

# 线性代数-13

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 16 日

# 本次课内容

1. 向量空间

2. 向量的内积: 欧式空间

# 向量空间的定义

- 设  $V \neq \emptyset$  为  $n$  维向量的集合 (向量组),  
若  $V$  对向量的加法和数乘两种运算封闭:  $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ , 有

- (1).  $\alpha + \beta \in V$ ;
- (2).  $\lambda \cdot \alpha \in V$ .

则称  $V$  为一个向量空间.

# 向量空间的定义

- 设  $V \neq \emptyset$  为  $n$  维向量的集合 (向量组),  
若  $V$  对向量的加法和数乘两种运算封闭:  $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ , 有

- (1).  $\alpha + \beta \in V$ ;
- (2).  $\lambda \cdot \alpha \in V$ .

则称  $V$  为一个向量空间.

- 条件 (1) 和 (2) 与下面描述等价:

$$\star \quad \forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}, \text{ 则 } k\alpha + l\beta \in V.$$

# 向量空间的定义

- 设  $V \neq \emptyset$  为  $n$  维向量的集合 (向量组),  
若  $V$  对向量的加法和数乘两种运算封闭:  $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ , 有

- (1).  $\alpha + \beta \in V$ ;
- (2).  $\lambda \cdot \alpha \in V$ .

则称  $V$  为一个向量空间.

- 条件 (1) 和 (2) 与下面描述等价:

$$\star \quad \forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}, \text{ 则 } k\alpha + l\beta \in V.$$

- 向量空间必包含零向量. 所以, 若  $0 \notin V$ , 则  $V$  不是向量空间.

# 向量空间

- 上述加法和数乘两种运算称为向量空间  $V$  上的线性结构.
- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间.
- 集合  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  线性空间. Chapter 6 (选学).
- 向量空间/线性空间  $\xrightarrow{+ \text{内积}}$  欧式空间.

# 例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;
2. 集合  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;
3. 集合  $V = \{X = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;
4. 齐次线性方程组  $AX = 0$  的解集  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;
5. 非齐次线性方程组  $AX = \beta$  的解集  $S = \{X \mid AX = \beta\}$ ;
6.  $\alpha, \beta$  为两个  $n$  维向量, 集合  $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ .

# 例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ; ✓
2. 集合  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ; ✓
3. 集合  $V = \{X = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ; ✗
4. 齐次线性方程组  $AX = 0$  的解集  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ; ✓
5. 非齐次线性方程组  $AX = \beta$  的解集  $S = \{X \mid AX = \beta\}$ ; ✗
6.  $\alpha, \beta$  为两个  $n$  维向量, 集合  $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ . ✓



# 例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ; ✓
2. 集合  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ; ✓
3. 集合  $V = \{X = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ; ✗
4. 齐次线性方程组  $AX = 0$  的解集  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ; ✓ <解空间>
5. 非齐次线性方程组  $AX = \beta$  的解集  $S = \{X \mid AX = \beta\}$ ; ✗
6.  $\alpha, \beta$  为两个  $n$  维向量, 集合  $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ . ✓ <向量  $\alpha, \beta$  生成的空间>

## 等价向量组生成相同向量空间

由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  生成的空间定义为

$$L = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为  $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  或  $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ .

## 等价向量组生成相同向量空间

由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  生成的空间定义为

$$L = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为  $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  或  $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ .

例 (例 18)

设向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  和  $\beta_1, \dots, \beta_s$  等价, 记

$$L_1 = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{X = \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_s \beta_s \mid \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}\}$$

证明:  $L_1 = L_2$ .

## 等价向量组生成相同向量空间

由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  生成的空间定义为

$$L = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为  $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  或  $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ .

例 (例 18)

设向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  和  $\beta_1, \dots, \beta_s$  等价, 记

$$L_1 = \{X = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{X = \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_s \beta_s \mid \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}\}$$

证明:  $L_1 = L_2$ .

- 等价向量组生成的向量空间相同.

# 子空间的定义

## 定义

设  $V_1$  为向量空间  $V$  的一个非空子集. 若  $V_1$  也是一个向量空间, 则称  $V_1$  为向量空间  $V$  的**子空间**, 可记为  $V_1 < V$ .

# 子空间的定义

## 定义

设  $V_1$  为向量空间  $V$  的一个非空子集. 若  $V_1$  也是一个向量空间, 则称  $V_1$  为向量空间  $V$  的**子空间**, 可记为  $V_1 < V$ .

- 例:  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$  为  $\mathbb{R}^n$  的子空间.
- 例:  $\alpha, \beta$  为两个  $n$  维向量, 集合  $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$  为  $\mathbb{R}^n$  的子空间.

# 基和维数的定义

- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间.
- 向量组的最大无关组  $\longrightarrow$  向量空间的基.
- 向量组的秩  $\longrightarrow$  向量空间的维数.

# 基和维数的定义

- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间.
- 向量组的最大无关组  $\longrightarrow$  向量空间的基.
- 向量组的秩  $\longrightarrow$  向量空间的维数.

## 定义

设  $V$  为向量空间,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V$ , 若满足

- (i)  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关;
  - (ii)  $V$  中的任一向量都可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表示,
- 则称向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为向量空间  $V$  的一组基,  $r$  称为向量空间  $V$  的维数, 记为  $\dim V = r$ . 此时称  $V$  为  $r$  维向量空间.



# 例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;
2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;
3. 齐次线性方程组  $AX = 0$  的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;
4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

# 例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;

3. 齐次线性方程组  $AX = 0$  的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;

4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

# 例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;

$$\dim V = n - 1$$

3. 齐次线性方程组  $AX = 0$  的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;

4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

# 例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;

$$\dim V = n - 1$$

3. 齐次线性方程组  $AX = 0$  的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;

$$\dim S = n - R(A)$$

4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

# 例子

例

求下列向量空间的一组基和维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;

$$\dim V = n - 1$$

3. 齐次线性方程组  $AX = 0$  的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;

$$\dim S = n - R(A)$$

4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

$$\dim L = R_A.$$

## 坐标的定义

定义 (定义 9)

取定向量空间的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , 则  $V$  中任一向量  $\beta$  可唯一表示为

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r,$$

数组  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  称为向量  $\beta$  在基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  下的坐标.

# 坐标的定义

定义 (定义 9)

取定向量空间的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , 则  $V$  中任一向量  $\beta$  可唯一表示为

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r,$$

数组  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  称为向量  $\beta$  在基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  下的坐标.

关于坐标的一些常用写法:

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) X_\beta$$

## 例 24

例  
设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = (\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为  $\mathbb{R}^3$  的一组基, 并求  $\beta_1, \beta_2$  在这组基下的坐标.

解法: 解矩阵方程  $AX = B$ . 对  $(A, B)$  进行初等行变换.



# 例子

例 (Lecture-12, Page110-12)

设向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_r$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times r},$$

向量组  $A$  线性无关. 证明:  $R_B = R(K)$ .

令向量空间  $V = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ . 设  $\beta_i$  在基  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  下的坐标为  $X_i$ , 即

$$\beta_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) X_i,$$

则

$$K = (X_1, \dots, X_r).$$

$R_B = R(K)$ , 则  $L(\beta_1, \dots, \beta_r)$  的维数为坐标向量组的秩.

# 基变换公式

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  都为  $\mathbb{R}^3$  的基.

$$\mathbb{R}^3 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

- 向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \beta_3$  可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P.$$

上式称为  $\mathbb{R}^3$  从基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的基变换公式.

# 基变换公式

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  都为  $\mathbb{R}^3$  的基.

$$\mathbb{R}^3 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

- 向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \beta_3$  可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P.$$

上式称为  $\mathbb{R}^3$  从基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的基变换公式.

矩阵  $P = A^{-1}B$  称为从基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵.

## 坐标变换公式

• 任意向量  $X = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

称为两组基之间的坐标变换公式.

## 例 26

例

设  $\mathbb{R}^3$  的两组基为

$$I: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$II: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. 求从基  $I$  到基  $II$  的过渡矩阵;
2. 向量  $X$  在基  $I$  下的坐标为  $(-2, 1, 2)^T$ , 求向量  $X$  在基  $II$  下的坐标.

# 内积的定义

定义

设  $n$  维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称  $(X, Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$  为向量  $X$  与  $Y$  的**内积**.

- 内积有时也被记为  $[X, Y]$ ,  $\langle X, Y \rangle$ .
- $(X, Y) = X^T Y = Y^T X$ .

# 内积的性质

- 对称性:  $(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质:
  - $(\lambda X, Y) = \lambda(X, Y) = (X, \lambda Y), \lambda \in \mathbb{R};$
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y);$
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2);$
- 半正定性/非负性:  $(X, X) \geq 0$
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

# 内积的性质

- 对称性:  $(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质:
  - $(\lambda X, Y) = \lambda(X, Y) = (X, \lambda Y), \lambda \in \mathbb{R};$
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y);$
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2);$
- 半正定性/非负性:  $(X, X) \geq 0$
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$



# 内积的性质

- 对称性:  $(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质:
  - $(\lambda X, Y) = \lambda(X, Y) = (X, \lambda Y), \lambda \in \mathbb{R};$
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y);$
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2);$
- 半正定性/非负性:  $(X, X) \geq 0$
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间

# 内积的性质

- 对称性:  $(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质:
  - $(\lambda X, Y) = \lambda(X, Y) = (X, \lambda Y), \lambda \in \mathbb{R};$
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y);$
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2);$
- 半正定性/非负性:  $(X, X) \geq 0$
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间  $\xrightarrow{+ \text{内积}}$

# 内积的性质

- 对称性:  $(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质:
  - $(\lambda X, Y) = \lambda(X, Y) = (X, \lambda Y), \lambda \in \mathbb{R};$
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y);$
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2);$
- 半正定性/非负性:  $(X, X) \geq 0$
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间  $\xrightarrow{+ \text{内积}}$  欧式空间.

# 内积的性质

- 对称性:  $(X, Y) = (Y, X)$
- 双线性性质:
  - $(\lambda X, Y) = \lambda(X, Y) = (X, \lambda Y), \lambda \in \mathbb{R};$
  - $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y);$
  - $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2);$
- 半正定性/非负性:  $(X, X) \geq 0$
- Schwarz 不等式

$$(X, Y)^2 \leq (X, X) \cdot (Y, Y)$$

- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间  $\xrightarrow{+ \text{内积}}$  欧式空间.
- 在欧式空间中可以讨论向量的长度, 角度, 垂直 (正交) 等几何概念.

# 长度的定义

- 称

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

为  $n$  维向量  $X$  的长度 (或范数).

- 向量长度满足以下性质:

- 非负性:  $X=0 \Leftrightarrow (X, X)=0$ ,  $X \neq 0 \Leftrightarrow (X, X) > 0$ ;
- 齐次性:  $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$

- 若  $\|X\| = 1$ , 则称  $X$  为单位向量.

- 若  $\alpha \neq 0$ , 则  $X = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$  为一个单位向量, 此过程称为单位化.

## 夹角和正交的定义

- 设  $X, Y$  为  $n$  维非零向量, 则

$$\theta = \arccos \frac{(X, Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

称为向量  $X, Y$  的夹角.

- 若  $(X, Y) = 0$ , 则称向量  $X$  和  $Y$  正交.

## 小结

- 向量空间、解空间、生成空间、子空间、基、维数、坐标；
- 基变换公式、过渡矩阵、坐标变换公式；
- 内积、长度、夹角、正交.

# 作业

- Page<sub>111</sub>-Page<sub>112</sub>: 21、23、24
- 设向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  两两正交, 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关.



# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2024 年 10 月 16 日