

线性代数-7

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学, 数学学院

回顾：矩阵的运算

- AB

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

- $|A|$

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$;

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
- 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
- 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;

- A^*

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
- 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;

- A^*

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$;

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
- 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;

- A^*

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$;
- $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
- 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;

- A^*

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$;
- $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;

- A^{-1}

回顾：矩阵的运算

- AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
- 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;

- A^*

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$;
- $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;

- A^{-1}

- A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;

回顾：矩阵的运算

• AB

- 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

• $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
- 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;

• A^*

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$;
- $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;

• A^{-1}

- A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

本次课内容

1. 矩阵分块和分块矩阵

2. 矩阵的等价关系

分块矩阵的概念

● 例:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \triangleq \left(\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

其中

$$A_{11} = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right),$$

$$A_{21} = \left(\begin{array}{cc} a_{31} & a_{32} \end{array} \right),$$

$$A_{12} = \left(\begin{array}{cc} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{array} \right),$$

$$A_{22} = \left(\begin{array}{cc} a_{33} & a_{34} \end{array} \right).$$

分块矩阵的概念

● 例:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \triangleq \left(\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

其中

$$A_{11} = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right),$$

$$A_{12} = \left(\begin{array}{cc} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{array} \right),$$

$$A_{21} = \left(\begin{array}{cc} a_{31} & a_{32} \end{array} \right),$$

$$A_{22} = \left(\begin{array}{cc} a_{33} & a_{34} \end{array} \right).$$

● 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵, 就是矩阵分块;

分块矩阵的概念

● 例:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \triangleq \left(\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

其中

$$A_{11} = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right),$$

$$A_{12} = \left(\begin{array}{cc} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{array} \right),$$

$$A_{21} = \left(\begin{array}{cc} a_{31} & a_{32} \end{array} \right),$$

$$A_{22} = \left(\begin{array}{cc} a_{33} & a_{34} \end{array} \right).$$

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是**矩阵分块**；
- **每个小矩阵被称为子块**；

分块矩阵的概念

● 例:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \triangleq \left(\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是**矩阵分块**；
- 每个小矩阵被称为**子块**；
- **以子块为元素的形式上的矩阵被称为分块矩阵**.

特殊的分块矩阵

- 列分块矩阵和行分块矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad a_{24} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \quad a_{34} \end{array} \right)$$

可分别记为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 和 $\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$.

特殊的分块矩阵

- 分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中 A 为 n 阶方阵, A_1, \dots, A_s 皆为方阵, 其余位置为 0 矩阵.

分块矩阵的运算规则和矩阵的运算规则类似

- 矩阵 A, B 同型, 且分法相同, 则

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $$\lambda \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法和分块矩阵的转置

- 矩阵 A, B 可乘, 且对任意 i, j , 子块 A_{ik}, B_{kj} 可乘, 则

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj}$.

- $$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda A_{11}^T & \cdots & \lambda A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{1r}^T & \cdots & \lambda A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵的行列式和逆矩阵

•

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|$$

• $\forall i = 1, \dots, s, |A_i| \neq 0$, 则 $|A| \neq 0$, i.e. A 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

再探矩阵的乘法

- 观点 1: A 行分块, B 列分块:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} \cdot (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1^T \beta_1 & \alpha_1^T \beta_2 & \cdots & \alpha_1^T \beta_n \\ \alpha_2^T \beta_1 & \alpha_2^T \beta_2 & \cdots & \alpha_2^T \beta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m^T \beta_1 & \alpha_m^T \beta_2 & \cdots & \alpha_m^T \beta_n \end{pmatrix} = C \end{aligned}$$

其中 $c_{ij} = \alpha_i^T \beta_j = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}$.

再探矩阵的乘法

例

实矩阵 $A = O$ 的充分必要条件是方阵 $A^T A = O$.

再探矩阵的乘法

例

实矩阵 $A = O$ 的充分必要条件是方阵 $A^T A = O$.

- $A^T A$ 为对称矩阵.

再探矩阵的乘法

- 观点 2: A 不分块, B 列分块:

$$AB = A \cdot (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$

- 矩阵方程 $AX = B$, 将 X, B 写为列分块的形式,

$$\begin{aligned} AX &= A \cdot (X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n) = (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n) \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = B \end{aligned}$$

此时矩阵方程可以看成 n 个线性方程组.

再探矩阵的乘法

- 观点 3: A 列分块, B 行分块:

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 \beta_1^T + \alpha_2 \beta_2^T + \cdots + \alpha_n \beta_n^T \end{aligned}$$

- 例:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (3 \quad 2) + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} (1 \quad 0) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

线性方程组的向量表示方法

考虑线性方程组 $AX = \beta$. 将 A 列分块, X 行分块, 则

$$\begin{aligned} AX &= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta \end{aligned}$$

上式称为线性方程组的向量表达.

- $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$ 称为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的一个线性组合.

第三章. 矩阵的初等变换与线性方程组

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

(4)

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} \div 2]{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{2} \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -2 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (2)$$

(4)

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} \div 2]{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{2} \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -2 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} - 2\textcircled{1}]{\textcircled{2} - 2\textcircled{1}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ -3x_2 + 3x_3 & = -6 & \textcircled{2} \\ -5x_2 + 5x_3 & = -10 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (3)$$

(4)

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} \div 2]{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{2} \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -2 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} - 2\textcircled{1}]{\textcircled{2} - 2\textcircled{1}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ -3x_2 + 3x_3 & = -6 & \textcircled{2} \\ -5x_2 + 5x_3 & = -10 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (3)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} + 5\textcircled{2}]{\textcircled{2} \div (-3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{2} \\ 0 & = 0 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (4)$$

- 取 x_3 为自由未知数, 解得

$$\begin{cases} x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 2 + x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = c$, 则

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + 2 \\ c + 2 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数.

- $E_i \leftrightarrow E_j$ 、 $k \cdot E_i$ 和 $E_i + k \cdot E_j$ 三种变换不改变方程的解.

矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} &\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 \times (-\frac{1}{3})]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

矩阵的初等变换

例 (矩阵的三种初等行变换)

- 对换两行; $(r_i \leftrightarrow r_j)$
- 非零数 k 乘以某一行; $(r_i \times k)$
- 某行的 k 倍加到另外一行. $(r_i + kr_j)$

矩阵的初等变换

例 (矩阵的三种初等行变换)

- 对换两行; $(r_i \leftrightarrow r_j)$
 - 非零数 k 乘以某一行; $(r_i \times k)$
 - 某行的 k 倍加到另外一行. $(r_i + kr_j)$
- 类似, 关于列, 可以定义矩阵的初等列变换. 初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

矩阵的初等变换

例 (矩阵的三种初等行变换)

- 对换两行; $(r_i \leftrightarrow r_j)$
 - 非零数 k 乘以某一行; $(r_i \times k)$
 - 某行的 k 倍加到另外一行. $(r_i + kr_j)$
-
- 类似, 关于列, 可以定义矩阵的初等列变换. 初等行变换和初等列变换统称为初等变换.
 - 三种初等变换都是可逆的, 且逆变换是相同类型变换.
 - $r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow r_i \leftrightarrow r_j$;
 - $r_i \times k \Rightarrow r_i \times \frac{1}{k}$;
 - $r_i + kr_j \Rightarrow r_i - kr_j$;

矩阵的等价

- 若矩阵 A 可以经过有限初等行变换变为矩阵 B , 则称矩阵 A 和矩阵 B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等列变换变为矩阵 B , 则称矩阵 A 和矩阵 B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等变换变为矩阵 B , 则称矩阵 A 和矩阵 B 等价, 记为 $A \sim B$.

矩阵的等价

- 若矩阵 A 可以经过有限初等行变换变为矩阵 B , 则称矩阵 A 和矩阵 B **行等价**, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等列变换变为矩阵 B , 则称矩阵 A 和矩阵 B **列等价**, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等变换变为矩阵 B , 则称矩阵 A 和矩阵 B **等价**, 记为 $A \sim B$.

等价关系具有以下三种性质:

- 反身性
- 对称性
- 传递性.

- 1、 矩阵分块和分块矩阵
- 2、 矩阵的初等变换和等价

练习

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $|A^5|$ 和 A^4 .

练习

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $|A^5|$ 和 A^4 .

Answer: $|A^5| = 40^5$,

$$A = \begin{pmatrix} 10^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & -2^6 & 2^4 \end{pmatrix}$$

- 1、 矩阵分块和分块矩阵
- 2、 矩阵的初等变换和等价

作业

- P55. 25、26、28-1.

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2022 年 9 月 21 日