

# 线性代数-5

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学, 数学学院

# 本次课内容

1. 矩阵的定义
2. 特殊矩阵
3. 矩阵的应用
4. 矩阵的运算

# 矩阵

## 定义 (矩阵)

由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$ , ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ), 排成的  $m$  行  $n$  列的数表称为  $m$  行  $n$  列的矩阵, 简称  $m \times n$  矩阵. 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常可记为大写字母的  $A$ 、 $A_{m \times n}$ 、 $(a_{ij})$ 、 $(a_{ij})_{m \times n}$ .

# 矩阵

## 定义 (矩阵)

由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$ , ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ), 排成的  $m$  行  $n$  列的数表称为  $m$  行  $n$  列的矩阵, 简称  $m \times n$  矩阵. 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常可记为大写字母的  $A$ 、 $A_{m \times n}$ 、 $(a_{ij})$ 、 $(a_{ij})_{m \times n}$ .

- 元素为实数的矩阵称为实矩阵; 元素为复数的矩阵称为复矩阵.

# 特殊矩阵

- 方阵.

$m = n$ , 即行数和列数都为  $n$  的矩阵, 称为  $n$  阶方阵. 此时可记为  $A_n$ .

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

# 特殊矩阵

- 方阵.

$m = n$ , 即行数和列数都为  $n$  的矩阵, 称为  $n$  阶方阵. 此时可记为  $A_n$ .

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 行矩阵 (行向量).

$m = 1$ , 即只有一行的矩阵,

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

称为行矩阵, 也称为行向量. 为避免混淆, 行矩阵也记为

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

# 特殊矩阵

- 列矩阵（列向量）.  
 $n = 1$ , 即只有一列的矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵, 也称为列向量.

# 特殊矩阵

- 列矩阵（列向量）.

$n = 1$ , 即只有一列的矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵, 也称为列向量.

- 零矩阵.

$a_{ij} = 0, \forall i, j$ , 元素全为零的矩阵. 记为  $O$ .



# 特殊矩阵

- 上 (下) 三角矩阵.

$a_{ij} = 0, i > j$ , 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能是对角元和主对角线之上的元素.

$$A_{\text{上}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 特殊矩阵

- 上(下)三角矩阵.

$a_{ij} = 0, i > j$ , 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能是对角元和主对角线之上的元素.

$$A_{\text{上}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_{\text{下}} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0, i < j$ , 即主对角线上方元素全为零的方阵, 称为下三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能是对角元和主对角线之下的元素.

# 特殊矩阵

- 对角矩阵.

$a_{ij} = 0, i \neq j$ , 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角阵可简记为  $D = \mathbf{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ .

# 特殊矩阵

- 对角矩阵.

$a_{ij} = 0, i \neq j$ , 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角阵可简记为  $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ .

- 单位矩阵.

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

即对角元全为 1 的对角阵, 称为单位阵. 记为  $E_n$  或  $E$ .

- 对称矩阵.

$a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ , 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{\text{对}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 特殊矩阵

- 对称矩阵.

$a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ , 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{\text{对}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_{\text{反}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 反对称矩阵.

$a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$ , 即沿着对角线对称元素互为相反数的方阵, 称为反对称阵.

# 矩阵的应用-矩阵和线性方程组

例 (线性方程组的矩阵表示)

$m$  个方程  $n$  个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组的矩阵表示可写为  $AX = \boldsymbol{\beta}$ .



令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组的矩阵表示可写为  $AX = \beta$ .

其中  $A$  称为线性方程组的系数矩阵,  $B$  称为线性方程组的增广矩阵;

令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组的矩阵表示可写为  $AX = \beta$ .

其中  $A$  称为线性方程组的系数矩阵,  $B$  称为线性方程组的增广矩阵;  
 $X$  和  $\beta$  分别称为线性方程组的未知量矩阵和常数项矩阵.

## 矩阵的应用-矩阵和线性变换

例 (线性替换和矩阵)

给定一个  $n$  维向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 取线性替换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (2)$$

则得  $n$  维向量  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . 矩阵  $A = (a_{ij})$  表示上面线性替换, 则有

$$Y = AX$$

## 矩阵的应用-矩阵和线性变换

例 (线性替换和矩阵)

给定一个  $n$  维向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 取线性替换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (2)$$

则得  $n$  维向量  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . 矩阵  $A = (a_{ij})$  表示上面线性替换, 则有

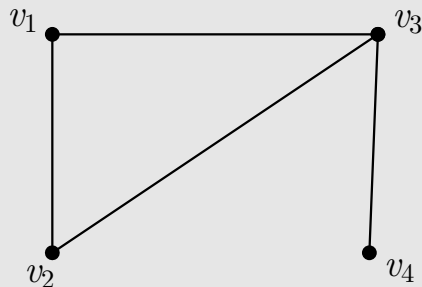
$$Y = AX$$

- 线性替换和  $n$  阶方阵一一对应.

例 (图的矩阵表示)

- 图 (Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

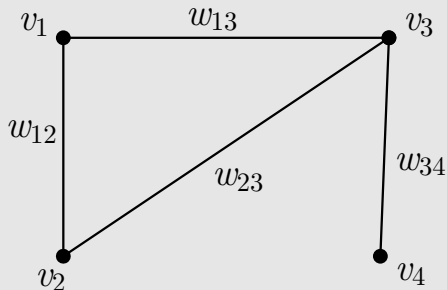


# 矩阵的应用-矩阵和图

例 (图的矩阵表示)

- 加权图 (Weighted Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ w_{12} & 0 & w_{23} & 0 \\ w_{31} & w_{32} & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & w_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

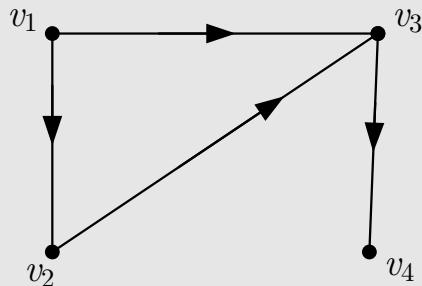


# 矩阵的应用-矩阵和图

例 (图的矩阵表示)

- 有向图 (Direct Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

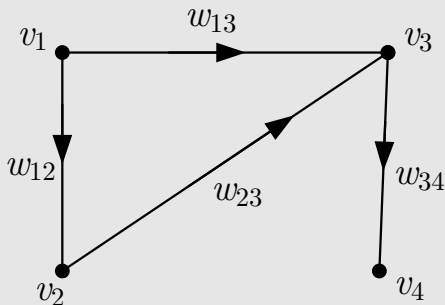


# 矩阵的应用-矩阵和图

例 (图的矩阵表示)

- 有向加权图 (Direct Weighted Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





## 例 (数字图像的存储和处理)

- 数字图像在计算机中都是以矩阵的形式存储和显示的.
  - 比如, 一张  $600 \times 800$  像素的图像在计算机中就是一个  $600 \times 800$  的矩阵.
    - 二值图像的矩阵的  $a_{ij}$  取值为 0 和 1;
    - 灰度图像的矩阵的  $a_{ij}$  取值为  $0 - 256$  (即一字节 8 位二进制数的范围);
    - 彩色图像的矩阵的  $a_{ij}$  取值为一个三维向量  $(R, G, B)$ .
- 图像处理和编辑就是对矩阵的处理.
  - 通常是用一个低阶方阵 (称为模板或者算子) 去改变图像矩阵的每一个像素值,

## 矩阵的应用-矩阵和数字图像

- 二阶 Laplace 检测算子:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4_{\Delta} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4_{\Delta} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8_{\Delta} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

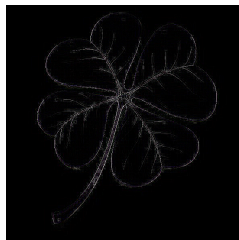


图: 边缘提取

# 矩阵的运算

- $A = B$
- $A + B$
- $\lambda \cdot A$
- $AB$
- $A^k$  &  $f(A)$
- $A^T$
- $|A|$
- $A^*$
- $\text{tr}(A)$

## 矩阵的相等

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $m = m'$ ,  $n = n'$ , 则称  $A$  和  $B$  是同型矩阵.

# 矩阵的相等

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $m = m'$ ,  $n = n'$ , 则称  $A$  和  $B$  是同型矩阵.
- $A, B$  同型, 则

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$$

# 矩阵的相等

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $m = m'$ ,  $n = n'$ , 则称  $A$  和  $B$  是同型矩阵.
- $A, B$  同型, 则

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$$

- 例:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

# 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

- $A, B$  同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$



# 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

- $A, B$  同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

- 性质:

- 交换律:  $A + B = B + A$
- 结合律:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

# 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

- $A, B$  同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

- 性质:

- 交换律:  $A + B = B + A$
- 结合律:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

- 负矩阵:

$$-A \triangleq (-a_{ij})$$

# 矩阵的加法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

- $A, B$  同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

- 性质:

- 交换律:  $A + B = B + A$
- 结合律:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

- 负矩阵:

$$-A \triangleq (-a_{ij})$$

- 矩阵减法:  $A, B$  同型

$$A - B \triangleq A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$$

## 矩阵的数乘

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

# 矩阵的数乘

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .



$$\lambda A \triangleq (\lambda a_{ij})_{m \times n}$$

# 矩阵的数乘

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .



$$\lambda A \triangleq (\lambda a_{ij})_{m \times n}$$

● 性质：

- 结合律：  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- 矩阵对数的分配律：  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 数对矩阵的分配律：  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

# 矩阵的乘法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

# 矩阵的乘法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $n = m'$  同型, 则

$$AB \triangleq (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{1n})_{m \times n'}$$

$c_{ij}$  为  $A$  的第  $i$  行与  $B$  的第  $j$  列的内积.



# 矩阵的乘法

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (a_{ij})_{m' \times n'}$ .

- 如果  $n = m'$  同型, 则

$$AB \triangleq (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{1n})_{m \times n'}$$

$c_{ij}$  为  $A$  的第  $i$  行与  $B$  的第  $j$  列的内积.

- 性质:

- 不满足交换律:  $AB$  和  $BA$  可能不相等.
- 结合律:  $(AB)C = A(BC)$
- 数乘和矩阵乘法可交换:  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- 分配律:  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(B + C)A = BA + CA$
- **$EA = AE = A$**

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- $AB$  和  $BA$  可能不同型 (*i.e.* 不相等) .

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求  $AB$  和  $BA$ .

解：

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求  $AB$  和  $BA$ .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求  $AB$  和  $BA$ .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

- $AB$  和  $BA$  同型当且仅当  $A$  和  $B$  是同阶方阵。但即使同型也可能不相等.

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求  $AB$  和  $BA$ .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

- $AB$  和  $BA$  同型当且仅当  $A$  和  $B$  是同阶方阵。但即使同型也可能不相等.
- 对两个  $n$  阶方阵  $A, B$ , 若  $AB = BA$ , 则称方阵  $A$  和  $B$  是可交换的.



例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求  $AB$  和  $BA$ .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

- $AB$  和  $BA$  同型当且仅当  $A$  和  $B$  是同阶方阵。但即使同型也可能不相等.
- 对两个  $n$  阶方阵  $A, B$ , 若  $AB = BA$ , 则称方阵  $A$  和  $B$  是**可交换**的.
- **纯量阵  $\lambda E$**  与任何同阶方阵可交换.

# 矩阵的幂次

- 设  $A$  为  $n$  阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

# 矩阵的幂次

- 设  $A$  为  $n$  阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$

# 矩阵的幂次

- 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$

例

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \quad \lambda = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

证明  $A^k = \lambda^{k-1} A$ .

- 矩阵多项式：将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的  $x$  换为方阵  $A$ ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

# 矩阵多项式

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的  $x$  换为方阵  $A$ ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

- $(AB)^k = A^k B^k$ ,
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ,
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ,

# 矩阵多项式

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的  $x$  换为方阵  $A$ ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

- 只有  $A, B$  可交换时, 下面等式才成立.

- $(AB)^k = A^k B^k,$
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2,$
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2,$

# 矩阵多项式

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的  $x$  换为方阵  $A$ ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

- 只有  $A, B$  可交换时, 下面等式才成立.
  - $(AB)^k = A^k B^k$ ,
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ,
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ,
- 矩阵  $A$  的任意两个矩阵多项式是可交换的,

$$f(A)g(A) = g(A)f(A).$$



# 矩阵的转置

- 令  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 定义  $A$  的转置

$$A^T \triangleq (a_{ji})_{n \times m}$$

- 性质:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

- 例: 计算  $(AB)^T$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 方阵的行列式

- $A$  为对称阵, 当且仅当  $A^T = A$ .

例

设  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $X^T X = 1$ ,

$$H = E - 2XX^T.$$

证明  $H$  为对称阵, 且  $HH^T = E$ .

证明:

# 方阵的行列式

- $A$  为  $n$  阶方阵, 得到方阵的行列式, 记为  $\det A$  或  $|A|$ .
- 性质:
  - $|A^T| = |A|$
  - $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$

# 方阵的伴随矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- $A$  的伴随矩阵  $A^*$  定义为:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式.

- 注意:  $A^*$  中的  $A_{ii}$  的指标有个转置.

# 方阵的迹

例  
求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵

性质

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

- $A$  为  $n$  阶方阵,  $A$  的迹  $\text{tr}A$  定义为

$$\text{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

- 性质:

- $\text{tr}A^T = \text{tr}A$
- $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \text{tr}A$
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B$

## 小结

- $A = B$
- $A + B$
- $\lambda \cdot A$
- $AB$
- $A^k \& f(A)$
- $A^T$
- $|A|$
- $A^*$
- $\text{tr} A$

# 作业

- 你当前学习/知道的哪些课题涉及到矩阵？如若了解，请给出一些具体的关键词.
- P52-53. 1-(5)、2、5、6-(2)、7-(2).



# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2022 年 9 月 14 日