《线性代数》第三章作业（5 月 28 日提交）

临班 370

2023 年 6 月 21 日

班级：______________ 姓名：______________ 学号：________________

1. 判断题（错误请给出说明或反例. 每题 2 分，共 20 分）：红错

(1) 行等价的两个增广矩阵对应的线性方程组同解.

(2) 等价的两个增广矩阵对应的线性方程组同解.（行等价）

(3) n 阶方阵 A 可经过若干次初等列变换变为矩阵 B, 则存在可逆矩阵 P 使得 $PA = B$.（左行右列）

(4) $R(A+B) \geq R(A) + R(B)$.（$B = -A = E$）

(5) $R(A) = R(B)$, 则 A 与 B 等价. （同型）

(6) 任意矩阵 A 可以写成初等矩阵的乘积. （可逆阵）

(7) A 为方阵，A 可逆当且仅当 $AX = 0$ 有非零解. （A 可逆当且仅当 $AX = 0$ 有唯一零解）

(8) 若 $AX = AY, A \neq O$，则 $X = Y$. （A 列满秩）

(9) A 列满秩，$AX = AY$，则 $X = Y$.

(10) $R(A) = r$，则 A 的 $r-1$ 阶子式都不为 0, 至少一个 r 阶子式为 0.（$R(A) = r$: 任意 $r+1$ 阶子式都为 0, 存在一个非零 r 阶子式）

3. 计算题 (每题 20 分，共 80 分)：

(1) 用初等变换求解矩阵方程 $AX=2X+A$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

提示: 化到行最简形, 由 $A-2E\overset{r}{\sim}E$ 说明 A 可逆 (不用计算 $|A-2E|\neq 0$).

(2) λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3&=0\\x_1+\lambda x_2+x_3&=3\\x_1+x_2+\lambda x_3&=\lambda-1\end{cases}$$

① 有唯一解； ② 无解；③无穷多个解.

注意：通过系数矩阵的秩，增广矩阵的秩，未知元个数三者关系判断解的存在性.

化为行阶梯形即可求秩; 初等变换时, 含参量因式不可作分母、不可消去.

(3) 分别用逆矩阵法，Carmer 法则，和初等变换方法，求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3&=2\\2x_1-x_2-3x_3&=1\\3x_1+2x_2-5x_3&=0\end{cases}$$

.

注意: 求解方程组优先推荐初等变换.

(4) 令

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix},$$

利用初等行变换把矩阵 A 化为行最简形矩阵 B，从而求矩阵 A 的秩. 进一步，求可逆矩阵 P，使得 $PA=B$.

提示: 化 (A,E) 为行最简形, 行最简形的后 3 列即为可逆 P.