

Lec-1. 随机试验、样本空间、随机事件、 频率与概率

主讲教师：吴利苏 (wulisu@sdust.edu.cn)

主 页：wulisu.cn

主要内容

- 建立概率模型
- 概率的定义
- 概率的性质

1、什么是概率统计？

自然界和社会生活中还大量存在着确定性现象和随机现象.

■ 确定性现象：

◇ $1 + 1 = 2$

◇ 自由落体运动公式 $h = \frac{1}{2}gt^2$

1、什么是概率统计？

自然界和社会生活中还大量存在着确定性现象和随机现象.

■ 确定性现象：

◇ $1 + 1 = 2$

◇ 自由落体运动公式 $h = \frac{1}{2}gt^2$

■ 随机现象：

◇ 人的寿命

◇ 天气现象

◇ 金融市场

1、什么是概率统计？

■ 随机现象虽然存在不确定性，但还是有某些规律的。

- ◇ 年轻人一般比老年人身体好
- ◇ 下个月有很大可能杭州的气温比北京要高
- ◇ 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为 $\frac{1}{2}$

1、什么是概率统计？

■ 随机现象虽然存在不确定性，但还是有某些规律的。

◇ 年轻人一般比老年人身体好

◇ 下个月有很大可能杭州的气温比北京要高

◇ 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为 $\frac{1}{2}$

■ 概率统计就是专门研究随机现象的规律性。

1、什么是概率统计？

- 随机现象虽然存在不确定性，但还是有某些规律的。

- ◇ 年轻人一般比老年人身体好
- ◇ 下个月有很大可能杭州的气温比北京要高
- ◇ 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为 $\frac{1}{2}$

- 概率统计就是专门研究随机现象的规律性。
- 随机现象的广泛性决定了这一学科的重要性。

1.1、概率论和数理统计

■ 确切来说，概率论与数理统计是两个学科。

- ◇ 概率论是数学的一个分支，研究如何定量描述随机现象及其规律；
- ◇ 数理统计则以数据为研究对象，包括数据的收集、整理、分析和建模，从而给出数据现象的某些规律进行预测或决策。如今所处的大数据时代，各种 AI 模型更是以数据统计为基础。

1.2、怎样学习《概率论与数理统计》

- 学思想。概率统计特殊的研究对象包含了许多独特的思维方式和思想方法，特别是如何看待和处理随机规律性，是其它学科中没有的。例如，以比较各种事件出现的可能性的进行决策的思想。
- 学方法。定量描述随机现象及其规律的方法，收集、整理、分析数据，从而建立统计模型的方法。

1.2、怎样学习《概率论与数理统计》

- 学应用。尽可能多地了解各种概念的背景、各种方法和模型的实际应用。不仅要学课程中提及的，也要自己收集、寻找各种实例。
- 学软件。数据处理的最后结果必须通过计算机实现。应该掌握统计软件的使用和结果分析。

2、样本空间、随机事件

自然界与社会生活中的两类现象

$\left\{ \begin{array}{l} \text{确定性现象} \\ \text{随机现象} \end{array} \right.$

确定性现象：

在一定条件下必然发生或不会发生的现象

◇ 例如：太阳不会从西边升起、 $1 + 1 \neq 3$.

随机现象：

在一定条件下具有多种可能结果，且试验时无法预知出现哪个结果的现象.

- ◇ 例如掷骰子可能出现“1点”，也可能是其他情况；
- ◇ 检验产品可能是合格品，也可能是不合格品.

例

- ◇ 向上抛出的物体会落下（确定）
- ◇ 打靶，击中靶心（不确定）
- ◇ 买了彩票会中奖（不确定）

2.1、随机试验

对随机现象的观察、记录、实验统称为随机试验. 它具有以下特性:

- 可以在相同条件下重复进行;
- 事先知道所有可能出现的结果;
- 进行试验前并不知道哪个试验结果会发生.

例

- ◇ 抛一枚硬币，观察试验结果；
- ◇ 对某路公交车某停靠站登记下车人数；
- ◇ 对听课人数进行一次点名.

2.2、样本空间

定义

随机试验的所有可能结果构成的集合称为**样本空间**, 记为 S .

S 中的元素称为**样本点**. 每个样本点表示试验的一种可能结果.

例

◇ 一枚硬币抛一次;

$$S = \{\text{正面}, \text{反面}\};$$

◇ 记录一城市一日中发生交通事故次数;

$$S = \{0, 1, 2, \dots\};$$

例

◇ 记录一批产品的寿命 x ;

$$S = \{x \mid x \geq 0\};$$

◇ 记录某地一昼夜最高温度 x , 最低温度 y ;

$$S = \{(x, y) \mid a \leq y \leq x \leq b\}.$$

注

1. 同一试验, 若试验目的不同, 则对应的样本空间也不同.

注

1. 同一试验, 若试验目的不同, 则对应的样本空间也不同.

例

将一枚硬币抛三次, 观察正反:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$$

若观察正面的次数:

$$S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

注

2. 建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

注

2. 建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例

$S = \{H, T\}$ 可表示抛硬币的正反面, 也可以表示产品的合格与不合格,

注

2. 建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例

$S = \{H, T\}$ 可表示抛硬币的正反面, 也可以表示产品的合格与不合格,

在具体问题中, 描述随机现象的第一步就是建立合适的样本空间.

4、随机事件

定义

样本空间 S 的子集 A 称为随机事件 A ，简称事件 A 。

如果 A 中某个样本点发生，则称事件 A 发生。
事件 A 的表示可用集合，也可用语言来表示。

4、随机事件

- ◇ 如果事件只含有一个样本点，则称其为**基本事件**.
- ◇ 如果把 S 看作事件，则每次试验 S 总是发生，则 S 称为**必然事件**.
- ◇ 如果事件是空集，里面不包含任何样本点，记为 \emptyset ，则每次试验 \emptyset 都不发生，称 \emptyset 为**不可能事件**.

例

- (1) 观察某公交站的候车人数，样本空间 $S = ?$
- (2) 事件 A 表示“至少有 5 人候车”， $A = ?$
- (3) 事件 B 表示“候车人数不多于 2 人”，
 $B = ?$

例

- (1) 观察某公交站的候车人数，样本空间 $S = ?$
- (2) 事件 A 表示“至少有 5 人候车”， $A = ?$
- (3) 事件 B 表示“候车人数不多于 2 人”，
 $B = ?$

$$S = \{0, 1, 2, \dots\}; A = \{5, 6, 7, \dots\}; B = \{0, 1, 2\}.$$

4.1、事件的关系—包含、相等

例

甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了 5 点，分析乙胜负情况.

4.1、事件的关系—包含、相等

例

甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了 5 点，分析乙胜负情况.

解：乙投一骰子所有可能结果构成样本空间：

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A := \{\text{“乙赢”}\} = \{6\}$$

$$B := \{\text{“平局”}\} = \{5\}$$

$$C := \{\text{“乙输”}\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

“乙不输”由 A 与 B 的合并组成 $\{5, 6\}$.

4.1、事件的关系—包含、相等

设试验 E 的样本空间为 S ,
而 A, B 是 S 的子集.

◇ $A \subset B$: 事件 A 发生一定导致 B 发生.

◇ $A = B \Leftrightarrow A \subset B, A \supset B$.

4.1、事件的关系—包含、相等

例

1. $A = \{\text{明天晴天}\}$, $B = \{\text{明天无雨}\}$;
2. $A = \{\text{有多于 4 人候车}\}$,
 $B = \{\text{至少有 5 人候车}\}$;
3. 一枚硬币抛两次, $A = \{\text{第一次是正面}\}$,
 $B = \{\text{至少有一次正面}\}$.

4.2、事件的运算—和事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的**和事件**记为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

表示 A 与 B 至少有一个发生.

4.2、事件的运算—和事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的**和事件**记为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

表示 A 与 B 至少有一个发生.

◇ $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 A_1, \dots, A_n 的和事件.

4.2、事件的运算—和事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的**和事件**记为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

表示 A 与 B 至少有一个发生.

◇ $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 A_1, \dots, A_n 的和事件.

◇ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可数个事件 A_1, \dots 的和事件.

4.2、事件的运算—积事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的积事件, 记 $A \cap B$ 或 $A \cdot B, AB$.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

表示 A 与 B 同时发生.

4.2、事件的运算—积事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的积事件, 记 $A \cap B$ 或 $A \cdot B, AB$.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

表示 A 与 B 同时发生.

◇ $\bigcap_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件, A_1, \dots, A_n 的积事件.

4.2、事件的运算—积事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的积事件, 记 $A \cap B$ 或 $A \cdot B, AB$.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

表示 A 与 B 同时发生.

◇ $\bigcap_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件, A_1, \dots, A_n 的积事件.

◇ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1, \dots 的积事件.

4.2、事件的运算—差事件

◇ A 与 B 的差事件

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

即 $A - B$ 发生是指 A 发生且 B 不发生.

$$A - B = A \cup B - B = A - (A \cap B).$$

4.2、互斥事件、逆事件

◇ 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 是互不相容的或互斥的. 表示 A 与 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

◇ A 的逆事件或对立事件记为 \overline{A} . 若 $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$, 则 $B = \overline{A} = S - A$ 称为逆事件.

注: 对立与互斥的区别, 对立一定互斥, 互斥不一定对立.

4.3、事件的运算定律

A, B, C 为三个事件,

◇ 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

4.3、事件的运算定律

A, B, C 为三个事件,

◇ 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

◇ 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

4.3、事件的运算定律

A, B, C 为三个事件,

◇ 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

◇ 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

◇ 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

4.3、事件的运算定律

◇ 德摩根律 (对偶律) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$
 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

4.3、事件的运算定律

◇ 德摩根律 (对偶律) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

◇ 推广的德摩根律 (对偶律)

$$\overline{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \bar{A}_k = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n$$

4.3、事件的运算定律

注: $\overline{A \cap B}$ 与 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 的区别: $\overline{A \cap B}$ 表示 A 与 B 不同时发生, $\bar{A} \cap \bar{B}$ 表示 A 与 B 都不发生. 实际上,

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \cup A\bar{B}$$

例

用维恩图验证事件等式

$(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$ 是否成立?

例

设 $A = \{\text{甲来听课}\}$, $B = \{\text{乙来听课}\}$. 则

- $A \cup B = \{\text{甲、乙至少有一人来}\};$
- $A \cap B = \{\text{甲、乙都来}\};$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B} = \{\text{甲、乙都不来}\};$
- $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{AB} = \{\text{甲、乙至少有一人不来}\}$
 $= \{\text{甲、乙中最多有一人来}\}.$

例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生, B、C 都不发生:

例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生, B、C 都不发生:

$$A\bar{B}\bar{C} = A - B - C;$$

例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生, B、C 都不发生:

$$A\bar{B}\bar{C} = A - B - C;$$

- 恰有一个发生:

例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生, B、C 都不发生:

$$A\bar{B}\bar{C} = A - B - C;$$

- 恰有一个发生:

$$A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C;$$

例

- 至少有一个发生:

例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = (A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C) \cup (AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C) \cup ABC;$$

例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = (A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C) \cup (AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C) \cup ABC;$$

- 至少有两个发生:

例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = (A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C) \cup (AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C) \cup ABC;$$

- 至少有两个发生:

$$AB \cup BC \cup AC = AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup ABC;$$

例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = (A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C) \cup (AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C) \cup ABC;$$

- 至少有两个发生:

$$AB \cup BC \cup AC = AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup ABC;$$

- 至少有一个不发生:

例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup ABC;$$

- 至少有两个发生:

$$AB \cup BC \cup AC = AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC;$$

- 至少有一个不发生:

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{ABC} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

5.1、频率

对于一个事件来说, 它在一次试验中可能发生, 也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验发生的可能性有多大, 为此引入频率.

频率是 $0 \sim 1$ 之间的一个实数, 在大量重复试验的基础上给出了随机事件发生可能性的估计.

5.1、频率

定义

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

其中 n 表示总实验次数, n_A 表示发生的次数 (频数) .

称 $f_n(A)$ 为事件 A 在这 n 次实验中发生频率.

例

2000 年悉尼奥运会开幕前，气象学家对两个开幕候选日“9 月 10 日”和“9 月 15 日”的 100 年气象学资料分析发现，

日期	频数（下雨天数）	频率
9 月 10 日	86	86%
9 月 15 日	22	22%

因此最后决定开幕日定为“9 月 15 日”。

性质 (频率性质)

1. $0 \leq f_n(A) \leq 1$.
2. $f_n(S) = 1, f_n(\emptyset) = 0$.
3. 若 A_1, \dots, A_K 是两两互不相容事件, 则
$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_n).$$

例

将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率. 见书中表格.

例

将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率. 见书中表格.

总结: 次数 n 较小时, 频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动, 幅度较大, 但随着 n 的增大, $f_n(H)$ 呈现稳定性, 趋于一个稳定值. 从本质上反映了事件在试验中出现的可能性大小, 即概率.

5.2、概率

定义 (统计定义)

当试验的次数增加时，随机事件 A 发生的频率的稳定值 p 称为**概率**. 记为 $P(A) = p$.

这里的稳定值的含义类似高数中的极限，称为依概率收敛下的极限，在第五章中将会详细学习.

5.2、概率

定义 (公理化定义)

设随机试验对应的样本空间为 S , 对于每一个事件 A 定义 $P(A)$, 若满足:

- 非负性: 对于每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$.
- 规范性: 对于必然事件 S 有 $P(S) = 1$.
- 可列可加性: 设 A_1, \dots 是两两互不相容事件, 即 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, 则
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

性质 (概率性质)

1. $P(\emptyset) = 0.$

性质 (概率性质)

1. $P(\emptyset) = 0$.

证明: 令 $A_n = \emptyset$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$,

由可列可加性得

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset).$$

所以 $P(\emptyset) = 0$.



性质 (概率性质)

2. (有限可加性) 若 A_1, \dots, A_n 是两两互不相容事件, 则

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$

性质 (概率性质)

2. (有限可加性) 若 A_1, \dots, A_n 是两两互不相容事件, 则

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$

证明: 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$,

则 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, 由可列可加性

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) =$$

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) + 0 = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad \square$$

性质 (概率性质)

3. 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A),$$

$$P(B) \geq P(A).$$

性质 (概率性质)

3. 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A),$$

$$P(B) \geq P(A).$$

证明: 由 $A \subset B$ 知 $B = A \cup (B - A)$ 且
 $(B - A) \cap A = \emptyset$.

则由有限可加性, $P(B) = P(A) + P(B - A)$,
进一步由 $P(B - A) \geq 0$ 可得 $P(B) \geq P(A)$. \square

性质 (概率性质)

4. $P(A) \leq 1.$

性质 (概率性质)

4. $P(A) \leq 1.$

证明: $A \subset S$, 则 $P(A) \leq P(S) = 1.$ □

性质 (概率性质)

4. $P(A) \leq 1$.

证明: $A \subset S$, 则 $P(A) \leq P(S) = 1$. □

性质 (概率性质)

5. 逆事件得概率 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 (概率性质)

4. $P(A) \leq 1$.

证明: $A \subset S$, 则 $P(A) \leq P(S) = 1$. □

性质 (概率性质)

5. 逆事件得概率 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

证明: $A \cup \bar{A} = S$ 且 $A \cap \bar{A} = \emptyset$,

由有限可加性,

$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. □

性质 (概率性质)

6. 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证明: $A \cup B = A \cup (B - AB)$, 且

$A(B - AB) = \emptyset$, $AB \subset B$. 故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

□

性质 (概率性质)

- (6+.)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

- (6++)

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n).$$

例

设 A, B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$. 求下列三种情况下 $P(B\bar{A})$ 的值.

(1) A 与 B 互斥.

(2) $A \subset B$.

(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$.

例

设 A, B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$. 求下列三种情况下 $P(B\bar{A})$ 的值.

(1) A 与 B 互斥.

(2) $A \subset B$.

(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$.

解:(1). $P(B\bar{A}) = P(B) = \frac{1}{2}$.

(2). $P(B\bar{A}) = P(B) - P(A) = \frac{1}{6}$.

(3). $P(B\bar{A}) = P(B - A) = P(B - AB)$
 $= P(B) - P(AB) = \frac{3}{8}$. □

例

设甲、乙两人向同一目标进行射击, 已知甲击中的概率为 0.7, 乙击中目标的概率为 0.6, 两人同时击中目标的概率为 0.4, 求

- (1) 目标不被击中的概率;
- (2) 甲击中目标而乙未击中的概率.

解：设 $A = \{\text{甲击中目标}\}$, $B = \{\text{乙击中目标}\}$,
则

$$P(A) = 0.7, P(B) = 0.6, P(AB) = 0.4.$$

而 $\{\text{目标不被击中}\} = \bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B}$,
 $\{\text{甲击中目标而乙未击中}\} = A\bar{B} = A - AB$,
所以

$$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 0.1;$$

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.3.$$

