《线性代数》第一章作业（4 月 22 日提交）

临班 370

2023 年 4 月 14 日

班级:______________ 姓名:_____________ 学号:_________________

1. 判断题（正确请说明理由，错误请给出反例. 每题 5 分，共 10 分）:

（1）$\det(a_{ij}+b_{ij})=\det(a_{ij})+\det(b_{ij})$.

（2）$\det(k\cdot a_{ij})=k\cdot\det(a_{ij})$.

其中 $\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

2. 填空题 (每空 5 分，共 15 分):

(1) 排列 53681742 的逆序数是_________.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 中元素 a 的代数余子式是_________.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=7$, 则 $\begin{vmatrix} x_1 & -y_1 & z_1 \\ 2x_3 & -2y_3 & 2z_3 \\ 3x_2 & -3y_2 & 3z_2 \end{vmatrix}=$_________.

2. 计算题 (1-6 题每题 10 分，第 7 题 15 分，共 75 分):

(1) 用行列式递归定义 $D_4=\det(a_{ij})=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$, 计算友行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

（2）用降阶法计算数字行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

(3) 设行列式 D 如上，用展开定理计算 $A_{31}-2A_{33}+3A_{34}$.

(4) 用求和法计算循环行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

(5) 用化上/下三角形行列式计算爪形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & c & c & \cdots & c \\ c & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $a_0a_1a_2\cdots a_{n-1}\neq 0$.

(6) 用升阶法/加边法将第 (4) 题中行列式化为爪形行列式，并求值.

(7) 用范德蒙德行列式计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}.$$

3. 探究题（三对角行列式和斐波那契数列，选做 50 分）.

(1) 用 (第二) 数学归纳法证明三对角行列式

$$D=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}_{n\times n}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

(2) 利用 (1) 计算

$$F_n=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}\qquad n\geq 2.$$

由

$$\begin{cases}\alpha+\beta & =1\\ \alpha\beta & =-1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\alpha & =\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \beta & =\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}\quad or\quad \begin{cases}\alpha & =\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ \beta & =\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}.$$

(3) 将 F_n 沿第一行展开，得

$$\begin{aligned}F_n&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}\\ &=F_{n-1}+F_{n-2}\end{aligned}$$

令 $F_1=1$, 则数列 $\{F_n\}$=$\{1,1,2,3,5,8,\cdots\}$ 就是斐波那契数列!

由 (2) 知斐波那契数列的通项为

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$