

《线性代数》第一章作业 (4 月 22 日提交)

临班 370

2023 年 4 月 9 日

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

1. 判断题 (正确请说明理由, 错误请给出反例. 每题 5 分, 共 10 分):

(1) $\det(a_{ij} + b_{ij}) = \det(a_{ij}) + \det(b_{ij})$.

(2) $\det(k \cdot a_{ij}) = k \cdot \det(a_{ij})$.

其中 $\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

2. 填空题 (每空 5 分, 共 15 分):

(1) 排列 53681742 的逆序数是_____.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 中元素 a 的代数余子式是_____.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 7$, 则 $\begin{vmatrix} x_1 & -y_1 & z_1 \\ 2x_3 & -2y_3 & 2z_3 \\ 3x_2 & -3y_2 & 3z_2 \end{vmatrix} =$ _____.

2. 计算题 (1-6 题每题 10 分, 第 7 题 15 分, 共 75 分):

(1) 用行列式递归定义 $D_4 = \det(a_{ij}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

计算友行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

(2) 用降阶法计算数字行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

(3) 设行列式 D 如上, 用展开定理计算 $A_{31} - 2A_{33} + 3A_{34}$.

(4) 用求和法计算循环行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

(5) 用化上/下三角形行列式计算爪形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & c & c & \cdots & c \\ c & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \neq 0$

(6) 用升阶法/加边法将第 (4) 题中行列式化为爪形行列式, 并求值.

(7) 用范德蒙德行列式计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

3. 探究题 (三对角行列式和斐波那契数列, 选做 50 分) .

(1) 用 (第二) 数学归纳法证明三对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}_{n \times n} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

(2) 利用 (1) 计算

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \quad n \geq 2.$$

由

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

(3) 将 F_n 沿第一行展开, 得

$$\begin{aligned} F_n &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

令 $F_1 = 1$, 则数列 $\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots\}$ 就是斐波那契数列!

由 (2) 知斐波那契数列的通项为

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$