

线性代数-5

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 11 月 30 日

本次课内容

1. 矩阵的定义

2. 特殊矩阵

3. 矩阵的应用

4. 矩阵的运算

定义 (矩阵)

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} , ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常可记为大写字母的 A 、 $A_{m \times n}$ 、 (a_{ij}) 、 $(a_{ij})_{m \times n}$.

定义 (矩阵)

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} , ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常可记为大写字母的 A 、 $A_{m \times n}$ 、 (a_{ij}) 、 $(a_{ij})_{m \times n}$.

- 元素为实数的矩阵称为实矩阵; 元素为复数的矩阵称为复矩阵.

特殊矩阵

- 方阵.

$m = n$, 即行数和列数都为 n 的矩阵, 称为 n 阶方阵. 此时可记为 A_n .

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

特殊矩阵

- 方阵.

$m = n$, 即行数和列数都为 n 的矩阵, 称为 n 阶方阵. 此时可记为 A_n .

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 行矩阵 (行向量).

$m = 1$, 即只有一行的矩阵,

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

称为行矩阵, 也称为行向量. 为避免混淆, 行矩阵也记为

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

特殊矩阵

- 列矩阵（列向量）.
 $n = 1$, 即只有一列的矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵, 也称为列向量.

特殊矩阵

- 列矩阵（列向量）.

$n = 1$, 即只有一列的矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵, 也称为列向量.

- 零矩阵.

$a_{ij} = 0, \forall i, j$, 元素全为零的矩阵. 记为 O .

特殊矩阵

- 上 (下) 三角矩阵.

$a_{ij} = 0, i > j$, 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能是对角元和主对角线之上的元素.

$$A_{\text{上}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

特殊矩阵

- 上(下)三角矩阵.

$a_{ij} = 0, i > j$, 即主对角线下方元素全为零的方阵, 称为上三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能是对角元和主对角线之上的元素.

$$A_{\text{上}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_{\text{下}} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0, i < j$, 即主对角线上方元素全为零的方阵, 称为下三角矩阵. 换句话说, 非零元只可能是对角元和主对角线之下的元素.

特殊矩阵

- 对角矩阵.

$a_{ij} = 0, i \neq j$, 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角阵可简记为 $D = \mathbf{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

特殊矩阵

- 对角矩阵.

$a_{ij} = 0, i \neq j$, 即除对角线外的元素全为零的方阵, 称为对角矩阵.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角阵可简记为 $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

- 单位矩阵.

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

即对角元全为 1 的对角阵, 称为单位阵. 记为 E_n 或 E .

特殊矩阵

- 对称矩阵.

$a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{\text{对}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

特殊矩阵

- 对称矩阵.

$a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, 即沿着对角线对称元素相等的方阵, 称为对称阵.

$$A_{\text{对}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_{\text{反}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 反对称矩阵.

$a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$, 即沿着对角线对称元素互为相反数的方阵, 称为反对称阵.

矩阵的应用-矩阵和线性方程组

例 (线性方程组的矩阵表示)

m 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组的矩阵表示可写为 $AX = \boldsymbol{\beta}$.

令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组的矩阵表示可写为 $AX = \beta$.

其中 A 称为线性方程组的系数矩阵, B 称为线性方程组的增广矩阵;

令

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组的矩阵表示可写为 $AX = \beta$.

其中 A 称为线性方程组的系数矩阵, B 称为线性方程组的增广矩阵;
 X 和 β 分别称为线性方程组的未知量矩阵和常数项矩阵.

矩阵的应用-矩阵和线性变换

例 (线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (2)$$

则得到 n 维向量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

矩阵的应用-矩阵和线性变换

例 (线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (2)$$

则得到 n 维向量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

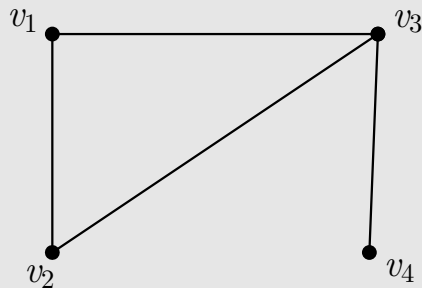
- 线性变换和 n 阶方阵一一对应.

例 (图的关联矩阵)

- 图 (Graph).

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{点 } v_i, v_j \text{ 之间有边,} \\ 0, & \text{点 } v_i, v_j \text{ 之间无边.} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

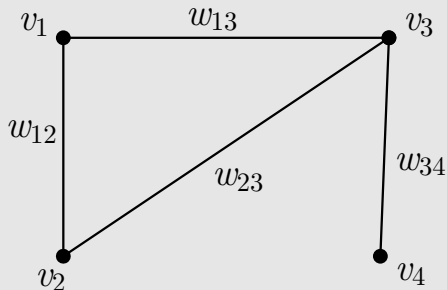


矩阵的应用-矩阵和图

例 (图的矩阵表示)

- 加权图 (Weighted Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ w_{12} & 0 & w_{23} & 0 \\ w_{31} & w_{32} & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & w_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

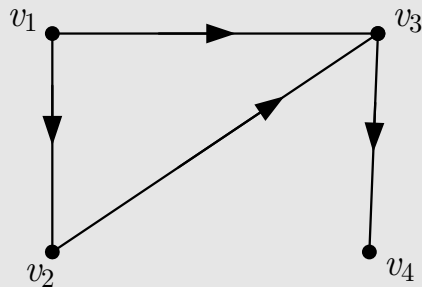


矩阵的应用-矩阵和图

例 (图的矩阵表示)

- 有向图 (Direct Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

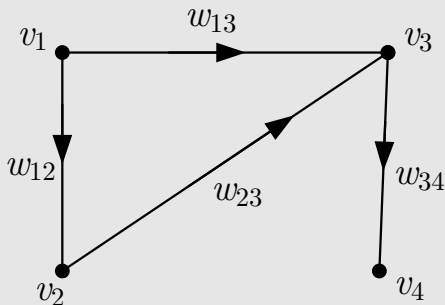


矩阵的应用-矩阵和图

例 (图的矩阵表示)

- 有向加权图 (Direct Weighted Graph).

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



例 (数字图像的存储和处理)

- 数字图像在计算机等电子设备中都是以矩阵的形式存储和显示的。
 - 比如, 一张 600×800 像素的图像在计算机中就是一个 600×800 的矩阵.
 - 二值图像的矩阵的 a_{ij} 取值为 0 和 1;
 - 灰度图像的矩阵的 a_{ij} 取值为 $0 - 255$ (即一字节 8 位二进制数的范围);
 - 彩色图像的矩阵的 a_{ij} 取值为一个三维向量 (R, G, B) .
- 对图像的处理和编辑就是对矩阵的处理。
 - 算法思想一般是: 用一个低阶方阵 (称为模板或者算子) 去改变图像矩阵的每一个像素值,

矩阵的应用-矩阵和数字图像

- 二阶 Laplace 检测算子:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4_{\Delta} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4_{\Delta} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8_{\Delta} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

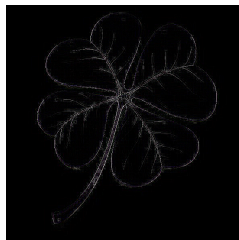


图: 边缘提取

矩阵的运算

- $A = B$
- $A + B$
- $\lambda \cdot A$
- AB
- A^k & $f(A)$
- A^T
- $|A|$
- A^*
- $\text{tr}(A)$

矩阵的相等

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

- 如果 $m = m'$, $n = n'$, 则称 A 和 B 是同型矩阵.

矩阵的相等

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

- 如果 $m = m'$, $n = n'$, 则称 A 和 B 是同型矩阵.
- 对于同型矩阵 A, B ,

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$$

矩阵的相等

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

- 如果 $m = m'$, $n = n'$, 则称 A 和 B 是同型矩阵.
- 对于同型矩阵 A, B ,

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$$

- 例:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

矩阵的加法

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

- 若 A, B 同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

矩阵的加法

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

- 若 A, B 同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

- 性质:
 - 交换律: $A + B = B + A$
 - 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$

矩阵的加法

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

- 若 A, B 同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

- 性质:

- 交换律: $A + B = B + A$
- 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$

- 负矩阵:

$$-A \triangleq (-a_{ij})$$

矩阵的加法

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

- 若 A, B 同型, 则

$$A + B \triangleq (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

- 性质:

- 交换律: $A + B = B + A$
- 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$

- 负矩阵:

$$-A \triangleq (-a_{ij})$$

- 矩阵减法: A, B 同型

$$A - B \triangleq A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$$

矩阵的数乘

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

矩阵的数乘

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.



$$\lambda A \triangleq (\lambda a_{ij})_{m \times n}$$

矩阵的数乘

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.



$$\lambda A \triangleq (\lambda a_{ij})_{m \times n}$$

● 性质：

- 结合律： $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- 矩阵对数的分配律： $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 数对矩阵的分配律： $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

矩阵的乘法

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

矩阵的乘法

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

- 如果 $n = m'$ 同型, 则

$$AB \triangleq (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{1n})_{m \times n'}$$

c_{ij} 为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的内积.

矩阵的乘法

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m' \times n'}$.

- 如果 $n = m'$ 同型, 则

$$AB \triangleq (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{1n})_{m \times n'}$$

c_{ij} 为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的内积.

- 性质:
 - 不满足交换律: AB 和 BA 可能不相等.
 - 结合律: $(AB)C = A(BC)$
 - 数乘和矩阵乘法可交换: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
 - 分配律: $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$
 - **$EA = AE = A$**

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- 行向量乘同阶列向量是一个数

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- 列向量乘同阶行向量是一个任意两行（列）成比例的方阵.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

- AB 和 BA 可能不同型 (*i.e.* 不相等) .

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA .

解：

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

- AB 和 BA 同型当且仅当 A 和 B 是同阶方阵。但即使同型也可能不相等.

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

- AB 和 BA 同型当且仅当 A 和 B 是同阶方阵。但即使同型也可能不相等.
- 特别地, 对两个 n 阶方阵 A, B , 若 $AB = BA$, 则称方阵 A 和 B 是可交换的.

例

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA .

解:

$$AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

- AB 和 BA 同型当且仅当 A 和 B 是同阶方阵。但即使同型也可能不相等.
- 特别地, 对两个 n 阶方阵 A, B , 若 $AB = BA$, 则称方阵 A 和 B 是**可交换**的.
- **纯量阵** λE 与任何同阶方阵可交换.

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵, 定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵, 定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$
- $\text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)$

矩阵的幂次

- 设 A 为 n 阶方阵，定义矩阵的幂

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ 个 } A)$$

- $A^{k+l} = A^k A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}$
- $\text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)$

例

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \quad \lambda = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

证明 $A^k = \lambda^{k-1} A$.

- 矩阵多项式：将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的 x 换为方阵 A ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注：规定 $A^0 = E$.

矩阵多项式

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的 x 换为方阵 A ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注: 规定 $A^0 = E$.

- $(AB)^k = A^k B^k$,
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$,
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$,

矩阵多项式

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的 x 换为方阵 A ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注: 规定 $A^0 = E$.

- 只有 A, B 可交换时, 下面等式才成立.

- $(AB)^k = A^k B^k,$
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2,$
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2,$

矩阵多项式

- 矩阵多项式: 将一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的 x 换为方阵 A ,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

注: 规定 $A^0 = E$.

- 只有 A, B 可交换时, 下面等式才成立.
 - $(AB)^k = A^k B^k$,
 - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$,
 - $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$,
- 矩阵 A 的任意两个矩阵多项式是可交换的,

$$f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

矩阵的转置

- 令 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 定义 A 的转置

$$A^T \triangleq (a_{ji})_{n \times m}$$

- 性质:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

- 例: 计算 $(AB)^T$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

转置和对称矩阵

- A 为对称阵, 当且仅当 $A^T = A$.
- A 为反对称阵, 当且仅当 $A^T = -A$.

例

设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $X^T X = 1$,

$$H = E - 2XX^T.$$

证明 H 为对称阵, 且 $HH^T = E$.

证明:

方阵的行列式

- A 为 n 阶方阵, 则可以给出 A 的行列式, 记为 $\det A$ 或 $|A|$.
- 性质:
 - $|A^T| = |A|$
 - $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
 - $|AB| = |A| \cdot |B|$
 - $|A + B| \neq |A| + |B|$

方阵的伴随矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- A 的伴随矩阵 A^* 定义为:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

- 注意: A^* 中的 A_{ij} 的指标有个转置!!!

方阵的伴随

例
求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵

性质

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

- A 为 n 阶方阵, A 的迹 $\text{tr}A$ 定义为

$$\text{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

- 性质:

- $\text{tr}A^T = \text{tr}A$
- $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \text{tr}A$
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B$

小结

- $A = B$
- $A + B$
- $\lambda \cdot A$
- AB
- A^k & $f(A)$
- A^T
- $|A|$
- A^*
- $\text{tr} A$

- Page52-53. 1-(5)、2、5、6-(2)、7-(2).

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 11 月 30 日