A^{-1} \Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$ ;
  - 求  $A^{-1}B \Rightarrow (A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$ ;

## 回顾：矩阵的初等变换

- 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  可表示为有限多个初等矩阵乘积  
 $\Leftrightarrow A \stackrel{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \stackrel{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ;
- 矩阵的等价化简：

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$

- 初等变换的应用：

- 求可逆  $P$ , 使得  $PA = B \Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$ ;
- 求  $A^{-1} \Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$ ;
- 求  $A^{-1}B \Rightarrow (A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$ ;
- 解  $AX = \beta \Rightarrow (A, \beta) \xrightarrow{\text{行变换}} \text{行最简形}$ ;



## 回顾：矩阵的初等变换

- 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  可表示为有限多个初等矩阵乘积  
 $\Leftrightarrow A \stackrel{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \stackrel{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ;
- 矩阵的等价化简：

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$

$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$

- 初等变换的应用：

- 求可逆  $P$ , 使得  $PA = B \Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$ ;

- 求  $A^{-1} \Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$ ;

- 求  $A^{-1}B \Rightarrow (A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$ ;

- 解  $AX = \beta \Rightarrow (A, \beta) \xrightarrow{\text{行变换}} \text{行最简形}$ ;

- 注：求可逆  $Q$ , 使得  $AQ = B$ ;  $A^{-1}$ ;  $BA^{-1}$ ;  $X^T A = \beta^T$  可用列分块, 初等列变换. 也可先转置, 再用初等行变换.

何时  $A \sim B$ ?

- 如何判断  $A \sim B$  ?

# 何时 $A \sim B$ ?

- 如何判断  $A \sim B$ ?

- 定义:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

# 何时 $A \sim B$ ?

- 如何判断  $A \sim B$ ?

- 定义:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

- 左行右列:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得 } PAQ = B.$$

# 何时 $A \sim B$ ?

- 如何判断  $A \sim B$ ?

- 定义:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

- 左行右列:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得 } PAQ = B.$$

- 有更简单的方法判断  $A \sim B$  或  $A \approx B$  吗?

# 何时 $A \sim B$ ?

- 如何判断  $A \sim B$ ?

- 定义:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

- 左行右列:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得 } PAQ = B.$$

- 有更简单的方法判断  $A \sim B$  或  $A \approx B$  吗?

- 有! 研究等价矩阵之间的共性.

(等价不变性/不变量: 在有限次初等变换下保持不变的性质和数量.)

# 何时 $A \sim B$ ?

- 如何判断  $A \sim B$ ?

- 定义:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

- 左行右列:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得 } PAQ = B.$$

- 有更简单的方法判断  $A \sim B$  或  $A \approx B$  吗?

- 有! 研究等价矩阵之间的共性.

(等价不变性/不变量: 在有限次初等变换下保持不变的性质和数量.)

- 例如, 等价的两个方阵同时可逆/不可逆.

如果  $A$  可逆, 但  $B$  不可逆, 则必有  $A \approx B$ .

# 何时 $A \sim B$ ?

- 如何判断  $A \sim B$ ?

- 定义:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

- 左行右列:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得 } PAQ = B.$$

- 有更简单的方法判断  $A \sim B$  或  $A \approx B$  吗?

- 有! 研究等价矩阵之间的共性.

(等价不变性/不变量: 在有限次初等变换下保持不变的性质和数量.)

- 例如, 等价的两个方阵同时可逆/不可逆.

如果  $A$  可逆, 但  $B$  不可逆, 则必有  $A \approx B$ .

- 矩阵的秩: 同型矩阵  $A \sim B \Leftrightarrow A, B$  的秩相同.



# 本次课内容

矩阵的秩和矩阵的等价

- 回顾：矩阵的等价化简

任意矩阵  $A \xrightarrow{\mathbf{r}}$  行阶梯形  $\xrightarrow{\mathbf{r}}$  行最简形  $\xrightarrow{\mathbf{c}}$  标准形

# 矩阵的秩

- 回顾：矩阵的等价化简

任意矩阵  $A \xrightarrow{r}$  行阶梯形  $\xrightarrow{r}$  行最简形  $\xrightarrow{c}$  标准形

- $$A_{m \times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

# 矩阵的秩

- 回顾：矩阵的等价化简

任意矩阵  $A \xrightarrow{r}$  行阶梯形  $\xrightarrow{r}$  行最简形  $\xrightarrow{c}$  标准形

- $$A_{m \times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

# 矩阵的秩

- 回顾：矩阵的等价化简

任意矩阵  $A \xrightarrow{r}$  行阶梯形  $\xrightarrow{r}$  行最简形  $\xrightarrow{c}$  标准形

- $$A_{m \times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

定义 (矩阵的秩 (Rank))

$A$  的秩定义为其标准形中的数  $r$ , 记为  $r(A)$  或  $R(A)$ .

# 矩阵的秩

- 回顾：矩阵的等价化简

任意矩阵  $A \xrightarrow{r}$  行阶梯形  $\xrightarrow{r}$  行最简形  $\xrightarrow{c}$  标准形

- $$A_{m \times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

定义 (矩阵的秩 (Rank))

$A$  的秩定义为其标准形中的数  $r$ , 记为  $r(A)$  或  $R(A)$ .

定理

同型矩阵  $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$ .

## 一些说明

矩阵  $A_{m \times n}$  的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n},$
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m \times n},$
- $F = (E_m \ O)_{m \times n},$
- $F = E_n,$
- $F = O_{m \times n},$

## 一些说明

矩阵  $A_{m \times n}$  的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = r$ .
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m \times n}$ ,
- $F = (E_m \ O)_{m \times n}$ ,
- $F = E_n$ ,
- $F = O_{m \times n}$ ,



## 一些说明

矩阵  $A_{m \times n}$  的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = r$ .
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为列满秩矩阵.
- $F = (E_m \ O)_{m \times n}$ ,
- $F = E_n$ ,
- $F = O_{m \times n}$ ,

## 一些说明

矩阵  $A_{m \times n}$  的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = r$ .
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为列满秩矩阵.
- $F = (E_m \ O)_{m \times n}$ , 则  $R(A) = m$ . 此时, 称  $A$  为行满秩矩阵.
- $F = E_n$ ,
- $F = O_{m \times n}$ ,

## 一些说明

矩阵  $A_{m \times n}$  的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = r$ .
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为列满秩矩阵.
- $F = (E_m \ O)_{m \times n}$ , 则  $R(A) = m$ . 此时, 称  $A$  为行满秩矩阵.
- $F = E_n$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为满秩矩阵 ( $\Leftrightarrow$  可逆矩阵).
- $F = O_{m \times n}$ ,

## 一些说明

矩阵  $A_{m \times n}$  的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = r$ .
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为列满秩矩阵.
- $F = (E_m \ O)_{m \times n}$ , 则  $R(A) = m$ . 此时, 称  $A$  为行满秩矩阵.
- $F = E_n$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为满秩矩阵 ( $\Leftrightarrow$  可逆矩阵).
- $F = O_{m \times n}$ , 则  $R(A) := 0$ . 此时,  $A = O$ .

## 一些说明

矩阵  $A_{m \times n}$  的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = r$ .
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为列满秩矩阵.
- $F = (E_m \ O)_{m \times n}$ , 则  $R(A) = m$ . 此时, 称  $A$  为行满秩矩阵.
- $F = E_n$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为满秩矩阵 ( $\Leftrightarrow$  可逆矩阵).
- $F = O_{m \times n}$ , 则  $R(A) := 0$ . 此时,  $A = O$ .

左行右列:  $A \sim B \Leftrightarrow$  存在可逆  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$ . 所以,

$$R(A) = R(PAQ) = R(PA) = R(AQ).$$

即矩阵与可逆矩阵相乘, 秩不变.

## 一些说明

矩阵  $A_{m \times n}$  的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = r$ .
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m \times n}$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为列满秩矩阵.
- $F = (E_m \ O)_{m \times n}$ , 则  $R(A) = m$ . 此时, 称  $A$  为行满秩矩阵.
- $F = E_n$ , 则  $R(A) = n$ . 此时, 称  $A$  为满秩矩阵 ( $\Leftrightarrow$  可逆矩阵).
- $F = O_{m \times n}$ , 则  $R(A) := 0$ . 此时,  $A = O$ .

左行右列:  $A \sim B \Leftrightarrow$  存在可逆  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$ . 由定理知:

$$R(A) = R(PAQ) = R(PA) = R(AQ).$$

即矩阵与可逆矩阵相乘, 秩不变.

## 秩的计算

● 例  $R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

★  $R(A) = R \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = r = \text{标准形中1的个数}$   
= 行阶梯形的非零行数 = 行最简形的非零行数.

## 秩的计算

● 例  $R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

★  $R(A) = R \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = r = \text{标准形中1的个数}$   
= 行阶梯形的非零行数 = 行最简形的非零行数.

- 计算  $R(A)$ : 通过初等行变换把  $A$  化为行阶梯形,

$$R(A) = \text{行阶梯形的非零行数.}$$



## 例题

例

求  $R(A)$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

## 例题

例  
设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix},$$

已知  $R(A) = 2$ , 求  $\lambda$  和  $\mu$ .

# 秩的性质

性质

$$1) \ 0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$$

# 秩的性质

## 性质

$$1) \ 0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$$

$$2) \ R(A^T) = R(A);$$

# 秩的性质

## 性质

- 1)  $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2)  $R(A^T) = R(A);$
- 3)  $A, B$  同型, 则  $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$

# 秩的性质

## 性质

- 1)  $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2)  $R(A^T) = R(A);$
- 3)  $A, B$  同型, 则  $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$
- 4) 若  $P, Q$  可逆, 则  $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ);$

# 秩的性质

## 性质

- 1)  $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2)  $R(A^T) = R(A);$
- 3)  $A, B$  同型, 则  $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$
- 4) 若  $P, Q$  可逆, 则  $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ);$
- 5)  $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B),$   
特别地,  $R(A) \leq R(A, \beta) \leq R(A) + 1;$

# 秩的性质

## 性质

- 1)  $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2)  $R(A^T) = R(A);$
- 3)  $A, B$  同型, 则  $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$
- 4) 若  $P, Q$  可逆, 则  $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ);$
- 5)  $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B),$   
特别地,  $R(A) \leq R(A, \beta) \leq R(A) + 1;$
- 6)  $R(A + B) \leq R(A) + R(B);$



# 秩的性质

## 性质

- 1)  $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$
- 2)  $R(A^T) = R(A);$
- 3)  $A, B$  同型, 则  $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B);$
- 4) 若  $P, Q$  可逆, 则  $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ);$
- 5)  $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B),$   
特别地,  $R(A) \leq R(A, \beta) \leq R(A) + 1;$
- 6)  $R(A + B) \leq R(A) + R(B);$
- 7)  $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\};$

# 秩的性质

## 性质

- 1)  $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$ ;
- 2)  $R(A^T) = R(A)$ ;
- 3)  $A, B$  同型, 则  $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$ ;
- 4) 若  $P, Q$  可逆, 则  $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$ ;
- 5)  $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$ ,  
特别地,  $R(A) \leq R(A, \beta) \leq R(A) + 1$ ;
- 6)  $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$ ;
- 7)  $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$ ;
- 8) 若  $A_{m \times n} B_{n \times l} = O$ , 则  $R(A) + R(B) \leq n$ .

## 例题

例

证明：若  $A_{m \times n} B_{n \times l} = C$ , 且  $R(A) = n$ , 则  $R(B) = R(C)$ .

## 例题

例

证明：若  $A_{m \times n} B_{n \times l} = C$ , 且  $R(A) = n$ , 则  $R(B) = R(C)$ .

- $R(A_{m \times n}) = n$ , 则称  $A$  为列满秩矩阵;

## 例题

例

证明：若  $A_{m \times n} B_{n \times l} = C$ , 且  $R(A) = n$ , 则  $R(B) = R(C)$ .

- $R(A_{m \times n}) = n$ , 则称  $A$  为列满秩矩阵;
- $AX = AY$ ,  $A$  列满秩, 则  $X = Y$ .  
即  $A$  列满秩, 则有左消去律成立;  
同理, 若  $A$  行满秩, 则有右消去律:  $XA = YA \Leftrightarrow X = Y$ .  
 $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  满秩  $\Rightarrow$  左/右消去律成立.

## 例题

例

设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 证明  $R(A + E) + R(A - E) \geq n$ .

# 子式和矩阵的秩（选）

## $k$ 阶子式

- $k$  阶子式: 任取矩阵  $A_{m \times n}$  的  $k$  行  $k$  列,  $k \leq \min\{m, n\}$ , 其行列交叉处的  $k^2$  个元素构成的  $k$  阶行列式, 称为  $A$  的一个  $k$  阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



## $k$ 阶子式

- $k$  阶子式: 任取矩阵  $A_{m \times n}$  的  $k$  行  $k$  列,  $k \leq \min\{m, n\}$ , 其行列交叉处的  $k^2$  个元素构成的  $k$  阶行列式, 称为  $A$  的一个  $k$  阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## $k$ 阶子式

- $k$  阶子式: 任取矩阵  $A_{m \times n}$  的  $k$  行  $k$  列,  $k \leq \min\{m, n\}$ , 其行列交叉处的  $k^2$  个元素构成的  $k$  阶行列式, 称为  $A$  的一个  $k$  阶子式.

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

# $k$ 阶子式

- $k$  阶子式: 任取矩阵  $A_{m \times n}$  的  $k$  行  $k$  列,  $k \leq \min\{m, n\}$ , 其行列交叉处的  $k^2$  个元素构成的  $k$  阶行列式, 称为  $A$  的一个  $k$  阶子式.

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

- $k$  阶主子式: 选取得行标和列标相同的  $k$  阶子式.
- $k$  阶顺序主子式: 选取前  $k$  行前  $k$  列的子式.
- 区分  $k$  阶子式、子块、余子式、代数余子式.

## 子式和矩阵的秩

性质

若  $A$  存在一个非零  $r$  阶子式  $D$ , 而所有的  $r+1$  阶子式都为零 (如果存在), 则

$$R(A) = r.$$

# 子式和矩阵的秩

性质

若  $A$  存在一个非零  $r$  阶子式  $D$ , 而所有的  $r+1$  阶子式都为零 (如果存在), 则

$$R(A) = r.$$

- 其中这里的  $D$  被称为  $A$  的**最高阶非零子式**.

# 子式和矩阵的秩

## 性质

若  $A$  存在一个非零  $r$  阶子式  $D$ , 而所有的  $r+1$  阶子式都为零 (如果存在), 则

$$R(A) = r.$$

- 其中这里的  $D$  被称为  $A$  的**最高阶非零子式**.

证明思路: 设  $D \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} D'$ , 则根据行列式的性质有:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow D' \neq 0.$$

具体是: 若  $D \neq 0$ ,

- $D \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} D'$ , 则  $D' = -D \neq 0$ ;
- $D \xrightarrow{r_i \times k} D', k \neq 0$ , 则  $D' = kD \neq 0$ ;
- $D \xrightarrow{r_i + kr_j} D'$ , 则  $D' = D \neq 0$ .

## 例题

例

$$\text{已知 } (A_{4 \times 3}, B_{4 \times 3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

求  $R(A), R(B), R(A, B)$ .

## 例题

例

$$\text{已知 } (A_{4 \times 3}, B_{4 \times 3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

求  $R(A), R(B), R(A, B)$ .

判断小阶矩阵  $A_{m \times n}$  秩的小技巧.

- $R(A) \leq \min\{m, n\}$ ;
- $R(A) = 0 \iff A = O$ ;
- $R(A) = 1 \iff A$  任意行 (列) 成比例;
- 若  $A$  有 2 阶非零子式, 则  $R(A) \geq 2$ .



# 作业

- 设  $A, B$  都为  $n$  阶方阵. 若  $A \sim B$ , 则称  $A$  和  $B$  属于同一个等价类. 问  $n$  阶方阵全体可以划分为多少个等价类?  
(Tip: 通过秩讨论)
- Page79-Page80. 10-(3)、13.

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2024 年 9 月 25 日