线性代数-19

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 13 日

本次课内容

1. 二次型和对称矩阵
2. 二次型的化简
3. 对称矩阵的合同
4. 正定性

例 (P58 习题 3-(5))

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

含 n 个变量二次齐次函数

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n
\end{aligned}
$$

称为二次型.

含 n 个变量二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

称为二次型.

- 二次型的求和号表示:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

- 二次型的矩阵表示:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&\qquad + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 二次型的矩阵表示:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&\qquad + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 二次型通常简记为$f(X) = X^TAX$, 其中 A 为对称矩阵.

- 二次型的矩阵表示:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&\qquad + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 二次型通常简记为$f(X) = X^TAX$, 其中 A 为对称矩阵.
- 二次型的秩被定义为<u>对称矩阵</u> 的秩, i.e. $R(f) = R(A)$.

- 对任意矩阵 A,

$$f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T + A}{2} X,$$

其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

- 对任意矩阵 A,

$$f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T + A}{2} X,$$

其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

- 一个二次型通常对应多个矩阵, 但只对应唯一的对称矩阵. 即二次型和对称矩阵是一一对应的.

- 对任意矩阵 A,

$$f(X)=X^TAX=X^T\frac{A^T+A}{2}X,$$

其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X)=X^T\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}X=X^T\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}X$$

- 一个二次型通常对应多个矩阵, 但只对应唯一的对称矩阵. 即二次型和对称矩阵是一一对应的.
- 称对称矩阵 A 为二次型 $f(X)=X^TAX$ 的矩阵.

- 对任意矩阵 A,

$$f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T + A}{2} X,$$

其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

- 一个二次型通常对应多个矩阵, 但只对应唯一的对称矩阵. 即二次型和对称矩阵是一一对应的.
- 称对称矩阵 A 为二次型 $f(X) = X^T A X$ 的矩阵.
- 称二次型 f 为对称矩阵 A 的二次型.

例 (212 页例 2)

求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3$ 的矩阵和秩.

- 只含平方项的二次型

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

称为标准形(或法式).

- 在标准式的基础上，若 $\lambda_i = 1, -1, 0$，则称

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$$

为规范形.

- 对应的矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O \end{pmatrix}.$$

化简二次型:
寻找可逆 (正交) 线性变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

为标准形或规范形.

二次型的中心任务：将二次型化为标准形和规范形

化简二次型:

寻找可逆 (正交) 线性变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

为标准形或规范形.

化简对称矩阵:

寻找可逆 (正交) 矩阵 P, 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵.

二次型化简: 任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

定理 (200 页定理 7: 对称矩阵可正交相似对角化)

对于任意对称矩阵 A, 存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

为对角阵.

二次型化简：任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

定理 (200 页定理 7: 对称矩阵可正交相似对角化)

对于任意对称矩阵 A，存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

为对角阵.

推论 (220 页定理 2–主轴定理)

对于任意二次型 $f(X) = X^TAX$，一定存在正交变换 $X = PY$, 使得

$$f = X^TAX = Y^TP^TAPY = Y^T\Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

推论

任意二次型 $f(X)=X^TAX$，一定存在可逆变换 $X=CZ$，使得 $f(CZ)$ 为规范形.

证明：存在正交变换 $X=PY$，使得

$$f=X^TAX=Y^TP^TAPY=Y^T\Lambda Y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

不妨设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 不等于 0，$\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0$.

取 $X=PY=PKZ$，其中 $K=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}},1,\cdots,1\right)$，则

$$f=X^TAX=Y^TP^TAPY=Z^TK^T(P^TAP)KZ=Z^TK^T\Lambda KZ$$

为规范形. □

二次型化简

$$
\begin{tikzcd}
\text{任意二次型 } f=X^TAX \arrow[rr, Rightarrow, "\text{可逆/正交变换 } X=PY"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{可逆变换 } X=CZ"'] & & \text{标准形 } f=Y^T\Lambda Y \arrow[dl, Rightarrow, "\text{可逆变换 } Y=KZ"] \\
& \text{规范形} &
\end{tikzcd}
$$

二次型化简

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{任意二次型 } f = X^TAX \arrow[rr, Rightarrow, "\text{可逆/正交变换 } X=PY"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{可逆变换 } X=CZ"'] & & \text{标准形 } f = Y^T\Lambda Y \arrow[dl, Rightarrow, "\text{可逆变换 } Y=KZ"] \\
& \text{规范形} &
\end{tikzcd}$$

- 所有的变换都不唯一;
- 标准形不唯一. 但如果不考虑平方项系数的次序, 则正交变换下的标准形是唯一的;
- 规范形是唯一的.

例 (216 页例 1)

设二次型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

(1) 求正交变换 $X = PY$, 将二次型 f 化为标准形;

(2) 求可逆变换 $X = CZ$, 将二次型 f 化为规范形.

例 (216 页例 1)

设二次型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

(1) 求正交变换 $X = PY$, 将二次型 f 化为标准形;
(2) 求可逆变换 $X = CZ$, 将二次型 f 化为规范形.

解法: 将二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 正交相似对角化, 则 $X = PY$ 即为所求.

例

用配方法化简二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

并求所用变换矩阵.

例

用配方法化简二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

并求所用变换矩阵.

解法：有平方项则配平方，无平方项则凑平方项.

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4(y_2 + y_3)(y_2 - y_3) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2. \end{aligned}$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$, 取可逆变换 $X=PY$, 则

$$f=X^TAX=Y^TP^TAPY$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$, 取可逆变换 $X=PY$, 则

$$f=X^TAX=Y^TP^TAPY$$

定义

若存在可逆阵 P, 使得
$$P^TAP=B,$$
则称矩阵 A, B **合同**, 记为 $A\overset{\text{合同}}{\sim}\text{B}$.

- 二次型 $f(X)=X^TAX$, 取可逆变换 $X=PY$, 则

$$f=X^TAX=Y^TP^TAPY$$

定义

若存在可逆阵 P, 使得
$$P^TAP=B,$$
则称矩阵 A,B **合同**, 记为 $A\overset{\text{合同}}{\sim}\text{B}$.

- 合同是一种等价关系, 即满足反身性、对称性和传递性.
- 矩阵 A,B 合同, 则 A,B 等价, 即 $R(A)=R(B)$.
- 本章只考虑<u>对称矩阵的合同</u>.

合同对角化

给定对称矩阵 A，如果存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^T A P = \Lambda$$

为对角阵，则称 A 可以合同对角化.

合同对角化

给定对称矩阵 A，如果存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^TAP = \Lambda$$

为对角阵，则称 A 可以合同对角化.

- 此时，Λ 称为对称阵 A 的(合同) 标准形;
- 进一步，若 Λ 的对角线元素只能取 $1, -1, 0$, 则 Λ 称为对称阵 A 的(合同) 规范形.

$$
\begin{tikzcd}
\text{任意对称矩阵 } A \arrow[rr, Rightarrow, "\text{可逆/正交阵 } P"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{可逆阵 } C"'] & & \text{标准形 } P^TAP=\Lambda \arrow[dl, Rightarrow, "\text{可逆阵 } K"] \\
& \text{规范形} &
\end{tikzcd}
$$

对称矩阵合同对角化

$$
\begin{tikzcd}
\text{任意对称矩阵 } A \arrow[rr, Rightarrow, "\text{可逆/正交阵 } P"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{可逆阵 } C"'] & & \text{标准形 } P^TAP = \Lambda \arrow[dl, Rightarrow, "\text{可逆阵 } K"] \\
& \text{规范形} &
\end{tikzcd}
$$

- 所有的可逆阵/正交阵都不唯一;
- 标准形不唯一. 但如果不考虑对角元的次序, 则正交相似下的标准形是唯一的;
- 规范形是唯一的.

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 设实对称矩阵 A 的二次型为 f.

	对称矩阵	二次型
标准形	$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$	$f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$
正惯性指数	标准形中正对角元的个数	标准形中正项的个数
负惯性指数	标准形中负对角元的个数	标准形中负项的个数

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 设实对称矩阵 A 的二次型为 f.

	对称矩阵	二次型
标准形	$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$	$f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$
正惯性指数	标准形中正对角元的个数	标准形中正项的个数
负惯性指数	标准形中负对角元的个数	标准形中负项的个数

- 正惯性指数$p = A$ 的正特征值的个数;
- 负惯性指数$q = A$ 的负特征值的个数;
- $p + q = R(A) = R(f)$, $p - q$ 称为符号差.

定理 (定理 4′：惯性定理–正负惯性指数是对称矩阵的合同不变量)

如果实对称矩阵 A 和 B 合同，则他们的正负惯性指数相等.

（完全）合同不变量/性–正负惯性指数

定理 (定理 4′：惯性定理–正负惯性指数是对称矩阵的合同不变量)

如果实对称矩阵 A 和 B 合同，则他们的正负惯性指数相等.

注：实对称矩阵 A, B 合同 $\Leftrightarrow A, B$ 的正负惯性指数相同.

定理 (定理 4'：惯性定理–正负惯性指数是对称矩阵的合同不变量)

如果实对称矩阵 A 和 B 合同，则他们的正负惯性指数相等.

注：实对称矩阵 A, B 合同 $\Leftrightarrow A, B$ 的正负惯性指数相同.

定理 (定理 4：惯性定理–正负惯性指数是二次型在可逆变换下的不变量)

设

$$f = k_1 y_1^2 + \cdots + k_p y_p^2 - k_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - k_{p+q} y_{p+q}^2,\ k_i \geq 0$$
$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_{p'} y_{p'}^2 - \lambda_{p'+1} y_{p'+1}^2 - \cdots - \lambda_{p'+q'} y_{p'+q'}^2,\ \lambda_i \geq 0$$

为二次型 f 的两个标准形，则 $p = p', q = q'$.

定义 (定义 5)

称二次型 $f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为

- 正定的 $\Leftrightarrow \forall X \neq 0,\ f(X) > 0$;
- 负定的 $\Leftrightarrow \forall X \neq 0,\ f(X) < 0$;
- 半正定的 $\Leftrightarrow \forall X,\ f(X) \geq 0$;
- 半负定的 $\Leftrightarrow \forall X,\ f(X) \leq 0$.

定义 (定义 5)

称二次型 $f(X)=X^TAX$ 或对称矩阵 A 为

- 正定的 $\Leftrightarrow \forall X\neq 0,\ f(X)>0$;
- 负定的 $\Leftrightarrow \forall X\neq 0,\ f(X)<0$;
- 半正定的 $\Leftrightarrow \forall X,\ f(X)\geq 0$;
- 半负定的 $\Leftrightarrow \forall X,\ f(X)\leq 0$.

- 正定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p=n$;
- 负定 $\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q=n$;
- 半正定 $\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q=0$;
- 半负定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p=0$.

定理 (定理 6-8)

$f(X) = X^T AX$ 或对称矩阵 A 为正定的;

定理 (定理 6-8)

$f(X) = X^T A X$ 或对称矩阵 A 为正定的;

$\Leftrightarrow\ \forall X \neq 0,\ f(X) > 0$; (定义)

定理 (定理 6-8)

$f(X)=X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的;

$\Leftrightarrow\ \forall X\neq 0,\ f(X)>0$; (定义)

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p=n$;

定理 (定理 6-8)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的;

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0,\ f(X) > 0$; (定义)

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

定理 (定理 6-8)

$f(X)=X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的;

$\Leftrightarrow$ $\forall X\neq 0,\ f(X)>0$; (定义)

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p=n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

定理 (定理 6-8)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的;

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0,\ f(X) > 0$; (定义)

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 D, 使得对称阵 $A = D^TD$;

$\Leftrightarrow$ $A \overset{合同}{\sim} E$.

定理 (定理 6-8)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的;

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0,\ f(X) > 0$; (定义)

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n$;　(正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 D, 使得对称阵 $A = D^TD$;

$\Leftrightarrow$ $A \overset{\text{合同}}{\sim} E$.

定理 (定理 6-8)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的;

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) > 0$; (定义)

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n$; (正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 D, 使得对称阵 $A = D^TD$;

$\Leftrightarrow$ $A \overset{合同}{\sim} E$.

正定矩阵的性质:

- 若实对称阵 A 为正定的, 则 A^{-1}, A^T, A^* 也都为正定矩阵.
- 若实对称阵 A, B 为正定的, 则 $A + B$ 也是正定矩阵.

定理 (定理 9)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0,\ f(X) < 0$;

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

定理 (定理 9)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) < 0;$

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n;$ (负定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负,偶数阶顺序主子式为正.

定理 (定理 9)

$f(X) = X^T A X$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) < 0$;

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

回顾:

- 主子式：行指标、列指标相同的子式.
- 顺序主子式：前 k 行、前 k 列构成的子式.

合同不变量

性质

如果实对称矩阵 A 和 B 合同, 则

- A 和 B 的正/负惯性指数都相同.
- A 正定当且仅当 B 正定, A 负定当且仅当 B 负定.
- A 和 B 等价. 从而, A 和 B 的阶次、秩、可逆性相同.

例 (227 页例 5)

判断二次型 $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的正定性.

例 (227 页例 5)

判断二次型 $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的正定性.

思路:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- 方法一: 判断三个顺序主子式的正负.
  - 全正 $\Rightarrow$ 正定; 负正负 $\Rightarrow$ 负定; 其他情况 $\Rightarrow$ 不正定也不负定.
- 方法二: 判断三个特征值的正负.
  - 全正 $\Rightarrow$ 正定; 全负 $\Rightarrow$ 负定; 其他情况 $\Rightarrow$ 不正定也不负定.

法一:

$D_1 = 3 > 0$; $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} < 0$; $D_3 = |A| < 0$. 所以不正定也不负定.

法一:

$D_1 = 3 > 0$; $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} < 0$; $D_3 = |A| < 0$. 所以不正定也不负定.

法二: (若无法对特征多项式因式分解)

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 3\lambda + 3$$

A 为对称阵, 所以 A 有三个实特征值, 即 $f(\lambda) = 0$ 有三个根, 设为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. 又 $f(0) = 3 > 0, f(2) = -9 < 0$, 所以

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3.$$

所以二次型不正定也不负定.

例 (228 页例 7)

已知实对称矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = 0$, 证明 A 正定.

例 (228 页例 7)

已知实对称矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=0$, 证明 A 正定.

- $f(A)=0 \overset{A\text{可对角化}}{\Longleftrightarrow} f(\lambda)=0$, 其中 λ 为 A 的任意特征值.
- $f(A)=0 \Longrightarrow f(\lambda)=0$, 其中 λ 为 A 的任意特征值.
- 若 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$, 则 $f(A)=0$. （Hamilton-Cayley 定理）

正（负）定矩阵的应用:

- 若 $f = ax^2 + bxy + cy^2$ 正定，则二次曲线 $f = 1$ 为平面上的椭圆.
- 若 $f = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ 正定，则二次曲面 $f = 1$ 为三维空间中的椭球面.
- 二元函数极值点的刻画:

定理 (同济高等数学下 P113)

二元函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近光滑，$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$，令

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

若 H 正定，则 $f(x_0, y_0)$ 为极小值; 若 H 负定，则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

小结

- 二次型和对称矩阵;
- 二次型化标准形: 正交变换法和配方法;
- 对称矩阵的合同和正定性.

第十一周作业

- 思考题：设 A, B 是 n 阶实对称矩阵，若 A 和 B 合同（i.e. 存在可逆矩阵 P，使得 $P^TAP = B$），则称 A 和 B 属于同一个合同类. 问 n 阶实对称矩阵的合同类最多有多少个？
（提示：正负惯性指数是对称阵合同的完全不变量，所以只需考虑正负惯性指数的所有可能取值，即满足 $0 \leq p+q \leq n$ 的非负整数 p, q 的所有可能取值.）
- Page$_{213}$：3, 5, 6, 7; Page$_{222}$ 3, 4, 5, 6, 7; Page$_{230}$ 3(2), 4, 8.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 13 日