

线性代数-19

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 1 月 1 日

1. 等价关系和等价不变量/性
2. 再问：何为线性代数？

等价关系

集合 S 上满足如下三条性质的二元关系 \sim

- 自反性: $\forall x \in S, x \sim x$;
- 对称性: $\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 传递性: $\forall x, y, z \in S$, 若 $x \sim y, y \sim z$, 则 $x \sim z$.

称为 S 上的一个等价关系.

等价关系

集合 S 上满足如下三条性质的二元关系 \sim

- 自反性: $\forall x \in S, x \sim x$;
- 对称性: $\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 传递性: $\forall x, y, z \in S$, 若 $x \sim y, y \sim z$, 则 $x \sim z$.

称为 S 上的一个等价关系.

例

1. 在实数集 \mathbb{R} 上, “=” 是一个等价关系. “<” 和 “>” 不是等价关系.
2. 设 $S = \{\text{平面上所有直线}\}$, “平行” 是一个等价关系.
3. 设 $S = \{\text{所有三角形}\}$, “全等” 和 “相似” 是等价关系.
4. 整数集 \mathbb{Z} 上, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x, y$ 奇偶性相同, 则 “ \sim ” 是等价关系.
5. 设 S 是人的集合, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 性别相同, 则 “ \sim ” 是等价关系.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、等价相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、等价相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、等价相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、等价相似和向量组的等价都是等价关系.

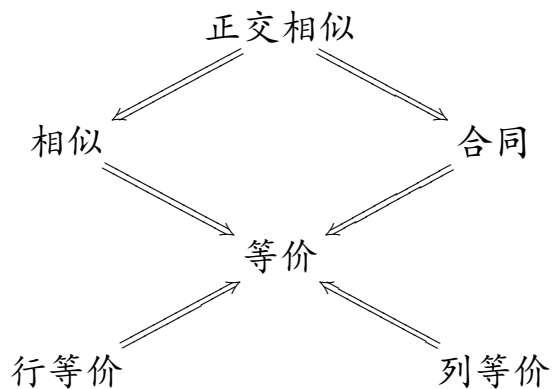
- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.
- 正交相似: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在正交阵 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 正交相似.

线性代数中的等价关系

矩阵的等价、相似、合同、等价相似和向量组的等价都是等价关系.

- 等价: 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 若存在可逆阵 P 和可逆阵 Q , 使得 $PAQ = B$, 则称矩阵 A 和 B 等价.
- 相似: 设 A, B 是 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 和 B 相似.
- 合同: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 合同.
- 正交相似: 设 A, B 是 n 阶实对称阵, 若存在正交阵 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$, 则称矩阵 A 和 B 正交相似.
- 向量组等价: 设 A, B 是两个向量组, 若 A, B 可相互线性表示 则称向量组 A 和 B 等价.

矩阵等价关系之间的联系



- 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow (0, A) \overset{c}{\sim} (B, 0)$

等价类

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 属于同一个等价类, 记为 $[x]$.

- 集合 S 上的等价关系把 S 中所有元素进行了分类, 每一类对应一个等价类.
- 研究集合 S 上的不同的等价关系相当于从不同的角度观察 S 中元素.

等价类

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 属于同一个等价类, 记为 $[x]$.

- 集合 S 上的等价关系把 S 中所有元素进行了分类, 每一类对应一个等价类.
- 研究集合 S 上的不同的等价关系相当于从不同的角度观察 S 中元素.

例

1. 设 S 是教室中所有人的集合, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性别相同, 则 \sim 把 S 分为两类 (男性/女性).
2. 设 S 是教室中所有人的集合, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的星座相同, 则 \sim 把 S 分为 12 类.
3. 设 S 是教室中所有人的集合, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的班级相同, 则 \sim 把 S 分为 3 类.

线性代数中的等价类

- 等价：设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体，则 S 中等价类有 $\min\{m, n\} + 1$ 个。
每个等价类中最简单的矩阵是：标准形。

线性代数中的等价类

- 等价: 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, 则 S 中等价类有 $\min\{m, n\} + 1$ 个.
每个等价类中最简单的矩阵是: 标准形.
- 相似: 设 S 是 n 阶方阵全体, 则 S 中等价类有无穷多个类.
若可对角化, 则每个相似类中最简单的矩阵是: 对角阵.
(超纲: 一般情况每个等价类中最简单的矩阵是 **Jordan** 标准形.)

线性代数中的等价类

- 等价: 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, 则 S 中等价类有 $\min\{m, n\} + 1$ 个.
每个等价类中最简单的矩阵是: 标准形.
- 相似: 设 S 是 n 阶方阵全体, 则 S 中等价类有无穷多个类.
若可对角化, 则每个相似类中最简单的矩阵是: 对角阵.
(超纲: 一般情况每个等价类中最简单的矩阵是 Jordan 标准形.)
- 合同: 设 S 是 n 阶实对称阵全体, 则 S 中合同类有 $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ 个.
每个合同类中最简单的矩阵是: 规范形.

线性代数中的等价类

- 等价: 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, 则
 S 中等价类有 $\min\{m, n\} + 1$ 个.
每个等价类中最简单的矩阵是: 标准形.
- 相似: 设 S 是 n 阶方阵全体, 则
 S 中等价类有无穷多个类.
若可对角化, 则每个相似类中最简单的矩阵是: 对角阵.
(超纲: 一般情况每个等价类中最简单的矩阵是 Jordan 标准形.)
- 合同: 设 S 是 n 阶实对称阵全体, 则
 S 中合同类有 $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ 个.
每个合同类中最简单的矩阵是: 规范形.
- 正交相似: 设 S 是 n 阶实对称阵全体, 则
 S 中正交相似类有无穷多个类.
每个正交相似类中最简单的矩阵是: 对角阵/标准形.

对角化问题

对角化问题: 每个等价类中, 一般矩阵化为最简单的矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A , 存在可逆 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

对角化问题

对角化问题: 每个等价类中, 一般矩阵化为最简单的矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A , 存在可逆 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 相似: n 阶方阵可相似对角化 \Leftrightarrow 有 n 个线性无关特征向量.
即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 \Leftrightarrow 存在可逆 P , 使得
 $P^{-1}AP = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

对角化问题

对角化问题: 每个等价类中, 一般矩阵化为最简单的矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A , 存在可逆 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 相似: n 阶方阵可相似对角化 \Leftrightarrow 有 n 个线性无关特征向量.

即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 \Leftrightarrow 存在可逆 P , 使得 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- 合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.

即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A , 存在可逆 P , 使得 P^TAP 为标准形/规范形.

对角化问题

对角化问题: 每个等价类中, 一般矩阵化为最简单的矩阵的过程.

- 等价: 任意 $m \times n$ 阶矩阵与标准形等价.

即 $\forall m \times n$ 阶矩阵 A , 存在可逆 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 相似: n 阶方阵可相似对角化 \Leftrightarrow 有 n 个线性无关特征向量.

即 n 阶矩阵 A 可相似对角化 \Leftrightarrow 存在可逆 P , 使得 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- 合同: 任意 n 阶实对称阵全体可合同对角化.

即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A , 存在可逆 P , 使得 P^TAP 为标准形/规范形.

- 正交相似: 任意 n 阶实对称阵可正交相似对角化.

即 $\forall n$ 阶实对称矩阵 A , 存在正交 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 为标准形.

等价不变量和等价不变性

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

等价不变量和等价不变性

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 则

- 等价的元素之间所具有的共同的性质称为等价不变性;
- 等价的元素之间所具有的共同的量特征称为等价不变量.

等价不变量和等价不变性

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 自然的问题:

- 同一个等价类中不同元素所具有的共性
- 即, 如果 $x \sim y$, 则 x, y 有什么共同的表现?

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系. 则

- 等价的元素之间所具有的共同的性质称为**等价不变性**;
- 等价的元素之间所具有的共同的量特征称为**等价不变量**.

性质

设 p 是 (S, \sim) 的一个等价不变性/量. 若 $x \sim y$, 则 $p(x) = p(y)$;
反过来, 若 $p(x) \neq p(y)$, 则 $x \not\sim y$.

完全不变量和完全不变性

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系.

$\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同, 则称 p 是一个完全不变性/量.

- 同型矩阵等价的（完全）不变量：矩阵的秩.

完全不变量和完全不变性

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系.

$\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同, 则称 p 是一个完全不变性/量.

- 同型矩阵等价的 (完全) 不变量: 矩阵的秩.
- 方阵相似的不变量: 特征值、特征多项式.

完全不变量和完全不变性

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系.

$\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同, 则称 p 是一个完全不变性/量.

- 同型矩阵等价的 (完全) 不变量: 矩阵的秩.
- 方阵相似的不变量: 特征值、特征多项式.
- 实对称矩阵合同的 (完全) 不变量: 正负惯性指数.

完全不变量和完全不变性

定义

设 \sim 是集合 S 上的一个等价关系.

$\forall x, y \in S$, 若 $x \sim y \Leftrightarrow x$ 和 y 的性质/特征量 p 相同, 则称 p 是一个完全不变性/量.

- 同型矩阵等价的 (完全) 不变量: 矩阵的秩.
- 方阵相似的不变量: 特征值、特征多项式.
- 实对称矩阵合同的 (完全) 不变量: 正负惯性指数.
- 实对称矩阵正交相似的 (完全) 不变量: 特征值、特征多项式.

线性代数中的等价关系

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q , 使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

线性代数中的等价关系

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q , 使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法: 初等行变换、左行右列.

线性代数中的等价关系

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q , 使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法: 初等行变换、左行右列.
- (完全) 等价不变量: 矩阵的秩.

线性代数中的等价关系

1. 矩阵的等价

- 设 S 是 $m \times n$ 阶矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q , 使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A 和 B 等价.

- 主要方法: 初等行变换、左行右列.
- (完全) 等价不变量: 矩阵的秩.
- 矩阵的等价把 $m \times n$ 阶矩阵全体分为了 $\min\{m, n\} + 1$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵: 标准形.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似.

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似.

- 相似不变量: 特征值、特征多项式.

线性代数中的等价关系

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似.

- 相似不变量: 特征值、特征多项式.
- 矩阵的相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵: **Jordan** 标准形.
可对角化等价类中最简单的矩阵: 对角形.

线性代数中的等价关系

2. 矩阵的相似

- 设 S 是 n 阶方阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似.

- 相似不变量: 特征值、特征多项式.
- 矩阵的相似把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵: Jordan 标准形.
可对角化等价类中最简单的矩阵: 对角形.
- 相似对角化问题: 是否和对角形矩阵相似.
特征值和特征多项式是两个可对角化矩阵相似的完全不变量.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

- 主要方法: 二次型.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

- 主要方法: 二次型.
- (完全) 等价不变量: 正负惯性指数.

线性代数中的等价关系

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

- 主要方法: 二次型.
- (完全) 等价不变量: 正负惯性指数.
- 矩阵的合同把 n 阶实对称矩阵全体分为了 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵: 规范形.

3. 矩阵的合同

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 合同.

- 主要方法: 二次型.
- (完全) 等价不变量: 正负惯性指数.
- 矩阵的合同把 n 阶实对称矩阵全体分为了 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.
每个等价类中最简单的矩阵: 规范形.
- 相似对角化问题: 实对称矩阵一定和某个对角形矩阵合同.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T A P = P^{-1} A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T A P = P^{-1} A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

- 主要方法: 二次型.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T A P = P^{-1} A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

- 主要方法: 二次型.
- 等价不变量: 特征值 (完全不变量)、正负惯性指数.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T A P = P^{-1} A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

- 主要方法: 二次型.
- 等价不变量: 特征值 (完全不变量)、正负惯性指数.
- 矩阵的等价把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵: 标准形.

4. 矩阵的正交相似

- 设 S 是 n 阶实对称矩阵全体, $\forall A, B \in S$, 若存在 n 阶正交矩阵 P , 使得

$$P^T A P = P^{-1} A P = B,$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似.

- 主要方法: 二次型.
- 等价不变量: 特征值 (完全不变量)、正负惯性指数.
- 矩阵的等价把 n 阶方阵全体分为了无穷多类.
每个等价类中最简单的矩阵: 标准形.
- 正交相似对角化问题: 实对称矩阵一定可以正交相似对角化.

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示, 则称向量组 A 和 B 等价.

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 和 B 等价.
- 等价不变量：向量组的秩

线性代数中的等价关系

5. 向量组的等价

- 若向量组 A 和 B 可以相互线性表示, 则称向量组 A 和 B 等价.
- 等价不变量: 向量组的秩
- 向量组的等价把 n 维向量组全体分为了无穷多类.
每个等价类中包含向量最少的向量组: 最大无关组.

线性代数学了什么？

- 一个主体：矩阵

复习提纲

- 一个主体：矩阵
- 两个基本问题：线性方程组 $AX = \beta$ 和 线性变换 $Y = AX$

复习提纲

- 一个主体：矩阵
- 两个基本问题：线性方程组 $AX = \beta$ 和 线性变换 $Y = AX$
- $3 + 1 + 1$ 个等价关系：矩阵
的等价、合同、相似 + 正交相似（合同且相似） + 向量组的等价。

复习提纲

- 一个主体：矩阵
- 两个基本问题：线性方程组 $AX = \beta$ 和 线性变换 $Y = AX$
- 3 + 1 + 1 个等价关系：矩阵的等价、合同、相似 + 正交相似（合同且相似） + 向量组的等价.
- 3 个重要不变量：矩阵的秩、方阵的特征值、实对称矩阵的正负惯性指数.

矩阵世界

矩阵分解

对应章节

(在 Linear Algebra for Everyone 中)

矩阵 ($m \times n$)

1.4 $A = CR$

行秩 = 列秩

$A = UV^T$ 7.1

SVD: 单位正交基底 U, V

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

方阵 ($n \times n$)

可逆

$\det(A) \neq 0, \text{all } \lambda \neq 0$

奇异

$\exists \lambda = 0, \det(A) = 0$

4.4 $A = QR$

格拉姆-施密特

三角化

$A = LU$ 2.3

U 有一个零行

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

可对角化

6.2 $A = X\Lambda X^{-1}$

对角化

$A = XJX^{-1}$ A7

J = 约旦型

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

A5 正规

$A^T A = A A^T$

可通过正交矩阵对角化

$A = Q\Lambda Q^T$

2.4 对称

$S = S^T$, 所有 λ 都是实数

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6.3 半正定

all $\lambda \geq 0$, all $A^T A$

$S = Q\Lambda Q^T$ 6.3

正交

$Q^{-1} = Q^T$
all $|\lambda| = 1$

$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2.4

置换

I 的置换
all λ are roots of 1

4.2

投影

$P^2 = P = P^T, \lambda = 1 \text{ or } 0$

$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

对角

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$

$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

正定

all $\lambda > 0$

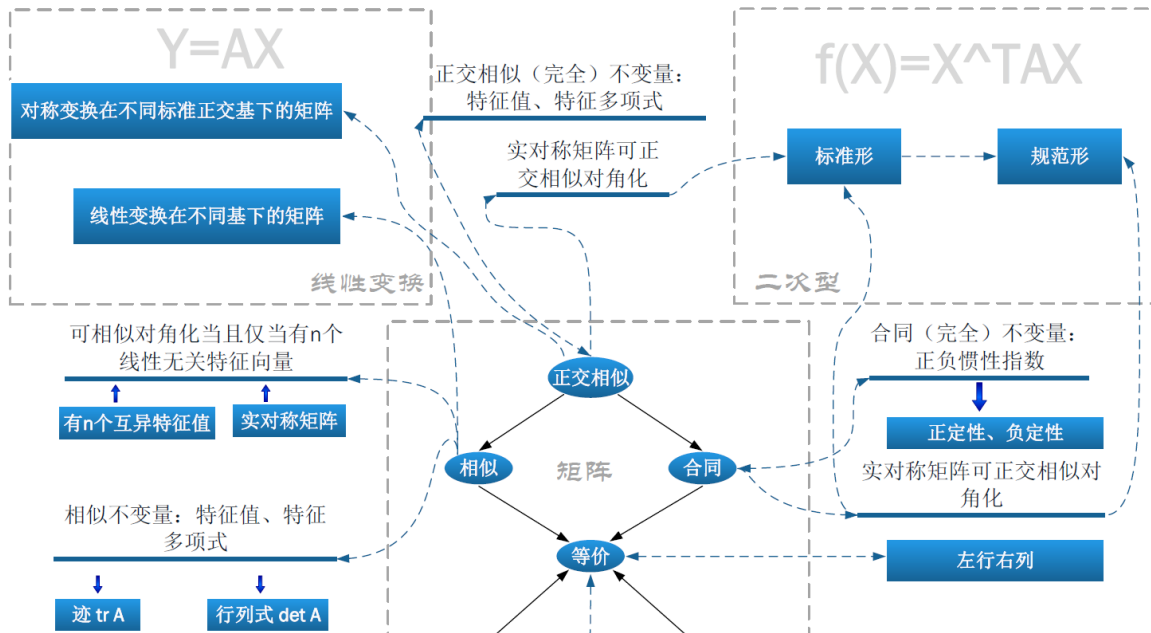
所有 A 的伪逆

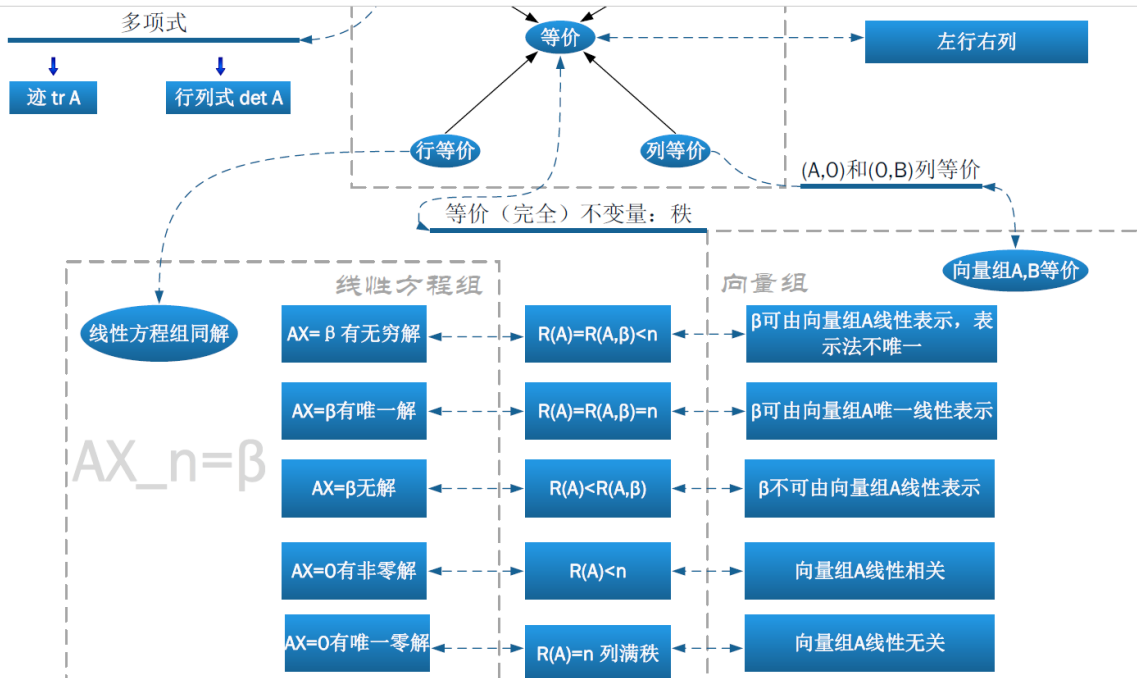
$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$

$A^+ = V\Sigma^+U^T$

3.5, 7.4







提问环节

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 1 月 1 日