线性代数-9

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 29 日

回顾：矩阵的初等变换

- **矩阵的初等变换:**

$$r_i \leftrightarrow r_j,\ r_i \times k,\ r_i + kr_j;\ c_i \leftrightarrow c_j,\ c_i \times k,\ c_i + kc_j.$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j,\ r_i \times k,\ r_i + kr_j;\ c_i \leftrightarrow c_j,\ c_i \times k,\ c_i + kc_j.$$

- 矩阵的等价：

$$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B;$$

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B;$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j,\ r_i \times k,\ r_i + kr_j;\ c_i \leftrightarrow c_j,\ c_i \times k,\ c_i + kc_j.$$

- 矩阵的等价：

$$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B;$$

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B;$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j),\ E(i(k)),\ E(ij(k));$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j), E(i(k)), E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系—左行右列：

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j), E(i(k)), E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系—左行右列:

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j),\ E(i(k)),\ E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系—左行右列：

定理 (婴儿版本)

$$A \xrightarrow{\text{一次初等行变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } P,\ \text{使得} PA = B.$$

$$A \xrightarrow{\text{一次初等列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } Q,\ \text{使得} AQ = B.$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等矩阵：

$$E(i,j),\ E(i(k)),\ E(ij(k));$$

- 初等变换和初等矩阵联系——左行右列:

定理 (婴儿版本)

$$A \xrightarrow{\text{一次初等行变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } P, \text{使得} PA = B.$$

$$A \xrightarrow{\text{一次初等列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在初等矩阵 } Q, \text{使得} AQ = B.$$

定理 (成年版本)

$$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B \Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } P, \text{使得} PA = B.$$

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } Q, \text{使得} AQ = B.$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B \Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } P, Q, \text{使得} PAQ = B.$$

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可表示为有限多个初等矩阵乘积
$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$$

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$$

- 初等变换的应用：

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$;

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$;
  - 求 $A^{-1}B$ $:\Rightarrow (A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$;

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可表示为有限多个初等矩阵乘积
$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$
- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$;
  - 求 $A^{-1}B$ $:\Rightarrow (A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$;
  - 解 $AX = \beta$ $:\Rightarrow (A, \beta) \xrightarrow{\text{行变换}}$ 行最简形 **(Chap-3);**

回顾：矩阵的初等变换

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可表示为有限多个初等矩阵乘积

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ = F$$

- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B, P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$;
  - 求 $A^{-1}B$ $:\Rightarrow (A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$;
  - 解 $AX = \boldsymbol{\beta}$ $:\Rightarrow (A, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\text{行变换}}$ 行最简形 (Chap-3);
  - 求 BA^{-1} 和矩阵方程 $X^TA = \boldsymbol{\beta}^T$写成列分块，转置，再用初等行变换.

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$ ？

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$?
  - **定义:**

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 定义:
$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$
  - **左行右列:**
$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{使得} PAQ = B.$$

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$?
  - 定义:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$

  - 左行右列:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得} PAQ = B.$$

- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗?

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$?
  - 定义:
$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$
  - 左行右列:
$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得} PAQ = B.$$
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗?
  - 有! 研究等价矩阵之间的共性.
  （等价不变性/不变量: 在有限次初等变换下保持不变的性质和数量.）

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 定义:
$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$
  - 左行右列:
$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q, \text{ 使得} PAQ = B.$$
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗？
  - 有！研究等价矩阵之间的共性.
  (等价不变性/不变量: 在有限次初等变换下保持不变的性质和数量.)
  - 例如, 等价的两个方阵同时可逆/不可逆.
  如果 A 可逆, 但 B 不可逆, 则必有 $A \nsim B$.

何时 $A \sim B$?

- 如何判断 $A \sim B$?
  - 定义:
$$A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B.$$
  - 左行右列:
$$A \sim B \Leftrightarrow \text{存在可逆 } P \text{ 和可逆 } Q\text{, 使得} PAQ = B.$$
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗?
  - 有! 研究等价矩阵之间的共性.
  (等价不变性/不变量: 在有限次初等变换下保持不变的性质和数量.)
  - 例如, 等价的两个方阵同时可逆/不可逆.
  如果 A 可逆, 但 B 不可逆, 则必有 $A \nsim B$.
- 矩阵的秩: 同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow A, B$ 的秩相同.

秩：同型矩阵的等价不变量（完全不变量）

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵}A \xrightarrow{\mathbf{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\mathbf{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\mathbf{c}} \text{标准形}$$

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵}A \xrightarrow{\mathrm{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\mathrm{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\mathrm{c}} \text{标准形}$$

-

$$A_{m\times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵}A \xrightarrow{\mathsf{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\mathsf{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\mathsf{c}} \text{标准形}$$

-

$$A_{m\times n} \sim \begin{pmatrix} {\color{red}E_r} & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵}A \xrightarrow{\mathsf{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\mathsf{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\mathsf{c}} \text{标准形}$$

- $$A_{m\times n} \sim \begin{pmatrix} {\color{red}E_r} & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定义 (矩阵的秩（Rank）)

A 的秩定义为其标准形中的数 r, 记为 $r(A)$ 或 $R(A)$.

- 回顾：矩阵的等价化简

$$\text{任意矩阵}A \xrightarrow{\mathrm{r}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\mathrm{r}} \text{行最简形} \xrightarrow{\mathrm{c}} \text{标准形}$$

-

$$A_{m\times n} \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定义 (矩阵的秩（Rank）)

A 的秩定义为其标准形中的数 r, 记为 $r(A)$ 或 $R(A)$.

定理 (秩是同型矩阵等价的完全不变量)

同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$.

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F = \begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F = E_n$,
- $F = O_{m\times n}$,

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F=E_n$,
- $F=O_{m\times n}$,

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$,
- $F=E_n$,
- $F=O_{m\times n}$,

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A) = r$.
- $F = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A) = n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F = \begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A) = m$. 此时, 称 A 为行满秩矩阵.
- $F = E_n$,
- $F = O_{m\times n}$,

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=m$. 此时, 称 A 为行满秩矩阵.
- $F=E_n$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为满秩矩阵 ($\Leftrightarrow$ 可逆矩阵).
- $F=O_{m\times n}$,

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=m$. 此时, 称 A 为行满秩矩阵.
- $F=E_n$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为满秩矩阵 ($\Leftrightarrow$ 可逆矩阵).
- $F=O_{m\times n}$, 则 $R(A):=0$. 此时, $A=O$.

一些说明

矩阵 $A_{m\times n}$ 的标准形可能的形状:

- $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=r$.
- $F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为列满秩矩阵.
- $F=\begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $R(A)=m$. 此时, 称 A 为行满秩矩阵.
- $F=E_n$, 则 $R(A)=n$. 此时, 称 A 为满秩矩阵 ($\Leftrightarrow$ 可逆矩阵).
- $F=O_{m\times n}$, 则 $R(A):=0$. 此时, $A=O$.

$$\star\ R(A) = R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = r = \text{标准形中1的个数}$$

$$= \text{行阶梯形的非零行数} = \text{行最简形的非零行数}.$$

秩的计算

$$\star\ R(A) = R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = r = \text{标准形中1的个数}$$

$$= \text{行阶梯形的非零行数} = \text{行最简形的非零行数}.$$

- 例 $R\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

$$\star\ R(A)=R\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}_{m\times n}=r=\text{标准形中1的个数}$$

$$=\text{行阶梯形的非零行数}=\text{行最简形的非零行数}.$$

- 例 $R\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&3&-1&4\\0&0&0&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}=3.$
- 计算 $R(A)$：通过初等行变换把 A 化为行阶梯形,

$$R(A)=\text{行阶梯形的非零行数}.$$

例

求 $R(A)$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例

设

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix},$$

讨论 $R(A)$.

例

设

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix},$$

讨论 $R(A)$.

提示：初等行变换/行列式.

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;

2) $R(kA) = R(A^T) = R(A), k \neq 0$;

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;
2) $R(kA) = R(A^T) = R(A), k \neq 0$;
3) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$,
特别地， $R(A) \leq R(A, \boldsymbol{\beta}) \leq R(A) + 1$;

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;
2) $R(kA) = R(A^T) = R(A), k \neq 0$;
3) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$,
   特别地， $R(A) \leq R(A, \boldsymbol{\beta}) \leq R(A) + 1$;
4) $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$;

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;
2) $R(kA) = R(A^T) = R(A), k \neq 0$;
3) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$,
   特别地， $R(A) \leq R(A, \boldsymbol{\beta}) \leq R(A) + 1$;
4) $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$;
5) $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$;

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(kA) = R(A^T) = R(A), k \ne 0$;
3) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,
   特别地，$R(A) \le R(A, \boldsymbol{\beta}) \le R(A) + 1$;
4) $R(A + B) \le R(A) + R(B)$;
5) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$;
6) 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则 $R(A) + R(B) \le n$.

秩的性质

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(kA) = R(A^T) = R(A), k \ne 0$;
3) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,
   特别地， $R(A) \le R(A, \boldsymbol{\beta}) \le R(A) + 1$;
4) $R(A + B) \le R(A) + R(B)$;
5) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$;
6) 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则 $R(A) + R(B) \le n$.
7) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;
2) $R(kA) = R(A^T) = R(A), k \neq 0$;
3) $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$,
   特别地，$R(A) \leq R(A, \boldsymbol{\beta}) \leq R(A) + 1$;
4) $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$;
5) $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$;
6) 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则 $R(A) + R(B) \leq n$.
7) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
8) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$.

例 (左边乘列满秩矩阵，秩不变)

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

例 (左边乘列满秩矩阵，秩不变)

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

- $R(A_{m\times n})=n$, 则称 A 为列满秩矩阵；

例题

例 (左边乘列满秩矩阵，秩不变)

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

- $R(A_{m\times n})=n$, 则称 A 为列满秩矩阵；
- 满秩矩阵与消去率:

例 (左边乘列满秩矩阵，秩不变)

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

- $R(A_{m\times n})=n$, 则称 A 为列满秩矩阵；
- 满秩矩阵与消去率:
  - 若 A 列满秩，则有左消去律成立:

$$AX=AY\overset{A\text{列满秩}}{\Longleftrightarrow}X=Y \qquad \text{或} \qquad AX=0\overset{A\text{列满秩}}{\Longleftrightarrow}X=0.$$

例 (左边乘列满秩矩阵，秩不变)

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = C$, 且 $R(A) = n$, 则 $R(B) = R(C)$.

- $R(A_{m\times n}) = n$, 则称 A 为列满秩矩阵；
- 满秩矩阵与消去率:
  - 若 A 列满秩，则有左消去律成立:

$$AX = AY \overset{A\text{列满秩}}{\Longleftrightarrow} X = Y \qquad \text{或} \qquad AX = 0 \overset{A\text{列满秩}}{\Longleftrightarrow} X = 0.$$

  - 若 A 行满秩，则有右消去律: $XA = YA \Leftrightarrow X = Y$.

例 (左边乘列满秩矩阵，秩不变)

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

- $R(A_{m\times n})=n$, 则称 A 为列满秩矩阵；
- 满秩矩阵与消去率:
  - 若 A 列满秩，则有左消去律成立:

$$AX=AY \overset{A\text{列满秩}}{\Longleftrightarrow} X=Y \qquad \text{或} \qquad AX=0 \overset{A\text{列满秩}}{\Longleftrightarrow} X=0.$$

  - 若 A 行满秩，则有右消去律: $XA=YA \Leftrightarrow X=Y$.
  - A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 满秩 $\Rightarrow$ 左/右消去律成立.

例

设 A 为 n 阶矩阵，证明 $R(A+E)+R(A-E) \geq n$.

子式和矩阵的秩（选）

k 阶子式 (子行列式)

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k\le \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k 阶子式 (子行列式)

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k \le \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k 阶子式 (子行列式)

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k \le \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

k 阶子式 (子行列式)

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k\le \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- k 阶主子式：选取得行标和列标相同的 k 阶子式.
- k 阶顺序主子式：选取前 k 行前 k 列的子式.
- 区分 k 阶子式、子块、余子式、代数余子式.

子式和矩阵的秩

性质

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D，而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则

$$R(A) = r.$$

性质

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D，而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则

$$R(A) = r.$$

- 其中这里的 D 被称为 A 的最高阶非零子式.

子式和矩阵的秩

性质

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D，而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则

$$R(A) = r.$$

- 其中这里的 D 被称为 A 的**最高阶非零子式**.

证明思路: 设 $D \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} D'$, 则根据行列式的性质有:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow D' \neq 0.$$

具体是：若 $D \neq 0$,

- $D \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} D'$，则 $D' = -D \neq 0$;
- $D \xrightarrow{r_i \times k} D', k \neq 0$，则 $D' = kD \neq 0$;
- $D \xrightarrow{r_i + kr_j} D'$，则 $D' = D \neq 0$.

例

已知 $(A_{4\times 3}, B_{4\times 3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

求 $R(A), R(B), R(A, B)$.

例题

例

已知 $(A_{4\times 3}, B_{4\times 3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

求 $R(A), R(B), R(A,B)$.

判断小阶矩阵 $R(A)$ 的小技巧.

- $R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
- $R(A) = 0 \iff A = O$;
- $R(A) = 1 \iff A$ 任意行 (列) 成比例;
- 若 A 有 2 阶非零子式, 则 $R(A) \ge 2$.

第 5 周作业

- 设 A, B 为 n 阶方阵. 若 $A \sim B$, 则称 A 和 B 属于同一个等价类. 问 n 阶方阵全体可以划分为多少个等价类?
（Tip: 通过秩讨论）
- Page_{89}: 4-(2), 5, 7, 8 Page_{91}: 6, 7, 10, 15.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 29 日