

25. 反证法、假设存在 $n-r$ 个线性无关的解

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$$

不是齐次线性方程组的基础解系.

则至少存在一个解 η_0 不能被 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 线性表出

$$\text{则 } k_0\eta_0 + k_1\eta_1 + \dots + k_{n-r}\eta_{n-r} = 0 \text{ 中 } k_0 = 0$$

从而由 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 线性无关知 $k_1 = \dots = k_{n-r} = 0$

$\therefore \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 为线性无关的.

$$\therefore r(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}) = n-r+1$$

又: $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 可被基础解系线性表出.

$$\therefore r(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}) \leq n-r \quad \text{矛盾.}$$

命题得证!

(自来毕光耀宗)