

# Lec-1. 随机试验、样本空间、随机事件、 频率与概率

主讲教师：吴利苏 ([wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn))

主    页：[wulisu.cn](http://wulisu.cn)

# 1、什么是概率统计？

## ■ 必然现象中的确定性规律：

◇  $1 + 1 = 2$

◇ 自由落体运动公式  $h = \frac{1}{2}gt^2$

# 1、什么是概率统计？

## ■ 必然现象中的确定性规律：

◇  $1 + 1 = 2$

◇ 自由落体运动公式  $h = \frac{1}{2}gt^2$

## ■ 自然界和社会生活中还大量存在着随机现象：

◇ 人的寿命

◇ 天气现象

◇ 金融市场

# 1、什么是概率统计？

■ 随机现象虽然存在不确定性，但还是有某些规律的。

- ◇ 老年人的余寿一般来说比年轻人短
- ◇ 明年 6 月 1 日，有很大可能杭州的气温比北京要高
- ◇ 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为  $\frac{1}{2}$

# 1、什么是概率统计？

■ 随机现象虽然存在不确定性，但还是有某些规律的。

- ◇ 老年人的余寿一般来说比年轻人短
- ◇ 明年 6 月 1 日，有很大可能杭州的气温比北京要高
- ◇ 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为  $\frac{1}{2}$

■ 概率统计是一门专门研究随机现象的规律性的学科

# 1、什么是概率统计？

- 随机现象虽然存在不确定性，但还是有某些规律的。

- ◇ 老年人的余寿一般来说比年轻人短
- ◇ 明年 6 月 1 日，有很大可能杭州的气温比北京要高
- ◇ 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为  $\frac{1}{2}$

- 概率统计是一门专门研究随机现象的规律性的学科

- 随机现象的广泛性决定了这一学科的重要性

## 1.1、概率论和数理统计

■ 确切来说，概率论与数理统计是两个学科。

- ◇ 概率论是数学的一个分支，研究如何定量描述随机现象及其规律；
- ◇ 数理统计则以数据为唯一研究对象，包括数据的收集、整理、分析和建模，从而给出数据现象的某些规律进行预测或决策。大数据时代的来临，更为统计的发展带来了极大的机遇和挑战。

## 1.2、怎样学习《概率论与数理统计》

- 学思想。概率统计特殊的研究对象包含了许多独特的思维方式和思想方法，特别是如何看待和处理随机规律性，是其它学科中没有的。例如，以比较各种事件出现的可能性的进行决策的思想。
- 学方法。定量描述随机现象及其规律的方法，收集、整理、分析数据，从而建立统计模型的方法。



## 1.2、怎样学习《概率论与数理统计》

- 学应用。尽可能多地了解各种概念的背景、各种方法和模型的实际应用。不仅要学课程中提及的，也要自己收集、寻找各种实例。
- 学软件。数据处理的最后结果必须通过计算机实现。应该掌握统计软件的使用和结果分析。

## 1.3、怎样才算是课程成功学习？

- 是否对“随机”有足够认识
- 是否对“数据”有兴趣、有感觉
- 对“随机”有足够认识，即能随时随地用“随机”的观点去观察、看待、处理周围的事物。
- 对“数据”有兴趣、有感觉，即要善于发现、善于利用、善于处理周围的数据。

## 2、样本空间、随机事件

自然界与社会生活中的两类现象

$\left\{ \begin{array}{l} \text{确定性现象} \\ \text{随机现象} \end{array} \right.$

## 确定性现象：

在一定条件下必然发生或不会发生的现象

◇ 例如：太阳不会从西边升起、 $1 + 1 \neq 3$ .

## 随机现象：

在一定条件下具有多种可能结果，且试验时无法预知出现哪个结果的现象.

- ◇ 例如掷骰子可能出现“1点”，也可能是其他情况；
- ◇ 检验产品可能是合格品，也可能是不合格品.

## 例

- ◇ 向上抛出的物体会落下（确定）
- ◇ 打靶，击中靶心（不确定）
- ◇ 买了彩票会中奖（不确定）

## 2.1、随机试验

对随机现象的观察、记录、实验统称为随机试验. 它具有以下特性:

- 可以在相同条件下重复进行;
- 事先知道所有可能出现的结果;
- 进行试验前并不知道哪个试验结果会发生.

## 例

- ◇ 抛一枚硬币，观察试验结果；
- ◇ 对某路公交车某停靠站登记下车人数；
- ◇ 对听课人数进行一次点名.



## 2.2、样本空间

### 定义

随机试验的所有可能结果构成的集合称为样本空间, 记为  $S = \{e\}$ .

$S$  中的元素  $e$  称为样本点.

例

◇ 一枚硬币抛一次；

$$S = \{\text{正面}, \text{反面}\};$$

◇ 记录一城市一日中发生交通事故次数；

$$S = \{0, 1, 2, \dots\};$$

例

◇ 记录一批产品的寿命  $x$ ;

$$S = \{x \mid x \geq 0\};$$

◇ 记录某地一昼夜最高温度  $x$ , 最低温度  $y$ ;

$$S = \{(x, y) \mid a \leq y \leq x \leq b\}.$$

## 注

1. 同一试验, 若试验目的不同, 则对应的样本空间也不同.

## 注

1. 同一试验, 若试验目的不同, 则对应的样本空间也不同.

## 例

将一枚硬币抛三次, 观察正反:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$$

若观察正面的次数:

$$S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

注

2. 建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

## 注

2. 建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

## 例

$S = \{H, T\}$  可表示抛硬币的正反面, 也可以表示产品的合格与不合格,

## 注

2. 建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

## 例

$S = \{H, T\}$  可表示抛硬币的正反面, 也可以表示产品的合格与不合格,

在具体问题中, 描述随机现象的第一步就是建立合适的样本空间.



## 4、随机事件

### 定义

随机试验的所有可能结果构成的集合称为样本空间, 记为  $S = \{e\}$ .

$S$  中的元素  $e$  称为样本点.

## 4、随机事件

### 定义

样本空间  $S$  的子集  $A$  称为随机事件  $A$ ，简称事件  $A$ 。

事件  $A$  发生. 事件  $A$  的表示可用集合，也可用语言来表示.

## 4、随机事件

- ◇ 如果事件只含有一个样本点，则称其为**基本事件**.
- ◇ 如果把  $S$  看作事件，则每次试验  $S$  总是发生，则  $S$  称为**必然事件**.
- ◇ 如果事件是空集，里面不包含任何样本点，记为  $\emptyset$ ，则每次试验  $\emptyset$  都不发生，称  $\emptyset$  为**不可能事件**.

## 例

- (1) 观察某公交站的候车人数，样本空间  $S = ?$
- (2) 事件  $A$  表示“至少有 5 人候车”， $A = ?$
- (3) 事件  $B$  表示“候车人数不多于 2 人”，  
 $B = ?$

## 例

- (1) 观察某公交站的候车人数，样本空间  $S = ?$
- (2) 事件  $A$  表示“至少有 5 人候车”， $A = ?$
- (3) 事件  $B$  表示“候车人数不多于 2 人”，  
 $B = ?$

$$S = \{0, 1, 2, \dots\}; A = \{5, 6, 7, \dots\}; B = \{0, 1, 2\}.$$

## 4.1、事件的关系—包含、相等

例

甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了 5 点，分析乙胜负情况.

## 4.1、事件的关系—包含、相等

### 例

甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了 5 点，分析乙胜负情况.

解：乙投一骰子所有可能结果构成样本空间：

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A := \text{“乙赢”} \quad S = \{6\}$$

$$B := \text{“平局”} \quad S = \{5\}$$

$$C := \text{“乙输”} \quad S = \{1, 2, 3, 4\}$$

“乙不输”由 A 与 B 的合并组成  $\{5, 6\}$ .

## 4.1、事件的关系—包含、相等

设试验  $E$  的样本空间为  $S$ ,  
而  $A, B$  是  $S$  的子集.

◇  $A \subset B$ : 事件  $A$  发生一定导致  $B$  发生.

◇  $A = B \Leftrightarrow A \subset B, A \supset B$ .



## 4.1、事件的关系—包含、相等

### 例

1.  $A = \{\text{明天晴天}\}$ ,  $B = \{\text{明天无雨}\}$ ;
2.  $A = \{\text{有多于 4 人候车}\}$ ,  
 $B = \{\text{至少有 5 人候车}\}$ ;
3. 一枚硬币抛两次,  $A = \{\text{第一次是正面}\}$ ,  
 $B = \{\text{至少有一次正面}\}$ .

## 4.2、事件的运算—和事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$  是样本空间  $S$  的子集.

◇  $A$  与  $B$  的**和事件**记为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

表示  $A$  与  $B$  至少有一个发生.

## 4.2、事件的运算—和事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$  是样本空间  $S$  的子集.

◇  $A$  与  $B$  的**和事件**记为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

表示  $A$  与  $B$  至少有一个发生.

◇  $\bigcup_{k=1}^n A_k$  为  $n$  个事件  $A_1, \dots, A_n$  的和事件.

## 4.2、事件的运算—和事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$  是样本空间  $S$  的子集.

◇  $A$  与  $B$  的**和事件**记为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

表示  $A$  与  $B$  至少有一个发生.

◇  $\bigcup_{k=1}^n A_k$  为  $n$  个事件  $A_1, \dots, A_n$  的和事件.

◇  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  为可数个事件  $A_1, \dots$  的和事件.

## 4.2、事件的运算—积事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$  是样本空间  $S$  的子集.

◇  $A$  与  $B$  的积事件, 记  $A \cap B$  或  $A \cdot B, AB$ .

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

表示  $A$  与  $B$  同时发生.

## 4.2、事件的运算—积事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$  是样本空间  $S$  的子集.

◇  $A$  与  $B$  的积事件, 记  $A \cap B$  或  $A \cdot B, AB$ .

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

表示  $A$  与  $B$  同时发生.

◇  $\bigcap_{k=1}^n A_k$  为  $n$  个事件,  $A_1, \dots, A_n$  的积事件.

## 4.2、事件的运算—积事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$  是样本空间  $S$  的子集.

◇  $A$  与  $B$  的积事件, 记  $A \cap B$  或  $A \cdot B, AB$ .

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

表示  $A$  与  $B$  同时发生.

◇  $\bigcap_{k=1}^n A_k$  为  $n$  个事件,  $A_1, \dots, A_n$  的积事件.

◇  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  为可列个事件  $A_1, \dots$  的积事件.

## 4.2、事件的运算—差事件

◇  $A$  与  $B$  的差事件

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

即  $A - B$  发生是指  $A$  发生且  $B$  不发生.

$$A - B = A\bar{B} = A \cup B - B = A - (A \cap B).$$



## 4.2、互斥事件、逆事件

◇ 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则称  $A$  与  $B$  是互不相容的或互斥的. 表示  $A$  与  $B$  不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

◇  $A$  的逆事件或对立事件记为  $\overline{A}$ . 若  $A \cup B = S, A \cap B = \emptyset$ , 则  $B = \overline{A}$ .

注: 对立与互斥的区别, 对立一定互斥, 互斥不一定对立.

### 4.3、事件的运算定律

$A, B, C$  为三个事件,

◇ 交换律  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

### 4.3、事件的运算定律

$A, B, C$  为三个事件,

◇ 交换律  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

◇ 结合律  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$   
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

### 4.3、事件的运算定律

$A, B, C$  为三个事件,

◇ 交换律  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

◇ 结合律  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$   
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

◇ 分配律  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

### 4.3、事件的运算定律

◇ 德摩根律 (对偶律)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

### 4.3、事件的运算定律

◇ 德摩根律 (对偶律)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$   
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

◇ 推广的德摩根律 (对偶律)

$$\overline{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \bar{A}_k = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n$$

### 4.3、事件的运算定律

注:  $\overline{A \cap B}$  与  $\bar{A} \cap \bar{B}$  的区别:  $\overline{A \cap B}$  表示  $A$  与  $B$  不同时发生,  $\bar{A} \cap \bar{B}$  表示  $A$  与  $B$  都不发生. 实际上,

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \cup A\bar{B}$$

例

用维恩图验证事件等式

$(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$  是否成立?



## 例

设  $A = \{\text{甲来听课}\}$ ,  $B = \{\text{乙来听课}\}$ . 则

- $A \cup B = \{\text{甲、乙至少有一人来}\};$
- $A \cap B = \{\text{甲、乙都来}\};$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B} = \{\text{甲、乙都不来}\};$
- $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{AB} = \{\text{甲、乙至少有一人不来}\}$   
 $= \{\text{甲、乙中最多有一人来}\}.$

## 例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生, B、C 都不发生:

## 例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生, B、C 都不发生:

$$A\bar{B}\bar{C} = A - B - C;$$

## 例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生, B、C 都不发生:

$$A\bar{B}\bar{C} = A - B - C;$$

- 恰有一个发生:

## 例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生, B、C 都不发生:

$$A\bar{B}\bar{C} = A - B - C;$$

- 恰有一个发生:

$$A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C;$$

例

- 至少有一个发生:

例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = (A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C) \cup (AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C) \cup ABC;$$

## 例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup ABC;$$

- 至少有两个发生:



## 例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup ABC;$$

- 至少有两个发生:

$$AB \cup BC \cup AC = AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC;$$

## 例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup ABC;$$

- 至少有两个发生:

$$AB \cup BC \cup AC = AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC;$$

- 至少有一个不发生:

## 例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup ABC;$$

- 至少有两个发生:

$$AB \cup BC \cup AC = AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC;$$

- 至少有一个不发生:

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{ABC} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

## 5.1、频率

对于一个事件来说, 它在一次试验中可能发生, 也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验发生的可能性有多大, 为此引入频率.

频率是  $0 \sim 1$  之间的一个实数, 在大量重复试验的基础上给出了随机事件发生可能性的估计.

## 5.1、频率

### 定义

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

其中  $n$  表示总实验次数,  $n_A$  表示发生的次数 (频数) .

称  $f_n(A)$  为事件  $A$  在这  $n$  次实验中发生频率.

## 例

2000 年悉尼奥运会开幕前，气象学家对两个开幕候选日“9 月 10 日”和“9 月 15 日”的 100 年气象学资料分析发现，

日期	频数（下雨天数）	频率
9 月 10 日	86	86%
9 月 15 日	22	22%

因此最后决定开幕日定为“9 月 15 日”。

## 性质 (频率性质)

1.  $0 \leq f_n(A) \leq 1$ .
2.  $f_n(S) = 1, f_n(\emptyset) = 0$ .
3. 若  $A_1, \dots, A_K$  是两两互不相容事件, 则
$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_n).$$

例

将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率. 见书中表格.



## 例

将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率. 见书中表格.

总结: 次数  $n$  较小时, 频率  $f_n(H)$  在 0 与 1 之间随机波动, 幅度较大, 但随着  $n$  的增大,  $f_n(H)$  呈现稳定性, 趋于一个稳定值. 从本质上反映了事件在试验中出现的可能性大小, 即概率.

## 5.2、概率

### 定义 (统计定义)

当试验的次数增加时, 随机事件  $A$  发生的频率的稳定值  $p$  称为**概率**. 记为  $P(A) = p$ .

## 5.2、概率

### 定义 (公理化定义)

设随机试验对应的样本空间为  $S$ , 对于每一个事件  $A$  定义  $P(A)$ , 若满足:

- 非负性: 对于每一个事件  $A$ , 有  $P(A) \geq 0$ .
- 规范性: 对于必然事件  $S$  有  $P(S) = 1$ .
- 可列可加性: 设  $A_1, \dots$  是两两互不相容事件, 即  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ , 则
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

则称  $P(A)$  为事件  $A$  的**概率**.

## 性质 (概率性质)

1.  $P(\emptyset) = 0.$

## 性质 (概率性质)

**1.**  $P(\emptyset) = 0.$

证明: 令  $A_n = \emptyset$ , 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ ,

由可列可加性得

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset).$$

所以  $P(\emptyset) = 0.$



## 性质 (概率性质)

2. (有限可加性) 若  $A_1, \dots, A_n$  是两两互不相容事件, 则

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$

## 性质 (概率性质)

2. (有限可加性) 若  $A_1, \dots, A_n$  是两两互不相容事件, 则

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$

证明: 令  $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ ,

则  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ , 由可列可加性

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) =$$

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) + 0 = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad \square$$

## 性质 (概率性质)

3. 若  $A \subset B$ , 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A),$$

$$P(B) \geq P(A).$$



## 性质 (概率性质)

3. 若  $A \subset B$ , 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A),$$

$$P(B) \geq P(A).$$

证明: 由  $A \subset B$  知  $B = A \cup (B - A)$  且  
 $(B - A) \cap A = \emptyset$ .

则由有限可加性,  $P(B) = P(A) + P(B - A)$ ,  
进一步由  $P(B - A) \geq 0$  可得  $P(B) \geq P(A)$ .  $\square$

## 性质 (概率性质)

4.  $P(A) \leq 1.$

## 性质 (概率性质)

4.  $P(A) \leq 1.$

证明:  $A \subset S$ , 则  $P(A) \leq P(S) = 1.$  □

## 性质 (概率性质)

4.  $P(A) \leq 1$ .

证明:  $A \subset S$ , 则  $P(A) \leq P(S) = 1$ . □

## 性质 (概率性质)

5. 逆事件得概率  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

## 性质 (概率性质)

**4.**  $P(A) \leq 1.$

证明:  $A \subset S$ , 则  $P(A) \leq P(S) = 1.$  □

## 性质 (概率性质)

**5.** 逆事件得概率  $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

证明:  $A \cup \bar{A} = S$  且  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ,  
由有限可加性,

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$
□

## 性质 (概率性质)

### 6. 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证明:  $A \cup B = A \cup (B - AB)$ , 且

$A(B - AB) = \emptyset$ ,  $AB \subset B$ . 故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$



## 性质 (概率性质)

- (6+.)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

- (6++)

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n).$$

## 例

设  $A, B$  的概率分别为  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{1}{2}$ . 求下列三种情况下  $P(B\bar{A})$  的值.

(1)  $A$  与  $B$  互斥.

(2)  $A \subset B$ .

(3)  $P(AB) = \frac{1}{8}$ .



## 例

设  $A, B$  的概率分别为  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{1}{2}$ . 求下列三种情况下  $P(B\bar{A})$  的值.

(1)  $A$  与  $B$  互斥.

(2)  $A \subset B$ .

(3)  $P(AB) = \frac{1}{8}$ .

解:(1).  $P(B\bar{A}) = P(B) = \frac{1}{2}$ .

(2).  $P(B\bar{A}) = P(B) - P(A) = \frac{1}{6}$ .

(3).  $P(B\bar{A}) = P(B - A) = P(B - AB)$   
 $= P(B) - P(AB) = \frac{3}{8}$ .



## 例

设甲、乙两人向同一目标进行射击, 已知甲击中的概率为 0.7, 乙击中目标的概率为 0.6, 两人同时击中目标的概率为 0.4, 求

- (1) 目标不被击中的概率;
- (2) 甲击中目标而乙未击中的概率.

解： 设  $A = \{\text{甲击中目标}\}$ ,  $B = \{\text{乙击中目标}\}$ ,  
则

$$P(A) = 0.7, P(B) = 0.6, P(AB) = 0.4.$$

而  $\{\text{目标不被击中}\} = \bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B}$ ,  
 $\{\text{甲击中目标而乙未击中}\} = A\bar{B} = A - AB$ ,  
所以

$$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 0.1;$$

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.3.$$

