

# 线性代数-16

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 22 日

# 本次课内容

1. 正交向量组
2. Schmidt 正交化
3. 正交矩阵和正交变换
4. 线性变换和矩阵的相似 (补充)

# 正交向量组

- 内积

$$(X, Y) = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

- 若  $(X, Y) = 0$ , 则称向量  $X, Y$  正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 一组两两正交的非零向量.

# 正交向量组

- 内积

$$(X, Y) = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

- 若  $(X, Y) = 0$ , 则称向量  $X, Y$  正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 一组两两正交的非零向量.

定理 (定理 11: 正交向量组必线性无关)

若  $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$  是正交向量组, 证明  $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$  线性无关.

例 (例 1)

已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

正交. 求一个非零向量  $\alpha_3$  使得  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  两两正交.

# 标准正交基的定义

## 定义 (标准正交基)

设  $n$  维向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为向量空间  $V (V \subseteq \mathbb{R}^n)$  的向量, 若

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为  $V$  的一组基 (最大无关组);
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  两两正交;
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  都为单位向量,

则称  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为  $V$  的一组标准正交基.

# 标准正交基的定义

## 定义 (标准正交基)

设  $n$  维向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为向量空间  $V (V \subseteq \mathbb{R}^n)$  的向量, 若

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为  $V$  的一组基 (最大无关组);
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  两两正交;
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  都为单位向量,

则称  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为  $V$  的一组标准正交基.

- 只满足前两个条件的向量组称为  $V$  的一组正交基.

## 例子

例

设  $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$  为  $\mathbb{R}^3$  的一组标准正交基, 求  $\beta = (1, 2, 3)^T$  在这组基下的坐标.



## 例子

例

设  $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$  为  $\mathbb{R}^3$  的一组标准正交基, 求  $\beta = (1, 2, 3)^T$  在这组基下的坐标.

- 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为  $V$  的一组标准正交基,

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r \in V$$

则  $\lambda_i = (\beta, \alpha_i)$ .

## 例子

例

设  $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$  为  $\mathbb{R}^3$  的一组标准正交基, 求  $\beta = (1, 2, 3)^T$  在这组基下的坐标.

- 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为  $V$  的一组标准正交基,

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r \in V$$

则  $\lambda_i = (\beta, \alpha_i)$ .

- 如何获得向量空间的标准正交基?

## 例子

例

设  $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$  为  $\mathbb{R}^3$  的一组标准正交基, 求  $\beta = (1, 2, 3)^T$  在这组基下的坐标.

- 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为  $V$  的一组标准正交基,

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r \in V$$

则  $\lambda_i = (\beta, \alpha_i)$ .

- 如何获得向量空间的标准正交基?  
—Schmidt 正交化.

## Schmidt 正交化：从一般基得到正交基的算法

设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为向量空间  $V$  的一组基,

- 正交化 (Schmidt 正交化):

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

...

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_r, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})} \beta_{r-1},$$

- 单位化:

$$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \dots, e_r = \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}.$$

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_r)$$

### 性质

在 *Schmidt* 正交化过程中, 对任意  $k = 1, \dots, r$ , 向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  与  $\beta_1, \dots, \beta_k$  等价. 特别地,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \dots, \beta_r$  等价.

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_r)$$

### 性质

在 *Schmidt* 正交化过程中, 对任意  $k = 1, \dots, r$ , 向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  与  $\beta_1, \dots, \beta_k$  等价. 特别地,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \dots, \beta_r$  等价.

- 两个向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow A, B$  可以相互线性表示.

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_r)$$

### 性质

在 *Schmidt* 正交化过程中, 对任意  $k = 1, \dots, r$ , 向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  与  $\beta_1, \dots, \beta_k$  等价. 特别地,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \dots, \beta_r$  等价.

- 两个向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow A, B$  可以相互线性表示.

### 推论

- 正交向量组是线性无关向量组;
- 反之, 线性无关向量组可以 *Schmidt* 正交化为正交向量组.

### 例 3

例

设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 用 Schmidt 正交化把这组向量标准正交化.



# 正交矩阵的概念和性质

定义 (定义 4: 正交矩阵)

若  $n$  阶矩阵  $A$  满足

$$A^T A = E \quad (i.e. \ A^{-1} = A^T),$$

则称  $A$  为正交矩阵, 简称正交阵.

# 正交矩阵的概念和性质

定义 (定义 4: 正交矩阵)

若  $n$  阶矩阵  $A$  满足

$$A^T A = E \quad (i.e. \ A^{-1} = A^T),$$

则称  $A$  为正交矩阵, 简称正交阵.

- 矩阵  $A$  是正交矩阵  $\Leftrightarrow A$  的列 (行) 向量组是  $\mathbb{R}^n$  的标准正交基.
- $A$  是正交矩阵, 则  $|A| = \pm 1$ .
- $A$  是正交矩阵, 则  $A^{-1}$  和  $A^T$  也是正交矩阵.
- $A, B$  是正交矩阵, 则  $AB$  也是正交矩阵.

## 例 4

例

验证矩阵下面矩阵为正交矩阵.

•

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

•

$$R_Z(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \boldsymbol{\theta} & -\sin \boldsymbol{\theta} & 0 \\ -\sin \boldsymbol{\theta} & \cos \boldsymbol{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 (Lecture-5)

设  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha^T \alpha = 1$ ,

$$H = E - 2\alpha\alpha^T.$$

证明  $H$  为对称阵, 且  $HH^T = E$ .

所以  $H$  为一个正交矩阵.

# 向量空间上的线性变换

例 (Lecture-5: 线性变换和矩阵)

给定一个  $n$  维向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

则得  $n$  维向量  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . 矩阵  $A = (a_{ij})$  表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

# 向量空间上的线性变换

例 (Lecture-5: 线性变换和矩阵)

给定一个  $n$  维向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

则得  $n$  维向量  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . 矩阵  $A = (a_{ij})$  表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

- 线性变换和  $n$  阶方阵一一对应.

定义 (定义 5)

若  $P$  为正交矩阵, 则线性变换  $Y = PX$  称为正交变换.

定义 (定义 5)

若  $P$  为正交矩阵, 则线性变换  $Y = PX$  称为正交变换.

- 正交变换保持内积不变.

$$(PX, PY) = (PX)^T PY = X^T P^T PY = X^T Y = (X, Y).$$

- 正交变换保持长度不变, 保持夹角不变.



例 (Lecture-5)

设  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha^T \alpha = 1$ ,

$$H = E - 2\alpha\alpha^T.$$

则  $H^T = H$ , 且  $HH^T = E$ .

- 所以,  $H$  是正交矩阵,  $Y = HX$  是一个正交变换 (称为镜面反射).

## 小结

- 正交向量组、标准正交基;
- Schmidt 正交化;
- 正交矩阵和正交变换;

## 补充：线性变换的严格定义

### 定义

设  $\rho: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  为一个变换 (自身到自身的映射). 若满足

- $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n, \rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2);$
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}, \rho(k \cdot X) = k \cdot \rho(X),$

则称  $\rho$  是一个线性变换.

取定向量空间  $\mathbb{R}^n$  的一组基  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , 设  $\rho(\xi_i)$  的坐标为  $\alpha_i$ ,

$$\rho(\xi_i) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$$

则对  $\mathbb{R}^n$  中任意向量  $y = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n = (\xi_1, \dots, \xi_n) X$ ,

$$\begin{aligned} \rho(y) &= \rho(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n) \\ &= x_1 \rho(\xi_1) + \dots + x_n \rho(\xi_n) \\ &= (\xi_1, \dots, \xi_n) (x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n) \\ &= (\xi_1, \dots, \xi_n) A X \\ &:= (\xi_1, \dots, \xi_n) Y \end{aligned}$$

所以线性变换在基  $\xi_1, \dots, \xi_n$  下可以用  $Y = AX$  表示.

设  $\eta_1, \dots, \eta_n$  为向量空间  $\mathbb{R}^n$  的另外一组基. 设从基  $\xi_1, \dots, \xi_n$  到基  $\eta_1, \dots, \eta_n$  的基变换公式为

$$(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)P,$$

其中可逆矩阵  $P$  为过渡矩阵.  
则

$$y = (\xi_1, \dots, \xi_n)X = (\eta_1, \dots, \eta_n)P^{-1}X := (\eta_1, \dots, \eta_n)X'$$

$$\rho(y) = (\xi_1, \dots, \xi_n)Y = (\eta_1, \dots, \eta_n)P^{-1}Y := (\eta_1, \dots, \eta_n)Y'$$

从而由  $(\xi_1, \dots, \xi_n)AX = (\xi_1, \dots, \xi_n)Y$  知

$$(\eta_1, \dots, \eta_n)P^{-1}APX' = (\eta_1, \dots, \eta_n)P^{-1}PY' = (\eta_1, \dots, \eta_n)Y'$$

所以线性变换在基  $\eta_1, \dots, \eta_n$  下可以用  $Y' = P^{-1}APX'$  表示.

## 第五章主题：方阵的相似

综上：方阵  $A$  和  $P^{-1}AP$  是同一个线性变换  $\rho$  在不同基下的矩阵.  
这种关系被定义为矩阵的相似关系.

定义

设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 若存在可逆矩阵  $P$  使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称矩阵  $A, B$  相似, 记为  $A \overset{\text{相似}}{\sim} B$ .

- 若  $A$  和  $B$  相似, 则  $A$  和  $B$  等价.

所以, 将相似的方阵  $A$  和  $B$  记为  $A \overset{\text{相似}}{\sim} B$ .

设线性变换  $\rho$  在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \quad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵  $P$  为过渡矩阵. 方阵  $A$  和  $P^{-1}AP$  是相似的.

设线性变换  $\rho$  在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \quad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵  $P$  为过渡矩阵. 方阵  $A$  和  $P^{-1}AP$  是相似的.

- 相似不变量：方阵  $A$  和  $P^{-1}AP$  所具有的共性.
- 是否存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角矩阵?  
(等价地, 是否存在一组基, 使线性变换的表示简单?)
- 是否存在一个正交矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = P^TAP$  为对角矩阵?  
(等价地, 是否存在一组标准正交基, 使线性变换的表示简单?)



设线性变换  $\rho$  在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \quad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵  $P$  为过渡矩阵. 方阵  $A$  和  $P^{-1}AP$  是相似的.

- 相似不变量: 方阵  $A$  和  $P^{-1}AP$  所具有的共性.

### Section-1. 特征值和特征多项式

- 是否存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角矩阵?  
(等价地, 是否存在一组基, 使线性变换的表示简单?)

### Section-2. 相似对角化

- 是否存在一个正交矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = P^TAP$  为对角矩阵?  
(等价地, 是否存在一组标准正交基, 使线性变换的表示简单?)

### Section-3. 对称阵的正交相似对角化

设线性变换  $\rho$  在两组基下的表达式分别为

$$Y = AX, \quad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵  $P$  为过渡矩阵. 方阵  $A$  和  $P^{-1}AP$  是相似的.

- 相似不变量: 方阵  $A$  和  $P^{-1}AP$  所具有的共性.

### Section-1. 特征值和特征多项式

- 是否存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角矩阵?  
(等价地, 是否存在一组基, 使线性变换的表示简单?)

### Section-2. 相似对角化

- 是否存在一个正交矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = P^TAP$  为对角矩阵?  
(等价地, 是否存在一组标准正交基, 使线性变换的表示简单?)

### Section-3. 对称阵的正交相似对角化

- Section-3 的应用: 第六章. 二次型的化简

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2025 年 10 月 22 日