Lec-7. 正态分布、随机变量的函数分布

主讲教师：吴利苏 **(wulisu@sdust.edu.cn)**
主　　页：wulisu.cn

目录

正态分布 (高斯分布 Gauss)

定义

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数, 则称 X 服从参数 μ,σ 的正态分布(或高斯分布), 记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

- 非负性：$f(x) \geq 0.$
- 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

证明：令 $\frac{(x-\mu)}{\sigma}=t$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

记 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, 则

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}dtdu.$$

取极坐标变换, 令 $t=r\cos\theta$, $u=r\sin\theta$, 则

$$I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta=2\pi.$$

$I>0$, 则 $I=\sqrt{2\pi}$, 故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$.

性质 (正态分布的性质)

(1) $f(x)$ 关于 $x = \boldsymbol{\mu}$ 对称, 故 $\forall h > 0$,

$$P\{\boldsymbol{\mu} - h < X \leq \boldsymbol{\mu}\} = P\{\boldsymbol{\mu} < X \leq \boldsymbol{\mu} + h\}.$$

性质 (正态分布的性质)

(1) $f(x)$ 关于 $x=\boldsymbol{\mu}$ 对称, 故 $\forall h>0$,

$$P\{\boldsymbol{\mu}-h<X\leq\boldsymbol{\mu}\}=P\{\boldsymbol{\mu}<X\leq\boldsymbol{\mu}+h\}.$$

(2) 当 $x\leq\boldsymbol{\mu}$ 时, $f(x)$ 严格单调增.

性质 (正态分布的性质)

(1) $f(x)$ 关于 $x=\boldsymbol{\mu}$ 对称, 故 $\forall h>0$,

$$P\{\boldsymbol{\mu}-h<X\leq\boldsymbol{\mu}\}=P\{\boldsymbol{\mu}<X\leq\boldsymbol{\mu}+h\}.$$

(2) 当 $x\leq\boldsymbol{\mu}$ 时, $f(x)$ 严格单调增.

(3)

$$f_{\max}=f(\boldsymbol{\mu})=\frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}},$$

且 x 离 $\boldsymbol{\mu}$ 越远, $f(x)$ 值越小, 落在 x 附近的概率越小.

性质 (正态分布的性质)

(4) 在 $x = \boldsymbol{\mu} \pm \boldsymbol{\sigma}$ 处有拐点.

性质 (正态分布的性质)

(4) 在 $x = \boldsymbol{\mu} \pm \boldsymbol{\sigma}$ 处有拐点.

(5) 以 x 轴为渐近线, 即 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

性质 (正态分布的性质)

(4) 在 $x = \boldsymbol{\mu} \pm \boldsymbol{\sigma}$ 处有拐点.

(5) 以 x 轴为渐近线, 即 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

(6) 当 $\boldsymbol{\sigma}$ 固定, 改变 $\boldsymbol{\mu}$ 的大小时, $f(x)$ 的图像形状不变, 整体沿 x 轴平移. $\boldsymbol{\mu}$ 为位置参数, 决定对称轴的位置.

性质 (正态分布的性质)

(4) 在 $x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点.

(5) 以 x 轴为渐近线, 即 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

(6) 当 σ 固定, 改变 μ 的大小时, $f(x)$ 的图像形状不变, 整体沿 x 轴平移. μ 为位置参数, 决定对称轴的位置.

(7) 当 μ 固定, 改变 σ 的大小时, $f(x)$ 的图像形状变, σ 越小, 图像越高越瘦; σ 越大, 图像越胖. σ 为尺度参数, 决定曲线分散程度.

正态分布的用途

- 自然界和人类社会中很多现象可以看成正态分布. 比如, 人的身高, 体重, 医学检验指标, 测量误差.
- 正态分布是最常见的一种分布. 一个变量如果受到大量微小的, 独立的随机因素的影响, 则一般是正态随机变量.
- 二项分布、泊松分布的极限分布是正态分布. (第五章)

正态分布的概率计算

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的分布函数为

$$P\{X \leq x\} = F(x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

正态分布的概率计算

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
P\{X \le x\} &= F(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad \text{(无初等原函数)} \\
&= ?
\end{aligned}
$$

正态分布的概率计算

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
P\{X \le x\} &= F(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad \text{(无初等原函数)} \\
&= ?
\end{aligned}
$$

- 用 Matlab, excel, R 语言等;
- 询问 Deepseek, Chatgpt;
- 数值积分;
- 转为标准正态分布, 查标准正态分布表.

标准正态分布

- 若 $Z \sim N(0,1)$, 称 Z 服从标准正态分布.

标准正态分布

- 若 $Z \sim N(0,1)$, 称 Z 服从标准正态分布.
- Z 的概率密度函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

标准正态分布

- 若 $Z \sim N(0,1)$, 称 Z 服从标准正态分布.
- Z 的概率密度函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- 分布函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

标准正态分布

- 若 $Z \sim N(0,1)$, 称 Z 服从标准正态分布.
- Z 的概率密度函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- 分布函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

性质 (标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

性质 (标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

证: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
P\{Z \le x\} &= P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\} = P\{X \le \mu + \sigma x\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&\xlongequal{令 u=\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \Phi(x).
\end{aligned}
$$

故 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. □

推论

若 $X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$, 则

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{\frac{X - \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}} \leq \frac{x - \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\}$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(\frac{x - \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}).$$

推论

若 $X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$, 则

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\frac{X-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}} \le \frac{x-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\}$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(\frac{x-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}).$$

对 $\forall (x_1, x_2]$, 有

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{\frac{x_1-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}} < \frac{X-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}} \le \frac{x_2-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\}$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(\frac{x_2-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}) - \boldsymbol{\Phi}(\frac{x_1-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}).$$

证:

$$\begin{aligned}
P\{x_1 < X \le x_2\} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_{-\infty}^{\frac{x_1-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma}). \qquad \square
\end{aligned}$$

例

用天平称一实际重量为 μ 的物体, 天平得读数为随机变量 X, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求读数与 μ 的偏差在 3σ 范围内的概率.

例

用天平称一实际重量为 μ 的物体, 天平得读数为随机变量 X, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求读数与 μ 的偏差在 3σ 范围内的概率.

解:

$$\begin{aligned} P\{|X-\mu| < 3\sigma\} &= P\{-3\sigma < X-\mu < 3\sigma\} \\ &= P\{-3 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 3\} \\ &= \Phi(3) - \Phi(-3) \\ &= 2\Phi(3) - 1 \\ &\approx 0.9974. \end{aligned}$$

在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 内几乎是肯定的概率.

$\boldsymbol{\sigma}$ 法则

$X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$, 则

- $P\{|X-\boldsymbol{\mu}| < \boldsymbol{\sigma}\} = \boldsymbol{\Phi}(1) - \boldsymbol{\Phi}(-1) = 68.26\%$;
- $P\{|X-\boldsymbol{\mu}| < 2\boldsymbol{\sigma}\} = \boldsymbol{\Phi}(2) - \boldsymbol{\Phi}(-2) = 95.44\%$;
- $P\{|X-\boldsymbol{\mu}| < 3\boldsymbol{\sigma}\} = \boldsymbol{\Phi}(3) - \boldsymbol{\Phi}(-3) = 99.74\%$.

例

将一温度调节器放置在储存着某种液体的容器内, 调节器调整在 d ℃, 液体的温度 X (以 ℃ 计) 是一个随机变量, 且 $X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1) 若 $d = 90$ ℃, 求 X 小于 89 ℃ 的概率.

(2) 若要求保持液体的温度至少为 80 ℃ 的概率不低于 0.99, 问 d 至少为多少?

解: (1)

$$
\begin{aligned}
P\{X < 89\} &= P\{\frac{X-90}{0.5} < \frac{89-90}{0.5}\} \\
&= \boldsymbol{\Phi}(-2) = 1 - \boldsymbol{\Phi}(2) \\
&\approx 0.0228.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
P\{X \geq 80\} &= P\{\frac{X-d}{0.5} \geq \frac{80-d}{0.5}\} \\
&= 1 - P\{\frac{X-d}{0.5} < \frac{80-d}{0.5}\} \\
&= 1 - \boldsymbol{\Phi}(\frac{80-d}{0.5}) \geq 0.99.
\end{aligned}
$$

即 $\boldsymbol{\Phi}(\frac{d-80}{0.5}) \geq 0.99 = \boldsymbol{\Phi}(2.327)$, 故 $d \geq 81.1635$. $\square$

随机变量的函数的分布

- 离散型随机变量的函数的分布:
- 连续型随机变量的函数的分布.

随机变量的函数的分布

- 已知 X 的分布, g 为连续函数. 如何求 $Y = g(X)$ 的分布?

随机变量的函数的分布

- 已知 X 的分布，g 为连续函数. 如何求 $Y = g(X)$ 的分布?
- 例如：把圆半径的测量值记为随机变量 X, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 问圆的面积 $Y = \pi X^2$ 的分布是?

随机变量的函数的分布

- 已知 X 的分布, g 为连续函数. 如何求 $Y = g(X)$ 的分布?
- 例如：把圆半径的测量值记为随机变量 X, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 问圆的面积 $Y = \pi X^2$ 的分布是?
- 类似，将在第三章第五节中学习两个随机变量的函数分布.

例

设 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	0.1	0.6	0.3

$Y = X^2$, 求 Y 的分布律.

解: X 的取值为 $-1, 0, 1$, 则 $Y = X^2$ 可能的取值为 $0, 1$.

又 $\{Y = 0\} = \{X = 0\}$,

$\{Y = 1\} = \{X = 1\} \cup \{X = -1\}$, 所以

$P\{Y = 0\} = 0.6$, $P\{Y = 1\} = 0.4$,

X	0	1
P	0.6	0.4

$\square$

离散型随机变量函数的分布函数

设离散型随机变量 X 的分布律为：

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$
P_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$

则 $Y=g(X)$

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\ldots$	$g(x_k)$	$\ldots$
P_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$

若 $g(x_k)$ 给出 Y 的所有可能取值，再利用等价事件来给出概率分布函数 $P\{Y=y_j\}=P\{X\in D\}$.

例

X	-1	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

例

X	-1	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

解:

Y	-4	-1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\square$

例

设 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{8} & 0<x<4;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$ 求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

例

设 X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 < x < 4; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$ 求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度.

思路：先求 Y 的分布函数，再求导得概率密度.

$$\frac{\mathrm{d}F(g(y))}{\mathrm{d}y} = \left[\int_{-\infty}^{g(y)} f(x)\,dx\right]' = f(g(y)) \cdot g'(y).$$

解: 先求 $Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X+8 \le y\}$$
$$= P\{X \le \frac{y-8}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,dx$$

由分布函数 F_Y 求 f_Y.

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \left[\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,dx\right]' = f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\left(\frac{y-8}{2}\right)'$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{8}\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\left(\frac{y-8}{2}\right)' & 0 < \frac{y-8}{2} < 4; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{y-8}{32} & 8 < y < 16; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

□

例

设 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 2x^3 e^{-x^2} & x \geq 0. \end{cases}$$

求 $Y = X^2$ 和 $Y = 2X + 3$ 的概率密度.

解: $(Y = X^2)$

显然 $Y \leq 0$,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$$

$$= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = P\{X \leq \sqrt{y}\} = \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(x)\, dx.$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ ye^{-y} & y \geq 0. \end{cases}$$

$(Y = 2X + 3)$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X + 3 \le y\}$$
$$= P\{X \le \frac{y-3}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} f_X(x)\,dx$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\frac{y-3}{2}) \cdot (\frac{y-3}{2})'$$
$$= \begin{cases} 0 & y < 3; \\ (\frac{y-3}{2})^3 e^{-(\frac{y-3}{2})^2} & y \ge 3. \end{cases} \qquad \square$$