

《线性代数》第四章作业 (6 月 11 日提交)

临班 370

2023 年 5 月 23 日

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

1. 判断题 (错误请给出说明或反例. 每题 2 分, 共 30 分):

(1) 两个同型矩阵 A, B 等价

$$\Leftrightarrow R(A) = R(B)$$

$\Leftrightarrow A, B$ 具有相同的标准形

$\Leftrightarrow A$ 可以经过有限次初等行变换和初等列变换化为矩阵 B .

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$.

(2) (等价不变量) 若矩阵 $A \sim B$, 则

① A, B 具有相同的阶次.

② $R(A) = R(B)$ (等价的完全不变量).

③ A, B 的行 (列) 向量组的线性相关性相同.

④ 若 A, B 为方阵, 则 A 可逆当且仅当 B 可逆.

(3) (行等价不变量) 若矩阵 $A \sim^r B$, 则

① A, B 具有相同的阶次.

② $R(A) = R(B)$.

③ A, B 的列向量组的线性相关性相同.

④ 若 A, B 为方阵, 则 A 可逆当且仅当 B 可逆.

⑤ $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解 (即具有相同的解集).

- (4) 设 A 为方阵, 若 A 经过若干次初等行变换变为矩阵 B , 则 $|A| = |B|$.
- (5) 若 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解, 则 $R(A) = R(B)$.
- (6) 两个向量组等价当且仅当这两个向量组的秩相等.
- (7) 向量组 $I: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由 $II: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则 $r \leq s$.
- (8) 向量组 $I: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的秩为 p , 向量组 $II: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的秩为 q .
若向量组 I 可以向量组 II 线性表示, 则 $p \leq q$.
- (9) 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 进行有限次初等行变换化为矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.
若 $\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 则 $\beta_3 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2$.
- (10) 若向量 α_1, α_2 线性无关, α_2, α_3 线性无关, 则 α_1, α_3 线性无关.
- (11) $A_{m \times n} B_{n \times l} = O, B \neq 0$, 则 $R(A) < n$.
- (12) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则 α_1 可以由 α_2, α_3 线性表示, α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.
- (13) $A_{m \times n}$ 为列满秩矩阵, 即 $R(A) = n$
 \Leftrightarrow 矩阵 A 的标准形为 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$
 \Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $PA = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.
 $\Leftrightarrow A$ 可以经过有限次初等行变换化为矩阵 B .
 $\Leftrightarrow A$ 的列向量组线性无关.
 \Leftrightarrow 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有唯一零解.
 \Rightarrow 左消去律成立. 即若 $AX = AY$, 则 $X = Y$.
 \Rightarrow 左保秩. 即 $R(AB) = R(B)$.
- (14) $A_{n \times n}$ 为可逆矩阵
 \Leftrightarrow 存在矩阵 B , 使得 $AB = E$.
 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$, 即矩阵 A 为非奇异的.
 $\Leftrightarrow R(A) = n$, 即矩阵 A 为满秩的.
 $\Leftrightarrow A \sim E_n \Leftrightarrow A \sim^r E \Leftrightarrow A \sim^c E$
 \Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $PA = E$.
 $\Leftrightarrow A$ 可以经过有限次初等行变换化为矩阵 E .
 $\Leftrightarrow A$ 的列 (行) 向量组线性无关.
 \Leftrightarrow 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有唯一零解.
 $\Leftrightarrow A$ 没有零特征值.
 \Rightarrow 左右消去律成立. 即若 $AX = AY$, 则 $X = Y$; 若 $XA = YA$, 则 $X = Y$.

\Rightarrow 保秩. 即 $R(AB) = R(BA) = R(B)$.

(15) $R(A_{m \times n}) = 1$

\Leftrightarrow 存在非零向量 α, β , 使得 $A = \alpha\beta^T$.

$\Leftrightarrow A$ 的行 (列) 向量组两两成比例.

\Rightarrow 若 A 为方阵, 则 $A^k = (\alpha^T \beta)^{k-1} A$.

2. 填空题 (每空 3 分, 共 18 分):

(1) 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的 3 个解向量. $\alpha_1 = (2, 3, 4, 5)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (2, 4, 6, 8)^T$, 则该方程组的通解为_____.

(2) 已知 4 阶矩阵 A 的秩为 3, α_1, α_2 为非齐次线性方程 $AX = \beta (\beta \neq 0)$ 的两个不相等的解, 则 $AX = 0$ 的通解为_____.

(3) 设 3 阶方阵 A 的各行元素之和均为 0, 且 $R(A) = 2$, 则 $AX = 0$ 的通解为_____.

(4) 设 n 阶方阵 A 的各行元素之和均为 0, 且 $R(A) = n - 1$, 则 $AX = 0$ 的通解为_____.

(5) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 = (2, 3, 4, 5)^T, \alpha_3 = (3, 4, 5, 6)^T, \alpha_4 = (4, 5, 6, 7)^T$, 则该向量组的秩为_____.

(6) 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ 线性相关, 则 $a =$ _____.

3. 计算题 (每题 10 分, 共 40 分):

(1) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 列向量组的一个最大无关组, 并将

其余列向量用最大无关组线性表示.

(2) λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2, \end{cases}$$

① 有唯一解; ② 无解; ③ 无穷多个解, 并求通解.

(3) 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$. 求方程 $AX = \beta$ 的通解.

$$(4) \text{ 求解非齐次线性方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 & = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 3 \end{cases}$$

4. 证明题 (每题 3 分, 共 12 分):

(1) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关,

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 \end{cases}$$

证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

(2) 设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵, 其中 $n < m$. 若 $AB = E$, 证明 B 的列向量组线性无关.

(3) $A_{m \times n} B_{n \times s} = 0$, 证明 $R(A) + R(B) \leq n$.

(4) 证明: $R(A^T A) = R(A)$.

(提示: 先证 $A^T A X = 0$ 和 $A X = 0$ 同解. 然后由解集的秩 $R_S = n - r$ 得证.)

5. 附加题 (20 分):

(1) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) K_{n \times m}$. 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 的秩为 $R(K)$.

矩阵的语言: 已知 A 列满秩, 证明 $R(AK) = R(K)$.

提示: 设 $R(K) = r$, 取矩阵 K 列向量组的最大无关组, 不妨设为 $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. 则

$$\beta_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \gamma_i.$$

所以证明 β_1, \dots, β_r 为 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ 的最大无关组即可.

根据最大无关组定义只需要证明: ① β_1, \dots, β_r 线性无关; ② 任意 β_i 可由 β_1, \dots, β_r 线性表示.