Lec-11. 随机变量的函数的分布

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：wulisu.cn

目录

1. 离散型随机变量函数的分布

2. 连续型随机变量函数的分布

- $Z = X + Y$ 的分布
- $Z = \frac{X}{Y}$ 和 $Z = XY$ 的分布
- $M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

两个随机变量函数的分布

- 已知随机变量 X, Y 的分布、二元函数 $g(x, y)$
$\Longrightarrow$ 求 $Z = g(X, Y)$ 的分布.

离散型随机变量函数的分布

若离散型随机变量 (X, Y) 联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},$$

则 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$\begin{aligned} P\{Z = z_k\} &= P\{g(X, Y) = z_k\} \\ &= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

例

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X+Y$, (2) $|X-Y|$ 的分布律.

解:

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	3	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

例

设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P	0.3	0.7

Y	2	4
P	0.6	0.4

求 $Z = X + Y$ 的分布律.

解.

X \ Y	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例

X, Y 相互独立且具有同一分布律

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布律.

解:

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$P\{\max\{X, Y\} = i\} = P\{X = i, Y < i\} + P\{X \le i, Y = i\}.$$

$\max\{X, Y\}$	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

连续型随机变量函数的分布

已知连续型随机变量 (X, Y), 求 $Z = g(X, Y)$ 的概率分布函数或概率密度函数.

- 先求 Z 的分布函数,

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$
$$= P\{g(X, Y) \le Z\} = \iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x, y)\,dxdy.$$

- 再通过求导得到概率密度函数,

$$f_Z(z) = F'_Z(z).$$

例

设 (X, Y) 的概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x & 0 < x < 1, 0 < y < x; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z = X - Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\
&= P\{X - Y \le Z\} = \iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)\,dxdy.
\end{aligned}
$$

z 的取值不同, 积分区域不同.

1. $z \le 0$ 时, 不与 $f(x,y)$ 的非零区域相交. $F_Z(z) = 0$.

2. $0 < Z < 1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\int\int_{x-y\le z} f(x,y)\,dxdy &= 1 - \int\int_{x-Y>z} f(x,y)\,dxdy \\
&= 1 - \int^1 z\int_0^{x-z} 3xdydx = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3.
\end{aligned}
$$

3. $Z \ge 1$ 时, $F_Z(z) = 1$.

故 $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3(1-z^2)}{2} & 0 < z < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

连续型随机变量的常见三种函数

若 X, Y 为连续型随机变量，则

- $Z = X + Y$;
- $Z = XY, Z = \frac{Y}{X}$;
- $Z = \max\{X, Y\}, Z = \min\{X, Y\}$;

仍为连续型的随机变量.

$Z = X + Y$ 的分布

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\} \\
&= \iint\limits_{x+y\le z} f(x, y)\, dxdy \\
&\xlongequal{\text{化累次积分}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\, dx \right) dy \\
&\xlongequal{u=x+y} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} f(u - y, y)\, du \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u - y, y)\, dy \right) du \triangleq \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\, du
\end{aligned}
$$

$Z = X + Y$ 的分布

- 所以 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy.$$

$Z = X + Y$ 的分布

- 所以 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)\,dy.$$

- 由对称性，

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\,dx.$$

- 若 X 和 Y 相互独立, 则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx.$$

- 上面公式称为函数 f_X 和 $f_Y(y)$ 的卷积公式, 记为 $f_X * f_Y$. 即

$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx.$$

例

设 X 和 Y 是相互独立的，且都服从 $N(0,1)$. 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数.

解:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}\,dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

所以 $Z \sim N(0,2)$. □

一般情况

性质

- 若 X, Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $Z = X + Y$ 仍然服从正态分布且

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

- n 个独立正态随机变量的线性组合仍服从正态分布. 即设 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ 且相互独立, 则

$$c_0 + c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n \sim N(\mu, \sigma^2),$$

其中 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ 是不全为 0 的常数, $\mu = c_0 + c_1\mu_1 + \ldots + c_n\mu_n$, $\sigma^2 = c_1^2\sigma_1^2 + \ldots + c_n^2\sigma_n^2$.

例

在一简单电路中，两电阻 R_1 和 R_2 串联，设 R_1，R_2 相互独立，它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10-x}{50} & 0\le x\le 10;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

求总电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

解: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$,

被积函数不为 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<10; \\ 0<z-x<10 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<x<10; \\ z-10<x<z \end{cases}$$

$$f_R(z)=\begin{cases} \int_0^z f(x)f(z-x)\,dx & 0\le z<10; \\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)\,dx & 10\le z<20; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{15000}(600z-60z^2+z^3) & 0\le z<10; \\ \frac{1}{15000}(20-z)^3 & 10\le z<20; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

例

设 X, Y 相互独立, 且分别服从参数为 α, θ; β, θ 的 Γ 分布 $(X \sim \Gamma(\alpha, \theta), Y \sim \Gamma(\beta, \theta))$, 概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \quad \alpha, \theta > 0$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\frac{y}{\theta}} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \quad \beta, \theta > 0$$

证 $Z = X + Y$ 服从参数为 $\alpha + \beta, \theta$ 的 Γ 分布, 即 $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \theta)$.

证明: $Z = X + Y$ 的概率密度为
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$,

被积函数不为 0 时 $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; \\ z - x > 0 \end{cases}$

(1) $z < 0$, $f_Z(z) = 0$,
(2) $Z > 0$,

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\frac{(z-x)}{\theta}}\,dx$$
$$= \frac{e^{-\frac{z}{\theta}}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1}\,dx$$
$$\overset{x=zt}{=\!=\!=} \frac{z^{\alpha+\beta-1} e^{-\frac{z}{\theta}}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = A z^{\alpha+\beta-1} e^{-\frac{z}{\theta}}$$

其中 $A = \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$.

$$
\begin{aligned}
1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)\,dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} A z^{\alpha+\beta-1} e^{-\frac{z}{\theta}}\,dz \\
&= A\theta^{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} (\frac{z}{\theta})^{\alpha+\beta-1} e^{-\frac{z}{-\theta}}\, d(\frac{z}{\theta}) \\
&= A\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta).
\end{aligned}
$$

即 $A = \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)}$. 所以

$$
f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\frac{z}{\theta}} & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}
$$

故 $X + Y \sim \Gamma(\alpha+\beta, \theta)$. $\square$

性质 (Γ 分布可加性)

若 $X_1, ..., X_n$ 相互独立且 $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$. 则

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(\sum \alpha_i, \beta).$$

$Z = \frac{X}{Y}$ 和 $Z = XY$ 的分布

设 (X, Y) 为连续型随机变量, 则 $Z = \frac{X}{Y}$, $Z = XY$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz)\, dx,$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})\, dx.$$

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) = P\{\, Y/X \le z\} = \iint\limits_{y/x \le z} f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{y/x \le z, x<0} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{y/x \le z, x>0} f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0} \int_{zx}^{+\infty} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dydx \\
&\overset{y=xu}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{0} \int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} |x| f(x,xu)\,dudx = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x,xu)\,dx \right) du
\end{aligned}
$$

- 类似可证 $Z = XY$ 的概念密度 (作业)

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})\, dx.$$

- 特别地, X, Y 相互独立时,

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(zx)\, dx,$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x})\, dx.$$

例

某公司提供一种地震保险. 保费 Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\frac{y}{25}e^{-y/5} & y>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

保险赔付 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5} & x>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

设 X 与 Y 相互独立, 求 $Z=Y/X$ 的概率密度.

解: 当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$.

当 $z>0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(zx)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{5} e^{-x/5} \cdot \frac{xz}{25} e^{-xz/5}\,dx \\
&= \frac{z}{125} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x \cdot \frac{1+z}{5}}\,dx = \frac{z}{125} \int_0^{+\infty} x^{3-1} e^{-x}\,dx \\
&= \frac{z}{125} \frac{\Gamma(3)}{((1+z)15)^3} \\
&= \frac{2z}{(1+z)^3}.
\end{aligned}
$$

$\square$

$M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

- $$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} \\ &= P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\} = F_X(z)F_Y(z) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= P\{N \leq z\} = 1 - P\{N > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\ &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \end{aligned}$$

$M = \max\{X_1, ..., X_n\}$ 和 $N = \min\{X_1, ..., X_n\}$ 的分布

- $$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \dots F_{X_n}(z),$$
- $$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)] \dots [1 - F_{X_n}(z)].$$
- 特别地，当 $X_1, ..., X_n$ 有相同分布函数时
$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, \quad F_{\min} = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

例

已知 X, Y 的分布函数.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0; \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - 0.5e^{-y} & y \geq 0; \\ 0.5e^{-y} & y < 0, \end{cases}$$

X 与 Y 相互独立, 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数.

解: $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$.

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$,

当 $z > 0$ 时,

$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z) = (1 - e^{-z})(1 - 0.5e^{-z})$,

所以

$$F_Z(z) = \begin{cases} (1 - e^{-z})(1 - 0.5e^{-z}) & z \geq 0; \\ 0 & z < 0, \end{cases} \qquad \square$$

例

设 X, Y 相互独立, 均服从 $U(0,1)$, 求 $M = \max\{X, Y\}$ 的概率密度.

解: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0; \\ x & 0 < x < 1; \\ 1 & x \geq 0; \end{cases}$$

$$F_{\max}(x) = F^2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0; \\ x^2 & 0 < x < 1; \\ 1 & x \geq 0; \end{cases}$$

$$f_{\max}(x) = F'_{\max}(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

□

例

设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成, 连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当 L_1 损坏时, L_2 开始工作)

设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y. 已知其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 且 $\alpha \neq \beta$, 试分别就三种连接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解:(i) 串联, 由于 L_1, L_2 中一个损坏时, 系统 L 就停止工作, 则 L 的寿命为 $Z=\min\{X, Y\}$.

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\alpha e^{-\alpha x} & x>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\beta e^{-\beta y} & y>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_{\min}(z)=\begin{cases}1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z)) & z>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

(ii) 并联, $Z = \max\{X, Y\}$

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} 1 - e^{\alpha z}(1 - e^{\beta z}) & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha+\beta) z} & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

(iii) 备用情况 $Z = X + Y$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy \\ &= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} dy \\ &= \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} dy \\ &= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}). \end{aligned}$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}) & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$