22.

$f(x_0)=0 \iff x-x_0 \mid f(x)$

$\iff \exists\, q(x),\ s.t.\ f(x)=(x-x_0)q(x)$

$\iff (x-x_0, f(x))=x-x_0$

$f(x_0)\neq 0 \iff x-x_0 \nmid f(x)$

$\iff f(x_0)=r(x_0)$，其中 $r(x)=f(x)-(x-x_0)q(x)$，

$\iff (x-x_0, f(x))=1$

证明：$\Rightarrow$ 若 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的 k 重根.

则 $(x-x_0)^k \mid f(x)$，且 $(x-x_0)^{k+1} \nmid f(x)$

即 $\exists\, q(x)$, s.t

$$f(x)=(x-x_0)^k\cdot q(x)$$

其中 $q(x_0)\neq 0$ （即 $x-x_0 \nmid q(x)$）

由 Leibniz 公式知

$$f^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{i} C_i^j\,[(x-x_0)^k]^{(j)}\,q^{(i-j)}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{i} C_i^j \cdot A_k^j\,(x-x_0)^{k-j}\,q^{(i-j)}(x)$$

$\because$ 当 $0 \le i < k$ 时. $k-j>0$

$$f^{(j)}(x_0)=0$$

当 $i=k$ 时

$$f^{(k)}(x_0)=C_k^k \cdot A_k^k \cdot 1 \cdot q^{(k-k)}(x)$$

$$=q(x_0)\ne 0$$

$\Leftarrow$ $f(x_0)=0$，知 $x-x_0 \mid f(x)$

可设 $f(x)=(x-x_0)\cdot q_1(x)$

$\because f'(x)=q_1(x)+(x-x_0)q_1'(x)$

则 $f'(x_0)=q_1(x_0)=0$

$\therefore x-x_0 \mid q_1(x)$

$\therefore$ 可设 $f(x)=(x-x_0)^2 \cdot q_2(x)$

由数学归纳，设 $f(x)=(x-x_0)^i q_i(x)$，$i\le k-1$

则 $f^{(i)}(x)=\sum_{j=0}^{i} C_i^j A_i^j (x-x_0)^{i-j} q_i^{(i-j)}(x)$

$\therefore f^{i}(x_0)=q_i(x_0)=0$

$\therefore x-x_0 \mid q_i(x)$

则可设 $f(x)=(x-x_0)^{i+1}q_{i+1}(x)$.

(这里 $q_i(x)=(x-x_0)\cdot q_{i+1}(x)$)

由归纳，可设 $f(x)=(x-x_0)^k q_k(x)$

而 $f^{(k)}(x_0)=q_k(x_0)\neq 0$

矢口 $x-x_0\nmid q_k(x)$.

$\therefore (x-x_0)^{k+1}\nmid f(x)$

即 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一个k重根 ∎

$\Leftarrow$ Taylor 展开：(by 郝贯程)

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-x_0)^k$$

ξ在x和x_0之间.

$$=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-x_0)^k$$

$\therefore (x-x_0)^k\mid f(x)$. $(x-x_0)^{k+1}\nmid f(x)$.

详：实际上这里ξ不是一个定值，ξ依赖于x，所以可将ξ视为x的一个函数，需证$f^{(k)}(\xi)$为一个多项式函数，方可用多项式理论

$\Leftarrow$ 但这种证明思路的正确是可行的!!

$f(x)$ 为一个多项式函数，设 $\deg f(x)=n$，则 $f^{(k)}(x)=0$，$\forall k>n$，

故 $f(x)$ 的 Taylor 展开中只有有限项。

故可得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+0$$

（事实上，对比第4题，$\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}$ 为 $f(x)$ 首项系数 a_n.）

$$=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=(x-x_0)^k\left(\underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}}\right)$$

$\therefore (x-x_0)^k \mid f(x)$.

$f^{(k)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow (x-x_0)^{k+1}\nmid f(x)$

$\therefore$ $x-x_0$ 为 $f(x)$ 的一个 k 重根. $\square$

一种粗糙的理解：

$$f(x)=(x-x_0)^k\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}\right)$$

$$=(x-x_0)^k\cdot\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$ ξ 在 x 与 x_0 之间.

$$\Rightarrow \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}.$$

$$f^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(x_0) + \frac{f^{(k+1)}}{A_{k+1}^{1}}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{A_n^{n-k}}(x-x_0)^{n-k}$$

似乎 $f^{(k)}(\xi)$ 是 x 的 $n-k$ 次多项式，

但可以否角度的是 $f^{(k)}(\xi)$ 不是定值！

这里用余项不容易说清楚！！

26、单位根

$$x^n = 1 \Rightarrow x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=1,\cdots,n$$

$$= e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

（欧拉公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$）

注：$x_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$x_k = x_1^k,\ \forall k=1,\cdots,n.$

$\overline{x_k} = x_{n-k},\ \forall k=1,\cdots,n-1.$

$x_n = x_1^n = 1.$

思考下面说法是否正确?

$\forall p\in N^+$, 若 $(p,n)=1$, 则

$x_p, x_p^1, \cdots, x_p^n$ 遍历 $x^n=1$ 的所有单位根.

解:

在复数域 $\mathbb{C}$ 上

$$x^n-1=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n}(x-x_1^k) \\ (x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-1 \\ \prod_{k=1}^{n}\left(x-e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right) \end{cases}$$

在实数域 $\mathbb{R}$ 上,

($\mathbb{R}[x]$ 中任意多项式可分解为至多二次的因式乘积)

若 n 为奇数, 则 $x^n=1$ 的 n 个单位根中

有 ……

有 $\frac{n-1}{2}$ 对共轭复根，和 $x=1$.

此时

$$x^n-1=(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})\cdot(x-x_n)$$

$$\underset{x-\bar{x}_2}{\parallel}\qquad \underset{x-\bar{x}_1}{\parallel}$$

$$(x-x_1)(x-\bar{x}_1)\times(x-x_2)(x-\bar{x}_2)\times\cdots$$

$$=(x-x_1)(x-\bar{x}_1)\times\cdots\times(x-x_{\frac{n-1}{2}})(x-\bar{x}_{\frac{n-1}{2}})\times(x-1)$$

$$=\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-(x_k+\bar{x}_k)x+x_k\bar{x}_k\right)\times(x-1)$$

$$=(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right)$$

若 n 为偶数，则 $x^n=1$ 有 $\frac{n-2}{2}$ 对共轭复根

和 $x=\pm1$

此时

$$x^n-1=(x+1)(x-1)\prod^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\cdot x+1\right)$$

$k=1$

①

12-1) 证明：

令 $h_i(x) \triangleq \dfrac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} = \prod_{k\neq i} \dfrac{(x-a_k)}{(a_i-a_k)}$

则 $h_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}, \ \forall a_j$

设 $H(x) \triangleq \sum_{i=1}^{n} h_i(x)$，

$H(a_j) = \sum_{i=1}^{n} h_i(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = 1$

$\forall a_j$.

∵ $a_1 \cdots a_n$ 互不相同，$\partial H(x) = n-1$.

∴ $H(x) \equiv 1$，$\forall x$.

一个至多 $n-1$ 次多项式

（n个点可以[illegible]
见定理9，或 待定系数，用范德蒙德行列式）

2. $f(x) = F(x)q(x) + r(x)$，$\partial r < \partial F = n$

$\therefore f(a_j) = F(a_j)q(a_j) + r(a_j)$

$= r(a_j)$，$\forall j = 1, \cdots, n$.

令 $g(x) = \sum_i \frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} = \sum_i f(a_i)h_i(x)$

$\partial g \leq n-1$

$\therefore g(a_j) = \sum_i f(a_i)h_i(a_j)$

$= \sum_i f(a_i)\delta_{ij}$

$= f(a_j)$，$\forall j = 1, \cdots, n$

$\therefore r(a_j) = g(a_j)$，$\forall j = 1, \cdots, n$

$\therefore \; r(x) = g(x), \; \forall x.$ $\square$