Lec-2. 等可能概型（古典概型）

主讲教师：吴利苏 (wulisu@sdust.edu.cn)
主　　页：wulisu.cn

目录

1. 古典概型
2. 例子
    - 取球模型
    - 球放杯子模型
    - 生日问题
    - 分房问题
    - 超几何分布问题
    - 抽签问题
    - 随机数整除模型
    - 配对问题
3. 几何概型
    - 会面问题

引例

- 抛硬币观察正反面，样本空间

$$S=\{H,T\}.$$

- 掷骰子观察点数，样本空间

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

古典概型

共同点:

- (有限性) 样本空间 S 中样本点有限.
- (等可能性) 出现每一个样本点的概率相等.

古典概型

共同点:

- (有限性) 样本空间 S 中样本点有限.
- (等可能性) 出现每一个样本点的概率相等.

满足以上两个特点的试验称为等可能概型(古典概型).

古典概型概率计算公式

设古典概型的样本空间 $S=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 由 n 个样本点构成, A 为任一包含 m 个样本点的事件, 则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}.$$

例 (取球模型)

设袋中有 6 只球, 其中 4 只白球, 2 只红球, 从袋中取球两次, 每次随机取一只.

- 无放回取样, 第一次取一只球, 不放回, 第二次从剩余的球中再取一球.
- 放回抽样, 第一次取一只球, 放回, 第二次从全部的球中再取一球.

求

(1) 取到两只白球的概率.

(2) 取到两只同色球的概率.

(3) 取到两次球中至少有一只白球的概率.

解: 设 A 表示事件取到两只白球, B 表示事件取到两只白球, C 表示事件至少有一只白球.

(a) 无放回取样:

(1) 样本空间中的元素为 $6 \times 5 = 30$, 事件 A 包含 $4 \times 3 = 12$, 则 $P(A) = \frac{4\times 3}{6\times 5} = \frac{2}{5}$.

(2) $P(B) = \frac{2\times 1}{6\times 5} = \frac{1}{15}$, $P(A) + P(B) = \frac{7}{15}$.

(3)$P(C) = 1 - P(B) = \frac{14}{15}$. 或者 $P(C) = \frac{4\times 3}{6\times 5} + \frac{4\times 2}{6\times 5} + \frac{2\times 4}{6\times 5} = \frac{14}{15}$.

(b) 放回抽样:

(1) 样本空间中的元素为 $6 \times 6 = 36$, 事件 A 包含 $4 \times 4 = 16$, 则 $P(A) = \frac{4\times 4}{6\times 6} = \frac{4}{9}$.

(2) $P(B) = \frac{2\times 2}{6\times 6} = \frac{1}{9}$, $P(A) + P(B) = \frac{5}{9}$.

(3)$P(C) = 1 - P(B) = \frac{8}{9}$. $\square$

例

一般地, 设有 N 个球, 其中 a 个白球, $b = N - a$ 个红球, 采用不放回抽样, 取 n 个球 $(n \leq N)$, 求恰好取到 k 个白球的概率 $(k \leq a)$.

例

一般地, 设有 N 个球, 其中 a 个白球, $b = N - a$ 个红球, 采用不放回抽样, 取 n 个球 $(n \leq N)$, 求恰好取到 k 个白球的概率 $(k \leq a)$.

解: 记 $A_k = \{$恰好取到k 个白球$\}$,

总样本点 $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

$$P(A_k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n}.$$

练习

掷 3 颗均匀的骰子, 求点数之和为 4 的概率.

练习

掷 3 颗均匀的骰子, 求点数之和为 4 的概率.

解: 记 A 为事件点数之和为 4.

样本空间中的元素为个数 $6\times 6\times 6$,

A 包含 $\{1,1,2\}$, $\{1,2,1\}$, $\{2,1,1\}$.

$$P(A)=\frac{3}{6\times 6\times 6}=\frac{1}{72}.$$

例 (球放杯子模型)

(1) 杯子容量无限, 把 4 个球放到 3 个杯子中, 求第 1, 2 个杯子中各有两个球的概率.

(2) 每个杯子只放一个球, 把 4 个球放到 10 个杯子中, 求第 1 至第 4 个杯子各放一个球的概率.

例 (球放杯子模型)

(1) 杯子容量无限, 把 4 个球放到 3 个杯子中, 求第 1, 2 个杯子中各有两个球的概率.

(2) 每个杯子只放一个球, 把 4 个球放到 10 个杯子中, 求第 1 至第 4 个杯子各放一个球的概率.

解: (1) 记 $A = \{$第 1, 2 个杯子中各有两个球$\}$.
总样本点 3^4, A 包含 $C_4^2 C_2^2$,

$$P(A) = \frac{C_4^2 C_2^2}{3^4} = \frac{2}{27}.$$

(2) 记 A 为事件第 1 至第 4 个杯子中各有一个球. 总样本点 $10 \times 9 \times 8 \times 7$, A 包含 $4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$P(A) = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{210}.$$

例 (生日问题)

某班 20 个学生都是同一年出生的，求

(1) 有 10 个学生生日是 1 月 1 日，另外 10 个是 12 月 31 日的概率.

(2) 至少有两人生日相同的概率?

例 (生日问题)

某班 20 个学生都是同一年出生的, 求

(1) 有 10 个学生生日是 1 月 1 日, 另外 10 个是 12 月 31 日的概率.

(2) 至少有两人生日相同的概率?

解: 记 A 为事件: 有 10 个学生生日是 1 月 1 日, 另外 10 个是 12 月 31 日.

$$P(A) = \frac{C_{20}^{10} C_{10}^{10}}{365^{20}}.$$

记 B 为事件: 至少有两人生日相同.

$$P(B) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-19)}{365^{20}}$$

例 (分房问题)

将张三, 李四, 王五 3 人等可能地分配到 3 间房中, 试求每个房间恰有一人地概率.

例 (分房问题)

将张三, 李四, 王五 3 人等可能地分配到 3 间房中, 试求每个房间恰有一人地概率.

解:$P = \frac{3\times 2}{3^3} = \frac{2}{9}$.

例 (超几何分布问题)

设 N 件产品, 其中有 D 件次品, 从中取出 n 件, 问其中恰有 $k\,(k \leq D)$ 件次品的概率是多少?

例 (超几何分布问题)

设 N 件产品, 其中有 D 件次品, 从中取出 n 件, 问其中恰有 $k\ (k \le D)$ 件次品的概率是多少?

解: $P = \dfrac{C_D^k C_{N-D}^{D-k}}{C_N^n}$.

例 (抽签问题)

袋中有 a 只白球, b 只红球, $k\,(k \le a+b)$ 个人依次在袋中取一只球.

- 放回抽样;
- 不放回抽样.

求第 i 个人取到白球的概率.

解: (1) $p=\frac{a}{a+b}$.
(2) 总样本点 $(a+b)(a+b-1)...(a+b-k+1)=A_{a+b}^k$.
第 i 个取到白球 $C_a^1A_{a+b-1}^{k-1}$

$$P=\frac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}.$$

即 k 个人取球虽先后次序不同, 各人取得白球的概率是一样的. 放不放回一样. 类似地买彩票, 抽奖, 抓阄等.

例 (随机数整除模型)

从 $1 \sim 2000$ 的整数中随机地取一个数. 问取到的整数既不能被 6 整除, 又不能被 8 整除的概率是多少?

例 (随机数整除模型)

从 $1 \sim 2000$ 的整数中随机地取一个数. 问取到的整数既不能被 6 整除, 又不能被 8 整除的概率是多少?

解: 记 A 为事件能被 6 整除. 记 B 为事件能被 8 整除.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(AB)). \end{aligned}$$

其中 $P(A) = \frac{333}{2000}$, $P(B) = \frac{250}{2000}$, $P(AB) = \frac{83}{2000}$(被最小公倍数 24 整除).

所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1500}{2000} = \frac{3}{4}$.

例 (配对问题)

从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 问

(1) 恰有两只配对成双的概率.

(2) 至少有两只配对成双的概率.

例 (配对问题)

从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 问

(1) 恰有两只配对成双的概率.

(2) 至少有两只配对成双的概率.

解: (1) $P=\dfrac{C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1}{C_{12}^4}=\dfrac{16}{33}$.

(2) $P=1-\dfrac{C_6^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{12}^4}$.

例

将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中取去, 这 15 名新生中有 3 名优秀. 问

(1) 每个班级分配到一名优秀的概率.

(2) 3 名优秀分配到同一个班级的概率.

例

将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中取去，这 15 名新生中有 3 名优秀. 问

(1) 每个班级分配到一名优秀的概率.

(2) 3 名优秀分配到同一个班级的概率.

解: (1) 总样本点 $C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$, 每个班级 $3! C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$.

$$P = \frac{3! C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}.$$

(2) $P = \frac{C_3^1 C_{12}^2 C_{10}^5 C_5^5}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}$.

例

某接待站在某一周曾接待过 12 次来访, 已知所有这 12 次接待都是在周二和周四. 问是否可推断接待时间是规定的?

例

某接待站在某一周曾接待过 12 次来访, 已知所有这 12 次接待都是在周二和周四. 问是否可推断接待时间是规定的?

解: 假设没有规定. 每天的接待是等可能的.
总样本点 7^{12}. 12 次接待都是周二和周四 2^{12}.

$$P = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003.$$

小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的 (实际推断原理).
所以, 可推断接待时间是规定的.

几何概型　(样本空间无限)

当随机试验的样本空间是某个区域, 并且任意一点落在度量 (长度, 面积, 体积) 相同的子区域是等可能的, 则事件 A 的概率可定义为

$$P(A) = \frac{S_A}{S},$$

其中 (S 是样本空间的度量, S_A 是事件 A 的子区域的度量.)

当古典概型的试验结果为连续无穷多个时, 就归结为几何概型.

例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到 T 点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人 $t(t < T)$ 时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到 T 时内的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到 T 点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人 $t(t < T)$ 时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到 T 时内的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

解: 设 x 和 y 分别为甲乙两人到达的时刻,
$0 \le x \le T, 0 \le y \le T$, 两人会面的冲要条件
$|x - y| \le t$.

$$P = \frac{S_A}{S} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2}.$$

例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S=\{(x,y) | 0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}$,

$A=\{$构成三角形$\}$

$$A\text{发生} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y>a-x-y; \\ y+(a-x-y)>x; \\ x+(a-x-y)>y. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \frac{a}{2}<x+y<a; \\ 0<x<\frac{a}{2}; \\ 0<y<\frac{a}{2}. \end{cases}$ $\qquad P(A)=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\dfrac{1}{4}.$