Lec-13. 期望

主讲教师：吴利苏 **(wulisu@sdust.edu.cn)**
主　　页：wulisu.cn

主要内容

1. 离散型随机变量的数学期望
2. 连续型随机变量的数学期望
3. 随机变量函数的数学期望
4. 两个随机变量函数的数学期望
5. 期望的性质

样本空间 $\Rightarrow$ 随机变量 $\Rightarrow$ 数字特征:

样本空间 $\Rightarrow$ 随机变量 $\Rightarrow$ 数字特征:

1. 概率平均: 期望
2. 偏离情况或聚散情况: 方差
3. 两个随机变量之间的关系: 协方差/相关系
4. 其他数字特征: 矩

引例

例 (分赌本问题)

A, B 两人赌技相同, 各出赌金 100 元, 并约定先胜三局者为胜, 取得全部赌金 200 元. 由于出现意外情况, 在 A 胜 2 局 B 胜 1 局时, 不得不终止赌博. 如果要分赌金, 该如何分配才算公平?

解: 因为最多再赌两局必分胜负. 三种情况:

(1) 第四局 A 胜, $p=\frac{1}{2}$;

(2) 第四局 B 胜, 第五局 A 胜,$p=\frac{1}{4}$;

(3) 第四局 B 胜, 第五局 B 胜,$p=\frac{1}{4}$;

A 获胜的可能性为 $\frac{3}{4}$, B 为 $\frac{1}{4}$.

解: 因为最多再赌两局必分胜负. 三种情况:

(1) 第四局 A 胜, $p=\frac{1}{2}$;

(2) 第四局 B 胜, 第五局 A 胜,$p=\frac{1}{4}$;

(3) 第四局 B 胜, 第五局 B 胜,$p=\frac{1}{4}$;

A 获胜的可能性为 $\frac{3}{4}$, B 为 $\frac{1}{4}$.

若设 X 为在 A 胜 2 局 B 胜 1 局的前提下, 继续赌下去 A 最终所得的赌金.

X	0	200
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

解: 因为最多再赌两局必分胜负. 三种情况:
(1) 第四局 A 胜, $p=\frac{1}{2}$;
(2) 第四局 B 胜, 第五局 A 胜,$p=\frac{1}{4}$;
(3) 第四局 B 胜, 第五局 B 胜,$p=\frac{1}{4}$;
A 获胜的可能性为 $\frac{3}{4}$, B 为 $\frac{1}{4}$.
若设 X 为在 A 胜 2 局 B 胜 1 局的前提下, 继续赌下去 A 最终所得的赌金.

X	0	200
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

A 期望所得的赌金为 X 的期望值为

$$200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150.$$

同理 B 期望所得为 50. □

例

设某射击手在相同条件下, 瞄准靶子相继射击 90 次. (命中环数是一个随机变量)

X命中环数	0	1	2	3	4	5
次数	2	13	15	10	20	30

问该射击手每次射击平均中靶多少环?

解:

$$
\begin{aligned}
&\text{平均射击环数}\\
=&\frac{\text{射中靶的总环数}}{\text{总次数}}\\
=&\frac{0\times 2+1\times 13+2\times 15+3\times 10+4\times 20+5\times 30}{90}
\end{aligned}
$$

解:

$$
\begin{aligned}
&\text{平均射击环数}\\
=&\frac{\text{射中靶的总环数}}{\text{总次数}}\\
=&\frac{0\times 2+1\times 13+2\times 15+3\times 10+4\times 20+5\times 30}{90}\\
=&\frac{\sum k\cdot n_k}{n}=\sum k\cdot\frac{n_k}{n}=\sum k\cdot P_k
\end{aligned}
$$

□

离散型随机变量的数学期望

定义

设 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\ldots,$ 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

为 X 的数学期望.

注

(1) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变.

(2) $E(X)$ 是一个实数, 表示一种加权平均, 与算术平均值不同.

例

X	1	2
P	0.02	0.98

X 的算术平均值为 1.5, $E(X) = 1.98$. □

例

X	1	2
P	0.02	0.98

X 的算术平均值为 1.5, $E(X) = 1.98$. □

- 当 X 取各个可能值是等概率分布时, 期望与算术平均值相等.

连续型随机变量的数学期望

定义

设 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ 绝对收敛, 则称

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

为 X 的数学期望.

例

有两个相互独立工作的电子装置，它们的寿命 (以 h 计) $X_k(k=1,2)$ 服从同一指数分布，

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}\quad \theta>0.$$

若将这两个电子装置串联连接组成整机，求整机寿命 (以 h 计)N 的数学期望.

解: $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

$$F_{\min}(x)=1-(1-F(x))^2$$

$$=\begin{cases}1-e^{-\frac{2x}{\theta}} & x>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_{\min}(x)=\begin{cases}\frac{2}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}} & x>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(N)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\min}(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}}\,dx=\frac{\theta}{2}. \qquad \square$$

例

按规定，某车站每天$8:00 \sim 9:00$，$9:00 \sim 10:00$ 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时刻是相互独立的. 其规律为

到站时刻	8:10	8:30	8:50
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$
到站时刻	9:10	9:30	9:50
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(i) 一旅客 $8:00$ 到达车站，求他候车时间的数学期望.
(ii) 一旅客 $8:20$ 到达车站，求他候车时间的数学期望.

解: (i) 设该旅客候车时间为 $X(min)$

X	10	30	50
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{3}{6} + 50 \times \frac{2}{6} = 33.33$

(ii)

X	10	30	50	70	90
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$

$E(X) = 10 \times \frac{3}{6} + 30 \times \frac{2}{6} + 50 \times \frac{1}{36} + 70 \times \frac{3}{36} + 90 \times \frac{2}{36} = 27.22.$

□

例 (商店的销售策略)

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式, 记使用寿命为 X(以年计), 规定:

$X \le 1$, 一台付款 1500 元;

$1 < X \le 2$, 一台付款 2000 元;

$2 < X \le 3$, 一台付款 2500 元;

$X > 3$, 一台付款 3000 元.

设 X 服从指数分布, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

试求该商店一台这种家用电器收费 Y 的数学期望.

解: 先求出 X 落在各个区间的概率.

$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$

$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} = e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$

$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} = e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$

$P\{X > 3\} = \int_3^\infty \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} = e^{-0.3} = 0.7408.$

解: 先求出 X 落在各个区间的概率.

$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$

$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} = e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$

$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} = e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$

$P\{X > 3\} = \int_3^\infty \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} = e^{-0.3} = 0.7408.$

Y	1500	2000	2500	3000
P	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

$E(Y) = 2732.15.$ □

例

设 $X \sim \boldsymbol{\pi(\lambda)}$, 求 $E(X)$.

例

设 $X \sim \pi(\lambda)$, 求 $E(X)$.

解: $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, ..., \lambda > 0$.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

□

例

$X \sim N(0,1)$, 求 $E(X)$.

例

$X \sim N(0, 1)$, 求 $E(X)$.

解: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0.$ □

例

$X \sim U(a, b)$, 求 $E(X)$.

例

$X \sim U(a, b)$, 求 $E(X)$.

解: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$, (a, b) 的中点. $\square$

随机变量函数的期望

定理

设 X 是离散型随机变量, 其分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$. 若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛, 则 $Y=g(X)$ 的期望为

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k.$$

随机变量函数的期望

定理

设 X 是连续型随机变量，概率密度函数 $f(x)$，$y = g(x)$ 为连续函数. 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$ 绝对收敛，则 $Y = g(X)$ 的期望为

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

随机变量函数的期望

定理

设 X 是连续型随机变量, 概率密度函数 $f(x)$, $y = g(x)$ 为连续函数. 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$ 绝对收敛, 则 $Y = g(X)$ 的期望为

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

注:1. 求 $E(Y)$ 时, 不必算出 Y 的分布律或概率密度, 而只用 X 的分布律或概率密度就可以.

随机变量函数的期望

定理

设 X 是连续型随机变量, 概率密度函数 $f(x)$, $y = g(x)$ 为连续函数. 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$ 绝对收敛, 则 $Y = g(X)$ 的期望为

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

注:1. 求 $E(Y)$ 时, 不必算出 Y 的分布律或概率密度, 而只用 X 的分布律或概率密度就可以.

2. 除特殊说明外, 均假设期望存在.

例

$X = x_k$	-1	0	1	2
P_k	p_1	p_2	p_3	p_4

若 $Y = g(X) = X^2$, 求 $E(Y)$.

例

$X = x_k$	-1	0	1	2
P_k	p_1	p_2	p_3	p_4

若 $Y = g(X) = X^2$, 求 $E(Y)$.

解:

Y	1	0	4
P	$p_1 + p_3$	p_2	p_4

$$E(Y) = 1 \times (p_1 + p_3) + 0 \times p_2 + 4 \times p_4 = \sum_{k=1}^{4} g(x_k) P\{X = x_k\} = p_1 + p_3 + 4p_4. \qquad \square$$

两个随机变量函数的分布

定理

设 Z 是 X, Y 的函数. $Z = g(X, Y)$,

(1) 若 (X, Y) 是离散型的, $P\{X = x_k, Y = y_j\} = p_{ij}$, 则

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}.$$

(2) 若 (X, Y) 是连续型的, $f(x, y)$, 则

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)\,dxdy.$$

例

设

Y / X	-1	0	1	$P\{X=x_i\}$
1	0.2	0.1	0.1	0.4
2	0.1	0	0.1	0.2
3	0	0.3	0.1	0.4
$P\{Y=y_j\}$	0.3	0.4	0.3	1

求 $E(X), E(Y), E(Y/X), E[(X-Y)^2]$.

解: $E(X) = 0.4 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.4 \times 3 = 2.$
$E(Y) = 0.3 \times (-1) + 0.4 \times 0 + 0.3 \times 1 = 0.$

Y/X	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
P	0.2	0.4	0.1	0.1	0.1	0	0.1

$E(Y/X) = -\frac{1}{15}$

$(X-Y)^2$	4	1	0	9	4	1	16	9	4
P	0.2	0.1	0.1	0.1	0	0.1	0	0.3	0.1

$[E(X-Y)^2] = 5.$ $\square$

例

设 (X, Y) 的概率密度,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2x^3y^2} & \dfrac{1}{x} < y < x, x > 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

例

设 (X, Y) 的概率密度,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^3y^2} & \frac{1}{x} < y < x, x > 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

解: $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)\,dydx$

$$= \int_{1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^3y}\,dydx = \frac{3}{4}.$$

$$E(\frac{1}{XY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{xy} f(x, y)\,dydx$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^4y^3}\,dydx = \frac{3}{5}. \qquad \square$$

例

某公司计划开发一种新产品市场，并试图确定该产品的产量. 他们估计出售一件产品可获利 m 元，而积压一件将导致亏损 n 元. 他们预售销售量 Y 服从指数分布

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}} & y>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$\theta>0$，问若要获得利润的期望最大，应生产多少件产品 (m,n,θ 为已知)

解: 设生产 x 件, 则获利 Q 是 x 的函数,

$$Q = Q(x) = \begin{cases} mY - n(x - Y) & Y < x; \\ mx & Y \geq x, \end{cases}$$

Q 是随机变量, 它是 Y 的函数, 其数学期望为

$E(Q) = \int_0^{\infty} Q f_Y(y)\,dy$

$= \int_0^x [my - n(x - y)] \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy + \int_x^{\infty} mx \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy$

$= (m + n)\theta - (m + n)\theta e^{-x/\theta} - nx.$

$E'(Q) = (m + n) e^{-x/\theta} - n,$

令 $E'(Q) = 0$, 则 $x = -\theta \ln \frac{n}{m+n}$.

而 $E''(Q) = -\frac{m+n}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} < 0,$

故 $x = -\theta \ln \frac{n}{m+n}$ 为 $E(Q)$ 的极大值, 也是最大值. □

期望的性质

性质（线性性质）

1. 设 C 是常数，则 $E(C) = C$.
2. X 是一个随机变量，C 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$.
3. X, Y 是两个随机变量，$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

期望的性质

性质（线性性质）

1. 设 C 是常数，则 $E(C) = C$.
2. X 是一个随机变量，C 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$.
3. X, Y 是两个随机变量，$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

- 由 1-3 有

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c.$$

- 可推广到有限个的线性组合

$$E(C_0 + \sum C_i X_i) = C_0 + \sum E(X_i).$$

期望的性质

性质（独立性前提下，满足可乘性）

4. X, Y 相互独立, 则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

期望的性质

性质（独立性前提下，满足可乘性）

4. X, Y 相互独立, 则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

- 可推广到任意有限个相互独立的随机变量之积.
  $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则

$$E\left(\prod_i X_i\right) = \prod_i E(X_i).$$

证明: 3.

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dxdy \\
&= E(X)+E(Y).
\end{aligned}
$$

证明: 3.

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dxdy \\ &= E(X)+E(Y). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\,dy = E(X)E(Y) \end{aligned}$$

例

$X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$, 证 $E(X) = \boldsymbol{\mu}$.

例

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 证 $E(X) = \mu$.

证: 令 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $Z \sim N(0,1)$. $E(Z) = 0$.

$X = \mu + Z\sigma$, $E(X) = E(\mu + Z\sigma) = E(\mu) + E(\sigma Z) = \mu$.

$\square$

例

$X \sim b(n, p)$, $0 < p < 1$, $n \geq 1$, 求 $E(X)$.

例

$X \sim b(n,p)$, $0 < p < 1$, $n \geq 1$, 求 $E(X)$.

解: 由题意知, X 可看成 n 重伯努利试验中 A 发生的次数, $P(A) = p$.

$$X_k = \begin{cases} 1 & A\text{第}k\text{次发生;} \\ 0 & \text{未发生.} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

于是 $X_1, \dots, X_n$ 相互独立, 服从 $(0-1)$ 分布.

$E(X_k) = p$, $\forall k$.

$$X = X_1 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

$E(X) = np$. □

以 n, p 为参数的二项分布的随机变量, 可理解为 n 个相互独立且服从以 p 为参数 $(0-1)$ 分布的随机变量.

例

一民航送客车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车. 如果到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车的次数. 求 $E(X)$. (设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各位旅客是否下车是相互独立的)

解. $X_i = \begin{cases} 0 & 第 i 站没有人下车; \\ 1 & i 站有人下车. \end{cases} \quad i = 1, 2, ..., 10$

则 $X = X_1 + ... + X_{10}$.

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 不下车 $\frac{9}{10}$, 则 20 位旅客有下车的概率 $1 - (\frac{9}{10})^{20}$.

$E(X_i) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}$, $X \sim b(10, 1 - (\frac{9}{10})^{20})$.

所以

$$E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 10 \cdot (1 - \frac{9}{10})^{20}. \qquad \square$$

本题是将 X 分解成数个随机变量之和,

$$X = X_1 + ... + X_n$$

然后由

$$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$

求得数学期望. 这种处理方法具有一定的普适性.

小结

- X 为离散型随机变量, 则 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$.
- X 为连续型随机变量, 则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$.
- X 为离散型随机变量, 则 $Y=g(X)$ 的期望为
$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k.$$
- X 为连续型随机变量, 则 $Y=g(X)$ 的期望为
$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

- (X, Y) 为离散型随机变量, 则 $Z = g(X, Y)$ 的期望为

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}.$$

- (X, Y) 为连续型随机变量, 则 $Z = g(X, Y)$ 的期望为

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)\,dxdy.$$

- 线性性质: $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c.$
- 独立条件下的可乘性质: X, Y 独立, 则
$E(XY) = E(X)E(Y).$