

# 线性代数-3

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 8 月 29 日

# 本次课内容

1. 行列式的展开
2. Vandermonde 行列式
3. 行列式与线性方程组

- 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$
$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}M_{1n}$$

- 行列式的五条性质

- 1)  $D^T = D$ .
- 2) 交换两行 (列), 则行列式变号.
- 3) 某行 (列) 乘数  $k$ , 则行列式乘数  $k$ .
- 4) 一行 (列) 可加, 则行列式可加.
- 5) 某行 (列) 的  $k$  倍加到另一行 (列) 上去, 则行列式不变.

- 行列式的三种操作

- $r_i \leftrightarrow r_j$ .
- $r_i \times k$ .
- $r_j + r_i \times k$ .

# 行列式的展开定理

## 定理 (行列式的展开)

行列式等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

其中  $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ .

**注:**  $i = 1$  时, 即  $n$  阶行列式的归纳定义.

# 余子式和代数余子式

- 在  $n$  阶行列式中, 划去  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列划后, 留下来的  $n-1$  阶行列式叫做元素  $a_{ij}$  的余子式(minor), 记作  $M_{ij}$ .

# 余子式和代数余子式

- 在  $n$  阶行列式中, 划去  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列划后, 留下来的  $n-1$  阶行列式叫做元素  $a_{ij}$  的余子式(minor), 记作  $M_{ij}$ .
- $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$  称为  $a_{ij}$  的代数余子式(algebraic minor).

# 余子式和代数余子式

- 在  $n$  阶行列式中, 划去  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列划后, 留下来的  $n-1$  阶行列式叫做元素  $a_{ij}$  的余子式(minor), 记作  $M_{ij}$ .
- $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  称为  $a_{ij}$  的代数余子式(algebraic minor).
- 例如四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

的  $a_{32}$  的余子式和代数余子式

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}.$$



# 行列式的降阶

## 引理

一个  $n$  阶行列式，如果其中第  $i$  行所有元除  $a_{ij}$  外都为零，那么这行列式等于  $a_{ij}$  与它的代数余子式的乘积，即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

# 行列式的降阶

## 引理

一个  $n$  阶行列式, 如果其中第  $i$  行所有元除  $a_{ij}$  外都为零, 那么这行列式等于  $a_{ij}$  与它的代数余子式的乘积, 即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

## 例

## 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

# 行列式的展开

## 定理 (行列式的展开)

行列式等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

# 行列式的展开

## 定理 (行列式的展开)

行列式等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

## 推论

$i \neq j$  时,

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

$$(a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0)$$

## 例题：友矩阵的行列式

例

证明

$$D = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

证明：

## 例题 (★)

例  
设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

求  $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$  和  $M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41}$ .

解:

# Vandermonde 行列式

定理

证明 *Vandermonde* 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

证明:

# 行列式与线性方程组

设含有  $n$  个未知量  $n$  个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$D$  称为线性方程组的系数行列式.



# 行列式与线性方程组

令

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 (Cramer 法则)

若系数行列式  $D \neq 0$ , 则线性方程组 (1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

例

用 Cramer 法则求解线性方程组

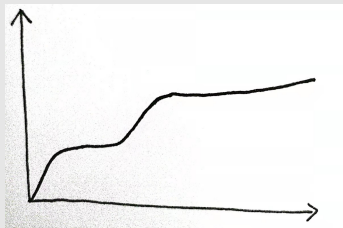
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

解:

## 补充：Vandermonde 行列式的一个背景

### 例 (以物换物)

现有两个原始部落，一个部落只有野兔，另一个部落只有野鸡。两个部落一直都有交换野兔和野鸡的传统。两部落兔鸡交换比例大致如下：



现要求建立一个一元三次函数的交易模型。

- 行列式的展开定理

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

- Vandermonde 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

- Cramer 法则.

# 作业

- 按时完成线上课程任务.
- P22-23. 6-(4)、8-(2)(3)、9.

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)