线性代数-5

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 15 日

本次课内容

1. 矩阵的定义
2. 特殊矩阵
3. 矩阵的应用
4. 矩阵的运算

定义 (矩阵 Matrix)

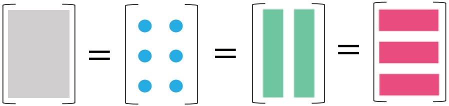
由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}, (i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n)$, 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵, 简称 $m\times n$ 矩阵, 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常可记为大写字母的 A、$A_{m\times n}$、(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$.

理解矩阵——4 个视角

- 一个矩阵 $(m \times n)$ 可以被视为 1 个矩阵，mn 个数，n 个列和 m 个行.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

1个矩阵　6个数　2个3维列向量　3个2维行向量

图: 从四个角度理解矩阵

- 实矩阵、复矩阵、0-1 矩阵：a_{ij} 取实数、复数、0 或 1 的矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \pi \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

特殊矩阵

- 实矩阵、复矩阵、0-1 矩阵: a_{ij} 取实数、复数、0 或 1 的矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \pi \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **零矩阵:** $a_{ij} = 0, \forall i, j$, 元素全为零的矩阵, 记为 O.

$$O_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行矩阵（行向量）：$m = 1$，即只有一行的矩阵，

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

为避免书写混肴，行矩阵也记为

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

- 行矩阵（行向量）：$m=1$, 即只有一行的矩阵,

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

为避免书写混肴, 行矩阵也记为

$$A=(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

- **列矩阵（列向量）：$n=1$, 即只有一列的矩阵,**

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

为书写方便, 列矩阵常写为 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$.

- 方阵.
  $m=n$, 即行数和列数相同的矩阵, 称为 n 阶方阵. 此时可记为 A_n.

$$A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 上 (下) 三角矩阵.
  $a_{ij}=0, i>j$, 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能出现在主对角线上方.

$$A_{上}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 上 (下) 三角矩阵.

  $a_{ij}=0, i>j$, 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能出现在主对角线上方.

$$A_{上}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  $a_{ij}=0, i<j$, **即主对角线上方元素全为零的方阵, 称为下三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能出现在主对角线下方.**

$$A_{下}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 对角矩阵.

  $a_{ij}=0, i\neq j$, 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  对角阵可简记为 $\Lambda = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

- 对角矩阵.

  $a_{ij}=0, i\neq j$, 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

  对角阵可简记为 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

- 单位矩阵.

$$E=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

  即对角元全为 1 的对角阵, 称为单位阵. 记为 E_n 或 E.

- 对称矩阵.

  $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{对称} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 对称矩阵.
  $a_{ij}=a_{ji},\forall i,j$, 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{对称}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 反对称矩阵.
  $a_{ij}=-a_{ji},\forall i,j$, 即沿着对角线对称元素互为相反数的方阵, 称为反对称阵.

$$A_{反对称}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵：
  - 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
  - 每个台阶只有一行；
  - 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行阶梯形矩阵：
  - 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0;
  - 每个台阶只有一行;
  - 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 反例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非零行的首个非零元为1;
  - 这些1所在的列其他元素都为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非零行的首个非零元为1;
  - 这些1所在的列其他元素都为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} E_n & O \end{pmatrix}_{m\times n}, E_n.$$

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非零行的首个非零元为1;
  - 这些1所在的列其他元素都为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} E_n & O \end{pmatrix}_{m\times n}, E_n.$$

- 行阶梯形矩阵 $\supset$ 行最简形矩阵 $\supset$ 标准形矩阵.

矩阵的应用–矩阵和线性方程组

例 (线性方程组的矩阵表示)

m 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为 $AX=\beta$.

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B=(A\quad \beta)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为 $AX=\beta$.

- A 称为线性方程组的系数矩阵;

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$B=(A\quad\beta)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为 $AX=\beta$.

- A 称为线性方程组的系数矩阵;
- B 称为线性方程组的增广矩阵;

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B=(A\ \ \beta)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为 $AX=\beta$.

- A 称为线性方程组的系数矩阵;
- B 称为线性方程组的增广矩阵;
- X 和 β 分别称为线性方程组的未知量矩阵和常数项矩阵.

例 (线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{2}$$

则得到 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示上面线性变换，则有

$$Y=AX.$$

例 (线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{2}$$

则得到 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y=AX.$$

- 线性变换和 n 阶方阵一一对应.
- 若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 则 $Y=AX$ 称为线性映射(书中不同).

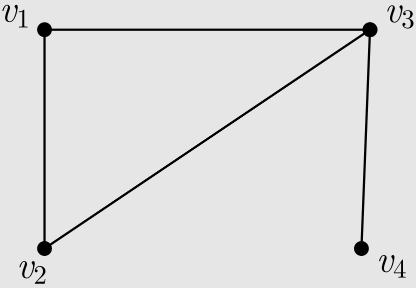
- 设线性变换
$$Y = AX.$$
A 分别取
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\alpha\alpha^T}{|\alpha|^2} = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 y_0 \\ x_0 y_0 & y_0^2 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad E - 2\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0^2 & -2x_0 y_0 \\ -2x_0 y_0 & 1 - 2y_0^2 \end{pmatrix}$$
则分别对应伸缩变换、在 $\alpha = (x_0, y_0)^T$ 方向上的投影变换、逆时针旋转 θ 的旋转变换、关于以单位向量 $\alpha = (x_0, y_0)^T$ 为法向量的平面的反射变换.

例 (图的关联矩阵)

- 图 (Graph).

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{点 } v_i, v_j \text{ 之间有边},\\ 0, & \text{点 } v_i, v_j \text{ 之间无边}.\end{cases}$$

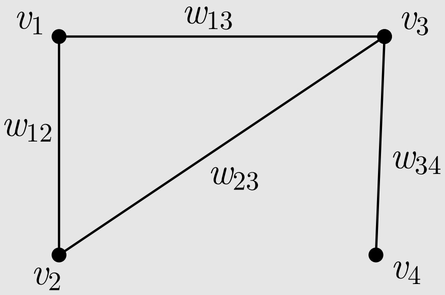
$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$



例 (图的矩阵表示)

- 加权图 (Weighted Graph).

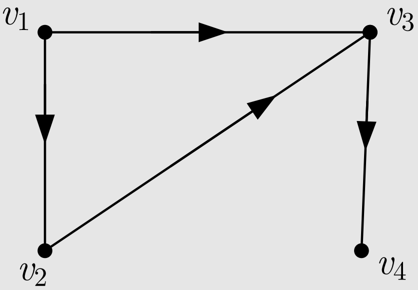
$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ w_{12} & 0 & w_{23} & 0 \\ w_{13} & w_{23} & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & w_{34} & 0 \end{pmatrix}$$



例 (图的矩阵表示)

- 有向图 (Direct Graph).

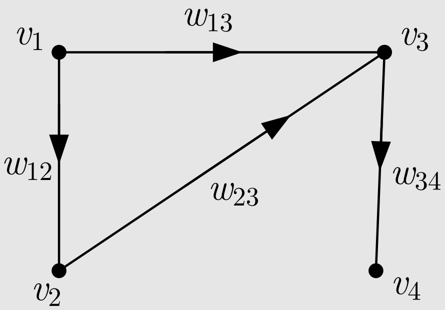
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



例 (图的矩阵表示)

- 有向加权图 (Direct Weighted Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



例 (数字图像的存储和处理)

- 数字图像在计算机等电子设备中都是以矩阵的形式存储和显示的.
  - 比如，一张 1600*1000 像素的图像在计算机中就是一个 1600×1000 的矩阵.
    - 二值图像的矩阵的 a_{ij} 取值为 0 和 1;
    - 灰度图像的矩阵的 a_{ij} 取值为 $0 - 255$(即一字节 8 位二进制数的范围);
    - 彩色图像的矩阵的 a_{ij} 取值为一个三原色向量 (R, G, B).
- 对图像的处理和编辑就是对矩阵的处理.
  - 算法思想一般是：用一个低阶方阵 (称为模板或者算子) 去改变图像矩阵的每一个像素值.

- 不同方向的二阶 Laplace 检测算子：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4_{\triangle} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4_{\triangle} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8_{\triangle} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

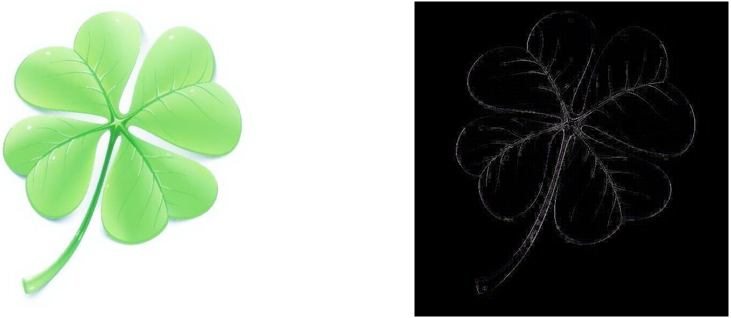


图: 边缘提取

矩阵的运算

- $A = B$
- $A + B$
- $\lambda \cdot A$
- AB
- A^k&$f(A)$
- A^T
- $|A|$
- $\mathrm{tr}(A)$
- A^* 和 A^{-1} (下次课)

矩阵的相等

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $m=m'$, $n=n'$, 则称 A 和 B 是同型矩阵.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $m=m'$, $n=n'$, 则称 A 和 B 是同型矩阵.
- 对于同型矩阵 A, B,

$$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}, \forall i,j$$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $m=m'$, $n=n'$, 则称 A 和 B 是同型矩阵.
- 对于同型矩阵 A,B,

$$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij},\forall i,j$$

- 例:

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 若 A,B 同型，则

$$A+B \triangleq (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 若 A, B 同型，则

$$A+B \triangleq (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

- 性质：
  - 交换律: $A+B=B+A$
  - 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 若 A,B 同型，则

$$A+B\triangleq(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

- 性质：
  - 交换律: $A+B=B+A$
  - 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$
- 负矩阵：

$$-A\triangleq(-a_{ij})$$

矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 若 A,B 同型，则

$$A+B\triangleq(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

- 性质：
  - 交换律: $A+B=B+A$
  - 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$

- 负矩阵：

$$-A\triangleq(-a_{ij})$$

- 矩阵减法：A,B 同型

$$A-B\triangleq A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})$$

矩阵的数乘

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的数乘

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

- $$\lambda A \triangleq (\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

矩阵的数乘

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

- $$\lambda A \triangleq (\lambda a_{ij})_{m\times n}$$
- 性质:
  - 结合律: $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
  - 矩阵对数的分配律: $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
  - 数对矩阵的分配律: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

对于同型矩阵 A, B 和数 k, l, 称 $kA + lB$ 为矩阵 A, B 的线性运算.

例

已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

求解矩阵方程 $2A + 5X - B = 0$.

矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $n=m'$, 则

$$AB \triangleq (c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj})_{m\times n'}$$

c_{ij} 为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的内积.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$.

- 如果 $n=m'$，则

$$AB \triangleq (c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj})_{m\times n'}$$

  c_{ij} 为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的内积.

- 性质：
  - 不满足交换律: AB 和 BA 可能不相等.
  - 结合律：$(AB)C=A(BC)$
  - 数乘和矩阵乘法可交换：$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
  - 分配律：$A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$
  - **EA=AE=A**

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- AB 和 BA 可能不同型（$i.e.$ 不相等）.

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解：

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解：

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

矩阵乘法不满足交换律

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解：

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\qquad BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\square$

- AB 和 BA 同型当且仅当 A 和 B 是同阶方阵，但即使 AB 和 BA 同型也可能 $AB \neq BA$.

矩阵乘法不满足交换律

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA.

解：

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\qquad BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

□

- AB 和 BA 同型当且仅当 A 和 B 是同阶方阵, 但即使 AB 和 BA 同型也可能 $AB\neq BA$.
- 特别地, 对两个 n 阶方阵 A, B, 若 $AB=BA$, 则称方阵 A 和 B 是可交换的.

矩阵乘法不满足消去律

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

但

$$AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$$

且 $A \neq O, B \neq C.$

矩阵乘法不满足消去律

例

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-7&1\\1&2\end{pmatrix},$$

但

$$AB=AC=\begin{pmatrix}-5&5\\-10&10\end{pmatrix}$$

且 $A\neq O, B\neq C$.

- 消去律不成立. $AB=AC, A\neq O \not\Rightarrow B=C$;
- $AB=0 \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$.

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$

下面等式成立？

  - $(AB)^k = A^k B^k$,
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$,
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$,

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$
- 当 $AB = BA$ 时，下面等式成立.
  - $(AB)^k = A^k B^k$,
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$,
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$,

例

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

证明 $A^k = \lambda^{k-1} A$.

- 矩阵多项式：将一元多项式

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的 x 换为方阵 A，

$$\varphi(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注：规定 $A^0 = E$.

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的 x 换为方阵 A,

$$\varphi(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注：规定 $A^0 = E$.

- 设对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 则

$$\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k),$$

$$\varphi(\Lambda) = \mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1), \cdots, \varphi(\lambda_n)).$$

- 令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，定义 A 的转置

$$A^T \triangleq (a_{ji})_{n\times m}$$

- 性质：
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$

例

计算 $(AB)^T$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

转置和对称矩阵

- A 为对称阵 $\Leftrightarrow A^T = A$.
- A 为反对称阵 $\Leftrightarrow A^T = -A$.

例

设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $X^T X = 1$,

$$H = E - 2XX^T.$$

证明 H 为对称阵，且 $HH^T = E$.

证明:

- A 为 n 阶方阵，则可以给出 A 的行列式，记为 $\det A$ 或 $|A|$.
- 性质:
  - $|A^T| = |A|$
  - $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$
  - $|A + B| \neq |A| + |B|$

例

已知 A, B, C 为四阶方阵, $|A| = 2, |B| = -3, |C| = 3$, 求 $|-3AB^TC|$.

方阵的迹

- $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，A 的迹 $\mathrm{tr}A$ 定义为对角线元素之和.

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

- 性质:
  - $\mathrm{tr}A^T = \mathrm{tr}A$
  - $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \mathrm{tr}A$
  - $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$

小结

- $A = B$
- $A + B$
- $\lambda \cdot A$
- AB
- A^k&$f(A)$
- A^T
- $|A|$
- $\mathrm{tr}A$

小结

- $A = B$
- $A + B$
- $\lambda \cdot A$
- AB
- A^k&$f(A)$
- A^T
- $|A|$
- $\mathrm{tr}A$
- A^* 和 A^{-1} (下次课)

作业

- Page_{44}. 2; 3-(2 注意线性变换对应的矩阵为方阵); 5
- Page_{58}-Page_{59} 1; 2; 3-(1,2,5); 4; 6 ; 7; 8; 10
- Page_{65}-Page_{66} 3-(2,4); 4; 5-(1); 7; 8; 11

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 15 日