

# 线性代数-14

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 20 日

# 本次课内容

1.  $AX = 0$  的解的结构

2.  $AX = \beta$  的解的结构

# 齐次线性方程组解的结构

$$AX = 0 \quad (1)$$

的全体解  $S = \{X \mid AX = 0\}$  构成一个向量空间. 即  $S$  对向量加法和数乘运算封闭:

- 若  $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0$ , 则  $A(\xi_1 + \xi_2) = 0$ ;
- 若  $A\xi = 0$ , 则对任意  $k \in \mathbb{R}$ ,  $A(k\xi) = 0$ .

# 基础解系和通解

- 设  $S$  为  $AX=0$  的解空间,  $S_0: \xi_1, \dots, \xi_t$  为  $S$  的一个基.  
则  $\forall X \in S$ ,

$$X = k_1 \xi_1 + \dots + k_t \xi_t, k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}.$$

# 基础解系和通解

- 设  $S$  为  $AX=0$  的解空间,  $S_0: \xi_1, \dots, \xi_t$  为  $S$  的一个基.  
则  $\forall X \in S$ ,

$$X = k_1 \xi_1 + \dots + k_t \xi_t, k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}.$$

- 解空间  $S$  的基 (最大无关组) 称为  $AX=0$  的一个基础解系.

$$X = k_1 \xi_1 + \dots + k_t \xi_t, k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}$$

称为  $AX=0$  的通解.

- 基础解系中线性无关的向量的个数:

$$t = n - R(A),$$

其中  $n$  为未知量个数,  $A$  为系数矩阵.

# 基础解系和通解

定理 (定理 7)

$R(A_{m \times n}) = r$ , 则  $AX = 0$  的解空间  $S$  的维数  $\dim S = n - r$ .

# 基础解系和通解

定理 (定理 7)

$R(A_{m \times n}) = r$ , 则  $AX = 0$  的解空间  $S$  的维数  $\dim S = n - r$ .

基础解系中线性无关的向量的个数:

$t = R_{S_0}$       基  $S_0$  中向量的个数

$= \dim S$       解空间  $S$  的维数

$=$  自由未知量的个数

$=$  除去行最简形中每行首个非零元所在的列, 剩余的列数

$= n - R(A)$ .

例 (例 22)

求

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

求解步骤:

1. 对系数矩阵  $A$  进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 得基础解系  $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ ;
4. 得通解  $X = k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$ .



- 基础解系本质上是基和最大无关组, 所以取法不唯一.
- 自由未知量的选取不唯一, 但一般取首非零元列之外的对应未知量为自由未知量.
- 自由未知量的取值不唯一, 但一般取自由未知量的其中一个为 1, 其余为 0, 这样更容易计算.

## 例 23

例

设  $A_{m \times n} B_{n \times l} = O$ , 证明  $R(A) + R(B) \leq n$ .

## 例 24

例

$n$  元齐次线性方程组  $AX=0$  和  $BX=0$  同解, 证明  $R(A) = R(B)$ .

## 例 24

例

$n$  元齐次线性方程组  $AX=0$  和  $BX=0$  同解, 证明  $R(A) = R(B)$ .

- 设矩阵  $A, B$  同型, 则

$$A \overset{r}{\sim} B \Rightarrow AX=0 \text{ 和 } BX=0 \text{ 同解} \Rightarrow R(A) = R(B) \Leftrightarrow A \sim B$$

## 例 25

例

证明  $R(A^T A) = R(A)$ .

## 非齐次线性方程组解的结构

设  $\beta \neq 0$ , 非齐次线性方程组

$$AX = \beta \quad (2)$$

的全体解集  $S$  不是一个向量空间, 满足:

- 若  $A\eta_1 = \beta, A\eta_2 = \beta$ , 则  $A(\eta_1 - \eta_2) = 0$ .
- 若  $A\eta = \beta, A\xi = 0$ , 则  $A(\eta + \xi) = \beta$ .

# 非齐次线性方程组解的通解

$AX = \beta$  的通解为:

$$X = k_1 \xi_1 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

# 非齐次线性方程组解的通解

$AX = \beta$  的通解为:

$$X = k_1 \xi_1 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

- 其中  $X = \eta^*$  称为  $AX = \beta$  的特解, 满足  $A\eta^* = \beta$ ;
- $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$  是齐次线性方程组  $AX = 0$  的一个基础解系.



# 非齐次线性方程组解的通解

$AX = \beta$  的通解为:

$$X = k_1 \xi_1 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

- 其中  $X = \eta^*$  称为  $AX = \beta$  的特解, 满足  $A\eta^* = \beta$ ;
- $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$  是齐次线性方程组  $AX = 0$  的一个基础解系.
- $AX = \beta$  的通解  $\Leftrightarrow AX = 0$  的通解 +  $AX = \beta$  的一个特解.

### 例 (例 26)

求解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

求解步骤:

1. 对增广矩阵  $(A, \beta)$  进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 取自由未知量全为 0, 解  $AX = \beta$  得到一个特解  $\eta^*$ ;
4. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 解  $AX = 0$  得基础解系  $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ ;
5. 得通解  $X = k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$ .

- 特解的取法并不唯一，但取自由未知量全为 0，更容易计算.
- 基础解系的取法不唯一.
- 自由未知量的选取不唯一，但一般取首非零元列之外的对应未知量为自由未知量.
- 自由未知量的取值不唯一，但一般取自由未知量的其中一个为 1，其余为 0，这样更容易计算.

## 补充：计算机如何求解线性方程组-LU 分解

例  
求解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

算法步骤：

1. LU 分解：将系数矩阵  $A$  表示为一个单位下三角矩阵和一个上三角矩阵的乘积，

$$A = LU,$$

2. 令  $Y = UX$ , 解  $LY = \beta$ .
3. 解  $UX = Y$ .

# 小结

- 求解  $AX=0$ ;

求解步骤:

1. 对系数矩阵  $A$  进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 得基础解系  $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ ;
4. 得通解  $X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$ .

- 求解  $AX=\beta$

求解步骤:

1. 对增广矩阵  $(A, \beta)$  进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 取自由未知量全为 0, 解  $AX=\beta$  得到一个特解  $\eta^*$ ;
4. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 解  $AX=0$  得基础解系  $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ ;
5. 得通解  $X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$ .

# 齐次线性方程组小结

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = 0$	$A_{m \times n}X_n = 0$	$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$
是否有非零解?	$R(A) < n?$	向量组 $\{\alpha_i\}$ 线性相关?
有非零解	$R(A) < n$	线性相关
有唯一零解	$R(A) = n$	线性无关

●  $AX = 0$  的通解

$$X = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

其中  $r = R(A)$ .

# 非齐次线性方程组小结

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	$A_{m \times n}X_n = \beta_m$	$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$
是否有解?	$R(A, \beta) = R(A)?$	$\beta$ 由向量组 $\{\alpha_i\}$ 线性表示?
无解	$R(A, \beta) > R(A)$	No
有解	$R(A, \beta) = R(A)$	Yes
有唯一解	$R(A, \beta) = R(A) = n$ $A$ 列满秩	Yes, 且表示唯一
有唯一解 ( $m = n$ )	$R(A, \beta) = R(A) = n$ $A$ 可逆	Yes, 且表示唯一
有无穷解	$R(A, \beta) = R(A) < n$	Yes, 且表示不唯一

●  $AX = \beta$  的通解

$$X = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

- Page<sub>80</sub>: 18-(3)
- Page<sub>112</sub>-Page<sub>113</sub>: 28、30、31-(1)、32、35



# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2024 年 10 月 20 日