

山东科技大学 2025–2026 学年第一学期

《线性代数》随堂测验 1

说明: 各小题中的不定参量 $a =$ 你的学号最后一位.

1. 判断题.

(1) $|A+B| = |A| + |B|$.

(2) $|k \cdot A| = k \cdot |A|$.

(3) $|AB| = |BA|$.

(4) $AB = BA$.

(5) $A^*A = AA^*$.

b (6) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

(7) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

(8) $A^2 = O$, 则 $A = O$.

(9) 若 $AX = AY, A \neq O$, 则 $X = Y$.

(10) 设列满秩矩阵 A 的标准形为 F , 则 $A \sim F$.

2. 试写出矩阵可逆的充分必要条件, 并标明出处. 至少 5 条.

例如: A 可逆 \Leftrightarrow 存在矩阵 B , 使得 $AB = E$. (2.3 节或幻灯片 6)

3. 已知 A 为 n 阶方阵, $A^2 - 2A + E = 0$, 问 $A + aE$ 是否可逆? 若可逆求 $(A + aE)^{-1}$.

4. 已知行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 8 & 64 & a \end{vmatrix}$$

求 $A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14}$.

5. 求解矩阵方程 $AX = B + 2X$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a+3 & 1 & 1 \\ 1 & a+4 & 1 \\ 1 & 1 & a+5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. 求 $d(A, B) = R(A) + R(B) - R(A, B)$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$