线性代数-6

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 14 日

本次课内容

1. 伴随矩阵

2. 逆矩阵的定义和性质

3. 逆矩阵的应用

方阵的伴随矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- A 的伴随矩阵A^* 定义为:

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

  其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.
- 注意: A^* 中的 A_{ij} 的指标有个转置!!!

例

求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵.

方阵的伴随

例

求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵.

性质

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

.

逆矩阵的引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

逆矩阵的引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

- 在计算一次方程 $ax = b$ 时，等号两边同乘 $\frac{1}{a}$, 可解得 $x = \frac{b}{a}$.

逆矩阵的引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

- 在计算一次方程 $ax = b$ 时，等号两边同乘 $\frac{1}{a}$, 可解得 $x = \frac{b}{a}$.
- 一个自然的问题：对于矩阵 A 能不能给出一个类似 $\frac{1}{A}$ 的概念？在求线性方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 时，能不能用

$$X = \frac{\boldsymbol{\beta}}{A}$$

求解？

逆矩阵的引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

- 在计算一次方程 $ax = b$ 时，等号两边同乘 $\frac{1}{a}$, 可解得 $x = \frac{b}{a}$.
- 一个自然的问题：对于矩阵 A 能不能给出一个类似 $\frac{1}{A}$ 的概念？
  在求线性方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 时，能不能用

$$X = \frac{\boldsymbol{\beta}}{A}$$

  求解？
- $\Rightarrow$ 逆矩阵

定义 (逆矩阵)

对于 A, 如果存在一个 B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

逆矩阵

定义 (逆矩阵)

对于n 阶方阵A, 如果存在一个n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

定义 (逆矩阵)

对于n阶方阵A, 如果存在一个n阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

性质

如果矩阵 A 可逆, 则 A 的逆矩阵唯一.

逆矩阵

定义 (逆矩阵)

对于n阶方阵A, 如果存在一个n阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

性质

如果矩阵 A 可逆，则 A 的逆矩阵唯一.

- 将 A 的唯一逆矩阵记为 A^{-1}.

矩阵可逆的判定：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

矩阵可逆的判定：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

- 若 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$. （定义的简化！）

矩阵可逆的判定：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

- 若 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$. （定义的简化！）
- 若 A 可逆，则 $A^* = |A|A^{-1}$.

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

- 若 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$. （定义的简化！）
- 若 A 可逆，则 $A^* = |A|A^{-1}$.
- $|A| = 0$，则称 A 为奇异的，否则称为非奇异的.

矩阵可逆的判定：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

- 若 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$.（定义的简化！）
- 若 A 可逆，则 $A^* = |A|A^{-1}$.
- $|A| = 0$，则称 A 为奇异的，否则称为非奇异的.
- A可逆$\Leftrightarrow$$A$非奇异$\Leftrightarrow$$A$ 对应的线性变换非退化($\Leftrightarrow$ A满秩).

性质

若 A, B 为 n 阶可逆矩阵，则

- A^{-1} 可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 对于 $\lambda \neq 0$, λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$;
- A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- AB 可逆，且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

.

性质

若 A, B 为 n 阶可逆矩阵, 则

- A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 对于 $\lambda \neq 0$, λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$;
- A^T 可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- AB 可逆, 且
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
.

P 可逆时, 消去律成立. 即

- 左消去律: $PA = PB \Rightarrow A = B$;
- 右消去律: $AP = BP \Rightarrow A = B$.

例题 $\left(A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}\right)$

例

1. 二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求逆矩阵.

例

1. 二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求逆矩阵.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例题 $\left(A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}\right)$

例

1. 二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求逆矩阵.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. 求方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例题 $\left(A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}\right)$

例

1. 二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求逆矩阵.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. 求方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

例

1. 二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求逆矩阵.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. 求方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.

例

1. 二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求逆矩阵.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. 求方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$. -16

例

求解矩阵方程 $XA = 2X + B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

性质

A 为 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $A = P \cdot diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$, 则矩阵多项式

$$\varphi(A) = P \cdot diag(\varphi(\lambda_1), \cdots, \varphi(\lambda_n)) \cdot P^{-1}.$$

性质

A 为 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $A = P \cdot diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$, 则矩阵多项式

$$\psi(A) = P \cdot diag(\psi(\lambda_1), \cdots, \psi(\lambda_n)) \cdot P^{-1}.$$

- 对于 n 阶方阵 A, B, 若存在可逆矩阵 P, 使得

$$PAP^{-1} = B$$

则称 A 和 B 是相似的.

性质的证明

- 如果 $A = P\Lambda P^{-1}$, 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$, 故

$$\begin{aligned}
\psi(A) &= a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m \\
&= a_0 PEP^{-1} + a_1 P\Lambda P^{-1} + \cdots + a_m P\Lambda^m P^{-1} \\
&= P(a_0 E + a_1 \Lambda + \cdots + a_m \Lambda^m) P^{-1} \\
&= P\psi(\Lambda) P^{-1}
\end{aligned}$$

性质的证明

- 如果 $A = P\Lambda P^{-1}$, 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$, 故

$$
\begin{aligned}
\psi(A) &= a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m \\
&= a_0 PEP^{-1} + a_1 P\Lambda P^{-1} + \cdots + a_m P\Lambda^m P^{-1} \\
&= P(a_0 E + a_1 \Lambda + \cdots + a_m \Lambda^m) P^{-1} \\
&= P\psi(\Lambda) P^{-1}
\end{aligned}
$$

- 若 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为对角矩阵，则

$$\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k).$$

从而

$$\psi(\Lambda) = \mathrm{diag}(\psi(\lambda_1), \psi(\lambda_2), \cdots, \psi(\lambda_n)).$$

例

设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $AP = P\Lambda$, 求 A^n.

逆矩阵的应用–求矩阵多项式

例

设 $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. $AP=P\Lambda$, 求 A^n.

例

求矩阵多项式 $f(A)=A^3+2A^2-3A$, 其中 $P\Lambda=AP$,

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -3\end{pmatrix}.$$

小结

- 伴随矩阵
- 逆矩阵的定义
- A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- 逆矩阵的应用
  - 解矩阵方程，
  - 求矩阵多项式

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 14 日