Lec-25. 正态总体参数的假设检验

主讲教师: 吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页: wulisu.cn

本次课内容

1. 单个正态总体均值的检验
   - σ^2 已知, 检验 μ: Z 检验
   - σ^2 未知, 检验 μ: t 检验
2. 两个正态总体均值差的检验
   - $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知, 检验 $\mu_1 - \mu_2$: t 检验
3. 基于成对数据的检验
4. 单个正态总体方差的检验
   - μ 未知, 检验 σ^2: χ^2 检验
5. 两个正态总体方差商的检验
   - μ_1, μ_2 未知, 检验 σ_1^2/σ_2^2: F 检验

1.1. σ^2 已知, 检验 μ: Z 检验

- 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$ 已知.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 样本.
- $x_1, \dots, x_n$ 是 $X_1, \dots, X_n$ 的样本观测值.

假设问题 (显著水平为 α)

$$H_0 : \mu = \mu_0, \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, \qquad H_1 : \mu < \mu_0,$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \qquad H_1 : \mu > \mu_0,$$

其中 μ_0 是已知的常数.

双边假设

- 双边假设

$$H_0 : \mu = \mu_0, \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

其中 μ_0 是已知的常数.

- 检验统计量为 $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.
- 检验拒绝域 $W = \left\{ \mid Z \mid = \left| \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2} \right\}$.

左边假设

- 左边假设

$$H_0: \mu \geq \mu_0, \qquad H_1: \mu < \mu_0,$$

  其中 μ_0 是已知的常数.
- 检验统计量为 $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.
- 检验拒绝域 $z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$.

左边假设

- 右边假设

$$H_0 : \mu \le \mu_0, \qquad H_1 : \mu > \mu_0,$$

  其中 μ_0 是已知的常数.

- 检验统计量 $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.
- 拒绝域 $z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_\alpha$.

1.2. σ^2 未知, 检验 μ: t 检验

- 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$ 未知.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 样本.
- $x_1, \ldots, x_n$ 是 $X_1, \ldots, X_n$ 的样本观测值.

假设问题 (显著水平为 α)

$$H_0: \mu = \mu_0, \qquad H_1: \mu \neq \mu_0,$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0, \qquad H_1: \mu < \mu_0,$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0, \qquad H_1: \mu > \mu_0,$$

其中 μ_0 是已知的常数.

双边假设

- 双边假设

$$H_0 : \mu = \mu_0, \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- 用 σ 的估计量 S 代替 σ，
  检验统计量: $t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$，
  当 H_0 成立时，$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.
- 检验拒绝域的形式为

$$|t| = \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} \geq k = t_{\alpha/2}.$$

左边假设

- 左边假设

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, \qquad H_1 : \mu < \mu_0,$$

  其中 μ_0 已知.
- 检验统计量: $t = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.
- 拒绝域 $t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1)$.

t 检验: 右边假设

- 右边假设

$$H_0: \mu \le \mu_0, \qquad H_1: \mu > \mu_0,$$

其中 μ_0 已知.

- 检验统计量: $t = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.
- 拒绝域

$$t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1).$$

例

某种元件的寿命 X(以 h 计) 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2),\mu,\sigma^2$ 均未知. 现测得 16 只元件的寿命如下

$$\begin{array}{cccccccc} 159 & 280 & 101 & 212 & 224 & 379 & 179 & 264 \\ 222 & 362 & 168 & 250 & 149 & 260 & 485 & 170 \end{array}$$

问是否有理由认为元件的平均寿命大于 225 h?

解: 按题意需检验

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 225, \qquad H_1 : \mu > 225.$$

取 $= 0.05$. 则此检验问题的拒绝域为

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_\alpha(n-1)$$

现在 $n = 16, t_{0.05}(15) = 1,7531.$

又算得 $\overline{x} = 241.5, s = 98.7259$, 即有

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 0.6685 < 1.7531$$

t 没有落在拒绝域中, 故接受 H_0, 即认为元件的平均寿命不大于 225 h. □

2.1. σ_1^2, σ_2^2 已知, 检验 $\mu_1 - \mu_2$: Z 检验

两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, σ_1^2 和 σ_2^2 已知. 假设 (δ 通常取为 0)

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta, \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

- 当 H_0 成立时, $\mu_1 - \mu_2$ 的无偏估计 $\overline{X} - \overline{Y} - \delta \sim N(\delta, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$.
- 检验统计量: $Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$.
- 则检验拒绝域为: $|z| \geq z_{\alpha/2}$.

2.2. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知, 检验 $\mu_1 - \mu_2$: t 检验

两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知. 假设

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta, \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

- 检验统计量为:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t\left(n_1 + n_2 - 2\right)$$

- 检验拒绝域为:

$$|t| = \frac{|\overline{x} - \overline{y} - \delta|}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha/2}\left(n_1 + n_2 - 2\right)$$

- 参数 σ^2 的无偏估计量

$$S_w^2 = \frac{\left(n_1 - 1\right) S_1^2 + \left(n_2 - 1\right) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

- 检验统计量为:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t\left(n_1 + n_2 - 2\right)$$

- 由 $P_{H_0}\{|t| \geq k\} = \alpha$, 得拒绝域为:

$$|t| = \frac{|\overline{x} - \overline{y} - \delta|}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha/2}\left(n_1 + n_2 - 2\right)$$

右边检验

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta, \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$$

- 检验统计量和拒绝域:

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_\alpha (n_1 + n_2 - 2)$$

左边检验

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta, \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

- 检验统计量和拒绝域:

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq -t_\alpha \left(n_1 + n_2 - 2\right)$$

例

用两种方法 (A 和 B) 测定冰自 -0.72 ℃ 转变为 0 ℃ 的水的融化热 (以 cal/g 计). 测得以下的数据: 方法 A

$$\begin{array}{ccccccc} 79.98 & 80.04 & 80.02 & 80.04 & 80.03 & 80.03 & \\ 80.04 & 79.97 & 80.05 & 80.03 & 80.02 & 80.00 & 80.02 \end{array}$$

方法 B:

$$\begin{array}{cccc} 80.02 & 79.94 & 79.98 & 79.97 \\ 79.97 & 80.03 & 79.95 & 79.97 \end{array}$$

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2), \mu_1, \mu_2, \sigma^2$ 均未知, 试检验假设 (取显著性水平 $\alpha = 0.05$)

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant 0, H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0.$$

解 $n_1 = 13, \overline{x}_A = 80.02, s_A^2 = 0.024^2$,
$n_2 = 8, \overline{x}_B = 79.98, s_B^2 = 0.031^2$,
$s_W^2 = \frac{12\times s_A^2+7\times s_B^2}{19} = 0.0007178.$

$$t = \frac{\overline{x}_{As} - \overline{x}_B}{s_w\sqrt{1/13+1/8}} = 3.323 > t_{0.05}(13+8-2) = 1.7291.$$

故拒绝 H_0, 认为 $\mu_1 > \mu_2$, 即方法 A 比方法 B 测得的融化热要大. $\square$

3. 基于成对数据的检验

例

有两台光谱仪 I_x, I_y, 用来测量材料中某种金属的含量, 为鉴定它们的测量结果有无显著的差异, 制备了 9 件试块 (它们的成分、金属含量、均匀性等各不相同), 现在分别用这两台仪器对每一试块测量一次, 得到 9 对观察值如下.

x (%)	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
y (%)	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
d=x-y (%)	0.10	0.09	-0.12	0.18	-0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

间能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异 (取 $\alpha = 0.01$)?

- 配对研究的数据是成对地收集得到的, 所以也称为成对数据的研究.
- 配对研究采用了比较的思想, 比通常的单个样本推断更让人信服. 这种方法在医学和生物研究领域中广泛存在.
- 成对数据检验的基本思想是将两样本问题转为单样本问题.
- 上例中 $D_i = X_i - Y_i$ 可看为独立同分布的.

- 假设成对数据 $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$.
- 设差值 $D_i = X_i - Y_i, i = 1, \cdots, n$.
- 设 D_i 为正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的样本. 为比较两总体均值是否有显著差异, 可考虑如下的检验问题:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu_D = 0, & H_1 &: \mu_D \neq 0 \\
H_0 &: \mu_D \leq 0, & H_1 &: \mu_D > 0 \\
H_0 &: \mu_D \geq 0, & H_1 &: \mu_D < 0
\end{aligned}
$$

双边检验

假设

$$H_0: \mu_D = 0, \qquad H_1: \mu_D \neq 0$$

记

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\,, \qquad S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2,$$

- 检验统计量 $t = \frac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,
- 拒绝域 $W = \{|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$,

右边检验

假设

$$H_0 : \mu_D \leq 0, \qquad H_1 : \mu_D > 0$$

记

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\,, \quad S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2,$$

- 检验统计量和拒绝域

$$t = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} \geq t_\alpha(n-1)$$

左边检验

假设

$$H_0 : \mu_D \geq 0, \qquad H_1 : \mu_D < 0$$

记

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\,, \qquad S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2,$$

- 检验统计量和拒绝域

$$t = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1)$$

例

做实验以比较人对红光或绿光的反应时间 (以 s 计). 测量数据如下:

红光 (x)	0.30	0.23	0.41	0.53	0.24	0.36	0.38	0.51
绿光 (y)	0.43	0.32	0.58	0.46	0.27	0.41	0.38	0.61
d=x-y	-0.13	-0.09	-0.17	0.07	-0.03	-0.05	0.00	-0.10

设 $D_i = X_i - Y_i (i = 1, 2, \cdots, 8)$ 是来自正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的样本, μ_D, σ_D^2 均末知, 试检验假设 (取显著性水平 $\alpha = 0.05$)

$$H_0 : \mu_D \geq 0, H_1 : \mu_D < 0.$$

解: $n=8, \overline{d}=-0.0625, s_d=0.0765$, 而

$$\frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{8}}=-2.311<-t_{0.05}(7)=-1.8946.$$

故拒绝 H_0, 认为 $\mu_D<0$, 即认为人对红光的反应时间小于对绿光的反应时间, 也就是人对红光的反应要比绿光快. $\square$

4. μ 未知, 检验 σ^2: χ^2 检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 未知, $X_1, \ldots, X_n$ 是总体 X 的样本, 双边检验

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \qquad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

其中 σ_0^2 是已知常数. 此时 σ^2 的无偏估计量为样本方差 S^2, 且在原假设成立时

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$
- 拒绝域

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1, \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2.$$

$$P\{\text{拒绝} H_0 | \text{当} H_0 \text{为真}\}$$
$$= P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1, \text{或} \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right\} = \alpha.$$

为计算方便，习惯上取

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right\} = \frac{\alpha}{2}, P\left\{\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right\} = \frac{\alpha}{2}.$$

- 所以,

$$k_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),$$

$$k_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1).$$

- 拒绝域

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\ \text{或}\ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

单边检验

左边检验 $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2, \qquad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

- 拒绝域

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_\alpha^2(n-1).$$

右边检验: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \qquad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

- 拒绝域

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1).$$

例

某厂生产的某种型号的电池，其寿命 (以 h 计) 长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000$ 的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变. 现随机取 26 只电池，测出其寿命的样本方差 $s^2 = 9200$. 问根据这数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化 (取 $\alpha = 0.02$)?

解: 显著性水平 $\alpha = 0.02$ 下检验假设

$$H_0 : \sigma^2 = 5000, \qquad H_1 : \sigma^2 \neq 5000.$$

$n = 26, \sigma_0^2 = 5000,$
$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,01}(25) = 44.314,$
$\chi^2_{1-a/2}(25) = \chi^2_{0.99}(25) = 11.524.$
所以拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq 44.314 \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq 11.524.$$

由观察值 $s^2 = 9200$ 得 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 46 > 44.314$, 所以拒绝 H_0. $\square$

μ_1, μ_2 未知, 检验 σ_1^2/σ_2^2: F 检验

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 是来自 $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ 的样本, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, 两样本相互独立. 并记 $\overline{X}, \overline{Y}, S_1^2, S_2^2$ 分别为两样本的均值和方差. 设 μ_1, μ_2 未知, 检验假设 (显著水平 α)

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \qquad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

- 检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

- 在原假设成立时,

$$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- 拒绝域

$$F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1), \text{或} F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

单边检验

左边检验: $H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, \qquad H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

- 检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$.
- 拒绝域 $F \geq F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$

右边检验: $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \qquad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

- 检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$.
- 拒绝域
  $F \geq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{1}{F_\alpha(n_2-1,n_1-1)}$.

例

用两种方法 (A 和 B) 测定冰自 $-0.72\,^\circ\mathrm{C}$ 转变为 $0\,^\circ\mathrm{C}$ 的水的融化热 (以 cal/g 计). 测得以下的数据: 方法 A

$$\begin{array}{ccccccc} 79.98 & 80.04 & 80.02 & 80.04 & 80.03 & 80.03 \\ 80.04 & 79.97 & 80.05 & 80.03 & 80.02 & 80.00 & 80.02 \end{array}$$

方法 B:

$$\begin{array}{cccc} 80.02 & 79.94 & 79.98 & 79.97 \\ 79.97 & 80.03 & 79.95 & 79.97 \end{array}$$

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ 和 $N(\mu_B, \sigma_B^2)$, $\mu_A, \mu_B, \sigma_A^2, \sigma_B^2$ 均未知, 试检验假设 (取显著性水平 $\alpha = 0.01$)

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2, \qquad H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2.$$

解: $n_1 = 13, n_2 = 8, \alpha = 0.01,$

所以拒绝域为

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \geq F_{0.005}(12, 7) = 8.18,$$

或

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \leq F_{0.095}(12, 7) = \frac{1}{F_{0.005}(7, 12)} = \frac{1}{5.52} = 0.18.$$

现在 $s_A^2 = 0.024^2, s_B^2 = 0.031^2, s_A^2/s_B^2 = 0.60.$

$$0.18 < 0.60 < 8.18$$

故接受 $H0$, 认为两总体方差相等. $\square$

两总体方差相等也称两总体具有方差齐性.