Lec-21. 估计量的评价准则

主讲教师: 吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页: wulisu.cn

例

设 X 服从均匀分布 $U(a,b)$, a 和 b 未知，样本 $X_1,\cdots,X_n$

(1) 求 a 和 b 的最大似然估计.

(2) 求 $E(X)$ 的最大似然估计.

(3) 若已获得 $n=5$ 的样本值如下，

$0.34 \quad 0.59 \quad 0.16 \quad 0.96 \quad 0.84$

求 $a,b,E(X)$ 的最大似然估计值.

解：(1) 似然函数

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^{n}}, & a\leq x_i\leq b, i=1,...,n.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

关于 a 单调增，关于 b 单调减. 并且只有当

$$a\leq \min\{x_1,\dots,x_n\},$$

$$b\geq \max\{x_1,\dots,x_n\}$$

时, 才能使似然函数 $L(a,b)$ 不为零.

因此，a 达到最大值 $\min\{x_1,...,x_n\}$, b 达到最小值 $\max\{x_1,\ldots,x_n\}$, 就能使 $L(\alpha,b)$ 达到最大.
所以

$$\hat{a}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}\triangleq X_{(1)},$$

$$\hat{b}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}\triangleq X_{(n)}.$$

$\square$

比较矩估计量：

$$\boxed{\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3B_2}},$$

$$\boxed{\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3B_2}}.$$

(2) $E(X)=\frac{a+b}{2}$ 是参数 a,b 的函数，因此 $E(X)$ 最大似然估计量为

$$\widehat{E(X)}=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}.$$

(3) 将样本值分别代入 $a,b,E(X)$ 最大似然估计量，

$$\hat{a}=0.16,\ \hat{b}=0.96,\ E(X)=0.56.$$

$\square$

对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价不同估计量的好坏？

对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价不同估计量的好坏？

$\Rightarrow$ 估计量的评价准则！

本次课内容

估计量的评价准则

- 无偏性准则
- 有效性准则
- 相合性准则

定义 (无偏性准则)

设参数 θ 的估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$, 若

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计量.

定义 (无偏性准则)

设参数 θ 的估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$, 若

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计量.

- 若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, 则 $E\left(\hat{\theta}\right) - \theta$ 称为估计量 $\hat{\theta}$ 的系统误差.
- 若
$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right) = \theta,$$
则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的渐近无偏估计量.

无偏性: $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$

- 无偏性的统计意义是指在大量重复试验下, 由$\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ 给出的估计的平均恰是θ, 从而无偏性保证了 $\hat{\theta}$没有系统误差.

例

工厂长期为商家提供某种商品, 假设生产过程相对稳定, 产品合格率为 θ, 虽然一批货的合格率可能会高于 θ , 或低于 θ, 但无偏性能够保证在较长一段时间内合格率接近 θ, 所以双方互不吃亏.

但作为顾客购买商品, 只有二种可能, 即买到的是合格品或不合格品, 此时无偏性没有意义.

例

设总体 X 的一阶和二阶矩存在,

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2.$$

(1) 证明: 样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 S^2 分别是 μ 和 σ^2 的无偏估计;

(2) 判断: B_2 是否为 σ^2 的无偏估计? 是否为 σ^2 的渐近无偏估计?

(1) 证: 因 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 X 同分布, 故有:

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \mu$$

故 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计.

$$E\left(S^2\right) = \sigma^2$$

故 S^2 是 σ^2 的无偏估计.

(2) $B_2 = \frac{n-1}{n}S^2$

$$E(B_2) = \frac{n-1}{n}E\left(S^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

故 B_2 不是 σ^2 的无偏估计.

$$\lim_{n\to\infty} E(B_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

故 B_2 是 σ^2 的渐近无偏估计. $\square$

例

设总体 X 服从均匀分布 $U(0,\theta),\theta$ 是未知参数, 样本 $X_1,\cdots,X_n$.

(1) 求 θ 的矩估计, 判断是否无偏;

(2) 求 θ 的最大似然估计, 判断是否无偏.

解 (1): 矩估计:

由

$$\mu_1 = E(X) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} x dx = \frac{\theta}{2}.$$

$\Rightarrow \theta = 2\mu_1$

$\Rightarrow \theta$ 的矩估计 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$.

因为

$$E(\hat{\theta}) = E\left(2\overline{X}\right) = 2E(\overline{X}) = 2E(X) = \theta,$$

所以 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计.

(2) X 的概率密度

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

最大似然估计:

$$L(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & 0 \le x_1, \cdots, x_n \le \theta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$L(\theta)$ 关于 $\theta > 0$ 递减,

而 θ 的范围为 $\theta \ge x_{(n)} = \max\{x_1, ..., x_n\}$,

所以, θ 的最大似然估计量

$$\hat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F(x)]^n = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta, \\ 1, & x > \theta. \end{cases}$$

求导数得密度函数为

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

因此有

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\theta}\right) = E\left(X_{(n)}\right) &= \int_0^\theta \frac{x \cdot nx^{n-1}}{\theta^n} dx \\
&= \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta
\end{aligned}
$$

所以$\hat{\theta} = X_{(n)}$作为参数θ的估计是有偏的. $\square$

纠偏方法

- 如果 $E\left(\hat{\theta}\right)=a\theta+b, \theta\in\Theta$, 其中 a,b 是常数, 且 $a\neq 0$, 则 $\frac{1}{a}(\hat{\theta}-b)$是 θ 的无偏估计.
- 在上例中,
$$E(X_{(n)})=\frac{n}{n+1}\theta,$$
取
$$X_{(n)}^{*}=\frac{n+1}{n}X_{(n)},$$
则 $X_{(n)}^{*}$ 是 θ 的无偏估计.

例

设总体 X 服从指数分布 $Exp(\theta), \theta$ 是未知参数, 样本 $X_1, \cdots, X_n$.

(1) 判断 $Z = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 是否无偏;

(2) 若 Z 有偏, 试将 Z 修正为一个无偏估计量.

例

设总体 X 服从指数分布 $Exp(\theta), \theta$ 是未知参数, 样本 $X_1, \cdots, X_n$.

(1) 判断 $Z = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 是否无偏;

(2) 若 Z 有偏, 试将 Z 修正为一个无偏估计量.

- nZ 和样本均值 $\overline{X}$ 都是期望 $E(X) = \theta$ 的无偏估计. 所以, 一个未知参数的无偏估计量不是唯一的.

定义 (有效性准则)

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计, 如果

$$D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

且不等号至少对某一个 $\theta \in \Theta$ 成立, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ **有效**.

定义 (有效性准则)

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计, 如果

$$D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

且不等号至少对某一个 $\theta \in \Theta$ 成立, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

- 方差较小的无偏估计量是一个更有效的估计量.

例

设总体为 $X, E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2>0$, $X_1,\cdots,X_n$ 为样本. 对 $1\le k\le n$, 令

$$\hat{\theta}_k=\frac{1}{k}(X_1+\ldots+X_k)$$

即 $\hat{\theta}_k$ 为前 k 个样本平均值. 显然, $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_n$ 均是参数 μ 的无偏估计.

问: 在估计量 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_n$ 中, 哪个 $\hat{\theta}_k$ 作为参数 μ 的估计最有效?

解:

$$D(\hat{\theta}_k) = \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{k},$$

即估计量的方差随着 k 的增加而减少,

$\therefore \hat{\theta}_n$ 最有效. $\square$

例

设总体 X 服从指数分布 $Exp(\theta), \theta$ 是未知参数, 样本 $X_1, \cdots, X_n$. 令

$$Z = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\},$$

则 nZ 和样本均值 $\overline{X}$ 都是 θ 的无偏估计.
证明样本均值 $\overline{X}$ 比 nZ 更有效.

定义 (相合性)

设 $\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ 为参数 θ 的估计量,
若对于任意 $\theta \in \Theta$, 当 $n \to +\infty$ 时,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\quad P \quad} \theta$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计量.

注

- 相合性是对一个估计量的基本要求. 不具备相合性的估计量不予考虑.
- 相合性只有在样本容量很大时, 才显现其优越性, 实际应用中很难做到. 在实际工程中往往使用无偏性和有效性进行评价.
- 无偏性、有效性、相合性是评价估计量的一些基本标准, 还有其他侧重点的评价标准.

例

设总体 X 的 k 阶矩 $E(X^k) = \mu_k (k \geq 2)$ 存在,
$X_1, \cdots, X_n$ 为样本, 证明:

(1) $A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$ 是 μ_l 的相合估计;

(2) B_2, S^2 是 $D(X) = \sigma^2$ 的相合估计;

(3) S 是 σ 的相合估计.

证明: (1) 由辛钦大数定律知, 对 $l=1,...,k$,

$$A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l \xrightarrow{P} \mu_l=E(X^l),$$

因此 A_l 是 $E(X^l)$ 的相合估计. 特别地, $\overline{X}$ 是 $\mu_1=E(X)$ 的相合估计, A_2 是 $\mu_2=E(X^2)$ 相合估计.

(2) 因为 $D(X)=\sigma^2=\mu_2-\mu_1^2$,

$$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=A_2-\overline{X}^2,$$

根据依概率收敛性质, $B_2=A_2-\overline{X}^2$ 是 σ^2 的相合估计. 而 $S^2=\frac{n}{n-1}B_2$ 也是 σ^2 的相合估计.

(3) $S=\sqrt{S^2}$ 是 σ 的相合估计. □