线性代数-10

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学，数学学院

本次课内容

1. 线性方程组解的存在性

2. 习题课和小测

引入

- 对线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \beta_m$ 的增广矩阵 $(A\ \beta)$ 作初等行变换化为行最简形.

引入

- 对线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$ 的增广矩阵 $(A\ \beta)$ 作初等行变换化为行最简形.
- $$R(A)\le R(A\ \beta)\le R(A)+1$$

引入

- 对线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \beta_m$ 的增广矩阵 $(A\ \beta)$ 作初等行变换化为行最简形.
- $$R(A) \le R(A\ \beta) \le R(A) + 1$$
  - 当 $R(A\ \beta) = R(A) + 1$ 时，产生矛盾方程，则方程组无解；

引入

- 对线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$ 的增广矩阵 $(A\ \beta)$ 作初等行变换化为行最简形.
- $$R(A)\le R(A\ \beta)\le R(A)+1$$
  - 当 $R(A\ \beta)=R(A)+1$ 时, 产生矛盾方程, 则方程组无解;
  - 当 $R(A\ \beta)=R(A)=n$ 时, A 列满秩, 则方程组有唯一解;

- 对线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$ 的增广矩阵 $(A\ \beta)$ 作初等行变换化为行最简形.
- $$R(A)\le R(A\ \beta)\le R(A)+1$$
    - 当 $R(A\ \beta)=R(A)+1$ 时，产生矛盾方程，则方程组无解;
    - 当 $R(A\ \beta)=R(A)=n$ 时，A 列满秩，则方程组有唯一解;
    - 当 $R(A\ \beta)=R(A)<n$ 时，有自由未知量，则方程组有无穷解.

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

- 求解 $AX=\beta \Rightarrow$ 通过初等行变换化增广矩阵 (A,β) 为行最简形，判断解的存在性并求解.

例题

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 & = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 & = 0 \end{cases}$$

例题

例

设

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 & = 0\end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

例题

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

例题

定理

矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.

定理

$R(AB)\leq \min\{R(A),R(B)\}$.

1、 矩阵的初等变换和等价、求可逆 P 使得 $PA=B$, $A^{-1}, A^{-1}B$;

2、 秩的定义、求 $R(A)$;

3、 判断线性方程组 $AX=\beta$ 解的存在性，并求解.

补充：矩阵的秩

设 A 为 n 阶方阵，

- $R(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$;
- $R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为非零列向量
  $\Leftrightarrow A$ 的任意行或列成比例;
- $\cdots$
- $R(A) = n \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow A$.

补充：矩阵的秩

设 A 为 n 阶方阵，

- $R(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$;
- $R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为非零列向量
  $\Leftrightarrow A$ 的任意行或列成比例;
- $\cdots$
- $R(A) = n \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow A$.

设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，若 $R(A) = n$, 则称 A 为列满秩的.

- $R(A_{m\times n}) = n \Leftrightarrow A \sim \binom{E_n}{O}$;
  $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P 和 Q, 使得 $PAQ = \binom{E_n}{O}$.

补充：秩和伴随矩阵

设 A 为 n 阶方阵，则

- $R(A) = n \Leftrightarrow R(A^*) = n, A^* = |A| \cdot A^{-1}, |A^*| = |A|^{n-1}$;
- $R(A) = n - 1 \Leftrightarrow R(A^*) = 1$;
- $R(A) < n - 1 \Leftrightarrow A^* = O$.

例题：分块矩阵的初等变换和秩不等式

- 分块矩阵的初等变换：若矩阵 A 可逆，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例

若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则 $R(A) + R(B) \leq n$.

证明：

$$\begin{aligned} R(A) + R(B) &= R\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \leq R\begin{pmatrix} E & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \\ &= R\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= n \end{aligned}$$

作业

- 熟悉前三章中出现的基本概念，掌握所讲例题所用方法; 线上课程进行至当前进度；预习向量一章前两节.
- 无书面作业.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2022 年 10 月 5 日