

线性代数-15

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 26 日

本次课内容

1. $AX = 0$ 的解的结构

2. $AX = \beta$ 的解的结构

齐次线性方程组解的结构

$$AX = 0 \quad (1)$$

的全体解 $S = \{X \mid AX = 0\}$ 构成一个向量空间. 即 S 对向量加法和数乘运算封闭:

- 若 $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0$, 则 $A(\xi_1 + \xi_2) = 0$;
- 若 $A\xi = 0$, 则对任意 $k \in \mathbb{R}, A(k\xi) = 0$.

基础解系和通解

- 设 S 为 $AX = 0$ 的解空间, $S_0 : \xi_1, \dots, \xi_t$ 为 S 的一个基.
则 $\forall X \in S$,

$$X = k_1 \xi_1 + \cdots + k_t \xi_t, k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}.$$

基础解系和通解

- 设 S 为 $AX = 0$ 的解空间, $S_0 : \xi_1, \dots, \xi_t$ 为 S 的一个基.
则 $\forall X \in S$,

$$X = k_1 \xi_1 + \dots + k_t \xi_t, k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}.$$

- 解空间 S 的基 (最大无关组) 称为 $AX = 0$ 的一个基础解系.

$$X = k_1 \xi_1 + \dots + k_t \xi_t, k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}$$

称为 $AX = 0$ 的通解.

- 基础解系中线性无关的向量的个数:

$$t = n - R(A),$$

其中 n 为未知量个数, A 为系数矩阵.

定理 (定理 8)

$R(A_{m \times n}) = r$, 则 $AX = 0$ 的解空间 S 的维数 $\dim S = n - r$.

基础解系和通解

定理 (定理 8)

$R(A_{m \times n}) = r$, 则 $AX = 0$ 的解空间 S 的维数 $\dim S = n - r$.

基础解系中线性无关的向量的个数:

$t = R_{S_0}$ 基 S_0 中向量的个数

$= \dim S$ 解空间 S 的维数

$=$ 自由未知量的个数

$=$ 除去行最简形中每行首个非零元所在的列, 剩余的列数

$= n - R(A)$.

例 (例 1)

求

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

求解步骤:

1. 对系数矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 得基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} ;
4. 得通解 $X = k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

- 基础解系本质上是基和最大无关组，所以取法不唯一.
- 自由未知量的选取不唯一，但一般取首非零元所在的列之外的列，对应的未知量.
- 自由未知量的取值不唯一，但一般取自由未知量的其中一个为1，其余为0，这样更容易计算.

例 2

例

设 $A_{m \times n}B_{n \times l} = O$, 证明 $R(A) + R(B) \leq n$.

例

例

n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解, 证明 $R(A) = R(B)$.

例

例

n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解, 证明 $R(A) = R(B)$.



$$A \xrightarrow{r} B \xrightarrow{\text{同型}} R(A) = R(B)$$



$AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解

例 3

例

证明 $R(A^T A) = R(A)$.

非齐次线性方程组解的结构

设 $\beta \neq 0$, 非齐次线性方程组

$$AX = \beta \quad (2)$$

的全体解集 S 不是一个向量空间, 满足:

- 若 $A\eta_1 = \beta, A\eta_2 = \beta$, 则 $A(\eta_1 - \eta_2) = 0$.
- 若 $A\eta = \beta, A\xi = 0$, 则 $A(\eta + \xi) = \beta$.

非齐次线性方程组解的通解

$AX = \beta$ 的通解为：

$$X = k_1 \xi_1 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

非齐次线性方程组解的通解

$AX = \beta$ 的通解为：

$$X = k_1 \xi_1 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

- 其中 $X = \eta^*$ 称为 $AX = \beta$ 的特解，满足 $A\eta^* = \beta$;
- ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系.

非齐次线性方程组解的通解

$AX = \beta$ 的通解为：

$$X = k_1 \xi_1 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

- 其中 $X = \eta^*$ 称为 $AX = \beta$ 的特解，满足 $A\eta^* = \beta$;
- ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系.
- $AX = \beta$ 的通解 $\Leftrightarrow AX = 0$ 的通解 + $AX = \beta$ 的一个特解.

例(例4)

求解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

求解步骤:

1. 对增广矩阵 (A, β) 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 取自由未知量全为 0, 解 $AX = \beta$ 得到一个特解 η^* ;
4. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 解 $AX = 0$ 得基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} ;
5. 得通解 $X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

- 特解的取法并不唯一，但取自由未知量全为 0，更容易计算.
- 基础解系的取法不唯一.
- 自由未知量的选取不唯一，但一般取首非零元列之外的列对应未知量为自由未知量.
- 自由未知量的取值不唯一，但一般取自由未知量的其中一个为 1，其余为 0，这样更容易计算.

例 5

例

设 $AX = \beta$ 是一个四元线性方程组, $R(A) = 3$,
 $A\alpha_1 = A\alpha_2 = A\alpha_3 = \beta$, 若

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, 3\alpha_2 - \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求 $AX = \beta$ 的通解.

例 6

例

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是一个三阶矩阵, $R(A) = 2$ 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$. 求 $AX = \beta$ 的通解, 其中 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

补充：计算机如何求解线性方程组-LU 分解

例

求解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

算法步骤：

1. LU 分解：

$$A = LU,$$

其中 L 是对角线全为 1 的下三角矩阵, U 是上三角矩阵.

2. 令 $Y = UX$, 解 $LY = \beta$.
3. 解 $UX = Y$.

- 求解 $AX = 0$;

求解步骤:

- 对系数矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形;
- 写出同解方程组;
- 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 得基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} ;
- 得通解 $X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

- 求解 $AX = \beta$

求解步骤:

- 对增广矩阵 (A, β) 进行初等行变换化为行最简形;
- 写出同解方程组;
- 取自由未知量全为 0, 解 $AX = \beta$ 得到一个特解 η^* ;
- 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 解 $AX = 0$ 得基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} ;
- 得通解 $X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

齐次线性方程组小结

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = 0$	$A_{m \times n}X_n = 0$	$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$
是否有非零解?	$R(A) < n?$	向量组 $\{\alpha_i\}$ 线性相关?
有非零解	$R(A) < n$	线性相关
有唯一零解	$R(A) = n$	线性无关

- $AX = 0$ 的通解

$$X = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

其中 $r = R(A)$.

非齐次线性方程组小结

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	$A_{m \times n}X_n = \beta_m$	$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$
是否有解?	$R(A, \beta) = R(A)?$	β 由向量组 $\{\alpha_i\}$ 线性表示?
无解	$R(A, \beta) > R(A)$	No
有解	$R(A, \beta) = R(A)$	Yes
有唯一解	$R(A, \beta) = R(A) = n$ A 列满秩	Yes, 且表示唯一
有唯一解 ($m = n$)	$R(A, \beta) = R(A) = n$ A 可逆	Yes, 且表示唯一
有无穷解	$R(A, \beta) = R(A) < n$	Yes, 且表示不唯一

- $AX = \beta$ 的通解

$$X = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

第九周作业

- Page₁₆₆: 2(2)(4), 3(2), 6, 7
- Page₁₇₅: 3, 4, 5
- Page₁₇₈: 8, 10, 11

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 26 日