

復旦大學

博 士 学 位 论 文 (学术学位)

Coxeter orbifold 上的拓扑与几何

The topology and geometry of Coxeter orbifolds

院 系: 数学科学学院

专 业: 基础数学

姓 名: 吴利苏

指 导 教 师: 吕志 教授

完 成 日 期: 2021 年 4 月 17 日

指导教师

吕志 教授

指导小组成员

马继明 副教授

王国桢 副教授

目 录

| | |
|---|-----|
| 目 录 | i |
| 摘 要 | v |
| Abstract | vii |
| 第零章 绪论 | 1 |
| 0.1 Orbifold 背景 | 1 |
| 0.1.1 Satake 和 Thurston 的工作 — 流形的推广 | 1 |
| 0.1.2 Dixon, Harvey, Vafa 和 Witten — orbifold 上的弦理论 | 2 |
| 0.1.3 Chen, Ruan 等人的工作 — Gromov-Witten 不变量和 Chen-Ruan 上同调 | 2 |
| 0.2 环面拓扑和 Coxeter 群 | 3 |
| 0.3 研究的问题和内容 | 5 |
| 0.4 主要结论 | 6 |
| 0.4.1 单 orbifold 上的拓扑和几何 | 8 |
| 0.4.2 Coxeter 复形的 orbifold 整同调 | 12 |
| 0.4.3 直角 Coxeter 复形上的 orbifold Stiefel-Whitney 类 | 14 |
| 0.5 进一步研究的问题 | 16 |
| 0.6 论文结构 | 17 |
| 第一章 Orbifold, Coxeter orbifold 和 Coxeter 复形 | 19 |
| 1.1 Orbifold 和 orbispace | 19 |
| 1.2 Coxeter orbifold | 22 |
| 1.3 Coxeter 复形 | 24 |

| | |
|---|-----------|
| 1.3.1 q -复形和 G -CW 复形 | 24 |
| 1.3.2 Coxeter 复形 | 25 |
| 1.4 一些实用的模型 | 27 |
| 1.4.1 群的单复形 | 27 |
| 1.4.2 带权单纯复形 | 27 |
| 第二章 单 orbifold 上的非球面性质和非环面性质 | 29 |
| 2.1 Orbifold 基本群和 orbifold 同伦群 | 29 |
| 2.1.1 Orbifold 基本群和 orbifold 同伦群的等价定义 | 29 |
| 2.1.2 Orbifold 基本群的计算 | 32 |
| 2.1.3 群作用, 基本域和有限生成离散群的表现 | 34 |
| 2.2 单 orbifold 和单手柄 | 37 |
| 2.2.1 定义与概念的推广 | 37 |
| 2.2.2 单手柄的 orbifold 基本群 | 39 |
| 2.2.3 单手柄的万有覆叠 | 44 |
| 2.2.4 非球面性, 旗性和非正曲率 | 50 |
| 2.2.5 非环面性, \square 性和 orbifold 基本群中的 \mathbb{Z}^2 子群 | 52 |
| 第三章 Orbifold 同调群 | 63 |
| 3.1 Orbifold (上) 同调的回顾 | 63 |
| 3.1.1 de Rham 上同调 | 63 |
| 3.1.2 Chen-Ruan 上同调 | 63 |
| 3.1.3 等变同调和等变上同调 | 64 |
| 3.2 Coxeter 复形上的 orbifold 同调 | 65 |
| 3.2.1 定义 | 65 |
| 3.2.2 同伦不变性 | 69 |
| 3.2.3 相对同调和切除定理 | 70 |
| 3.2.4 映射度 | 71 |
| 3.2.5 Hurewicz 定理 | 73 |
| 3.2.6 Orbifold 同调的计算 | 74 |
| 3.2.7 拓扑不变性 | 78 |
| 3.2.8 Orbifold 欧拉数 | 79 |
| 3.2.9 另一种 orbifold 同调 | 80 |

| | |
|---|------------|
| 3.2.10 例子 | 83 |
| 3.3 Coxeter 胞腔复形上的 orbifold 上同调 | 85 |
| 3.3.1 Orbifold 上同调群 | 85 |
| 3.3.2 $H^*(X; \mathbb{Z})$ 上的 cup 积 | 86 |
| 3.4 一般 orbifold 复形上的 orbifold 同调 | 86 |
| 第四章 Orbifold 示性类 | 89 |
| 4.1 Orbifold 向量丛 | 89 |
| 4.2 直角 Coxeter 复形上的 orbifold Stiefel-Whitney 类 | 92 |
| 4.2.1 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的线性表示 | 92 |
| 4.2.2 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的实 orbifold 向量丛和 orbifold Stiefel-Whitney 类 | 93 |
| 4.2.3 直角 Coxeter 复形上的实 orbifold 向量丛和 orbifold Stiefel-Whitney 类 | 97 |
| 4.2.4 公理化和例子 | 101 |
| 第五章 直角 Coxeter orbifold 及其覆叠流形上的几何 | 105 |
| 5.1 构造和定义 | 105 |
| 5.1.1 单 orbifold 上的覆叠流形 | 105 |
| 5.1.2 黎曼流形上的曲率 | 108 |
| 5.2 非正曲率 | 108 |
| 5.2.1 结论 | 108 |
| 5.2.2 证明 | 109 |
| 5.3 严格负曲率 | 110 |
| 5.4 双曲曲率 | 111 |
| 5.4.1 结论和证明 | 111 |
| 5.4.2 双曲 orbifold 和双曲带角流形 | 112 |
| 5.5 正 (数量) 曲率 | 113 |
| 5.5.1 结论和证明 | 113 |
| 5.5.2 二邻域和正截面曲率, 正 Ricci 曲率 | 114 |
| 5.5.3 正数量曲率 | 115 |
| 5.6 总结 | 115 |
| 参考文献 | 117 |

| | |
|---------------------|-----|
| 索 引 | 126 |
| 攻读博士学位期间完成的论文 | 129 |
| 致 谢 | 131 |
| 声 明 | 133 |

摘要

Coxeter orbifold (复形) 是一类特殊的 orbifold (orbispace), 它们的 orbifold 结构决定了它们奇点集上的一个面结构. 本文的主要目标就是研究 Coxeter orbifold (复形) 及其覆叠流形上的拓扑、几何与 Coxeter orbifold (复形) 自身组合之间的联系.

首先, 我们考虑了一类性质比较好的直角 Coxeter orbifold, 也就是单 orbifold (更特殊地, 单手柄). 每个单 orbifold 上都允许一个自然的覆叠流形, 称为单 orbifold 上的 manifold double. 我们利用 orbifold 胞腔分解的方法, 给出了单手柄的 orbifold 基本群的一个显示的群表现, 它是一个直角 Coxeter 群上的迭代 HNN 扩张. 结合组合群论中的方法, 我们分别给出了单手柄上的 orbifold 非球面性质 (asphericity) 和非环面性质 (atoroidality) 的一个等价的组合描述. 具体来说, 一个单手柄是 orbifold 非球面的当且仅当在组合上它是旗性的; 一个单手柄的 orbifold 基本群中包含秩为 2 的自由 Abel 子群当且仅当单手柄中存在 \square -belt. 进一步结合黎曼几何中的一些结果, 我们研究了单手柄的 manifold double 上的非正曲率、三维双曲曲率、三维正数量等曲率等度量结构的存在性和单手柄上的组合之间的联系.

其次, 利用爆破的想法, 我们定义了 Coxeter 复形上的一个真正 orbifold 意义的整系数同调群和 cup 积. 进一步, 我们证明了这些 orbifold 同调群上的一些同调性质, 比如 Hurewicz 定理, orbifold 欧拉数等. 特别地, 一个 Coxeter 复形的同调群也可以用它的面的通常同调群来表示, 从形式上看, 这是近复 orbifold 的 Chen-Ruan 上同调群和 moment-angle 流形上的 Hochster 公式的一个类似物.

最后, 基于我们定义的 orbifold 上同调, 我们讨论了直角 Coxeter 复形上的实 orbifold 向量丛, 并定义了相应的 orbifold Stiefel-Whitney 类. 和通常 Stiefel-Whitney 类类似, 这里定义的 orbifold Stiefel-Whitney 类也满足相应的公理化性质.

关键词：Coxeter orbifold; Coxeter 复形; 直角 Coxeter orbifold; 直角 Coxeter 复形; Coxeter 群; orbifold 基本群; orbifold 同调群; orbifold 上同调; orbifold Stiefel-Whitney 类; 双曲 orbifold; 非正曲率; 正数量曲率.

2000MR 主题分类： 57R18, 51F15, 55N32, 57S12

中图分类号： O189

Abstract

Coxeter orbifolds (resp. complexes) are special orbifolds (resp. orbispaces), each of whose orbifold structure naturally induce a facial structure on its singular set. The purpose of this paper is to study the relation of topology, geometry and combinatorics of Coxeter orbifolds (resp. complexes) and its covering manifolds.

Firstly, we consider certain right-angled Coxeter orbifolds (i.e. simple orbifolds, or more specifically, simple handlebodies), each of which has a natural covering manifold named its manifold double. By using the ideal of orbifold cellular decomposition, we give an explicit group presentation of orbifold fundamental group of each simple handlebody. Furthermore, combining the skills in combinatorial group theory, we give a pure combinatorially equivalent description of orbifold asphericity and atoroidality of a simple handlebody. That is, a simple handlebody is orbifold aspherical if and only if it is flag; there is a rank two free abelian subgroup in the orbifold fundamental group of a simple handlebody if and only if this simple handlebody contains a \square -belt. Based on those two conclusions and some results in Riemannian geometry, we can obtain some pure combinatorial obstructions of the existences of non-positive, hyperbolic and positive scalar curvatures on the manifold double of a simple handlebody.

Next, by using the idea of blow-up, we define an integral homology groups and cup product of Coxeter complexes in the sense of orbifold. Many homological properties are valid in our homology groups, such as Hurewicz theorem, orbifold Euler number, and so on. In particular, the orbifold homology groups of a Coxeter complex can be presented as the ordinary homology groups of its faces, which is an analogue of Chen-Ruan

cohomology groups of almost complex orbifolds and Hochster formulas of moment angle manifolds.

Finally, based on the cohomology ring we defined, we consider the real orbifold vector bundles over a right-angled Coxeter complex and define its associated orbifold Stiefel-Whitney classes. Similar to ordinary Stiefel-Whitney classes, orbifold Stiefel-Whitney classes here also satisfy the axiomatic properties.

Keywords: Coxeter orbifold, Coxeter complex, right-angled Coxeter orbifold, right-angled Coxeter complex, Coxeter group, orbifold fundamental group, orbifold homology group, orbifold cohomology, orbifold Stiefel-Whitney class, hyperbolic orbifold, nonpositive curvature, positive scalar curvature.

2000MR Subject Classification: 57R18, 51F15, 55N32, 57S12

Chinese Library Classification: O189

第零章 绪论

All in all, it seems that orbifolds live in the grey area between the “good old manifold kingdom” and the dark world populated by the “wild creature” of Alain Connes’ *noncommutative geometry*.

Kapovich’s book[58, P135]

0.1 Orbifold 背景

0.1.1 Satake 和 Thurston 的工作 — 流形的推广

Orbifold 是一类带奇点的拓扑空间, 每个 orbifold 局部上都等同于欧式空间 \mathbb{R}^n 在一个有限群作用下的轨道空间. (本文中所有提到的“等同”都是指保持奇点结构的同胚.) Orbifold 的概念最早出现在 1956 年, 当时 Satake [81] 称它为“ V -流形”. 在文献 [81, 82] 中, Satake 推广了微分流形中的一些概念, 定义了 orbifold 上的 orbifold 结构、orbifold 映射、orbifold 纤维丛、微分形式等概念, 以及定义了 orbifold 上的实系数的奇异、Čech、de Rham 等上同调群. 特别地, 他证明了 orbifold 上的 Gauss-Bonnet 公式. 从 Satake 的工作来看, orbifold 仍然保持了流形上的一些拓扑性质. 尤其在我们考虑实系数或有理系数时, orbifold 上的同调理论几乎和流形上的同调理论完全吻合.

在上世纪七八十年代时, Thurston 在他的讨论班上, 命名了“orbifold”这个名字. Thurston 的工作主要集中在三维流形, 比如三维流形的几何化猜想, 双曲化猜想等. 所以, 很自然地要考虑离散群非自由作用在一个三维流形上的商空间, 这恰好是一个商 orbifold. 因此, Thurston 的 orbifold 理论大多针对低维情况, 特别是允

许一个覆叠流形的商 orbifold. 在 Thurston 的讲义 [89] 中, 他给出了 orbifold 上的 orbifold 基本群、orbifold 覆叠空间的定义, 并将三维流形中的一些概念和结论推广到了 orbifold 上.

另外, 在 Haefliger [14] 等人影响下, 人们开始逐渐使用 etale 拓扑群胚来刻画和研究 orbifold. 在这种范畴化的语言下, 拓扑学者们有了更多的方法和工具来研究 orbifold, 这很大程度地丰富了 orbifold 理论. 更多关于 orbifold 和群胚的内容, 可参考 [69, 70].

0.1.2 Dixon, Harvey, Vafa 和 Witten — orbifold 上的弦理论

1985 年, 四位物理学家 Dixon, Harvey, Vafa 和 Witten [40, 41] 研究了 Calabi-Yau orbifold 上的弦理论. 设 Y 是一个紧的 Calabi-Yau 流形, G 是作用在 Y 上的一个保 Calabi-Yau 结构的有限群, 则商空间 $[Y/G]$ 被称为一个 *Calabi-Yau orbifold*. 物理学家们讨论了 Calabi-Yau orbifold 上的弦理论和其 crepant resolution 上的弦理论之间的联系, 并推导出了 Calabi-Yau orbifold $X = [Y/G]$ 的“弦欧拉数”,

$$e_{string}(X) = \frac{1}{|G|} \sum_{hg=gh} e(Y^{<g,h>})$$

其中 $Y^{<g,h>}$ 表示 g 和 h 在 Y 上的公共不动点集. 这里的弦欧拉数实际上就是 orbifold 欧拉数的一种表达公式. 后来, 物理学家们又导出了 X 的 crepant resolution \tilde{X} 的欧拉数公式,

$$e(\tilde{X}) = e(X) + \sum_{(g), g \neq 1} e(Y^g/Z(g))$$

其中 Y^g 表示 g 的不动点集, (g) 表示 g 的共轭类, $Z(g)$ 表示 g 的中心化子. 这个公式也和数学中的“Mckey correspondence”相关.

0.1.3 Chen, Ruan 等人的工作 — Gromov-Witten 不变量和 Chen-Ruan 上同调

受到 orbifold 上弦理论的启发, Chen 和 Ruan 在 2002 年建立了辛 orbifold 上的 Gromov-Witten 不变量 [23], 这也是一种“弦不变量”.

在文献 [24] 中, Chen 和 Ruan 进一步定义了近复 orbifold 上的 orbifold 上同调群和 orbifold Dolbeault 上同调群. 特别地, 他们利用 orbifold 上的 Gromov-Witten

不变量定义了这些上同调群上的环运算, 并验证了环运算的可结合性, 这是一项不平凡的工作. 事实上, Chen-Ruan 上同调群的定义来源于物理中的量子上同调群. 和物理学家们导出的 orbifold 欧拉数公式类似, 一个近复 orbifold 的 orbifold 上同调群实际上是由它的 twisted sector 和 non-twisted sector 部分的上同调信息共同决定, 其中 twisted sector 部分的同调信息在 orbifold 上同调群中会有一个偏移, 即文献 [24] 中的 “degree shifting number”. 所以, 和 orbifold 的 de Rham 上同调群相比, 这里 Chen-Ruan 上同调群更能反映奇点处的局部群信息.

在 Chen-Ruan 的工作基础上, Adem, Leida 和 Ruan 写了一本关于 orbifold 和弦理论的书, “*Orbifolds and stringy topology*” [3]. 书中系统介绍了 Chen-Ruan 的工作以及 orbifold K-理论.

从 orbifold 的发展历程来看, orbifold 从一开始作为流形的推广, 到物理中去, 又回到数学中来. Orbifold 的魅力更多的来源于它自身的独特性. 而且这种独特性似乎在物理中更容易被发现和应用. 但在数学上, 也正如 Kapovich [58] 的书中所描述的那样, orbifold 作为流形到非交换几何的第一个驿站, 所蕴含的一般性和特殊性在数学中都是非常重要的. 虽然目前 orbifold 理论尚未完善, 但似乎都将有法可循.

所以, Coxeter orbifold (复形) 是我们这篇论文的主要研究对象. 而之所以是 Coxeter 的, 最主要的原因是目前环面拓扑和 Coxeter 群理论都有了一定程度的发展.

0.2 环面拓扑和 Coxeter 群

下面我们简要介绍环面拓扑和 Coxeter 群理论.

环面拓扑是一门研究环面群作用的理论. 1991 年, Davis 和 Januszkiewicz [36] 将环面簇的思想拓展到拓扑中来. 他们在文章中定义了两类重要的对象: small cover 和 quasitoric 流形. 环面群 $(S^0)^n = (\mathbb{Z}_2)^n$ 和 $(S^1)^n = T^n$ 分别在这两类流形上的作用都是局部标准的, 即群作用下的轨道空间都是单多面体. 反过来, 如果我们赋予单多面体的每个余一维面一个合适的染色, 则我们又可以构造出一个 small cover 或 quasitoric 流形. 所以这类流形上的几何和拓扑可以由单多面体上的组合和单多面体上的染色完全决定. 因此, 环面拓扑是一门涉及拓扑, 几何, 组合, 变换群等许多数学领域的理论.

以 small cover 为例. 一个 n 维多面体 P 是单的, 是指 P 中的任意一个 k 维面

f^k 都恰好是 P 的 $n-k$ 个 facet 的交, 其中 P 的 facet 是指 P 的 $n-1$ 维面. 设 P 是一个 n 维单多面体, $\mathcal{F}(P) = \{F_1, \dots, F_m\}$ 为 P 的 facet 集. 我们称 $\lambda: \mathcal{F}(P) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ 为 $\mathcal{F}(P)$ 上的一个示性函数, 如果下面条件成立:

- 对 P 中的任意 k 维面 f , $\{\lambda(F) \mid f \subset F \in \mathcal{F}(P)\}$ 生成 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 的一个 \mathbb{Z}_2 -rank 为 $n-k$ 的子群.

此时, P 中的每个 k 维面 f 都对应一个有限群 $G_f \cong (\mathbb{Z}_2)^{n-k}$. 特别地, 我们将 P 自身视为 P 的 n 维面, 并令 $G_P = 1$ 为平凡群. 则根据 P 上的示性函数, 我们可以构造 P 上的一个 *small cover*,

$$M(P, \lambda) = P \times (\mathbb{Z}_2)^n / \sim$$

其中 $(x, g) \sim (y, h)$ 当且仅当 $x = y$, $g^{-1}h \in G_{f(x)}$, 这里的 $f(x)$ 是指包含 x 为相对内点的唯一的面.

事实上, 对一个 n 维 *small cover* M 来说, 相应的单多面体 P 实际上是有限群 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 作用在 M 上所诱导的商 orbifold, 准确来说是一个全局商 (即为有限群作用下诱导的商 orbifold). 此时, $(\mathbb{Z}_2)^n$ 作用诱导的商映射 $\pi: M \rightarrow P$ 实际上是一个 orbifold 覆叠映射. 对 P 中的任意一点 x , $G_{f(x)} \cong (\mathbb{Z}_2)^{n-\dim f(x)}$ 即为 x 处的局部群. 换言之, 这里的单多面体, 是一个直角 *Coxeter orbifold*. 从这个角度, *small cover* 就是一类特殊的直角 *Coxeter orbifold* 上的覆叠流形.

在 [36] 中, Davis 和 Januszkiewicz 证明了 *small cover* M 的 \mathbb{Z}_2 系数的等变上同调恰好是单多面体 P 决定的面环 (face ring). 进一步, P 上的示性函数决定了这个面环的一个理想, 而 M 的 \mathbb{Z}_2 系数的上同调环恰好是这个理想对应的商环. 另外, M 的 Stiefel Whitney 类也可以表示为只与 P 相关的等变 Stiefel Whitney 类的拉回.

后来, Davis, Januszkiewicz 和 Scott [37, 定理 2.2.5] 又研究了 *small cover* 上的拓扑和几何与相应单多面体上的组合之间的关系. 即一个 *small cover* 是非球面的和它是非正曲率的是等价的, 也和相应的单多面体是旗性的是等价的. 进一步, 一个三维 *small cover* 是双曲的当且仅当对应的单多面体是旗性的且不包含任何 4-belt.

Coxeter 群 是群论中一类重要的群, 在数学中的很多领域都能发现 Coxeter 群的应用. 比如, 有限 Coxeter 的例子有正则多面体的对称群, 单 Lie 代数的 Weyl 群; 无限 Coxeter 群的例子比如三角群. 关于 Coxeter 群理论的介绍, 可参考书籍: [31, 47, 53, 57]. 特别地, 我们这篇论文的题目就是借鉴这里的 [31, Davis], “*The geometry and topology of Coxeter groups*”.

Coxeter 群是指有如下群表现的群:

$$W = \langle s_1, s_2, \dots, s_k \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, \forall 1 \leq i \leq j \leq k \rangle$$

其中每个 $m_{ii} = 1$; 当 $i \neq j$ 时, m_{ij} 为一个大于等于 2 正整数或者 ∞ .

早在 1935 年, Coxeter 就借助 Coxeter-Dynkin 图给出了所有有限 Coxeter 群的一个完全分类. 具体来说, 每个 Coxeter 群都可以表示为有限维欧式空间上的反射群. 而任意有限 Coxeter 群都可以表示为一些不可约的有限 Coxeter 群的乘积. 最后, 不可约的有限 Coxeter 群可以被完全分为下面几类: $A_n, B_n, D_n, I_2(p), E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$. 参考 [53].

经过几十年的发展, Coxeter 群上出现了很多成熟的理论. 比如和 Coxeter 群上的 Word problem 相关的 Tits 定理; 和 Coxeter 群的群表示相关的 Hecke 代数等等.

所以, 不管是从环面拓扑发展的角度, 还是 Coxeter 群理论支撑的角度, Coxeter orbifold (复形) 都是研究 orbifold 和推广环面拓扑理论的一个很好的切入点.

0.3 研究的问题和内容

这篇论文的主要研究目的有两个.

- (1) 从 orbifold 的角度重新考虑和拓广环面拓扑中的结论. 换句话说, 也就是研究 Coxeter orbifold 上的 orbifold 结构, 组合结构与它自身以及它的覆叠流形上的拓扑和几何之间的联系.
- (2) 希望能从这类特殊的 orbifold 入手, 建立一套完善的 orbifold 上的整同调理论, 进而能对 orbifold 和带奇点的代数簇上的拓扑理论的建立和发展有所帮助.

因此, 这篇论文的第一个中心课题就是讨论: Coxeter orbifold 上的几何、拓扑和组合的联系. 一般来说, Coxeter orbifold 的 orbifold 结构要比它的组合结构包含的信息更多, 这时候拓扑、几何和组合的联系可能会很复杂. 所以我们这里更多地关注直角 Coxeter orbifold 的情况. 直角 Coxeter orbifold 的组合结构和它的 orbifold 结构是相互内蕴的. 即每个直角 Coxeter orbifold 都是带角流形, 而每个带角流形上都允许一个自然的直角 Coxeter orbifold 结构. 因此, 我们在这篇论文中考虑:

★ 直角 Coxeter orbifold 上的覆叠流形的拓扑和几何与它的组合结构之间的联系. 事实上, 如果这里的直角 Coxeter orbifold 取为一些单多面体, 那么这个课题实际上

就是环面拓扑理论中的中心问题. 在环面拓扑理论中, 一个单多面体上的覆叠流形的基本群 [36, 94], 同调 [15, 17, 36], 示性类 [36], 定向 [74], 非正曲率和非球面性 [37], 正数量曲率 [94] 等许多拓扑几何性质都与单多面体的组合有着本质的联系. 所以, 类似地我们也可以在更一般的直角 Coxeter orbifold 上考虑这些联系.

这篇论文的第二个中心课题是讨论:

★ Coxeter orbifold 上的代数拓扑不变量.

从 Satake, Thurston 时代一直到最近的 Chen-Ruan 的上同调理论, orbifold 理论逐渐地建立起来. 但至今为止, orbifold 上的代数拓扑理论还远远没有达到流形理论的水平. 以 orbifold 上的同调理论为例, 到目前为止, 已经出现很多种 orbifold 同调群的定义. 比如 orbifold 的实系数的奇异、Čech 和 de Rham 上同调群 [81]; 商 orbifold 的等变 (上) 同调群; 近复 orbifold 的 Chen-Ruan 上同调群 [24]; 全局商的 loop 同调 [88]; t -奇异同调 [6] 等等. 在文章 [9] 中, Bahri-Nothbohm-Sarkar-Song 利用 q -CW 复形的观点研究了一些只有偶维数胞腔的 orbifold 和带奇点的代数簇的整系数同调, 比如 toric orbifold, 单纯 toric variety, torus orbifold 和 weighted Grassmannian 等. 但一般 orbifold 的整系数同调理论至今还不是很清楚. 所以, 这篇论文的另一个研究内容就是: 建立 Coxeter orbifold 的一些代数拓扑不变量, 比如整系数同调群, 示性类等.

0.4 主要结论

这篇论文的主要结果分为下面三个部分:

单手柄上的拓扑和几何

这一部分的研究动机有两个. 第一个动机来源于直角情况的 Andreev 定理 [4, 80], 也就是 Pogorelov 定理. Andreev 定理在 Thurston 的双曲化猜想 (定理) 的提出和发展中有着很重要的地位. 具体来说, Pogorelov 定理是说一个三维单多面体能够嵌入到三维双曲空间并且满足所有的二面角都是直角当且仅当它是旗性的且不包含任何 4-belt. 从 orbifold 的角度来看, Pogorelov 定理实际上给出了以三维实心球为底空间的直角 Coxeter orbifold 上的双曲结构存在性的一个等价的组合刻画. 所以, 很自然的一个问题: 一个直角 Coxeter orbifold 上的双曲结构能不能由它的组合信息和底空间信息来刻画? 在这一部分, 我们对底空间是三维手柄的情况给出

了肯定的回答, 见[推论 0.1](#).

第二个动机来自于环面拓扑. 在 Davis 及其合作者的一系列文章中 [32, 33, 35, 37], 他们从组合的角度上, 研究了一个单多面体或一些更一般的带角流形的组合和它们上面流形的几何、拓扑之间的联系. 在这一部分, 我们更多地从 orbifold 的角度来研究一个直角 Coxeter orbifold 的上组合和它的覆叠流形上的拓扑和几何之间的联系. 一些具体的处理想法是相似的, 但我们这里的情况更加一般. 所以, 我们这一部分的结论可以看成 Davis 的类似结论的推广. 下面是我们这部分主要结果.

- 研究了一类特殊的直角 Coxeter orbifold — 单手柄上的非球面性质、非环面性质和它的组合之间的联系, 见[定理 A](#)和[定理 B](#). 进一步, 利用一些组合条件刻画了单手柄的一个覆叠流形 (manifold double) 上的非正曲率、三维双曲曲率等曲率度量的存在性, 见[推论 0.1](#).

Coxeter 复形的 orbifold 整同调

定义和计算 orbifold 的整系数同调是研究 orbifold 的一个自然的课题. 我们这一部分的研究动机就是希望建立 Coxeter orbifold 上的一种真正 orbifold 意义上的整同调理论. 事实上, 受 q -CW 复形的启发, 我们定义了更广的一类对象—Coxeter 复形上的整系数同调群. 这里的 Coxeter 复形是一类特殊的 q -CW 复形 [9, 78], 没有缺失奇维数胞腔, 所以我们这里定义的边缘同态是一种真正 orbifold 意义上的边缘同态. 下面是我们这部分主要结果.

- 利用爆破的想法, 定义了 Coxeter 复形上的一种真正 orbifold 意义上的整系数同调群和 cup 积, 并证明了这些 orbifold 同调群上的一些同调性质, 比如 Hurewicz 定理. 特别地, 一个 Coxeter 复形的同调群可以用它的面的普通同调群表示, 见[定理 C](#).

其中[定理 C](#)也是近复 orbifold 的 Chen-Ruan 上同调群 [24] 和 moment-angle 流形上的 Hochster 公式 [15] 的一个类似物.

直角 Coxeter 复形上的 orbifold Stiefel-Whitney 类

我们这一部分的目的是希望定义 Coxeter orbifold 上 orbifold 向量丛的一种 orbifold 示性类.

通常来说, 向量丛示性类的定义依赖于底空间的上同调环. 比如, Satake 定义了 orbifold 上的 de Rham 上同调 [81], 所以我们可以利用 Chern-Weil 理论定义 orb-

ifold 上的好的复 orbifold 向量丛的, 取值在 de Rham 上同调群里的 Chern 类. 进一步, 这种定义也可以延拓到 orbifold 上的不好的复 orbifold 向量丛, 见 [84]. 由于可以将等变上同调定义为商 orbifold 的一种 orbifold 上同调, 所以我们可以定义商 orbifold 上的向量丛的等变示性类为一种 orbifold 示性类. 在 Adem-Leida-Ruan 的书中 [3], 他们定义的 orbifold 示性类是在 orbifold 群胚的分类空间的上同调中取值. 根据 [3, 例 2.11], 他们的 orbifold 示性类实际就对应着等变示性类.

由于 orbifold 的整系数和模 2 系数的上同调都不清楚, 所以我们很难用通常公理化的方式来定义 orbifold 示性类. 在这一部分, 基于上面定义的 Coxeter 复形的 orbifold 上同调, 我们考虑了直角 Coxeter 复形上实 orbifold 向量丛的 Stiefel-Whitney 类的定义.

- 定义了直角 Coxeter 复形上的实 orbifold 向量丛的 Stiefel-Whitney 类, 并且验证了相应的公理化性质, 见命题 0.3.

下面我们具体介绍这三部分结果.

0.4.1 单 orbifold 上的拓扑和几何

一个 n 维的 Coxeter orbifold 是指局部上等同于 U/W 的 orbifold, 其中 U 为 \mathbb{R}^n 中的开集, W 为一个有限 Coxeter 群, W 在 U 上的作用可以由一些反射生成. 特别地, 如果一个 Coxeter orbifold X 中所有点的局部群 $W \cong (\mathbb{Z}_2)^k$ 都可以被 \mathbb{R}^n 一些坐标超平面对应的反射生成, 则我们称 X 是一个直角 Coxeter orbifold. 例如, 作为群 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 标准作用在一个 small cover 上的轨道空间, n 维单多面体自然具备一个直角 Coxeter orbifold 结构. 另一方面, 由于单多面体在拓扑上都是可缩的实心球, 所以单多面体也是最简单的一类直角 Coxeter orbifold.

从单多面体作为一个直角 Coxeter orbifold 出发, 我们有两个方向的推广: 更一般的底空间; 或者更一般的 orbifold 结构. 其中从底空间的角度出发, 我们定义了单 orbifold.

定义 0.1 (单 orbifold). 一个 n 维单 orbifold Q 是指满足下面条件的直角 Coxeter orbifold.

- 底空间 $|Q|$ 是一个紧的, 连通的 n 维带边流形.
- 神经 $N(Q)$ 可以实现为底空间边界 $\partial|Q|$ 的一个三角剖分.
- 所有 facet 都是单多面体.

每个单 orbifold 都是一个 nice 的带角流形 [31]. 上面单 orbifold 的神经实际上就是它作为带角流形的神经, 即带角流形 Q 的神经 $N(Q)$ 是一个偏序集 (poset), 满足 $N(Q)$ 中的每个点都对应 Q 的一个 facet, 每个 $k-1$ 单形 $[F_1, \dots, F_k]$ 都对应 Q 的一个余 k 维面 $F_1 \cap \dots \cap F_k$. 所以和 small cover 的构造类似, 我们也可以构造单 orbifold 上的一个闭流形. 设 Q 是一个 n 维单 orbifold, $\mathcal{F}(Q) = \{F_1, \dots, F_m\}$ 是 Q 的 facet 集. 设映射 $\lambda : \mathcal{F}(Q) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^m$ 为 $\mathcal{F}(Q)$ 上的一个示性函数, 使得对任意 $F_i \in \mathcal{F}(Q)$, $\lambda(F_i) = e_i$ 为群 $(\mathbb{Z}_2)^m$ 的第 i 个标准生成元. 则定义 Q 上关于 λ 的覆叠流形为

$$M(Q, \lambda) = Q \times (\mathbb{Z}_2)^m / \sim \quad (0-1)$$

这个覆叠流形被称为 Q 上的 *manifold double* (Davis [34]). 特别地, 一个单多面体 P 上的 manifold double 实际上就是 P 上的实 *moment-angle* 流形 [15].

在这一部分, 我们首先考虑一类更接近单多面体的单 orbifold, 即单手柄. 我们称一个单 orbifold Q 为单手柄是指 Q 是一个单多面体或者存在一些不交的余一维的 B -belt (见定义 2.7), 称为 *cutting belt*, 使得 Q 沿着这些 cutting belt 切开后是一个单多面体. 在这一部分, 我们主要研究了单手柄以及它的 manifold double 上的几何, 拓扑与单手柄的组合之间的联系.

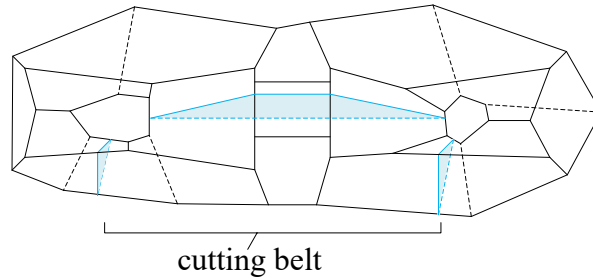


图 0-1: 一个亏格为 2 的三维单手柄.

我们的讨论主要分为下面几个步骤:

- (I) 我们推广了单多面体上 belt 和旗性的概念, 给出了单 orbifold 上的 B -belt 和旗性的概念, 见定义 2.7 和定义 2.8. 单 orbifold 上的 B -belt 的定义统一和推广了三维单多面体中的 k -belt 和三维流形中的 π_1 单的子流形的概念. 由于单 orbifold 的底空间不一定是可缩的, 所以和单多面体上的旗性不同, 一个单手柄的旗性和这个单手柄的神经的旗性并不等价. 事实上, 一个单 orbifold 是旗性的是指它的底空间是非球面的且它不包含任何 Δ^k -belt, $k \geq 2$.

- (II) 我们计算了单手柄的 orbifold 基本群. 为此我们引入了一种 orbifold 版本的胞腔分解 — 直角 Coxeter 复形. 根据单手柄 Q 的直角 Coxeter 胞腔分解, 我们给出了单手柄的 orbifold 基本群 $\pi_1^{orb}(Q)$ 的一个显示的群表现. 具体来说, $\pi_1^{orb}(Q)$ 可以表示为一个直角 Coxeter 群上的迭代的 HNN 扩张.
- (III) 借助 Davis 的“基本构造” [31, 第 5 章] 和基本域理论, 我们构造了单手柄 Q 的 orbifold 万有覆叠 \tilde{Q} . 同样利用 Davis 的方法, 我们计算了 \tilde{Q} 的同调群, 见 [命题 2.16](#).
- (IV) 基于 (I), (II) 和 (III), 并借助 Gromov 引理和 Cartan-Hadamard 定理. 我们得到了单手柄上的一个组合球定理 ([定理 A](#)). 进一步, 利用 Coxeter 群上的 Tits 定理 ([31, 定理 3.4.2]) 和 HNN 扩张中的范式定理 ([67, 定理 2.1]), 我们得到了单手柄上一个组合平坦环面定理 ([定理 B](#)).

下面是这一部分的两个主要定理.

定理 A. 一个单手柄是 orbifold 非球面的当且仅当它是旗性的.

[定理 A](#) 的证明涉及到 [Cartan-Hadamard 定理](#) [14], [Gromov 引理](#) [49] 以及 Davis 的方法 [31, 第 8 章]. 具体来说, 我们构造了单手柄 Q 的万有覆叠 \tilde{Q} 上的一个方块胞腔分解, 使得每个顶点的 link 的旗性恰好和 Q 的旗性一致. 根据 [Gromov 引理](#), 我们知道 \tilde{Q} 是非正曲率的 (进一步, CAT(0) 的) 当且仅当 Q 是旗性的. 进而, 由 [Cartan-Hadamard 定理](#) 知, \tilde{Q} 是旗性的. 另一个方向, 我们利用 Davis 的方法计算了 \tilde{Q} 的同调群, 进而证明了如果 Q 是 orbifold 非球面的, 则 Q 是旗性的. 这一部分证明和构造需要计算 Q 的 orbifold 基本群. Q 的 orbifold 基本群的计算涉及了 Coxeter 复形的概念, 我们将在下一小节中介绍.

注 0.1.

- (a) [定理 A](#) 是 Davis-Januszkiewicz-Scott 的关于 small cover 上类似结论的推广. 见 [38, 定理 2.2.5].
- (b) [定理 A](#) 也是三维流形中球定理的一个推广. 见 [5, 定理 1.3.2].

下面的结论是单手柄上的组合版本的平坦环面定理. 即我们给出了 $\pi_1^{orb}(Q)$ 中 \mathbb{Z}^2 子群存在性的一个等价的组合刻画. 这部分证明主要用到了 Coxeter 群上的 [Tits 定理](#) [31, 定理 3.4.2] 和 HNN 扩张的 [范式定理](#) [67, 定理 2.1].

定理 B. 设 Q 为一个 n 维旗性的单手柄, 则 $\pi_1^{orb}(Q)$ 中包含一个秩大于等于 2 的自由 Abel 子群当且仅当 Q 中存在一个 \square -belt.

注 0.2. 关于非正曲率空间上的平坦环面定理可以参考 [14, 第三部分第 7 章] 和 [60].

基于这两个结论和几何拓扑一些重要的结果 [59, 定理 1.2], [94, 命题 4.9], [76, 第 7 章], [31, 命题 I.6.8] 和 [58], 我们给出了一个单手柄 Q 上的组合与它的 manifold double M_Q 上的一些曲率存在性的关系.

推论 0.1. 设 Q 为一个 n 维单手柄, M_Q 是 Q 上光滑的 manifold double. 则我们有下面结论.

(i) 下面陈述等价.

- (1) M_Q 是非正曲率的;
- (2) M_Q 是非球面的.
- (3) Q 是旗性的 (等价地, Q 是 orbifold 非球面的);

(ii) 如果 M_Q 上存在一个严格负曲率度量, 则 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt. 特别地, 如果 Q 是一个单多面体, 则 M_Q 存在一个严格负曲率度量当且仅当 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt.

当 $\dim Q = 3$ 时,

(iii) M_Q 是双曲的当且仅当 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt.

(iv) 当 Q 是一个三维单多面体时, M_Q 上允许一个正数量曲率度量当且仅当 Q 是一个四面体或 Q 中的每一个二维 belt 都是 Δ^2 .

注 0.3. 推论 0.5 的证明主要在第五章中给出.

- 推论 0.5 (i)–(ii) 的证明基于 Gromov 引理 [49]. 其中这里一个度量空间被称为曲率 $\leq k$ 是指它局部上是一个 $\text{CAT}(k)$ 空间. 根据比较定理 [14, 定理 1A.6, P173], 一个光滑流形是曲率 $\leq k$ 的当且仅当它上面允许一个截面曲率 $\leq k$ 的黎曼度量. 所以这里的非正曲率可以换为非正截面曲率.
- 存在可定向的非球面的三维闭流形不是非正曲率的, 参考 [62].
- 推论 0.5 (iii) 等价于一个单手柄是双曲的 orbifold 当且仅当它是旗性的且不包含任何 \square -belt, 这实际上是三维单手柄上的双曲化定理. 更一般的三维直角 Coxeter orbifold 上的双曲化定理可参考 [76]. 那里的陈述和我们这里的陈述实际上是等价的.
- 推论 0.5 (iv) 是 [94, 命题 4.9] (或定理 0.4) 的等价描述. [94, 命题 4.9] 中的砍点操作实际上只会产生 Δ^2 -belt.

0.4.2 Coxeter 复形的 orbifold 整同调

Coxeter 复形是 q -CW 复形的一种特殊情况. 简单来说, Coxeter 复形是将胞腔的轨道作为 orbifold 胞腔, 然后按照通常 CW 复形的构造拼粘得到的复形空间. 这里, 一个 Coxeter 复形的 Coxeter 胞腔都要求具有 e^n/W 的形式, 其中 W 是一个有限 Coxeter 群; 所有的粘贴映射

$$\phi : \partial \bar{e}^n / W \rightarrow X^{n-1}$$

都需要保局部群, 即对任意 $x \in \partial \bar{e}^n / W$, $G_{\phi(x)} \cong G_x$. 这里 X^{n-1} 是指 X 的 $n-1$ 维骨架. 这里保局部群意味着我们在粘胞腔的时候也是保余维数的, 所以 Coxeter 复形上也有良定的面结构.

下面我们考虑 Coxeter 复形上的 orbifold 同调群的定义. 自然地, orbifold 链复形中的 i 维链群是由所有的 i 维 Coxeter 胞腔生成的自由 Abel 群. 而 orbifold 链复形中边缘同态的定义是 Coxeter 复形上的同调群定义的关键, 一个 orbifold 边缘同态应当由胞腔上的几何边缘和局部群共同决定.

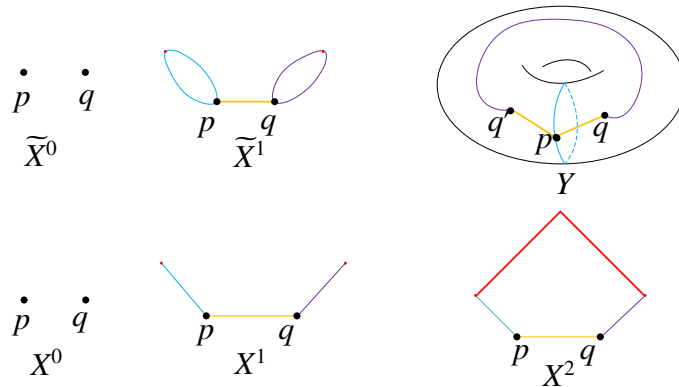


图 0-2: $\widetilde{X}^2 = Y/[p, q] \sim [p, q'] \simeq T^2$.

事实上, 我们是借助了爆破的想法来定义 Coxeter 链复形中的边缘同态. 对每个 Coxeter 复形 X , 我们都可以构造一个 CW 复形 \widetilde{X} , 称为 X 的爆破复形, 例如图 0-2. (爆破复形的构造见命题 3.1.) 我们将 X 对应的链复形中的边缘同态定义为 X 的爆破复形中的边缘同态. 具体的边缘公式如下:

$$d(e^n/W) = \sum n_\beta \Theta\left(\frac{|W|}{|W_\beta|}\right) e_\beta^{n-1}/W_\beta. \quad (0-2)$$

其中 $|W|$ 表示 W 的阶, $\Theta(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ 1, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$

需要注意的是, 对一个 Coxeter 复形来说, 它的爆破方式并不唯一. 所以, 我们可以定义不同的 orbifold 边缘同态, 从而得到不同的 orbifold 同调群. 这里的提到边缘同态 d 是其中比较自然的一种, 在下面的讨论中, 我们始终假设 orbifold 同调是这里 d 对应的 orbifold 同调. 而另外一种不同的 orbifold 同调群的定义可见本文第 3.2.9 节.

下面是这一部分的主要结论. 设 X 的 facet 集为 $\mathcal{F}(X) = \{F_1, \dots, F_m\}$. 令 F^{n-k} 为 X 中的一个任意的 $n-k$ 维面, 则 F^{n-k} 是一些 facet 的交的连通分支. 我们定义 F^{n-k} 相对内部的点的局部群为 F^{n-k} 的局部群, 记为 $W(F^{n-k})$. 设 F_β^{n-k+1} 是由 $\{F_1, \dots, \hat{F}_\beta, \dots, F_k\}$ 决定的一个面. 定义 X 上所有面的集合 (包含 X 的底空间作为最高维面) 上的一个等价关系

$$F^{n-k} \sim F_\beta^{n-k+1} \text{ 当且仅当 } \frac{|W(F^{n-k})|}{|W(F_\beta^{n-k+1})|} \text{ 是奇数.}$$

令 T 为 X 的所有面在这个等价关系下的等价类集合. 对每一个等价类 $J \in T$, 令

$$X_J = \bigcup_{F \in J} F.$$

则我们有下面结论.

定理 C. 设 X 为一个 Coxeter 复形, 则

$$H_i(X) = \bigoplus_{J \in T} H_{i-l(J)}(X_J) \quad (0-3)$$

其中 T 是 X 中的所有面的一个等价类集合, $l(J)$ 是 J 中最高维面的余维数.

注 0.4. 一般来说, 这里等式右边的同调为带权重的同调, 并不是 X_J 的通常意义的同调. 但在边缘公式 (0-2) 意义下, 这里的权重都为 1, 所以等式右边的同调即为 X_J 的普通意义的同调. 上面定理与 Chen-Ruan 上同调群的定义 ([24, 定义 3.2.3]) 和 Hochster 公式 ([15]) 具有形式上的一致性.

Coxeter 复形上的 orbifold 同调群仍然满足很多同调性质, 比如同伦不变性, 复形对的长正合列等等. 特别地, Coxeter 复形上有下面形式的 Hurewicz 定理成立.

命题 0.2 (Hurewicz 定理). 设 X 是一个 Coxeter 复形, 则

$$\left(\pi_1^{orb}(X)\right)^{ab} \cong H_1(|X|) \oplus H_1(X/|X|, \mathbb{Z}_2).$$

其中 G^{ab} 表示群 G 的 Abel 化.

进一步, 我们可以定义 Coxeter 复形的上同调群, 并将 Coxeter 复形 X 的爆破复形 \widetilde{X} 的 cup 积定义为 $H^*(X)$ 上的 cup 积. 所以接下来, 我们可以考虑 Coxeter 复形上的 orbifold 示性类.

0.4.3 直角 Coxeter 复形上的 orbifold Stiefel-Whitney 类

首先我们注意到商 orbifold $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的每一个 m 维实 orbifold 向量丛 $E \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$, 都对应 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 的一个实线性表示, $\rho : (\mathbb{Z}_2)^k \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$. 而 ρ 在 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的生成元 $\{s_1, \dots, s_k\}$ 上的像可以同时对角化, 并且恰好对应一个 $m \times k$ 的矩阵.

$$C = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^1 & x_m^2 & \cdots & x_m^k \end{pmatrix}_{m \times k}$$

其中每个元素 $x_i^j = \pm 1$. 我们称这个矩阵为实 orbifold 向量丛 $E \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的整体示性矩阵. 不难验证, C 的行序是不重要的, 并且每一个这样的矩阵 C 都可以决定 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的一个实 orbifold 向量丛. 而另一方面, $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的 \mathbb{Z}_2 系数的上同调环为 $H^*(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[s_1, \dots, s_k]/(s_i^2, \forall i)$. 所以我们自然地将 $\pi : E \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的 orbifold Stiefel-Whitney 类定义为

$$w(E) = \prod_{i=1}^m \left(1 + \sum_{j=1}^k \frac{1 - x_i^j}{2} s_j\right) \in H^*(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k; \mathbb{Z}_2). \quad (0-4)$$

一般地, 设 X 是一个直角 Coxeter 复形. 我们注意到, X 上的任意 orbifold 向量丛在它的底空间上的限制都是一个 CW 复形上的通常的向量丛. 所以, X 上的任意 orbifold 向量丛 $\pi : E \rightarrow X$ 都可视为一个 CW 复形上的通常的向量丛的延拓.

X 的所有的正则胞腔构成了一个子复形, 记为 X_{reg} . 注意到 X/X_{reg} 是一些直角 Coxeter 复形的一点并, 其中的每一个分支都对应 X 的一个连通的奇点集. 设 H 是

其中一个的分支, 则除了唯一的 0 胞腔, H 不包含其他正则胞腔. 且 $H^*(H; \mathbb{Z}_2)$ 是 $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ 的子环. 我们设 H 的余一维面集合为 $\mathcal{F}_H = \{F_1, \dots, F_\eta\}$, 则 \mathcal{F}_H 对应的直角 Coxeter 一维胞腔的对偶生成 $H^*(H; \mathbb{Z}_2)$ 的一个子环 $\mathcal{R}_H = \mathbb{Z}_2[s_1, \dots, s_\eta]/(I_H + J_H)$, 其中 I_H 是 H 决定的 Stanley-Reisner 理想, $J_H = (s_i^2, \forall i)$.

直角 Coxeter 复形 X 上的 orbifold 向量丛自然也诱导了每个 H 上的一个 orbifold 向量丛, 记为 $\pi_H : E_H \rightarrow H$. 和 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的情况类似, $\pi_H : E_H \rightarrow H$ 也都对应一个示性矩阵 C_H . 而矩阵 C_H 决定了 $D^\eta/(\mathbb{Z}_2)^\eta$ 上的一个实 orbifold 向量丛, 记为 $\tilde{\pi} : E_{C_H} \rightarrow D^\eta/(\mathbb{Z}_2)^\eta$. 注意到, 如果 H 的神经 $N(H)$ 是 H 的奇点集的一个三角剖分, 则此时 $\pi_H : E_H \rightarrow H$ 可以被视为 $\tilde{\pi} : E_{C_H} \rightarrow D^\eta/(\mathbb{Z}_2)^\eta$ 在一个 orbifold 映射 i 下的拉回.

$$\begin{array}{ccc} E_H & \longrightarrow & E_{C_H} \\ \pi_H \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ H & \xrightarrow{i} & D^\eta/(\mathbb{Z}_2)^\eta \end{array}$$

一般地, 我们总有单纯映射 $j : N(H) \rightarrow N(D^\eta/(\mathbb{Z}_2)^\eta) = \Delta^{\eta-1}$, 其中 η 是指 $N(H)$ 中顶点的个数. 所以 j 诱导下面同态

$$j^* : \mathbb{Z}_2[s_1, \dots, s_\eta]/(s_i^2, \forall i) \rightarrow \mathcal{R}_H < H^*(X; \mathbb{Z}_2).$$

π_H 的 orbifold Stiefel-Whitney 类被定义为

$$w(E_H) = j^*(w(E_{C_H})) = \prod \chi_i(C_H) \in \mathcal{R}_H < H^*(X; \mathbb{Z}_2) \quad (0-5)$$

最后, 直角 Coxeter 复形 X 上的实 orbifold 向量丛 $\pi : E \rightarrow X$ 的 orbifold Stiefel-Whitney 类被定义为:

$$w(E) = w(E(X_{reg})) \cdot \prod_H w(E_H). \quad (0-6)$$

其中 $E(X_{reg})$ 是向量丛 $\pi : E \rightarrow X$ 在 CW 复形 X_{reg} 的限制, $w(E(X_{reg}))$ 是 $E(X_{reg})$ 的通常意义的 Stiefel-Whitney 类. 特别地, 当 X 是一个 CW 复形时, 对应的 $w(E)$ 恰好是 $E \rightarrow X$ 上的通常的 Stiefel-Whitney 类. 进一步, 我们可以证明这里的 orbifold Stiefel-Whitney 类上也有类似的公理化性质成立.

命题 0.3. 对直角 Coxeter 复形 B 上的任意一个实 orbifold 向量丛 $E \rightarrow B$, 存在唯一的且只依赖于 E 的同构型的一族函数列 $w_1, w_2, \dots, w_i(E) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, 满足

- (a) 对任意拉回 $f^*(E)$, $w_i(f^*(E)) = f^*(w_i(E))$.
- (b) $w(E_1 \oplus E_2) = w(E_1) \cup w(E_2)$, 其中 $w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots \in H^*(B; \mathbb{Z}_2)$.
- (c) $w_i(E) = 0$, $i > \dim E$.
- (d) 对典范线丛 $E \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ 来说, $w_1(E)$ 为 $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ 的生成元. 同时, 对非平凡线丛 $\tilde{E} \rightarrow D^1/\mathbb{Z}_2$ 来说, $w_1(\tilde{E})$ 是 $H^1(D^1/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ 的生成元.

0.5 进一步研究的问题

首先关于 Coxeter orbifold 上的组合和拓扑、几何的联系, 这篇论文只考虑了一类底空间相对比较简单直角 Coxeter orbifold. 所以, 我们接下来一个研究方向是: 考虑一般的 Coxeter orbifold 上的拓扑和几何. 另一方面, 我们定义的 orbifold 同调和 orbifold Stiefel-Whitney 示性类也可以推广到更一般的 orbifold 上去. 所以, 我们的另一个可继续的研究课题是: 考虑更一般的 orbifold 同调理论. 如果这些都能取得一定进展的话, 我们将尝试考虑 orbifold 上的配边理论、K 理论, 并将这些理论和经典的流形理论联系起来. 另外, 我们也希望能为我们这里定义的 orbifold 同调和示性类找到一些具体的应用. 除此之外, 下面列举一些我们曾考虑过或准备考虑的问题.

- (1) 证明一个单 orbifold 是 orbifold 非球面的当且仅当它的底空间是非球面的且它不包含任何 Δ^k -belt, 这里 $k \geq 2$, 或举出反例.
- (2) 我们这里的 B -belt 实际上是一种 orbifold 版本的子流形理论. 那么旗性和不包含 \square 能不能完全刻画四维双曲单凸多面体? 有没有可能通过对 B -belt 的讨论找出更多的四维直角双曲单凸多面体?
- (3) 四维及四维以上单手柄上的 manifold double (或者更简单地, 单多面体上的 small cover) 上的正数量曲率的存在性与一些特定 B -belt 之间的关系.
- (4) 弱化 Coxeter 复形定义中粘贴映射保局部群的要求.
- (5) 根据 Chen-Ruan 上同调群的定义, Hochster 公式和这里的定理 C, 一些带群作用的同调群似乎都存在某种分解性质. 将这三个结论统一起来, 或者找出其中的联系.

0.6 论文结构

这篇论文的安排如下.

第一章, 我们首先回顾 orbifold 和 orbispace 中的一些定义. 然后给出 Coxeter orbifold 和 Coxeter 复形的定义. 最后, 我们简单介绍群的单纯复形和带权单纯复形, 这对第 3.2.8 节的讨论有帮助.

第二章, 我们将考虑单手柄的 orbifold 非球面性质和非环面性质. 首先, 我们回顾 orbifold 基本群的一些等价定义和基本域的思想. 然后, 我们引入单 orbifold 和单手柄的概念, 并定义它们上面的 B -belt, 旗性, \square -belt 等组合概念. 最后, 我们以单手柄为例, 将给出单手柄上的 orbifold 基本群一个显示群的群表现. 并在此基础上, 证明定理 A 和定理 B. 这两个定理也是第五章的基础.

第三章, 我们将利用爆破的想法来定义 Coxeter 复形上的整系数的 orbifold 同调群和 cup 积, 并验证了这种 orbifold 同调群上的一些同调性质. 特别地, 可以证明 Coxeter 复形的 orbifold 同调群有很好地分裂性质, 即定理 C.

第四章, 通过 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 的实线性表示, 我们将定义直角 Coxeter 复形上的实 orbifold 向量丛的 orbifold Stiefel Whitney 类. 并验证这种 orbifold Stiefel Whitney 的公理化性质.

第五章, 基于定理 A 和定理 B, 我们将考虑一个单手柄的 manifold double 上的曲率度量的存在性. 其中, manifold double 上的非正曲率、三维双曲、三维正数量曲率度量的存在性都可以由相应单手柄上的 B -belt 条件完全刻画. 特别地, 我们证明了一个三维单手柄是双曲的当且仅当它是旗性的且它不包含任何 \square -belt.

这篇文章的阅读顺序为第一, 二, 五章或者第一, 三, 四章.

第一章 Orbifold, Coxeter orbifold 和 Coxeter 复形

1.1 Orbifold 和 orbispace

我们首先给出 *orbispace* 的定义.

定义 1.1 (*orbispace*, [20, 定义 2.1.2]). 设 $|X|$ 是一个局部连通的拓扑空间, \mathcal{V} 为 $|X|$ 的一个开集族满足 \mathcal{V} 是 $|X|$ 的一族基并且 \mathcal{V} 中的每一个开集 V 都是连通的. \mathcal{V} 中的每一个开集 V 都对应一个 G -结构 (U, G_U, ψ_U) , 其中 G_U 是一个离散群并且为 U 上的一个自同态群, $\psi_U(U) = U/G_U \cong V$. 我们称 $\mathcal{U} = \{(U, G_U, \psi_U) \mid V \in \mathcal{V}\}$ 为 $|X|$ 上的一个 *orbispace* 结构, 如果下面条件成立:

1. 对 \mathcal{V} 中的任意两个相交非空的开集 V_α 和 V_β , 存在一个非空集合 $\text{Tran}(U_\alpha, U_\beta) = \{(\phi, \lambda)\}$, 其中 (ϕ, λ) 为 $(U_\alpha, G_\alpha, \psi_\alpha)|_{V_\alpha \cap V_\beta}$ 的一个连通分支到 $(U_\beta, G_\beta, \psi_\beta)|_{V_\alpha \cap V_\beta}$ 的一个连通分支的一个同构. 我们称 (ϕ, λ) 为一个过渡映射.
2. 对任意两个从 $(U_\alpha, G_\alpha, \psi_\alpha)|_{V_\alpha \cap V_\beta}$ 的一个连通分支到 $(U_\beta, G_\beta, \psi_\beta)|_{V_\alpha \cap V_\beta}$ 的一个连通分支的过渡映射 (ϕ_1, λ_1) 和 (ϕ_2, λ_2) , 存在 $g_\alpha \in G_\alpha$ 和 $g_\beta \in G_\beta$, 使得 $(\phi_2, \lambda_2) = g_\beta^{-1} \circ (\phi_1, \lambda_1) \circ g_\alpha$. 这里的 G_α 和 G_β 分别视为 U_α 和 U_β 上的自同态群. 反过来, 对任意 $(\phi, \lambda) \in \text{Tran}(U_\alpha, U_\beta)$, $g_\alpha \in G_\alpha$ 和 $g_\beta \in G_\beta$, 复合 $g_\beta^{-1} \circ (\phi, \lambda) \circ g_\alpha$ 一定还在 $\text{Tran}(U_\alpha, U_\beta)$ 里. $g_\beta^{-1} \circ (\phi, \lambda) \circ g_\alpha$ 和 (ϕ, λ) 在 $\text{Tran}(U_\alpha, U_\beta)$ 中表示同一个元素当且仅当 $\lambda(g_\alpha) = g_\beta$.
3. 对任意 $V \in \mathcal{V}$, 恒同映射 $\text{Id} : (U, G_U, \psi_U) \longrightarrow (U, G_U, \psi_U)$ 包含在 $\text{Tran}(U, U)$ 中. 因此, 根据条件 2, $\text{Tran}(U, U)$ 自然与 (U, G_U, ψ_U) 的自同态群 G_U 对应.
4. 设 $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ 为 \mathcal{V} 中三个开集, 使得 $V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma \neq \emptyset$. 则对任意 $(\phi_{\gamma\beta}, \lambda_{\gamma\beta}) \in \text{Tran}(U_\beta, U_\gamma)$ 和 $(\phi_{\beta\alpha}, \lambda_{\beta\alpha}) \in \text{Tran}(U_\alpha, U_\beta)$, 如果 $(\phi_{\beta\alpha}, \lambda_{\beta\alpha})$ 的值域和 $(\phi_{\gamma\beta}, \lambda_{\gamma\beta})$ 的定义域相交, 则存在 $\text{Tran}(U_\alpha, U_\gamma)$ 中的一个过渡映射, 我们称之为 $(\phi_{\beta\alpha}, \lambda_{\beta\alpha})$ 和

$(\phi_{\gamma\beta}, \lambda_{\gamma\beta})$ 的复合, 记为 $(\phi_{\gamma\beta}, \lambda_{\gamma\beta}) \circ (\phi_{\beta\alpha}, \lambda_{\beta\alpha})$, 满足 $(\phi_{\gamma\beta}, \lambda_{\gamma\beta}) \circ (\phi_{\beta\alpha}, \lambda_{\beta\alpha})$ 在 $\psi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma)$ 上的限制就是 $(\phi_{\beta\alpha}, \lambda_{\beta\alpha})$ 和 $(\phi_{\gamma\beta}, \lambda_{\gamma\beta})$ 作为映射的复合. 进一步, 过渡函数的复合运算是可结合的. 当 $\alpha = \beta$ (或 $\beta = \gamma$) 时, $(\phi_{\gamma\beta}, \lambda_{\gamma\beta}) \circ (\phi_{\beta\alpha}, \lambda_{\beta\alpha})$ 正是条件 2 中涉及的复合, 其中 $(\phi_{\beta\alpha}, \lambda_{\beta\alpha})$ (或 $(\phi_{\gamma\beta}, \lambda_{\gamma\beta})$) 被视为 G_α (或 G_γ) 中的元素.

一个带有 orbispace 结构 \mathcal{U} 的拓扑空间 $|X|$ 称为一个 orbispace, 并记为 $(|X|, \mathcal{U})$ 或简记为 X . 另外, 我们称 $|X|$ 是 orbispace $(|X|, \mathcal{U})$ 的底空间, orbispace X 的底空间有时也被记为 X_{top} .

对 $|X|$ 中的任意一点 p , 存在包含 p 的一个开集 $V \in \mathcal{V}$, 设对应的 G -结构为 (U, G, ψ) , 取 $\psi^{-1}(p)$ 中的一个点 $x \in U$, 我们将 x 处的迷向子群定义为 p 点处的局部群, 记为 G_p .

$$G_p = \{g \in G_U \mid gx = x\}.$$

一个 orbispace 的 X 的奇点集定义为:

$$\Sigma(X) = \{x \in X \mid G_x \neq 1\}.$$

一般来说, 一个 n 维 orbifold X 是指一个特殊的 orbispace, 满足对其中的任意一点 p , 存在一个包含点 p 的开集 V , 和一个 G -结构 (U, G_U, ψ_U) , 使得 U 为 \mathbb{R}^n 的一个连通开子集, G_U 为一个有限群并且可以实现为 U 上的一个光滑的自同态群. 这里的 G -结构 (U, G_U, ψ_U) 称为 orbifold X 的一个 orbifold 图页, 这里的 orbispace 结构 (即 orbifold 结构) \mathcal{U} 称为 X 上的 orbifold 图册. orbifold 的严格定义如下:

定义 1.2 (orbifold, [3, 定义 1.1& 1.2]). 设 $|X|$ 是一个 n 维仿紧的 Hausdorff 的拓扑空间. $|X|$ 上的一个 orbifold 结构描述如下:

1. $|X|$ 上的一个 orbifold 图页是指一个三元组 (U, G_U, ψ_U) , 其中 U 为 \mathbb{R}^n 的一个连通开子集, G_U 为一个有限群并且为 U 上的一个光滑的自同态群, 映射 $\psi_U : U \rightarrow |X|$ 是 G -不变的并且诱导了 U/G_U 到 X 的一个开集 V 的同胚.
2. 两个图页之间的一个嵌入 $\lambda : (U_\alpha, G_\alpha, \psi_\alpha) \hookrightarrow (U_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$ 是指一个光滑嵌入 $\lambda : U_\alpha \hookrightarrow U_\beta$ 满足 $\psi_\beta \circ \lambda = \psi_\alpha$.
3. $|X|$ 上的一个 orbifold 图册是指 $\mathcal{U} = \{(U, G_U, \psi_U)\}$, 满足 $\{\psi_U(U)\}$ 覆盖 $|X|$ 并且是局部相容的: 任给两个图页 $(U_\alpha, G_\alpha, \psi_\alpha)$ 和 $(U_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$, 设 $V_\alpha = \psi_\alpha(U_\alpha)$, $V_\beta = \psi_\beta(U_\beta)$, 则对任意一点 $x \in V_\alpha \cap V_\beta$, 存在 x 的一个开邻域 $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$ 和对应的一个图页 $(U_\gamma, G_\gamma, \psi_\gamma)$, 使得存在嵌入 $(U_\gamma, G_\gamma, \psi_\gamma) \hookrightarrow (U_\alpha, G_\alpha, \psi_\alpha)$ 和 $(U_\gamma, G_\gamma, \psi_\gamma) \hookrightarrow (U_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$.

$$(U_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$$

4. 一个图册 \mathcal{U}_1 称为另一个图册 \mathcal{U}_2 的加细, 如果 \mathcal{U}_1 中的任意图卡都可以嵌入到 \mathcal{U}_2 的某些图卡. 两个 orbifold 图册称为等价的, 如果它们有共同的加细.

带有 orbifold 图册等价类结构的拓扑空间 $|X|$ 称为 orbifold, 记为 $(|X|, \mathcal{U})$ 或 X .

注 1.1. 在 [3, 定义 1.1& 1.2] 中, 上面定义 orbifold 称为有效的 orbifold. 另外, 对于本文涉及的 Coxeter orbifold, 定义中的 G_U 都是 U 上的线性的自同态群.

现在人们研究 orbispace 和 orbifold 比较流行的语言是群胚 (groupoid) 的语言. 这里 orbispace 和 orbifold 的定义中都要求 G_U 为离散的, 所以具体对应 etale 拓扑群胚. 关于 etale 拓扑群胚可参考 [3, 14, 21, 22]. 在正文中, 关于 orbispace 和 orbifold 中涉及的所有概念, 除特别说明外, 我们都将用拓扑的语言来描述.

另外, 需要注意的是: orbispace 上的拓扑概念, 比如同伦群, 同调群, 严格意义上应该翻译为 orbispace 的同伦群, orbispace 的同调群. 但为避免因作者个人水平有限而引起的翻译上的歧义, 这篇论文不将 orbifold 和 orbispace 翻译成中文. 另外为简化冗余的而类似的概念, 本文 orbispace 上的拓扑概念仍用 orbifold 这个词, 比如 orbispace 上的 orbifold 同伦群就是指它的 orbispace 同伦群.

例 1.1. 每个拓扑空间是一个 orbispace 结构平凡的 orbispace. 每个流形是一个 orbifold 结构平凡的 orbifold.

例 1.2 ([3]). 设 M 为一个光滑流形.

- 一个紧 Lie 群 G 光滑地有效地几乎自由地作用在 M 上.
- 一个有限生成离散群 G 纯不连续地作用在 M 上.

则商空间 M/G 自然诱导一个 orbifold 结构. 此时我们称这个 orbifold 为商 orbifold, 记为 $[M/G]$. 特别地, 当 G 是一个有限群时, 称 $[M/G]$ 为一个全局商.

例 1.3. 设 P 为一个 n 维单多面体, 即 P 的顶点都是恰好 n 个不同的余一维面的交. 设 F^{n-k} 为 P 的一个 $n-k$ 维面. 则 F^{n-k} 内部的任意一点 x 在 P 中都存在一个开邻域同胚于 $\mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}_2)^k$, 这里 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 在 \mathbb{R}^n 是一些沿着坐标超平面的反射生成的. 所以 P 可以被赋予一个 orbifold 结构. P 的每个 $n-k$ 维面 F^{n-k} 内部的点的局部群为 $(\mathbb{Z}_2)^k$, 这类 orbifold 也被称为直角 Coxeter orbifold.

例 1.4 (Orbifold 的底空间不一定是流形, [16]). \mathbb{R}^3 上的对径映射诱导了一个 \mathbb{R}^3 上的一个 \mathbb{Z}_2 作用. 则商 orbifold $[\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_2]$ 的底空间是 $\mathbb{R}P^2$ 的一点锥, 不是一个流形.

两个 orbispace $(|X_1|, \mathcal{U}_1)$ 和 $(|X_2|, \mathcal{U}_2)$ 之间的态射定义为满足相容性条件的局部等变连续映射系的一个等价类. 具体定义比较繁琐, 且不是本文所必需的理论前提, 所以, 我们在此省略, 读者可以参考 Chen 文章中的原始定义 [20–22]. 下面, 我们给出两个 orbifold 之间映射的定义.

定义 1.3 (两个 orbifold 之间的映射, [82, 定义 2]). 设 $(|X_1|, \mathcal{U}_1)$ 和 $(|X_2|, \mathcal{U}_2)$ 为两个 orbifold. 则 $(|X_1|, \mathcal{U}_1)$ 到 $(|X_2|, \mathcal{U}_2)$ 之间的一个 orbifold 映射是指满足下面条件的一个映射系 $\{h_U\} ((U_1, G_{U_1}, \psi_{U_1}) \in \mathcal{U}_1)$.

- 对任意 $(U_1, G_{U_1}, \psi_{U_1}) \in \mathcal{U}_1$, 存在一个 $(U_2, G_{U_2}, \psi_{U_2}) \in \mathcal{U}_2$ 和一个映射 $h_{U_1} : U_1 \rightarrow U_2$.
- 设 $(U_1, G_{U_1}, \psi_{U_1}), (U'_1, G_{U'_1}, \psi_{U'_1}) \in \mathcal{U}_1$ 和 $(U_2, G_{U_2}, \psi_{U_2}), (U'_2, G_{U'_2}, \psi_{U'_2}) \in \mathcal{U}_2$ 满足 $\psi_{U_1}(U_1) \subset \psi_{U'_1}(U'_1)$. 则对任意嵌入 $\lambda_1 : (U_1, G_{U_1}, \psi_{U_1}) \rightarrow (U'_1, G_{U'_1}, \psi_{U'_1})$, 存在一个嵌入 $\lambda_2 : (U_2, G_{U_2}, \psi_{U_2}) \rightarrow (U'_2, G_{U'_2}, \psi_{U'_2})$ 使得

$$\lambda_2 \circ h_{U_1} = h_{U'_2} \circ \lambda_1.$$

由上面定义知, 存在一个从 $|X_1|$ 到 $|X_2|$ 的连续映射 $h : |X_1| \rightarrow |X_2|$, 使得对任意 $(U_1, G_{U_1}, \psi_{U_1}) \in \mathcal{U}_1$ 和对应的 $(U_2, G_{U_2}, \psi_{U_2}) \in \mathcal{U}_2$, 有

$$\psi_{U_2} \circ h_{U_1} = h \circ \psi_{U_1}.$$

进一步, 我们可以定义两个 orbifold 映射之间的等价. 可以证明这里的 $h : |X_1| \rightarrow |X_2|$ 只依赖于 orbifold 映射的等价类.

到这里, 我们就可以考虑 orbispace 和 orbifold 生成的范畴. 这里的 orbispace 范畴对应拓扑范畴, 而 orbifold 范畴对应流形范畴.

1.2 Coxeter orbifold

Coxeter 群

一个 Coxeter 群 W 是指有如下群表现的群:

$$W = \langle s_1, s_2, \dots, s_k \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, \forall 1 \leq i < j \leq k \rangle \quad (1-1)$$

其中每个 $m_{ii} = 1$, 当 $i \neq j$ 时, m_{ij} 为一个大于等于 2 的正整数或者 ∞ . 设 $S(W) = \{s_1, \dots, s_k\}$ 为 W 的一个不可约的生成元集, 我们记 $\#S(W)$ 为 W 的最少生成元的个数. $(W, S(W))$ 被称为 W 的一个 *Coxeter* 系.

有限 Coxeter 群的分类

早在 1935 年, Coxeter 就借助 Coxeter-Dynkin 图完全分类了有限 Coxeter 群. 所有的 Coxeter 群都可以表示为有限维欧式空间上的反射群. 任意有限 Coxeter 群都可以表示为一些不可约的有限 Coxeter 群的乘积. 而不可约的有限 Coxeter 群可以分为下面几类: $A_n, B_n, D_n, I_2(p), E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$. 参考 [53].

Coxeter orbifold

设 $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \sum_1^n a_i x_i = 0$ 为 \mathbb{R}^n 中的一个过原点的超平面, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. 则 $f = 0$ 决定了 \mathbb{R}^n 上的一个线性反射变换

$$s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

其中 $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2f(\mathbf{x})\mathbf{a}$. 我们称 s 是关于超平面 $f = 0$ 的正交反射. 特别地, 如果当 $f = 0$ 为 \mathbb{R}^n 中的坐标超平面时, \mathbf{a} 中只有一个非零项, 此时对应的正交反射被称为一个标准反射.

一个 n 维的 *Coxeter orbifold* [34, 36] (或局部反射 *orbifold* [58]) X 是一个局部上等同于 U/W 的 orbifold, 其中 U 是 \mathbb{R}^n 中的一个连通开子集, W 是一个有限 Coxeter 群, W 在 U 上的作用可以由正交于过原点的超平面的正交反射生成. 特别地, 如果所有的 W 都为标准反射生成的群 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的形式, 则我们称 X 为一个直角 *Coxeter orbifold*.

带角流形

定义 1.4 ([31, 180 页]). 设 $|X|$ 为一个 n 维的 Hausdorff 空间. $|X|$ 上的一个带角流形结构是指一个极大的图册 $\mathcal{V} = \{V\}$, 满足

- 每一个图页 V 都和 n 维单纯锥 $C^n = [0, \infty)^n$ 中的一个开子集等同. 即有 $\psi : V \rightarrow C^n$.
- 任意过渡映射都保持余维数.

一个 n 维的带角流形就是一个带有带角流形结构的 Hausdorff 空间, 记为 X .

设 X 是一个带角流形, x 为 X 中的任意一点. 则存在一个包含点 x 的图页 $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$. x 处的余维数定义为 $\psi(x)$ 中 0 分量的个数, 记为 $c(x)$. X 的一个余 k 维开面定义为 $\{x \in X \mid c(x) = k\}$ 的一个分支, 面定义为开面的闭包. 带角流形 X 的余 1 维面被称为 *facet*, X 的 *facet* 集通常被记为 $\mathcal{F}(X)$. 一个带角流形是 *nice*, 如果 X 的任意一个余 2 维面恰好是两个不同 *facet* 的交的连通分支.

带角流形 X 的神经 $\mathcal{N}(X)$ 是一个偏序集, 满足 $\mathcal{N}(X)$ 中的每一个点对应 X 的一个 *facet*, 每一个 $k-1$ 单形 $[F_1, \dots, F_k]$ 对应 X 的一个余 k 维面 $F_1 \cap \dots \cap F_k$.

由于有限反射群作用在欧式空间上的商空间一定是一个锥. 所以 Coxeter orbifold 都是带角流形.

引理 1.1 ([31]). 每个 Coxeter orbifold 都是一个带角流形.

设 X 是一个 Coxeter orbifold, $\mathcal{N}(X)$ 为 X 的神经. 则 X 上的 Coxeter orbifold 结构诱导了 $\mathcal{N}(X)$ 的所有单形上的一个赋值. 任取 $\mathcal{N}(X)$ 中的一个点 F_i , 都对应一个线性反射 s_i , 这里的 s_i 可以视为 *facet* F_i 内部点的局部群的生成元. 任取 $\mathcal{N}(X)$ 中的一个边, 记为 $[F_i, F_j]$ (这里允许 $i = j$), 我们赋予 $[F_i, F_j]$ 一个大于等于 2 的正整数. 则对 $\mathcal{N}(X)$ 中任意一个单形 $[F_{i_1}, \dots, F_{i_k}]$, 存在一个有限 Coxeter 群与之对应. 这里的有限 Coxeter 群为

$$W = \langle s_{i_1}, \dots, s_{i_k} \mid (s_{i_\alpha} s_{i_\beta})^{m_{i_\alpha i_\beta}} = 1, \forall 1 \leq i \leq j \leq k \rangle \quad (1-2)$$

其中我们允许 $F_{i_\alpha} = F_{i_\beta}$, $i_\alpha \neq i_\beta$. 特别地, 如果 X 是 *nice*, 则不会存在这种情况. 进一步, 我们称这里的 W 为单形 $[F_{i_1}, \dots, F_{i_k}]$ 的局部群.

所以, 任给一个带角流形 X , 我们给 $\mathcal{N}(X)$ 中每一个单形赋予一个有限 Coxeter 群作为单形的局部群. 则此时 X 自然对应一个 Coxeter orbifold 结构. 特别地, 如果 $\mathcal{N}(X)$ 中的所有边对应的 m_{ij} 都为 2, 则此时对应一个直角 Coxeter orbifold.

1.3 Coxeter 复形

1.3.1 q-复形和 G-CW 复形

首先我们给出 G -CW 复形中的一些基本概念, 这一部分参考 May 的书的第一章 [68, 第 1 章].

给定一个拓扑群 G , 一个空间 X 被称为一个 G -空间, 如果有一个连续作用 $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ 满足 $1_G \cdot x = x$ 和 $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$. 设 X, Y 为两个 G -空间, $f: X \rightarrow Y$ 为 G -空间 X 和 Y 之间的映射, 如果 $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$, 则称 f 为一个 G -映射.

一个 G -CW 复形是指一些子 G -空间 X^n 的并, 满足 X^0 是一些轨道 G/H 的不交并, X^{n+1} 是由 X^n 粘上所有 G -胞腔 $G/H \times D^{n+1}$ 得到, 其中 G -胞腔 $G/H \times D^{n+1}$ 是通过粘贴 G -映射 $G/H \times S^n \rightarrow X^n$ 粘到 X^n 上去的.

一个 orbifold 版本的 CW 复形被称为 q -胞腔复形 (或者 q -CW 复形, [9, 78]). 这里的 “ q ” 是 “quotient” 的首字母, 意思是商的复形. 基本想法是把胞腔的轨道视为 orbifold 胞腔, 并以此来构造的复形. Poddar-Sarkar [78] 利用 q -CW 复形计算了一些 quasi-toric orbifold 的有理同调, 最近 Bahri-Notbohm-Sarkar-Song [9] 等人又利用 q -CW 复形讨论了一些 orbifold 的整上同调里的挠 (torsion).

我们这里讨论的对象 – Coxeter 复形是一类特殊的 q -CW 复形. 相比于 Poddar-Sarkar [78] 和 Bahri-Notbohm-Sarkar-Song [9] 文章中的 q -CW 复形, 我们的粘贴映射要求更强.

1.3.2 Coxeter 复形

定义 1.5 (Coxeter 胞腔). 设 e^n 为 \mathbb{R}^n 中的一个 n 维单位开圆盘, W 为一个有限 Coxeter 群并可以有效的反射作用在 e^n 上. 则我们称轨道空间 e^n/W 为一个 Coxeter n -胞腔. 并称 e^n 为 e^n/W 的爆破. 如果 W 是一个平凡群, 则称 Coxeter 胞腔 e^n/W 为正则的, 否则称它为奇异的. 特别地, 如果 $W = (\mathbb{Z}_2)^k$, 则我们称 e^n/W 是一个直角 Coxeter 胞腔.

注 1.2. ● 这里的 Coxeter n 胞腔是一个 orbifold 胞腔 (q -胞腔), 和 Davis 在 [37, 定义 2.2.1] 中定义的 Coxeter block 对应. 而 Davis 定义中的 “Coxeter cell” 和这里的爆破 e^n 对应.

- Coxeter n 胞腔 e^n/W 的闭包是一个 n 维带边 orbifold, 被称为 orbifold 圆盘. 它的边界 $\partial(\overline{e^n/W}) := (\partial e^n)/W \cong S^{n-1}/W$ 是一个闭的 $n-1$ 维 orbifold (也被称为 orbifold lens 空间 [9]).
- 根据有限反射群分类, 每个 Coxeter 胞腔都是一个单纯锥和一个正则胞腔的乘积, 即 $e^n/W \cong e^k/W \times e^{n-k}$ 其中 $k = \#S(W)$.

例如, 一个 1 维 (直角) Coxeter 胞腔要么是一个连通开区间, 要么是一个半开

半闭区间其中闭的端点有局部群 \mathbb{Z}_2 . 2 维 Coxeter 胞腔有三种情况, 分别有局部群为平凡群, \mathbb{Z}_2 和 $I(p) = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^p = 1 \rangle$. 下图是 2 维直角 Coxeter 胞腔.

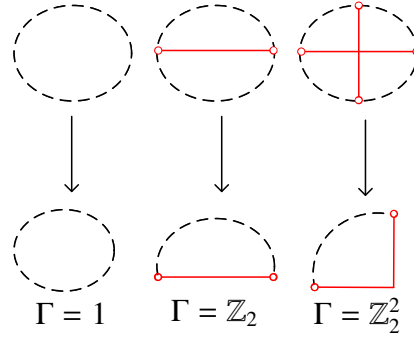


图 1-1: 直角 Coxeter 2-胞腔

和通常 CW 复形的构造类似 (比如参考 [54, 第 5 页]), 我们可以构造 Coxeter 复形 X . 最关键的一点要求是: 任意粘贴映射

$$\phi : \partial \bar{e}^n / W \rightarrow X^{n-1} \quad (1-3)$$

需要保局部群, 即对任意 $x \in \partial \bar{e}^n / W$, $G_{\phi(x)} \cong G_x$. 这里 X^{n-1} 是 X 的 $(n-1)$ 维骨架.

$$\begin{array}{ccccc} \bar{e}^n & \xrightarrow{\partial} & \partial \bar{e}^n = S^{n-1} & \xrightarrow{\psi} & \partial \bar{e}^n / W \\ \psi \downarrow & & & & \downarrow \phi \\ \bar{e}^n / W & \xrightarrow{\Phi} & & & X^{n-1} \end{array}$$

注 1.3. ● Coxeter orbifold 都是带角流形. 所以 Coxeter orbifold X 上的 orbifold 胞腔有一个自然的要求: 每个 Coxeter 胞腔到 X 的特征映射 $\Phi : D^n / W \rightarrow X$ 应该保余维数. 因此, 这里我们要求粘贴映射保局部群是比较合理的. 这个要求虽然强于 q-CW 复形中粘贴映射, 但在这个前提下, 可以确保很多 CW 复形中的拓扑性质能够在 Coxeter 复形中成立. 比如 $H_i(X) \cong H_i(X^{i+1})$, $\pi_1(X) \cong \pi_1(X^2)$ 等等.

● Coxeter 复形是一个 orbispace. 所以, 所有 Coxeter 复形加上 Coxeter 复形上的同态构成了 orbispace 范畴的一个子范畴.

设 X 为一个 Coxeter 复形. X 中的任意一点 x 的局部群为一个有限 Coxeter 群 W , 我们定义 x 处的局部余维数为 $\#S(W)$. 进而, 我们可以定义 X 的面和神经. 不难

发现, X 的神经是一些偏序集的不交并.

1.4 一些实用的模型

1.4.1 群的单复形

定义 1.6 (群的单复形, [14, 定义 12.11]). 一个偏序集 Q 上的群的单复形 $G(Q) = (G_\sigma, \varphi_{\tau\sigma})$ 由下面几部分构成:

- 对每一个 $\sigma \in Q$, 有一个群 G_σ , 称为 σ 处的局部群;
- 对每一个 $\tau < \sigma$, 存在一个单同态 $\varphi_{\tau\sigma} : G_\sigma \rightarrow G_\tau$, 使得如果 $\tau < \sigma < \rho$, 则

$$\varphi_{\tau\rho} = \varphi_{\tau\sigma}\varphi_{\sigma\rho}.$$

设 X 是一个 Coxeter orbifold 或者 Coxeter 复形, 则根据 Coxeter orbifold 和 Coxeter 复形的定义, X 的神经 $N(X)$ 自然有一个单复形结构, 且每个 $\sigma = [F_{i_1}, \dots, F_{i_k}]$ 上局部群恰好是 (1-2) 中的有限 Coxeter 群 W .

1.4.2 带权单纯复形

定义 1.7 (带权单纯复形 [29]). 一个带权单纯复形是一个对 (K, \mathbf{w}) , 其中 K 是一个单纯复形, $\mathbf{w} : K \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个从 K 到自然数的一个函数, 并满足

$$\tau < \sigma \Rightarrow w(\tau) \mid w(\sigma).$$

因此, 如果一个群的单复形中的所有局部群都是有限群, 则这个群的单复形一定诱导了一个带权复形结构. 其中每个单形的权重恰好为相应局部群的阶. 后面我们计算 Coxeter 复形的 orbifold 同调时将用到带权单纯复形的带权同调. 所以下面我们将带权单纯复形的带权同调的定义列下下面, 这部分内容主要参考 [14, P375 – P396] 和 [29].

定义 1.8 (边缘同态 [29]). 设 X 是一个群的单复形, 且所有的局部群都是有限 Coxeter 群. 设 $\sigma^n = [v_0, \dots, v_n] \in X$ 为 X 中的一个 n -单形. 则

$$d(\sigma^n) = \sum_i (-1)^i \frac{|W|}{|W_i|} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

其中 W 和 W_i 分别为 σ^n 和 $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ 的局部群. 特别地, 如果 $W = \mathbb{Z}_2^{n+1}$, 则

$$d(\sigma) = \sum_i (-1)^i 2\sigma[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

类似于单纯复形的单纯同调, 我们有 $d^2 = 0$. 所以我们可以定义 X 的带权同调和带权上同调.

第二章 单 orbifold 上的非球面性质和非环面性质

2.1 Orbifold 基本群和 orbifold 同伦群

2.1.1 Orbifold 基本群和 orbifold 同伦群的等价定义

覆叠变换群的观点

定义 2.1 (orbifold 覆叠, Thurston [89, 定义 13.2.2]). 设 $(|X|, \mathcal{U})$ 为一个 orbifold. 则 $(|X|, \mathcal{U})$ 的一个覆叠 orbifold 是指一个 orbifold $(|\widetilde{X}|, \widetilde{\mathcal{U}})$, 和相应的投射 $\pi : (|\widetilde{X}|, \widetilde{\mathcal{U}}) \rightarrow (|X|, \mathcal{U})$, 使得下面条件成立:

- 对任意 $x \in |X|$, 存在包含 x 的开集 V 和相应的图页 (U, G, ψ) , 满足 $\pi^{-1}(V)$ 的每一个分支 V_i 都和一个 U/Γ_i 同胚, 其中 Γ_i 为 G 的子群.
- $\pi|_{V_i} : V_i \rightarrow V$ 和投射 $U/\Gamma_i \rightarrow U/G_x$ 对应.

一个 orbifold 被称为好的 (或, 非常好的), 如果它可以被一个流形 (或, 有限) 覆叠.

根据 Thurston 的讲义 [89, 命题 13.2.4], 任意 orbifold 都存在万有覆叠. 所以, 我们可以将一个 orbifold 的万有覆叠决定的覆叠变换群定义为它的 orbifold 基本群.

定义 2.2 (orbifold 基本群和 orbifold 同伦群, Thurston, [89]). 设 X 是一个 orbifold, $\pi : \widetilde{X} \rightarrow X$ 为 X 的万有覆叠. 则 X 的 orbifold 基本群定义为:

$$\pi_1^{orb}(X) := Deck(\pi : \widetilde{X} \rightarrow X).$$

其中 $Deck(\pi : \widetilde{X} \rightarrow X)$ 表示 $\pi : \widetilde{X} \rightarrow X$ 的覆叠变换群.

进一步, 如果 X 是一个好的 orbifold, 则 X 的 $k \geq 2$ 维 orbifold 同伦群定义为:

$$\pi_k^{orb}(X) := \pi_k(\widetilde{X}).$$

Orbifold 闭路类的观点

回忆基本群的定义, 一个拓扑空间的基本群定义为这个拓扑空间中定基点的闭路的同伦类的集合. 所以, 一个 orbispace 的 orbifold 基本群可以定义为定基点的 orbifold 闭路类的集合. orbispace X 中的一个 orbifold 道路是指 $|X|$ 中的一个道路以及这个道路在 X 的 G -结构中的分段提升和每个过渡部分对应的群元素 (可参考 [14, P604] 中的 G -道路). 进一步, 如果这个 orbifold 道路在 $|X|$ 中是一个闭路, 则称它是 X 中的一个 orbifold 闭路.

一般地, 我们也可以给出一个 orbispace 的 orbifold 同伦群的定义.

定义 2.3 (orbifold 同伦群, Chen, [20]). 设 (X, x) 是一个带基点 x 的 orbispace, $(\Omega(X, x), \bar{x})$ 为 (X, x) 的带基点的 loop 空间 (细节参考 [20, 定义 3.2.1]). 则 (X, x) 的 k 维 orbifold 同伦群定义为:

$$\pi_k^{orb}(X, x) := \pi_{k-1}(\Omega(X, x), \bar{x}).$$

例 2.1. 设 D^2 为平面 \mathbb{R}^2 中的一个单位闭圆盘, r 为 D^2 上的一个标准的反射变换, 满足 $r(x, y) = (x, -y)$. 所以 r 诱导了 D^2 上一个反射的 \mathbb{Z}_2 作用. 从而 D^2/\mathbb{Z}_2 有一个自然的商 orbifold 结构. 即对任意 $(x, 0) \in D^2/\mathbb{Z}_2$ 有局部群 \mathbb{Z}_2 . 由于 D^2 是可缩的, 所以 $\pi_1^{orb}([D^2/\mathbb{Z}_2]) \cong \mathbb{Z}_2$, 并且是反射 r 生成的.

从 orbifold 闭路的观点来看, 连接 $(x_1, 0)$ 和 (x_2, y_2) , $y_2 > 0$, 的任意道路都可以被视为一个非平凡的 orbifold 闭路. 显然 $D^2/\mathbb{Z}_2 \cong D^1 \times D^1/\mathbb{Z}_2 \simeq D^1/\mathbb{Z}_2$. 从而, $\pi_1^{orb}([D^2/\mathbb{Z}_2]) \cong \mathbb{Z}_2$ 由定基点的 orbifold 闭路 D^1/\mathbb{Z}_2 生成, 参考图 2-1.

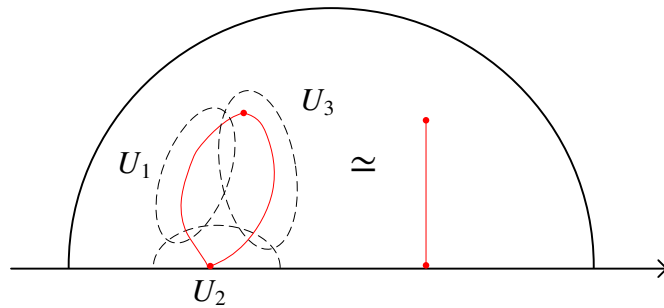


图 2-1: Orbifold 闭路

Borel 构造的观点

设 X 是 G 空间, EG 为 G 的分类空间的万有覆叠. 则 G 在 X 上的作用诱导了 G 在 $EG \times M$ 上的一个自由作用, 即对任意 $g \in G$, $g(x, y) = (gx, gy)$. 则 G 作用在 X 上的 Borel 空间定义为:

$$EG \times_G M := (EG \times M)/G.$$

一个商 orbifold $[G/M]$ 的 orbifold 同伦群可以定义为 G 作用在 M 的 Borel 空间的同伦群.

定义 2.4 ([3, 命题 1.51]). 设 $[M/G]$ 为一个商 orbifold. 则 $[M/G]$ 的 k 维 orbifold 同伦群定义为

$$\pi_k^{orb}([M/G], x) := \pi_k(EG \times_G M, \tilde{x}).$$

群胚的观点

定义 2.5 ([3, 定义 1.50]). 设 X 为一个 orbifold, $B\mathcal{G}$ 为 X 决定的拓扑群胚的分类空间, 则 X 的 k 维 orbifold 同伦群定义为

$$\pi_k^{orb}(X, x) := \pi_k(B\mathcal{G}, \tilde{x}).$$

关于上面几种定义之间的等价性, 以及更多的 orbifold 同伦理论, 可以参考 [3, 20]. 我们在这里省略.

Orbifold 非球面性

一个 orbispace X 被称为 orbifold 非球面的, 如果对任意 $k \geq 2$, $\pi_k^{orb}(X) = 0$.

设 $p: M \rightarrow X$ 为 orbifold X 上的一个正则的 orbifold 覆叠映射, 其中 M 为一个流形. 则根据 orbifold 覆叠理论 [20], 对任意 $k \geq 2$,

$$\pi_k^{orb}(X, x) \cong \pi_k(M, \tilde{x}).$$

因此, 我们有

推论 2.1. 一个好的 orbifold 是 orbifold 非球面的当且仅当它的任意一个覆叠流形是非球面的.

2.1.2 Orbifold 基本群的计算

设 G 为覆叠映射 $p: M \rightarrow X$ 的覆叠变换群. 则根据 orbifold 覆叠理论, 存在下面群的 (不一定可列) 短正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1^{orb}(X) \rightarrow G \rightarrow 1.$$

和一般拓扑空间基本群的计算一样, 我们通常也利用 van-Kampen 定理或者构造 orbifold 的胞腔分解来计算 orbifold 基本群. 首先, orbifold 版本的 van-Kampen 定理仍然成立.

定理 2.2 (van-Kampen 定理, [20, 定理 4.3.1]). 设 X_1 和 X_2 为 orbispace X 的两个开子 orbispace, 满足 $X = X_1 \cup X_2$ 和 $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, 并假设 X_1, X_2 和 $X_1 \cap X_2$ 都是道路连通的. 设 x 为 X_1, X_2 和 $X_1 \cap X_2$ 共同的基点. 则

$$\pi_1(X, x) \cong (\pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x)) / \langle \{i_1^*(\gamma) i_2^*(\gamma^{-1}) \mid \gamma \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x)\} \rangle$$

其中 i_1^* 和 i_2^* 分别是包含映射 $i_1: X_1 \cap X_2 \rightarrow X_1$ 和 $i_2: X_1 \cap X_2 \rightarrow X_2$ 诱导的基本群同态.

其次, 和通常 CW 复形一样, 一个 Coxeter 复形的 orbifold 基本群和它的二维骨架的 orbifold 基本群也是同构的.

命题 2.3. 设 X 是一个 Coxeter 复形, 则

$$\pi_1^{orb}(X) \cong \pi_1^{orb}(X^2),$$

其中 X^2 为 X 的 2 维骨架.

证明: 证明方法和 CW 复形情况完全类似, 可参考 Hatcher 的书中的证明 [54, 命题 1.26]. 唯一需要注意的是, 粘贴映射保局部群这个要求确保了每个 Coxeter $n(\geq 3)$ 胞腔的局部群信息本质上可以由它在 X^{n-1} 中的边界继承. \square

所以, 任给一个 Coxeter 复形 X , 我们可以直接从它的二维骨架上, 读出 X 的一个 orbifold 基本群的群表现. 设 e^2/W 为 X 的一个 2 维奇异 Coxeter 胞腔, $W = \mathbb{Z}_2$ 或 $I(p)$. e^2/W 的边界是一个顶点为奇点的一维单形, 记为 I . 设 $\psi(I)$ 可以同伦到由

定基点的 orbifold 定向闭路 x_1, x_2, \dots, x_n 依次拼接而成, 注意到除了 x_1 和 x_n 外其他 x_i 都为 X 中正则的闭路. 将这些 orbifold 闭路取为 X 的 orbifold 基本群的生成元, 则自然地有

$$x_1^2 = x_n^2 = 1.$$

当 $W = \mathbb{Z}_2$ 时, $\Phi(D^2/W)$ 决定的基本群中的关系为:

$$x_1 x_2 \cdots x_n \cdot x_{n-1}^{-1} \cdots x_2^{-1} = 1.$$

当 $W = I(P)$ 时, $\Phi(D^2/W)$ 决定的基本群中的关系为:

$$(x_1 x_2 \cdots x_n \cdot x_{n-1}^{-1} \cdots x_2^{-1})^p = 1.$$

图 2-2 为 $n = 3$, e^n/W 为直角 Coxeter 二维胞腔的例子.

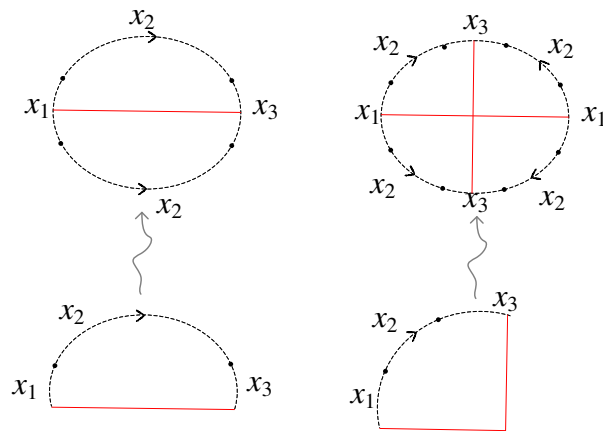


图 2-2: $n = 3$ 时, 直角 Coxeter 2 胞腔决定的基本群中的关系.

例 2.2. 设 P 为一个单多面体, 并取 P 上的 orbifold 结构为 Coxeter orbifold 结构, $\mathcal{F}(P)$ 为 P 的 facet 集. 设 $C(P)$ 为 P 上的方块胞腔分解诱导的 Coxeter 复形结构. 则 P 的 orbifold 基本群为一个 Coxeter 群.

$$\pi_1^{\text{orb}}(P) \cong W_P = \langle s_F, F \in \mathcal{F}(P) \mid s_F^2 = 1, \forall F; (s_F s_{F'})^{m_{FF'}} = 1, \text{ for } F \cap F' \neq \emptyset \rangle$$

2.1.3 群作用, 基本域和有限生成离散群的表现

在这一部分, 我们将介绍对计算和分析基本群都非常有用的基本域理论. 这一部分内容, 我们参考 [31, P64] 和 [91, P159-P161].

设一个离散群 G 纯不连续得作用在一个连通拓扑空间 X 上. X 中的一个闭子集 D 称为 X 在 G 作用下的基本域, 如果下面条件成立:

- 每个 G -轨道都与 D 相交;
- 对 D 内部的任意一点 x , $G(x) \cap D = \{x\}$. 这里 $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$.

$\{gD \mid g \in G\}$ 构成了 X 的一个局部有限的覆盖, 使得 $\{gD \mid g \in G\}$ 中的任意两个 g_1D 和 g_2D 的内部都不相交. 这里的 $\{gD, g \in G\}$ 称为 X 的一个分解,

$$X = \bigcup_{g \in G} gD.$$

每个 gD 称为 G 作用在 X 上的一个 *chamber*.

下面, 我们始终设 G 作用在 X 上的基本域 D 都是一个单多面体. 则每一个 $g \in G$ 都对应着 X 上的一个自同胚

$$\phi_g : X \longrightarrow X.$$

对任意 $h \in G$, ϕ_g 将 hD 映为 $g \cdot hD$. 特别地, 对任意两个相交非空的 chamber gD 和 hD , 存在 X 上的一个自同胚将 gD 映为 hD . 因此, 如果 gD 和 hD 在 X 中沿着它们的 facet F 和 F' 粘在一起, 则我们可以给 facet F 和 F' 分别赋予群元素 hg^{-1} 和 gh^{-1} . 这说明, G 在 X 上的作用决定了 D 的 facet 集 $\mathcal{F}(D)$ 上的一个特征映射:

$$\lambda : \mathcal{F}(D) \longrightarrow G.$$

对 D 中的 facet F , $\lambda(F) \in G$ 被称为 F 上的染色. 每个 $\lambda(F) \in G$ 都对应一个自同胚 $\phi_{\lambda(F)} \in \text{Homeo}(X)$, 我们称这个自同胚为 X 关于 facet F 的相邻变换. 每个相邻变换 $\phi_{\lambda(F)}$ 都有一个逆变换 $\phi_{\lambda(F')}$. 我们允许 $F = F'$. 此时, 我们称 F 是 G 作用在 X 上的镜面, 称对应的相邻变换为 X 关于 F 的反射.

注 2.1. 注意 D 的不同 facet 可能对应同一个相邻变换.

所有可逆的相邻变换定义了 $\mathcal{F}(D) \times G$ 上的一个等价关系: $(F, g) \sim (F', h)$ 当且

仅当

$$\begin{cases} \lambda(F) \cdot g = h \\ \lambda(F') \cdot h = g. \end{cases} \quad (2-1)$$

换言之, 如果两个 chamber gD 和 hD 沿着 gD 的 facet F 和 hD 的 facet F' 粘在一起, 则 $\lambda(F) \cdot \lambda(F') = 1$. 我们称这个关系为群 G 的配对关系. 特别地, 如果 F 是一个镜面, 则相应的配对关系为 $\lambda(F)^2 = 1$.

注 2.2. $\mathcal{F}(D) \times G$ 上的等价关系 \sim 诱导了 $\mathcal{F}(D)$ 上的一个等价关系 \sim' . 具体来说, 对任意 $F, F' \in \mathcal{F}(D)$,

$$F \sim' F' \iff (F, g) \sim (F', h), \text{ 其中 } g, h \in G \text{ 满足关系 (2-1).}$$

G 在 X 上的作用是纯不连续的, 所以根据等价关系 \sim' , 粘 D 的边界上的一些面后可以得到一个商 orbifold D / \sim' .

另一方面, 给定一个单多面体 D 和一个满足关系 (2-1) 的特征映射, 则我们可以构造一个 G -空间 X :

$$X = D \times G / \sim \quad (2-2)$$

其中等价关系为关系 (2-1).

D 的面结构诱导了 X 上的一个多面体的胞腔分解, 记为 $\mathcal{P}(X)$. $\mathcal{P}(X)$ 的对偶胞腔记为 $C(X)$. 如果 D 的每一个余 k 维面在 X 中都恰好是 2^k 个 chamber 的交, 则 $C(X)$ 是一个方块复形. 此时, $C(X)$ 中每一个顶点的 link (见定义 2.11) 恰好是 D 的神经. $C(X)$ 的一维骨架恰好是群 G 关于所有 facet 对应的相邻变换作为生成元集的 Cayley 图. 因此, 我们有下面结论.

引理 2.4 ([91, P160]). D 的所有 facet 对应的相邻变换是群 G 的一个生成元集.

为简化记号, 对每个 $F_i \in \mathcal{F}(D)$, 我们将 $\lambda(F_i)$ 记为 s_i 或者 s_{F_i} . 则对 G 中的每一个群元素 g , ϕ_g 可以分解为相邻变换的复合, 即

$$g = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}.$$

除了配对关系以外, 如果 $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k} = 1$, 则我们称这是群 G 的一个 *Poincaré* 关系. 则我们有下面结论.

引理 2.5 ([91, P161]). 所有的 Poincaré 关系和所有的配对关系一起构成了群 G 的一个关系集.

D 的每一个余二维面都决定了一个 Poincaré 关系, 即包含这个余二维面的所有 chamber 决定的, 我们把这个关系记为 $s_k s_{k-1} \cdots s_1 = 1$ (或者, $s'_1 \cdots s'_k = 1$, 其中对任意 i , $s'_i \cdot s_i = 1$). 定义一个群 G_D , 使得 G_D 的生成元集是 $\mathcal{F}(D)$ 中所有 facet 对应的相邻变换的集合, G_D 的关系集是所有的配对关系和 D 的所有余二维面对应的 Poincaré 关系的集合.

$$\begin{aligned} G_D = \langle s_i, F_i \in \mathcal{F}(D) \mid s_i s_j = 1, \text{任意 } F_i \sim' F_j; \\ s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k} = 1, F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle \end{aligned} \quad (2-3)$$

下面设 D 的每一个余 k 维面在 X 中都恰好是 2^k 个 chamber 的交, 则 $[X/G] \cong D / \sim'$ 是一个直角 Coxeter orbifold, 且 D 上的标准方块分解诱导了 $[X/G]$ 上的一个直角 Coxeter 胞腔分解. 根据命题 2.3, 我们有下面结论.

引理 2.6. $G_D \cong \pi_1^{orb}(X/G)$.

进一步, 存在一个自然的商映射 $\lambda_* : G_D \rightarrow G$, 使得 λ_* 在每个相邻变换 s_F 上的像恰好是 facet F 上的染色. 此时, $\pi_1(X) \cong \ker \lambda_*$. 综上所述, 我们有下面结论.

命题 2.7. 设 G 为一个离散群, X 为一个流形满足 G 在 X 上的作用是纯不连续的. 设 D 为 G 作用在 X 上的一个基本域, 且 D 是一个单多面体, D 的每一个余 k 维面在 X 中都恰好是 2^k 个 chamber 的交. 设 $G_D \cong \pi_1^{orb}([X/G])$ 为 (2-3) 中定义的群, $\lambda_* : G_D \rightarrow G$ 为特征映射 $\lambda : \mathcal{F}(D) \rightarrow G$ 诱导的商映射. 则我们有如下群短正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow G_D \xrightarrow{\lambda_*} G \rightarrow 1.$$

特别地, 这个短正合列是 orbifold 覆叠映射 $\pi : X \rightarrow [X/G]$ 诱导的.

推论 2.8. X 是单连通的当且仅当 $G \cong G_D$.

例 2.3. 设 P 为一个矩形, 它的四个边 F_1, F_2, F_3, F_4 分别被 e_1, e_2, e_1, e_2 染色, 其中 e_1, e_2 表示 $(\mathbb{Z}_2)^2$ 的生成元. 则 $X = P \times (\mathbb{Z}_2)^2 / \sim \cong T^2$ 是 P 上的一个 small cover ([36]), 且 $G_P = \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \mid s_i^2 = 1; (s_1 s_2)^2 = (s_2 s_3)^2 = (s_3 s_4)^2 = (s_4 s_1)^2 = 1 \rangle$ 为 P 决定的直角 Coxeter 群. 所以 $\pi_1(X) \cong \ker \lambda_* = \mathbb{Z}^2$ 是 G_P 中 Poincaré 关系 $s_1 s_3$ 和 $s_2 s_4$ 生成的正规子群.

2.2 单 orbifold 和单手柄

2.2.1 定义与概念的推广

在这一小节, 我们考虑一类特殊的直角 Coxeter orbifold, 我们称为单 orbifold. 单 orbifold 是单多面体作为直角 Coxeter orbifold 的一般化.

单 orbifold

定义 2.6 (单 orbifold). 一个 n 维单 orbifold Q 是指满足下面条件的直角 Coxeter orbifold.

- (a) 底空间 $|Q|$ 是一个紧的, 连通的 n 维带边流形.
- (b) 神经 $N(Q)$ 可以实现为底空间边界 $\partial|Q|$ 的一个三角剖分.
- (c) 所有 facet 都是单多面体 ($n \leq 3$ 时, 这个条件自然成立).

类似于单多面体, 我们可以定义一个单 orbifold Q 的对偶, 记为 Q^* .

B -belt

定义 2.7 (B -belt). 设 $i : B \hookrightarrow Q$ 为一个单 orbifold Q 中嵌入的子的 orbifold, B 的底空间 $|B|$ 是一个 k 维实心球. 则我们称 B 为 Q 的一个 k 维 B -belt, 如果下面条件成立:

- i 保余维数, 即 i 将 B 的余 d 维面 f 映 Q 的余 d 维面 F_f .
- B 的 facet 集 $\{f_\alpha\}$ 满足 $\cap f_\alpha = \emptyset$ 当且仅当要么 $\cap F_{f_\alpha} = \emptyset$, 要么 $\cup F_{f_\alpha}$ 在 $|Q|$ 中不能形变收缩到 B 上面去.

注 2.3. 第一条中, 嵌入 $i : B \hookrightarrow Q$ 保余维数等价于 i 保局部群. 第二条中, $\cup F_{f_\alpha}$ 在 $|Q|$ 中不能形变收缩到 B 上面去意味着 $\{F_{f_\alpha}\}$ 和 B 之间存在一个“洞”. 这里 B -belt 是三维流形中 π_1 -单子流形概念的推广, 我们将在命题 2.22 中讨论.

根据定义, 一个单多面体 P 是它自身的一个 P -belt. 对一个单多面体来说, 第二条要求可以简化为: $\cap f_\alpha = \emptyset$ 当且仅当 $\cap F_{f_\alpha} = \emptyset$. 一个三维单 orbifold 中的二维 B -belt 是一个多边形, 比如 B 是一个 k 边形, 则传统上, 这个 B -belt 也被称为一个 k -belt. 可以证明, 除了四面体外, 任意一个单的三维多面体都有一个二维 B -belt.

旗性和 orbifold 非球面性

接下来, 我们将推广单多面体或者单纯复形的旗性 (flagness). 首先回忆单纯复形的旗性的定义 (Gromov, [49]). 设 K 是有限个点 V 上的单纯复形, 如果 V 中任意两两相连的有限点集都张成 K 的一个单形, 则称单纯复形 K 是旗性的. 设 X 是分段欧式的方块复形, 则 Gromov 引理 [49] 告诉我们, X 是非正曲率的当且仅当 x 中每个点的 link 都是旗性的. 进一步, 由 Cartan-Hadamard 定理知, 非正曲率空间都是非球面的.

一个单多面体 P 被称为旗性的是指 P 的神经 $N(P)$ 是一个旗性的单纯复形. 设 $M \rightarrow P$ 为一个 small cover 或实 moment angled 流形. 则根据 Davis-Januszkiewicz-Scott 的结论 [38, 定理 2.2.5], M 是非球面的当且仅当 P 是旗性的, 等价地, 此时 P 作为直角 Coxeter orbifold 是非球面的.

因此, 旗性的定义有一个自然的要求: 旗性的单 orbifold 一定是 orbifold 非球面的. 注意到一个单 orbifold Q 的奇点部分信息可以由它的神经 $N(Q)$ 表达. 所以 Q 的 orbifold 非球面性由 $|Q|$ 和 $N(Q)$ 共同决定. 而一个 orbifold 的非球面性质的可能的阻碍是一些嵌入的球面或球面的商. 进一步, 对于单 orbifold Q 来说, 这些阻碍只能是 $S^k/(\mathbb{Z}_2)^{k+1}$ 或者 S^k 的形式. 所以我们猜测,

猜测: 一个单 orbifold Q 是 orbifold 非球面的当且仅当 $|Q|$ 是非球面的且 Q 不包含任何 $k \geq 2$ 的 Δ^k -belt.

注 2.4. Davis 的两个定理 [31, 定理 9.1.4] 和 [33, 定理 3.5] 告诉我们, 当 $|Q|$ 是零调的 (acyclic) 或 Q 允许一个角结构 (corner structure, [33, 第 3.1 节]) 时, 这个猜测是成立的. 我们的定理 A 证明了当 Q 是一个单手柄时, 这个猜测是对的.

定义 2.8. 设 Q 是一个单 orbifold, 它的底空间 $|Q|$ 是非球面的. 如果 Q 不包含任何 $k \geq 2$ 的 Δ^k -belt, 则我们称 Q 是旗性的.

单手柄

定义 2.9 (单手柄). 我们称一个单 orbifold Q 为单手柄是指 Q 是一个单多面体或者存在一些不交的余一维的 B -belt, 称之为 cutting belt, 使得 Q 沿着这些 cutting belt 切开后是一个单多面体.

注 2.5. 这里“切”的操作与三维 Haken 流形中的“hierachy”操作类似. 但一般来说, 一个三维单手柄不一定是 Haken 的, 除非它是旗性的. 关于三维 Haken 流形和高维广义的 Haken 流形可以参考 [43, 92].

一个单手柄 Q 的底空间的伦型为一些 S^1 的一点并. 我们将这些 S^1 的个数称为 Q 的亏格, 记为 g .

命题 2.9. 每个单手柄上都允许一个有限的直角 Coxeter 胞腔分解.

证明: 设 Q 为一个 n 维的单手柄, P_Q 为一个相对应的单多面体. 则 P_Q 上标准的方块分解诱导了 Q 上一个有限直角 Coxeter 胞腔分解. \square

注 2.6. 特别地, 每个单手柄都允许一个直角 Coxeter 方块复形结构. 参考第 5.2 小节.

设 Q 为一个 n 维的单手柄. 则 $N(Q)$ 的点 F_1, F_2, \dots, F_k 张成一个单形 Δ^{k-1} 当且仅当相对应的点在 $N(P_Q)$ 张成一个单形 Δ^{k-1} ; 点 F_1, F_2, \dots, F_k 张成一个空单形 Δ^{k-1} (即 $\partial\Delta^{k-1} \subset N(Q)$ 但 Δ^{k-1} 自身不在 $N(Q)$ 中) 当且仅当相对应的点在 $N(P_Q)$ 张成一个空单形. 特别地, 这些空单形对应 Q 中的一些 Δ^k -belt. 因此我们有下面引理.

引理 2.10. 一个单手柄 Q 是旗性的当且仅当它对应的单多面体 P_Q 是旗性的 (等价地, $N(P_Q)$ 是一个旗性的单纯复形).

注 2.7. 需要注意的是, 一个旗性的单手柄可能包含一个空单形, 但这个空单形的内部不包含在 Q^* 里. 比如在图 2-3 中, F_1, F_2, F_3 为旗性单手柄里两两相交的三个 facet, 但它们不对应 D^2 -belt. 因此, 和单多面体不同, 一个单手柄 Q 的旗性和它的神经 $N(Q)$ 的旗性不是等价的.

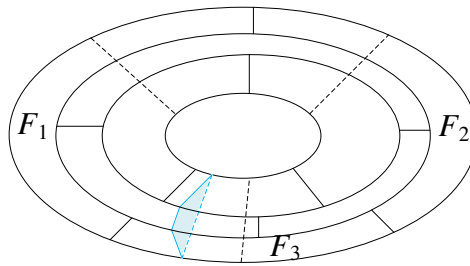


图 2-3: 一个旗性的单手柄, 但它的神经不是旗性的.

2.2.2 单手柄的 orbifold 基本群

在计算单手柄的 orbifold 基本群之前, 我们首先介绍 Coxeter 群里的 Tits 定理和 HNN 扩展里的范式定理 (Normal Form Theorem). 这一小节内容, 参考 [31, 第 3 章] 和 [67, 第 4 章].

直角 Coxeter 群和 HNN 扩展

设 $w = s_1 s_2 \cdots s_m$ 是直角 Coxeter 群 $W = \langle S \mid R \rangle$ 里的一个字符串 (word). 则 w 上的基本操作是指下面两个操作:

- (i) 缩减长度: 删去 w 中的子串 ss ;
- (ii) 交换: 若 $(st)^2 = 1$ 在 W 的关系集里, 则将 w 中的子串 st 换成 ts .

如果一个字符串 w 不能经过上面的基本操作缩减长度, 则 w 被称为不可约的.

定理 2.11 (Tits [31, 定理 3.4.2]). 两个不可约的字符串 x, y 在一个直角 Coxeter 群中表示相同的群元素当且仅当 x 可以经过一系列的交换操作变成 y .

定义 2.10 (Higman-Neumann-Neumann 扩张 [67, P179]). 设 $G = \langle S \mid R \rangle$ 是一个有限生成群, $\phi: A \rightarrow B$ 是 G 的两个子群 A, B 之间的一个同构. 取 t 为 S 中元素外的一个新字符, 则 G 关于 ϕ 的 HNN 扩张定义为:

$$G*_\phi = \langle S, t \mid R, t^{-1}gt = \phi(g), g \in A \rangle.$$

设 $\omega = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 t^{\epsilon_2} \cdots g_{n-1} t^{\epsilon_n} g_n$ ($n \geq 0$) 为 $G*_\phi$ 中的一个表达式, 其中 g_i 是 G 中的群元素 (g_i 可以取群 G 的单位元 1), $\epsilon_i = \pm 1$. 如果 ω 中没有连续子串 $t^{-1}g_i t$ 或 $tg_j t^{-1}$, 其中 $g_i \in A, g_j \in B$, 则称 ω 是不可约的.

字符串 $\omega = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 t^{\epsilon_2} \cdots g_{n-1} t^{\epsilon_n} g_n$ ($n \geq 0$) 是 $G*_\phi$ 中的一个范式, 如果下面条件成立,

- (i) g_0 为 G 中的任意元素;
- (ii) 如果 $\epsilon_i = -1$, 则 g_i 是子群 A 在 G 中陪集的一个代表元;
- (iii) 如果 $\epsilon_i = 1$, 则 g_i 是子群 B 在 G 中陪集的一个代表元;
- (iv) 没有连续的子串 $t^\epsilon 1 t^{-\epsilon}$.

定理 2.1 (HNN 扩张中的范式定理, [67, 定理 2.1]). 设 $G*_\phi = \langle G, t \mid t^{-1}gt = \phi(g), g \in A \rangle$ 为一个 HNN 扩张. 则有下面结论成立,

- (I) 通过 $g \mapsto g$, 群 G 可以嵌进群 $G*_\phi$. 特别地, 如果 $\omega = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \cdots t^{\epsilon_n} g_n = 1 \in G*_\phi$, 则 ω 一定是可约的;
- (II) $G*_\phi$ 中的每个元素 ω 都有唯一的范式表达 $\omega = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \cdots t^{\epsilon_n} g_n$.

$\omega = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \cdots t^{\epsilon_n} g_n$ 上的 t -约化是指:

- 如果 $g \in A$, 则将 $t^{-1}gt$ 形式的字串替换为 $\phi(g)$;
- 如果 $g \in B$, 则将 tgt^{-1} 形式的字串替换为 $\phi^{-1}(g)$.

HNN 扩张 $G *_\phi$ 中的每一个表达 $\omega = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \cdots t^{\epsilon_n} g_n$ 都可以经过有限次 t -约化变成一个范式.

单手柄的直角 Coxeter 胞腔分解

设 Q 为一个亏格为 g 的单手柄, $\mathcal{F}(Q) = \{F_1, \dots, F_m\}$ 为 Q 的 facet 集. 则存在 g 个 cutting belt B_1, \dots, B_g , 使得 Q 沿着这些 cutting belt 切开是一个单多面体, 记为 P_Q . 切开 Q 后, B_i 在 P_Q 中的有两个复制分别设为 B_i^+ 和 B_i^- . 则 B_i^+ 和 B_i^- 在 P_Q 中是不交的. 对任意 facet $F \in \mathcal{F}(P_Q)$, 满足 $F \cap B_i^+ \neq \emptyset$, 都存在一个 facet $F' \in \mathcal{F}(P_Q)$, 使得 $F' \cap B_i^- \neq \emptyset$ 且 F 和 F' 在 Q 中代表一个 facet. 因此, 我们用 $F \cap B_i^+ \sim F' \cap B_i^-$ 表示 F 在 F' cutting belt B_i 附近的对应关系.

设 \mathcal{F}_B 为 cutting belt 在 P_Q 中的复制. 将 P_Q 视为一个带边的直角 Coxeter orbifold, 其中

$$\partial P_Q = \bigcup_{B \in \mathcal{F}_B} F.$$

通过成对得粘 cutting belt 在 P_Q 的复制, 则我们可以得到单手柄 Q . 因此, 每个单手柄 Q 都是相应 P_Q 作为带边直角 Coxeter orbifold 的商, 我们把商映射记为

$$q : P_Q \longrightarrow Q. \quad (2-4)$$

P_Q 上的标准方块分解诱导了 P_Q 上一个直角 Coxeter 胞腔分解, 记为 $C(P_Q)$. 则 $C(P_Q)$ 包含下面类型的直角 Coxeter 胞腔:

- P_Q 上标准方块分解中的所有方块胞腔.
- \mathcal{F}_B 中每一个边界分支上的标准方块分解中的所有方块胞腔.

进一步, 通过商映射 q , $C(P_Q)$ 诱导了 Q 上一个直角 Coxeter 胞腔分解. 设 c 是 $C(P_Q)$ 中的一个 k 维方块胞腔, $B \in \mathcal{F}_B$ 为 P_Q 的某一个边界分支. 则 Q 的直角 Coxeter 胞腔分解中只有下面类型的胞腔.

- 如果对任意 $B \in \mathcal{F}_B$, 都有 $c \cap B = \emptyset$, 则 c 为 Q 的一个直角 Coxeter 胞腔. 此时, $c \cong e^k / (\mathbb{Z}_2)^k$, 并且与 P_Q 中的一个余 k 维面 $F_1 \cap \cdots \cap F_k$ 相交, 其中 $F_i \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$.
- 如果存在 $B \in \mathcal{F}_B$, 使得 $c \cap B \neq \emptyset$. 不妨设 $c \cap B^+ \neq \emptyset$, 则存在另一个方块胞腔

$c' \subset C(P_Q)$. 如果 c 为 $C(B^+)$ 中的一个 k 方块胞腔, 则 c 和 c' 一定包含在 $C(P_Q)$ 中两个 $k+1$ 方块胞腔的边界里. 商映射 q 将这两个 $k+1$ 方块胞腔粘成一个 $e^{k+1}/(\mathbb{Z}_2)^k$ 形式的直角 Coxeter 胞腔. 将所有 $C(B^+)$ 中的方块胞腔都粘掉以后, 如果仍有 $c \notin C(B^+)$, 则 c 是一个和 B^+ 横截相交的一维胞腔, 此时商映射 q 将 c 和 c' 粘为一个 1 维胞腔, 这个 1 胞腔在 Q 中粘到唯一的 0 胞腔上去.

从而, 我们就获得了 Q 上的一个直角 Coxeter 胞腔分解, 记为 $C(Q)$. 注意到 $C(Q)$ 的 0 维骨架只包含一个点 x_0 , x_0 对应 P_Q 的方块分解中的锥点. 我们将 x_0 选为单手柄 Q 的 orbifold 基本群的基点.

单手柄的 orbifold 基本群

根据 Q 的胞腔分解 $C(Q)$, 我们可以直接写出 Q 的 orbifold 基本群的一个群表现.

命题 2.12. 设 Q 为一个亏格 g 的单手柄, \mathcal{F}_B 为 Q 的一族 cutting belt, P_Q 为相应的单多面体. 则 $\pi_1^{orb}(Q)$ 的生成元集为 $\{s_F \mid F \in \mathcal{F}(P_Q)\}$, 关系为:

- (1) $s_F^2 = 1, \forall F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$;
- (2) $t_{B^+} t_{B^-} = 1, \forall B^+, B^- \in \mathcal{F}_B$ 满足 $B^+ \sim B^-$;
- (3) $(s_F s_{F'})^2 = 1, \forall F, F' \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$ 满足 $F \cap F' \neq \emptyset$;
- (4) $s_F t_{B^+} = t_{B^+} s_{F'}, \forall B^+ \sim B^- \in \mathcal{F}_B$ 和 $\forall F, F' \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$ 满足 $F \cap B^+ \sim F' \cap B^-$.

其中, $\pi_1^{orb}(Q)$ 的基点选为 Q 内部的锥点 x_0 .

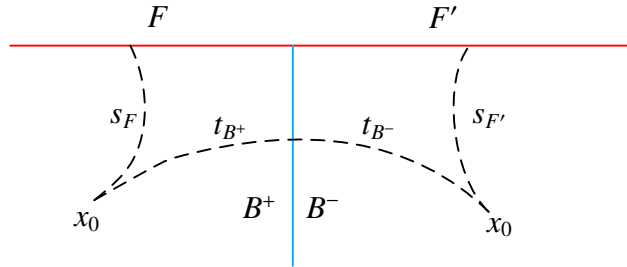


图 2-4: 与 cutting belt 相交的直角 Coxeter 2 胞腔.

设 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 为 P_Q 的作为带边 orbifold 的 orbifold 基本群, 即不考虑 \mathcal{F}_B 的直角 Coxeter 群,

$$W(P_Q, \mathcal{F}_B) = \langle s_F, \forall F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B \mid s_F^2 = 1, \forall F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B; \\ (s_F s_{F'})^2 = 1, \forall F, F' \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}(B), F \cap F' \neq \emptyset \rangle.$$

则 $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 实际上是 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 上的一个迭代的 HNN 扩张. 具体来说, 设 B 是 Q 的一个 cutting belt, $B^+, B^- \in \mathcal{F}_B$ 为 B 在 P_Q 中的两个复制. 令 $\mathcal{F}^{B^+} = \{F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B | F \cap B^+ \neq \emptyset\}$, $\mathcal{F}^{B^-} = \{F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B | F \cap B^- \neq \emptyset\}$. 则相应的两个直角 Coxeter 群 W_{B^+} 和 W_{B^-} 是同构的.

引理 2.13. 包含映射 $B^+ \hookrightarrow P_Q$ 和 $B^- \hookrightarrow P_Q$ 诱导的群同态 $i_{B^+} : W_{B^+} \rightarrow W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 和 $i_{B^-} : W_{B^-} \rightarrow W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 是单同态.

证明: 显然对任意 $F \in \mathcal{F}^{B^+}$, 我们有 $i_{B^+}(s_F) = s_F$; 对任意 $F \in \mathcal{F}^{B^-}$, 我们有 $i_{B^-}(s_F) = s_F$. 取 $j_{B^+} : W(P_Q, \mathcal{F}_B) \rightarrow W_{B^+}$, 其中

$$j_{B^+}(s_F) = \begin{cases} s_F, & \forall F \in \mathcal{F}^{B^+}, \\ 1, & \forall F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}^{B^+}. \end{cases}$$

容易验证 j_{B^+} 是良定的, 并且 $j_{B^+} \circ i_{B^+} = \text{id}_{W_{B^+}}$. 故 $\text{id}_{W_{B^+}}$ 为单同态. 同理, $\text{id}_{W_{B^-}}$ 也为单同态. \square

因此, W_{B^+} 和 W_{B^-} 为 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 的两个同构的子群. W_{B^+} 和 W_{B^-} 分别由 $\{s_F, F \in \mathcal{F}^{B^+}\}$ 和 $\{s_{F'}, F' \in \mathcal{F}^{B^-}\}$ 生成. 定义 $\phi_B : W_{B^-} \rightarrow W_{B^+}$, $\phi_B(s_{F'}) = s_F$ 其中 $F' \cap B^- \sim F \cap B^+$. 则 ϕ_B 是一个良定的同构. 将一个 cutting belt 在 P_Q 中的两个复制粘起来的过程等价于在 P_Q 的 orbifold 基本群 $\pi_1^{\text{orb}}(P_Q) = W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 上做一次 HNN 扩张. 产生新的生成元 t_{B^+}, t_{B^-} , 并满足 $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 中的关系. 通过对 Q 的亏格做归纳, 则 Q 的 orbifold 基本群同构于 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 上 g 次 HNN 扩张. 具体过程如下:

$$\begin{array}{ccccccc} (Q_g, B_g) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (Q_1, B_1) & \longrightarrow & Q_0 = P_Q \\ & & & & \xrightarrow{\text{切开}} & & \\ & & & & \xleftarrow{\text{HNN-扩张}} & & \end{array}$$

$$G_g = \pi_1^{\text{orb}}(Q) \longleftarrow \cdots \longleftarrow G_1 \longleftarrow G_0 = W(P_Q, \mathcal{F}_B)$$

其中每个 Q_k 是从 Q_{k+1} 沿着第 $(k+1)$ 个 cutting belt 切开的一个 k 亏格的单手柄. Q_k 为一个带边 orbifold. G_k 是 Q_k 的 orbifold 基本群, 并且是 G_{k-1} 上的一个 HNN 扩张.

命题 2.14. 设 Q 是一个 g 亏格的单手柄, B_1, \dots, B_g 是它的一族 cutting belt. 则 $\pi_1^{\text{orb}}(Q) \cong (\cdots ((W(P_Q, \mathcal{F}_B) *_{\phi_{B_1}}) *_{\phi_{B_2}}) \cdots) *_{\phi_{B_g}}$.

命题 2.14 中的 $(\cdots((W(P_Q, \mathcal{F}_B)^*_{\phi_{B_1}})^*_{\phi_{B_2}})\cdots)^*_{\phi_{B_g}}$ 和 ϕ_{B_i} 的顺序无关. 另外, 命题 2.12 中 $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 的群表现可以进一步通过关系 $t_{B^+}t_{B^-} = 1$ 化简, 即令 $t_{B^-} = t_{B^+}^{-1}$. 此时, 我们称群 $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 为一个手柄群.

则根据 Tits 定理和 HNN 扩张的范式定理知, 任意 $w \in G_g = \pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 都有一个范式

$$w = g_0 t_g^{\epsilon_1} g_1 t_g^{\epsilon_2} \cdots g_{n-1} t_g^{\epsilon_n} g_n$$

为一个范式 G_{g-1}^* 上的范式, 每个 $g_i \in G_{g-1}$ 为 G_{g-2}^* 上的范式. 由归纳, w 有唯一的范式形式

$$w = g_0 t_1 g_1 \cdots g_{m-1} t_m g_m \quad (2-5)$$

其中每个 g_i 为 $G_0 = W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中的不可约的字符串, $t_i \in \{t_B^{\pm 1}\}$ 是由 cutting belt 决定的自由生成元. 对每一个 t_B , 在这个表达式都是一个范式. 我们将这个表达式称为 w 在 $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 中的一个不可约范式. 这里的数字 m 称为 x 的 t -长度.

需要注意的是, 单手柄 Q 的面结构决定的直角 Coxeter 群 W_Q 是 $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 的关于所有 t_B 生成正规子群的商群, 而不是子群.

注 2.8. Davis-Januszkiewicz-Scott 在 [37, 定理 4.7.2] 给出了一个类似形式的群. 但他们那里的所有生成元提升到万有覆叠上的作用为对合, 即 $t_B^2 = 1$. 而我们这里的 t_B 是一个自由生成元. 特别地, 命题 2.12 中最后一个关系是 Baumslag-Solitar 关系的一种. 设 B 为单手柄的一个 cutting belt, B^+ 和 B^- 为 B 在 P_Q 中的两个复制. 考虑下面复合

$$W_B \cong W_{B^+} \xrightarrow{i_{B^+}} W(P_Q, \mathcal{F}_B) \xrightarrow{i_1} G_1 \xrightarrow{i_2} \cdots \xrightarrow{i_g} G_g = \pi_1^{\text{orb}}(Q),$$

其中 $i_k(h) = h \in G_k, \forall h \in G_{k-1}$. 则根据 HNN 扩张上的范式定理, 每个 i_k 都是单嵌入. 故上面复合将 W_B 嵌到 $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 中去.

2.2.3 单手柄的万有覆叠

单手柄的万有覆叠的构造

设 Q 是一个单手柄, $\{B_1, \dots, B_g\}$ 是 Q 的一组 cutting belt, P_Q 是相应的单多面体. $q: P_Q \rightarrow Q$ 为 (2-4) 定义的商映射. $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 是命题 2.12 中的群表现. 我们

在 P_Q 的 facet 集上定义一个特征映射:

$$\lambda : \mathcal{F}(P_Q) \longrightarrow \pi_1^{orb}(Q)$$

其中对任意 $F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$, $\lambda(F) = s_F$; 对任意 $B \in \mathcal{F}_B$, $\lambda(B) = t_B$. 则我们可以构造下面空间,

$$\tilde{Q} = P_Q \times \pi_1^{orb}(Q) / \sim \quad (2-6)$$

其中 $(x, g) \sim (y, h)$ 当且仅当

$$\begin{cases} x = y \in F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B, g s_F = h, \\ (x, y) \in (B, B'), B, B' \in \mathcal{F}_B, q(x) = q(y), t_B \cdot g = h. \end{cases}$$

则 $\pi_1^{orb}(Q)$ 在 \tilde{Q} 上作用的轨道空间恰好为 Q . 所以 \tilde{Q} 为单连通的, 即 \tilde{Q} 为单手柄 Q 的万有覆叠. 事实上, Q 在 \tilde{Q} 中的一个提升恰好为 P_Q , 此时这个 P_Q 可以被视为 $\pi_1^{orb}(Q)$ 作用在 \tilde{Q} 上的基本域.

引理 2.15. \tilde{Q} 是单手柄 Q 的万有覆叠空间.

万有覆叠 \tilde{Q} 的同调群

下面, 我们利用 Davis 的方法 ([31, 第 8 章]) 计算 \tilde{Q} 的同调群.

设 Q 为一个 g 亏格的单手柄,

$$G = \pi_1^{orb}(Q) \cong (\cdots ((W(P_Q, \mathcal{F}_B)^{*}_{\phi_{B_1}})^{*}_{\phi_{B_2}}) \cdots)^{*}_{\phi_{B_g}}$$

为它的 orbifold 基本群的一个群表现. 则根据 Tits 定理和 HNN 扩张的范式定理知, 任意 $w \in G$ 都有一个不可约范式

$$x = g_0 t_1 g_1 \cdots g_{m-1} t_m g_m \quad (2-7)$$

其中每个 g_i 为 $G_0 = W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中的不可约的字符串, $t_i \in \{t_B^{\pm 1}\}$ 是由 cutting belt 决定的自由生成元, 并将相应的子群同构记为 $\{\phi_B^{\pm 1}\}$. 记 G 的生成元集为 $\mathcal{S} = \{s_F; F \in$

$\mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B\} \cup \{t_B; B \in \mathcal{F}_B\}$. 对 $w \in G$, 令

$$S(w) = \{s \in \mathcal{S} \mid l(ws) < l(w)\},$$

其中 $l(w)$ 是字符串 w 的字符串长度 (即从 G 关于生成元集 \mathcal{S} 的 Cayley 图中单位元 1 到 w 最短道路的长度). 对任意 $T \subset \mathcal{S}$, 令 P_Q^T 为

$$P_Q^T = \bigcup_{t \in T} F_t,$$

其中如果 $s_F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$, 则令 $F_{s_F} = F$; 如果 $B \sim B' \in \mathcal{F}_B$, 则令 $F_{t_B} = B'$.

则我们有下面结论.

命题 2.16.

$$H_*(\widetilde{Q}) \cong \bigoplus_{w \in \pi_1^{orb}(Q)} H_*(P_Q, P_Q^{S(w)}).$$

注 2.9. 需要注意的是, 我们这里的 P_Q 并不是 [31, 第 8 章] 中的 mirror space. 当然这里 $G = \pi_1^{orb}(Q)$ 一般也不是一个 Coxeter 群, 除非 Q 是一个单多面体.

在证明命题 2.16 之前, 我们首先给出一些定义和引理. 参考 [31].

$T \subset \mathcal{S}$ 被称为球面的 如果 T 生成 G 的一个有限子群, 记为 W_T . 则 $W_T \cong (\mathbb{Z}_2)^{\#T}$, 其中 $\#T$ 表示 T 中元素的个数. 球面集 T 中的每一个 s_F 都对应一个 facet $F \in \mathcal{F}(P) - \mathcal{F}_B$, 且对球面集 T 中的任意两个 $s_F, s_{F'}$, 都有 $F \cap F' \neq \emptyset$.

如果 T 是一个球面集 T_S 和某个 $t_B, B \in \mathcal{F}_B$, 的并. 则令

$$W_T = W_{T_S} \cup t_{B'} W_{T_S},$$

其中 B' 和 B 是同一个 cutting belt 的复制.

引理 2.17. 对任意 $w \in G$, $S(w)$ 要么是一个球面集, 要么是一个球面集和某个自由生成元 t_B 的并.

证明: 设 $w = g_0 t_1 g_1 \cdots g_{m-1} t_m g_m$ 为 G 中的一个不可约范式. 为方便我们的讨论, 不妨设 w 是一个反向的范式, 即每个 g_i 是子群 $W_{B_{i+1}}$ 或 $W_{B'_{i+1}}$ 在 G 中陪集的一个代表元.

此时, 对任意 $F \in \mathcal{F}(P) - \mathcal{F}_B$, $s_F \in S(w)$ 当且仅当 $s_F \in S(t_m g_m)$. 如果存在一个 $B \in \mathcal{F}_B$ 使得 $t_B \in S(w)$, 则 $g_m t_B = t_B g'_m$, 其中 $g'_m = \phi_B(g_m)$. 进一步, $t_m = t_B^{-1}$, 而 $t_{m-1} \neq t_B$. 故引理得证. \square

对每个球面集 $T = S(w)$, 定义 $\mathbb{Z}W_T \subset \mathbb{Z}W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中的一个元素

$$\beta_T = \sum_{w \in W_T} (-1)^{l(w)} w.$$

考虑 P_Q 上的它的面结构诱导的胞腔分解. 设 $C_*(P_Q)$ 和 $C_*(\tilde{Q})$ 分别是 P_Q 和 \tilde{Q} 的胞腔链复形. 并令 $H_*(P_Q)$ 和 $H_*(\tilde{Q})$ 为相应的同调群. 因为 G 作用在 \tilde{Q} 上是胞腔的, 所以 $C_*(\tilde{Q})$ 是一个 $\mathbb{Z}(G)$ -模.

对每个球面集 $T = S(w)$, 定义一个群同态 $\beta_T : C_*(P_Q) \longrightarrow C_*(W_T P_Q)$. 则我们有下面结论.

引理 2.18. $C_*(P_Q^T) \subset \ker \beta_T$.

证明: 设 τ 为 P_Q^T 中的一个胞腔. 如果 T 是一个球面集, 则 τ 包含在某个 facet $F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$ 中, 且 $s_F \in T$. 设 \mathcal{B} 为 W_T 的一个子集并且满足 $W_T = \mathcal{B} \cup s_F \mathcal{B}$, 则 β_T 可以写为

$$\beta_T = \sum_{w \in W_T} (-1)^{l(w)} w = \sum_{v \in \mathcal{B}} (-1)^{l(v)} (v - v s_F).$$

因为 facet vF 和 facet $v s_F F$ 在 \tilde{Q} 中是粘在一起的, 所以我们有

$$\beta_T \tau = \sum (-1)^{l(v)} (v - v s_F) \tau = \sum (-1)^{l(v)} (v \tau - v \tau) = 0.$$

因此, $C_*(P_Q^T) \subset \ker \beta_T$. \square

所以 β_T 诱导一个链映射 $C_*(P_Q, P_Q^T) \longrightarrow C_*(W_T P_Q)$, 不妨仍记为 β_T . 对任意 $w \in G$, 如果 $T = S(w)$ 是一个球面集, 则我们定义

$$\rho^w = w \beta_T : C_*(P_Q, P_Q^T) \xrightarrow{\beta_T} C_*(W_T P_Q) \xrightarrow{w} C_*(w W_T P_Q).$$

因此有同调群同态

$$\rho_*^w : H_*(P_Q, P_Q^T) \longrightarrow H_*(w W_T P_Q).$$

如果 $T = S(w) = \{t_B\} \cup T_S$ 其中 T_S 是一个球面集, 则对任意 $s \in T_S$, $t_B s = s t_B$. 所以 $W_{T_S} < W_B$, 即对任意 $s \in T_S$, $B \cap F_s \neq \emptyset$. 所以 B' 和 $\{F_s \mid s \in T_S\}$ 都不交. 因此对 $k > 1$, 我们有

$$H_k(P_Q, P_Q^T) \cong H_{k-1}(P_Q^T) \cong H_{k-1}(P_Q^{T_S} \coprod B') \cong H_{k-1}(P_Q^{T_S}) \cong H_k(P_Q, P_Q^{T_S})$$

其中 P_Q 和 B' 都是可缩的单多面体. 则令

$$\rho_*^w : H_k(P_Q, P_Q^T) \cong H_k(P_Q, P_Q^{T_S}) \xrightarrow{\beta_{T_S}} H_*(W_{T_S} P_Q) \xrightarrow{i_*} H_*(W_T P_Q) \xrightarrow{\times w} H_*(w W_T P_Q).$$

接下来将 G 中的元素排成一列,

$$w_1, w_2, \dots$$

使得 $l(w_i) \leq l(w_{i+1})$. 对任意 $n \geq 1$, 令

$$X_n = \bigcup_{i=1}^n w_i P_Q.$$

为简化记号, 下面记 $w = w_n$.

引理 2.19. $X_{n-1} \cap wP = wP^{S(w)}$.

证明: 注意到, 每个 X_{n-1} 都对应 G 关于生成元集 S 的 Cayley 图的一个连通子图, 满足这个子图中的每一个点到单位元的长度小于或等于 $l(w)$. 所以

$$l(ws) = \begin{cases} l(w) - 1, & \text{如果 } s \in S(w), \\ l(w) + 1, & \text{如果 } s \in S - S(w). \end{cases}$$

X_{n-1} 中的一个 chamber $w_i P_Q$ ($i < n$) 和 chamber $w P_Q$ 相交于 facet wF 当且仅当下面两种情况之一成立:

- $F \in \mathcal{F}(P) - \mathcal{F}_B$, $w_i \cdot s_F = w$;
- $F \in \mathcal{F}_B$, $w_i \cdot t_F^{-1} = w$.

换言之, $l(ws_F) = l(w) - 1$ 或者 $l(wt_F) = l(w) - 1$. 所以, $X_{n-1} \cap wP_Q = wP_Q^{S(w)}$. \square

接下来, 我们完成命题 2.16 的证明. 从引理 2.19 知 $X_{n-1} \cap wP_Q = wP_Q^{S(w)}$. 根据切除定理, 我们有下面同构

$$H_*(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_*(wP_Q, wP_Q^{S(w)}).$$

考虑对 (X_n, X_{n-1}) 诱导的同调群长正合列

$$\cdots \rightarrow H_*(X_{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_*(X_n) \xrightarrow{k_*} H_*(X_n, X_{n-1}) \rightarrow \cdots$$

我们需要证明 k_* 是一个可裂满同态, 即证 $k_*^w : H_*(X_n) \rightarrow H_*(P_Q, P_Q^{S(w)})$ 是一个可裂满同态, 其中 k_*^w 表示 k_* , 切除同构及左乘变换 w^{-1} 的复合.

注意到 ρ_*^w 在 $H_*(P_Q, P_Q^{S(w)})$ 上的像包含在 $H_*(wW_{S(w)}P_Q)$ 中. 对 $W_{S(w)}$ 中的任意 $v \neq 1$, 都有 $l(wv) < l(w)$. 所以 $wW_{S(w)}P_Q \subset X_n$. 因此 ρ_*^w 包含在 $H_*(X_n)$ 中. 见下面交换图表,

$$\begin{array}{ccc} H_*(X_n, X_{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & H_*(wP_Q, wP_Q^{S(w)}) \\ \uparrow k_* & \searrow k_*^w & \downarrow \times w^{-1} \\ H_*(X_n) & \xrightleftharpoons[\rho_*^w]{} & H_*(P_Q, P_Q^{S(w)}) \\ \uparrow i_* & & \downarrow \beta_* \\ H_*(wW_{S(w)}P_Q) & \xleftarrow{\times w} & H_*(W_{S(w)}P_Q) \end{array}$$

如果 $S(w)$ 是一个球面集, 则 β_* 是 $\beta_{S(w)}$ 诱导的映射; 如果 $S(w)$ 是某个 $\{t_B\}$ 和一个球面集 T_S 的并, 则 β_* 是下面复合

$$\beta_{T_S} \circ i_* : H_k(P_Q, P_Q^T) \cong H_k(P_Q, P_Q^{T_S}) \xrightarrow{\beta_{T_S}} H_*(W_{T_S}P_Q) \xrightarrow{i_*} H_*(W_TP_Q).$$

由于 \tilde{Q} 是 Q 的万有覆叠, 所以 $H_1(\tilde{Q}) \cong \pi_1^{ab}(\tilde{Q}) = 0$. 当 $* > 1$ 时, 根据上面交换图表, $k_*^w \circ \rho_*^w = id$. 因此, 我们有下面可裂的短正合列

$$0 \rightarrow H_*(X_{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_*(X_n) \xrightarrow{k_*^w} H_*(P_Q, P_Q^{S(w)}) \rightarrow 0.$$

进而,

$$H_*(X_n) \cong H_*(X_{n-1}) \oplus H_*(P_Q, P_Q^{S(w)})$$

其中 $H_*(X_1) = H_*(P_Q) = 0$. 又因为 $\tilde{Q} = \bigcup_n X_n$, 故

$$H_*(\tilde{Q}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_*(X_n) \cong \bigoplus_{w \in G} H_*(P_Q, P_Q^{S(w)}).$$

命题 2.16 得证.

2.2.4 非球面性, 旗性和非正曲率

在这一小节, 我们将证明下面定理.

定理 A. 一个单手柄是 orbifold 非球面的当且仅当它是旗性的.

定理 A 必要性的证明

设 Q 为一个单手柄, $\{B_1, \dots, B_g\}$ 为 Q 的一组 cutting belt, P_Q 为对应的单多面体. 则根据命题 2.16, 下面结论成立.

引理 2.20. 如果 $N(P_Q)$ 中存在空的 $k(\geq 2)$ 维的单形 Δ^k , 则 $H_k(\tilde{Q}) \neq 0$.

证明: 设空单形 Δ^k 的顶点为

$$T = \{F_1, F_2, \dots, F_{k+1}\}.$$

注意 $T \cap \mathcal{F}_B = \emptyset$. 则 T 对应的 s_1, \dots, s_{k+1} 生成一个有限群 $W_T \cong (\mathbb{Z}_2)^{k+1}$. 令 $w = s_1 s_2 \dots s_{k+1}$. 不妨记 $T_* = \{s_1, \dots, s_{k+1}\}$. 则 $S(w) = T_*$, $P_Q^{S(w)} = P_Q^{T_*} = \bigcup_{i=1}^{k+1} F_i \simeq \partial \Delta^k \simeq S^{k-1}$. 由于 P_Q 是可缩的, 根据对 (P_Q, P_Q^T) 诱导的同调群长正合列知,

$$H_k(P_Q, P_Q^T) \cong H_{k-1}(P_Q^T) \cong H_{k-1}(S^{k-1}) \neq 0.$$

所以, $H_k(\tilde{Q}) \neq 0$. □

从而, 如果 Q 不是旗性的, 则存在某个 $k > 1$ 使得 $H_k(\tilde{Q}) \neq 0$, 则 \tilde{Q} 不是可缩的, 即 Q 不是 orbifold 非球面的. 定理 A 的必要性得证.

定理 A 充分性的证明

在这一部分, 我们利用 Gromov 的结论和 Cartan-Hadamard 定理来证明定理 A 的充分性. 在第 5.2 节中, 这两个结论将再次被用到.

首先, 我们引入 Gromov 的非正曲率方块复形的概念. 一个测地度量空间 X 被称为非正曲率的如果它是一个局部 CAT(0) 空间. 而 Cartan-Hadamard 定理是说非正曲率空间都是非球面的. 参考 [14, 31, 49].

定义 2.11 (方块复形中的 link [14, 第 7.15 节] 或 [31, P508]). 设 K 是一个方块复形, v 为一个方块复形 K 中的任意一点, 则 K 中每个包含点 v 的 d 维方块胞腔都决定了一个 $d-1$ 维单形 $s(c)$, 且 $s(c') \subset s(c)$ 当且仅当 $c \subset c'$. 我们将这些单形 $s(c)$ 构成的单纯复形定义为顶点 v 的 (几何) link, 记为 $\text{Lk}(v)$.

定理 2.21 (Gromov 引理, [31, 推论 I.6.3]). 一个分段欧式方块复形是非正曲率的当且仅当复形中每个点的 link 都是一个旗性的单纯复形.

回到, 定理 A 的充分性的证明. 设 $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ 是单手柄 Q 上的万有覆叠, $C(P_Q)$ 是相应单多面体 P_Q 上的标准方块分解. 则 $C(P_Q)$ 诱导了 \tilde{Q} 上的一个方块胞腔分解, 记为 $C(\tilde{Q})$, 使得 $C(\tilde{Q})$ 中每个顶点的 link 都组合等价于 $N(P_Q)$. 事实上, $C(\tilde{Q})$ 中每个顶点都是 $C(P_Q)$ 中的锥点的提升. 对任意 d 维方块 $c \in C(P_Q)$, 都对应 P_Q 的一个余 d 维面, $\pi^{-1}(c)$ 的每一个连通分支都是 $C(\tilde{Q})$ 中的方块胞腔.

所以, 如果 Q 是旗性的, 则 P_Q 和 $N(P_Q)$ 是旗性的. 根据 Gromov 引理, $C(\tilde{Q})$ 是非正曲率的. 又由 Cartan-Hadamard 定理知, 它是非球面的. 进而, Q 是 orbifold 非球面的. 定理 A 的充分性证毕.

B-belt 的 π -单性

在这一小节的最后, 我们解释我们定义的 B-belt 的 π -单性质.

命题 2.22. 设 $i : B \hookrightarrow Q$ 是一个单手柄 Q 的 B-belt. 则诱导的基本群同态 $i_* : \pi_1^{\text{orb}}(B) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 是一个单射. 进一步, 如果 B 不是 orbifold 非球面的, 则 Q 也不是 orbifold 非球面的.

证明: 如果 B 是 Q 的 cutting belt, 则根据引理 2.13, 知 B 是 π_1 单的.

如果 B 是 Q 的一个 B-belt 且与 Q 的任意 cutting belt 都不交, 则 B 可以实现为 P_Q 中嵌入的子 orbifold. 诱导的基本群同态 $\pi_1^{\text{orb}}(B) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(P_Q)$ 是单的. 结合 HNN 扩张的范式定理, $i_* : \pi_1^{\text{orb}}(B) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(P_Q) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 也是单的.

如果 B 和 Q 的某些 cutting belt 相交, 则我们可以做适当形变使得 B 横截相交于 Q 的某些 cutting belt, 不妨设为 E_1, E_2, \dots, E_{k-1} . 进一步, 设 B 被这些 cutting belt

分成 B_1, B_2, \dots, B_k , 使得 E_i 与 B_i 和 B_{i+1} 相交. 注意到每个 B_i 都为带边的直角 Coxeter orbifold, 且 $\pi_1^{orb}(B_i)$ 为一个直角 Coxeter 群. 此时

$$\pi_1^{orb}(B) = \pi_1^{orb}(B_1) * \pi_1^{orb}(B_2) * \dots * \pi_1^{orb}(B_k) / \langle R(E_i) | i = 1, \dots, k-1 \rangle$$

其中 $R(E_i)$ 为 $s = t$ 形式的关系集, $s = t$ 当且仅当 $F_s \sim_{E_i} F_t$, $F_s \in \mathcal{F}(B_i)$, $F_t \in \mathcal{F}(B_{i+1})$.

此时对 $g \in \pi_1^{orb}(B_i)$, $i_*(g) = t_{i-1}^{-1} \dots t_1^{-1} g t_1 \dots t_{i-1}$. 定义 $\kappa : \pi_1^{orb}(Q) \rightarrow \pi_1^{orb}(B)$,

$$\kappa(s) = \begin{cases} s, & F_s \in \cup \mathcal{F}(B_i) \\ 1, & F_s \in \mathcal{F}(P_Q) - \cup \mathcal{F}(B_i) \end{cases}$$

其中 κ 将所有的自由生成元都映为单位元 1. 则 κ 是良定的且 $\kappa \circ i_* = id$. 因此, i_* 是一个单射.

设 \tilde{Q}, \tilde{B} 分别是 Q, B 的万有覆盖空间. 如果 B 不是 orbifold 非球面的, 则存在一个整数 $k \geq 2$ 使得 $\pi_k(\tilde{B}) \neq 0$ 且对任意 $1 \leq i < k$ $\pi_i(\tilde{B}) = 0$. 根据 Hurewicz 定理知, $H_k(\tilde{B}) \cong \pi_k(\tilde{B}) \neq 0$. 根据定理 A 的充分性的证明, B 一定存在一个 $k > 2$ 的 Δ^k -belt. 进而, Δ^k -belt 也为 Q 的 belt, 根据定理 A 的必要性的证明, Q 不是 orbifold 非球面的. \square

2.2.5 非环面性, \square 性和 orbifold 基本群中的 \mathbb{Z}^2 子群

在这一小节中, 我们将给出单手柄 orbifold 基本群中 \mathbb{Z}^2 子群存在性的一个等价的组合刻画. 即如下定理:

定理 B (直角手柄群上的 \square -belt 条件). 设 Q 为一个 n 维旗性单手柄, 则 $\pi_1^{orb}(Q)$ 中包含一个秩大于等于 2 的自由 Abel 子群当且仅当 Q 中存在一个 \square -belt.

单手柄中的 \square -belt

定义 2.12. 设 Q 是一个旗性的单手柄, Q^* 为它的对偶. Q 中的一个 \square -belt 是指一个四边形-belt. 进一步, 我们称 \square -belt 的对偶是 Q^* 中的一个 \square .

注 2.10. (1) 在 Gromov 的文章 [49, 第 4.2 节] 中, 一个旗性单纯复形 K 的 Siebenmann 的 no \square -条件是指 K 没有空四边形, 其中 K 中的空四边形是指 K 中的依次相连的

一个四个点满足两组对角顶点之间没有边. 所以, Siebenmann 的空四边形是我们定义中的 \square 的特殊情况.

(2) 三维多面体 P^3 中的一个棱形 3 回路 [80] 决定了 P^3 中的一个 Δ^2 -belt. 如果 P^3 中没有棱形 3 回路, 则 P^3 要么是旗性的, 要么是一个四面体. 类似的, 一个三维旗性单多面体 P^3 中的一个棱形 4 回路 [80] 决定了 P^3 中的一个 \square -belt.

当 Q 是一个单多面体的情况

首先, 让我们考虑当 Q 是一个单多面体时, 定理 2.25 的证明. 此时, 定理 2.25 可以由 Moussong 的结论推出, 见 [73] 或 [31, 推论 12.6.3]. 在这里, 我们另外给一个组合的证明. 这个证明基于 Coxeter 群上的 Tits 定理, 对 Q 不是单多面体的情况的证明有所帮助.

设 P 是一个单多面体, $W = \langle S \mid R \rangle$ 是 P 决定的直角 Coxeter 群. 根据 Tits 定理, 直角 Coxeter 群中的两个不可约字符串表示相同的群元素当且仅当其中一个字符串可以通过一系列的交换运算转化为另一个字符串.

设 $w = s_1 \cdots s_m$ 是 W 中一个长度为 m 的字符串, t 是生成元集 S 里的一个元素. 我们考虑字符串 wt ,

- 如果可以通过一些基本运算使得 wt 的长度等于 $m - 1$, 那么我们称 t 在 w 中 **DIE**, 此时一定存在一个 $s_i = t$ 使得 $(s_{>i}t)^2 = 1$ ($s_{>i}$ 表示一个 $j > i$ 的 s_j);
- 如果 $wt = tw$ 是不可约的, 那么我们称 t 在 w 中 **SUCCESS**. 这意味着, t 和所有的 s_i 都可交换;
- 如果 wt 是不可约的, 但 $wt \neq tw$, 那么我们称 t 在 w 中 **FAIL**. 此时一定存在一个 s_i 使得 $(s_it)^2 \neq 1$, $(s_{>i}t)^2 = 1$.

充分性证明是显然的. 这是因为 \square 中两组对边给出的两个字符串 s_1s_3 和 s_2s_4 恰好生成了群 $W_\square < W_P$ 中的一个 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群.

反之, 设 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 为 W_P 的一个子群, 则需要找出 P 中的一个 \square -belt. 我们将证明分为下面几个步骤:

声明-1 存在 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的两个生成元 $x = s_1 \cdots s_m$ 和 $y = t_1 \cdots t_n$, 使得 $t_i s_j = s_j t_i, \forall i, j$.

证明: 设 $x = s_1 \cdots s_m$ 和 $y = t_1 \cdots t_n$ 为 W_P 中子群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的两个生成元的表达字符串. 则 $xy = yx$ 表明

$$s_1 \cdots s_m \cdot t_1 \cdots t_n = t_1 \cdots t_n \cdot s_1 \cdots s_m.$$

不失一般性, 假设 $m \geq n$. 根据 Tits 定理, 经过一系列的基本操作后, $w = s_1 \cdots s_m \cdot t_1 \cdots t_n$ 可以转化为 $t_1 \cdots t_n \cdot s_1 \cdots s_m$.

我们从 xt_1 开始做归纳. xt_1 有下面三种情况:

- (A) t_1 在 x 的某一个 s_k 处 DIE. 则 $x = t_1 s'_2 \cdots s'_{m-1} t_1, y = t_1 t'_2 \cdots t'_{n-1} t_1$. 因此, 我们可以取 $x' = s'_2 \cdots s'_{m-1}$ 和 $y' = t'_2 \cdots t'_{n-1}$ 为群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的两个长度更短的生成元. 然后, 我们重新开始归纳.
- (B) 如果 t_1 在 x 中 FAIL, 则可以令 $s_1 = t_1$. 因此 $x = t_1 s_2 \cdots s_m$.
- (C) t_1 是 SUCCESS, 则 $t_1 s_i = s_i t_1, \forall i$.

进一步, 在情况 (B) 下, 考虑 xt_2 . 如果 t_2 DIE, 则 $(t_1 t_2)^2 = 1$, 进一步令 $x = t_2 t_1 s'_3 \cdots s'_{m-1} t_2, y = t_2 t_1 t'_3 \cdots t'_{n-1} t_2$. 则和情况 (A) 类似, 令 $t_1 s'_3 \cdots s'_{m-1}$ 和 $t_1 t'_3 \cdots t'_{n-1}$ 是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的两个长度更短的生成元. 如果 t_2 FAIL, 则可令 $x = t_1 t_2 s_3 \cdots s_m$. 如果 t_2 SUCCESS, 则 $t_1 s_i = s_i t_1, \forall i$ (包括 $s_1 = t_1$).

在情况 (C) 下, 考虑 xt_2 . 如果 t_2 DIE, 则我们可以令 $s_1 = t_2$, 此时 $x = t_2 s_2 \cdots s_m, (t_1 t_2)^2 = 1$. 在 y 中交换 t_1 和 t_2 , 则又变为情况 (A). 如果 t_2 FAIL, 则可令 $x = t_2 t_2 s_3 \cdots s_m$. 最后一种情况, t_2 也 SUCCESS.

不断地进行上面操作. 则最后只有 FAIL 和 SUCCESS 的 t_i 保留下来. 并且只有下面三种可能的情况:

- (i) 所有的 t_i 都 FAIL. 此时, 我们可以令 $x = t_1 t_2 \cdots t_n s_{n+1} \cdots s_m = y s_{n+1} \cdots s_m$. 因此, 我们可以令 $y^{-1}x$ 和 y 为 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的两个新生成元. 则这时 $t_i s_j = s_j t_i, \forall i, j$.
- (ii) 某些 t_i FAIL. 此时, 我们可以令 $x = t_{i_1} \cdots t_{i_k} s_{k+1} \cdots s_m$, 使得对每个 $t_{j_u} \neq t_{i_1}, \dots, t_{i_k}$ 都和所有的 s_i 以及 t_{i_1}, \dots, t_{i_k} 可交换. 因此, 我们可以令 $x = t_1 \cdots t_n \cdot t_{j_1} \cdots t_{j_{n-k}} \cdot s_{k+1} \cdots s_m$. 则 $y^{-1}x$ 移除了 x 中所有 FAIL 的 t_i . 进一步, $y^{-1}x$ 和 y 可以选为 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 满足声明-1 的生成元.
- (iii) 所有 t_i SUCCESS. 声明-1 自然成立.

这样我们就完成了声明-1 的证明. □

接下来, 设 x 和 y 为 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 两个满足声明-1 的生成元.

声明-2: x 和 y 中分别存在两个字母 s, s' 和 t, t' , 对应 P 的四个 facet $F_s, F_{s'}, F_t, F_{t'}$, 构成 P^* 中的一个 □.

证明: 由于 x 是自由生成元, 所以 x 中存在两个字母 s, s' 满足 $F_s \cap F_{s'} = \emptyset$. 同理, y 中存在两个字母 t, t' 满足 $F_t \cap F_{t'} = \emptyset$. 如果 $\{s, s'\} \cap \{t, t'\} = \emptyset$, 由于 t, t' 和 s, s' 可交

换, 因此 $F_s, F_{s'}, F_t, F_{t'}$ 一定决定了 P 中的一个 \square -belt. 否则, 我们有 $\{s, s'\} \cap \{t, t'\} \neq \emptyset$. 此时设 $s = t$, 则 $(tt')^2 = (st')^2 = 1$. 这与 y 是一个不可约的字符串矛盾. \square

这样我们就完成了, 当 Q 是一个单多面体时, 定理 B 的证明. 下面, 我们考虑一般情况.

定理 B 充分性的证明

设 Q 是一个旗性单手柄, B_\square 为 Q 中的一个 \square -belt, f_1, f_2, f_3, f_4 为 B_\square 的四条边满足除了 $\{f_1, f_3\}$ 和 $\{f_2, f_4\}$ 以外, 其他任意两条边都相交. 假设每个 f_i 分别包含在 Q 的 facet F_i 中. 则 $\{F_i \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ 一定是四个不同的 facet. 更准确地说, 我们有下面引理.

引理 2.23. 设 Q 是一个旗性单手柄, B_\square 为 Q 中的一个 \square -belt. 则,

- B_\square 的任意两个相邻的边都不能包含在同一个 facet 中.
- B_\square 的任意两个不交的边都不能包含在同一个 facet 中.

证明: 如果 B_\square 的两个相邻的边包含在同一个 facet 中, 不妨设 $F_1 = F_2$. 则 $f_1 \cap f_2 \neq \emptyset$ 说明 F_1 有一个自交. 换句话说, $\mathcal{N}(Q)$ 中有一个 1 单形的两个顶点为同一个点. 这和 Q 是单的矛盾.

如果 B_\square 的两个不交的边包含在同一个 facet 中, 不妨设 $F_1 = F_3$. 则 Q 的亏格大于 0. 因此 F_1 和 B_\square 之间存在一些“洞”. 但 F_2 是可缩的, 所以知 $F_2 \cap F_1$ 不连通. 反映到 $\mathcal{N}(Q)$ 上, 存在两个 1 单形以两个相同的点为顶点. 这也和 Q 是单的矛盾. \square

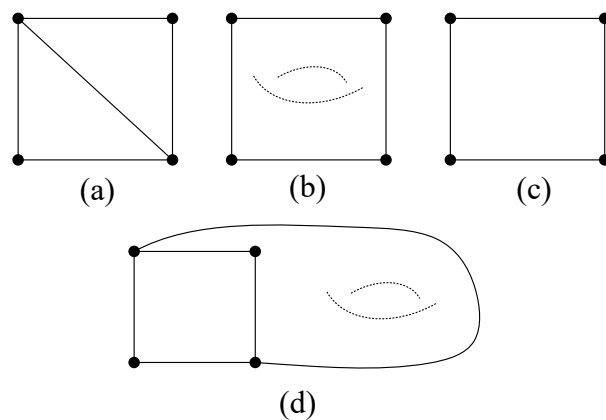


图 2-5: \square 和非 \square

引理 2.23 告诉我们一个旗性单手柄 Q 中的一个 \square -belt 可以表示为 $N(Q)$ 中的四个不同的点 $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ 并满足:

- (I) $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ 围成一个四边形, 满足四边形的内部在 Q^* 的内部, 四边形的边在 $N(Q)$ 的 1 维骨架上.
- (II) $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ 在 $N(Q)$ 中张成的满子复形要么是一个四边形, 要么是两个单形沿着一条粘起来的四边形. 见图 2-5.

例 2.4 (单手柄的对偶中的 \square). (a) 和 (b) 不是 Q^* 的 \square , (c) 和 (d) 是 \square . 注意 (d) 不是 $N(Q)$ 中的空四边形 (与 Siebenmann 的 \square 相比较, 注 2.9 (1)).

引理 2.2. 设 B_\square 为一个旗性单手柄 Q 中的 \square -belt, B 为 Q 的一个 cutting belt. 则经过一些平移, 要么 B_\square 和 B 在 Q 中不交, 要么 B 横截相交于 B_\square 的一组不交的边.

证明: 设 B_\square 的四条边 f_1, f_2, f_3, f_4 分别包含在 Q 的四个 facet F_1, F_2, F_3, F_4 中. 由于 B_\square 和 B 都是可缩的, 所以 B 和 B_\square 可以分离当且仅当它们的边界可以分离.

首先, 我们不妨假设 ∂B 和 ∂B_\square 是横截相交的. 则 $\partial B \cap \partial B_\square$ 是一些孤立点集, 记为 \mathcal{V} . 如果 \mathcal{V} 非空, 则 \mathcal{V} 至少包含两个点. 根据 B_\square , 我们给 \mathcal{V} 标记一个循环的序. 设 v 和 v' 是 \mathcal{V} 中两个相邻的点, 则我们有下面几种情况:

- (i) v 和 v' 落在 B_\square 的同一条边中;
- (ii) v 和 v' 落在 B_\square 的两条相邻的边中;
- (iii) v 和 v' 落在 B_\square 的两条不交的边中.

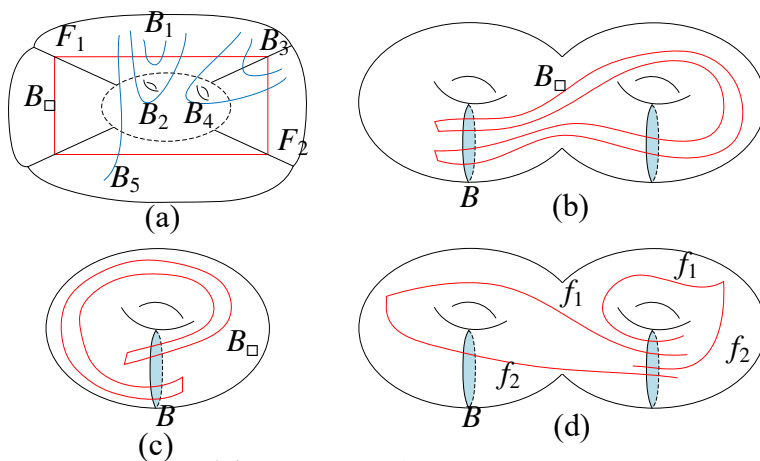


图 2-6: \square -belt 和 cutting belt

在情况 (i) 中, 不妨设 $v, v' \in \text{int}(f_1)$. 此时, 如果 v 和 v' 落在 $F_1 \cap B$ 的同一个连通分支中 (例如图 2-6 (a) 中的 B_1), 则我们可以形变 f_1 使得 $f_1 \cap \partial B = \emptyset$. 这样一

来,我们就从 \mathcal{V} 中移除了 v 和 v' . 如果 v 和 v' 落在 $F_1 \cap B$ 的两个不同的连通分支中 (例如图 2-6 (a) 中的 B_2), 则由于 B 是一个 B -belt, 所以 f_1 和 B 之间一定有一个“洞”. 这种情况是允许的, 见图 2-6 (b) 和 (c).

在情况 (ii) 中, 不妨设 B 与 f_1, f_2 相交. 此时, 如果 $B \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ (例如图 2-6 (a) 中的 B_3), 则我们可以在 $F_1 \cap F_2$ 中移动顶点 $f_1 \cap f_2$ 使得 $\partial B_\square \cap \partial B$ 不包含 v 和 v' .

不断重复上面操作, 我们可以假设 \mathcal{V} 中的任意两个相邻的点 v 和 v' 都不能被移除. 这意味着, 在情况 (ii) 中, $B \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$. 因此是图 2-6 (a) 中的 B_4 的情况. 根据 B -belt 的定义, B, f_1, f_2 之间有一个“洞”, 见图 2-6 (d).

如果 $|\mathcal{V}| = 2$, 则 B_\square 不可缩, 产生矛盾. 如果 $|\mathcal{V}| > 2$, 设 v'' 是 v' 后面的点. 如果 v' 和 v'' 属于 B_\square 的同一条边 f , 则 f 和 B 之间一定有一个“洞”. 如果 v' 和 v'' 分别属于 B_\square 的两条相邻的边 f' 和 f'' 中, 则 f', f'' 和 B 之间一定有一个“洞”. 如果 v' 和 v'' 属于 B_\square 的两条不交的边 f' 和 f'' 中, 则 f, f'' 和 B 之间仍有“洞”, 其中 f 是包含点 v 的边. 无论如何, 我们都能推出 ∂B_\square 在 $|Q|$ 中是不可缩的. 从而产生矛盾.

情况 (iii) 是允许的, 见图 2-6 (a) 中的 B_5 . 命题得证. \square

如果 Q 中的 \square -belt B_\square 和 cutting belt B 是相交的, 下面我们始终假设 B 横截相交于 B_\square 的两条不相交的边.

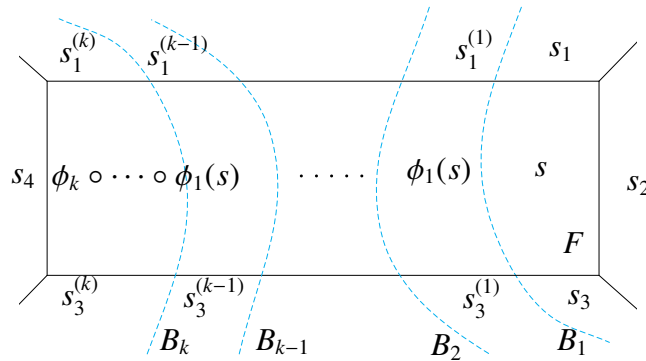


图 2-7: \square -belt 和 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群.

例 2.5 (例 2.4 中的 \square 和非 \square 决定的子群). 下面我们将证明例 2.4 中的 \square (图 2.5 中的 (c) 和 (d)) 决定了 $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ 中的一个子群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 但非 \square (图 2.5 中的 (a) 和 (b)) 不能提供 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群.

(a), 四个 facet F_1, F_2, F_3, F_4 决定了 Q 的一个四边形的子 orbifold, 但这个子 orbifold 不是 \square -belt. 事实上,

$$i_*(\pi_1^{orb}(B)) \cong W_{\square} / \langle (s_1 s_3)^2 \rangle \cong (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) < \pi_1^{orb}(Q)$$

$s_1 s_3, s_2 s_4$ 生成 $i_*(\pi_1^{orb}(B)) < \pi_1^{orb}(Q)$ 的子群 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$, 其中 $i_* : \pi_1^{orb}(B) \rightarrow \pi_1^{orb}(Q)$ 是包含映射 $i : B \hookrightarrow Q$ 诱导的基本群同态. 所以 $i_*(\pi_1^{orb}(B))$ 中不包含 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群.

(b), $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ 不对应任何子 orbifold.

(c) 和 (d), $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ 决定了一个 \square -belt B_{\square} . 如果 B_{\square} 与 Q 的所有 cutting belt 都不交, 则 B_{\square} 也是 P_Q 的 \square -belt. 此时, $s_1 s_3$ 和 $s_2 s_4$ 生成子群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < W(P_Q, \mathcal{F}_B) < \pi_1^{orb}(Q)$. 如果 B_{\square} 与 Q 的一些 cutting belt B_1, B_2, \dots, B_k 横截相交. 则不妨设 B_1, B_2, \dots, B_k 横截相交于 B_{\square} 的两条不交的边 f_1 和 f_3 , 其中每个 B_i 与 B_{\square} 相交可能不止一次. 比如图 2-6 (c). 则 $s_1 s_3$ 和 $s_2 t_1 t_2 \cdots t_k s_4 t_k^{-1} \cdots t_2^{-1} t_1^{-1}$ 生成子群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 其中 $t_i \in \{t_B^{\pm 1}\}$. 见图 2-7.

从而定理 B 的充分性得证.

注 2.11. 定理 B 中单的条件是必要的. 事实上, 二维平环作为一个直角 Coxeter orbifold, 它的 orbifold 基本群 $\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)$ 包含子群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 如果一个直角 Coxeter 3 手柄包含一个 π_1 单平环子 orbifold. 则它的 orbifold 基本群也包含一个 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群. 事实上, 定理 B 是 [14, 引理 5.22] 的一个推广, 是一个 orbifold 版本的平坦环面定理 [14, 第 II.7 章].

定理 B 必要性的证明

设 Q 是一个 g 亏格的单手柄, $\{B_i | i = 1, 2, \dots, g\}$ 是它的一族 cutting belt, P_Q 为相应的单多面体. 则 $\pi_1^{orb}(Q)$ 中的每个群元素 x 都有唯一的范式形式

$$x = g_0 t_1 g_1 \cdots g_{m-1} t_m g_m \quad (2-8)$$

其中每个 g_i 为 $G_0 = W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中的不可约的字符串, $t_i \in \{t_B^{\pm 1}\}$ 是由 cutting belt 决定的自由生成元.

根据 Tits 定理和 HNN 扩张的范式定理, 我们有如下结论.

引理 2.24. $\pi_1^{orb}(Q)$ 中的两个不可约范式 x, y 表示相同的群元素, 当且仅当 x 或者 y 可以通过一系列的交换操作和 t 约化变成另一个字符串.

接下来, 我们证明两个有用的引理.

引理 2.25. 如果 $\pi_1^{orb}(Q)$ 中存在 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群, 则 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的一个生成元可以取为 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中的循环不可约的字符串.

证明: 设

$$x = g_0 t_1 g_1 \cdots g_{m-1} t_m g_m$$

和

$$y = h_0 t'_1 h_1 \cdots h_{n-1} t'_n h_n.$$

是 $\pi_1^{orb}(Q)$ 子群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的两个不可约范式生成元. 则 $xy = yx$. 根据引理 2.28, xy 和 yx 有相同的不可约范式.

对

$$xy = g_0 t_1 g_1 \cdots g_{m-1} t_m g_m \cdot h_0 t'_1 h_1 \cdots h_{n-1} t'_n h_n$$

和

$$yx = h_0 t'_1 h_1 \cdots h_{n-1} t'_n h_n \cdot g_0 t_1 g_1 \cdots g_{m-1} t_m g_m.$$

做 t -约化.

由于 x, y 是不可约范式, 所以 xy 和 yx 有相同的尾字符串. 不失一般性, 设 $m \geq n$. 令 $\tilde{y} = t'_1 h_1 \cdots h_{n-1} t'_n h_n = h_0^{-1} y$. 则 x 可以写为

$$x = g_0 t_1 g_1 \cdots t_{m-n} g_{m-n} \tilde{y} = g_0 t_1 g_1 \cdots t_{m-n} g_{m-n} \cdot h_0^{-1} y.$$

又因为 x 和 y 生成 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 所以 y 和 xy^{-1} 也生成一个 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群, 其中 xy^{-1} 有更短的 t -长度. 我们在 xy^{-1} 上做 t -约化得到一个不可约范式, 不妨仍记为 x .

不断地进行这种操作, 则我们可令 x 或 y 属于 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$. 不妨设 $y = h \in W(P_Q, \mathcal{F}_B)$.

下面, 我们证明 h 可以取为 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中循环不可约地字符串. 事实上, 如果 h 不是循环不可约地, 不妨设 $h = w^{-1} h' w^{-1}$, 其中 w 是某个不可约字符串, h' 是循环不可约的. 则 h' 和 $w x w^{-1}$ 也生成一个 $\pi_1^{orb}(Q)$ 中的一个 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群. \square

引理 2.26. 设 $x = g_0 \cdot t_1 \cdots t_k$ 是 $\pi_1^{orb}(Q)$ 中的一个不可约范式, 其中 $g_0 \in W(P_Q, \mathcal{F}_B)$, $t_i \in \{t_B^{\pm 1}\}$. 设 h 为 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中的一个不可约范式. 则 x, h 不能生成 $\pi_1^{orb}(Q)$ 的一个 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群.

证明: 反证. 若 x, h 生成 $\pi_1^{orb}(Q)$ 的一个 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群, 则

$$x \cdot h = g_0 \cdot t_1 \cdots t_k \cdot h = g_0 h' \cdot t_1 \cdots t_k$$

其中 $h' = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k(h)$ 是一些 ϕ_i 的复合在 h 上的像.

每个 ϕ_i 都是一个子群 W_{B^+} 到子群 W_{B^-} 的同构, 将生成元映为生成元. 故 ϕ_i 保持字符串的不可约性和长度. 所以, h' 在 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中是不可约的, 且 h' 和 h 的字符串长度相等.

接下来, 我们证明 $h = h'$. 事实上, 由 $xh = hx$ 知 $g_0 h' = h g_0$, 即 $h' = g_0^{-1} h g_0$. 设 s 为 g_0 的一个字母. 如果 s 在 h 中 FALL, 则 $l(h') > l(h)$, 产生矛盾. 如果 s 在 h 中 DIE, 则 h 可取为 $\bar{s}hs$. 这和 h 为循环不可约的矛盾. 因此, 所有的 s 在 h 中都 SUCCESS, 即 $g_0 h = h g_0 = g_0 h'$. 从而 $h = h' = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k(h)$.

如果 $\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k = id$, 则有相应的字符串 $t_1 \cdots t_k = 1$, 这和 x 是不可约的矛盾. 如果 $\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k \neq id$ 有一个不动点, 则 h 中存在一个字母 s_0 使得 $\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k(s_0) = s_0$. 则 $s_0, \phi_k(s_0), \dots, \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_{k-1}(s_0)$ 决定了 Q 中的一个不可缩的面, 这和 Q 是单的矛盾. 最后, 如果 $\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k \neq id$ 没有不动点, 则存在 h 的一个字母 s_1 使得 $s_2 = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k(s_1) \neq s_1$. 不断进行下去, 我们可以得到一串 s_1, s_2, s_3, \dots , 每个 $s_i = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k(s_{i-1})$ 都为 h 中的字母. 由于 h 是有限长度的, 所以一定存在 $s_i = s_j$. 类似地, 这表示 Q 中有一个不可缩的面, 这和 Q 是单的矛盾. 命题得证. \square

设 x 和 y 是 $\pi_1^{orb}(Q)$ 一个 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群地两个不可约范式生成元. 下面, 我们找出 Q 的一个 \square -belt. 证明分为下面几个步骤.

步骤-1. 化简 x 和 y .

根据引理 2.29, 我们不妨设 $y = h$ 为 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中的循环不可约字符串. 如果 x 也是 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中的字符串, 则这和 Q 是一个单多面体的情况一致. 从而 Q 中有一个 \square -belt.

下面, 我们考虑 x 的 t -长度大于 0 的情况. 设

$$x = g_0 t_1 g_1 \cdots g_{m-1} t_m g_m$$

为 $\pi_1^{orb}(Q)$ 中的一个不可约范式. 则由 $xh = hx$ 知

- $g_m h = h g_m$; $t_m \cdot h = \phi_m(h) \cdot t_m$;
- $g_{m-1} \cdot \phi_m(h) = \phi_m(h) \cdot g_{m-1}$; $t_{m-1} \cdot \phi_m(h) = \phi_{m-1} \circ \phi_m(h) \cdot t_{m-1}$;

...

$$\bullet g_0 \cdot \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_m(h) = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_m(h) \cdot g_0$$

其中每个 $\phi_i : W_{B_i} \rightarrow W_{B'_i}$ 为某个 cutting belt 决定的群同构, 对任意 $i = 2, \dots, m$, $\phi_i \circ \cdots \circ \phi_m(h)$ 为 $W_{B'_i} \cap W_{B_{i-1}}$ 的一个字符串, $\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_m(h) \in W_{B'_1}$, $h \in W_{B_m}$. 这里的 B_i 和 B_j 可能对应同一个 cutting belt.

步骤-2. 寻找 P_Q 中与 B 或 B' 相交 facet 的 F_1, F_3 .

因为循环不可约字符串 $h \in W_{B_m} \cap W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 是自由的, 所以我们可以取 h 中的两个字母 s_1 和 s_3 , 使得 $s_1 s_3 \in W_{B_m} < W(P_Q, \mathcal{F}_B) = G_0 < \cdots < G_{g-1} < G_g = \pi_1^{orb}(Q)$ 表示一个自由群元素. 则对应的 F_1 和 F_3 是 P_Q 中不相交的两个 facet 并且都与 B_m 相交.

步骤-3. 寻找与 facet F_1, F_3 的都相交的 F_2 .

如果 $g_m \neq 1$, 则由于 x 是一个范式, 所以 g_m 是 W_{B_m} 在 $\pi_1^{orb}(Q)$ 中的一个陪集的代表元. 因此, 字符串 g_m 中存在一个字母 $s_2 \notin S(W_{B_m})$ 使得 $h s_2 = s_2 h$, 其中 $S(W_{B_m})$ 为群 W_{B_m} 的生成元集. 此时, s_2 对应的 facet 就是我们要找的 F_2 .

如果 $g_m = 1$, 则 $x \cdot h = g_0 t_1 g_1 \cdots t_m \cdot h = g_0 t_1 g_1 \cdots t_{m-1} g_{m-1} \cdot \phi_m(h) \cdot t_m$. 类似地, 要么存在一个我们需要的 $s_2 \notin S(W_{B_{m-1}})$, 要么

$$x \cdot h = g_0 t_1 g_1 \cdots t_{m-1} \cdot \phi_m(h) \cdot t_m = g_0 t_1 g_1 \cdots t_{m-2} g_{m-2} \cdot \phi_{m-1} \circ \phi_m(h) \cdot t_{m-1} t_m.$$

不断进行下去, 最后有下面两种情况:

- 存在某个 $i > 0$, 使得 $g_i \neq 1$. 此时, 存在我们需要的 s_2 以及对应的 F_2 .
- 否则, x 可以取为 $x = g_0 \cdot t_1 \cdots t_m$, 其中 $g_0 \in W(P_Q, \mathcal{F}_B)$, $t_1 \cdots t_m$ 是 $\{t_B^{\pm 1}\}$ 中字母组成的字符串. 根据引理 2.30, x 和 h 不能生成 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 因此这种情况不可能发生.

所以, 我们总能从某个 $g_i, i > 0$, 中找到一个满足要求的 s_2 以及它对应的 F_2 .

步骤-4. 寻找 facet F_4 使得 F_1, F_2, F_3, F_4 决定 Q 中的一个 \square -belt.

我们分为下面几种情况讨论.

(I). 如果在 x 中只有一个 $g_i \neq 1$ (即对任意 $j \neq i, g_j = 1$), 则 $x = t_1 \cdots t_i \cdot g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m$, 其中 $i > 0$. 此时, 由 $xh = hx$ 知 $t_1 \cdots t_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m = 1$. 实际上, 如果 $t_1 \cdots t_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m \neq 1$, 则 $\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_m(h) = h$ 表明 Q 中有一个不可缩的面, 矛盾 (参考引理 2.30 的证明). 因此 $t_1 \cdots t_i = (t_{i+1} \cdots t_m)^{-1}$, 从而 $x = t_1 \cdots t_i \cdot g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m = (t_{i+1} \cdots t_m)^{-1} g_i (t_{i+1} \cdots t_m)$. 又因为 x, h 生成 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 所以 $g_i, \phi_{i+1} \circ \cdots \circ \phi_m(h)$ 生成 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 根据单多面体情况的证明, Q 中一定存在一个 \square -belt.

(II). 如果在 x 中至少有两个非平凡的 $g_i, g_j \neq 1, 0 < j < i \leq m$, 但对任意 $k > j$ 和 $k \neq i, g_k = 1$, 则可令 $x = \cdots t_j \cdot g_j \cdot t_{j+1} \cdots t_i \cdot g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m$. 因此我们有

$$\begin{aligned}
 xh &= \cdots t_j \cdot g_j \cdot t_{j+1} \cdots t_i \cdot g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m \cdot h \\
 &= \cdots t_j \cdot g_j \cdot t_{j+1} \cdots t_i \cdot g_i \cdot h' t_{i+1} \cdots t_m \\
 &= \cdots t_j \cdot g_j \cdot t_{j+1} \cdots t_i \cdot h' g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m \\
 &= \cdots t_j \cdot g_j \cdot h'' \cdot t_{j+1} \cdots t_i \cdot g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m.
 \end{aligned} \tag{2-9}$$

其中 $h' = \phi_{i+1} \circ \cdots \circ \phi_m(h)$, $h'' = \phi_{j+1} \circ \cdots \circ \phi_m(h)$. 由 $xh = hx$ 我们知 $g_j h'' = h'' g_j$. 所以可以取 g_j 中的一个字母 s_4 (不属于 $S(W_{B_j})$) 使得 $h'' s_4 = s_4 h''$. 同理, s_4 决定了一个 facet F_4 满足 $F_4 \cap F_1'' \neq \emptyset$ 和 $F_4 \cap F_3'' \neq \emptyset$, 这里 F_1'' 和 F_3'' 是 $\phi_{j+1} \circ \cdots \circ \phi_m$ 在 s_1, s_3 上的像决定的 facet. 特别地, 在 P_Q 中 $F_2 \neq F_4$. 否则 $q(F_1)$ 和 $q(F_2)$ 的交在 Q 中不连通, 这和 Q 单矛盾, 这里 $q: Q \rightarrow P_Q$ 是前面定义的商映射. 因此, 在这种情况下, Q 中一定存在一个 \square -belt.

(III). 如果在 x 中, 只有 g_0 和 $g_i, i > 0$, 非平凡, 则可令 $x = g_0 t_1 \cdots t_i \cdot g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m$. 不妨进一步设 g_0, g_i 为 $W(P_Q, \mathcal{F}_B)$ 中不可约的字符串. 此时, 如果 $x = g_0 t_1 \cdots t_i \cdot g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m = t_1 \cdots t_i \cdot g'_0 g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m$ 其中 $g'_0 = \phi_i^{-1} \circ \cdots \circ \phi_1^{-1}(g_0)$, 则根据引理 2.30 的证明, $xh = hx$ 推出 $t_1 \cdots t_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m = 1$. 和情况 (I) 相同, $g'_0 g_i$ 和 $h' = \phi_{i+1} \circ \cdots \circ \phi_m(h)$ 生成 $a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 因此 Q 中存在一个 \square . 如果

$$x = g_0 t_1 \cdots t_i \cdot g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m = g'_0 t_1 \cdots t_j g''_0 t_{j+1} \cdots t_i \cdot g'''_0 g_i \cdot t_{i+1} \cdots t_m,$$

其中 g''_0 不能穿过 t_{j+1} 且 $g_0 = g'_0 \cdot \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_j(g''_0) \cdot \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_i(g'''_0)$. 此时和情况 (II) 类似, 在 g''_0 中存在一个字母 s_4 (不属于 $S(W_{B'_{j+1}})$). 相应的 F_1, F_2, F_3, F_4 是 Q 中的一个 \square -belt.

定理 B 得证!

□

第三章 Orbifold 同调群

3.1 Orbifold (上) 同调的回顾

3.1.1 de Rham 上同调

Satake 定义了 orbifold 上的 de Rham 上同调. 参考 [24, 81]. 设 $[M/G]$ 为一个全局商. 对 $[M/G]$ 上任意一个紧支持的微分 n 形式 ω , 存在 M 上一个 G 等变的微分 n 形式 $\tilde{\omega}$. 则我们定义 ω 在 $[M/G]$ 上的积分为

$$\int_{[M/G]}^{orb} \omega := \frac{1}{|G|} \int_M \tilde{\omega},$$

其中 $|G|$ 为群 G 的阶. 一般地, 设 $X = (|X|, \mathcal{U})$ 为一个 orbifold, $\{\rho_i\}$ 是从属于 X 的坐标图册的一个单位分解. 则我们定义 X 上的积分为

$$\int_X^{orb} \omega := \sum_i \int_{U_i/G_i}^{orb} \rho_i \omega.$$

则和通常的 de Rham 上同调群类似, 我们可以定义 X 上的 de Rham 上同调群. 一个 orbifold 的 de Rham 上同调和它底空间的实系数奇异上同调群是同构的. 所以, 实系数的 de Rham 上同调不能很好的反映 orbifold 中奇点的信息.

3.1.2 Chen-Ruan 上同调

设 X 为一个近复 orbifold, 下面我们定义 X 的 Chen-Ruan 上同调群, 这部分参考 [24]. 对 X 中的任意一点 p , 设 (U_p, G_p, ψ_p) 为 p 点处的坐标图页. 令

$$\tilde{X} = \{(p, (g)_{G_p}) \mid p \in X, g \in G_p\},$$

其中 $(g)_{G_p}$ 表示 g 在 G_p 中的共轭类, 则根据 [24, 引理 3.1.1], \tilde{X} 为一个 orbifold. 设 T 为所有共轭类 $(g)_{G_p}$ 等价类的集合, 则 \tilde{X} 可以分解为一些不交的连通分支的并

$$\tilde{X} = \bigsqcup_{(g) \in T} X_{(g)}$$

其中

$$X_{(g)} = \{(p, (g')_{G_p}) \mid g' \in G_p, (g')_{G_p} \in (g)\}.$$

当 $g \neq 1$ 时, 称 $X_{(g)}$ 为一个 *twisted sector*; 称 $X_{(1)} = X$ 为一个 *nontwisted sector*.

进一步, 如果 X 是一个 n 维近复 orbifold, 则每个坐标页中的局部群 G_p 有一个群表示 $\rho : G_p \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$. 则 G_p 中的每个 g 都对应一个对角矩阵

$$\rho(g) = \text{diag}(e^{2\pi i m_{1,g}/m_h}, \dots, e^{2\pi i m_{n,g}/m_h}),$$

其中 m_g 为 $\rho(g)$ 的阶, $0 \leq m_{1,g} < m_g$. $\rho(g)$ 只依赖于 g 的共轭类的选取. 下面, 定义函数 $\tau : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{Q}$, 满足

$$\tau(p, (g)_{G_p}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_{i,g}}{m_g}.$$

当 X 是一个近复 orbifold 时, $\tau(g)$ 是一个整数, 被称为 *degree shifting number*.

最后, 近复 orbifold X 的 orbifold 上同调群被定义为:

$$H_{orb}^d(X) = \bigoplus_{(g) \in T} H^{d-2\tau(g)}(X_{(g)}).$$

近复 orbifold 的 Chen-Ruan 上同调群来自于和物理相关的量子上同调. 与 de Rham 上同调群相比, Chen-Ruan 上同调群更能反映出 orbifold 的奇点信息.

3.1.3 等变同调和等变上同调

设 $EG \times_G X$ 是 X 关于 G 作用的 Borel 空间, 则我们将 Borel 空间 $EG \times_G X$ 的同调群和上同调群 (环) 定义为 X 的等变同调群和等变上同调群 (环).

$$H_*^G(X) := H_*(EG \times_G X)$$

$$H_G^*(X) := H^*(EG \times_G X)$$

如果 $[X/G]$ 为一个商 orbifold, 则 X 的等变同调可被看为 $[X/G]$ 的一种 orbifold 同调. 比如 $[D^1/\mathbb{Z}_2]$ 的等变同调可以定义为

$$H_*([D^1/\mathbb{Z}_2]) = H_*(B\mathbb{Z}_2) = H_*(\mathbb{R}P^\infty).$$

注意到, 等变同调一般是无穷维的, 而商 orbifold 可能是有限维的. 这和有限维拓扑空间上的同调理论不相符.

3.2 Coxeter 复形上的 orbifold 同调

3.2.1 定义

设 X 是一个 Coxeter 胞腔复形. 这一节, 我们将通过构造 X 的爆破 (blow up) 来定义 X 上的整系数 orbifold 同调. 下面我们构造 Coxeter 复形 X 对应的链复形 $C = \{C_i, d_i\}$.

定义 3.1 (Coxeter 胞腔的定向). 设 $\psi: e^n \rightarrow e^n/W$ 为 Coxeter 胞腔 e^n/W 对应的商映射. 则 Coxeter 胞腔 e^n/W 的定向定义为它的爆破 (blow up) e^n 的定向.

定义 3.2 (链群). X 的所有 i 维带定向的 Coxeter 胞腔生成 Coxeter 链复形的 i^{th} 链群,

$$C_i = \mathbb{Z}\langle\{e^i/W\}\rangle.$$

注 3.1. C_i 的基也可以用胞腔对 $\{(D^n/W, \partial D^n/W)\}$ 或 $\{(D^n, \partial D^n), W, \psi\}$ 来表示. 详情见第 3.2.4 节.

定义 3.3 (边缘映射). 边缘映射 $d: C_n \rightarrow C_{n-1}$ 定义为:

$$d(e_\alpha^n/W) \triangleq \sum_{e_\beta^{n-1}/W_\beta \in \partial e_\alpha^n/W} \sum_{\bar{g}_\beta \in W|W_\beta} (-1)^{l(\bar{g}_\beta)} \phi \circ \psi[\partial(D_\alpha^n)|_{e_\beta^{n-1}}] \quad (3-1)$$

其中

- $S(W) = \{r_1, \dots, r_k\}$ 为有限 Coxeter 群 W 的生成元集;
- \bar{g}_β 表示 W 关于 W_β 的一个陪集;
- $l(\bar{g}_\beta)$ 是陪集代表元 g_β 在 $S(W)$ 中的字长 (word length);
- $\psi: D_\alpha^n \rightarrow D_\alpha^n/W$ 为 W 作用在 $D_\alpha^n = e_\alpha^n$ 上诱导的商映射;

● ∂ 是指几何意义的边缘.

注 3.2. (1) 如果 W 是一个平凡群, 则 d 是 e^n 上的通常意义上的胞腔边缘运算.

(2) 由于 e^n 上的每一次反射都会改变一次 e^n 的定向, 因此公式 (3-1) 是交错和的形式.

(3) 一般情况下, 假设 q -CW 复形 X 中所有胞腔的粘贴映射都保持局部群, e^n/G 为 X 中的一个 q -胞腔, $S(G)$ 是局部群 G 的一个最少生成元集. 这时, 我们也可以定义类似的边缘映射. 事实上, 任意群元素 $g \in G < \text{Aut}(e^n)$ 都有一个关于 $S(G)$ 的文字长度最短的不可约表示 (reduced presentation), 这样的 g 对应 e^n 的一个自同胚. 这时的 $l(g)$ 就是文字 g 中反定向字母的个数. 在例 3.7 和例 3.8, 我们会举出一些非 Coxeter 的例子.

为写出具体的边缘公式, 设

$$d(e_\alpha^n/W) = \sum d_{\alpha\beta}[e_\beta^{n-1}/W_\beta].$$

下面我们根据陪集代表元不同的选取规则, 构造 Coxeter 复形 X 的相应的爆破复形. 设 e^n/W , $W \neq 1$, 是 Coxeter 复形 X 的一个 Coxeter 胞腔. 它对应的粘贴映射是 $\phi: \partial D^n/W \rightarrow X^{n-1}$. $\psi: D^n \rightarrow D^n/W$ 为相应的商映射. 取 $\phi(\partial D^n)$ 里的一个 $n-1$ 维胞腔 $y = e_\beta^{n-1}/W_\beta$, 并设 x 为 $\phi^{-1}(y)$ 的一个原像.

设 y 的爆破为 $U = e^{n-1}$. 则 $\psi^{-1}(x)$ 有 $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 个原像, 分别对应 W_β 在 W 中的陪集, 我们记为 $V_1, \dots, V_{\frac{|W|}{|W_\beta|}}$. 特别地, 如果 x 是正则的, 则每个 V_i 对应局部群 W 的一个群元素 g_i . 如果 x 是奇异的, 每个陪集 V_i 的代表元 g_i 的选取对应一个 V_i 到 W 的映射, 即 $(v, g \cdot h) \rightarrow (v, h)$ 其中 h 是 W_β 中的文字. 所以, g_i 的选取决定了边缘公式. 下面是两种比较自然的选取规则:

- A. 所有代表元 g_i 具有最短字长 (word length);
- B. 除正则胞腔外, 所有代表元 g_i 的字长都为偶长度.

事实上, 这两种规则对应 X 的两种爆破复形.

命题 3.1 (爆破 (blow-up)). 设 X 是一个 Coxeter 胞腔复形. 则对上面每一种规则来说, 都存在一个胞腔复形 \tilde{X} 与之对应.

证明: 假设 \tilde{X}^{n-1} 是定义好的. 设 e^n/W 为 X 中的一个 Coxeter 胞腔, 它的爆破为 e^n . 则代表元 g 决定了 e^n 的一个粘贴映射 ϕ' . 具体来说, 设 $y = e_\beta^{n-1}/W_\beta \in X^{n-1}$ 为

$\phi(\partial D^n/W)$ 里的一个 Coxeter 胞腔, $x \in \phi^{-1}(y)$ 为 y 的一个原像. 记 W_β 在 W 中的陪集为 S . 设 x 的爆破为

$$U = x \times W_\beta / \sim$$

则令

$$\phi'|_{V_i} : V_i \cong U \longrightarrow U$$

满足 $\phi'(v, g \cdot h) = (v, h)$. 显然 ϕ' 是良定的. 这样就可以把 e^n/W 的爆破 e^n 粘到了 \tilde{X}^{n-1} 上去.

根据归纳, 我们就得到了一个胞腔复形 \tilde{X} . □

注 3.3. 规则 A 对应的胞腔复形 \tilde{X} 是唯一的. 规则 B 不能完全确定一个胞腔复形, 但规则 B 决定的链复形是唯一的.

这里得到胞腔复形 \tilde{X} 也被称为 Coxeter 复形 X 的爆破复形. 上面两种规则决定的爆破复形可能不同. 例如, 在规则 A 下, $D^2/(\mathbb{Z}_2)^2$ 的一个爆破复形为环面 T^2 ; 在规则 B 下 $D^2/(\mathbb{Z}_2)^2$ 的一个爆破复形为粘合两个点的 $\mathbb{R}P^2$ (同伦于 $\mathbb{R}P^2 \vee S^1$).

在这里, 我们首先考虑规则 A. 直到第 3.2.9 节, 我们再简单讨论规则 B 对应的 orbifold 同调.

在规则 A 下, 每个陪集贡献了 $(-1)^{l(g_\beta)}[e_\beta^{n-1}/W_\beta]$ 给 $d_\beta[e_\beta^{n-1}/W_\beta]$, 其中 $l(g_\beta)$ 是代表元 g_β 的字长. 所以, 当 $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 为偶数时, $d_\beta = 0$; 当 $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 为奇数时, $d_\beta = n_\beta$. 由于当 $|\#S(W_\beta)| < |\#S(W)| - 1$ 时, $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 始终为偶数. 所以,

$$d(e^n/W) = \sum_{\#S(W_\beta) \geq \#S(W)-1} n_\beta \Theta\left(\frac{|W|}{|W_\beta|}\right) e_\beta^{n-1}/W_\beta, \quad (3-2)$$

$$\text{其中 } \Theta(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ 1, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

例 3.1. 设 $W = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle$, D^2/W 为一个有限 Coxeter 群 W 作用在 D^2 上的商空间. 我们给 D^2/W 一个如图 3-1 的胞腔分解, 包括一个 Coxeter 2-胞腔 e^2/W , 三个 Coxeter 1-胞腔 $\alpha \cong \beta \cong e^1/\mathbb{Z}_2$, $\gamma \cong e^1$, 两个 0-胞腔.

则 $\psi^{-1}(\gamma)$ 有 6 个分支, 其中分为 3 个正定向, 3 个反定向. 所以 $[\psi(\psi^{-1}(\gamma))] = 0 \in C_1$. $\psi^{-1}(\alpha)$ 和 $\psi^{-1}(\beta)$ 都有 3 个分支.

$$\psi^{-1}(\alpha) = \{(1, s_1), s_1 s_2(1, s_1), s_2(1, s_1)\},$$

其中代表元都为最短字长. 则

$$d_2(e^2/W) = \alpha + \beta.$$

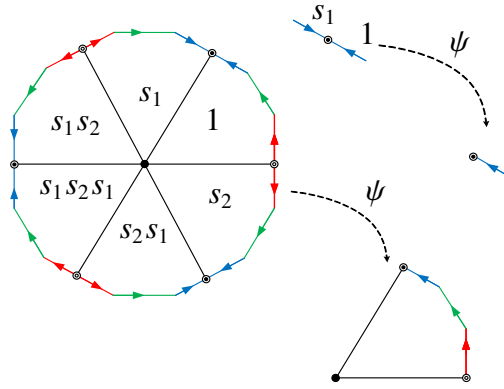
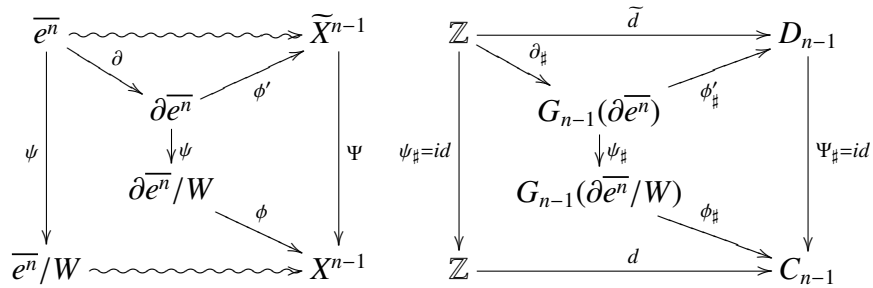


图 3-1: 一个 Coxeter 2-胞腔

引理 3.2. $d^2 = 0$.

证明: 根据 X 的爆破的构造, 我们有如下交换图. 因此 $d \circ id(e^n) = id \circ \tilde{d}(e^n)$.



对胞腔复形 X 来说, $\tilde{d}^2 = 0$ 成立. 下面图标可交换. $\Psi_{\#} = id$, 故 $d^2 = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{\tilde{d}} & D_{n-1} & \xrightarrow{\tilde{d}} & D_{n-2} \longrightarrow \cdots \\ & & \Psi_{\#} \downarrow & & \Psi_{\#} \downarrow & & \Psi_{\#} \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} & \xrightarrow{d} & C_{n-2} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

□

因此我们得到了 X 对应的链复形 $C = \{C_i, d_i\}$.

定义 3.4. $C = \{C_i, d_i\}$ 的 i 维 orbifold 同调群 定义为:

$$H_i(C) = \text{Ker } d_i / \text{Im } d_{i+1}$$

定义 3.5 (定义 3.4'). X 的 orbifold 同调群定义为它爆破的同调群.

命题 3.3. 设 X 为一个 Coxeter 复形, 则对任意整数 i ,

$$H_i(X) \cong H_i(X^{i+1}).$$

设 C_i^{reg} 和 C_i^{sing} 分别是所有正则 k 胞腔和所有奇异 i 胞腔生成的链子群. 则 $C_i = C_i^{reg} \oplus C_i^{sing}$. 进一步, $d(C_i^{reg}) \subset C_{i-1}^{reg}, d(C_i^{sing}) \subset C_{i-1}^{sing}$. 所以, Coxeter 复形的 orbifold 同调群有如下裂解性质 (splitting property).

命题 3.4 (orbifold 同调群的裂解性质). 设 X 是一个 Coxeter 复形, $C = \{C_i, d_i\}$ 为相应的链复形. 设 $C = C_{reg} \oplus C_{sing}$ 为链群的裂解, 其中 C^{reg} 和 C^{sing} 分别是所有正则胞腔和所有奇异胞腔生成的链子群. 则

$$H_i(X) \cong H_i(C_{reg}) \oplus H_i(C_{sing}) \quad (3-3)$$

其中 X 的所有正则胞腔构成 X 的子复形, 记为 $X_{reg} \simeq |X|$.

3.2.2 同伦不变性

设 $f : X \rightarrow Y$ 是一个 orbifold 胞腔映射, 则有诱导的链同态 $f_\# : C_i(X) \rightarrow C_i(Y)$ 满足 $f_\# d = d f_\#$. 进一步, 诱导 orbifold 同调群之间的群同态.

定义 3.6 (orbifold 空间上的同伦 [20]). 两个 orbifold 态射 $f, g : X \rightarrow Y$ 是同伦的, 是指存在一个连续同态 $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ 满足 $F(x, 0) = f, F(x, 1) = g$. 对任意 $t \in [0, 1]$, $F(x, t)$ 都是一个 orbifold 态射.

引理 3.5. 如果两个 Coxeter 复形是同伦的, 则它们的爆破复形也是同伦的.

命题 3.6. 两个同伦的 orbifold 映射 $f, g : X \rightarrow Y$ 诱导同构的同调群同构 $f_* = g_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$.

证明: 设 X 为一个 Coxeter 复形, $I = [0, 1]$. 取 $\{0\}$ 和 $\{1\}$ 为 $[0, 1]$ 的两个 0 维胞腔, $(0, 1)$ 为 1 维胞腔. 则 $X \times I$ 仍为一个 Coxeter 复形.

设 \tilde{X}, \tilde{Y} 分别为 X 和 Y 的爆破复形. 令 $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ 为一个胞腔同态并满足 $F_0(x) = F(x, 0) = f(x)$, $F_1(x) = F(x, 1) = g(x)$. 则 F 诱导它们爆破复形上的同伦 $\tilde{F} : \tilde{X} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{Y}$ 满足 $\tilde{F}_0(x) = \tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}(x)$, $\tilde{F}_1(x) = \tilde{F}(x, 1) = \tilde{g}(x)$, 其中 \tilde{f}, \tilde{g} 分别是被 f 和 g 诱导的.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{Y} \\ \Psi \times id \downarrow & & \downarrow \Psi \\ X \times I & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

则 $\tilde{f}_* = \tilde{g}_* : H_i(\tilde{X}) \rightarrow H_i(\tilde{Y})$. 所以, $f_* = g_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$. \square

推论 3.7. 对任意正整数 n , X 和 Y 之间的同伦等价 $f : X \rightarrow Y$ 诱导的同调群同态 $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ 都为同构.

3.2.3 相对同调和切除定理

设 A 是 Coxeter 复形 X 的一个子复形, 这里包含映射 $i : A \hookrightarrow X$ 是保局部群的. 则我们可以定义对 (X, A) 的相对同调 $H_i(X, A)$. 和通常 CW 复形对一样, 这里的对 (X, A) 同样也诱导了一个同调群长正合列.

根据 Coxeter 复形上的爆破复形, 我们知在 Coxeter 复形上也有切除定理成立. 进一步, 我们这里的 Coxeter 复形范畴实际上等价于 CW 复形范畴的一个子范畴. 因此在 Coxeter 复形范畴中, 有很多同调性质成立. 但是, 我们要小心的处理商操作. 一般来说, 商运算是不保局部群的, 所以 X/A 不一定是一个 Coxeter 复形, 我们也没有 $H_i(X, A) \cong H_i(X/A)$. 特别地, 当 A 是 X 的一个正则子复形时, $(|X|, A)$ 是一个好对 (good pair, [54, 命题 2.22]). 例如 X 的所有的正则胞腔构成的子复形 X_{reg} . 此时, X 关于 A 的商是保局部群的, 所以我们有下面结论.

引理 3.8. 设 A 是 Coxeter 复形 X 的一个正则子复形, 则对任意正整数 i ,

$$H_i(X, A) \cong H_i(X/A).$$

特别地, 设 C_{sing} 和 C_{reg} 分别是 Coxeter 复形 X 中所有正则胞腔和所有奇异胞腔对应地链子复形, 则对任意正整数 i ,

$$H_i(C_{reg}) \cong H_i(|X|)$$

$$H_i(C_{\text{sing}}) \cong H_i(X, X_{\text{reg}}) \cong H_i(X/X_{\text{reg}})$$

3.2.4 映射度

接下来, 我们证明 $H_n(D^n/W, \partial D^n/W) \cong \mathbb{Z}$, 并讨论下列同态的映射度 (degree).

$$\Phi_\beta : H_n(D^n/W, \partial D^n/W) \longrightarrow H_{n-1}(D_\beta^{n-1}/W_\beta, \partial D_\beta^{n-1}/W_\beta)$$

其中 Φ_β : 为下面映射的复合

$$\begin{aligned} H_n(D^n/W, \partial D^n/W) &\longrightarrow H_{n-1}(\partial D^n/W) \longrightarrow H_{n-1}\left(\coprod_{n_\beta} (\tilde{D}_\beta^{n-1}/W_\beta, \partial \tilde{D}_\beta^{n-1}/W_\beta)\right) \\ &\longrightarrow H_{n-1}(D_\beta^{n-1}/W_\beta, \partial D_\beta^{n-1}/W_\beta). \end{aligned} \quad (3-4)$$

其中 $\coprod_{n_\beta} (\tilde{D}_\beta^{n-1}/W_\beta, \partial \tilde{D}_\beta^{n-1}/W_\beta) = \phi^{-1}((D_\beta^{n-1}/W_\beta, \partial D_\beta^{n-1}/W_\beta))$, $\#S(W) \geq \#S(W_\beta) > 0$.

令 $Y = D^n/W^k$, 则 $\partial D^n/W = S^{n-1}/W$ 是 S^{n-1} 的商轨形, 其中 $\#S(W) = k \leq n$.

如果 $Y = D^1/\mathbb{Z}_2$, 则由同调群长正合列知

$$H_1(D^1/\mathbb{Z}_2, \partial D^1/\mathbb{Z}_2) \cong H_1(D^1/\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}$$

又由于 0-胞腔都是正则的, 所以 $\deg(\Phi_\beta) = 0$.

如果 $Y = D^2/\mathbb{Z}_2$, 则由同调群长正合列我们有

$$H_2(D^2/\mathbb{Z}_2, \partial D^2/\mathbb{Z}_2) \cong \ker(\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

此时, $\deg(\Phi_\beta) = \pm 1$ 或 0.

如果 $Y = D^2/I(m)$ 其中 $I(m) = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^m \rangle$, 则我们有

$$H_2(D^2/I(m), \partial D^2/I(m)) \cong \begin{cases} H_2(D^2/I(m)), & m \text{ 偶} \\ \ker(\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}), & m \text{ 奇} \end{cases} \cong \mathbb{Z}.$$

此时, $\deg(\Phi_\beta) = \pm 1$ 或 0.

一般地, 对于 $n > 2$, $D^n/W^k \simeq D^k/W^k$. 所以

$$H_i(D^n/W) \cong H_i(D^k/W) \quad (3-5)$$

另外,

$$H_i(\partial D^n/W) \cong \begin{cases} H_i(D^k/W), & i < k-1 \\ H_i(D^{k+1}/W), & i = k-1 < n-1 \\ \mathbb{Z}^l, & i = n-1 = k-1 \\ \mathbb{Z}, & i = n-1 > k-1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3-6)$$

所以

$$H_n(D^n/W, \partial(D^n/W)) \cong \begin{cases} H_n(D^n/W) \cong \mathbb{Z}, & n=k \text{ 且所有 } \frac{|W|}{|W_\beta|} \text{ 为偶数,} \\ \ker(H_{n-1}(\partial D^n/W) \rightarrow H_{n-1}(\partial D^n/W)) \cong \mathbb{Z}, & n=k \text{ 且存在 } \frac{|W|}{|W_\beta|} \text{ 为奇数,} \\ H_{n-1}(\partial D^n/W) \cong \mathbb{Z}, & n > k. \end{cases}$$

对于第一种情况, $\deg(\Phi_\beta) = 0$; 对于第二种情况, $\deg(\Phi_\beta) = 0, \pm 1$; 对于第三种情况, $\deg(\Phi_\beta) = n_\beta$, 为下面复合映射的映射度

$$\begin{array}{ccccccc} \partial D^n & \longrightarrow & \coprod_{d_\beta} (\tilde{D}_\beta^{n-1}, \partial \tilde{D}_\beta^{n-1}) & \longrightarrow & \coprod_{n_\beta} (\tilde{D}_\beta^{n-1}, \partial \tilde{D}_\beta^{n-1}) & \longrightarrow & (D_\beta^{n-1}, \partial D_\beta^{n-1}) \\ \psi \downarrow & & & & & & \psi \downarrow \\ \partial D^n/W & \longrightarrow & \coprod_{n_\beta} (\tilde{D}_\beta^{n-1}/W_\beta, \partial \tilde{D}_\beta^{n-1}/W_\beta) & \longrightarrow & (D_\beta^{n-1}/W_\beta, \partial D_\beta^{n-1}/W_\beta) & & \end{array}$$

命题 3.9. 如果 $i \neq n$, 则 $H_i(X^n, X^{n-1})$ 为平凡群; 如果 $i = n$, 则 $H_i(X^n, X^{n-1})$ 为一个自由 $abel$ 群, 其中这个群的基由 X 中的所有 Coxeter n 胞腔生成.

$$H_i(X^n, X^{n-1}) \cong \oplus H_i(D^n/W, \partial(D^n/W)) = \begin{cases} 0, & i \neq n \\ \mathbb{Z}^m, & i = n. \end{cases}$$

注 3.4. 这里 $H_i(D^n/W, \partial(D^n/W)) \neq H_i(D^n/W/\partial(D^n/W))$.

因此, 我们定义的 orbifold 同调 (定义 3.4) 的确是 CW 复形上的胞腔同调的一种推广. 令 $H_n(X^n, X^{n-1})$ 为对 $\{(D^n/W, \partial D^n/W)\}$ (或者 $\{(D^n, \partial D^n), W, \psi\}$) 生成的链群. 则同态 i_* 将 $H_n(D^n/W, \partial D^n/W)$ 的生成元 e^n/W 映到 $H_n(X^n, X^{n-1})$ 一个 \mathbb{Z} 直和项的对应胞腔 e^n/W 的生成元. 如果 W 是一个平凡群, 则 $d(e^n) = \sum_\beta d_\beta e_\beta^{n-1}$ 为 CW 复形中

通常的边缘公式, 参考 [54, P140]. 如果 $W \neq 1$, 则

$$d(e^n/W) = \sum_{\beta, W_\beta \neq 1} d_\beta \cdot e_\beta^{n-1}/W_\beta \quad (3-7)$$

其中 $d_\beta = \deg(\Phi_\beta) = n_\beta \Theta\left(\frac{|W|}{|W_\beta|}\right)$.

例 3.2. 设 W 为一个有限 Coxeter 群且 $\#S(W) = k+1$, 则 $S^k/W = \Delta^k$ 为一个 Coxeter orbifold. Δ^k 的 suspension $S\Delta^k$ 也是一个 Coxeter orbifold, 其中它的锥点处的局部群为 W . 一般地, $S^l\Delta^k, l > 0$, 也是 Coxeter orbifold 并且可以实现为 S^{k+l}/W .

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{S} & S^{k+1} \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ S^k/W & \xrightarrow{S} & S^{k+1}/W \end{array}$$

因此

$$H_i(S^n/W) \cong H_i(S^{n-k}\Delta^k) \cong \begin{cases} H_i(\Delta^k), & i \leq k-1 \\ H_i(S^{k+1}/W), & i = k < n \\ H_k(\Delta^k), & i = n = k \\ \mathbb{Z}, & i = n > k \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

设

$$f: S^n/W^{k+1} \rightarrow S^n/W^{k+1}$$

为一个保局部群的 orbifold 态射. 如果 $n > k$, 则 f 诱导了一个映射 $\tilde{f}: S^{n-k-1} \rightarrow S^{n-k-1}$. 此时 f 的映射度定义为 \tilde{f} 的映射度. 此时有 $\deg(f) = \deg(Sf)$. 如果 $n = k, k+1$, 则 f 一定是一个 orbifold 等价, 此时 $\deg(f) = \pm 1$.

3.2.5 Hurewize 定理

命题 3.10 (Hurewize 定理). 设 X 是一个 Coxeter 复形, 则

$$\left(\pi_1^{orb}(X)\right)^{ab} \cong H_1(|X|) \oplus H_1(X/|X|, \mathbb{Z}_2).$$

其中这里 G^{ab} 表示群 G 的 Abel 化.

证明: 设 \tilde{X} 为 X 的爆破复形, 则我们有下面交换图表.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}) & \xrightarrow{\tilde{h}} & H_1(\tilde{X}) \\ \Psi_* \downarrow & & \downarrow \Psi_* \\ \pi_1^{orb}(X) & \xrightarrow{h} & H_1(X) \end{array}$$

其中 $\pi_1^{orb}(X) = \pi_1(\tilde{X}) / \langle \{x_i^2\} \rangle$, $H_1(\tilde{X}) \cong H_1(X)$, x_i 为奇异 1 胞腔对应的生成元. h 将 X 中每一个定基点的 orbifold 闭路映为 $C_1(X)$ 中的一个自由链.

X 中定基点的 orbifold 闭路和 \tilde{X} 中定基点的 orbifold 闭路一一对应. 2 维奇异 Coxeter 胞腔 D^2/\mathbb{Z}_2 和 D^2/W 决定 orbifold 基本群中的关系分别是 $s_1 a s_2 a^{-1} = 1$ 和 $(s_1 a s_2 a^{-1})^m = 1$, 其中 $W = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^m \rangle$, a 为一个正则的闭路类. 这两个关系分别对应 \tilde{X} 的基本群的两个关系: $\tilde{s}_1 a \tilde{s}_2 a^{-1} = 1$ 和

$$\begin{cases} (\tilde{s}_1 a \tilde{s}_2 a^{-1} \tilde{s}_1^{-1} a \tilde{s}_2^{-1} a^{-1})^{\frac{m}{2}} = 1, m \text{ 偶}; \\ (\tilde{s}_1 a \tilde{s}_2 a^{-1} \tilde{s}_1^{-1} a \tilde{s}_2^{-1} a^{-1})^{\frac{m-1}{2}} \cdot \tilde{s}_1 a \tilde{s}_2 a^{-1} = 1, m \text{ 奇}. \end{cases}$$

由 \tilde{X} 上的 Hurewicz 定理, 我们有 $s_1 s_2 = 1$ 或 $(s_1 s_2)^{m \bmod 2} = 1$. 命题得证. \square

3.2.6 Orbifold 同调的计算

设 X 为一个 Coxeter 复形, 则相应的链复形 $\{C, d\}$ 可以分裂为两部分: $X_{reg} = \{C_{reg}, d\}$ 和 $X_{sing} = \{C_{sing}, d\}$. 根据 Coxeter 复形上的 orbifold 同调的分裂性质 (命题 3.4),

$$H_i(X) \cong H_i(X_{reg}) \oplus H_i(X_{sing})$$

其中 $H_i(X_{reg}) \cong H_i(|X|)$.

在这一小节中, 我们进一步来讨论 $H_i(X_{sing})$. 注意到, $X/X_{reg} \simeq X/|X|$ 也是一个 Coxeter 复形, 它只有一个正则胞腔 (0 胞腔), 并且可以表达为一些奇点集为连通集的 Coxeter 复形的一点并. 并且根据切除定理, 我们有

$$H_i(X_{sing}) \cong H_i(X/|X|).$$

因此, 下面我们不妨假设 $X = X_{sing}$ 是一个奇点集为连通集并且只有一个正则胞腔

的 Coxeter 复形.

如果我们不考虑局部群信息, 则 D^n/W 是其边界 $\partial D^n/W$ 的锥 (cone), 即 $D^n/W = \text{Cone}(\partial D^n/W)$.

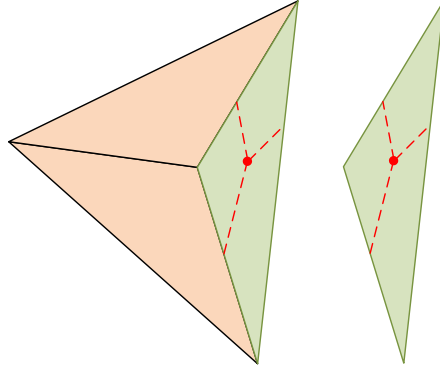


图 3-2: D^3/\mathbb{Z}_2^3

D^n/W 的奇点集同胚于一个 $n-1$ 维圆盘. 设 S 为 X 的奇点集, 则 Coxeter 复形 X 诱导了 S 上的一个胞腔分解 $C(S)$. 进一步我们给 S 的胞腔分解中的每一个胞腔赋予一个局部群, 并定义类似的边缘运算, 则链复形 $\mathcal{S} = (C(S), d)$ 和 X 有相同的 orbifold 同调信息.

命题 3.11. 设 X 是一个奇点集为连通集并且只有一个正则胞腔的 Coxeter 复形, 则

$$H_i(\mathcal{S}) \cong H_{i+1}(X).$$

注 3.5. 等号左边同调中的边缘同态 d 不同于 CW 复形中的边缘同态, 通常带有权重. 比如这里, $d = \Theta\left(\frac{|W|}{|W_\beta|}\right) \cdot d_{CW}$. 特别地, 如果 X 的所有面都是可缩的, 则 \mathcal{S} 等价于 X 的神经上的一个带权复形 (weight complex) 或者群的复形 (complex of group).

设 X 的 facet 集为 $\mathcal{F}(X) = \{F_1, \dots, F_m\}$, 其中每一个 $F_i \in \mathcal{F}(X)$ 对应一个反射子 s_i . 令 F^{n-k} 为 X 中的一个任意的 $n-k$ 维面, 则 F^{n-k} 是一些 facet 的交的连通分支. 记这些 facet 为 $\{F_1, \dots, F_k\}$, 其中我们允许 facet 自交, 即允许 $F_i = F_j, i \neq j$, 此时 X 不是一个好的带角流形. 设 F_β^{n-k+1} 是由 $\{F_1, \dots, \hat{F}_\beta, \dots, F_k\}$ 决定的一个面. 定义 X 上所有面的集合 (包含 X 的底空间作为最高维面) 上的一个等价关系

$$F^{n-k} \sim F_\beta^{n-k+1} \text{ 当且仅当 } \frac{|W(F^{n-k})|}{|W(F_\beta^{n-k+1})|} \text{ 是奇数.}$$

因为任意两个奇数的乘积是奇数, 而奇数和偶数的乘积是偶数, 所以这里的 \sim 是良定的. 令 T 为 X 的面集合在这个等价关系下的等价类集合. 对每一个等价类 $J \in T$, 令

$$X_J = \bigcup_{F \in J} F.$$

我称 X 中的一个奇异胞腔 e^i/W 与面 $F^{n-k} = F_1 \cap \cdots \cap F_k$ 横截相交是指有限 Coxeter 群 W 恰好由 facet F_1, \dots, F_k 对应的反射子生成. 此时, 我们把 W 也定义为 F^{n-k} 的局部群. (若 $F_i = F_j, i \neq j$, 则我们把 s_i 和 s_j 视为两个不同的反射子). 显然, 根据 Coxeter 复形的粘贴映射保局部群的要求, 面的局部群是一个良定的定义.

根据第 3.2.4 节中的讨论, X 的链复形可以进一步分裂为 $C(X) = \bigoplus_{J \in T} C(X_J)$, 其中 $C(X_J)$ 是由 X 中的横截相交等价类 J 中的面的 Coxeter 胞腔生成的链群. 所以, 我们有

$$H_i(X) = \bigoplus_{J \in T} H_i(C(X_J)). \quad (3-8)$$

类似于命题 3.11, 对于每个 $C(X_J)$, 我们有一个 \mathcal{S}_J 与之对应, 使得下面结论成立.

| $C(X_J)$ | X_J | \mathcal{S}_J |
|-----------|------------------|-----------------|
| e^i/W^k | 横截局部余 k 维面 F | $i-1$ 维胞腔 |

引理 3.12. 对每一个 $J \in T$,

$$H_i(C(X_J)) \cong H_{i-l(J)}(X_J)$$

其中 $l(J)$ 是 J 中最高维面的余维数.

证明: $C(X_J)$ 中每个 n 维奇异 Coxeter 胞腔的奇点集给 X 的奇点集 $\Sigma(X)$ 提供了一个 $n-1$ 维圆盘. 所以 $C(X)$ 中所有胞腔的奇点集合构成了 $\Sigma(X)$ 上的一个胞腔分解, 记为 \mathcal{S} . $C(X_J)$ 中所有胞腔的奇点集合粘成了 \mathcal{S} 的一个胞腔子空间, 记为 \mathcal{S}_J . 下面, 我们证明 \mathcal{S}_J 和 X_J 有相同的形变收缩核 $\mathcal{S}_J \cap X_J$.

设 $\mathcal{R}_J = \mathcal{S}_J \cup \mathcal{S}_{R-J}$ 为 \mathcal{S} 的包含 X_J 的最小胞腔子空间, 其中 \mathcal{S}_{R-J} 中的胞腔与 J 中的面都不横截. 则 $X_J = X_J \cap \mathcal{R}_J = (\mathcal{S}_J \cap X_J) \cup (\mathcal{S}_{R-J} \cap X_J)$, 其中 $\mathcal{S}_{R-J} \cap X_J \simeq \partial X_J \times (0, 1)$. 所以, $\mathcal{S}_J \cap X_J$ 是 X_J 的一个形变收缩核.

设 E 为 S_J 中的不包含在 X_J 中的 1 维胞腔, 因为 E 与 X_J 中某个面横截相交, 所以 E 可以形变收缩为 X_J 中的一个点. 根据归纳, 假设 S_J 中的不包含在 X_J 中的任意小于 k 维胞腔都形变到 X_J 上去, 则 S_J 中的不包含在 X_J 中的 k 维胞腔也可以形变到 X_J 上去. 这样我们就得到了一个 S_J 到 $S_J \cap X_J$ 的形变收缩.

所以,

$$H_i(C(X_J)) \cong H_{i-1}(C(S_J)) \cong H_{i-l(J)}(X_J).$$

其中 $C(X_J)$ 为胞腔空间 X_J 对应的链复形. □

从而我们有下面定理.

命题 3.13. 设 X 是一个奇点集为连通集并且只有一个正则胞腔的 Coxeter 复形, 则

$$H_i(X) = \bigoplus_{J \in T} H_{i-l(J)}(X_J), \quad (3-9)$$

其中 $l(J)$ 是 J 中最高维面的余维数.

进一步, 结合 Coxeter 复形上的 orbifold 同调的分裂性质 (命题 3.4), 我们有下面定理

定理 C. 设 X 为一个 Coxeter 复形, 则

$$H_i(X) = \bigoplus_{J \in T} H_{i-l(J)}(X_J) \quad (3-10)$$

其中 $l(J)$ 是 J 中最高维面的余维数.

注 3.6. 一般来说, 这里等式右边的同调为带权重的同调, 并不是 X_J 的通常意义的同调. 但在规则 A 下, 这里的权重都为 1, 所以等式右边的同调即为 X_J 的普通同调. 上面定理与 Chen-Ruan 上同调群的定义 ([24, 定义 3.2.3]) 和 Hochster 公式具有形式上的一致性. 这类拓扑对象的同调群都具有比较好的裂解性质.

在这一小节的最后, 我们将讨论 $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 的奇偶性. 这和 d 是否为 0 密切相关.

引理 3.14. 设 W 是一个有限不可约 Coxeter 群, $S(W) = \{s_1, \dots, s_n\}$ 为 W 的生成元集; W_β 为 W 的一个子群并且 W_β 的生成元集 $S(W_\beta) = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_k}\}$ 为 $S(W)$ 的子集. 如果 $n - k \geq 2$, 则 $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 一定是偶数.

引理 3.15. 设 W 是一个有限不可约 Coxeter 群, $S(W) = \{s_1, \dots, s_n\}$ 为 W 的生成元集, W_β 为 W 的一个子群并且 W_β 的生成元集 $S(W_\beta) = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_{n-1}}\}$ 为 $S(W)$ 的子集. 则最多存在两个不同的 W_β 使得 $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 为奇数.

证明: 根据有限不可约 Coxeter 群的分类, W 一定为下列类型的群之一: $A_n, B_n, D_n, I_2(p), E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$.

则 $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 为奇数当且仅当下面两种情况:

- $W = A_n$, 其中 n 为偶数, 此时 $W_\beta \cong A_{n-1}$;
- $W = I(p)$ 其中 p 为奇数.

此时, 存在两个不同的 W_β 使得 $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 为奇数. □

推论 3.16. 设 X 为一个 Coxeter 复形. 如果 X 的所有余二维面的局部群中的 m_{ij} 都为偶数, 比如 X 为一个直角 Coxeter 复形, 则 T 为 X 的所有面的集合. 此时

$$H_i(X) = \bigoplus_{F^{n-k} \in T} H_{i-k}(X_F). \quad (3-11)$$

进一步, 如果 X 的所有面都是 0 调的 (acyclic), 则

$$H_i(X) = \mathbb{Z}^{f_{n-k}}. \quad (3-12)$$

其中 f_{n-k} 为 X 的所有 $n-k$ 维面的个数.

3.2.7 拓扑不变性

这一节, 我们证明 Coxeter orbifold 的 orbifold 同调群与胞腔分解无关.

命题 3.17. 设 X 为一个 Coxeter orbifold (或 orbispace), $C_1(X)$ 和 $C_2(X)$ 为 X 上的任意两个 Coxeter 胞腔分解决定的链复形. 则

$$H_*(C_1(X)) \cong H_*(C_2(X)).$$

证明: 设 X_{reg}^1 和 X_{reg}^2 分别是 $C_1(X)$ 和 $C_2(X)$ 中所有正则胞腔对应的链子复形, 则 $H_*(X_{reg}^1) \cong H_*(|X|) \cong H_*(X_{reg}^2)$. 设 X_{sing}^1 和 X_{sing}^2 分别是 $C_1(X)$ 和 $C_2(X)$ 中所有奇异胞腔对应的链子复形, 则根据定理 C, $H_*(X_{sing}^1) \cong \bigoplus_{J \in T} H_{*-l(g)}(X_J) \cong H_*(X_{sing}^2)$. 所以, $H_*(C_1(X)) \cong H_*(C_2(X))$. □

3.2.8 Orbifold 欧拉数

定义 3.7 (Coxeter 复形的欧拉数). 设 X 为一个 Coxeter 复形, 则 X 的欧拉数定义为:

$$\chi_{orb}(X) = \sum_{e^i/W \in X} (-1)^i \frac{1}{|W(e^i/W)|}$$

引理 3.18 ([82, 定理 4]). 设 X 为一个紧的奇维数的 orbifold, 则 $\chi_{orb}(X) = 0$.

命题 3.19 (欧拉示性数). 设 X 为一个 Coxeter 复形, 则

$$\chi_{orb}(X) = \sum_{F^{n-k} \in T} \frac{(-1)^{i-k}}{|W(F)|} \chi(F) = \sum_{F^{n-k} \in T} \frac{(-1)^{i-k}}{|W(F)|} \text{rank}(H_i(F)).$$

注 3.7. 这全局商 $X = [Y/G]$ 的弦 (orbifold) 欧拉数的类似物.

$$e_{orb}(X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} e(Y^g) = \frac{1}{|G|} \sum_{hg=gh} e(Y^{<g,h>})$$

其中 Y^g 是关于 g 的不动点集, $Y^{<g,h>}$ 表示 g 和 h 在 Y 上的公共不动点集.

例 3.3 (Hopf 猜想). Hopf 猜想是指: 设 M^{2d} 是一个紧的偶维数的黎曼流形, 如果 M 上允许一个正截面曲率, 则 $\chi(M) > 0$; 如果 M 允许一个负截面曲率, 则 $(-1)^d \chi(M) > 0$.

设 P 是一个单多面体上的直角 Coxeter orbifold, 则 P 的 orbifold 欧拉数为

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{f_{n-i}}{2^i}.$$

由于 P 上的覆叠流形是非正曲率的当且仅当 P 是旗性的. 另外, 根据引理 3.18, 我们知道, 如果 P 是奇维数的, 则 $\chi_{orb}(P) = 0$. 所以我们有 P 上的 Hopf 猜想的一个版本 (参考 [34]): 如果 P 是旗性的, 则

$$(-1)^k \chi_{orb}(P) \geq 0.$$

当 P 是旗性的, 偶维数的, 上面猜想等价于

$$(-1)^k \sum_{i=0}^{2k} (-2)^i f_i \geq 0$$

其中 f_i 为 P 的 i 维面的个数. 或者等价于

$$(-1)^k (1 + \sum_{i=0}^{2k} (-2)^{n-i} x_i) \geq 0$$

这里的 x_i 为 P 在另外一种 orbifold 同调下的同调数, 参考下一节.

3.2.9 另一种 orbifold 同调

在这一节中, 我们考虑 Coxeter orbifold 上另外一种同调. 即在第 3.2.1 节中定义边缘同态时, 我们考虑规则 B: 除正则胞腔外, 所有代表元 g_i 的字长都为偶长度. 则此时 $(-1)^{l(g)} \equiv 1$, 即所有的 V_i 都取相同的定向. 所以我们有另一个边缘公式

$$d'(e^n/W) = \sum_{\beta} n_{\beta} \frac{|W|}{|W_{\beta}|} e_{\beta}^{n-1}/W_{\beta}. \quad (3-13)$$

类似地, 我们可以构造 Coxeter 复形 X 上的一个爆破复形. (注意: 不同于规则 1, 这里的爆破复形 X 可能不唯一, 但它们的同调群相同.) 所以, 同样有 $d' \circ d' = 0$. 我们将边缘同态 d' 定义的同调记为 H'_* . 则显然 H'_* 比前面讨论的 d 定义的 H_* 包含更多的信息. 特别地, 如果我们考虑 \mathbb{Z}_2 系数同调时, $d = d'$.

引理 3.20. 设 X 是一个 Coxeter 复形, 则 $H'_i(X; \mathbb{Z}_2) = H_i(X; \mathbb{Z}_2)$.

类似地, H' 上也满足一些同调群性质, 比如复形对 (X, A) 诱导的同调群长正合列, 万有系数定理, Hurewicz 定理等. 特别地, H' 上也有裂解性质.

命题 3.21 (H' 的裂解性质). 设 X 是一个 Coxeter 复形, $C = \{C_i, d_i\}$ 为相应的链复形. 设 $C = C_{reg} \oplus C_{sing}$ 为链群的裂解, 其中 C_{reg} 和 C_{sing} 分别是所有正则胞腔和所有奇异胞腔生成的链子群. 则

$$H'_i(X) \cong H_i(C_{reg}) \oplus H'_i(C_{sing}) \quad (3-14)$$

其中 X 的所有正则胞腔构成 X 的子复形, 记为 $X_{reg} \simeq |X|$.

H'_* 也是 CW 复形上的胞腔同调的推广

下面我们证明:

$$H_n^{orb'}(D^n/W, \partial(D^n/W)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

如果 $Y = D^1/\mathbb{Z}_2$, 则

$$H'_1(Y, \partial Y) \cong H'_1(Y) \cong \mathbb{Z}.$$

又由于 0-胞腔都是正则的, 所以 $\deg(\Phi_\beta) = 0$.

如果 $Y = D^2/I(m)$ 其中 $I(m) = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^m \rangle$, 则我们有

$$0 \rightarrow H'_2(Y, \partial Y) \rightarrow H'_1(\partial Y) \cong \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i_*} H'_1(Y) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

此时 $H'_2(Y, \partial Y) \cong \ker i_* \cong \mathbb{Z}$. $\deg(\Phi_\beta) = \pm m$ 或者 0.

如果 $Y = D^2/\mathbb{Z}_2$, 则

$$0 \rightarrow H'_2(Y, \partial Y) \rightarrow H'_1(\partial Y) \cong \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i_*} H'_1(Y) \cong \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

此时, $H'_2(Y, \partial Y) \cong \ker i_* \cong \mathbb{Z}$. $\deg(\Phi_\beta) = \pm 1$ 或者 0.

一般情况, 设 $n > 2$, 则 $D^n/W^k \simeq D^k/W^k$, 所以有

$$H'_i(D^n/W) \cong H'_i(D^k/W) \tag{3-15}$$

和

$$H'_i(\partial D^n/W) \cong \begin{cases} H'_i(D^k/W), & i < k-1 \\ \mathbb{Z}, & i = n-1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \tag{3-16}$$

根据同调群长正合列, 当 $k < n$ 时,

$$H'_n(D^n/W, \partial(D^n/W)) \cong H'_{n-1}(\partial(D^n/W)) \cong \mathbb{Z}.$$

当 $k = n$ 时, $H'_n(D^n/W, \partial(D^n/W))$ 同构于下面同态的 kernel,

$$H'_{n-1}(\partial(D^n/\mathbb{Z}_2^k)) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H'_{n-1}(D^n/\mathbb{Z}_2^k) \cong G$$

其中 G 是一个有限循环群.

所以,

$$H'_n(D^n/W, \partial(D^n/W)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

粘贴映射 Φ_β 的映射度 $\deg(\Phi_\beta)$ 定义为下面交换图标第一行复合的映射度,

$$\begin{array}{ccccccc} \partial D^n & \longrightarrow & \coprod_{d_\beta} (\tilde{D}_\beta^{n-1}, \partial \tilde{D}_\beta^{n-1}) & \longrightarrow & \coprod_{n_\beta} (\tilde{D}_\beta^{n-1}, \partial \tilde{D}_\beta^{n-1}) & \longrightarrow & (D_\beta^{n-1}, \partial D_\beta^{n-1}) \\ \psi \downarrow & & & & & & \downarrow \psi \\ \partial D^n/W & \longrightarrow & \coprod_{n_\beta} (\tilde{D}_\beta^{n-1}/W_\beta, \partial \tilde{D}_\beta^{n-1}/W_\beta) & \longrightarrow & (D_\beta^{n-1}/W_\beta, \partial D_\beta^{n-1}/W_\beta) & & \end{array}$$

$\deg(\Phi_\beta)$ 显然是 $\frac{|W|}{|W_\beta|}$ 的倍数, $\deg(\Phi_\beta) = n_\beta \frac{|W|}{|W_\beta|}$.

所以 H' 也是 CW 复形上胞腔同调的推广.

当 X 的神经是单纯复形时

下面我们设 X 的所有面都是可缩的 Coxeter orbifold, 且 X 的神经 $\mathcal{N}(X)$ 是 X 奇点集的一个单纯剖分. 则 X 上存在一个 Coxeter 胞腔结构, 使得每个奇异胞腔都有 e^k/W^k 的形式. 设 $C(X)$ 为相对应的链复形, 则由于 $C(X)$ 关于 d' 可裂, 所以奇异胞腔生成 $C(X)$ 的一个子链复形, 设为 X_{sing} .

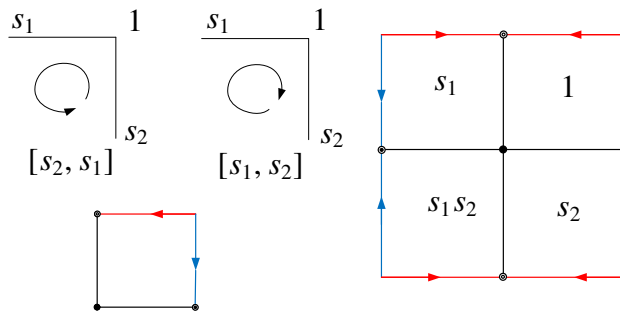


图 3-3: e^2/\mathbb{Z}_2^2 的定向定义为 e^2 的定向, 对应 \mathbb{R}^2 上一个标架的选取, 所以可以用 $S(W)$ 上的排列表示.

此时 e^k/W^k 的定向可以表示为 $S(W) = \{s_i\}$ 上的一个排列, 不妨记为 $[s_1, s_2, \dots, s_k]$. 见图 3-3.

则此时

$$d_1(e^n/W) = d([s_1, s_2, \dots, \hat{s}_\beta, \dots, s_k]) = \sum_{\beta, W_\beta \neq 1} (-1)^\beta \frac{|W|}{|W_\beta|} [s_1, s_2, \dots, \hat{s}_\beta, \dots, s_k],$$

其中 e^{n-1}/W_β 的定向选为 $[s_1, s_2, \dots, \hat{s}_\beta, \dots, s_k]$. 所以, 这里 X_{sing} 对应了 $\mathcal{N}(X)$ 上的一个群的单复形, 此时 X_{sing} 上的同调和群的单复形的带权同调是同构的. 即任意 $i > 0$, 我们有

$$H'_i(X_{sing}) \cong H_{i-1}^w(\mathcal{N}(X)).$$

所以, 自然地我们有下面结论.

命题 3.22. 设 X 为一个 Coxeter orbifold, 它的神经 $\mathcal{N}(X)$ 是 X 奇点集的一个三角剖分. 则对任意 $i > 0$, 有

$$H'_i(X) \cong H_i(|X|) \oplus H_{i-1}^w(\mathcal{N}(X)),$$

其中这里 $H_i(|X|)$ 表示底空间 $|X|$ 上通常的同调, $H_{i-1}^w(\mathcal{N}(X))$ 表示 $\mathcal{N}(X)$ 作为一个群的单复形或者带权复形的带权同调.

3.2.10 例子

例 3.4 (单多面体). 设 P 是一个单多面体, 在 P 的每一个余二维面 $F_i \cap F_j$ 标记一个大于 2 的正整数 $m_{ij} \geq 2$, 并令 $m_{ii} = 2$, 则 P 上存在一个 Coxeter orbifold 结构使得 P 的每个面 $f = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ 的局部群为

$$W_f = \langle s_{i_1}, \dots, s_{i_k} \mid (s_{i_p} s_{i_q})^{m_{i_p i_q}} = 1, \forall 1 \leq p \leq q \leq k \rangle \quad (3-17)$$

则 P 上的标准方块分解是 P 的一个 Coxeter 胞腔分解. 对任意 $i > 0$, 我们有

$$H_i(P) = H_i(P') = \mathbb{Z}^{f_{n-i}^{P'}}, \quad (3-18)$$

其中 f'_{n-i} 是 P 的面等价类集 T 中满足 $i = l(J)$ 的等价类 J 的个数. 特别地, 如果所有地 m_{ij} 都是偶数, 则 f'_{n-i} 就是 P 中 $n-i$ 维面的个数.

$$H'_i(P) = H_{i-1}^w(N(P)). \quad (3-19)$$

特别地, 如果 P 是一个直角 Coxeter orbifold, 则

$$H_i(P) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{x_1}, & i = 1; \\ \mathbb{Z}_2^{x_i}, & 2 \leq i \leq n-1; \\ \mathbb{Z}, & i = n. \end{cases}$$

其中 f_i 为 P 的 i 维面的个数, $x_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j f_{n-i+j}$ 称为 P 的第 i 个同调数.

例 3.5. 设 Q 是一个实心圆柱体, F_1, F_2 和 F_3 是 Q 的三个面, 见图 3-4. 在边 $F_1 \cap F_2$ 标记一个整数 2, 在边 $F_1 \cap F_3$ 标记一个整数 3. 则 Q 是一个 Coxeter orbifold, 且可以被分解成一个 0 胞腔, 三个 1 胞腔, 三个 2 胞腔和两个 3 胞腔.

则 $X_1 \cong D^3, X_{[s_1]} = F_1 \cong D^2, X_{[s_2]} = F_2 \cup F_3 \cup (F_2 \cap F_3) \cong D^2, X_{[s_1 s_2]} = F_1 \cap F_2 \cong S^1$. 所以

$$H_i(Q) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 2, 3 \\ \mathbb{Z}^2, & i = 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad H'_i(Q) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 3 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3, & i = 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

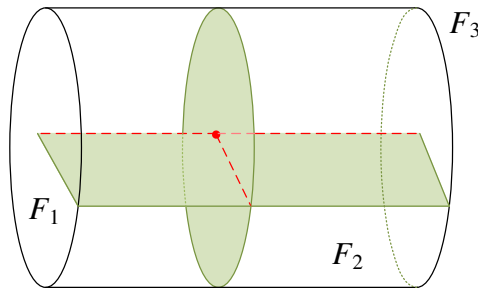


图 3-4: Coxeter 圆柱体

例 3.6. 设 M 是一个 n 维带边流形, M 的边界 ∂M 是一个 $n-1$ 维的连通闭流形. 我们令 ∂M 为 M 的反射面, 则此时 M 是一个 Coxeter orbifold. M 的 orbifold 同调群为

$$H_i(M) = H'_i(M) \cong H_i(|M|) \oplus H_{i-1}(\partial M).$$

3.3 Coxeter 胞腔复形上的 orbifold 上同调

3.3.1 Orbifold 上同调群

设 G 是一个有限生成 Abel 群, 令

$$C^i = \text{Hom}(C_i, G) = \text{Hom}(C_i^{reg} \oplus C_i^{sing}, G) \cong \text{Hom}(C_i^{reg}, G) \oplus \text{Hom}(C_i^{sing}, G)$$

和

$$\delta^i = \text{Hom}(d_i, G) = \text{Hom}(d_i|_{C_{reg}}, G) \oplus \text{Hom}(d_i|_{C_{sing}}, G).$$

则 $(\delta^i)^2 = 0$, 因此我们得到 X 上的一个上链复形 $D = \{C^i, \delta^i\}$. X 的 G 系数的 orbifold 上同调群定义为

$$H^i(D, G) = \text{Ker } \delta / \text{Im } \delta.$$

同理, Coxeter 复形的 orbifold 上同调群也是可裂解的. 并且有万有系数定理成立.

命题 3.23 (orbifold 上同调群的裂解性质). 设 X 是一个 Coxeter 复形, $D = \{C^i, \delta^i\}$ 为相应的上链复形. 设 $D = D_{reg} \oplus D_{sing}$ 为上链复形的裂解, 其中 C^{reg} 和 C^{sing} 分别是所有正则胞腔和所有奇异胞腔生成的上链子群. 则

$$H^i(X; G) \cong H^i(D_{reg}) \oplus H^i(D_{sing}) \quad (3-20)$$

命题 3.24 (万有系数定理). 设 X 是一个 Coxeter 复形, 则有下面可裂的短正合列.

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{i-1}(X), G) \longrightarrow H^i(X; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_i(X), G) \longrightarrow 0 \quad (3-21)$$

3.3.2 $H^*(X; \mathbb{Z})$ 上的 cup 积

根据定理 C 和万有系数定理知,

$$H^i(X) = \bigoplus_{J \in T} H^{i-l(J)}(X_J). \quad (3-22)$$

在规则 A 下, Coxeter 复形的爆破复形是唯一的. 所以我们可以将 X 的爆破复形的 cup 积定义为 $H^*(X)$ 上的 orbifold cup 积.

例如, 如果 X 是一个直角 Coxeter orbifold 且 X 中的所有的面都是可缩的, 则

$$H^*(X; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[v_1, \dots, v_m] / (I, \{v_i^2\}).$$

推论 3.25. 设 $H^{*'}$ 为规则 B 决定的同调, 则 $H^*(X; \mathbb{Z}_2) \cong H^{*'}(X; \mathbb{Z}_2)$.

3.4 一般 orbifold 复形上的 orbifold 同调

我们这种利用爆破定义的 orbifold 同调, 在更一般的 orbifold 复形上也有效. 下面我们列举两个例子.

例 3.7 (复带权投射空间). 由 [2, 命题 2.3] 知, 复带权投射空间 $W\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ 的一个 q-CW 胞腔分解为

$$W\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) = e^0 \cup e^2/G_2 \cup \dots \cup e^{2n}/G_{2n}$$

每个 $2n$ 维胞腔都粘到 $W\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ 的 $(2n-2)$ 维骨架上去. 因此 $W\mathbb{P}$ 的一个爆破复形就是通常的 $\mathbb{C}P^n$. 所以,

$$H_*(\mathbb{C}P^n) := H_*(W\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n))$$

类似地, 设 $[D^n/\mathbb{Z}_2]$ 为对径变换在 D^n 上地全局商. 则 $[D^n/\mathbb{Z}_2]$ 的爆破就是 $\mathbb{R}P^n$. 所以

$$H_*^{orb}([D^n/\mathbb{Z}_2]) := H_*(\mathbb{R}P^n).$$

例 3.8 (带有孤立奇点的曲面). 设 S 为一个亏格 2 可定向闭曲面. 我们给 S 上的两个点 $\{v_1, v_2\}$ 分别标记一个由旋转生成的局部群 \mathbb{Z}_{n_i} . 则此时 S 是一个 orbifold. 给 S

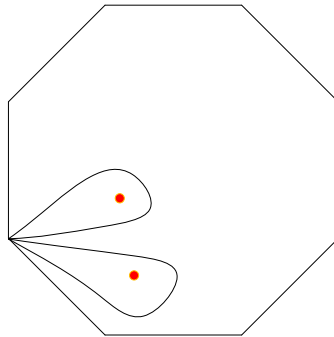
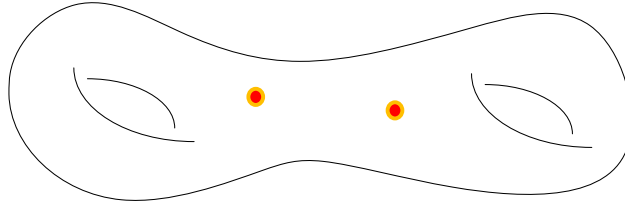
一个如图的胞腔分解. 则 S 的 orbifold 基本群为:

$$\pi_1^{orb}(S) = \langle x_1, y_1, x_2, y_2, s_1, s_2 \mid s_1^{n_1} = s_2^{n_2} = 1, [x_1, y_1][x_2, y_2]s_1s_2 = 1 \rangle$$

S 的 orbifold 同调群为:

$$H_i^{orb}(S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}/(n_1, n_2)\mathbb{Z}, & i = 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

可以验证, 此时 Hurewicz 定理也是成立的, $[\pi_1^{orb}(S)]^{ab} \cong H_1^{orb}(S)$.



第四章 Orbifold 示性类

4.1 Orbifold 向量丛

Orbifold 向量 (纤维) 丛的定义最早出现在 Satake [82] 的文章中. 下面我们首先介绍 orbifold 向量丛的概念.

定义 4.1 (orbifold 向量丛, [82]). 设 $\pi : E \rightarrow B$ 是两个 orbifold E, B 之间的光滑映射, $\mathcal{U}^* = \{(U^*, G^*, \psi^*)\}$ 和 $\mathcal{U} = \{(U, G, \psi)\}$ 分别是 E 和 B 上的 orbifold 结构. 如果 $\pi : E \rightarrow B$ 满足下面的条件, 则称 E 是 B 上的一个 (实) m 维 orbifold 向量丛.

(★) \mathcal{U} 和 \mathcal{U}^* 之间存在一一对应 $\{(U^*, G^*, \psi^*)\} \leftrightarrow \{(U, G, \psi)\}$ 使得 $U^* = U \times \mathbb{R}^m$. 设 $\bar{\pi}_* : U^* \rightarrow U$ 为相应的投射, 并满足下面相容性条件

$$\pi \circ \psi_* = \psi \circ \bar{\pi}_*.$$

(★★) 设 $(U^*, G^*, \psi^*), (U, G, \psi)$ 和 $(U'^*, G'^*, \psi'^*), (U', G', \psi')$ 为两组相对应的局部坐标卡, 并且满足 $\psi(U) \subset \psi'(U')$. 则 $\psi^*(U^*) \subset \psi'^*(U'^*)$, 并且存在单射 $\lambda : \{(U, G, \psi)\} \rightarrow \{(U', G', \psi')\}$ 和 $\lambda^* : \{(U^*, G^*, \psi^*)\} \rightarrow \{(U'^*, G'^*, \psi'^*)\}$ 之间的一一对应 $\lambda \leftrightarrow \lambda^*$, 使得对任意 $(p, q) \in U^* = U \times \mathbb{R}^m$ 有

$$\lambda^*(p, q) = (\lambda(p), g_\lambda(p)q)$$

其中 $g_\lambda(p) \in GL_m(\mathbb{R})$ 为置换矩阵. 映射 $g_\lambda : U \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$ 是一个满足下面等式的光滑映射

$$g_{\mu\lambda}(p) = g_\mu(\lambda(p)) \cdot g_\lambda(p) \quad (4-1)$$

其中 $\{(U, G, \psi)\} \xrightarrow{\lambda} \{(U', G', \psi')\} \xrightarrow{\mu} \{(U'', G'', \psi'')\}$ 是两个单射的复合.

Orbifold 向量丛是映射 $\pi : E \rightarrow B$ 和 orbifold 结构对 $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ 的等价类之间

的复合. 其中两组 $\pi : E \rightarrow B$ 上的两组 orbifold 结构对 $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_1^*)$ 和 $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_2^*)$ 称为等价的, 如果存在一个光滑映射 $\delta_U : U \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$ 满足:

- 对任意对应着 $(U, G, \psi) \in \mathcal{U}$ 的 $(U \times \mathbb{R}^m, G_1^*, \psi_1^*) \in \mathcal{U}_1^*$ 和 $(U \times \mathbb{R}^m, G_2^*, \psi_2^*) \in \mathcal{U}_2^*$, 有

$$\psi_1^*(p, q) = \psi_2^*(p, \delta_U(p)q).$$

- 对任意单射 $\lambda : \{(U, G, \psi)\} \rightarrow \{(U', G', \psi')\}$,

$$g_\lambda^2(p) = \delta_{U'}(\lambda(p))g_\lambda^1(p)\delta_U^{-1}(p),$$

其中 g_λ^1, g_λ^2 为 $(\star\star)$ 中的 g_λ .

注 4.1. 一个全局商 $[M/G]$ 上的 orbifold 向量丛定义为 M 上的向量丛 $E \rightarrow M$ 满足 G 将 x 处的纤维通过线性映射映为 gx 处的纤维.

设 $\pi : E \rightarrow B$ 是一个 orbifold 向量丛. 则对 B 中的任意一点 b , 存在一个坐标卡 (U, G, ψ) 使得 $b \in U/G$, 且不妨设 G 为 b 点处的局部群. 对 $\psi^{-1}(b)$ 中的任意 \bar{b} , $\bar{\pi}^{-1}(\bar{b})$ 是一个实的向量空间 \mathbb{R}^m . 所以

$$\pi^{-1}(b) \cong G^* \backslash \bar{\pi}^{-1}(\bar{b}),$$

所以, orbifold 向量丛一般都不是通常意义上的向量丛.

例 4.1. 设 D^1/\mathbb{Z}_2 为区间 $[-1, 1]$ 在反射作用下的商 orbifold. 则 D^1/\mathbb{Z}_2 上有如下两个 orbifold 线丛.

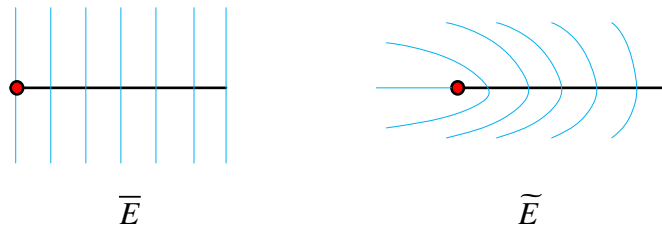


图 4-1: D^1/\mathbb{Z}_2 上的 orbifold 线丛

$$\bar{E} = D^1/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R} = D^1 \times \mathbb{R}/(x, y) \sim (-x, y)$$

$$\tilde{E} = D^1 \times \mathbb{R}/(x, y) \sim (-x, -y)$$

设 $\lambda : D^1 \rightarrow D^1$ 为定义 4.1 中的单射, λ 将 $x \in D^1$ 映为 $-x$. 则 λ 对应 \mathbb{Z}_2 的生成元. 进一步, \bar{g}_λ 为常值映射, 即对任意 $x \in D^1$, $\bar{g}_\lambda(x) = (1) \in GL_1(\mathbb{R})$; $\tilde{g}_\lambda(x) = (-1) \in GL_1(\mathbb{R})$.

非平凡线丛 \tilde{E} 不是一个通常意义的向量丛, 我们称之为 D^1/\mathbb{Z}_2 上的典范线丛. \tilde{E} 同时也是 D^1/\mathbb{Z}_2 的切丛. 我们令 $(0, y) \sim (0, -y)$, 则可以得到一个 orbifold 丛映射 $q : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$. 此时 \tilde{E} 可以看作 \tilde{E} 的拉回.

定义 4.2 (orbifold 截面, [82]). 设 $\pi : E \rightarrow B$ 为一个带有 orbifold 结构对 $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ 的 orbifold 向量丛. 一个 orbifold 映射 $f = \{f_U\} : (B, \mathcal{U}) \rightarrow (E, \mathcal{U}^*)$ 被称为这个 orbifold 向量丛上的一个光滑截面, 如果 $\pi_U \circ f_U = id$.

注 4.2. 局部上, f_U 是 G -不变的. 全局商上的 orbifold 向量丛 $E' \rightarrow [M/G]$ 的截面对应 $E \rightarrow M$ 上的 G -等变截面.

定义 4.3 (orbifold 向量丛映射, [81]). 设 $\pi_1 : (E_1, \mathcal{U}_1^*) \rightarrow (B_1, \mathcal{U}_1)$ 和 $\pi_2 : (E_2, \mathcal{U}_2^*) \rightarrow (B_2, \mathcal{U}_2)$ 是两个 orbifold 向量丛. 一个映射系 $h^* = \{h_{U_1}\} ((U_1, G_1, \psi_1) \in \mathcal{U}_1)$ 被称为一个光滑 orbifold 向量丛映射, 如果下面条件成立:

- 对任意 $(U_1, G_1, \psi_1) \in \mathcal{U}_1$, 存在一个对应的 $(U_2, G_2, \psi_2) \in \mathcal{U}_2$, 和光滑映射 $h_{U_1}^* : U_1 \times \mathbb{R}^m \rightarrow U_2 \times \mathbb{R}^m$ 和 $h_{U_1} : U_1 \rightarrow U_2$ 满足

$$h_{U_1}^*(p, q) = (h_{U_1}(p), r_{U_1}(p)q) \quad (4-2)$$

其中 $r_{U_1}(p) \in GL_m(\mathbb{R})$. $r_{U_1} : U_1 \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$ 是一个光滑映射.

- 设 $\{U_1, G_1, \psi_1\}, \{U'_1, G'_1, \psi'_1\}$ 为 \mathcal{U}_1 中的局部坐标卡, 并且满足 $\psi_1(U_1) \subset \psi'_1(U'_1)$; $\{U_2, G_2, \psi_2\}, \{U'_2, G'_2, \psi'_2\}$ 为 \mathcal{U}_2 中的局部坐标卡. 则对任意单射 $\lambda_1 : \{U_1, G_1, \psi_1\} \rightarrow \{U'_1, G'_1, \psi'_1\}$, 存在一个单射 $\lambda_2 : \{U_2, G_2, \psi_2\} \rightarrow \{U'_2, G'_2, \psi'_2\}$, 使得

$$\lambda_2^* \circ h_{U_1}^* = h_{U'_1}^* \circ \lambda_1^*.$$

(因此同样有 $\lambda_2 \circ h_{U_1} = h_{U'_1} \circ \lambda_1$). 我们进一步假设

$$g_\lambda^2(h_{U_1}(p)) = r_{U'}(\lambda_1(p))g_{\lambda_1}(p)r_{U_1}^{-1}(p). \quad (4-3)$$

两个 (B, \mathcal{U}) 上的 orbifold 向量丛 (E_1, \mathcal{U}_1^*) , (E_2, \mathcal{U}_2^*) 是等价的当且仅当存在一个 orbifold 丛映射 $h : E_1 \rightarrow E_2$ 使得 $(E_1, \mathcal{U}_1) \cong (E_2, \mathcal{U}_2)$, 并且对任意 $U \in \mathcal{U}_1$,

$h_U : U \rightarrow U'$ 是一个同胚.

定理 4.1 ([82]). 设 (M, \mathcal{U}) 是一个 orbifold. 则任意满足 (4-1) 的光滑映射族 $g_\lambda : U \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$ 决定 (M, \mathcal{U}) 上的一个 orbifold 向量丛, 其中 $\lambda : (U, G, \psi) \rightarrow (U', G', \psi')$ 为任意单射. 进一步, 如果两族光滑映射 $\{g_\lambda^1\}$ 和 $\{g_\lambda^2\}$ 满足 (4-3), 则它们决定的 orbifold 向量丛是等价的.

注 4.3. 因为 (4-1) 对向量空间的张量积, 外积, 直和等都是成立的, 所以在 orbifold 向量丛上, 我们也有相应的构造.

例 4.2 (orbifold 切向量丛, [82]). 设 (M, \mathcal{U}) 为一个 orbifold. 对每一个坐标卡 (U, G, ψ) , 我们假设 U 为 \mathbb{R}^n 中的开集. 并对每一个 U , 我们固定一个坐标系 $\{x^1, \dots, x^m\}$. 对任意单射 $\lambda : (U, G, \psi) \rightarrow (U', G', \psi')$, 令

$$g_\lambda(\bar{p}) = \left(\frac{\partial x^{*i} \circ \lambda}{\partial x^j} \right)$$

为 λ 在点 \bar{p} 处的 Jacobian 矩阵, 其中 $\{x^i\}$ 和 $\{x^{*i}\}$ 分别是 U 和 U^* 中固定的坐标系. 则得到的 orbifold 向量丛称为 (M, \mathcal{U}) 的 orbifold 切向量丛.

4.2 直角 Coxeter 复形上的 orbifold Stiefel-Whitney 类

4.2.1 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的线性表示

设

$$\rho : (\mathbb{Z}_2)^k \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$

为 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的一个实线性表示. 为方便, 这一部分的所有群 $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ 的群运算都取为乘法.

引理 4.2. 设 $\{A_i | A_i \in GL_n(\mathbb{R}), i = 1, \dots, k\}$ 为一族 n 阶可逆矩阵. 如果 $A_i^2 = E$ 且对任意 i, j , $A_i A_j = A_j A_i$, 则 $\{A_i\}$ 可同时对角化.

进一步, 假设 P 是一个 n 阶可逆矩阵, 满足对任意 i , $P^{-1} A_i P = \text{diag}(x_1^i, \dots, x_n^i)$

为对角阵. 则矩阵

$$C = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{pmatrix}_{n \times k}$$

在不考虑行的次序的意义下是唯一的.

引理 4.3. \mathbb{R}^n 上的任意一个非平凡的, 线性的 $(\mathbb{Z}_2)^k$ -作用共轭于一个生成元为对角元素为 ± 1 的对角矩阵生成的线性作用. 特别地, \mathbb{R}^n 上的任意一个有效的线性 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用共轭于一个标准地反射作用.

证明: 设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$. 如果 $A^2 = E$, 则 A 可对角化且相应的对角矩阵的对角元素为 ± 1 .

设 g_1, \dots, g_k 为 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 一族不可约生成元集. 则 \mathbb{R}^n 上的任意一个线性的 $(\mathbb{Z}_2)^k$ -作用对应 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的一个群表示 $\rho: \mathbb{Z}_2^k \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$. 根据引理 4.2, $\{\rho(g_i) | i = 1, \dots, k\}$ 可同时对角化. 设 $D_i = \rho(g_i)$ 为相应的对角矩阵. 则 $\{D_i\}$ 对应的线性作用即为我们要求的作用.

进一步, 如果 $k = n$, 设 D_1, \dots, D_n 为相应的对角矩阵. 如果作用是有效的, 则我们可以重新选取 D_1, \dots, D_n 生成的群作用的一组生成元使得每一个生成元对应一个标准的反射矩阵. 事实上, 一定存在一个 $D_i = \text{diag}(x_1^i, \dots, x_n^i)$ 满足 $x_1^i = -1$. 对任意 $D^j = \text{diag}(x_1^j, \dots, x_n^j)$ 其中 $j \neq i$ 且 $x_1^j = -1$, 我们用 $g_j g_i$ 代替生成元 g_j , 此时 $g_j g_i$ 对应的对角阵为 $D_i D_j$ 满足第 1 个元素为 1. 从而根据归纳, 我们可以得到一族对角阵, 不妨仍记为 D_1, \dots, D_n , 满足除 D_i 外其他对角阵的第 1 个元素都是 1. 进一步由归纳可得一族标准的反射矩阵. \square

引理 4.4. 设 $\{s_1, \dots, s_k\}$ 为群 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 一组生成元. D^n 上的任意一个线性的 $(\mathbb{Z}_2)^k$ -作用都对应一个线性表示 $\rho: (\mathbb{Z}_2)^k \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$. 进一步, 对应一族线性变换 $\rho(s_1), \dots, \rho(s_k)$ 的共轭类. 此时, 显然 $\rho(s_1), \dots, \rho(s_k)$ 可同时对角化.

4.2.2 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的实 orbifold 向量丛和 orbifold Stiefel-Whitney 类

在这一小节中, 我们将通过局部群 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 实线性表示来描述并代数化 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的实 orbifold 向量丛. 并进一步, 给出相应 orbifold Stiefel-Whitney 类的定义.

首先, $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 是 \mathbb{Z}_2 -闭的, 即 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 存在一个 Coxeter 胞腔分解使得当我们取 \mathbb{Z}_2 -系数时, 所有的边缘映射都是零映射. $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的 \mathbb{Z}_2 -系数的上同调环为

$$H^*(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[s_1, s_2, \dots, s_k]/(s_i^2, \forall i).$$

引理 4.5. $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的所有 m 维实的 orbifold 向量丛一一对应于 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 在 $D^n \times \mathbb{R}^m$ 上的满足定义 4.1 中 (\star) 条件的线性作用.

注 4.4. $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的实 orbifold 向量丛不一定是一个直角 Coxeter 复形.

设 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的生成元为 s_1, \dots, s_k . 根据引理 4.4, $(\mathbb{Z}_2)^k$ 在 $D^n \times \mathbb{R}^m$ 任意一个线性作用决定一个 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的一个实线性表示

$$\rho : (\mathbb{Z}_2)^k \longrightarrow GL_{n+m}(\mathbb{R}).$$

进而, 这个线性作用可以由 $(n+m)$ 阶方阵 $\rho(s_1), \dots, \rho(s_k)$. 根据引理 4.3 和 orbifold 向量丛的 orbifold 结构对的等价性, 我们可以选取 $\rho(s_1), \dots, \rho(s_k)$ 都为对角元素为 ± 1 的对角阵. 根据 (\star) 条件, 我们可以令 $\rho(s_i) = \text{diag}(1_1, \dots, -1_i, \dots, 1_n, x_1^i, \dots, x_m^i)$. 即下面引理.

引理 4.6. 任意一个 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的 m -维实的 orbifold 向量丛一一对应于 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的一个实线性表示 $\rho : (\mathbb{Z}_2)^k \longrightarrow GL_{n+m}(\mathbb{R})$ 满足 $\rho(s_i) = \text{diag}(1_1, \dots, -1_i, \dots, 1_n, x_1^i, \dots, x_m^i)$, 其中 s_1, \dots, s_k 是 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的生成元, $x_j^i = \pm 1, j = 1, \dots, m$.

我们称 $C_i = \text{diag}(x_1^i, \dots, x_m^i)$ 为实 orbifold 向量丛 $E \longrightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 对应 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 某个生成元 s_i 的示性矩阵. 称

$$C = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^1 & x_m^2 & \cdots & x_m^k \end{pmatrix}_{m \times k}$$

是实 orbifold 向量丛 $E \longrightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的整体示性矩阵. 不难验证, C 的行序是不重要的, 并且每一个这样的 C 都可以决定 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的一个实 orbifold 向量丛. 令

$$\chi(C) = (1, \dots, 1)^T - \frac{C - (\mathbf{1})}{2}(s_1, \dots, s_k)^T.$$

其中 $(\mathbf{1})$ 表示一个元素全为 1 的 $m \times k$ 矩阵. 则 $\chi(C)$ 是一个列向量, 且每个元素 $\chi_i(C) = 1 + \sum_j \frac{1-x_i^j}{2} s_j$ 都是一次多项式. 则我们定义 $\pi : E \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的 orbifold Stiefel-Whitney 类为

$$w(E) = \prod_{i=1}^m \chi_i(C) = \prod_{i=1}^m \left(1 + \sum_{j=1}^k \frac{1-x_i^j}{2} s_j\right) \in H^*(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k; \mathbb{Z}_2). \quad (4-4)$$

注 4.5. 这里 $w : \text{Vect}_m(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k) \rightarrow H^*(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k; \mathbb{Z}_2)$ 是一个类函数. 根据我们的定义, 如果 $(\mathbb{Z}_2)^k$ (取生成元集为 s_1, \dots, s_k) 上的两个实 orbifold 向量丛 E_1, E_2 是等价的, 则根据引理 4.2, 相应的 $\{\rho_1(s_i) | i = 1, \dots, k\}$ 和 $\{\rho_2(s_i) | i = 1, \dots, k\}$ 同时对角化后得到的矩阵 C , 在不考虑行的次序意义下, 是一样的. 则有 $w(E_1) = w(E_2)$. 即 w 是良定的.

注 4.6. 设 $\lambda : D^n \rightarrow D^n$ 为定义 4.1 中的单射, 则根据 [82, 引理 2], 所有的 $\lambda : D^n \rightarrow D^n$ 和局部群 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 对应. 选定一个 $\lambda_0 : D^n \rightarrow D^n$ 与 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的单位元对应, 固定 g_{λ_0} . 设 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的生成元 s_i 对应 $\lambda_i : D^n \rightarrow D^n$. 则根据定义 4.1 中的 $(\star\star)$ 条件. 我们上面涉及的 $\rho(s_i)$ 实际上对应于 $g_{\lambda_i}(\lambda(0))$. 所有我们这里的矩阵 C 实际上决定了一族 $g_\lambda : D^n \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$.

命题 4.7 ($D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的 orbifold 向量丛的 Whitney 和). 设 $E_1 \oplus E_2$ 是 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上两个 orbifold 向量丛 $\pi_1 : E_1 \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 和 $\pi_2 : E_2 \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的 Whitney 和, 则

$$w(E_1 \oplus E_2) = w(E_1)w(E_2).$$

证明: 设 $\pi_1 : E_1 \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 和 $\pi_2 : E_2 \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的整体示性矩阵分别为 $M_{m_1 \times k}$ 和 $N_{m_2 \times k}$. 则 $E_1 \oplus E_2$ 的整体示性矩阵为 $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}_{(m_1+m_2) \times k}$. 所以

$$w(E_1 \oplus E_2) = \prod_{i=1}^{m_1+m_2} \chi_i \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{m_1} \chi_i(M) \cdot \prod_{i=1}^{m_2} \chi_i(N) = w(E_1)w(E_2).$$

□

设 $h : D^n/(\mathbb{Z}_2)^k \rightarrow D^1/\mathbb{Z}_2$ 是一个 orbifold 映射. 则 h 诱导一个群同态 $h_* : (\mathbb{Z}_2)^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$, 其中 h_* 可以由一个元素为 1 或 -1 的 k 维向量 $(y^1, \dots, y^k) \in (\mathbb{Z}_2)^k$ 刻画. 则 (y^1, \dots, y^k) 决定了 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的一个线丛 $\pi : E^1 \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$. 我们定义

$[D^n/(\mathbb{Z}_2)^k, D^1/\mathbb{Z}_2] \xrightarrow{f} \text{Vect}_1(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k)$ 为 $f(h) =: E_1$. 实际上 $f(h) = h^*(\tilde{E})$ 类似于例 4.1 中的非平凡线丛 $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow D^1/\mathbb{Z}_2$ 的在 h 的诱导丛.

引理 4.8. 下面两个映射的复合是双射.

$$[D^n/(\mathbb{Z}_2)^k, D^1/\mathbb{Z}_2] \xrightarrow{f} \text{Vect}_1(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k) \xrightarrow{w_1} H^1(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k; \mathbb{Z}_2)$$

证明: $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k \simeq D^k/(\mathbb{Z}_2)^k = (D^1/\mathbb{Z}_2)^k$, 故

$$[D^n/(\mathbb{Z}_2)^k, D^1/\mathbb{Z}_2] = [(D^1/\mathbb{Z}_2)^k, D^1/\mathbb{Z}_2] \cong \text{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^k,$$

$$\text{Vect}_1(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k) = \text{Vect}_1(D^k/(\mathbb{Z}_2)^k) = (\mathbb{Z}_2)^k, ((\mathbb{Z}_2)^k \text{ 在 } \mathbb{R}^1 \text{ 上的线性作用}),$$

$$H^1(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^k$$

都是有限集. 所以, 我们只需验证 f 和 g 都是单射即可.

f 显然为一个单射.

对于 $D^1/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的线丛 $\pi: E^1 \rightarrow D^1/(\mathbb{Z}_2)^k$, 存在向量 (x^1, \dots, x^k) 其中 $x^i = \pm 1$. 则 $w_1(E^1) = \sum_{j=1}^k \frac{1-x^j}{2} s_j \in H^1(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k; \mathbb{Z}_2)$. 故 w_1 也是一个单射. \square

例 4.3. 设 $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow D^1/\mathbb{Z}_2$ 是例 4.1 中的非平凡线丛, 则

$$w(\tilde{E}^1) = 1 + s.$$

存在一个自然的丛映射 $f: \bar{E}^1 \rightarrow \tilde{E}^1$ 使得 $f^*(w(\tilde{E}^1)) = 1$. 进一步, $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 的切丛的 Stiefel-Whitney 示性类为

$$\omega(T(D^n/(\mathbb{Z}_2)^k)) = \omega(T(D^{n-k}) \times (T(D^1/\mathbb{Z}_2))^k) = \prod_{i=1}^k (1 + s_i).$$

例 4.4. $D^n/(\mathbb{Z}_2)^k$ 上存在两个不等价的 orbifold 向量丛, 它们有相同的 orbifold Stiefel-Whitney 类. 例如, 令 $E \rightarrow D^1/\mathbb{Z}_2$ 是一个二维的 orbifold 向量丛, 设 E 对应的示性矩阵为 $(-1, -1)^T$. 则

$$w = (1 + s)^2 = 1.$$

但显然 E 不是平凡丛.

4.2.3 直角 Coxeter 复形上的实 orbifold 向量丛和 orbifold Stiefel-Whitney 类

设 X 为一个 n 维直角 Coxeter 复形. 则根据定理 C,

$$H_{orb}^i(X) = \bigoplus_{f \in T} H^{i-l(f)}(X_f) \quad (4-5)$$

其中 T 是 X 所有的面集合 (包含它的 n 维面, 即 X 的底空间 $|X|$), $l(f)$ 是面 f 在 X 中的局部余维数. X 的正则部分 X_{reg} 是 X 的一个子复形, 它是一个通常的 CW 复形, 并且同伦于 X 的底空间 $|X|$. 所以, X_{reg} 上的向量丛和 Stiefel-Whitney 的定义都和通常 CW 复形的情况一致. 另外, 注意到 X/X_{reg} 是一些直角 Coxeter 复形的一点并, 其中的每一个分支都对应 X 的一个连通的奇点集. 设 H 是其中一个的分支, 则除了唯一的 0 胞腔, H 不包含其他正则胞腔. 且 $H^*(H; \mathbb{Z}_2)$ 是 $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ 的子环. 我们设 H 的余一维面集合为 $\mathcal{F}_H = \{F_1, \dots, F_\eta\}$, 则 \mathcal{F}_H 对应的直角 Coxeter 一维胞腔的对偶生成

$$\mathcal{R}_H = \mathbb{Z}_2[s_1, \dots, s_\eta]/(I_H + J_H) \quad (4-6)$$

其中 I_H 是 H 决定的 Stanley-Reisner 理想, $J_H = (s_i^2, \forall i)$. \mathcal{R}_H 是 $H^*(H; \mathbb{Z}_2)$ 的子环. 在这一小节, 我们定义的 orbifold Stiefel-Whitney 类将 X 的奇点部分决定的 orbifold 向量丛信息用 \mathcal{R}_H 中的多项式表示.

首先我们给出 X 上一个自然的开覆盖. 首先对于 X 的每一个 n 维直角 Coxeter 胞腔 e^n/W , 我们取一个缩小的开集 $U(e^n/W)$. 则 $X - \bigcup U(e^n/W)$ 可以形变收缩到 X 的 $(n-1)$ -骨架上去. 进一步对于 X 的每一个 $n-1$ 维直角 Coxeter 胞腔 e^{n-1}/W , 我们同样选取一个开集 $U(e^{n-1}/W)$ 使得 $X - \bigcup U(e^n/W) - \bigcup U(e^{n-1}/W)$ 可以形变收缩到 X 的 $(n-2)$ -骨架上去. 归纳可得 X 的一个开覆盖, 并且其中每一个开集对于 X 的某一个胞腔 (每一个开集可以形变到 X 的某一个胞腔上). 另外, 我们始终假设, 在这个开覆盖上存在 X 的一个相容的 orbispace 结构.

设 $\pi : E \rightarrow X$ 是 X 上的一个实 orbifold 向量丛, 则 $\pi|_{X_{reg}} : E|_{X_{reg}} \rightarrow X_{reg}$ 是 X_{reg} 上的一个通常的向量丛. 换句话说, 直角 Coxeter 复形 X 上的任意一个实 orbifold 向量丛可以视为 X_{reg} 上的一个通常的实向量丛的延拓.

令 $\pi' = \pi|_{X_{reg}} : E' \rightarrow X_{reg}$ 为 X_{reg} 上可以延拓到 $\pi : E \rightarrow X$ 的实 orbifold 向量丛. 首先设 $\pi : E(D^1/\mathbb{Z}_2) \rightarrow D^1/\mathbb{Z}_2$ 为 D^1/\mathbb{Z}_2 上的一个实 orbifold 向量丛. 根据引理 4.3, 设 $p = \pi|_{D^1/\mathbb{Z}_2} : E(D^1/\mathbb{Z}_2) \rightarrow D^1/\mathbb{Z}_2$ 的示性矩阵为对角阵 $A(p)$. 接下

来, 我们将向量丛 $E(D^1/\mathbb{Z}_2)$ 和 E' 沿着 $E(D^1/\mathbb{Z}_2)|_{\partial D^1/\mathbb{Z}_2}$ 和 $E'|_{\overline{\partial\Phi(D^1/\mathbb{Z}_2)}}$ 拼接起来得到 $X_{reg} \cup D^1/\mathbb{Z}_2$ 上的一个实 orbifold 向量丛. 进一步, 我们可以得到 $X_{reg} \cup X_{sing}^1$ 上的一个实 orbifold 向量丛, 不妨仍记为 E' , 其中 X_{sing}^1 表示 X 的所有一维的奇异 Coxeter 胞腔.

设 D^2/W 是 X 的一个二维的奇异 Coxeter 胞腔, 进一步不妨设 D^2/W 在 X 中的边界包含两个一维的奇异 Coxeter 胞腔 D_1^1/\mathbb{Z}_2 和 D_2^1/\mathbb{Z}_2 (D_1^1/\mathbb{Z}_2 和 D_2^1/\mathbb{Z}_2 可能对应同一个奇异 Coxeter 胞腔). 则 E' 可以延拓到 $X_{reg} \cup X_{sing}^1 \cup D^2/W$ 上的向量丛当且仅当 $\pi|_{D^2/W}$ 上的向量丛的示性矩阵为 $(A_1; A_2)$, 此时 A_1, A_2 分别表示 $\pi|_{e_1^1/\mathbb{Z}_2}$ 和 $\pi|_{D_2^1/\mathbb{Z}_2}$ 的示性矩阵. 特别的当 e_1^1/\mathbb{Z}_2 和 e_2^1/\mathbb{Z}_2 对应同一个奇异 Coxeter 胞腔且 $W = \mathbb{Z}_2$ 时, 则 $\pi|_{D^2/W}$ 上的向量丛的示性矩阵为 $A_1 = A_2$. 需要注意的是, $\pi|_{e^2/W}$ 上的向量丛与 $\pi|_{\partial\Phi(e^2/W)}$ 上的向量丛相容, 意味着 A_1, A_2 对应的线性变换可以同时对角化, 即 $\pi|_{e^2/W}$ 上的向量丛可以由 $(A_1; A_2)$ 刻画.

由归纳, 我们可以得到 $X = X_{reg} \cup X_{sing}^1 \cup \cdots \cup X_{sing}^n$ 上的一个实 orbifold 向量丛. 对于 X 上的任意一个直角 Coxeter 胞腔 $e^l/(\mathbb{Z}_2)^k$, $\pi|_{e^l/(\mathbb{Z}_2)^k}$ 上的向量丛的示性矩阵可用 $(A_1; \cdots; A_k)$ 表示, 此时 A_1, \cdots, A_k 为 π 限制在相应的一维直角 Coxeter 胞腔的示性矩阵.

如前文所述, 设 H 是 X/X_{reg} 的一个分支, $\mathcal{N}(H)$ 是 H 的神经. 设 H 为 n 维的, $\mathcal{G}(F_i) \cong \mathbb{Z}_2$ 是 H 中的余 1 维面 F_i 的局部群. 设 $\pi: E \rightarrow X$ 是 X 上的一个实 orbifold 向量丛, 则自然诱导 H 上的一个实 orbifold 向量丛, 记为 $\pi_H: E_H \rightarrow H$. 由上面讨论, 对于 H 的所有余一维面, 存在一族固定对应的对角矩阵, 使得 π_H 限制在 H 中的任意一个直角 Coxeter 胞腔上的实 orbifold 向量丛对应的示性矩阵为相应一维 Coxeter 胞腔对应的示性矩阵的组合. 即对 H 我们有 $m \times \eta$ 示性矩阵

$$C_H = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^\eta \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^\eta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^1 & x_m^2 & \cdots & x_m^\eta \end{pmatrix}_{m \times \eta}$$

其中 $\text{diag}(x_1^i, \cdots, x_m^i)$ 表示 $F_i \in \mathcal{N}(H)$ 对应的示性矩阵, η 为 H 余一维面的个数 (即 $\mathcal{N}(H)$ 顶点的个数).

则 C_H 决定了 $D^\eta/(\mathbb{Z}_2)^\eta$ 上的一个实 orbifold 向量丛, 记为 $\pi_{C_H}: E_{C_H} \rightarrow D^\eta/(\mathbb{Z}_2)^\eta$. 如果 H 的神经是它奇点集的一个三角剖分, 则 H 可以嵌入到 $D^\eta/(\mathbb{Z}_2)^\eta$ 中去. (和单

多面体嵌到高维方块类似, 参考 [15, P93]). 此时 $\pi_H : E_H \rightarrow H$ 是 $\pi_{C_H} : E_{C_H} \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^n$ 在 $i(H)$ 上的限制.

引理 4.9. 如果 H 的神经是它奇点集的一个三角剖分, 则 H 上的任意一个实 orbifold 向量丛都可以实现为 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^n$ 的一个实 orbifold 向量丛 E_{C_H} 的拉回.

推论 4.10. 单凸多面体 P 作为一个直角 Coxeter orbifold, 则有嵌入 $i : P \rightarrow D^n/(\mathbb{Z}_2)^n$, 其中 n 为 P 的 facet 的个数. P 上面的任意一个实 orbifold 向量丛都可被视为 $D^n/(\mathbb{Z}_2)^n$ 上一个实 orbifold 向量丛在 $i(P)$ 上的限制.

一般地, 设 $j : N(H) \rightarrow N(D^n/(\mathbb{Z}_2)^n) = \Delta^{n-1}$ 为单纯映射, 则有诱导映射

$$j^* : H^*(D^n/(\mathbb{Z}_2)^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{R}_H < H^*(X; \mathbb{Z}_2).$$

最后我们定义 π_H 的 orbifold Stiefel-Whitney 示性类为

$$w(E_H) = j^*(w(E_{C_H})) = \prod \chi_i(C_H) \in \mathcal{R}_H < H^*(X; \mathbb{Z}_2) \quad (4-7)$$

引理 4.11. $w(E_H)$ 是良定的.

证明: 设 F_1, F_2, F_3 为 H 的三个余一维面并且满足 $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset, F_2 \cap F_3 \neq \emptyset$ 和 $F_1 \cap F_3 = \emptyset$ (例如图 4-2), 则 $s_1 s_3 = 0 \in \mathcal{R}_H$. 如果 $(A_1; A_2; A_3)$ 含有子矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (或者 $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$). 则按照讨论, 这个子矩阵可以替换为 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (或者 $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$). 所以此时, 实 orbifold 向量丛 E_H 可以由两个本质上不同矩阵表示, 即两个在忽略行序的前提下仍不相同的矩阵.

但是, $s_1 s_3 = 0$ 表明

$$(1 + f(s) + s_1)(1 + f(s) + s_3) = (1 + f(s) + s_1 + s_3)(1 + f(s))$$

其中 $f(s)$ 表示一个不含变量 s_1, s_3 的一次多项式. 因此矩阵的选取不同并不影响实 orbifold Stiefel-Whitney 类 $w(E_H) = j^*(w(E_{C_H}))$ 的取值. 所以, $w(E_H)$ 是良定的. \square

这个引理说明, 对 H 上的一个实 orbifold 向量丛来说, 它的示性矩阵可能不唯一, 但 $w(E_H) \in \mathcal{R}_H$ 是唯一的.

例 4.5. 设 B 为图 4-2 中的直角 Coxeter 复形, $\pi_1 : E_1 \rightarrow B$ 为 B 上一个 2 维实 orbifold 向量丛, 对应地, $A_1 = A_3 = \text{diag}(-1, 1)$, $A_2 = E$; $\pi_2 : E_2 \rightarrow B$ 为 B 上另一个 2 维实 orbifold 向量丛, 对应地, $A_1 = \text{diag}(-1, 1)$, $A_2 = E$, $A_3 = \text{diag}(1, -1)$. 则 $E_1 \cong E_2$, 但它们的示性矩阵不同. 此时

$$w(E_1) = w(E_2) = (1 + s_1)(1 + s_3) = 1 + s_1 + s_3 \in H^*(B; \mathbb{Z}_2)$$

其中 $H^*(B; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[s_1, s_2, s_3]/(s_1^2, s_2^2, s_3^2, s_1 s_3)$.

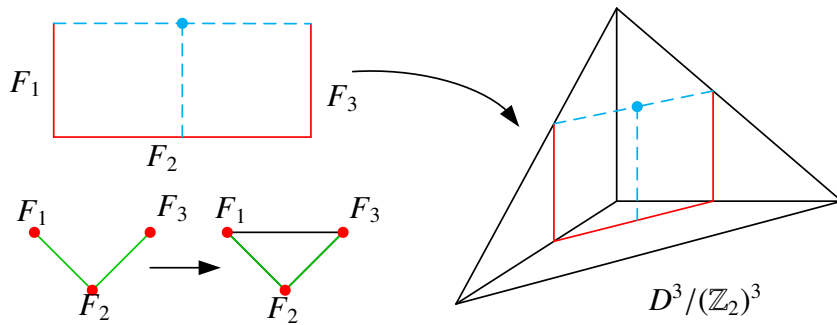


图 4-2: 直角 Coxeter 复形上的实 orbifold 向量丛

定义 4.4. 直角 Coxeter 复形 X 上的实 orbifold 向量丛的 *orbifold Stiefel-Whitney* 示性类定义为:

$$w(E) = w(E(X_{reg})) \cdot \prod_H w(E_H). \quad (4-8)$$

注 4.7. 特别地, 当 X 是一个 CW 复形时, 对应的 $w(E)$ 恰好是 $E \rightarrow X$ 上的通常的 Stiefel-Whitney 类.

命题 4.12. 设 $E_1 \rightarrow B$, $E_2 \rightarrow B$ 直角 Coxeter 复形 B 上的两个实 orbifold 向量丛. 则

$$\omega(E_1 \oplus E_2) = \omega(E_1)\omega(E_2)$$

证明: 正则部分的证明对应通常 CW 复形的情况. 奇异部分的证明与命题 4.7 类似. \square

4.2.4 公理化和例子

直角 Coxeter 复形上的实 orbifold 向量丛的 orbifold Stiefel-Whitney 类满足相似的公理化性质.

命题 4.13. 对直角 Coxeter 复形 B 上的任意一个实 orbifold 向量丛 $E \rightarrow B$, 存在唯一的且只依赖于 E 的同构型的一族函数列 $w_1, w_2, \dots, w_i(E) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, 满足

- (a) 对任意拉回 $f^*(E)$, $w_i(f^*(E)) = f^*(w_i(E))$.
- (b) $w(E_1 \oplus E_2) = w(E_1) \cup w(E_2)$, 其中 $w = 1 + w_1 + w_2 + \dots \in H^*(B; \mathbb{Z}_2)$.
- (c) $w_i(E) = 0, i > \dim E$.
- (d) 对典范线丛 $E \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ 来说, $w_1(E)$ 为 $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ 的生成元. 同时, 对非平凡线丛 $\tilde{E} \rightarrow D^1/\mathbb{Z}_2$ 来说, $w_1(\tilde{E})$ 是 $H^1(D^1/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ 的生成元.

注 4.8. 我们定义的 orbifold Stiefel-Whitney 示性类是通常 Stiefel-Whitney 示性类的推广.

接下来, 我们给这里直角 Coxeter 复形上的 orbifold Stiefel-Whitney 示性类的一个应用. 首先, 我们需要下面这个引理.

引理 4.14 (引理 3.6, [64]). 如 $K = K_1 * K_2$ 是一个单纯球, 则 K_1 和 K_2 也是单纯球.

命题 4.15. 设 P 是一个 n 维直角 Coxeter orbifold, 它的底空间是一个 n 维实心球, 它的神经是一个 $n-1$ 维单纯球. 则 P 可以分解为两个直角 Coxeter orbifold 的乘积, 即 $P \cong P_1^{n_1} \times P_2^{n_2}$, 当且仅当 $w_n(TP) = w_{n_1}(TP_1) \cdot w_{n_2}(TP_2)$.

证明: 首先存在 P 的一个直角 Coxeter 胞腔分解 (方块分解), 使得对应的胞腔链复形中的边缘映射都为零. 则

$$H^i(P; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{f_{n-i}}$$

进一步,

$$H^*(P; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[s_1, \dots, s_m]/(I_P + J_P)$$

其中 I_P 为 P 的 Stanley-Reisner 理想, $J_P = (s_i^2, \forall i)$, m 为 P 的余一维面的个数. 则

$$w(TP) = \prod_{i=1}^m (1 + s_i),$$

$$w_n(TP) = \sum_{F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \in \text{Vert}(P)} s_{i_1} \cdots s_{i_n}$$

若 $w_n(TP) = f(s_1, \dots, s_m) \cdot g(s_1, \dots, s_m)$. 由于 $w_n(TP)$ 是齐次的, 故 f 和 g 也是齐次的. 设 $\deg(f) = n_1, \deg(g) = n_2$, 其中 $n_1 + n_2 = n$. 则

$$w_n(TP) = \sum_{F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \in \text{Vert}(P)} s_{i_1} \cdots s_{i_n} = \left(\sum s_{j_1} \cdots s_{j_{n_1}} \right) \cdot \left(\sum s_{k_1} \cdots s_{k_{n_2}} \right)$$

其中 $f = \sum s_{j_1} \cdots s_{j_{n_1}}, g = \sum s_{k_1} \cdots s_{k_{n_2}}$. 注意到, 对于 f 中包含的任意变量 s_j 和 g 中包含的任意变量 s_k , 有 $s_j \neq s_k, s_j s_k \neq 0$. 设 $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_g$ 分别为 f 和 g 中变量对应的余一维面. 则 $\mathcal{F}(P) = \mathcal{F}_f \sqcup \mathcal{F}_g$. 此时 P 的神经 $\mathcal{N}(P)$ 可以分解为它的两个子复形 K_1 和 K_2 的连结 (join), 其中 K_1 和 K_2 分别是由 \mathcal{F}_f 和 \mathcal{F}_g 张成的. 根据引理 4.14 知, K_1 和 K_2 也是单纯球, 从而可以实现为两个直角 Coxeter orbifold 的神经. 因此 P 可以实现为两个直角 Coxeter orbifold 的乘积.

反过来, 如果 $P^n \cong P_1^{n_1} \times P_2^{n_2}$, 则 $H^*(P; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(P_1; \mathbb{Z}_2) \otimes H^*(P_2; \mathbb{Z}_2)$. 此时 $w(TP) = w(TP_1) \cdot w(TP_2)$, 因此 $w_n(TP) = w_{n_1}(TP_1) \cdot w_{n_2}(TP_2)$. \square

例 4.6 (坏的直角 orbifold 上的 orbifold Stiefel-Whitney 示性类). 设 $B = e^0 \cup e^1 / \mathbb{Z}_2 \cup e^2 / (\mathbb{Z}_2)^2$ 为一个“水滴”. $\pi: E \rightarrow B$ 为 B 上的一个 m 维实 orbifold 向量丛. 设 $\pi|_{e^1/\mathbb{Z}_2}$ 的示性矩阵为 $A = (x_1, \dots, x_m)^T, x_i = \pm 1$, 则 $\pi|_{e^2/(\mathbb{Z}_2)^2}$ 的示性矩阵为 $(A; A)$. 此时

$$w(E) = \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{1-x_i}{2} s \right) = 1 \text{ or } 1 + s \in \mathbb{Z}_2[s]/(s^2)$$

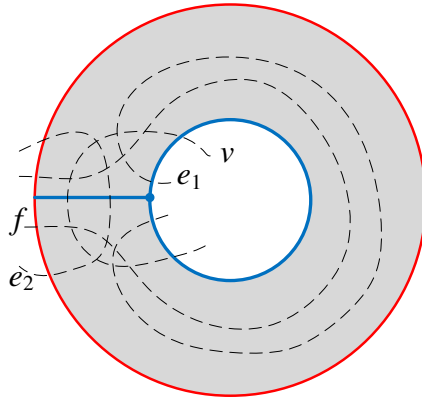


图 4-3: $S^1 \times [-1, 1] / \mathbb{Z}_2$

例 4.7. 设 Q 是群 \mathbb{Z}_2 作用在 $S \times [-1, 1]$ 下的商 orbifold, 其中群 \mathbb{Z}_2 作用是由变换 $\rho: S \times [-1, 1] \rightarrow S \times [-1, 1]$ 给出, 其中 $\rho(x, y) \rightarrow (x, -y)$. 给 $S^1 \times [-1, 1] / \mathbb{Z}_2$ 一

个如图 4-3 的直角 Coxeter 胞腔分解: $S^1 \times [-1, 1]/\mathbb{Z}_2 = v \cup e_1 \cup e_2 \cup f$, y 一个 0 胞腔, 一个正则 1 胞腔, 一个奇异 1 胞腔, 一个奇异 2 胞腔. 设对应的开集分别为 $\{U(v), U(e_1), U(e_2), U(f)\}$.

下面我们考虑 $S^1 \times [-1, 1]/\mathbb{Z}_2$ 的切丛. 首先底空间 $S^1 \times [0, 1] \simeq U(v) \cup U(e_1) = S^1$ 的切丛是平凡的. $U(e_2) \simeq e^1/\mathbb{Z}_2 \times (0, 1)$ 的 orbifold 切丛为丛 \widetilde{E} 和 $(0, 1)$ 上平凡线丛的乘积, $TU(e_2) \cong \widetilde{E} \times (\mathbb{R} \times (0, 1))$. 接下来, 我们将 $TU(e_2)$ 和 $T(U(v) \cup U(e_1))$ 拼接起来. 最后, 将 $TU(f) \cong \widetilde{E} \times Te^1$ 拼上去. 这样我们就得到了 $S^1 \times [-1, 1]/\mathbb{Z}_2$ 上的切丛 $T(S^1 \times [-1, 1]/\mathbb{Z}_2) = T(U(v) \cup U(e_1)) \cup TU(e_2) \cup TU(f)$.

$$H^i(S^1 \times [-1, 1]/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & i = 0, 2 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & i = 1 \\ 0, & . \end{cases}$$

设 $H^1(S^1 \times [-1, 1]/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ 的生成元分别为 t, s , 则

$$w(T(S^1 \times [-1, 1]/\mathbb{Z}_2)) = w(TS^1)(1 + s) = 1 + s.$$

注意 Q 上的 orbifold 向量丛的 Stiefel-Whitney 类可能取值为 $(1 + t)(1 + s)$, 此时 $w_2 = ts \in H^2(S^1 \times [-1, 1]/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ 是非平凡的.

第五章 直角 Coxeter orbifold 及其覆 叠流形上的几何

设 Q 是一个单手柄. 在这一小节中, 我们将给出 Q 上的一个典型的覆叠流形 M 的构造. 这个构造来源 Davis, 参考 [31]. 然后, 在始终假设 M 是一个光滑的黎曼流形的前提下, 我们给出 M 上非正曲率, 双曲曲率, 正 (数量) 曲率存在性与 Q 上的组合之间的关系. 这是 small cover 上类似结论的推广.

5.1 构造和定义

5.1.1 单 orbifold 上的覆叠流形

首先, 我们给出一些构造和定义. 设 Q 是一个 n 维 orbifold, $\mathcal{F}(Q) = \{F_1, \dots, F_m\}$ 是 Q 的 facet 集. 映射

$$\lambda : \mathcal{F}(Q) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^k$$

其中 $n \leq k \leq m$, 称为 Q 上的一个染色 (或示性函数), 如果对 Q 中的任意余 l 维面 $f^l = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_{n-l}}$, $\{\lambda(F_{i_1}), \dots, \lambda(F_{i_{n-l}})\}$ 在 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 是线性无关的. 则 Q 的每一个余 l 维面 f^l 都对应了一个 $\{\lambda(F_{i_1}), \dots, \lambda(F_{i_{n-l}})\}$ 生成的群 $G_{f^l} \cong (\mathbb{Z}_2)^l$. 故染色映射 λ 和 Q 的直角 Coxeter 结构是相容的.

则我们定义 Q 关于染色 λ 的一个覆叠流形为

$$M(Q, \lambda) = Q \times (\mathbb{Z}_2)^k / \sim \tag{5-1}$$

其中

$$(x, g) \sim (y, h) \iff \begin{cases} x = y, g = h & \text{如果 } x \in \text{Int}(|Q|), \\ x = y, gh^{-1} \in G_f & \text{如果 } x \in f \subset \partial|Q|. \end{cases}$$

本质上, 这是 Davis 的“基本构造”中的一种情况, 参考 [31, 第 5 章]. 根据 [31, 命题 10.1.10], 我们知道 $M(Q, \lambda)$ 是一个 n 维闭流形, 并且自然地有一个 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 作用使得商 orbifold 恰好是 Q . 因此, 单 orbifold 都是非常好的 orbifold (very good orbifold, 可以被流形有限覆叠的 orbifold). 一般地, 一个 nice 的单 orbifold 一定是一个非常好的 orbifold, 但一个非常好的单 orbifold 不一定是一个 nice 的带角流形.

引理 5.1. 单 orbifold Q 是 $M(Q, \lambda)$ 的一个全局商.

进一步, 如果 $k = n$, 则我们称 $M(Q, \lambda)$ 是 Q 上的一个小覆叠流形, 这是单多面体上的 small cover 概念的推广 ([36]). 注意, 对一般的单手柄甚至单面体来说, 上面的小覆叠流形不一定存在, 参考 [36, 反例 1.22]).

进一步, 如果 $k = m$, 此时对任意 facet F_i , 取 $\lambda(F_i) = e_i$, 则 $M(Q, \lambda)$ 始终是一个流形. 则我们称 $M(Q, \lambda)$ 是 Q 上的一个 manifold double ([34, 命题 2.4]). 这时, 我们将 $M(Q, \lambda)$ 简记为 M_Q 或 M . manifold double 是单多面体上的实 moment angled manifolds 概念的推广 ([15]).

目前有许多关于 $M(Q, \lambda)$ (特别 Q 是一个单多面体) 的几何, 拓扑与 Q 上的几何、拓扑及组合之间联系的工作. 例如, 可以参考 [10, 15, 31, 35, 36, 38, 46, 59, 65, 75, 94, 95]. 其他类似的课题和观点, 可以参考 [8, 11, 18, 25, 26, 48, 66].

接下来, 我们考虑 Q 是一个单手柄时的情况. 则我们有下面结论.

引理 5.1. 一个单手柄的 manifold double 一定是可定向的.

证明: 设 Q 是一个 m 维的, 亏格 g 的, 有 m 个 facet 的单手柄. P_Q 为一组 cutting belt 对应的单多面体. 设 \mathcal{F}_B 为 cutting belt 在 P_Q 中的复制. 设 $M = M(Q, \lambda) = Q \times (\mathbb{Z}_2)^m / \sim$ 是 Q 上的 manifold double. 下面我们证明:

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

这里我们使用 Nakayama-Nishimura 的方法, 参考 [74, 定理 1.7]. P_Q 的面结构诱导了 M 上的一个自然的胞腔分解. 我们记 $\{(C_k(M), \partial_k)\}$ 为相应的链复形. 则 $C_n(M)$ 和 $C_{n-1}(M)$ 分别是 $\{P_Q\} \times (\mathbb{Z}_2)^m = \{(P_Q, g) \mid g \in (\mathbb{Z}_2)^m\}$ 和 $\mathcal{F}(P_Q) \times (\mathbb{Z}_2)^m / \sim' =$

$\{[F, g] \mid F \in \mathcal{F}(P_Q), g \in (\mathbb{Z}_2)^m\}$ 生成的自由链群, 其中 $\mathcal{F}(P_Q) \times (\mathbb{Z}_2)^m$ 上的等价关系定义为

$$\begin{cases} (F, g) \sim' (F, g \cdot e_F) & \text{if } F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B, \\ (B^+, g) \sim' (B^-, g) & \text{if } B^+, B^- \in \mathcal{F}_B. \end{cases}$$

注意到, 对任意 $F' \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$, 存在一个 $F \in \mathcal{F}(Q)$ 使得 $F' = F$ 或者 $F' \subsetneq F$, 因此 F' 和 F 有相同的颜色 $e_F \in (\mathbb{Z}_2)^m$. 对任意 $B \in \mathcal{F}_B$, 由于 $\text{Int}B \subset \text{Int}(Q)$, 所以我们可以将 B 的颜色定义为单位元 $\mathbf{e}_0 \in (\mathbb{Z}_2)^m$. 换言之, Q 上的染色 $\lambda : \mathcal{F}(Q) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^m$ 诱导了 P_Q 上的一个染色 $\lambda' : \mathcal{F}(P_Q) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^m$ 使得对任意 $F' \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$, $e_{F'} = \lambda'(F') = \lambda(F) = e_F$ 其中 $F \in \mathcal{F}(Q)$, $F' \subset F$; 对任意 cutting belt 的复制 $B \in \mathcal{F}_B$, $\lambda'(B) = \mathbf{e}_0$.

我们给所有 facet F_i 和所有 cutting belt 的复制 B_i^\pm 一个定向, 使得 B_i^+ 和 B_i^- 的定向相反, 则

$$\begin{aligned} \partial P_Q &= \sum_{F \in \mathcal{F}(P_Q)} F = F_1 + \cdots + F_{m'} + B_1^+ + \cdots + B_g^+ + B_1^- + \cdots + B_g^- \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B} F \end{aligned}$$

这里 m' 是指 $\mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$ 所有 facet 的个数.

设 $c_n = \sum_{g \in (\mathbb{Z}_2)^m} n_g(P, g)$ 为 $C_n(M)$ 中的一个 n -闭链, 其中 $n_g \in \mathbb{Z}$, 则

$$\partial(c_n) = \left[\sum_{g \in (\mathbb{Z}_2)^m} n_g \sum_{F \in \mathcal{F}(P_Q)} (F, g) \right] = \sum_{[F, g] \in ((\mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B) \times (\mathbb{Z}_2)^m) / \sim'} (n_g + n_{ge_F}) [F, g] = 0$$

因此, 对任意 facet $F \in \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$ 和 $g \in (\mathbb{Z}_2)^m$, 有 $n_g = -n_{ge_F}$. 设 $l(g)$ 是 g 在生成元集 $\{e_F\}$ 上的字符串长度. 则对任意 $g \in (\mathbb{Z}_2)^m$, 存在一个 $I_g = \{F_{i_1}, \dots, F_{i_k}\} \subset \mathcal{F}(P_Q) - \mathcal{F}_B$ 使得 $g = \prod_{F \in I_g} e_F$. 则

$$n_g = -n_{ge_{F_{i_1}}} = n_{ge_{F_{i_1}} e_{F_{i_2}}} = \cdots = (-1)^{l(g)} n_{g \prod_{F \in I_g} e_F} = (-1)^{l(g)} n_{\mathbf{e}_0}$$

因此 $c_n = n_{\mathbf{e}_0} \sum_{g \in (\mathbb{Z}_2)^m} (-1)^{l(g)} (P, g)$. 所以 $H_n(M; \mathbb{Z}) = \ker \partial_n \cong \mathbb{Z}$, 此时 $\sum_{g \in (\mathbb{Z}_2)^m} (-1)^{l(g)} (P, g)$ 为一个生成元. 所有 M 是可定向的. \square

5.1.2 黎曼流形上的曲率

这一小节, 我们简单介绍黎曼流形上的截面曲率, Ricci 曲率和数量曲率的定义, 参考 [1].

设 (M, g) 是一个光滑的黎曼流形, $R(X, Y, Z, W)$ 为 (M, g) 上的曲率张量. 设 Π 为切空间 $T_p M$ 的一个二维子空间, 设 X, Y 为它的一组基. 则定义 Π 的截面曲率为

$$K(\Pi) := \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X \wedge Y|^2}$$

设 (M, g) 是一个完备的黎曼流形, 如果 (M, g) 有常截面曲率 $+1$, 则称 (M, g) 是球面的; 如果 (M, g) 有常截面曲率 0 , 则称 (M, g) 是平坦的; 如果 (M, g) 有常截面曲率 -1 , 则称 (M, g) 是双曲的.

对曲率张量 R 的 $1, 3$ 指标求 trace, 则可以得到一个二阶协变张量场, 称为 Ricci 张量.

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(e_i, X, e_i, Y)$$

其中 $\{e_i\}$ 为标准正交基. 如果 X 为单位向量, 则称 $\text{Ric}(X, X)$ 为 X 方向的 Ricci 曲率. Ricci 曲率为 $n-1$ 个截面曲率之和.

对 Ricci 张量求 trace 得到 (M, g) 上的一个函数 S , 称为 (M, g) 上的数量曲率.

$$S = \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_i, e_j).$$

5.2 非正曲率

5.2.1 结论

在第 2.2.4 节, 我们证明了一个单手柄 Q 的万有覆叠 \tilde{Q} 是非正曲率的当且仅当 Q 是旗性的. 在这一小节, 我们将证明下面命题.

命题 5.2. 一个单手柄 Q 的 manifold double M 是非正曲率的当且仅当 Q 是旗性的.

首先我们回忆非正曲率的定义. 一个测地度量空间 X 是非正曲率的 是指它是一个局部 CAT(0) 空间. 一般地, 我们称 X 的 (Alexandrov) 曲率 ≤ 0 是指它是一个 CAT(k) 空间, 参考 [14, 定义 1.2, P159]. 下面的比较定理说明在一个光滑黎曼流形是非正 Alexandrov 曲率的等价于它是一个非正截面曲率的.

定理 5.3 ([14, 定理 1A.6]). 设 N 是一个光滑黎曼流形, 则它的 *Alexandrov* 曲率 $\leq k$ 当且仅当它的截面曲率 $\leq k$.

下面, 我们给出关于非正曲率空间的一些结论.

定理 5.4 ([77, 推论 6.2.4]). 如果一个完备黎曼流形 (N, g) 是非正曲率的, 则它的基本群是无挠的.

定理 5.5 (Gromov 引理, [31, 推论 I.6.3]). 一个分段欧式的方块复形是非正曲率的当且仅当它的每个顶点的 *link* 都是旗性的.

定理 5.6 (Cartan-Hadamard, [14]). 非正曲率空间都是非球面的.

5.2.2 证明

回忆一个方块复形是指一个 CW 复形 X 满足所有的胞腔都是方块且对任意两个 $c, c' \in X$, $c \cap c'$ 是 c 和 c' 的一个公共面. 类似地, 我们可以定义直角 *Coxeter* 方块复形, 即所有的胞腔都是标准反射作用在方块 $[-1, 1]^n$ 上的轨道. 例如, 一个单多面体作上的标准的方块分解就是它作为直角 *Coxeter orbifold* 的一个直角 *Coxeter* 方块分解. 命题 5.2 的证明, 就是首先构造单手柄 Q 上的一个直角 *Coxeter* 方块分解, 然后通过覆叠映射, 得到 manifold double M 上的一个方块胞腔分解. 然后通过 Gromov 引理和 Cartan-Hadamard 定理来证明命题 5.2.

设 B_1, \dots, B_g 为 Q 的一组 cutting belt, P_Q 为对应的单多面体. 假设 $M = Q \times (\mathbb{Z}_2)^m / \sim$ 是 Q 上的光滑的 manifold double.

对每一个 cutting belt B_i , 取它的一个正则邻域 $N(B_i) \cong B_i \times [-1, 1]$. 则 $N(B_i)$ 也是一个单多面体. 在 Q 中挖去这些 $N(B_i)$, 则可以得到单多面体 P_Q . 下面我们分两步来构造 M 上的一个方块分解.

第一步. 构造 Q 上的一个直角 *Coxeter* 方块分解 $C(Q)$.

首先将 Q 分解为

$$Q = P_Q \cup \left(\bigcup_{i=1}^g N^+(B_i) \cup N^-(B_i) \right)$$

其中 $N^+(B_i) = B_i \times [0, 1]$, $N^-(B_i) = B_i \times [-1, 0]$, 满足 $N(B_i) = N^+(B_i) \cup N^-(B_i)$. 则 P_Q 和所有 $N^+(B_i)$ 上的方块分解就决定了 Q 上的一个直角 *Coxeter* 方块分解 $C(Q)$. 具

体来说, P_Q 和所有 $N^\pm(B_i)$ 的锥点是 $C(Q)$ 中的正则 0 胞腔. $C(Q)$ 中的 $k(> 0)$ 维直角 Coxeter 方块分为两种:

- P_Q 和所有 $N^\pm(B_i)$ 的与任意 $B \in \{B_i \times \{-1, 1\}\}$ 都不相交的方块胞腔. 这类的方块胞腔都和 Q 的某一个余 k 维面 f^{n-k} 横截相交, 并具有 $e^k/(\mathbb{Z}_2)^k$ 形式.
- P_Q 和所有 $N^\pm(B_i)$ 的与某一个 $B \in \{B_i \times \{-1, 1\}\}$ 横截相交的方块胞腔沿着 B 粘成的胞腔. 这类胞腔都具有形式 $e^k/(\mathbb{Z}_2)^{k-1}$.

第二步. 通过覆叠映射 $p: M \rightarrow Q$, $C(Q)$ 诱导了 M 上的一个胞腔分解, 记为 $C(M)$.

对任意 $c \in C(Q)$, $p^{-1}(c)$ 的任意连通分支都为一个方块胞腔. 且对任意这样两个方块胞腔, 它们如果相交则交一定是公共面. 所以 $C(M)$ 为 M 的一个方块复形结构. 特别地, $C(M)$ 中的顶点都是 $C(Q)$ 中锥点的提升.

引理 5.2. 设 v 为 $C(M)$ 中的一个顶点. 则 $Lk(v)$ 组合等价于下面三个神经之一: $N(P_Q)$, $N(N^+(B_i))$ 和 $N(N^-(B_i))$.

证明: 如果 $p(v)$ 为 P_Q 的锥点, 则每个与 v 相交的 $k(> 0)$ -方块都诱导了 $N(P_Q)$ 中的一个 $(k-1)$ -单形, 对应 P_Q 的某个 $n-k$ 维面. 所以 $Lk(v) \cong N(P_Q)$. 类似地, $p(v)$ 为 $N^+(B_i)$ 或者 $N^-(B_i)$ 的锥点, 则 $Lk(v) \cong N(N^+(B_i))$ 或者 $N(N^-(B_i))$. \square

由 Gromov 引理知, M 是非正曲率地当且仅当 $C(M)$ 中的每个顶点的 link 都是旗性的. 根据引理 5.2, 当且仅当所有的 $N(P_Q)$ 和 $N(N^\pm(B_i))$ 是旗性的, 即 P_Q 和 $N^\pm(B_i)$ 是旗性的. 这 Q 是旗性的等价. 命题 5.2 得证.

5.3 严格负曲率

这一小节, 我们进一步考虑 M 上的严格负曲率. 下面命题, 是我们这节需要证明的结论.

命题 5.7. 一个单手柄 Q 的 manifold double M 是严格负曲率的, 则 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt.

注 5.1. 当 Q 是一个单多面体时, 则 M 是严格负曲率的, 当且仅当 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt. 这是 Davis 的一个结论.

定理 5.8 (Gromov [49]). 设 C 为一个方块复形满足 C 的每一个顶点都是旗性的且不包含任何 \square . 给 C 一个 $(N, -\epsilon)$ 几何, 即 C 中的每个方块胞腔都和 $-\epsilon$ 曲率的双曲空间中的单位方块等距同构. 如果 ϵ 充分小, 则 $K(C) \leq -\epsilon$.

我们倾向认同命题 5.7 中条件是一个充分必要条件. 但我们找不到 M 上的一个合适的方块分解, 来应用 Gromov 的结论. 事实上, 这和弱双曲化猜想有关, “设 N 为一个闭的非球面流形. 则要么 $\pi_1(N)$ 包含 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群, 要求 $\pi_1(N)$ 是一个 Gromov 双曲群”. 参考 [58, 猜想 20.12].

接下来, 我们利用下面定理证明命题 5.7.

定理 5.9 (Preissmann, 1943 [77, 定理 6.2.6]). 设 (N, g) 是一个紧的负曲率流形, 则 $\pi_1(N)$ 的任意 *abel* 群都是循环群.

引理 5.10. 设 M 是一个单手柄 Q 的 *manifold double*. 则 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < \pi_1(M)$ 当且仅当 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < \pi_1^{orb}(Q)$.

证明: 如果 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < \pi_1(M)$, 则由短正合列

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1^{orb}(Q) \xrightarrow{\lambda} (\mathbb{Z}_2)^m \longrightarrow 1$$

知 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < \pi_1(M) < \pi_1^{orb}(Q)$.

反之, 如果 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < \pi_1^{orb}(Q)$, 则由定理 B 知, Q 中存在一个 \square -belt, 且 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < \pi_1^{orb}(Q)$ 是 \square -belt 的两组对边生成的. 所以可以记 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的生成元为 $x = s_1 s_3$ 和 $y = s_2 t_1 t_2 \cdots t_k s_4 t_k^{-1} \cdots t_2^{-1} t_1^{-1}$ 其中 $t_i \in \{t_B^{\pm 1}\}$. 则 $\lambda(x^2) = \lambda(y^2) = 1$. 故 $x^2, y^2 \in \ker \lambda \cong \pi_1(M)$. 所以存在 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < \pi_1(M)$. \square

如果 M 是负曲率的, 根据命题 5.2, Q 是旗性的. 进一步, 如果 Q 中包含一个 \square -belt, 则根据定理 B, $\pi_1^{orb}(Q)$ 包含子群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 由引理 5.10, $\pi_1(M)$ 包含子群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 所以根据定理 5.9, M 不是负曲率的. 所以 Q 不包含任何 \square -belt.

特别地, 当 Q 是一个单多面体时. Q 上的标准方块分解诱导了 M 上的一个方块复形结构, 记为 $C(M)$. 任意点 $v \in C(M)$ 的 link 都是 $N(Q)$, 所以根据上面 Gromov 的结论知, 如果 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt, 则 M 是负曲率的. 命题 5.7 证毕.

5.4 双曲曲率

5.4.1 结论和证明

在这一节, 我们首先证明下面这个结论.

命题 5.11. 设 M 是一个 3 维单手柄 Q 上的 *manifold double*. 则 M 是双曲的当且仅当 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt.

注 5.2. 和这个命题类似的结论, 可以参考 [61] 和 [76].

证明: 结合 Perelman 的工作和 Thurston 的双曲化定理知, 一个闭的可定向的三维流形是双曲的当且仅当它是非球面的和非环面的 (即 $\pi_1(M)$ 中不包含子群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). 根据引理 5.1 知, M 可定向. 又由定理 A, 定理 B 和引理 5.10 知, M 是非球面的和非环面的当且仅当 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt. 命题得证. \square

如果 Q 的维数大于 3, 则首先由命题 5.7 知, 如果 M 是双曲的, 则 M 一定是非球面的且 π_1 中不包含 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群, 即 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt. 另外由 [31, 推论 6.11.6] 知, 一个维数大于 4 的单多面体一定有三角形或者四边形面. 即如果 Q 的维数大于 4, 则 P_Q 不是旗性的或者包含 \square -belt. 因此

- 如果 Q 的维数大于 4, 则 M 不可能是双曲的.

四维时, 我们知道 120-cell 上的 *manifold double* 是双曲的, 参考 [31, P115] 或 [46]. 除此之外, 我们不知道其他单手柄上的 *manifold double* 的双曲曲率存在性.

5.4.2 双曲 orbifold 和双曲带角流形

首先, 单连通的双曲流形在等距同构意义下是唯一的, 不妨就设为双曲空间 \mathbb{H}^n . 所以每一个闭双曲流形都可以实现为 \mathbb{H}^n 在 $Isom(\mathbb{H}^n)$ 的离散子群 G 自由作用下的商 \mathbb{H}^n/G . 而我们称一个 orbifold Q 是双曲的是指它可以实现为 $Isom(\mathbb{H}^n)$ 的离散子群 G 纯不连续 (不一定自由) 作用下的商 \mathbb{H}^n/G . 所以, 双曲 orbifold 都是好的 orbifold.

接下来, 我们介绍双曲的带角流形的概念. 这里的双曲有别于 orbifold 和流形上的双曲. Pogorelov 定理 (Andreev 定理 [4, 80] 的直角情况) 是说, 一个三维的单多面体可以实现为三维双曲 \mathbb{H}^3 里的一个单凸多面体, 且所有的二面角都是直角, 当且仅当它是旗性的且不包含任意 4-belt. 此时, 这个嵌入在 \mathbb{H}^3 的单凸多面体被称为一个直角双曲多面体. 一般地, 我们称一个三维带角流形 Q 是双曲的是指 Q 的内部允许一个常截面曲率 -1 的黎曼度量, 这个黎曼度量可以延拓到 Q 的边界上, 使得 Q 所有的面都是全测地的 (或者称为局部凸的). 进一步, 我们称 Q 是直角双曲的如果它的所有二面角都是直角. 一般来说, 如果我们考虑二面角的不同, 则一个三维带角流形上的这种双曲结构的存在性对应着 Andreev 定理, 这是一个很难处

理的问题, 目前尚不清楚. 从这里, 我们也可以看到一个双曲的三维带角流形上的双曲结构可能是不唯一的. 然而, 一个直角双曲的三维带角流形总可以诱导了它上面的一个直角 Coxeter orbifold 结构. 即一个直角双曲的三维带角流形一定是一个双曲的直角 Coxeter orbifold. 根据 Mostow 的刚性定理 [72], 带角流形上的直角双曲结构是唯一的.

设 Q 为一个三维单手柄, M 是 Q 上的 manifold double. 则根据三维流形理论 (或参考 [76]), 知 M 是双曲的当且仅当 Q 是双曲的. 所以, 我们有下面推论.

推论 5.12. 一个三维单手柄 Q 是双曲的当且仅当 Q 是旗性的且不包含任何 \square -belt.

注 5.3. 实际上, 可以进一步将这个结论中 Q 是单的条件推广到 Q 的底空间是三维手柄的直角 Coxeter orbifold 上去. 具体来说, 满足下面条件.

- $N(Q)$ 是 ∂Q 的一个三角剖分或者理想三角剖分. (关于理想三角剖分, 可以参考 [42, 定义 2.6]).

5.5 正 (数量) 曲率

5.5.1 结论和证明

在这一小节中, 我们考虑 M 上的正曲率的存在性. 下面是我们的结论.

命题 5.13. 设 P 是一个三维单多面体, M 是 P 上的实 *moment angle* 流形 (manifold double). 则 M 上允许一个正数量曲率当且仅当 P 中所有的二维 belt 都是 Δ^2 , 或者 P 本身是一个四面体.

这是下面这个结论的等价描述.

定理 5.14 ([94, 推论 4.10]). 一个三维单多面体 P 上的实 *moment angle* 流形 (或 *small cover*) 允许一个正数量曲率结构当且仅当 P 和 Δ^3 做一些砍点操作后得到的单多面体是组合等价的.

设 P 是 Δ^3 做一些砍点操作后得到的单多面体. 则除了 $P = \Delta^3$ 外, P 中的任意一个二维 belt 都是一个 Δ^2 -belt.

反之, 如果一个三维单多面体 P 中任意一个二维 belt 都是一个 Δ^2 -belt. 则 P 可以表示成一些 Δ^3 的连通和. 这和 P 是 Δ^3 做一些砍点操作后得到的单多面体是等价的. 所以, 命题 5.13 得证.

5.5.2 二邻域和正截面曲率, 正 Ricci 曲率

我们称一个单多面体 P 是二邻域的, 如果 P 中任意两个面都相交. 结合 [59, 命题 2.1] 和我们 B -belt 的定义, 我们有

引理 5.15. 设 P 是一个单多面体, 则下面陈述等价.

- P 是二邻域的;
- P 不包含任何 I -belt;
- P 的 manifold double M 是单连通的.

类似地, 我们可以定义一个单手柄 Q 是二邻域的, 如果 $N(Q)$ 的一维骨架是一个完全图. 一方面, 此时 I -belt 不能用来探测 Q 是否是二邻域的; 另一方面, 我们可以证明一个亏格大于 0 的单手柄不可能是二邻域的. 首先我们证明下面引理.

引理 5.16. 设 N 是一个维数大于 1 的可三角剖分闭流形. 如果 $\pi_1(N)$ 非平凡, 则 N 的任何三角剖分的一维骨架都不可能是完全图.

证明: 设 K 是 N 的一个三角剖分, 且 K 的一维骨架是一个完全图. 选中 K 中的一个顶点 x , 设 $N(x)$ 是 K 中所有包含点 x 的单形的并. 则 $N(x) \cong D^n$ 且边界 $\partial N(x)$ 是一个二邻域的 $n-1$ 单纯球.

设 Δ^n 为 K 中一个不包含点 x 的 n 单形. 因为 K^1 是一个完全图, 所以 Δ^n 中的所有顶点都包含在 $\partial N(x)$ 中. 故 K^1 为 $N(x)$ 的一个子复形. 因此, K^1 中任意一个闭路在 $N(x)$ 中都是可缩的, 这说明 N 是单连通的. 产生矛盾. \square

所以, 我们有下面结论.

推论 5.17. 一个亏格大于 0 的单手柄不可能是二邻域的. 换言之, 一个二邻域的单手柄一定是一个单多面体.

接下来, 我们给出 M 是正截面曲率和正 Ricci 曲率的刻画.

定理 5.18 (Hopf-Rinow, Myers, [77, 推论 6.3.2 & 定理 6.3.3]). 如果一个 n 维闭流形 N 上允许一个完备的正截面曲率度量, 则 $\pi_1(N)$ 是有限的. 准确来说, 如果 N 是偶维数的, 则 $\pi_1(N)$ 是平凡群或者 \mathbb{Z}_2 ; 如果 N 是奇维数的, 则 N 是可定向的.

如果一个 n 维闭流形 N 上允许一个完备的正 Ricci 曲率度量, 则 $\pi_1(N)$ 也是一个有限群.

考虑短正合列

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1^{orb}(Q) \xrightarrow{\lambda} (\mathbb{Z}_2)^m \longrightarrow 1$$

如果 Q 的亏格大于 0, 则 cutting belt 决定的自由生成元 t 在 λ 下的像为 $(\mathbb{Z}_2)^m$ 的单位元. t 决定了 $\pi_1(M)$ 中的一个无挠的群元素. 所以, 我们有下面结论.

引理 5.19. 如果 Q 的亏格大于 0, 则 $\pi_1(M)$ 不是一个有限群.

所以根据[定理 5.18](#), [引理 5.15](#) 和 [引理 5.19](#), 我们有

命题 5.20. 设 M 是一个单手柄 Q 上的 manifold double. 如果 M 上允许一个正截面曲率或正 Ricci 曲率度量, 则 Q 一定是一个二邻域的单多面体.

反之, 一个闭 (或紧) n 维流形上的正截面曲率和正 Ricci 曲率的存在性是一个非常困难的问题, 这里面有很多公开性问题和猜想. 例如 $\Delta^2 \times \Delta^2$ 上的实 moment angle 流形为 $S^2 \times S^2$, 但 $S^2 \times S^2$ 上的正截面曲率的存在性恰好就是著名的 Hopf 猜想.

5.5.3 正数量曲率

相比正截面曲率和正 Ricci 曲率, 闭 (或紧) n 维流形上的正数量曲率问题有很多工作. 可以参考 Gromov-Lawson, Schoen-Yau, Stolz 等人的工作 [[50–52](#), [85–87](#)].

根据 Gromov-Lawson [[52](#)] 的工作, 一个允许非正曲率的紧黎曼流形不可能是正数量曲率的. 因此我们有,

- 如果 M 是正数量曲率的, 则 Q 一定不是旗性的.

进一步, 我们有理由猜测:

- ★ 如果 Q 是一个二邻域的单多面体, 则 M 上允许一个正数量曲率度量.

特别地, 在三维情况, Wu-Yu 给出了三维单多面体上实 moment-angled 流形上的正数量曲率的存在性的一个等价的组合描述. 即这一小节开始的[命题 5.13](#) 和[定理 5.14](#).

5.6 总结

最后, 我们将这一章的讨论整理如下:

表 5-1: 一个单手柄被称为 *Pogorelov* 的是指它是旗性的且不包含任意 \square -belt.

| $M \backslash Q$ | 2 邻域的 | Flag | Pogorelov | 描述 |
|--------------------|---------------------------------------|-------------------------|------------------------------|---|
| Sec < 0 | \nearrow^{not} | \nearrow | $\nearrow \swarrow^{\dim 3}$ | 命题 5.7. |
| 双曲的 | \nearrow^{not} | \nearrow | $\nearrow \swarrow^{\dim 3}$ | dim 3: 命题 5.11; dim 4: 尚未清楚; dim ≥ 5 : 不存在. |
| Sec ≤ 0 , NPC | \nearrow^{not} | $\nearrow \swarrow$ | \swarrow | 命题 5.2. |
| 平坦的 | \nearrow^{not} | \nearrow | \nearrow^{not} | [59, 定理 1.2]. |
| 球面的 | \nearrow | \nearrow^{not} | \nearrow^{not} | [59, 定理 1.2]. |
| Sec, Ric > 0 | \nearrow | \nearrow^{not} | \nearrow^{not} | 尚未清楚 (例如 Hopf 猜想). |
| Scalar > 0 | $\swarrow^{\text{Conjecture } \star}$ | \nearrow^{not} | \nearrow^{not} | dim 3: [94]; > dim 3: 尚未清楚. |

参考文献

- [1] 梅加强. 流形与几何初步 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [2] ABE HIRAKU, MATSUMURA TOMOO. Equivariant cohomology of weighted Grassmannians and weighted Schubert classes[J]. Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 9, 2499–2524.
- [3] ADEM ALEJANDRO, LEIDA JOHANN, RUAN YONGBIN. Orbifolds and stringy topology[M]. New York: Cambridge, 2007.
- [4] ANDREEV E M. Convex polyhedra of finite volume in Lobačevskii space[J]. Mat. Sb. (N.S.) 83 (125) (1970), 256–260.
- [5] ASCHENBRENNER M, FRIEDL S, WILTON H . 3-manifold groups[M]. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.
- [6] ASAO YASUHIKO. Loop homology of some global quotient orbifolds[J]. Algebr. Geom. Topol. 18 (2018), no. 1, 613–633.
- [7] BJÖRNER ANDERS, BRENTI FRANCESCO. Combinatorics of Coxeter groups[M]. New York: Graduate Texts in Mathematics, 231. Springer, 2005.
- [8] BAHRI A, BENDERSKY M, COHEN F R, GITLER S. Decompositions of the polyhedral product functor with applications to moment-angle complexes and related spaces[J]. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 106 (2009), no. 30, 12241–12244.
- [9] BAHRI ANTHONY, NOTBOHM DIETRICH, SARKAR SOUMEN, SONG JONGBAEK. On integral cohomology of certain orbifolds[J]. Int. Math. Res. Not. IMRN (2020).

- [10] BARRETO YADIRA, LÓPEZ DE MEDRANO SANTIAGO, VERJOVSKY ALBERTO. Some open book and contact structures on moment-angle manifolds[J]. Bol. Soc. Mat. Mex. (3) 23 (2017), no. 1, 423–437.
- [11] BOSIO F, MEERSSEMAN L. Real quadrics in \mathbb{C}^n , complex manifolds and convex polytopes[J], Acta Math. 197 (2006), 53–127.
- [12] BOILEAU MICHEL, LEEB BERNHARD, PORTI JOAN. Geometrization of 3-dimensional orbifolds[J]. Ann. of Math. (2) 162 (2005), no. 1, 195–290.
- [13] BOILEAU MICHEL, MAILLOT SYLVAIN, PORTI JOAN. Three-dimensional orbifolds and their geometric structures[M]. Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], 15. Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [14] BRIDSON MARTIN R, HAEFLIGER ANDRÉ. Metric spaces of non-positive curvature[M]. Berlin: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 319. Springer-Verlag, 1999.
- [15] BUCHSTABER VICTOR M, PANOV TARAS E. Toric topology[M]. Mathematical Surveys and Monographs, 204. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [16] CARMELLO JR F C. Introduction to Orbifolds[OL]. ArXiv :1909.08699v2.
- [17] CAI, LI. On products in a real moment-angle manifold[J]. J. Math. Soc. Japan 69 (2017), no. 2, 503–528.
- [18] CAO X Y, LÜ Z. Möbius transform, moment-angle complexes and Halperin-Carlsson conjecture[J]. J. Algebraic Combin. 35 (2012), no. 1, 121–140.
- [19] CHARNEY RUTH, DAVIS MICHAEL. The Euler characteristic of a nonpositively curved, piecewise Euclidean manifold[J]. Pacific J. Math. 171 (1995), no. 1, 117–137.
- [20] CHEN WEIMIN. A homotopy theory of orbispace[OL]. arXiv:math/0102020
- [21] CHEN WEIMIN. On a notion of maps between orbifolds. I. Function spaces[J]. Commun. Contemp. Math. 8 (2006), no. 5, 569–620.

- [22] CHEN WEIMIN. On a notion of maps between orbifolds. II. Homotopy and CW-complex[J]. Commun. Contemp. Math. 8 (2006), no. 6, 763–821.
- [23] CHEN WEIMIN, RUAN YONGBIN. Orbifold Gromov-Witten theory[J]. Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), 25–85, Contemp. Math., 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [24] CHEN WEIMIN, YONGBIN RUAN. A new cohomology theory of orbifold[J]. Comm. Math. Phys. 248 (2004), no. 1, 1–31.
- [25] CHEN B, LÜ Z, YU L. Self-dual binary codes from small covers and simple polytopes[J]. Algebr. Geom. Topol. 18 (2018), no. 5, 2729–2767.
- [26] CHOI S, PARK H. Small covers over wedges of polygons[J]. J. Math. Soc. Japan 71 (2019), no. 3, 739–764.
- [27] DANILOV V I. The geometry of toric varieties[J]. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 33 (1978), no. 2(200), 85–134, 247.
- [28] DANILOV V I. Birational geometry of three-dimensional toric varieties[J]. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (1982), no. 5, 971–982, 1135.
- [29] DAWSON ROBERT J MACG. Homology of weighted simplicial complexes[J]. Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég. 31 (1990), no. 3, 229–243.
- [30] DAVIS MICHAEL W. Lectures on orbifolds and reflection groups[J]. Transformation groups and moduli spaces of curves, 63–93, Adv. Lect. Math. (ALM), 16, Int. Press, Somerville, MA, 2011.
- [31] DAVIS MICHAEL W. The geometry and topology of Coxeter groups[M]. London Mathematical Society Monographs Series 32, Princeton Univ. Press, 2008.
- [32] DAVIS MICHAEL W. Right-angularity, flag complexes, asphericity[J]. Geom. Dedicata 159 (2012), 239–262.
- [33] DAVIS MICHAEL W. Group generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space[J]. Ann. of Math. (2) 117 (1983), no. 2, 293–324.

- [34] DAVIS MICHAEL W, EDMONDS ALLAN L. Euler characteristics of generalized Haken manifolds[J]. *Algebr. Geom. Topol.* 14 (2014), no. 6, 3701–3716.
- [35] DAVIS MICHAEL W, JANUSZKIEWICZ TADEUSZ. Hyperbolization of polyhedra[J]. *J. Differential Geom.* 34 (1991), no. 2, 347–388.
- [36] DAVIS MICHAEL W, JANUSZKIEWICZ TADEUSZ. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions[J]. *Duke Math. vol.* 62 (1991), no. 2, 417–451.
- [37] DAVIS MICHAEL W, JANUSZKIEWICZ T, SCOTT R. Fundamental groups of blow-ups[J]. *Adv. Math.* 177 (2003), no. 1, 115–179.
- [38] DAVIS MICHAEL W, JANUSZKIEWICZ T, SCOTT R. Nonpositive curvature of blow-ups[J]. *Selecta Math. (N.S.)* 4 (1998), no. 4, 491–547.
- [39] DINKELBACH JONATHAN, LEEB BERNHARD. Equivariant Ricci flow with surgery and applications to finite group actions on geometric 3-manifolds[J]. *Geom. Topol.* 13 (2009), no. 2, 1129–1173.
- [40] DIXON L, HARVEY J A, VAFA C, WITTEN E. Strings on orbifolds[J]. *Nuclear Phys. B* 261 (1985), no. 4, 678–686.
- [41] DIXON L, HARVEY J A, VAFA C, WITTEN E, Strings on orbifolds. II[J]. *Nuclear Phys. B* 274 (1986), no. 2, 285–314.
- [42] FOMIN SERGEY, SHAPIRO MICHAEL, THURSTON DYLAN. Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes[J]. *Acta Math.* 201 (2008), no. 1, 83–146.
- [43] FOOZWELL BELL, RUBINSTEIN HYAM[J]. Introduction to the theory of Haken n -manifolds[M]. *Topology and geometry in dimension three*, 71–84, *Contemp. Math.*, 560, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [44] FULTON W. Introduction to toric varieties[M]. *Annals of Mathematics Studies*, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

- [45] GAIFULLIN A A. Small covers over graph-associahedra and realization of cycles[J]. (Russian) Mat. Sb. 207 (2016), no. 11, 53–81.
- [46] GARRISON ANNE, SCOTT RICHARD. Small covers of the dodecahedron and the 120-cell[J]. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 3, 963–971.
- [47] GECK MEINOLF, PFEIFFER GÖTZ, Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras[M]. New York: London Mathematical Society Monographs. New Series, 21. The Clarendon Press, Oxford University Press, 2000.
- [48] GITLER SAMUEL, MEDRANO SANTIAGO LÓPEZ DE. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums[J]. Geom. Topol. 17 (2013), no. 3, 1497–1534.
- [49] GROMOV M. Hyperbolic groups[G/J]. New York: Essays in group theory, 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, 1987.
- [50] GROMOV M, LAWSON H B. Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group. I[J]. Ann. of Math. (2) 111 (1980), no. 2, 209–230.
- [51] GROMOV M, LAWSON H B. The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature[J]. Ann. of Math. (2) 111 (1980), no. 3, 423–434.
- [52] GROMOV M, LAWSON H B. Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds[J]. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 58 (1983), 83–196 (1984).
- [53] GROVE L C, BENSON C T. Finite reflection groups[M]. New York: Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 99. Springer-Verlag, 1985.
- [54] HATCHER ALLEN. Algebraic topology[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [55] HATCHER ALLEN[M]. Vector bundle and K-theory. Version 2.1, 2009.
- [56] HEMPEL JOHN. 3-Manifolds[M]. Tokyo: Ann. of Math. Studies, No. 86. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, 1976.

- [57] HUMPHREYS JAMES E. Reflection groups and Coxeter groups[M]. Cambridge: Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29. Cambridge University Press, 1990.
- [58] KAPOVICH MICHAEL. Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups[M]. Progress in Mathematics, 183. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
- [59] KUROKI SHINTARO, MASUDA MIKIYA, YU LI. Small covers, infrasolvmanifolds and curvature[J]. Forum Math. 27 (2015), no. 5, 2981–3004.
- [60] LAWSON H B, YAU S T. Compact manifolds of nonpositive curvature[J]. J. Differential Geometry 7 (1972), 211–228.
- [61] LI YOULIN, MA JIMING. \mathbb{Z}_2^3 -colorings and right-angled hyperbolic 3-manifolds[J]. Pacific J. Math. 263 (2013), no. 2, 419–434.
- [62] LEEB BERNHARD. 3-manifolds with(out) metrics of nonpositive curvature[J]. Invent. Math. 122 (1995), no. 2, 277–289.
- [63] LÜ ZHI. Graphs of 2-torus actions[J]. Toric topology, 261–272, Contemp. Math., 460, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [64] LÜ ZHI, MA JUN, SUN Y. Elementary symmetric polynomials in Stanley-Reisner face ring[OL]. ArXiv, 2016.
- [65] LÜ ZHI, MASUDA M. Equivariant classification of 2-torus manifolds[J]. Colloq. Math. 115 (2009), no. 2, 171–188.
- [66] LÜ ZHI, TAN Q B. Small covers and the equivariant bordism classification of 2-torus manifolds[J]. Int. Math. Res. Not. IMRN 2014, no. 24, 6756–6797.
- [67] LYNDON ROGER C, SCHUPP PAUL E. Combinatorial Group Theory[M]. Berlin: Reprint of the 1977 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 2001.
- [68] MAY PETER. Equivariant homotopy and cohomology theory[M. With contributions by M. Cole, G. Comezana, S. Costenoble, A. D. Elmendorf, J. P. C. Greenlees, L. G. Lewis, Jr., R. J. Piacenza, G. Triantafillou, and S. Waner. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 91. Published for the Conference Board of the

- Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [69] MOERDIJK IEKE. Orbifolds as groupoids: an introduction[J]. Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), 205–222, Contemp. Math., 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [70] MOERDIJK I, PRONK D A. Orbifolds, sheaves and groupoids. K-Theory 12 (1997), no. 1, 3–21.
- [71] MEEKS WILLIAM H, SCOTT PETER. Finite group actions on 3-manifolds[J]. Invent. Math. 86 (1986), no. 2, 287–346.
- [72] MOSTOW G D. Strong rigidity of locally symmetric spaces[M]. Tokyo: Annals of Mathematics Studies, No. 78. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, 1973.
- [73] MOUSSONG GABOR. Hyperbolic Coxeter groups[D]. Thesis (Ph.D.) The Ohio State University. 1988.
- [74] NAKAYAMA HISASHI, YNISHIMURA ASUZO. The orientability of small covers and coloring simple polytopes[J]. Osaka J. Math. 42 (2005), no. 1, 243–256.
- [75] NOTBOHM D. Colorings of simplicial complexes and vector bundles over Davis-Januszkiewicz spaces[J]. Math. Z. 266 (2010), no. 2, 399–405.
- [76] OTAL JEAN-PIERRE. Thurston’s hyperbolization of Haken manifolds[J]. Boston: Surveys in differential geometry, Vol. III (Cambridge, MA, 1996), 77–194, Int. Press, MA, 1998.
- [77] PETERSEN PETER. Riemannian geometry[M]. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, Cham, 2016.
- [78] PODDAR MAINAK, SARKAR SOUMEN. On quasitoric orbifolds[J]. Osaka J. Math. 47 (2010), no. 4, 1055–1076.
- [79] RATCLIFFE JOHN G. Foundations of Hyperbolic Manifolds (Third Edition)[M]. Graduate Texts in Mathematics, (2019).

- [80] ROEDER ROLAND K W, HUBBARD JOHN H, DUNBAR WILLIAM D. Andreev's Theorem on hyperbolic polyhedra[J]. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 57 (2007), no. 3, 825–882.
- [81] SATAKE. On a generalization of the notion of manifold[J]. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 42 (1956), 359–363.
- [82] SATAKE. The Gauss-Bonnet Theorem for V-manifolds[J]. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Vol. 9, No. 4 (1957), 464–492.
- [83] SATI HISHAM, SCHREIBER URS. Proper Orbifold Cohomology[OL]. arXiv: 2008.01101, (2020).
- [84] SEATON CHRISTOPHER, Characteristic classes of bad orbifold vector bundles[J]. *J. Geom. Phys.* 57 (2007), no. 11, 2365–2371.
- [85] SCHOEN R, YAU S T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature[J]. *Ann. of Math. (2)* 110 (1979), no. 1, 127–142.
- [86] SCHOEN R, YAU S T. On the structure of manifolds with positive scalar curvature[J]. *Manuscripta Math.* 28 (1979), 159–183.
- [87] STOLZ STEPHAN. Simply connected manifolds of positive scalar curvature[J]. *Ann. of Math. (2)* 136 (1992), no. 3, 511–540.
- [88] TAKEUCHI YOSHIHIRO, YOKOYAMA MISAKO. The t-singular homology of orbifolds[J]. *Topology Appl.* 153 (2006), no. 11, 1722–1758.
- [89] THURSTON WILLIAM P. Three-dimensional geometry and topology[M]. Vol. 1. Edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [90] THURSTON WILLIAM P. Kleinian groups and hyperbolic geometry[J]. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 6 (1982), no. 3, 357–381.

-
- [91] VINBERG E B, SHVARTSMAN O V. Discrete Groups of Motions of Spaces of Constant curvature[M]. Berlin: Geometry, II, 139–248, Encyclopaedia Math. Sci., 29, Springer, 1993.
- [92] WALDHAUSEN FRIEDHELM. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large[J]. Ann. of Math. (2) 87 (1968), 56–88.
- [93] WEELINCK T A N. A topological origin of quantum symmetric pairs[J]. Selecta Math. (N.S.) 25 (2019), no. 3, Paper No. 51, 47 pp.
- [94] WU LISU, YU LI. Fundamental groups of small covers revisited[J/OL]. Int. Math. Res. Not. (2019).
- [95] YU LI. A generalization of moment-angle manifolds with non-contractible orbit spaces[OL]. arXiv:2011.10366 (2021).

索引

- B*-belt, 37
- G*-CW 复形 *G*-CW complex, 25
- G*-映射 *G*-map, 25
- G*-结构 *G*-structure, 19
- X* 上的 orbifold Stiefel-Whitney 类 orbifold Stiefel-Whitney classes on *X*, 15
- i* 维 orbifold 同调群 i^{th} orbifold homology group, 69
- (几何) link geometric link, 51
- (实) *m* 维向量丛, real *m*-dimensional orbifold vector bundle, 89
- pair relation, 35
- Coxeter 群 Coxeter group, 5
- q*-胞腔复形 (或者 *q*-CW 复形) *q*-cellular complex (or, *q*-CW complex), 25
- 爆破复形 blow-up complex, 67
- Calabi-Yau orbifold, 2
- chamber, 34
- Coxeter 胞腔 Coxeter cell, 12
- Coxeter *n*-胞腔 Coxeter *n*-cell, 25
- Coxeter (胞腔) 复形 Coxeter cellular complex or Coxeter CW complex, 26
- Coxeter orbifold, 8, 23
- Coxeter 复形 Coxeter complex, 12, 25
- Coxeter 系 Coxeter system, 23
- Coxeter 群 Coxeter group, 22
- cutting belt, 9
- facet, 24
- Gromov 引理 Gromov Lemma, 10
- link, 35
- manifold double, 9
- nice, 24
- orbifold, 1

orbifold Stiefel-Whitney 类 (orbifold Stiefel-Whitney classes), 95
 orbifold Stiefel-Whitney 示性类 (orbifold Stiefel-Whitney class), 100
 orbifold 图册 orbifold atlas, 20
 orbifold 图页 orbifold chart), 20
 orbifold 圆盘 orbifold ball, 25
 orbifold 结构等价 equivalence of orbifold structures, 21
 orbifold 道路 orbifold path, 30
 orbifold 闭路 orbifold loop, 30
 orbifold 非球面的 orbifold aspherical, 31
 orbispace, 19
 orbispace 态射 orbispace morphism, 22
 orbispace 结构 orbispace structure, 19
 Siebenmann 的 no \square -条件 Siebenmann's no \square -condition, 53
 small cover, 4
 V -流形 V -manifold, 1
 二邻域 two neighborly, 114
 偏序集 poset, 24
 光滑 orbifold 向量丛映射, 91
 光滑截面, 91
 全局商 global quotient, 21
 典范线丛, 91
 加细 refine, 21
 单 orbifold simple orbifold, 8, 37
 单多面体 simple polytope, 21
 单手柄 simple handlebody, 9
 反射 reflection, 34
 向量丛的等价, 91
 商 orbifold quotient orbifold, 21
 基本域 fundamental domain, 34
 基本操作 elementary operation, 40
 奇异的 singular, 25
 奇点集 singular set, 20
 好的 (resp. 非常好的 good (very good), 29
 实 moment-angle 流形 real moment-angle manifold, 9
 局部余维数 (Coxeter 复形) local codimension, 27
 局部反射 orbifold locally reflective orbifold, 23
 局部群 (群的单复形) local group, 27
 局部群 local group, 20
 嵌入 embedding, 20
 带权单纯复形 weighted simplicial complex, 27
 带角流形 manifold with corners, 24
 底空间 underlying space, 20
 开面 open face, stratum), 24
 弦欧拉数 stringy Euler number, 2
 整体示性矩阵 (total characteristic matrix), 94
 整体示性矩阵 total characteristic matrix, 14
 旗性的 flag, 38
 有效的 orbifold effective orbifold, 21
 标准反射 standard reflection, 23
 横截相交, 76

正则的 *regular*, 25

爆破 (胞腔) *blow up*, 25

爆破复形 *blowing-up complex*, 12

球面的 *spherical*, 46

直角 Coxeter orbifold *right angled orbifold*, 4

直角 Coxeter orbifold *right-angled Coxeter n -orbifold*, 23

直角 Coxeter orbifold *right-angled Coxeter orbifold*, 8, 21

直角 Coxeter 胞腔 *right-angled Coxeter cell*, 25

相邻变换 *adjacency transformation*, 34

示性矩阵 (*characteristic matrix*), 98

神经 (Coxeter 复形) *nerve*, 27

神经 *nerve*, 24

空四边形 *empty square*, 53

第 i 个同调数 *i^{th} homological number*, 84

等变的 *equivariant*, 25

群的单复形 *simple complex of groups*, 27

过渡映射 *transition map*, 19

面 (Coxeter 复形) *face*, 27

面 *face*, 24

攻读博士学位期间完成的论文

- With Li Yu, *Fundamental groups of small covers revisited*, Int. Math. Res. Not. **IMRN** (2019).
- With Zhi Lü, *Topology and geometry of flagness and beltness of simple orbifolds*. Preprint, 2020.
- With Zhi Lü and Li Yu, *An integral (co)homology theory of Coxeter orbifolds*. Preprint, 2020.
- *Stiefel Whitney classes on right-angled Coxeter complexes*. 2021.

致 谢

最后,我要感谢我的导师吕志教授. 吕老师是一位非常严谨、和蔼、热情的老师. 三年来,吕老师在论文和学业上都为我提供了很大帮助. 在和吕老师交流过程中,一旦了解到我对学业上的一些流程的疑惑时,吕老师都会立马帮我打电话去确认. 尽管吕老师行政工作很繁忙,但总会抽出时间和我们讨论问题. 做论文期间,更是常常和吕老师讨论整整一个下午,校对推敲每一个定义和证明. 每次和吕老师的讨论之后,我都会有所收获,或对问题产生新的理解,或对自己的感觉和证明更加确信. 吕老师的数学问题涉猎很广,在和吕老师及同门的讨论过程中,让我了解了很多有趣的问题和方法.

我要感谢马继明副教授,王国桢副教授、王慰师兄以及我的同门-大师兄黄章敏、二师兄李浩、三师兄张嵩、大师姐练静芳、王子夕、沈启帆、蔡舒雅、杨方白、张玮芃. 其中王慰师兄讨论班讲得非常好! 这三年的讨论班,让我获益匪浅.

—— 2021 年春.

复旦大学

学位论文独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。论文中除特别标注的内容外，不包含任何其他个人或机构已经发表或撰写过的研究成果。对本研究做出重要贡献的个人和集体，均已在论文中作了明确的声明并表示了谢意。本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：_____ 日期：_____

复旦大学

学位论文使用授权声明

本人完全了解复旦大学有关收藏和利用博士、硕士学位论文的规定，即：学校有权收藏、使用并向国家有关部门或机构送交论文的印刷本和电子版本；允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。涉密学位论文在解密后遵守此规定。

作者签名：_____ 导师签名：_____ 日期：_____

