《线性代数》第二章作业（5 月 14 日提交）

临班 370

2023 年 6 月 21 日

班级：____________ 姓名：____________ 学号：____________

1. 判断题（错误请给出说明或反例. 每题 2 分，共 20 分）: ：红错

（1）$|A+B|=|A|+|B|$. （$A=B=E$）

（2）$|k\cdot A|=k\cdot|A|$. （$|k\cdot A_n|=k^n\cdot|A_n|$）

(3) $|AB|=|BA|$. （A,B 为同阶方阵时对）

(4) $AB=BA$. （矩阵乘法不满足交换律）

(5) $A^*A=AA^*$.

(6) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$. （$A=B=1$）

(7) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$. （矩阵乘法不满足交换律）

(8) $A^2=O$, 则 $A=O$. （$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$）

(9) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. （矩阵乘法不满足交换律）

(10) 若 $AX=AY, A\neq O$，则 $X=Y$. （A 列满秩方有左消去率）

2. 填空题 (每空 3 分，共 15 分):

(1) 已知矩阵 $A,B,C_{s\times n}$, 满足 $AC=CB$, 则 B 是__n__ 阶矩阵.

(2) 已知 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$, 则 $X=\underline{\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}}$.

(3) $A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\-2&3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$, 则 $A^*=\underline{\begin{pmatrix}3&4&6\\2&3&4\\-4&6&9\end{pmatrix}}$, $A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}3&4&6\\2&3&4\\-4&6&9\end{pmatrix}}$.

(4) n 阶方阵 A 满足 $A^2-4A-E=0$, 则 $A^{-1}=$___$A-4E$___.

3. 计算题 (每题 10 分，共 50 分)：

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, 用二项式展开计算 A^{10}.

提示: $A^{10}=(\lambda E+B)^{10}=\lambda^10E+C_{10}^1\lambda^9B+C_{10}^2\lambda^8B^2$.

(2) 设 $\alpha=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$ $A=\alpha\beta^T$, 求 A^{100}.

提示: 矩阵乘法结合率.

(3) 用 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

注意: A^* 的定义.

(4) A 为 4 阶方阵，$|A|=2$, 求 $|(\frac{1}{2}A)^{-1}-3A^*|$.

(5) 求矩阵 X, 使得 $AX=2X+A$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

注意: 矩阵乘法分左右.

4. 证明题 (第 (1) 题 5 分，第 (2) 题 10 分，共 15 分)：

(1) $AB=A+B$，证明 $A-E$ 可逆.

提示: 凑因式乘积.

(2) 设列向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$, $H=E-2XX^T$. 证明: H 为对称矩阵，且 $HH^T=E$.