线性代数-20

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 1 日

本次课内容

1. 等价关系和等价不变量/性

2. 线性代数学了什么？

等价关系

把 x 和 y 之间的某种关系记为 $x \sim y$. 若集合 S 上一个二元关系 "$\sim$" 满足如下性质:

- 自反性: $\forall x \in S$, $x \sim x$;
- 对称性: $\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 传递性: $\forall x, y, z \in S$, 若 $x \sim y$, $y \sim z$, 则 $x \sim z$.

则称 $\sim$ 为 S 上的一个等价关系.

等价关系

把 x 和 y 之间的某种关系记为 $x \sim y$. 若集合 S 上一个二元关系 "$\sim$" 满足如下性质:

- 自反性: $\forall x \in S,\ x \sim x$;
- 对称性: $\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 传递性: $\forall x, y, z \in S$, 若 $x \sim y$, $y \sim z$, 则 $x \sim z$.

则称 $\sim$ 为 S 上的一个等价关系.

例

1. 在实数集 $\mathbb{R}$ 上, "$=$" 是一个等价关系. "$<$" 和 "$>$" 不是等价关系.
2. 设 $S = \{$平面上所有直线$\}$, "平行" 是一个等价关系.
3. 设 $S = \{$所有三角形$\}$, "全等" 和 "相似" 是等价关系.
4. 整数集 $\mathbb{Z}$ 上, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x, y$ 奇偶性相同, 则"$\sim$" 是等价关系.
5. 设 S 是人的集合, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 性别相同, 则"$\sim$" 是等价关系.

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得$PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵，若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得$PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵，若存在可逆阵 P, 使得$P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价：设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵，若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得$PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似：设 A, B 是 n 阶方阵，若存在可逆阵 P, 使得$P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- **合同：设 A, B 是 n 阶实对称阵，若存在可逆阵 P, 使得$P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.**

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B **等价**.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B **相似**.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B **合同**.
- **正交相似: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 正交相似.**

矩阵的等价、相似、合同、正交相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q, 使得$PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得$P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P, 使得$P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.
- 正交相似: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在正交阵 P, 使得$P^{-1}AP = P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 向量组等价: 设 A, B 是两个向量组, 若 A, B 可相互线性表示则称向量组 A 和 B 等价.

矩阵等价关系之间的联系

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{正交相似} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{相似} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{合同} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \text{等价} & \\
\text{行等价} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{列等价} \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

矩阵等价关系之间的联系

$$\begin{tikzcd}
 & \text{正交相似} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{相似} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{合同} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \text{等价} & \\
\text{行等价} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{列等价} \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

- 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow (0, A) \overset{c}{\sim} (B, 0)$

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 属于同一个等价类.

- 集合 S 上的等价关系把 S 中所有元素进行了分类，每一类对应一个等价类.
- 研究集合 S 上的不同的等价关系相当于从不同的角度观察 S 中元素.

等价类

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 属于同一个等价类.

- 集合 S 上的等价关系把 S 中所有元素进行了分类，每一类对应一个等价类.
- 研究集合 S 上的不同的等价关系相当于从不同的角度观察 S 中元素.

例

设 S 是教室中所有同学的集合，

1. 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性别相同，则 $\sim$ 把 S 分为两类 (男/女).
2. 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的星座相同，则 $\sim$ 把 S 分为 12 类.
3. 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的班级相同，则 $\sim$ 把 S 分为 3 类（4 类）.

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m, n\} + 1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵（超纲：一般情况为 Jordan 标准形）
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵/标准形
行等价/列等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形/列最简形

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m\times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m,n\}+1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵（超纲：一般情况为 Jordan 标准形）
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵/标准形
行等价/列等价	$m\times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形/列最简形

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m,n\}+1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵（超纲：一般情况为 **Jordan** 标准形）
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵/标准形
行等价/列等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形/列最简形

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m, n\} + 1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵（超纲：一般情况为 Jordan 标准形）
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵/标准形
行等价/列等价	$m \times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形/列最简形

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m\times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m,n\}+1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵（超纲：一般情况为 Jordan 标准形）
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵/标准形
行等价/列等价	$m\times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形/列最简形

线性代数中的等价类

等价关系	集合 S	等价类个数	等价类中最简单矩阵
等价	$m\times n$ 阶矩阵全体	$\min\{m,n\}+1$	标准形
相似	n 阶方阵全体	∞	若可对角化，则是对角阵（超纲：一般情况为 Jordan 标准形）
合同	n 阶实对称阵全体	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	规范形
正交相似	n 阶实对称阵全体	∞	对角阵/标准形
行等价/列等价	$m\times n$ 阶矩阵全体	∞	行最简形/列最简形

对角化问题: 每个等价类中，一个矩阵化为最简单矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

  即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A，存在可逆 P, Q，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.
  即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A，存在可逆 P, Q，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- **相似**: n 阶方阵可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关特征向量.
  即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆 P，使得
  $P^{-1}AP = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.
  即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A，存在可逆 P, Q，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 相似: n 阶方阵可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关特征向量.
  即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆 P，使得
  $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.
- **合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.**
  即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A，存在可逆 P，使得 P^TAP 为标准形/规范形.

对角化问题: 每个等价类中, 一个矩阵化为最简单矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.
  即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A, 存在可逆 P, Q, 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 相似: n 阶方阵可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关特征向量.
  即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆 P, 使得 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.
- 合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.
  即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A, 存在可逆 P, 使得 $P^T AP$ 为标准形/规范形.
- **正交相似: 任意 n 阶实对称阵可正交相似对角化.**
  即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A, 存在正交 P, 使得 $P^{-1}AP = P^T AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为标准形.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.
  即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A，存在可逆 P, Q，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 相似: n 阶方阵可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关特征向量.
  即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆 P，使得 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.
- 合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.
  即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A，存在可逆 P，使得 P^TAP 为标准形/规范形.
- 正交相似: 任意 n 阶实对称阵可正交相似对角化.
  即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A，存在正交 P，使得 $P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为标准形.
- 行等价/列等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵都可以通过初等行/列变换化为行/列阶梯形和行/列最简形.

等价不变量和等价不变性

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

等价不变量和等价不变性

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 则

- 等价的元素之间所具有的相同的性质称为等价不变性;
- 等价的元素之间所具有的相同的数量特征称为等价不变量.

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系. 则

- 等价的元素之间所具有的相同的性质称为等价不变性;
- 等价的元素之间所具有的相同的数量特征称为等价不变量.

性质

对于集合 S 上的等价关系 $\sim$, 设 p 是一个等价不变性/量. 则

- 若 $x \sim y$, 则 $p(x) = p(y)$;
- 若 $p(x) \neq p(y)$, 则 $x \nsim y$.

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系.
$\forall x, y \in S$，若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同，则称 p 是一个完全不变性/量.

完全不变量和完全不变性

定义

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系.

$\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同，则称 p 是一个完全不变性/量.

例

S 是教室中所有同学的集合，定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的班级相同. 则学号的倒数第三个数字是一个完全不变量.

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	秩	是	$A \sim B \overset{\text{同型}}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	特征值	否	$A \overset{\text{相似}}{\sim} B \overset{\text{可对角化}}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	正负惯性指数	是	$A \overset{\text{合同}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \overset{\text{正交}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/列等价			$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T)$; $A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	秩	是	$A \sim B \overset{同型}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	特征值	否	$A \overset{相似}{\sim} B \overset{可对角化}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	正负惯性指数	是	$A \overset{合同}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \overset{正交}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/列等价			$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T)$; $A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	秩	是	$A \sim B \overset{\text{同型}}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	特征值	否	$A \overset{\text{相似}}{\sim} B \overset{\text{可对角化}}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	正负惯性指数	是	$A \overset{\text{合同}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \overset{\text{正交}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/列等价			$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T)$; $A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	秩	是	$A \sim B \overset{\text{同型}}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	特征值	否	$A \overset{\text{相似}}{\sim} B \overset{\text{可对角化}}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	正负惯性指数	是	$A \overset{\text{合同}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \overset{\text{正交}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/列等价			$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T)$; $A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	<u>秩</u>	是	$A \sim B \overset{同型}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	<u>特征值</u>	否	$A \overset{相似}{\sim} B \overset{可对角化}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	<u>正负惯性指数</u>	是	$A \overset{合同}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \overset{正交}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/列等价			$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T)$; $A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性代数中的不变量

等价关系	典型的不变量	完全?	描述/特殊情况
等价	秩	是	$A \sim B \overset{\text{同型}}{\Leftrightarrow} R(A) = R(B)$
相似	特征值	否	$A \overset{\text{相似}}{\sim} B \overset{\text{可对角化}}{\Leftrightarrow}$ 特征值相同
合同	正负惯性指数	是	$A \overset{\text{合同}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同
正交相似	特征值	是	$A \overset{\text{正交}}{\sim} B \Leftrightarrow$ 特征值相同
行等价/列等价			$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A^T, B^T)$; $A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法：初等行变换、左行右列.

线性代数中的等价关系

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m\times n$ 阶矩阵全体，$\forall A, B\in S$，若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法：初等行变换、左行右列.
- （完全）等价不变量：矩阵的秩.

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m\times n$ 阶矩阵全体，$\forall A,B\in S$，若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q，使得
$$PAQ=B,$$
则称矩阵 A 和 B 等价.
- 主要方法：初等行变换、左行右列.
- （完全）等价不变量：矩阵的秩.
- 矩阵的等价把 $m\times n$ 阶矩阵全体分为了 $\min\{m,n\}+1$ 类. 每个等价类中最简单的矩阵：标准形.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 相似.
- 相似不变量：特征值、特征多项式.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 相似.
- 相似不变量：特征值、特征多项式.
- 矩阵的相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵：**Jordan** 标准形.
可对角化等价类中最简单的矩阵：对角形.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 相似.
- 相似不变量：特征值、特征多项式.
- 矩阵的相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵：Jordan 标准形.
可对角化等价类中最简单的矩阵：对角形.
- 相似对角化问题：是否和对角形矩阵相似.
特征值和特征多项式是两个可对角化矩阵相似的完全不变量.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^T AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 合同.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^T A P = B,$$
则称矩阵 A 和 B 合同.
- 主要方法：二次型.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^T AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 合同.
- 主要方法：二次型.
- **(完全) 等价不变量：正负惯性指数.**

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^T AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 合同.
- 主要方法：二次型.
- (完全) 等价不变量：正负惯性指数.
- 矩阵的合同把 n 阶实对称矩阵全体分为了 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵：规范形.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得
$$P^T A P = B,$$
则称矩阵 A 和 B 合同.
- 主要方法：二次型.
- (完全) 等价不变量：正负惯性指数.
- 矩阵的合同把 n 阶实对称矩阵全体分为了 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵：规范形.
- 相似对角化问题：实对称矩阵一定和某个对角形矩阵合同.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得
$$P^T A P = P^{-1} A P = B,$$
则称矩阵 A 和 B 正交相似.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得
$$P^T AP = P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 主要方法：二次型.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得
$$P^T AP = P^{-1} AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 主要方法：二次型.
- 等价不变量：特征值（完全不变量）、正负惯性指数.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得

$$P^T A P = P^{-1} A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

- 主要方法：二次型.
- 等价不变量：特征值（完全不变量）、正负惯性指数.
- 矩阵的等价把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵：标准形.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体，$\forall A, B \in S$，若存在 n 阶正交矩阵 P，使得
$$P^TAP = P^{-1}AP = B,$$
则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 主要方法：二次型.
- 等价不变量：特征值（完全不变量）、正负惯性指数.
- 矩阵的等价把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵：标准形.
- 正交相似对角化问题：实对称矩阵一定可以正交相似对角化.

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价.

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价.
- 等价不变量：向量组的秩

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价.
- 等价不变量：向量组的秩
- 向量组的等价把 n 维向量组全体分为了无穷多类.
  每个等价类中包含向量最少的向量组：最大无关组.

线性代数学了什么？

- 一个主体：

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：
  - 线性方程组$AX = \beta$; **(Chap 2-4)**

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：
  - 线性方程组$AX=\beta$; (Chap 2-4)
  - 线性变换$Y=AX$. **(Chap 5-6)**

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：
  - 线性方程组$AX = \beta$; (Chap 2-4)
  - 线性变换$Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：
  - 线性方程组$AX=\beta$; (Chap 2-4)
  - 线性变换$Y=AX$. (Chap 5-6)
- $3+1+1$ 个等价关系：
  - 矩阵的等价、合同、相似;

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：
  - 线性方程组$AX = \beta$; (Chap 2-4)
  - 线性变换$Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：
  - 矩阵的等价、合同、相似;
  - 矩阵的正交相似（合同且相似）；

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：
  - 线性方程组$AX=\beta$; (Chap 2-4)
  - 线性变换$Y=AX$. (Chap 5-6)
- $3+1+1$ 个等价关系：
  - 矩阵的等价、合同、相似;
  - 矩阵的正交相似（合同且相似）；
  - 向量组的等价.

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：
  - 线性方程组 $AX = \beta$; (Chap 2-4)
  - 线性变换 $Y = AX$. (Chap 5-6)
- $3+1+1$ 个等价关系：
  - 矩阵的等价、合同、相似;
  - 矩阵的正交相似（合同且相似）；
  - 向量组的等价.
- 3 个重要不变量:

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：
  - 线性方程组$AX=\beta$; (Chap 2-4)
  - 线性变换$Y=AX$. (Chap 5-6)
- $3+1+1$ 个等价关系：
  - 矩阵的等价、合同、相似;
  - 矩阵的正交相似（合同且相似）；
  - 向量组的等价.
- 3 个重要不变量:
  - **矩阵的秩;**

复习提纲

- 一个主体：
  - 矩阵
- 两个基本问题：
  - 线性方程组$AX=\beta$; (Chap 2-4)
  - 线性变换$Y=AX$. (Chap 5-6)
- $3+1+1$ 个等价关系：
  - 矩阵的等价、合同、相似;
  - 矩阵的正交相似（合同且相似）；
  - 向量组的等价.
- 3 个重要不变量:
  - 矩阵的秩;
  - 方阵的特征值

复习提纲

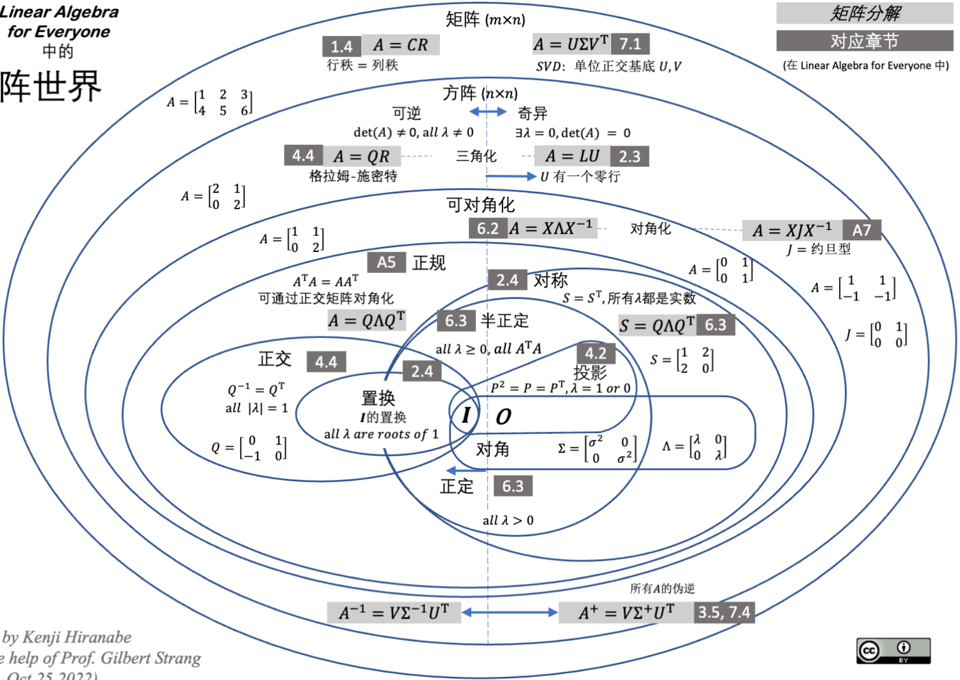
- 一个主体:
  - 矩阵
- 两个基本问题:
  - 线性方程组$AX=\beta$; (Chap 2-4)
  - 线性变换$Y=AX$. (Chap 5-6)
- $3+1+1$ 个等价关系:
  - 矩阵的等价、合同、相似;
  - 矩阵的正交相似(合同且相似);
  - 向量组的等价.
- 3 个重要不变量:
  - 矩阵的秩;
  - 方阵的特征值
  - 实对称矩阵的正负惯性指数.

Linear Algebra for Everyone
中的
矩阵世界

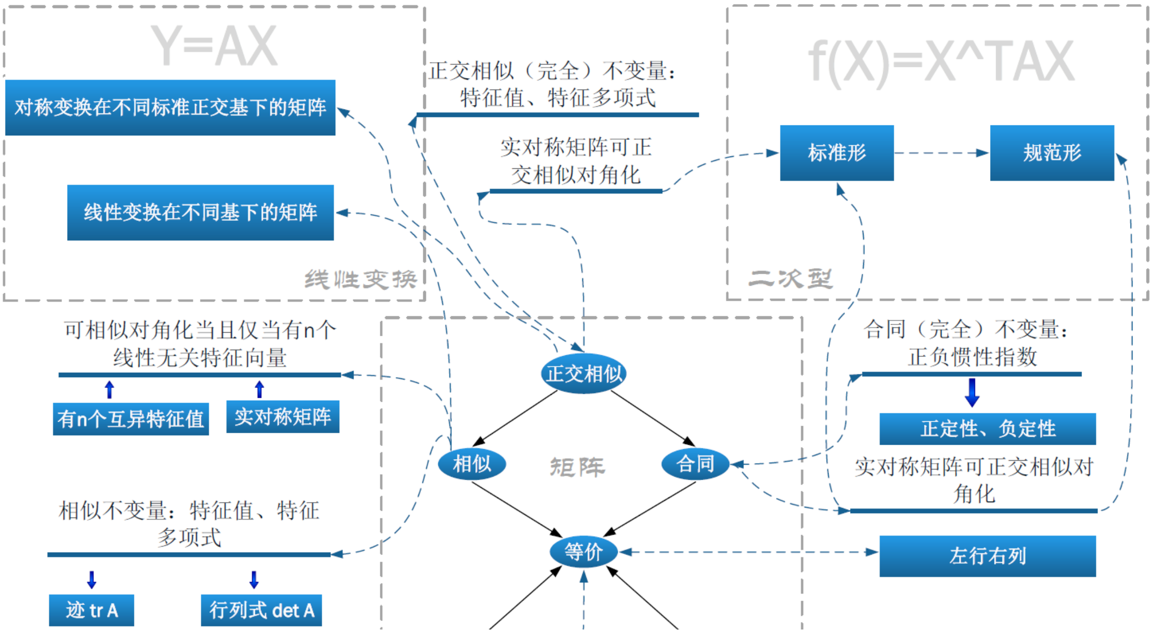
矩阵分解

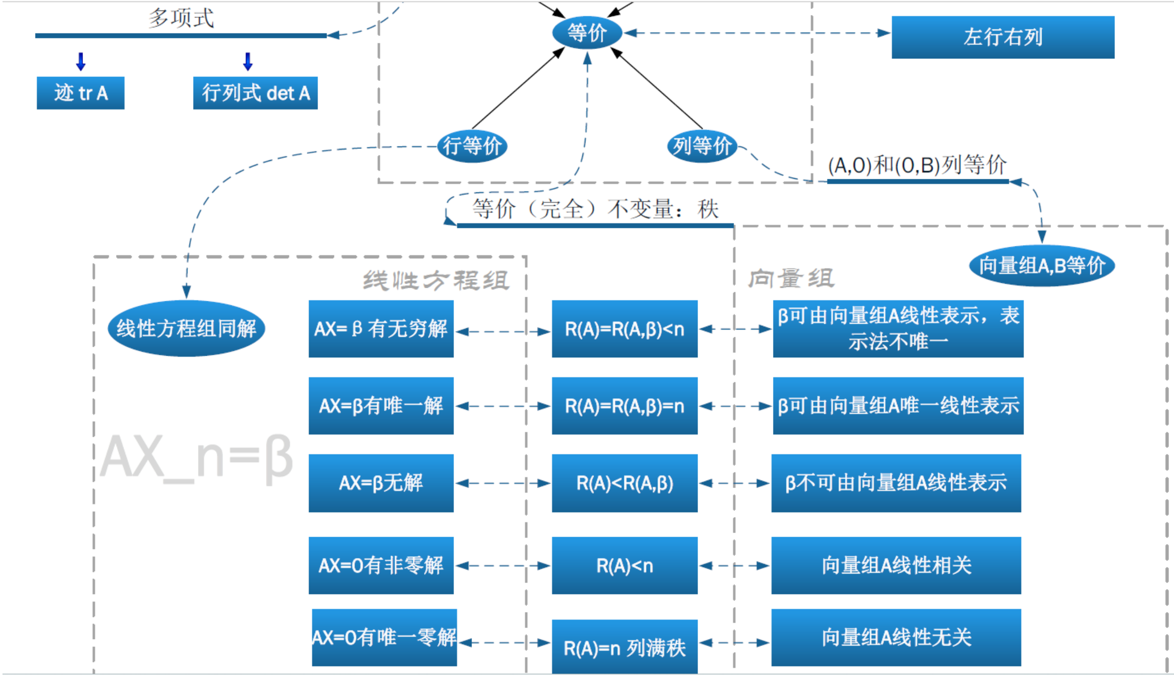
对应章节

(在 Linear Algebra for Everyone 中)



Drawn by Kenji Hiranabe
with the help of Prof. Gilbert Strang
(v1.4.7, Oct.25,2022)
Translator: Kefang Liu


Y=AX
对称变换在不同标准正交基下的矩阵
线性变换在不同基下的矩阵
线性变换
正交相似（完全）不变量：
特征值、特征多项式
实对称矩阵可正
交相似对角化
f(X)=X^TAX
标准形
规范形
二次型
可相似对角化当且仅当有n个
线性无关特征向量
有n个互异特征值
实对称矩阵
正交相似
相似
矩阵
合同
等价
合同（完全）不变量：
正负惯性指数
正定性、负定性
实对称矩阵可正交相似对
角化
相似不变量：特征值、特征
多项式
迹 tr A
行列式 det A
左行右列



多项式
迹 tr A
行列式 det A
等价
左行右列
行等价
列等价
(A,O)和(O,B)列等价
等价（完全）不变量：秩
向量组A,B等价
线性方程组
向量组
线性方程组同解
AX_n=β
AX= β 有无穷解
R(A)=R(A,β)<n
β可由向量组A线性表示，表示法不唯一
AX=β有唯一解
R(A)=R(A,β)=n
β可由向量组A唯一线性表示
AX=β无解
R(A)<R(A,β)
β不可由向量组A线性表示
AX=0有非零解
R(A)<n
向量组A线性相关
AX=0有唯一零解
R(A)=n 列满秩
向量组A线性无关

已知

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

问

1. A, B 是否等价？
2. A, B 是否相似？
3. A, B 是否合同？
4. A, B 是否正交相似？
5. A, B 的列向量组是否等价？

已知

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

问

1. A, B 是否等价?
2. A, B 是否相似?
3. A, B 是否合同?
4. A, B 是否正交相似?
5. A, B 的列向量组是否等价?

若算力不足，可对 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 考虑上面问题.

随堂

已知

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

问

1. A, B 是否等价? ($R(A) = R(B)$?)
2. A, B 是否相似? (特征值相同?)
3. A, B 是否合同? (正负惯性指数相同?)
4. A, B 是否正交相似? (相似 + 合同?)
5. A, B 的列向量组是否等价? ($R(A) = R(B) = R(A, B)$?)

若算力不足，可对 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 考虑上面问题.

答疑环节

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 1 日

一些必须会做的题

- Page_{25} 例 1;
  Page_{81} 例 6;
  Page_{116} 例 3;
  Page_{135} 例 2(两种证法);
  Page_{145} 例 6;
  Page_{216} 例 1.
- Page_{62} 例 4;
  Page_{164} 例 5.