

Lec-21. 估计量的评价准则

主讲教师: 吴利苏 (wulisu@sdust.edu.cn)

主 页: wulisu.cn

例

设 X 服从均匀分布 $U(a, b)$, a 和 b 未知, X_1, \dots, X_n 为样本.

- (1) 求 a 和 b 的最大似然估计.
- (2) 求 $E(X)$ 的最大似然估计.
- (3) 若已获得 $n = 5$ 的样本值如下,
0.34 0.59 0.16 0.96 0.84
求 $a, b, E(X)$ 的最大似然估计值.

解：(1) 似然函数

$$L(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \leq x_i \leq b, i = 1, \dots, n. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

关于 a 单调增，关于 b 单调减. 并且只有当

$$a \leq \min \{x_1, \dots, x_n\},$$

$$b \geq \max \{x_1, \dots, x_n\}$$

时，才能使似然函数 $L(a, b)$ 不为零.

因此, a 达到最大值 $\min\{x_1, \dots, x_n\}$, b 达到最小值 $\max\{x_1, \dots, x_n\}$, 就能使 $L(\alpha, b)$ 达到最大.
所以

$$\hat{a} = \min\{X_1, \dots, X_n\} \triangleq X_{(1)},$$

$$\hat{b} = \max\{X_1, \dots, X_n\} \triangleq X_{(n)}.$$

□

比较矩估计量:

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3B_2},$$

$$\hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3B_2}.$$

(2) $E(X) = \frac{a+b}{2}$ 是参数 a, b 的函数, 因此 $E(X)$ 最大似然估计量为

$$E(\hat{X}) = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2} = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}.$$

(3) 将样本值分别代入 $a, b, E(X)$ 最大似然估计量,

$$\hat{a} = 0.16, \hat{b} = 0.96, E(X) = 0.56.$$



对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价不同估计量的好坏？

对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价不同估计量的好坏？

⇒ 估计量的评价准则！

本次课内容

估计量的评价准则

- 无偏性准则
- 有效性准则
- 相合性准则

好的估计量: 期望等于未知参数 (无偏), 且方差较小的估计量 (有效).

定义 (无偏性准则)

设参数 θ 的估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 若

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计量.

定义 (无偏性准则)

设参数 θ 的估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 若

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计量.

- 若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, 则 $E(\hat{\theta}) - \theta$ 称为估计量 $\hat{\theta}$ 的系统误差.
- 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的渐近无偏估计量.

无偏性: $E(\hat{\theta}) = \theta$

- 无偏性的统计意义是指在大量重复试验下, 由 $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 给出的估计的平均恰是 θ , 从而无偏性保证了 $\hat{\theta}$ 没有系统误差.

例

工厂长期为商家提供某种商品, 假设生产过程相对稳定, 产品合格率为 θ , 虽然一批货的合格率可能会高于 θ , 或低于 θ , 但无偏性能够保证在较长一段时间内合格率接近 θ , 所以双方互不吃亏.

但作为顾客购买商品, 只有二种可能, 即买到的是合格品或不合格品, 此时无偏性没有意义.

例

设总体 X 的一阶和二阶矩存在,

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2.$$

- (1) 证明: 样本均值 \bar{X} 和样本方差 S^2 分别是 μ 和 σ^2 的无偏估计;
- (2) 判断: B_2 是否为 σ^2 的无偏估计? 是否为 σ^2 的渐近无偏估计?

(1) 证: 因 X_1, X_2, \dots, X_n 与 X 同分布, 故有:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu$$

故 \bar{X} 是 μ 的无偏估计.

$$E(S^2) = \sigma^2$$

故 S^2 是 σ^2 的无偏估计.

$$(2) B_2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

$$E(B_2) = \frac{n-1}{n} E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$$

故 B_2 不是 σ^2 的无偏估计.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(B_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

故 B_2 是 σ^2 的渐近无偏估计.

□

例

设总体 X 服从均匀分布 $U(0, \theta)$, θ 是未知参数, 样本 X_1, \dots, X_n .

- (1) 求 θ 的矩估计, 判断是否无偏;
- (2) 求 θ 的最大似然估计, 判断是否无偏.

解 (1): 矩估计:

由

$$\mu_1 = E(X) = \int_0^{\theta} \frac{1}{\theta} x dx = \frac{\theta}{2}.$$

$$\Rightarrow \theta = 2\mu_1$$

$$\Rightarrow \theta \text{ 的矩估计 } \hat{\theta} = 2\bar{X}.$$

因为

$$E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = \theta,$$

所以 $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计.

(2) X 的概率密度

$$f_X(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

最大似然估计:

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq \theta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$L(\theta)$ 关于 $\theta > 0$ 递减,

而 θ 的范围为 $\theta \geq x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$,

所以, θ 的最大似然估计量

$$\hat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

$X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F(x)]^n = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^n}{\theta^n}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 1, & x > \theta. \end{cases}$$

求导数得密度函数为

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

因此有

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= E(X_{(n)}) = \int_0^{\theta} \frac{x \cdot nx^{n-1}}{\theta^n} dx \\ &= \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta \end{aligned}$$

所以 $\hat{\theta} = X_{(n)}$ 作为参数 θ 的估计是有偏的.

□

纠偏方法

- 如果 $E(\hat{\theta}) = a\theta + b, \theta \in \Theta$, 其中 a, b 是常数, 且 $a \neq 0$, 则 $\frac{1}{a}(\hat{\theta} - b)$ 是 θ 的无偏估计.

纠偏方法

- 如果 $E(\hat{\theta}) = a\theta + b, \theta \in \Theta$, 其中 a, b 是常数, 且 $a \neq 0$, 则 $\frac{1}{a}(\hat{\theta} - b)$ 是 θ 的无偏估计.
- 在上例中,

$$E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta,$$

取

$$X_{(n)}^* = \frac{n+1}{n}X_{(n)},$$

则 $X_{(n)}^*$ 是 θ 的无偏估计.

例

设总体 X 服从指数分布 $Exp(\theta)$, θ 是未知参数, 样本 X_1, \dots, X_n .

- (1) 判断 $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是否无偏;
- (2) 若 Z 有偏, 试将 Z 修正为一个无偏估计量.

例

设总体 X 服从指数分布 $Exp(\theta)$, θ 是未知参数, 样本 X_1, \dots, X_n .

- (1) 判断 $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是否无偏;
- (2) 若 Z 有偏, 试将 Z 修正为一个无偏估计量.

- nZ 和样本均值 \bar{X} 都是期望 $E(X) = \theta$ 的无偏估计. 所以, 一个未知参数的无偏估计量不是唯一的.

定义 (有效性准则)

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计, 如果

$$D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

且不等号至少对某一个 $\theta \in \Theta$ 成立, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

定义 (有效性准则)

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计, 如果

$$D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

且不等号至少对某一个 $\theta \in \Theta$ 成立, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

- 方差较小的无偏估计量是一个更有效的估计量.

例

设总体为 X , $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2 > 0$, X_1, \dots, X_n 为样本. 对 $1 \leq k \leq n$, 令

$$\hat{\theta}_k = \frac{1}{k}(X_1 + \dots + X_k)$$

即 $\hat{\theta}_k$ 为前 k 个样本平均值. 显然, $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ 均是参数 μ 的无偏估计.

问: 在估计量 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ 中, 哪个 $\hat{\theta}_k$ 作为参数 μ 的估计最有效?

解:

$$D(\hat{\theta}_k) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k D(X_i) = \frac{\sigma^2}{k},$$

即估计量的方差随着 k 的增加而减少,
 $\therefore \hat{\theta}_n$ 最有效.



例

设总体 X 服从指数分布 $Exp(\theta)$, θ 是未知参数, 样本 X_1, \dots, X_n . 令

$$Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

则 nZ 和样本均值 \bar{X} 都是 θ 的无偏估计.
证明样本均值 \bar{X} 比 nZ 更有效.

定义 (相合性)

设 $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 为参数 θ 的估计量,
若对于任意 $\theta \in \Theta$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计量.

注

- 相合性是对一个估计量的基本要求. 不具备相合性的估计量不予考虑.
- 相合性只有在样本容量很大时, 才显现其优越性, 实际应用中很难做到. 在实际工程中往往使用无偏性和有效性进行评价.
- 无偏性、有效性、相合性是评价估计量的一些基本标准, 还有其他侧重点的评价标准.

例

设总体 X 的 k 阶矩 $E(X^k) = \mu_k (k \geq 2)$ 存在, X_1, \dots, X_n 为样本, 证明:

- (1) $A_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l$ 是 μ_l 的相合估计;
- (2) B_2, S^2 是 $D(X) = \sigma^2$ 的相合估计;
- (3) S 是 σ 的相合估计.

证明: (1) 由辛钦大数定律知, 对 $l = 1, \dots, k$,

$$A_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l \xrightarrow{P} \mu_l = E(X^l),$$

因此 A_l 是 $E(X^l)$ 的相合估计. 特别地, \bar{X} 是 $\mu_1 = E(X)$ 的相合估计, A_2 是 $\mu_2 = E(X^2)$ 相合估计.

(2) 因为 $D(X) = \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$,

$$B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = A_2 - \bar{X}^2,$$

根据依概率收敛性质, $B_2 = A_2 - \bar{X}^2$ 是 σ^2 的相合估计. 而 $S^2 = \frac{n}{n-1} B_2$ 也是 σ^2 的相合估计.

(3) $S = \sqrt{S^2}$ 是 σ 的相合估计.

□