线性代数-15

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 1 日

本次课内容

1. $AX = 0$ 的解的结构

2. $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的解的结构

齐次线性方程组解的结构

$$AX = 0 \tag{1}$$

的全体解 $S = \{X \mid AX = 0\}$ 构成一个向量空间. 即 S 对向量加法和数乘运算封闭:

- 若 $A\xi_1 = 0$, $A\xi_2 = 0$, 则 $A(\xi_1 + \xi_2) = 0$;
- 若 $A\xi = 0$, 则对任意 $k \in \mathbb{R}$, $A(k\xi) = 0$.

基础解系和通解

- 设 S 为 $AX=0$ 的解空间，$S_0:\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$ 为 S 的一个基.
  则 $\forall X\in S$,

$$X=k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\xi}_t, k_1,\cdots,k_t\in\mathbb{R}.$$

基础解系和通解

- 设 S 为 $AX=0$ 的解空间，$S_0:\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$ 为 S 的一个基. 则 $\forall X\in S$,

$$X=k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\xi}_t, k_1,\cdots,k_t\in\mathbb{R}.$$

- 解空间 S 的基 (最大无关组) 称为 $AX=0$ 的一个基础解系.

$$X=k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\xi}_t, k_1,\cdots,k_t\in\mathbb{R}$$

称为 $AX=0$ 的通解.

- 基础解系中线性无关的向量的个数:

$$t=n-R(A),$$

其中 n 为未知量个数，A 为系数矩阵.

定理 (定理 8)

$R(A_{m\times n}) = r$，则 $AX = 0$ 的解空间 S 的维数 $\dim S = n - r$.

定理 (定理 8)

$R(A_{m\times n})=r$, 则 $AX=0$ 的解空间 S 的维数 $\dim S=n-r$.

基础解系中线性无关的向量的个数:

$$
\begin{aligned}
t &= R_{S_0} && \text{基 } S_0 \text{ 中向量的个数}\\
&= \dim S && \text{解空间 } S \text{ 的维数}\\
&= \text{自由未知量的个数}\\
&= \text{除去行最简形中每行首个非零元所在的列, 剩余的列数}\\
&= n-R(A).
\end{aligned}
$$

例 (例 1)

求

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_5 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 & = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 & = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

求解步骤:

1. 对系数矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$;
4. 得通解 $X = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$, $\forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

注

- 基础解系本质上是基和最大无关组, 所以取法不唯一.
- 自由未知量的选取不唯一, 但一般取首非零元所在的列之外的列，对应的未知量.
- 自由未知量的取值不唯一, 但一般取自由未知量的其中一个为 1, 其余为 0，这样更容易计算.

例 2

例

设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$, 证明 $R(A)+R(B)\le n$.

例

n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解, 证明 $R(A)=R(B)$.

例

n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解，证明 $R(A)=R(B)$.

- $$\begin{tikzcd}[column sep=large]
A \overset{r}{\sim} B \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & A \sim B \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{同型}"] & R(A)=R(B) \\
AX=0 \text{ 和 } BX=0 \text{ 同解} \arrow[rrru, bend right] & & &
\end{tikzcd}$$

例

证明 $R(A^TA)=R(A)$.

设 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 非齐次线性方程组

$$AX = \boldsymbol{\beta} \tag{2}$$

的全体解集 S 不是一个向量空间, 满足:

- 若 $A\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\beta}, A\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\beta}$, 则 $A(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) = 0$.
- 若 $A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}, A\boldsymbol{\xi} = 0$, 则 $A(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\beta}$.

非齐次线性方程组解的通解

$AX = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为:

$$X = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}^*, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

非齐次线性方程组解的通解

$AX=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为:

$$X=k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*,\forall k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$$

- 其中 $X=\boldsymbol{\eta}^*$ 称为 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的特解, 满足 $A\boldsymbol{\eta}^*=\boldsymbol{\beta}$;
- $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.

$AX=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为:

$$X=k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*,\forall k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$$

- 其中 $X=\boldsymbol{\eta}^*$ 称为 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的特解, 满足 $A\boldsymbol{\eta}^*=\boldsymbol{\beta}$;
- $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.
- $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\Leftrightarrow AX=0$ 的通解 $+AX=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解.

例 (例 4)

求解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 & = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

求解步骤:

1. 对增广矩阵 $(A, \boldsymbol{\beta})$ 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 取自由未知量全为 0, 解 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 得到一个特解 $\boldsymbol{\eta}^*$;
4. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 解 $AX = 0$ 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$;
5. 得通解 $X = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}^*, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

注

- 特解的取法并不唯一，但取自由未知量全为 0，更容易计算.
- 基础解系的取法不唯一.
- 自由未知量的选取不唯一，但一般取首非零元列之外的列对应未知量为自由未知量.
- 自由未知量的取值不唯一，但一般取自由未知量的其中一个为 1，其余为 0，这样更容易计算.

例

设 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 是一个四元线性方程组, $R(A)=3$,
$A\boldsymbol{\alpha}_1=A\boldsymbol{\alpha}_2=A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$, 若

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\4\end{pmatrix}, 3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

求 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

例 6

例

设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是一个三阶矩阵，$R(A)=2$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$. 求 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的通解，其中 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

例

求解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

算法步骤:

1. LU 分解:

$$A = LU,$$

   其中 L 是对角线全为 1 的下三角矩阵, U 是上三角矩阵.
2. 令 $Y = UX$, 解 $LY = \beta$.
3. 解 $UX = Y$.

小结

- 求解 $AX=0$;
  求解步骤:
  1. 对系数矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形;
  2. 写出同解方程组;
  3. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 得基础解系 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$;
  4. 得通解 $X=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$, $\forall k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$.
- 求解 $AX=\beta$
  求解步骤:
  1. 对增广矩阵 (A,β) 进行初等行变换化为行最简形;
  2. 写出同解方程组;
  3. 取自由未知量全为 0, 解 $AX=\beta$ 得到一个特解 η^*;
  4. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 解 $AX=0$ 得基础解系 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$;
  5. 得通解 $X=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$, $\forall k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$.

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = 0$	$A_{m\times n}X_n = 0$	$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$
是否有非零解?	$R(A) < n$?	向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 线性相关?
有非零解	$R(A) < n$	线性相关
有唯一零解	$R(A) = n$	线性无关

- $AX = 0$ 的通解

$$X = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

其中 $r = R(A)$.

非齐次线性方程组小结

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	$A_{m\times n}X_n = \boldsymbol{\beta}_m$	$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$
是否有解?	$R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A)$?	$\boldsymbol{\beta}$ 由向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 线性表示?
无解	$R(A,\boldsymbol{\beta}) > R(A)$	No
有解	$R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A)$	Yes
有唯一解	$R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A) = n$ A 列满秩	Yes，且表示唯一
有唯一解 $(m=n)$	$R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A) = n$ A 可逆	Yes，且表示唯一
有无穷解	$R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A) < n$	Yes，且表示不唯一

- $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的通解

$$X = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}^*, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

第九周作业

- Page_{166}： 2(2)(4), 3(2), 6, 7
- Page_{175}: 3, 5
- Page_{178}： 8, 10, 11
- 求下面非齐次线性方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 & = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = -1. \end{cases}$$

- 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化为标准正交基, 并求 $\boldsymbol{\beta}$ 在这组标准正交基下的坐标.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 1 日