# 《线性代数》第四章作业（6 月 11 日提交）

临班 370

2023 年 6 月 21 日

班级：______________ 姓名：_____________ 学号：_________________

1. 判断题（错误请给出说明或反例. 每题 2 分，共 30 分）：(红错)

(1) 两个同型矩阵 $A, B$ 等价

$\Leftrightarrow R(A) = R(B)$.

$\Leftrightarrow A, B$ 具有相同的标准形.

$\Leftrightarrow A$ 可以经过有限次初等行变换和初等列变换化为矩阵 $B$.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $P, Q$, 使得 $PAQ = B$.

(2) (等价不变量) 若矩阵 $A \sim B$, 则

① $A, B$ 具有相同的阶次.

② $R(A) = R(B)$ (等价的完全不变量).

③ $A, B$ 的行 (列) 向量组的线性相关性相同.

④ 若 $A, B$ 为方阵, 则 $A$ 可逆当且仅当 $B$ 可逆.

(3) (行等价不变量) 若矩阵 $A \overset{r}{\sim} B$, 则

① $A, B$ 具有相同的阶次.

② $R(A) = R(B)$ .

③ $A, B$ 的列向量组的线性相关性相同.

④ 若 $A, B$ 为方阵, 则 $A$ 可逆当且仅当 $B$ 可逆.

⑤ $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解 (即具有相同的解集).

(4) 设 $A$ 为方阵, 若 $A$ 经过若干次初等行变换变为矩阵 $B$, 则 $|A| = |B|$.

(5) 若 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解, 则 $R(A) = R(B)$.

(6) 两个向量组等价当且仅当这两个向量组的秩相等.

($R(A) = R(B) = R(A, B)$)

(7) 向量组 $I : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可由 $II : \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表示, 则 $r \le s$.

(8) 向量组 $I : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的秩为 $p$, 向量组 $II : \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 的秩为 $q$. 若向量组 $I$ 可以向量组 $II$ 线性表示, 则 $p \le q$.

(9) 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 进行有限次初等行变换化为矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 若 $\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 则 $\beta_3 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2$.

(10) 若向量 $\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关, $\alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_3$ 线性无关.

(11) $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, $B \ne 0$, 则 $R(A) < n$.

(12) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则 $\alpha_1$ 可以由 $\alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, $\alpha_4$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(13) $A_{m\times n}$ 为列满秩矩阵, 即 $R(A) = n$

$\Leftrightarrow$ 矩阵 $A$ 的标准形为 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $P$, 使得 $PA = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

$\Leftrightarrow$ $A$ 可以经过有限次初等行变换化为矩阵 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

$\Leftrightarrow$ $A$ 的列向量组线性无关.

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有唯一零解.

$\Rightarrow$ 左消去律成立. 即若 $AX = AY$, 则 $X = Y$.

$\Rightarrow$ 左保秩. 即 $R(AB) = R(B)$.

(14) $A_{n\times n}$ 为可逆矩阵

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵 $B$, 使得 $AB = E$.

$\Leftrightarrow$ $|A| \ne 0$, 即矩阵 $A$ 为非奇异的.

$\Leftrightarrow$ $R(A) = n$, 即矩阵 $A$ 为满秩的.

$\Leftrightarrow$ $A \sim E_n \Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E$.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $P$, 使得 $PA = E$.

$\Leftrightarrow$ $A$ 可以经过有限次初等行变换化为矩阵 $E$.

$\Leftrightarrow$ $A$ 的列 (行) 向量组线性无关.

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有唯一零解.

$\Leftrightarrow A$ 没有零特征值.

$\Rightarrow$ 左右消去律成立. 即若 $AX = AY$, 则 $X = Y$; 若 $XA = YA$, 则 $X = Y$.

$\Rightarrow$ 保秩. 即 $R(AB) = R(BA) = R(B)$.

(15) $R(A_{m\times n}) = 1$

$\Leftrightarrow$ 存在非零向量 $\alpha, \beta$, 使得 $A = \alpha\beta^T$.

$\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组两两成比例.

$\Rightarrow$ 若 $A$ 为方阵, 则 $A^k = (\alpha^T\beta)^{k-1}A$.

2. 填空题 (每空 3 分，共 18 分)：

(1) 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的 3 个解向量. $\alpha_1 = (2,3,4,5)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (2,4,6,8)^T$, 则该方程组的通解为 $\underline{X = k(\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1) + \alpha_1, \forall k}$.

(2) 已知 4 阶矩阵 $A$ 的秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2$ 为非齐次线性方程 $AX = \beta(\beta \neq 0)$ 的两个不相等的解，则 $AX = 0$ 的通解为 $\underline{X = k(\alpha_1 - \alpha_2), \forall k}$.

(3) 设 3 阶方阵 $A$ 的各行元素之和均为 0, 且 $R(A) = 2$, 则 $AX = 0$ 的通解为 $\underline{X = k(1,1,1)^T, \forall k}$.

(4) 设 $n$ 阶方阵 $A$ 的各行元素之和均为 0, 且 $R(A) = n-1$, 则 $AX = 0$ 的通解为 $\underline{X = k(1,1,\cdots,1)^T, \forall k}$.

(5) 已知向量组 $\alpha_1 = (1,2,3,4)^T, \alpha_2 = (2,3,4,5)^T, \alpha_3 = (3,4,5,6)^T, \alpha_4 = (4,5,6,7)^T$, 则该向量组的秩为 $\underline{\quad 2 \quad}$.

(6) 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ 线性相关, 则 $a = \underline{\quad -1 \text{ 或 } 2 \quad}$.

3. 计算题 (每题 10 分，共 40 分)：

(1) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 列向量组的一个最大无关组, 并将其余列向量用最大无关组线性表示.

提示：化为行最简形方可求线性表示; 最大无关组取 $A$ 的列向量组而非行最简形的.

(2) $\lambda$ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= -2, \end{cases}$$

① 有唯一解； ② 无解；③无穷多个解, 并求通解.

注意：通过系数矩阵的秩，增广矩阵的秩，未知元个数三者关系判断解的存在形.

化为行阶梯形即可求秩; 初等变换时, 含参量因式不可作分母、不可消去.

(3) 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$. 求方程 $AX = \beta$ 的通解.

(4) 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \end{cases}$.

注意：自由未知量的选取、齐次方程组求基础解系、非齐次方程组求特解.

4. 证明题 (每题 4 分，共 12 分)：

(1) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \end{cases}$$

证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

注意：证法不唯一, 需掌握.

(2) $A_{m\times n}B_{n\times s} = 0$, 证明 $R(A) + R(B) \le n$.

提示：$B$ 的列向量组与 $AX = 0$ 的基础解系之前的关系.

(3) 证明：$R(A^TA) = R(A)$.

提示：同解方程组有相同的秩. 先证 $A^TAX = 0$ 和 $AX = 0$ 同解. 然后由解集的秩 $R_S = n - r$ 得证.

5. 附加题 (20 分)：

(1) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)K_{n\times m}$. 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的秩为 $R(K)$.

矩阵的语言：已知 $A$ 列满秩, 证明 $R(AK) = R(K)$.

提示: 设 $R(K) = r$, 取矩阵 $K$ 列向量组的最大无关组, 不妨设为 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$. 则

$$\beta_i = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\gamma_i.$$

所以证明 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 为 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ 的最大无关组即可.

根据最大无关组定义只需要证明：① $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性无关; ② 任意 $\beta_i$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示.