

# 线性代数-7

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 9 月 16 日

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$ 
  - 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2;$

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;

## 回顾：矩阵的运算

### ● $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;



## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

- $|A|$

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$ ;

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$ ;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$ ;

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$ ;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$ ;
- 一般  $|A + B| \neq |A| + |B|$ ;

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$ ;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$ ;
- 一般  $|A + B| \neq |A| + |B|$ ;

- $A^*$

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$ ;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$ ;
- 一般  $|A + B| \neq |A| + |B|$ ;

- $A^*$

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$ ;

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$ ;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$ ;
- 一般  $|A + B| \neq |A| + |B|$ ;

- $A^*$

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$ ;
- $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$ ;

## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$ ;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$ ;
- 一般  $|A + B| \neq |A| + |B|$ ;

- $A^*$

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$ ;
- $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$ ;

- $A^{-1}$



## 回顾：矩阵的运算

- $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

- $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$ ;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$ ;
- 一般  $|A + B| \neq |A| + |B|$ ;

- $A^*$

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$ ;
- $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$ ;

- $A^{-1}$

- $A$  可逆  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ ;

## 回顾：矩阵的运算

### • $AB$

- 一般  $AB \neq BA \Rightarrow$  左乘、右乘、可交换;
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$ ;
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$  或  $B = 0$ ;
- $AX = AY \nRightarrow X = Y$ ;
- $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 比如  $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$ ;

### • $|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$ ;
- $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$ ;
- 一般  $|A + B| \neq |A| + |B|$ ;

### • $A^*$

- $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$ ;
- $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$ ;

### • $A^{-1}$

- $A$  可逆  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ ;
- $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ .

# 本次课内容

1. 矩阵分块和分块矩阵
2. 矩阵的初等变换
3. 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准矩阵

# 分块矩阵的概念

● 例:

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \triangleq \left( \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

其中

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

# 分块矩阵的概念

● 例:

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \triangleq \left( \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

● 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵, 就是矩阵分块;

# 分块矩阵的概念

● 例:

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \triangleq \left( \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵, 就是**矩阵分块**;
- **每个小矩阵被称为子块**;

# 分块矩阵的概念

● 例:

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是**矩阵分块**；
- 每个小矩阵被称为**子块**；
- **以子块为元素的形式上的矩阵被称为分块矩阵。**

# 特殊的分块矩阵

- 列分块矩阵和行分块矩阵

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} \hline a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad \hline a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad a_{24} \quad \hline a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \quad a_{34} \quad \hline \end{array} \right)$$

可分别记为  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  和  $\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$ .



# 特殊的分块矩阵

- 分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中  $A$  为  $n$  阶方阵,  $A_1, \dots, A_s$  皆为方阵, 其余位置为  $0$  矩阵.

## 分块矩阵的运算规则和矩阵的运算规则类似

- 矩阵  $A, B$  同型, 且分法相同, 则

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $$\lambda \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

## 分块矩阵的乘法和分块矩阵的转置

- 矩阵  $A, B$  可乘, 且对任意  $i, j$ , 子块  $A_{ik}, B_{kj}$  可乘, 则

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中  $C_{ij} = \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj}$ .

- $$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

## 分块对角矩阵的行列式和逆矩阵



$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|$$

•  $A$  可逆当且仅当  $A_1, A_2, \dots, A_s$  可逆, 且

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

## 再探矩阵的乘法

- 观点 1:  $A$  行分块,  $B$  列分块:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} \cdot (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1^T \beta_1 & \alpha_1^T \beta_2 & \cdots & \alpha_1^T \beta_n \\ \alpha_2^T \beta_1 & \alpha_2^T \beta_2 & \cdots & \alpha_2^T \beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m^T \beta_1 & \alpha_m^T \beta_2 & \cdots & \alpha_m^T \beta_n \end{pmatrix} = C \end{aligned}$$

其中  $c_{ij} = \alpha_i^T \beta_j = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}$ .

## 再探矩阵的乘法

例

实矩阵  $A = O$  当且仅当方阵  $A^T A = O$ .

## 再探矩阵的乘法

例

实矩阵  $A = O$  当且仅当方阵  $A^T A = O$ .

- $A^T A$  为对称矩阵.

## 再探矩阵的乘法

- 观点 2:  $A$  不分块,  $B$  列分块:

$$AB = A \cdot (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$



## 再探矩阵的乘法

- 观点 2:  $A$  不分块,  $B$  列分块:

$$AB = A \cdot (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$

- 矩阵方程  $AX = B$ , 将  $X, B$  写为列分块的形式,

$$\begin{aligned} AX &= A \cdot (X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n) = (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n) \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = B \end{aligned}$$

## 再探矩阵的乘法

- 观点 2:  $A$  不分块,  $B$  列分块:

$$AB = A \cdot (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$

- 矩阵方程  $AX = B$ , 将  $X, B$  写为列分块的形式,

$$\begin{aligned} AX &= A \cdot (X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n) = (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n) \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  矩阵方程可以看成  $n$  个线性方程组  $AX_i = \beta_i$ .

## 再探矩阵的乘法

- 观点 3:  $A$  列分块,  $B$  行分块:

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 \beta_1^T + \alpha_2 \beta_2^T + \cdots + \alpha_n \beta_n^T \end{aligned}$$

## 再探矩阵的乘法

- 观点 3:  $A$  列分块,  $B$  行分块:

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 \beta_1^T + \alpha_2 \beta_2^T + \cdots + \alpha_n \beta_n^T \end{aligned}$$

- 例:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (3 \quad 2) + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} (1 \quad 0) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 线性方程组 $AX = \beta$ 的向量表示方法

将  $A$  列分块,  $X$  行分块, 则

$$\begin{aligned} AX &= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta \end{aligned}$$

上式称为线性方程组的向量表达.

- $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$  称为向量  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  的一个线性组合.

## 练习

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求  $|A^5|$ ,  $A^4$  和  $A^{-1}$ .

## 练习

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求  $|A^5|$ ,  $A^4$  和  $A^{-1}$ .

Answer:  $|A^5| = -40^5$ ,

$$A^4 = \begin{pmatrix} 10^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & -2^5 & 2^4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

## 第三章. 矩阵的初等变换与线性方程组



消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

(4)

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} \div 2]{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{2} \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -2 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (2)$$

(4)

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} \div 2]{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{2} \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -2 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} - 2\textcircled{1}]{\textcircled{2} - 2\textcircled{1}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ -3x_2 + 3x_3 & = -6 & \textcircled{2} \\ -5x_2 + 5x_3 & = -10 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (3)$$

(4)

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} \div 2]{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{2} \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -2 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} - 2\textcircled{1}]{\textcircled{2} - 2\textcircled{1}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ -3x_2 + 3x_3 & = -6 & \textcircled{2} \\ -5x_2 + 5x_3 & = -10 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (3)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} + 5\textcircled{2}]{\textcircled{2} \div (-3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & \textcircled{1} \\ x_2 - x_3 & = 2 & \textcircled{2} \\ 0 & = 0 & \textcircled{3} \end{cases} \quad (4)$$

● 取  $x_3$  为自由未知数, 解得

$$\begin{cases} x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 2 + x_3 \end{cases}$$

令  $x_3 = c$ , 则线性方程组的通解为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + 2 \\ c + 2 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中  $c$  为任意常数.

- 取  $x_3$  为自由未知数, 解得

$$\begin{cases} x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 2 + x_3 \end{cases}$$

令  $x_3 = c$ , 则线性方程组的通解为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + 2 \\ c + 2 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中  $c$  为任意常数.

- 线性方程组的三种操作/变换不改变方程组的解.

- 交换两个方程的位置:  $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$
- 方程等号两端同乘非零常数  $k$ :  $\textcircled{i} \cdot k$
- 方程加上另一个方程的  $k$  倍:  $\textcircled{i} + k \cdot \textcircled{j}$

# 矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

## 矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$



## 矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

## 矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} &\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - 5r_2]{r_2 \times (-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} &\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - 5r_2]{r_2 \times (-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注：矩阵之间的变换用箭头表示；行列式的变换用等号。

# 矩阵的初等变换

例 (矩阵的三种初等行变换)

- 交换两行;  $(r_i \leftrightarrow r_j)$
- 某行乘以非零数  $k$ ;  $(r_i \times k)$
- 某行加上另外一行的  $k$  倍.  $(r_i + kr_j)$

# 矩阵的初等变换

例 (矩阵的三种初等行变换)

- 交换两行;  $(r_i \leftrightarrow r_j)$
  - 某行乘以非零数  $k$ ;  $(r_i \times k)$
  - 某行加上另外一行的  $k$  倍.  $(r_i + kr_j)$
- 类似, 可以定义矩阵的初等列变换. 初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

# 矩阵的初等变换

## 例 (矩阵的三种初等行变换)

- 交换两行;  $(r_i \leftrightarrow r_j)$
  - 某行乘以非零数  $k$ ;  $(r_i \times k)$
  - 某行加上另外一行的  $k$  倍.  $(r_i + kr_j)$
- 
- 类似, 可以定义矩阵的初等列变换. 初等行变换和初等列变换统称为初等变换.
  - 三种初等变换都是可逆的, 且逆变换是相同类型的变换.
    - $r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow r_i \leftrightarrow r_j$ ;
    - $r_i \times k \Rightarrow r_i \times \frac{1}{k}$ ;
    - $r_i + kr_j \Rightarrow r_i - kr_j$ .

# 矩阵的等价

- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等行变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  行等价, 记为  $A \sim^r B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等列变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  列等价, 记为  $A \sim^c B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  等价, 记为  $A \sim B$ .

# 矩阵的等价

- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等行变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  行等价, 记为  $A \sim^r B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等列变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  列等价, 记为  $A \sim^c B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  等价, 记为  $A \sim B$ .

自然的问题:

- 在相互等价的矩阵中, 什么矩阵简单?
- 等价的矩阵有什么共性?
- 对矩阵进行初等变换有什么用处?



# 矩阵的等价

- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等行变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  行等价, 记为  $A \sim^r B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等列变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  列等价, 记为  $A \sim^c B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  等价, 记为  $A \sim B$ .

自然的问题:

- 在相互等价的矩阵中, 什么矩阵简单?  
     $\Rightarrow$  行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵.
- 等价的矩阵有什么共性?
- 对矩阵进行初等变换有什么用处?

# 矩阵的等价

- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等行变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  行等价, 记为  $A \sim^r B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等列变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  列等价, 记为  $A \sim^c B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  等价, 记为  $A \sim B$ .

自然的问题:

- 在相互等价的矩阵中, 什么矩阵简单?  
⇒ 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵.
- 等价的矩阵有什么共性?  
⇒ 矩阵的秩.
- 对矩阵进行初等变换有什么用处?

# 矩阵的等价

- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等行变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  行等价, 记为  $A \sim^r B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等列变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  列等价, 记为  $A \sim^c B$ ;
- 若矩阵  $A$  可以经过有限初等变换变为矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  和矩阵  $B$  等价, 记为  $A \sim B$ .

自然的问题:

- 在相互等价的矩阵中, 什么矩阵简单?  
⇒ 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵.
- 等价的矩阵有什么共性?  
⇒ 矩阵的秩.
- 对矩阵进行初等变换有什么用处?  
⇒ 判断/求解线性方程组的解.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 5r_2]{r_2 \times (-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

- 通过六步初等变换，矩阵下方的 0 不断变多.
- 矩阵 (7) 和 (8) 下方的零构成一个阶梯形状.

# 行阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵：
  - 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
  - 每个台阶只有一行；
  - 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵：

- 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
- 每个台阶只有一行；
- 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 反例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非零行的首个非零元为1；
  - 这些1所在的列其他元素都为0.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵:

- 行阶梯形;
- 非零行的首个非零元为1;
- 这些1所在的列其他元素都为0.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$



# 行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵:

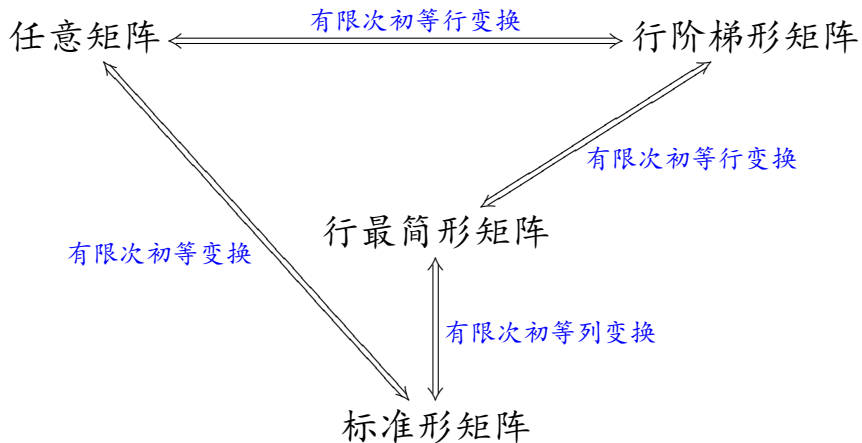
- 行阶梯形;
- 非零行的首个非零元为1;
- 这些1所在的列其他元素都为0.

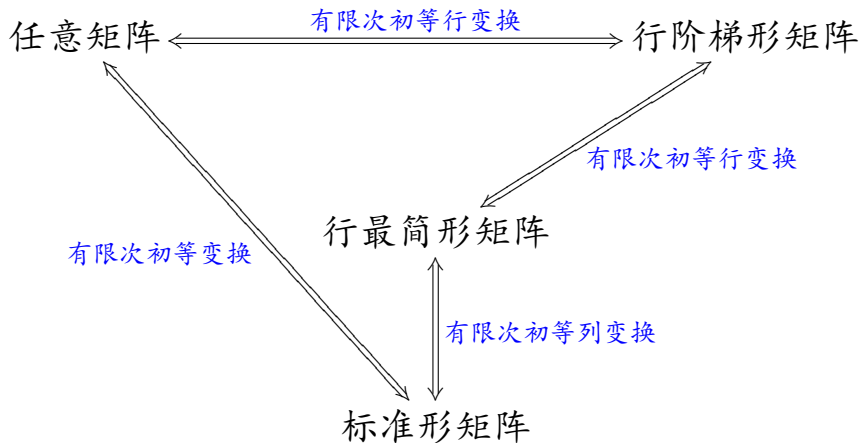
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

- 行阶梯形矩阵  $\supset$  行最简形矩阵  $\supset$  标准形矩阵.





- 矩阵的行阶梯形不唯一，但行最简形和标准形唯一。

## 例题

例

利用初等行变换将  $A$  依次化为行阶梯形、行最简形; 再利用初等列变换化为标准形

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

# 小结

---

- 1、 矩阵分块和分块矩阵
- 2、 矩阵的初等变换和等价
- 3、 矩阵的行阶梯形、行最简形和标准形

矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 求  $|A^2|$ ,  $A^3$  和  $A^{-1}$ .
- 首先利用初等行变换将  $A$  依次化为行阶梯形、行最简形; 然后利用初等列变换化为标准形.

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2024 年 9 月 16 日