线性代数-19

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 26 日

本次课内容

1. 等价关系和等价不变量/性
2. 再问：何为线性代数？

集合 S 上满足如下三条性质的二元关系 $\sim$

- 自反性: $\forall x \in S$, $x \sim x$;
- 对称性: $\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 传递性: $\forall x, y, z \in S$, 若 $x \sim y$, $y \sim z$, 则 $x \sim z$.

称为 S 上的一个等价关系.

集合 S 上满足如下三条性质的二元关系 $\sim$

- 自反性: $\forall x \in S,\ x \sim x$;
- 对称性: $\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 传递性: $\forall x, y, z \in S$, 若 $x \sim y$, $y \sim z$, 则 $x \sim z$.

称为 S 上的一个等价关系.

例

1. 在实数集 $\mathbb{R}$ 上, “$=$” 是一个等价关系. “$<$” 和 “$>$” 不是等价关系.
2. 设 $S = \{$平面上所有直线$\}$, “平行” 是一个等价关系.
3. 设 $S = \{$所有三角形$\}$, “全等” 和 “相似” 是等价关系.
4. 整数集 $\mathbb{Z}$ 上, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x, y$ 奇偶性相同, 则"$\sim$" 是等价关系.
5. 设 S 是人的集合, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 性别相同, 则"$\sim$" 是等价关系.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得$PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得$PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得$P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得$PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得$P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- **合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P, 使得$P^{T}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.**

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.
- 正交相似: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 正交相似.

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.
- 正交相似: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 向量组等价: 设 A, B 是两个向量组, 若 A, B 可相互线性表示则称向量组 A 和 B 等价.

矩阵等价关系之间的联系

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{正交相似} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{相似} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{合同} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \text{等价} & \\
\text{行等价} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{列等价} \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

- 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow (0, A) \overset{c}{\sim} (B, 0)$

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 属于同一个等价类, 记为 $[x]$.

- 集合 S 上的等价关系把 S 中所有元素进行了分类, 每一类对应一个等价类.
- 研究集合 S 上的不同的等价关系相当于从不同的角度观察 S 中元素.

等价类

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 属于同一个等价类，记为 $[x]$.

- 集合 S 上的等价关系把 S 中所有元素进行了分类，每一类对应一个等价类.
- 研究集合 S 上的不同的等价关系相当于从不同的角度观察 S 中元素.

例

1. 设 S 是教室中所有人的集合，定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性别相同，则 $\sim$ 把 S 分为两类 (男性/女性).
2. 设 S 是教室中所有人的集合，定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的星座相同，则 $\sim$ 把 S 分为 12 类.
3. 设 S 是教室中所有人的集合，定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的班级相同，则 $\sim$ 把 S 分为 4 类.

线性代数中的等价类

- 等价：设 S 是 $m\times n$ 阶矩阵全体，则 S 中等价类有 $\min\{m,n\}+1$ 个.
  每个等价类中最简单的矩阵是：标准形.

- 等价: 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体，则
  S 中等价类有 $\min\{m, n\} + 1$ 个.
  每个等价类中最简单的矩阵是：标准形.
- 相似：设 S 是 n 阶方阵全体，则
  S 中等价类有无穷多个类.
  若可对角化，则每个相似类中最简单的矩阵是：对角阵.
  (超纲：一般情况每个等价类中最简单的矩阵是 **Jordan** 标准形.)

线性代数中的等价类

- 等价：设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体，则
  S 中等价类有 $\min\{m, n\} + 1$ 个.
  每个等价类中最简单的矩阵是：标准形.
- 相似：设 S 是 n 阶方阵全体，则
  S 中等价类有无穷多个类.
  若可对角化，则每个相似类中最简单的矩阵是：对角阵.
  (超纲：一般情况每个等价类中最简单的矩阵是 Jordan 标准形.)
- 合同：设 S 是 n 阶实对称阵全体，则
  S 中合同类有 $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ 个.
  每个合同类中最简单的矩阵是：规范形.

- 等价：设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体，则
  S 中等价类有 $\min\{m, n\} + 1$ 个.
  每个等价类中最简单的矩阵是：标准形.
- 相似：设 S 是 n 阶方阵全体，则
  S 中等价类有无穷多个类.
  若可对角化，则每个相似类中最简单的矩阵是：对角阵.
  （超纲：一般情况每个等价类中最简单的矩阵是 Jordan 标准形.）
- 合同：设 S 是 n 阶实对称阵全体，则
  S 中合同类有 $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ 个.
  每个合同类中最简单的矩阵是：规范形.
- 正交相似：设 S 是 n 阶实对称阵全体，则
  S 中正交相似类有无穷多个类.
  每个正交相似类中最简单的矩阵是：对角阵/标准形.

对角化问题

对角化问题: 每个等价类中，一般矩阵化为最简单的矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

  即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A，存在可逆 P, Q，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

对角化问题

对角化问题: 每个等价类中，一般矩阵化为最简单的矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.
  即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A，存在可逆 P, Q，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- **相似: n 阶方阵可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关特征向量.**
  即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆 P，使得 $P^{-1}AP = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$.

对角化问题: 每个等价类中，一般矩阵化为最简单的矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.
  即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A，存在可逆 P, Q，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 相似: n 阶方阵可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关特征向量.
  即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆 P，使得 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.
- **合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.**
  即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A，存在可逆 P，使得 P^TAP 为标准形/规范形.

对角化问题: 每个等价类中，一般矩阵化为最简单的矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.
  即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A，存在可逆 P, Q，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 相似: n 阶方阵可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关特征向量.
  即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆 P，使得 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.
- 合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.
  即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A，存在可逆 P，使得 P^TAP 为标准形/规范形.
- **正交相似: 任意 n 阶实对称阵可正交相似对角化.**
  即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A，存在正交 P，使得 $P^{-1}AP = P^TAP = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为标准形.

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 则

- 等价的元素之间所具有的共同的性质称为等价不变性;
- 等价的元素之间所具有的共同的数量特征称为等价不变量.

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 则

- 等价的元素之间所具有的共同的性质称为等价不变性;
- 等价的元素之间所具有的共同的数量特征称为等价不变量.

性质

设 p 是 $(S, \sim)$ 的一个等价不变性/量. 若 $x \sim y$, 则 $p(x) = p(y)$; 反过来, 若 $p(x) \neq p(y)$, 则 $x \nsim y$.

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系.
$\forall x, y \in S$，若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同，则称 p 是一个完全不变性/量.

- 同型矩阵等价的（完全）不变量：矩阵的秩.

完全不变量和完全不变性

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系.
$\forall x, y \in S$，若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同，则称 p 是一个完全不变性/量.

- 同型矩阵等价的（完全）不变量：矩阵的秩.
- 方阵相似的不变量：特征值、特征多项式.

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系.
$\forall x, y \in S$，若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同，则称 p 是一个完全不变性/量.

- 同型矩阵等价的（完全）不变量：矩阵的秩.
- 方阵相似的不变量：特征值、特征多项式.
- 实对称矩阵合同的（完全）不变量：正负惯性指数.

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系.
$\forall x, y \in S$，若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同，则称 p 是一个完全不变性/量.

- 同型矩阵等价的（完全）不变量：矩阵的秩.
- 方阵相似的不变量：特征值、特征多项式.
- 实对称矩阵合同的（完全）不变量：正负惯性指数.
- 实对称矩阵正交相似的（完全）不变量：特征值、特征多项式.

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法：初等行变换、左行右列.

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q，使得
$$PAQ = B,$$
则称矩阵 A 和 B 等价.
- 主要方法：初等行变换、左行右列.
- （完全）等价不变量：矩阵的秩.

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m\times n$ 阶矩阵全体，$\forall A,B\in S$，若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ=B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法：初等行变换、左行右列.
- （完全）等价不变量：矩阵的秩.
- 矩阵的等价把 $m\times n$ 阶矩阵全体分为了 $\min\{m,n\}+1$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵：标准形.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似。

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 相似.
- 相似不变量：特征值、特征多项式.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 相似.
- 相似不变量：特征值、特征多项式.
- 矩阵的相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵：**Jordan** 标准形.
可对角化等价类中最简单的矩阵：对角形.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 相似.
- 相似不变量：特征值、特征多项式.
- 矩阵的相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵：Jordan 标准形.
可对角化等价类中最简单的矩阵：对角形.
- 相似对角化问题：是否和对角形矩阵相似.
特征值和特征多项式是两个可对角化矩阵相似的完全不变量.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^T AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 合同.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^T AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 合同.
- 主要方法：二次型.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^T AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

- 主要方法：二次型.
- (完全) 等价不变量：正负惯性指数.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^T A P = B,$$
则称矩阵 A 和 B 合同.
- 主要方法：二次型.
- (完全) 等价不变量：正负惯性指数.
- 矩阵的合同把 n 阶实对称矩阵全体分为了 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵：规范形.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^T AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 合同.
- 主要方法：二次型.
- (完全) 等价不变量：正负惯性指数.
- 矩阵的合同把 n 阶实对称矩阵全体分为了 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵：规范形.
- 相似对角化问题：实对称矩阵一定和某个对角形矩阵合同.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得

$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似。

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得
$$P^T AP = P^{-1} AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 主要方法：二次型.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得
$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 主要方法：二次型.
- 等价不变量：特征值（完全不变量）、正负惯性指数.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得
$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 主要方法：二次型.
- 等价不变量：特征值（完全不变量）、正负惯性指数.
- 矩阵的等价把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵：标准形.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得
$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 主要方法：二次型.
- 等价不变量：特征值（完全不变量）、正负惯性指数.
- 矩阵的等价把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵：标准形.
- 正交相似对角化问题：实对称矩阵一定可以正交相似对角化.

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价.

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价.
- 等价不变量：向量组的秩

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价.
- 等价不变量：向量组的秩
- 向量组的等价把 n 维向量组全体分为了无穷多类.
  每个等价类中包含向量最少的向量组：最大无关组.

线性代数学了什么？

复习提纲

- 一个主体：矩阵

复习提纲

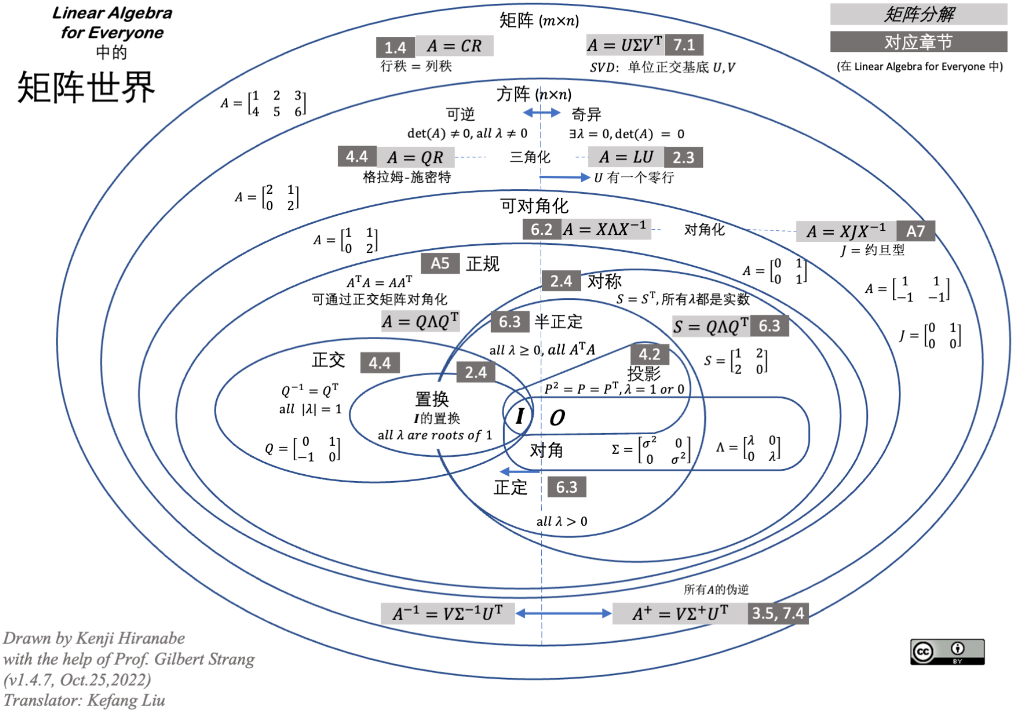
- 一个主体：矩阵
- 两个基本问题：线性方程组 $AX=\beta$ 和线性变换 $Y=AX$

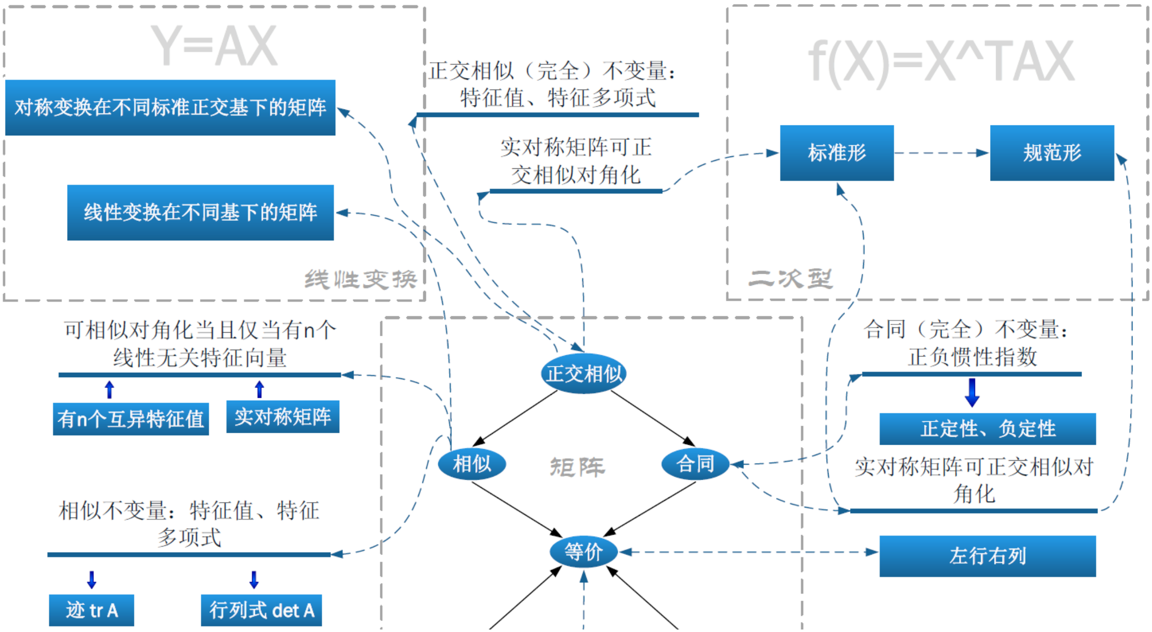
复习提纲

- 一个主体：矩阵
- 两个基本问题：线性方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$和线性变换$Y=AX$
- 3 + 1 + 1 个等价关系：矩阵的等价、合同、相似 + 正交相似（合同且相似）+向量组的等价.

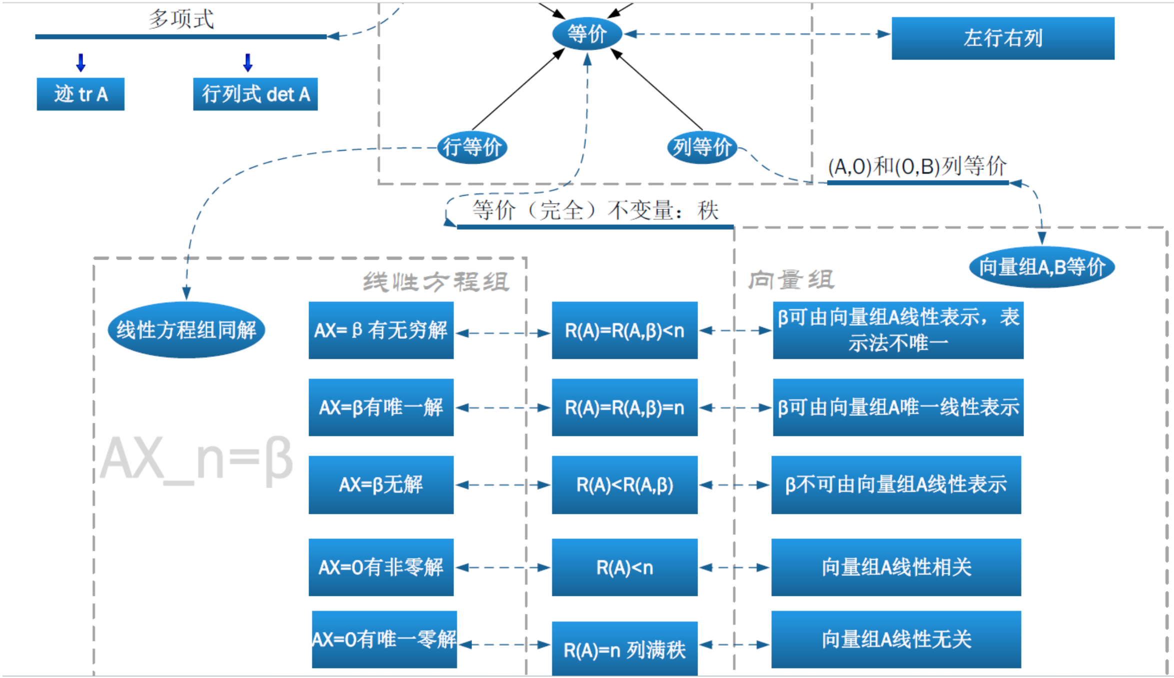
复习提纲

- 一个主体：矩阵
- 两个基本问题：线性方程组 $AX=\beta$ 和线性变换 $Y=AX$
- $3+1+1$ 个等价关系：矩阵的等价、合同、相似 + 正交相似（合同且相似）+向量组的等价.
- 3 个重要不变量：矩阵的秩、方阵的特征值、实对称矩阵的正负惯性指数.


Linear Algebra
for Everyone
中的
矩阵世界
矩阵分解
对应章节
(在 Linear Algebra for Everyone 中)
矩阵 (m×n)
1.4 A = CR
行秩 = 列秩
A = UΣV^T 7.1
SVD: 单位正交基底 U,V
A = [1 2 3; 4 5 6]
方阵 (n×n)
可逆
奇异
det(A) ≠ 0, all λ ≠ 0
∃λ = 0, det(A) = 0
4.4 A = QR
格拉姆-施密特
三角化
A = LU 2.3
U 有一个零行
A = [2 1; 0 2]
可对角化
6.2 A = XΛX^{-1}
对角化
A = XJX^{-1} A7
J = 约旦型
A = [1 1; 0 2]
A5 正规
A^T A = AA^T
可通过正交矩阵对角化
A = QΛQ^T
A = [0 1; 0 1]
A = [1 1; -1 -1]
J = [0 1; 0 0]
2.4 对称
S = S^T, 所有λ都是实数
S = QΛQ^T 6.3
6.3 半正定
all λ ≥ 0, all A^T A
S = [1 2; 2 0]
正交 4.4
Q^{-1} = Q^T
all |λ| = 1
Q = [0 1; -1 0]
2.4
置换
I的置换
all λ are roots of 1
4.2
投影
P^2 = P = P^T, λ = 1 or 0
I
O
对角
Σ = [σ^2 0; 0 σ^2]
Λ = [λ 0; 0 λ]
正定 6.3
all λ > 0
所有A的伪逆
A^{-1} = VΣ^{-1}U^T
A^+ = VΣ^+U^T 3.5, 7.4
Drawn by Kenji Hiranabe
with the help of Prof. Gilbert Strang
(v1.4.7, Oct.25,2022)
Translator: Kefang Liu



Y=AX
对称变换在不同标准正交基下的矩阵
线性变换在不同基下的矩阵
线性变换
正交相似（完全）不变量：
特征值、特征多项式
实对称矩阵可正
交相似对角化
f(X)=X^TAX
标准形
规范形
二次型
可相似对角化当且仅当有n个
线性无关特征向量
有n个互异特征值
实对称矩阵
正交相似
相似
矩阵
合同
等价
合同（完全）不变量：
正负惯性指数
正定性、负定性
实对称矩阵可正交相似对
角化
相似不变量：特征值、特征
多项式
迹 tr A
行列式 det A
左行右列


多项式
迹 tr A
行列式 det A
等价
左行右列
行等价
列等价
(A,O)和(O,B)列等价
等价（完全）不变量：秩
向量组A,B等价
线性方程组
向量组
线性方程组同解
AX_n=β
AX= β 有无穷解
R(A)=R(A,β)<n
β可由向量组A线性表示，表示法不唯一
AX=β有唯一解
R(A)=R(A,β)=n
β可由向量组A唯一线性表示
AX=β无解
R(A)<R(A,β)
β不可由向量组A线性表示
AX=0有非零解
R(A)<n
向量组A线性相关
AX=0有唯一零解
R(A)=n 列满秩
向量组A线性无关

答疑环节

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 26 日