线性代数-9

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 7 日

回顾：矩阵的初等变换

- **矩阵的初等变换:**

$$r_i \leftrightarrow r_j,\, r_i \times k,\, r_i + kr_j,\, c_i \leftrightarrow c_j,\, c_i \times k,\, c_i + kc_j.$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j,\ r_i \times k,\ r_i + kr_j,\ c_i \leftrightarrow c_j,\ c_i \times k,\ c_i + kc_j.$$

- 矩阵的等价：

$$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B;$$

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B;$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j,\, r_i \times k,\, r_i + kr_j,\, c_i \leftrightarrow c_j,\, c_i \times k,\, c_i + kc_j.$$

- 矩阵的等价：

$$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B;$$

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B;$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j), E(i(k)), E(ij(k));$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j), E(i(k)), E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系—左行右列：

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j), E(i(k)), E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系—左行右列:

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j), E(i(k)), E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系—左行右列:

定理 (婴儿版本)

$$A \xrightarrow{\text{一次初等行变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } P, \text{ 使得} PA = B.$$

$$A \xrightarrow{\text{一次初等列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } Q, \text{ 使得} AQ = B.$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j),\ E(i(k)),\ E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系—左行右列:

定理 (婴儿版本)

$$A \xrightarrow{\text{一次初等行变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } P, \text{使得} PA = B.$$

$$A \xrightarrow{\text{一次初等列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } Q, \text{使得} AQ = B.$$

定理 (成年版本)

$$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B \Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } P, \text{使得} PA = B.$$

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } Q, \text{使得} AQ = B.$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } P, Q, \text{使得} PAQ = B.$$

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 初等变换的应用：

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P，使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$;

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可表示为有限多个初等矩阵乘积
$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$
- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$;
  - 求 $A^{-1}B$ $:\Rightarrow (A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$;

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$;
  - 求 $A^{-1}B$ $:\Rightarrow (A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$;
  - 解 $AX = \beta$ $:\Rightarrow (A, \beta) \xrightarrow{\text{行变换}}$ 行最简形;

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B \;:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;
  - 求 $A^{-1} \;:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$;
  - 求 $A^{-1}B \;:\Rightarrow (A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$;
  - 解 $AX = \beta \;:\Rightarrow (A, \beta) \xrightarrow{\text{行变换}}$ 行最简形;
  - 注：求可逆 Q, 使得 $AQ = B$; A^{-1}; BA^{-1}; $X^TA = \beta^T$ 用列分块，初等列变换.

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$ **？**

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$?
  - **定义:**

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$?
  - 定义:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

  - 左行右列:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{使得} PAQ = B.$$

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 定义:
  $$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$
  - 左行右列:
  $$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{使得} PAQ = B.$$
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗？

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$?
  - 定义:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

  - 左行右列:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{使得} PAQ = B.$$

- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗?
  - 有！研究等价矩阵 A 和 B 的共性.

  （等价不变性/不变量: 在有限初等变换下保持不变的性质和数量.）

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 定义:
$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$
  - 左行右列:
$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得} PAQ = B.$$
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗？
  - 有！研究等价矩阵 A 和 B 的共性.
  （等价不变性/不变量: 在有限初等变换下保持不变的性质和数量.）
  - 例如，等价的两个方阵同时可逆/不可逆.
  如果 A 可逆，但 B 不可逆，则必有 $A \nsim B$.

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 定义:
$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$
  - 左行右列:
$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得} PAQ = B.$$
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗？
  - 有！研究等价矩阵 A 和 B 的共性.
  (等价不变性/不变量: 在有限初等变换下保持不变的性质和数量.)
  - 例如，等价的两个方阵同时可逆/不可逆.
  如果 A 可逆，但 B 不可逆，则必有 $A \nsim B$.
- 矩阵的秩: 同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow A, B$ 的秩相同.

本次课内容

矩阵的秩和线性方程组解的存在性

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵}A \xrightarrow{\mathbf{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\mathbf{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\mathbf{c}} \text{标准形}$$

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵}A \xrightarrow{\mathsf{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\mathsf{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\mathsf{c}} \text{标准形}$$

- $$A_{m\times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵}A \xrightarrow{\mathsf{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\mathsf{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\mathsf{c}} \text{标准形}$$

- $$A_{m\times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵} A \xrightarrow{\text{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{c}} \text{标准形}$$

- $$A_{m\times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定义 (矩阵的秩（Rank）)

A 的秩定义为其标准形中的数 r, 记为 $r(A)$ 或 $R(A)$.

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵}A \xrightarrow{\text{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{c}} \text{标准形}$$

- $$A_{m\times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定义 (矩阵的秩（Rank）)

A 的秩定义为其标准形中的数 r, 记为 $r(A)$ 或 $R(A)$.

定理

同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$.

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F=E_n$,
- $F=O_{m\times n}$,

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F=E_n$,
- $F=O_{m\times n}$,

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F=E_n$,
- $F=O_{m\times n}$,

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=m$. 此时, 称 A 为行满秩矩阵.
- $F=E_n$,
- $F=O_{m\times n}$,

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=m$. 此时, 称 A 为行满秩矩阵.
- $F=E_n$, **则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为满秩矩阵 ($\Leftrightarrow$ 可逆矩阵).**
- $F=O_{m\times n}$,

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=m$. 此时, 称 A 为行满秩矩阵.
- $F=E_n$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为满秩矩阵 ($\Leftrightarrow$ 可逆矩阵).
- $F=O_{m\times n}$, 则 $R(A):=0$. 此时, $A=O$.

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=m$. 此时, 称 A 为行满秩矩阵.
- $F=E_n$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为满秩矩阵 ($\Leftrightarrow$ 可逆矩阵).
- $F=O_{m\times n}$, 则 $R(A):=0$. 此时, $A=O$.

左行右列: $A\sim B\Leftrightarrow$ 存在可逆 P,Q, 使得$PAQ=B$. 所以,

$$R(A)=R(PAQ)=R(PA)=R(AQ).$$

即矩阵与可逆矩阵相乘, 秩不变.

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=m$. 此时, 称 A 为行满秩矩阵.
- $F=E_n$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为满秩矩阵 ($\Leftrightarrow$ 可逆矩阵).
- $F=O_{m\times n}$, 则 $R(A):=0$. 此时, $A=O$.

左行右列: $A\sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆 P,Q, 使得$PAQ=B$. 由定理知:

$$R(A)=R(PAQ)=R(PA)=R(AQ).$$

即矩阵与可逆矩阵相乘, 秩不变.

- 例 $R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$
- $R(A) = R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = r =$ 标准形中1的个数
  $=$ 行阶梯形的非零行数 $=$ 行最简形的非零行数.
- 计算 $R(A)$: 通过初等行变换把 A 化为行阶梯形,

$$R(A) = \text{行阶梯形的非零行数}.$$

例题

例

求 $R(A)$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例

设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix},$$

已知 $R(A)=2$, 求 λ 和 μ.

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m,n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;
5) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A,B) \leq R(A) + R(B)$,
特别地，$R(A) \leq R(A,\beta) \leq R(A) + 1$;

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;
5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,
特别地，$R(A) \le R(A, \beta) \le R(A) + 1$;
6) $R(A + B) \le R(A) + R(B)$;

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;
5) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$,
   特别地，$R(A) \leq R(A, \beta) \leq R(A) + 1$;
6) $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$;
7) $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$;

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;
5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,
   特别地，$R(A) \le R(A, \beta) \le R(A) + 1$;
6) $R(A + B) \le R(A) + R(B)$;
7) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$;
8) 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$，则 $R(A) + R(B) \le n$.

例

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

例

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

- $R(A_{m\times n})=n$, 则称 A 为列满秩矩阵；

例

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

- $R(A_{m\times n})=n$, 则称 A 为列满秩矩阵；
- $AX=AY$, A 列满秩，则 $X=Y$.
  即 A 列满秩，则有左消去律成立；
  同理，若 A 行满秩，则有右消去律: $XA=YA \Leftrightarrow X=Y$.
  A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 满秩 $\Rightarrow$ 左/右消去律成立.

例题

例

设 A 为 n 阶矩阵，证明 $R(A+E)+R(A-E)\geq n$.

子式和矩阵的秩（选）

k 阶子式

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k\le \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k 阶子式

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k \leq \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

k 阶子式

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k \le \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

k 阶子式

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列，$k \le \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- 区分 k 阶子式、子块、余子式、代数余子式.

性质

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D, 而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的最高阶非零子式, 则数 r 为 A 的秩.

性质

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D, 而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的最高阶非零子式, 则数 r 为 A 的秩.

证明思路: 设 D 经过有限次初等变换后为 D', 则

$$D \neq 0 \Leftrightarrow D' \neq 0.$$

性质

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D，而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的最高阶非零子式, 则数 r 为 A 的秩.

证明思路: 设 D 经过有限次初等变换后为 D', 则

$$D \neq 0 \Leftrightarrow D' \neq 0.$$

例

已知 $(A_{4\times 3}, B_{4\times 3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

求 $R(A), R(B), R(A,B)$.

思考题

设 A, B 都为 n 阶方阵. 若 $A \sim B$, 则称 A 和 B 属于同一个等价类. 问 n 阶方阵全体有多少个等价类?

秩的应用：线性方程组解的存在性

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

- 求解 $AX=\beta\Rightarrow$ 通过初等行变换化增广矩阵 (A,β) 为行最简形，判断解的存在性并求解.

例题

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 & = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 & = 0 \end{cases}$$

例

设

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 & = 0 \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

例题

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

例题

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

定理

$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

1、 秩的定义、求 $R(A)$;

2、 判断线性方程组 $AX=\beta$ 解的存在性，并求解.

练习

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 & = 0 \end{cases}$$

作业

- Page79-Page80. 10-(3)、15-(3)、18.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 7 日