

Lec-6. 分布函数、连续型随机变量

主讲教师：吴利苏 (wulisu@sdust.edu.cn)

主 页：<http://wulisu.cn>

目录

1. 分布函数

2. 连续型随机变量

3. 典型连续型随机变量

- 均匀分布
- 指数分布
- 正态分布

随机变量的分布函数

- 对于离散型随机变量，可以用分布律来刻画，比如：表格和概率公式.
- 如何刻画非离散型随机变量？

随机变量的分布函数

- 对于离散型随机变量，可以用分布律来刻画，比如：表格和概率公式.
- 如何刻画非离散型随机变量？ \Rightarrow 分布函数.

分布函数

定义

设 X 是一个随机变量, 函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

为 X 的概率分布函数, 简称分布函数.

注

(1) $F(X)$ 是增函数, 定义域是 \mathbb{R} , 值域是 $[0, 1]$;

注

- (1) $F(X)$ 是增函数, 定义域是 \mathbb{R} , 值域是 $[0, 1]$;
- (2) 任何随机变量都有相应的分布函数;

注

- (1) $F(X)$ 是增函数, 定义域是 \mathbb{R} , 值域是 $[0, 1]$;
- (2) 任何随机变量都有相应的分布函数;
- (3) 不同的随机变量, 它们的分布函数可以相同;

注

- (1) $F(X)$ 是增函数, 定义域是 \mathbb{R} , 值域是 $[0, 1]$;
- (2) 任何随机变量都有相应的分布函数;
- (3) 不同的随机变量, 它们的分布函数可以相同;
- (4) 分布函数的几何意义: $F(x)$ 的值表示 X 落在 $(-\infty, x]$ 上的概率;

注

- (1) $F(X)$ 是增函数, 定义域是 \mathbb{R} , 值域是 $[0, 1]$;
- (2) 任何随机变量都有相应的分布函数;
- (3) 不同的随机变量, 它们的分布函数可以相同;
- (4) 分布函数的几何意义: $F(x)$ 的值表示 X 落在 $(-\infty, x]$ 上的概率;
- (5) 分布函数的用途: 可以给出随机变量 X 落入任意一个范围的可能性.

X 的分布函数为 $F(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
则

- $$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

X 的分布函数为 $F(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
则

- $$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$
- $$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a).$$

X 的分布函数为 $F(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
则

- $$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$
- $$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a).$$
- $$\begin{aligned} P\{a < X < b\} &= P\{a < X \leq b\} - P\{X = b\} \\ &= F(b) - F(a) - P\{X = b\}. \end{aligned}$$

X 的分布函数为 $F(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
则

- $$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$
- $$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a).$$
- $$\begin{aligned} P\{a < X < b\} &= P\{a < X \leq b\} - P\{X = b\} \\ &= F(b) - F(a) - P\{X = b\}. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} P\{a \leq X \leq b\} &= P\{a < X \leq b\} + P\{X = a\} \\ &= F(b) - F(a) + P\{X = a\}. \end{aligned}$$

例

设 X 的分布律为

X	-1	2	3
P_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求

(1) X 的分布函数,

(2) $P\{X \leq \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\}$, $P\{2 \leq X \leq 3\}$.

解:(1) 当 $x < -1$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x < -1\} = 0$$

当 $-1 \leq x < 2$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}$$

当 $2 \leq x < 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1\} + P\{X = 2\} = \frac{3}{4}$$

当 $x \geq 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 1$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1; \\ \frac{1}{4} & -1 \leq x < 2; \\ \frac{3}{4} & 2 \leq x < 3; \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

解: (2) $P\{X \leq \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$

$$P\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \leq X \leq 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\} = \frac{3}{4}. \quad \square$$

离散型随机变量的分布函数

一般, 设离散型 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$, 则 X 的分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\} = \sum_{x_k \leq x} p_k,$$

分布函数不连续, 在 $x = x_k$ 处有跳跃, 跳跃值为 $p_k = P\{X = x_k\}$.

例

设随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1; \\ 0.2 & -1 \leq x < 3; \\ 0.6 & 3 \leq x < 4; \\ 1 & x \geq 4. \end{cases}$$

求 X 的分布律.

解: $F(x)$ 只在 $-1, 3, 4$ 跳跃, 跳的幅度分别是 $0.2, 0.4, 0.4$. 所以, 分布律为

X	-1	3	4
P	0.2	0.4	0.4

离散型随机变量的分布函数的性质

性质

设 X 是离散型随机变量, $F(X)$ 是 X 的分布函数. 则

(1) $0 \leq F(x) \leq 1;$

离散型随机变量的分布函数的性质

性质

设 X 是离散型随机变量, $F(X)$ 是 X 的分布函数. 则

(1) $0 \leq F(x) \leq 1;$

(2) $F(x)$ 单调不减, 即对任意 $x_1 < x_2$, 有
 $F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0;$

离散型随机变量的分布函数的性质

性质

设 X 是离散型随机变量, $F(X)$ 是 X 的分布函数. 则

- (1) $0 \leq F(x) \leq 1$;
- (2) $F(x)$ 单调不减, 即对任意 $x_1 < x_2$, 有
$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0;$$
- (3) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$;

离散型随机变量的分布函数的性质

性质

设 X 是离散型随机变量, $F(X)$ 是 X 的分布函数. 则

- (1) $0 \leq F(x) \leq 1$;
- (2) $F(x)$ 单调不减, 即对任意 $x_1 < x_2$, 有
$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0;$$
- (3) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$;
- (4) $F(x)$ 是右连续函数, 即
$$F(x+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} F(x + \Delta x) = F(x).$$
但 $F(x)$ 不一定是连续函数.

例

一个靶子是半径为 $2m$ 的圆盘, 设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比, 并设射击都能中靶, 以 X 表示弹着点与圆心的距离, 求 X 的分布函数.

解: 当 $x < 0$ 时, $\{X \leq x\}$ 是不可能事件, 于是

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 0,$$

当 $0 \leq x \leq 2$ 时,

$$P\{0 \leq X \leq x\} = kx^2.$$

取 $x = 2$, 有 $P\{0 \leq X \leq 2\} = k \cdot 2^2$, 而
 $P\{0 \leq X \leq 2\} = 1$, 则 $k = \frac{1}{4}$, 即

$$P\{0 \leq X \leq x\} = \frac{x^2}{4}.$$

从而

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X < 0\} + P\{0 \leq X \leq x\} = \frac{x^2}{4}.$$

当 $x \geq 2$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1.$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2; \\ 1 & x \geq 4. \end{cases}$$

图像是一个连续曲线.

□

本题中, 分布函数 $F(x)$ 可写为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

$$\text{其中 } f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & 0 < t < 2; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

即 $F(x)$ 是非负函数 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, x]$ 上的积分. 此时,
称 X 为连续型随机变量. (使得 $F(X)$ 连续 的随机变量)

连续型随机变量及其概率密度

定义

若对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负可积函数 $f(x)$, 使得对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

则称 X 为连续型随机变量. $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度.

连续型随机变量及其概率密度

定义

若对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负可积函数 $f(x)$, 使得对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

则称 X 为连续型随机变量. $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度.

改变概率密度 $f(x)$ 的个别点的取值不影响 $F(x)$ 的取值.
(\Rightarrow 注3不同的随机变量可以有相同的分布函数.)

性质

设 $f(x)$ 是连续型随机变量 X 的概率密度, 则

(1) $f(x) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$;

(3) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \leq x_2$,

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt.$$

- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$

- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$
- $P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = \int_a^{+\infty} f(x) dx;$

- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$
- $P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = \int_a^{+\infty} f(x) dx;$
- $\forall a \in \mathbb{R}, P\{X = a\} = 0,$ 且

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\};$$

- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$
- $P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = \int_a^{+\infty} f(x) dx;$
- $\forall a \in \mathbb{R}, P\{X = a\} = 0,$ 且

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\};$$

- $\{X = a\}$ 是不可能事件 $\Rightarrow P\{X = a\} = 0;$
而 $P\{X = a\} = 0 \nRightarrow \{X = a\}$ 是不可能事件;

- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$
- $P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = \int_a^{+\infty} f(x) dx;$
- $\forall a \in \mathbb{R}, P\{X = a\} = 0,$ 且

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\};$$

- $\{X = a\}$ 是不可能事件 $\Rightarrow P\{X = a\} = 0;$
而 $P\{X = a\} = 0 \nRightarrow \{X = a\}$ 是不可能事件;
- 对于连续型随机变量 X , 事件 D 发生的概率为

$$P\{X \in D\} = \int_D f(x) dx, \quad \forall D \subset \mathbb{R}.$$

性质

设 $f(x)$ 是连续型随机变量 X 的概率密度, 则

(4) 在 $f(x)$ 的连续点 x , $F'(x) = f(x)$, 即

$$\begin{aligned} f(x) = F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

其中 $P\{x < X \leq x + \Delta x\} \approx f(x) \cdot \Delta x$ 表示 X 落在 x 附近 $(x, x + \Delta x]$ 上的概率近似等于 $f(x)\Delta x$.

注

(1) $f(x_2) > f(x_1)$ 表示落在 x_2 附近的概率大于落在 x_1 附近的概率, 而不是取 x_2 的概率大于取 x_1 的概率;

(2) $f(x)$ 的值是可以大于 1;

(3) $f(x) \begin{matrix} \xrightarrow{\int_{-\infty}^x f(t) dt} \\ \xleftarrow{\frac{d}{dx} F(x)} \end{matrix} F(x).$

例

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x < 3; \\ 2 - \frac{x}{2} & 3 \leq x \leq 4; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 确定常数 k .
- (2) 求 X 的分布函数 $F(x)$.
- (3) 求 $P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\}$.

解: (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 得 $k = \frac{1}{6}$.

(2)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{x^2}{12} & 0 \leq x < 3; \\ -3 + 2x - \frac{x^2}{4} & 3 \leq x < 4; \\ 1 & x \geq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$(3) P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\} = F(\frac{7}{2}) - F(1) = \frac{41}{48}. \quad \square$$

例

设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{x}{3} & 0 \leq x < 3; \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

求 X 的概率密度 $f(x)$.

$$\text{解: } f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 < x < 3; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

□

典型的连续型随机变量：

- 均匀分布;
- 指数分布;
- 正态分布.

均匀分布

定义

若 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

则称 X 在 (a, b) 上服从**均匀分布**, 记为 $X \sim U(a, b)$.

性质

均匀分布具有等可能性.

即 $\forall a < k < k + l < b$, 均有

$$P\{k < X < k + l\} = \int_k^{k+l} \frac{1}{b-a} dt = \frac{l}{b-a},$$

与 k 无关, 仅与 l 有关. 即服从 $U(a, b)$ 上的均匀分布的 X 落入 (a, b) 中任意子区间上的概率只与区间长度有关, 与区间所处位置无关. 即 X 落入 (a, b) 中的等长度的任意子区间上是等可能的.

若 $X \sim U(a, b)$, 则 $P\{a < X < b\} = 1$,
且分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b; \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

当 $a \leq x \leq b$ 时,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

均匀分布的概率计算

若 $X \sim U(a, b)$, 则 $\forall I \subset \mathbb{R}$, 有

法一:

$$P\{X \in I\} = \int_I f(x) dx,$$

法二:

$$P\{X \in I\} = \frac{I \cap (a, b) \text{ 的长度}}{(a, b) \text{ 的长度}}.$$

例

在区间 $(-1, 2)$ 上随机取一数 X , 求

- (1) 写出 X 的概率密度函数;
- (2) 该数在 $(-0.5, 1)$ 中的概率;
- (3) 该数为正数的概率.

例

在区间 $(-1, 2)$ 上随机取一数 X , 求

- (1) 写出 X 的概率密度函数;
- (2) 该数在 $(-0.5, 1)$ 中的概率;
- (3) 该数为正数的概率.

解:(1) X 在 $(-1, 2)$ 上服从均匀分布, 故

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 < x < 2; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(2) P\{-0.5 < X < 1\} = \int_{-0.5}^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$(3) P\{X > 0\} = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{2}{3}.$$

□

指数分布

定义

若 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为常数, 则称 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布. 记为 $X \sim E(\theta)$.

$$\text{分布函数: } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0; \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

性质 (指数分布的无记忆性)

设 $X \sim E(\theta)$, 则 $\forall s, t > 0$, 有

$$P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\}.$$

性质 (指数分布的无记忆性)

设 $X \sim E(\theta)$, 则 $\forall s, t > 0$, 有

$$P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\}.$$

证明:

$$\begin{aligned} P\{X > s + t | X > s\} &= \frac{P\{\{X > s + t\} \cap \{X > s\}\}}{P\{X > s\}} \\ &= \frac{P\{X > s + t\}}{P\{X > s\}} = \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} \\ &= e^{-\frac{t}{\theta}} = P\{X > t\} \quad \square \end{aligned}$$

若把 X 记为一元件的寿命. 已知元件使用了 s 小时, 总共能使用至少 $s + t$ 小时的概率与从开始使用时算起它至少能使用 t 小时的概率相等. 元件对它已使用过 s 小时没有记忆.

例

设某人电话通话时间 X (分钟) 服从指数分布, 概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} e^{-\frac{x}{15}} & x > 0; \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

求

- (1) 他通话时间在 10 ~ 20 分钟之间的概率.
- (2) 若他已打了 10 分钟, 求他继续通话超过 15 分钟的概率.(即, 若他已打了 10 分钟, 求他总共通话超过 25 分钟的概率).

解: (1) $P\{10 < X < 20\} = \int_{10}^{20} f(x) dx = e^{-\frac{2}{3}} - e^{-\frac{4}{3}}.$

利用分布函数 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{15}} & x > 0; \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$

$$P\{10 < X < 20\} = F(20) - F(10) = e^{-\frac{2}{3}} - e^{-\frac{4}{3}}.$$

(2) 指数分布无记忆性.

$$\begin{aligned} P\{X > 25 | X > 10\} &= P\{X > 15\} \\ &= \int_{15}^{+\infty} f(x) dx = e^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

例

设一地段相邻两次交通事故的间隔时间 (小时) X 服从参数为 $\frac{13}{2}$ 的指数分布. 求已知在过去的 13 小时中没有发生交通事故, 那么在未来的 2 小时内不发生事故的概率.

例

设一地段相邻两次交通事故的间隔时间 (小时) X 服从参数为 $\frac{13}{2}$ 的指数分布. 求已知在过去的 13 小时中没有发生交通事故, 那么在未来的 2 小时内不发生事故的概率.

$$\text{解: } X \sim E(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} = \frac{13}{2}, f(x) = \begin{cases} \frac{2}{13} e^{-\frac{2x}{13}} & x > 0; \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P\{X > 15 | X > 13\} &= P\{X > 2\} \\ &= \int_2^{+\infty} f(x) dx = 1 - F(2) = e^{-\frac{4}{13}}. \end{aligned} \quad \square$$

指数分布的用途

- 表示独立随机事件发生的间隔, 比如旅客进机场的时间间隔、维基百科新条目出现的时间间隔等等.
- 在排队登记中, 一个顾客接受服务的时间长短也可用指数分布近似.
- 无记忆性的现象 (连续时).

下次课介绍正态分布！