线性代数-15

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 20 日

本次课内容

1. 正交向量组

2. Schmidt 正交化

3. 正交矩阵和正交变换

补充: 线性变换

正交向量组

- 内积
$$(X, Y) = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
- 若 $(X, Y) = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组：一组两两正交的非零向量.

正交向量组

- 内积
$$(X, Y) = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
- 若 $(X, Y) = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 一组两两正交的非零向量.

定理 (定理 1: 正交向量组必线性无关)

若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

例 (例 1)

已知
$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$
正交. 求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

标准正交基的定义

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 $e_1, \cdots, e_r$ 为向量空间 $V(V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量, 如果

- $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组基 (最大无关组);
- $e_1, \cdots, e_r$ 两两正交;
- $e_1, \cdots, e_r$ 都为单位向量,

则称 $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组标准正交基.

标准正交基的定义

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 $e_1, \cdots, e_r$ 为向量空间 $V(V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量, 如果

- $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组基 (最大无关组);
- $e_1, \cdots, e_r$ 两两正交;
- $e_1, \cdots, e_r$ 都为单位向量,

则称 $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组标准正交基.

- 只满足前两个条件的向量组称为 V 的一组正交基.

例子

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，求 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,3)^T$ 在这组基下的坐标.

例子

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，求 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,3)^T$ 在这组基下的坐标.

- 设 $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组标准正交基，

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\lambda}_1 e_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_r e_r \in V$$

  则 $[\boldsymbol{\alpha}, e_i] = [\boldsymbol{\lambda}_1 e_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_r e_r, e_i] = \boldsymbol{\lambda}[e_i, e_i] = \boldsymbol{\lambda}_i$.
- 如何得到向量空间的标准正交基？

Schmidt 正交化：从一般基得到正交基的算法

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一组基,

- 正交化 (Schmidt 正交化):

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1,$$

$$\cdots$$

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{(\beta_1, \alpha_r)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_r)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\beta_{r-1}, \alpha_r)}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})}\beta_{r-1},$$

- 单位化:

$$e_1 = \frac{\beta_1}{||\beta_1||}, e_2 = \frac{\beta_2}{||\beta_2||}, \cdots, e_r = \frac{\beta_r}{||\beta_r||}.$$

性质

在 Schmidt 正交化过程中，对任意 $k = 1, \cdots, r$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 等价. 特别地，$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 等价.

$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r)$

性质

在 Schmidt 正交化过程中，对任意 $k = 1, \cdots, r$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 等价. 特别地，$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 等价.

- 两个向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ A, B 可以相互线性表示.

$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r)$

性质

在 Schmidt 正交化过程中，对任意 $k = 1, \cdots, r$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 等价. 特别地，$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 等价.

- 两个向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ A, B 可以相互线性表示.

推论

- 正交向量组是线性无关向量组;
- 反之，线性无关向量组可以 Schmidt 正交化为正交向量组.

例 2

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 用 Schmidt 正交化把这组向量标准正交化.

例

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 α_2, α_3, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

定义 (定义 4: 正交矩阵)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^TA = E \ (i.e.\ A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为正交矩阵, 简称正交阵.

定义 (定义 4：正交矩阵)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^T A = E \ \ (i.e.\ A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为<u>正交矩阵</u>, 简称<u>正交阵</u>.

- 矩阵 A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的列 (行) 向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.
- A 是正交矩阵, 则 $|A| = \pm 1$.
- A 是正交矩阵, 则 A^{-1} 和 A^T 也是正交矩阵.
- A, B 是正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

例 4

例

验证矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

为正交矩阵.

例 (Lecture-5)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = 1$,

$$H = E - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T.$$

证明 H 为对称阵, 且 $HH^T = E$.
所以 H 为一个正交矩阵.

例 (Lecture-5：线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

则得 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

例 (Lecture-5：线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

则得 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y=AX.$$

- 线性变换和 n 阶方阵一一对应.

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵, 则线性变换 $Y = PX$ 称为正交变换.

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵, 则线性变换 $Y=PX$ 称为正交变换.

- 正交变换保持内积不变.

$$(PX,PY)=(PX)^TPY=X^TP^TPY=X^TY=(X,Y).$$

- 正交变换保持长度不变.
- 正交变换保持夹角不变.

例 (Lecture-5)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = 1$,

$$H = E - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T.$$

则 $H^T = H$, 且 $HH^T = E$. 则 $Y = HX$ 是一个正交变换 (称为镜面反射).

小结

- 正交向量组、标准正交基;
- Schmidt 正交化;
- 正交矩阵和正交变换;
- 矩阵相似和相似变换.

作业

- 设向量组

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  1) 将向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交单位化为 e_1, e_2, e_3 (Page$_{138}$: 2-2);
  2) 将 α_4 表示为 e_1, e_2, e_3 线性组合的形式.
- Page$_{139}$：4、5.

补充：线性变换的严格定义

定义

设 $\boldsymbol{\rho}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为一个变换 (自身到自身的映射). 若满足

- $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\rho}(X_1 + X_2) = \boldsymbol{\rho}(X_1) + \boldsymbol{\rho}(X_2)$;
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\rho}(k \cdot X) = k \cdot \boldsymbol{\rho}(X)$,

则称 $\boldsymbol{\rho}$ 是一个线性变换.

取定向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$, 设

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}_i) = (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)\boldsymbol{\alpha}_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

则对 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 $\boldsymbol{y} = x_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\xi}_n = (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)X$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{\rho}(x_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\xi}_n) \\ &= x_1\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}_1) + \cdots + x_n\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}_n) \\ &= (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)(x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)AX \\ &:= (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)Y \end{aligned}$$

所以线性变换在基 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 下可以用 $Y = AX$ 表示.

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 为向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的另外一组基. 设从基 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的基变换公式为

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)P,$$

其中 P 可逆, 称为过渡矩阵.
则

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)X=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)P^{-1}X:=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)X'$$

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)Y=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)P^{-1}Y:=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)Y'$$

从而由 $(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)AX=(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)Y$ 知

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)P^{-1}APX'=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)P^{-1}PY'=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)Y'$$

所以线性变换在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下可以用 $Y'=P^{-1}APX'$ 表示.

综上: 矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 是同一个线性变换 $\boldsymbol{\rho}$ 在不同基下的矩阵. 这种关系被定义为矩阵的相似关系.

定义

设 A, B 为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 P 使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称矩阵 A, B 相似.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 20 日