

# 线性代数-5

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 11 日

# 本次课内容

1. 矩阵的定义
2. 特殊矩阵
3. 矩阵的应用
4. 矩阵的运算

## 定义 (矩阵 Matrix)

由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$ , ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ), 排成的  $m$  行  $n$  列的数表称为  $m$  行  $n$  列的矩阵, 简称  $m \times n$  矩阵, 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常可记为大写字母的  $A$ 、 $A_{m \times n}$ 、 $(a_{ij})$ 、 $(a_{ij})_{m \times n}$ .

# 矩阵

## 定义 (矩阵 Matrix)

由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$ , ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ), 排成的  $m$  行  $n$  列的数表称为  $m$  行  $n$  列的矩阵, 简称  $m \times n$  矩阵, 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常可记为大写字母的  $A$ 、 $A_{m \times n}$ 、 $(a_{ij})$ 、 $(a_{ij})_{m \times n}$ .

- 元素为实数的矩阵称为实矩阵; 元素为复数的矩阵称为复矩阵; 元素为 0, 1 的矩阵称为 0-1 矩阵.

# 理解矩阵——4 个视角

- 一个矩阵 ( $m \times n$ ) 可以被视为 1 个矩阵,  $mn$  个数,  $n$  个列和  $m$  个行.

$$\left[ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{green} & \text{green} \\ \hline \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{pink} \\ \hline \text{pink} \\ \hline \text{pink} \end{array} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

1个矩阵

6个数

2个3维列向量

3个2维行向量

图: 从四个角度理解矩阵

# 特殊矩阵

- 实矩阵、复矩阵、0-1 矩阵:  $a_{ij}$  取实数、复数、0 或 1 的矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \pi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# 特殊矩阵

- 实矩阵、复矩阵、0-1 矩阵:  $a_{ij}$  取实数、复数、0 或 1 的矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \pi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 零矩阵:  $a_{ij} = 0, \forall i, j$ , 元素全为零的矩阵, 记为  $O$ .

$$O_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 特殊矩阵

- 行矩阵（行向量）：  $m = 1$ , 即只有一行的矩阵,

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

为避免书写混肴, 行矩阵也记为

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$



# 特殊矩阵

- 行矩阵（行向量）：  $m = 1$ ，即只有一行的矩阵，

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

为避免书写混肴，行矩阵也记为

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

- 列矩阵（列向量）：  $n = 1$ ，即只有一列的矩阵，

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

为书写方便，列矩阵常写为  $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ .

# 特殊矩阵

- 方阵.

$m = n$ , 即行数和列数相同的矩阵, 称为  $n$  阶方阵. 此时可记为  $A_n$ .

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 上 (下) 三角矩阵.

$a_{ij} = 0, i > j$ , 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能出现在主对角线上方.

$$A_{\text{上}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 上(下)三角矩阵.

$a_{ij} = 0, i > j$ , 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能出现在主对角线上方.

$$A_{\text{上}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0, i < j$ , 即主对角线上方元素全为零的方阵, 称为下三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能出现在主对角线下方.

$$A_{\text{下}} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 对角矩阵.

$a_{ij} = 0, i \neq j$ , 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

对角阵可简记为  $\Lambda = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ .

- 对角矩阵.

$a_{ij} = 0, i \neq j$ , 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

对角阵可简记为  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

- 单位矩阵.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

即对角元全为 1 的对角阵, 称为单位阵. 记为  $E_n$  或  $E$ .

- 对称矩阵.

$a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ , 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{\text{对称}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

● 对称矩阵.

$a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ , 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{\text{对称}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

● 反对称矩阵.

$a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$ , 即沿着对角线对称元素互为相反数的方阵, 称为反对称阵.

$$A_{\text{反对称}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$



# 行阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵：
  - 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
  - 每个台阶只有一行；
  - 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵:

- 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
- 每个台阶只有一行；
- 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 反例:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非零行的首个非零元为1；
  - 这些1所在的列其他元素都为 0.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵:

- 行阶梯形;
- 非零行的首个非零元为1;
- 这些1所在的列其他元素都为0.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}, \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix}_{m \times n}, (E_n \ O)_{m \times n}, E_n.$$

# 行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵:

- 行阶梯形;
- 非零行的首个非零元为1;
- 这些1所在的列其他元素都为0.

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{1} & \color{red}{0} & 2 & \color{red}{0} & -3 \\ 0 & \color{blue}{1} & -1 & \color{red}{0} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \color{blue}{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} \color{red}{E_r} & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}, \begin{pmatrix} \color{red}{E_m} \\ O \end{pmatrix}_{m \times n}, (\color{red}{E_n} \ O)_{m \times n}, \color{red}{E_n}.$$

- 行阶梯形矩阵  $\supset$  行最简形矩阵  $\supset$  标准形矩阵.

# 矩阵的应用-矩阵和线性方程组

例 (线性方程组的矩阵表示)

$m$  个方程  $n$  个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为  $AX = \beta$ .

令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为  $AX = \beta$ .

- $A$  称为线性方程组的系数矩阵;



令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为  $AX = \beta$ .

- $A$  称为线性方程组的系数矩阵;
- $B$  称为线性方程组的增广矩阵;

令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为  $AX = \beta$ .

- $A$  称为线性方程组的系数矩阵;
- $B$  称为线性方程组的增广矩阵;
- $X$  和  $\beta$  分别称为线性方程组的未知量矩阵和常数项矩阵.

## 矩阵的应用-矩阵和线性变换

例 (线性变换和矩阵)

给定一个  $n$  维向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (2)$$

则得到  $n$  维向量  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . 矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

## 矩阵的应用-矩阵和线性变换

例 (线性变换和矩阵)

给定一个  $n$  维向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (2)$$

则得到  $n$  维向量  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . 矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

- 线性变换和  $n$  阶方阵一一对应.

# 伸缩、投影、旋转、反射

- 设线性变换

$$Y = AX.$$

$A$  分别取

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\alpha\alpha^T}{|\alpha|^2} = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 y_0 \\ x_0 y_0 & y_0^2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad E - 2\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0^2 & -2x_0 y_0 \\ -2x_0 y_0 & 1 - 2y_0^2 \end{pmatrix}$$

则分别对应伸缩变换、在向量  $\alpha = (x_0, y_0)^T$  上的投影变换、逆时针旋转  $\theta$  的旋转变换、关于以  $\alpha = (x_0, y_0)^T$  为法向量的平面的反射变换.

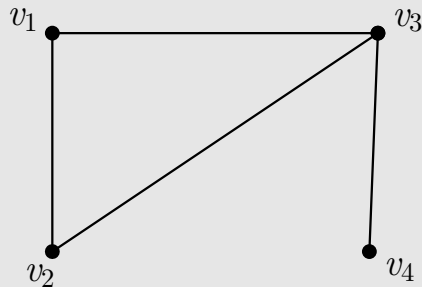
# 矩阵的应用-矩阵和图

例 (图的关联矩阵)

- 图 (Graph).

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{点 } v_i, v_j \text{ 之间有边,} \\ 0, & \text{点 } v_i, v_j \text{ 之间无边.} \end{cases}$$

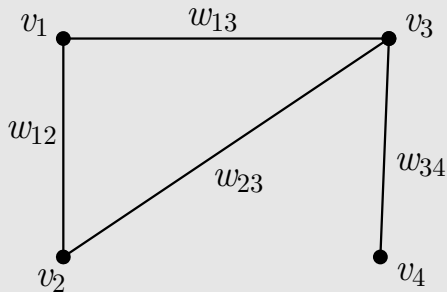
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## 例 (图的矩阵表示)

- 加权图 (Weighted Graph).

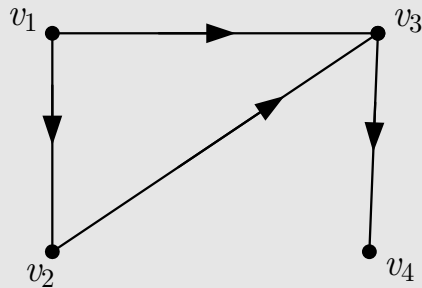
$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ w_{12} & 0 & w_{23} & 0 \\ w_{13} & w_{23} & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & w_{34} & 0 \end{pmatrix}$$



## 例 (图的矩阵表示)

- 有向图 (Direct Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

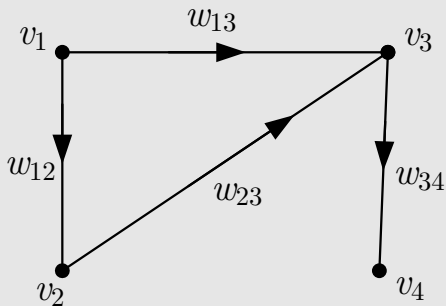




## 例 (图的矩阵表示)

- 有向加权图 (Direct Weighted Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



## 例 (数字图像的存储和处理)

- 数字图像在计算机等电子设备中都是以矩阵的形式存储和显示的。
  - 比如, 一张  $1600 \times 1000$  像素的图像在计算机中就是一个  $1600 \times 1000$  的矩阵.
    - 二值图像的矩阵的  $a_{ij}$  取值为 0 和 1;
    - 灰度图像的矩阵的  $a_{ij}$  取值为  $0 - 255$  (即一字节 8 位二进制数的范围);
    - 彩色图像的矩阵的  $a_{ij}$  取值为一个三原色向量  $(R, G, B)$ .
- 对图像的处理和编辑就是对矩阵的处理。
  - 算法思想一般是: 用一个低阶方阵 (称为模板或者算子) 去改变图像矩阵的每一个像素值.

- 不同方向的二阶 Laplace 检测算子:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4_{\Delta} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4_{\Delta} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8_{\Delta} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

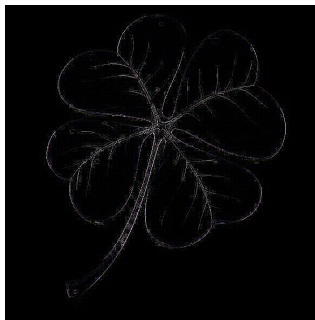


图: 边缘提取

# 矩阵的运算

- $A = B$
- $A + B$
- $\lambda \cdot A$
- $AB$
- $A^k$  &  $f(A)$
- $A^T$
- $|A|$
- $\text{tr}(A)$
- $A^*$

## 矩阵的相等

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $m = m'$ ,  $n = n'$ , 则称  $A$  和  $B$  是同型矩阵.

# 矩阵的相等

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $m = m'$ ,  $n = n'$ , 则称  $A$  和  $B$  是同型矩阵.
- 对于同型矩阵  $A, B$ ,

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$$

# 矩阵的相等

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $m = m'$ ,  $n = n'$ , 则称  $A$  和  $B$  是同型矩阵.
- 对于同型矩阵  $A, B$ ,

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$$

- 例:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .



## 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 若  $A, B$  同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

## 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 若  $A, B$  同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

- 性质:

- 交换律:  $A + B = B + A$
- 结合律:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

# 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 若  $A, B$  同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

- 性质:

- 交换律:  $A + B = B + A$
- 结合律:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

- 负矩阵:

$$-A \triangleq (-a_{ij})$$

# 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 若  $A, B$  同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

- 性质:

- 交换律:  $A + B = B + A$
- 结合律:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

- 负矩阵:

$$-A \triangleq (-a_{ij})$$

- 矩阵减法:  $A, B$  同型

$$A - B \triangleq A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$$

## 矩阵的数乘

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

# 矩阵的数乘

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .



$$\lambda A \triangleq (\lambda a_{ij})_{m \times n}$$

# 矩阵的数乘

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .



$$\lambda A \triangleq (\lambda a_{ij})_{m \times n}$$

● 性质：

- 结合律：  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- 矩阵对数的分配律：  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 数对矩阵的分配律：  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

## 矩阵的线性运算

对于两个同型矩阵  $A, B$ ,  $kA + lB$  称为矩阵  $A, B$  的线性运算.

例

已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

求解矩阵方程  $2A + 5X - B = 0$ .



# 矩阵的乘法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

# 矩阵的乘法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $n = m'$ , 则

$$AB \triangleq (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj})_{m \times n'}$$

$c_{ij}$  为  $A$  的第  $i$  行与  $B$  的第  $j$  列的内积.

# 矩阵的乘法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $n = m'$ , 则

$$AB \triangleq (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj})_{m \times n'}$$

$c_{ij}$  为  $A$  的第  $i$  行与  $B$  的第  $j$  列的内积.

- 性质:

- 不满足交换律:  $AB$  和  $BA$  可能不相等.
- 结合律:  $(AB)C = A(BC)$
- 数乘和矩阵乘法可交换:  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- 分配律:  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(B + C)A = BA + CA$
- **$EA = AE = A$**

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- $AB$  和  $BA$  可能不同型 (*i.e.* 不相等) .

## 矩阵乘法不满足交换律

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求  $AB$  和  $BA$ .

解：

## 矩阵乘法不满足交换律

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求  $AB$  和  $BA$ .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$





## 矩阵乘法不满足交换律

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求  $AB$  和  $BA$ .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

- $AB$  和  $BA$  同型当且仅当  $A$  和  $B$  是同阶方阵, 但即使同型也可能不相等.

## 矩阵乘法不满足交换律

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求  $AB$  和  $BA$ .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

- $AB$  和  $BA$  同型当且仅当  $A$  和  $B$  是同阶方阵, 但即使同型也可能不相等.
- 特别地, 对两个  $n$  阶方阵  $A, B$ , 若  $AB = BA$ , 则称方阵  $A$  和  $B$  是可交换的.

## 矩阵乘法不满足消去律

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

但

$$AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$$

且  $A \neq O, B \neq C$ .

# 矩阵的幂次

- 设  $A$  为  $n$  阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

# 矩阵的幂次

- 设  $A$  为  $n$  阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$

# 矩阵的幂次

- 设  $A$  为  $n$  阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$

例

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \quad \lambda = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

证明  $A^k = \lambda^{k-1} A$ .

# 矩阵多项式

- 矩阵多项式：将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的  $x$  换为方阵  $A$ ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注：规定  $A^0 = E$ .

# 矩阵多项式

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的  $x$  换为方阵  $A$ ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注: 规定  $A^0 = E$ .

- $(AB)^k = A^k B^k$ ,
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ,
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ,



# 矩阵多项式

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的  $x$  换为方阵  $A$ ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注: 规定  $A^0 = E$ .

- 只有  $A, B$  可交换时, 下面等式才成立.
  - $(AB)^k = A^k B^k$ ,
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ,
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ,

# 矩阵多项式

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的  $x$  换为方阵  $A$ ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注: 规定  $A^0 = E$ .

- 只有  $A, B$  可交换时, 下面等式才成立.
  - $(AB)^k = A^k B^k$ ,
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ,
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ,
- 矩阵  $A$  的任意两个矩阵多项式是可交换的,

$$f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

## 对角阵的多项式

设对角阵  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , 则

- $\Lambda^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k);$
- $\psi(\Lambda) = \text{diag}(\psi(\lambda_1), \dots, \psi(\lambda_n)).$

# 矩阵的转置

- 令  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 定义  $A$  的转置

$$A^T \triangleq (a_{ji})_{n \times m}$$

- 性质:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

例

计算  $(AB)^T$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 转置和对称矩阵

- $A$  为对称阵  $\Leftrightarrow A^T = A$ .
- $A$  为反对称阵  $\Leftrightarrow A^T = -A$ .

例

设  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $X^T X = 1$ ,

$$H = E - 2XX^T.$$

证明  $H$  为对称阵, 且  $HH^T = E$ .

证明:

# 方阵的行列式

- $A$  为  $n$  阶方阵, 则可以给出  $A$  的行列式, 记为  $\det A$  或  $|A|$ .
- 性质:
  - $|A^T| = |A|$
  - $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$
  - $|A + B| \neq |A| + |B|$

例

已知  $A, B, C$  为四阶方阵,  $|A| = 2, |B| = -3, |C| = 3$ , 求  $|-3AB^TC|$ .

- $A$  为  $n$  阶方阵,  $A$  的迹  $\text{tr}A$  定义为

$$\text{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

- 性质:

- $\text{tr}A^T = \text{tr}A$
- $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \text{tr}A$
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B$

- $A = B$
- $A + B$
- $\lambda \cdot A$
- $AB$
- $A^k$  &  $f(A)$
- $A^T$
- $|A|$
- $\text{tr} A$



# 作业

- Page<sub>44</sub>. 2; 3-(2 注意线性变换对应的矩阵为方阵); 5
- Page<sub>58</sub>-Page<sub>59</sub> 1; 2; 3-(1,2,5); 4; 6 ; 7; 8; 10
- Page<sub>65</sub>-Page<sub>66</sub> 3-(2,4); 4; 5-(1); 7; 8; 11

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2025 年 9 月 11 日