

Lec-10. 条件分布，相互独立的随机变量

主讲教师：吴利苏 (wulisu@sdust.edu.cn)

主 页：wulisu.cn

目录

1. 二维连续型随机变量的条件分布
2. 二维随机变量的独立性
3. n 维随机变量的边缘分布和独立性

二维连续型随机变量的条件分布

- 连续型随机变量 X, Y ,

$$P\{X = x\} = 0, \quad P\{Y = y\} = 0, \quad \forall x, y.$$

所以不能直接用条件概率引入条件分布函数, 即定义 $P\{X = x|Y = y\}$ 没有意义.

二维连续型随机变量的条件分布

- 连续型随机变量 X, Y ,

$$P\{X = x\} = 0, \quad P\{Y = y\} = 0, \quad \forall x, y.$$

所以不能直接用条件概率引入条件分布函数, 即定义 $P\{X = x|Y = y\}$ 没有意义.

- 给定 y , 对任意 ε, x , 考虑条件概率

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\}.$$

若 $P\{y < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$ 则有

$$\begin{aligned} P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} &= \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x \left[\int_y^{y+\varepsilon} f(x, y) dy \right] dx}{\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y) dy} \end{aligned}$$

若 $P\{y < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$ 则有

$$\begin{aligned} P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} &= \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x \left[\int_y^{y+\varepsilon} f(x, y) dy \right] dx}{\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y) dy} \end{aligned}$$

当 ε 很小时, 上式近似于

$$\frac{\varepsilon \int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{\varepsilon f_Y(y)} \approx \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

- 若对于固定的 y , $f_Y(y) > 0$, 则称

$$\frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \triangleq f_{X|Y}(x|y)$$

为在 $Y = y$ 的条件下 X 的 **条件概率密度**.

- 称

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx &= \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx \\ &\triangleq F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} \end{aligned}$$

为在 $Y = y$ 的条件下 X 的 **条件分布函数**.

二维连续型条件分布的含义

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx \approx P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\}.$$

二维连续型条件分布的含义

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx \approx P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\}.$$

注

- 非负性: $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$.
- 规范性: $F_{X|Y}(\infty|y) = 1$.

类似可定义在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度和条件分布函数.

- $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)},$
- $F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y|X = x\} = \int_{-\infty}^y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy.$

类似可定义在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度和条件分布函数.

- $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)},$
- $F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y|X = x\} = \int_{-\infty}^y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy.$

注

- 联合分布 \Rightarrow 边缘分布 + 条件分布.
- 联合分布 \Leftarrow 边缘分布 + 条件分布.

例

设二维随机变量 (X, Y) 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布, 即有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in G; \\ 0 & \text{其他,} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

$$\text{解: } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} & -1 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

当 $-1 < y < 1$ 时

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

例

设 X 在区间 $(0, 1)$ 上随机地取值, 当观察到 $X = x \in (0, 1)$ 时, 设 Y 在 $(x, 1)$ 上随机地取值, 求 Y 的概率密度.

$$\text{解: } f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx \\ &= \begin{cases} -\ln(1-y) & 0 < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

相互独立的随机变量

事件 A, B , 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则 A, B 相互独立.

相互独立的随机变量

定义

设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及边缘分布函数. 若对于任意 x, y 有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\},$$

即 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, 则称 X 和 Y 是相互独立的.

- 离散型 (X, Y) .
 - X 和 Y 相互独立 \Leftrightarrow
 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$. 即
 $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$.
- 连续型 (X, Y) .
 - X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立.

注

- 联合分布 \Rightarrow 边缘分布/条件分布 + 独立性.

注

- 联合分布 \Rightarrow 边缘分布/条件分布 + 独立性.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立, 则

注

- 联合分布 \Rightarrow 边缘分布/条件分布 + 独立性.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立, 则
 - 联合分布 \Leftarrow 边缘分布 \Leftarrow 条件分布.

注

- 联合分布 \Rightarrow 边缘分布/条件分布 + 独立性.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立, 则
 - 联合分布 \Leftarrow 边缘分布 \Leftarrow 条件分布.

注

- 联合分布 \Rightarrow 边缘分布/条件分布 + 独立性.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立, 则
 - 联合分布 \Leftarrow 边缘分布 \Leftarrow 条件分布.

在独立性前提下, 只需知道联合分布、边缘分布、条件分布三者之一, 便可求其余两个分布.

例

已知 (X, Y) 的联合分布律

X \ Y	Y		$P\{X = x_i\}$
	0	1	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

判断 X, Y 的独立性.

解: 逐个检验 $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$.

$$P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{1}{6} = P\{X = 1\}P\{Y = 0\}$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{2}{6} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\}$$

$$P\{X = 2, Y = 0\} = \frac{1}{6} = P\{X = 2\}P\{Y = 0\}$$

$$P\{X = 2, Y = 1\} = \frac{2}{6} = P\{X = 2\}P\{Y = 1\}$$

则 X 和 Y 相互独立.



若

X \ Y	Y		$P\{X = x_i\}$
	0	1	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{1}{6} \neq P\{X = 1\}P\{Y = 0\}$$

只要有一对 i, j 使得 $p_{ij} \neq p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ 就能判断 X, Y 不独立.

例

设 X 和 Y 相互独立, 已知 (X, Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X = x_i\}$
1	0.01	0.2		
2	0.03			
$P\{Y = y_j\}$				

求出联合分布律.

解: X, Y 相互独立, 则 $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$

$$P\{Y = 0\} = 0.04,$$

$$P\{Y = 0\}P\{X = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\},$$

$$\text{则 } P\{X = 1\} = 0.25. \quad P\{X = 2\} = 0.75.$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\}, \text{ 则}$$

$$P\{Y = 1\} = 0.8, \quad P\{Y = 2\} = 0.16.$$

$$P\{X = 2, Y = 1\} = 0.6,$$

$$P\{X = 2, Y = 2\} = 0.12.$$

□

例

(X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

X, Y 是否相互独立?

例

(X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

X, Y 是否相互独立?

$$\text{解: } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 3e^{-3y} & y > 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 相互独立.

例

(X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

X, Y 是否相互独立?

$$\text{解: } f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & 0 < y < 1; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

当 $0 < y < x < 1$ 时, $f(x, y) = 0$, 而 $f_X \cdot f_Y > 0$.

故 X, Y 不相互独立.



例 (★)

设 (X, Y) 为二维正态随机变量, 证明 X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$.

例 (★)

设 (X, Y) 为二维正态随机变量, 证明 X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$.

证:

$$\begin{aligned} f(x, y) \\ = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

证: 若 $\rho = 0$, 则对任意 x, y

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y),$$

即 X 和 Y 相互独立.

反之, 若 X 和 Y 相互独立, $f(x, y), f_X(x), f_Y(y)$ 连续. 故, 对任意的 x, y , 有

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

特别地, 令 $x = \mu_1, y = \mu_2, f(\mu_1, \mu_2) = f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$, 则

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2},$$

从而 $\rho = 0$.

□

例

一负责人到达办公室的时间均匀分布在 $8 \sim 12$ 时, 其秘书到达办公室时间均匀分布在 $7 \sim 9$ 时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间差不超过 $5\text{min}(\frac{1}{12}h)$ 的概率.

解: 设 X, Y 分别表示负责人和秘书到达办公室的时间.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 8 < x < 12; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 7 < y < 9; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

X, Y 相互独立,

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 8 < x < 12, 7 < y < 9; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$P\{|X - Y| \leq \frac{1}{12}\} = \iint_G f(x, y) dx dy = \frac{1}{48}.$$

n 维随机变量的分布函数

n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

n 维连续型随机变量

若存在非负函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

则称 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为连续型的随机变量, 称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的概率密度函数.

n 维随机变量的边缘分布函数

- 称

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \dots, \infty)$$

为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 关于 X_1 的**边缘分布函数**.

- 称

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \dots, \infty)$$

为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 关于 (X_1, X_2) 的**边缘分布函数**.

n 维连续型随机变量的边缘分布函数

- 连续型随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 关于 X_1 的**边缘概率密度函数**为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n.$$

- 关于 (X_1, X_2) 的**二维边缘概率密度函数**为

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_3 dx_4 \dots dx_n.$$

- 类似可得 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的 **k ($1 \leq k < n$) 维边缘概率密度**.

n 维随机变量的独立性

- 若对任意 x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n),$$

则称 X_1, \dots, X_n 是相互独立的.

- 若对任意 $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$,

$$F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = F_1(x_1, \dots, x_m) F_2(y_1, \dots, y_n),$$

其中 F_1, F_2, F 分别为 $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n),$
 $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$ 的分布函数. 则称
 $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$ 是相互独立的.

n 维随机变量的独立性

定理

设 (X_1, \dots, X_m) 和 (Y_1, \dots, Y_n) 相互独立, 则

(1) 对任意 i, j , X_i 和 Y_j 相互独立.

(2) 若 h, g 是连续函数, 则 $h(X_1, \dots, X_m)$ 和 $g(Y_1, \dots, Y_n)$ 相互独立.