

# 线性代数-14

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学, 数学学院

# 本次课内容

1. 向量空间

2. 向量的内积

# 向量空间的定义

- 设  $V$  为  $n$  维向量的集合,  $V \neq \emptyset$ , 若  $V$  对向量的加法和数乘两种运算封闭, 即  $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ , 有
  1.  $\alpha + \beta \in V$ ;
  2.  $k \cdot \alpha \in V$ .则称  $V$  为一个向量空间.

# 向量空间的定义

- 设  $V$  为  $n$  维向量的集合,  $V \neq \emptyset$ , 若  $V$  对向量的加法和数乘两种运算封闭, 即  $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ , 有
  1.  $\alpha + \beta \in V$ ;
  2.  $k \cdot \alpha \in V$ .则称  $V$  为一个向量空间.
- 向量空间: 非空向量组 + 线性结构:
  - ★  $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}$ , 则  $k\alpha + l\beta \in V$ .

# 向量空间的定义

- 设  $V$  为  $n$  维向量的集合,  $V \neq \emptyset$ , 若  $V$  对向量的加法和数乘两种运算封闭, 即  $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ , 有
  1.  $\alpha + \beta \in V$ ;
  2.  $k \cdot \alpha \in V$ .

则称  $V$  为一个向量空间.

- 向量空间: 非空向量组 + 线性结构:
  - ★  $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}$ , 则  $k\alpha + l\beta \in V$ .
- Chapter 6 (选学) - 线性空间: 非空集合 + 线性结构.
- 欧式空间: 非空集合 + 线性结构 + 内积结构.

# 例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;
2. 集合  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;
3. 集合  $V = \{X = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;
4. 齐次线性方程组的解集  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;
5. 非齐次线性方程组的解集  $S = \{X \mid AX = \beta\}$ ;
6.  $\alpha, \beta$  为已知  $n$  维向量, 集合  $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ .

# 例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ; ✓
2. 集合  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ; ✓
3. 集合  $V = \{X = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ; ✗
4. 齐次线性方程组的解集  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ; ✓
5. 非齐次线性方程组的解集  $S = \{X \mid AX = \beta\}$ ; ✗
6.  $\alpha, \beta$  为已知  $n$  维向量, 集合  $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ . ✓

# 例子

例

下列哪些向量组构成向量空间,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ; ✓
2. 集合  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ; ✓
3. 集合  $V = \{X = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ; ✗
4. 齐次线性方程组的解集  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ; ✓ <解空间>
5. 非齐次线性方程组的解集  $S = \{X \mid AX = \beta\}$ ; ✗
6.  $\alpha, \beta$  为已知  $n$  维向量, 集合  $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ . ✓  
< 向量  $\alpha, \beta$  生成的空间 >



## 等价向量组生成相同向量空间

由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  生成的空间为

$$L = \{X = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为  $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  或  $\text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

## 等价向量组生成相同向量空间

由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  生成的空间为

$$L = \{X = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为  $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  或  $\text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

例 (例 23)

设向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  和  $\beta_1, \dots, \beta_s$  等价, 记

$$L_1 = \{X = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{X = \mu_1\beta_1 + \dots + \mu_s\beta_s \mid \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}\}$$

证明:  $L_1 = L_2$ .

## 等价向量组生成相同向量空间

由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  生成的空间为

$$L = \{X = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

通常可以记为  $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  或  $\text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

例 (例 23)

设向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  和  $\beta_1, \dots, \beta_s$  等价, 记

$$L_1 = \{X = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{X = \mu_1\beta_1 + \dots + \mu_s\beta_s \mid \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}\}$$

证明:  $L_1 = L_2$ .

- 等价向量组生成的向量空间相同.

## 子空间的定义

- 设  $V$  是一个向量空间,  $V_1$  为  $V$  的一个非空子集. 若  $V_1$  也是一个向量空间, 则称  $V_1$  为向量空间  $V$  的**子空间**.

## 子空间的定义

- 设  $V$  是一个向量空间,  $V_1$  为  $V$  的一个非空子集. 若  $V_1$  也是一个向量空间, 则称  $V_1$  为向量空间  $V$  的**子空间**.
- 例:  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$  为  $\mathbb{R}^n$  的子空间.
- 例:  $\alpha, \beta$  为已知  $n$  维向量, 集合  $L = \{\lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$  为  $\mathbb{R}^n$  的子空间.

# 基和维数的定义

- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间.
- 向量组的最大无关组  $\longrightarrow$  向量空间的基.
- 向量组的秩  $\longrightarrow$  向量空间的维数.

# 基和维数的定义

- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间.
- 向量组的最大无关组  $\longrightarrow$  向量空间的基.
- 向量组的秩  $\longrightarrow$  向量空间的维数.

## 定义

设  $V$  为向量空间, 若  $r$  个向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V$ , 满足

- (i)  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关;
- (ii)  $V$  中的任一向量可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表示,

则称向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  为向量空间的一组基,  $r$  称为向量空间  $V$  的维数, 记为  $\dim V = r$ , 并称  $V$  为  $r$  维向量空间.

# 例子

例

下列向量空间的维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;
2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;
3. 齐次线性方程组的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;
4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .



# 例子

例

下列向量空间的维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\};$

3. 齐次线性方程组的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\};$

4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m).$

# 例子

例

下列向量空间的维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;

$$\dim V = n - 1$$

3. 齐次线性方程组的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;

4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

# 例子

例

下列向量空间的维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;

$$\dim V = n - 1$$

3. 齐次线性方程组的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;

$$\dim S = n - R(A)$$

4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

# 例子

例

下列向量空间的维数,

1.  $n$  维向量全体  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2.  $V = \{X = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ;

$$\dim V = n - 1$$

3. 齐次线性方程组的解空间  $S = \{X \mid AX = 0\}$ ;

$$\dim S = n - R(A)$$

4.  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  的生成空间  $L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

$$\dim L = R_A.$$

# 坐标的定义

## 定义 (定义 9)

取定向量空间的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , 则  $V$  中任一向量  $\beta$  可唯一表示为

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r,$$

数组  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  称为向量  $\beta$  在基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  下的坐标.

# 坐标的定义

## 定义 (定义 9)

取定向量空间的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , 则  $V$  中任一向量  $\beta$  可唯一表示为

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r,$$

数组  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  称为向量  $\beta$  在基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  下的坐标.

关于坐标的一些常用写法:

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) X_\beta$$

## 例 (Lecture-12)

设向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_r$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times r},$$

向量组  $A$  线性无关. 证明:  $R_B = R(K)$ .

考虑线性空间  $V = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ . 设  $\beta_i$  在基  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  下的坐标为  $X_i$ , 即

$$\beta_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) X_i,$$

则

$$K = (X_1, \dots, X_r).$$

$R_B = R(K)$ , 则  $L(\beta_1, \dots, \beta_r)$  的维数为坐标向量组的秩.

## 例 24

例  
设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = (\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为  $\mathbb{R}^3$  的一组基, 并求  $\beta_1, \beta_2$  在这组基下的坐标.

解法: 对  $(A, B)$  进行初等行变换.



设  $\mathbb{R}^3 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关. 所以向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  都为  $\mathbb{R}^3$  的基.

- 向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \beta_3$  可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P,$$

上式称为  $\mathbb{R}^3$  从基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的基变换公式.

- 其中矩阵  $P = A^{-1}B$  称为从基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵.

- 任意向量  $X = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

称为两组基之间的坐标变换公式.

## 例 26

例

设  $\mathbb{R}^3$  的两组基为

$$I: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$II: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. 求从基  $I$  到基  $II$  的过渡矩阵;
2. 向量  $X$  在基  $I$  下的坐标为  $(-2, 1, 2)^T$ , 求向量  $X$  在基  $II$  下的坐标.

# 内积的定义

定义

设  $n$  维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称  $[X, Y] = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$  为向量  $X$  与  $Y$  的**内积**.

- 内积也可以记为  $\langle X, Y \rangle$ .
- $[X, Y] = X^T Y = Y^T X$ .

# 内积的定义

定义

设  $n$  维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称  $[X, Y] = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$  为向量  $X$  与  $Y$  的**内积**.

- 内积也可以记为  $\langle X, Y \rangle$ .
- $[X, Y] = X^T Y = Y^T X$ .
- 向量组  $\xrightarrow{+ \text{线性结构}}$  向量空间  $\xrightarrow{+ \text{内积}}$  欧式空间.
- 有了内积之后, 就可以讨论长度, 角度, 垂直 (正交) 等几何概念.

# 内积的性质

- 对称性:  $[X, Y] = [Y, X]$ ;
- 线性性质:
  - $[\lambda X, Y] = \lambda[X, Y], \lambda \in \mathbb{R}$ ;
  - $[X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$ ;
- 半正定性/非负性:  $X = 0 \Leftrightarrow [X, X] = 0, X \neq 0 \Leftrightarrow [X, X] > 0$ ;
- Schwarz 不等式

$$[X, Y]^2 \leq [X, X] \cdot [Y, Y]$$

# 长度的定义

- 称

$$||X|| = \sqrt{[X, X]} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

为  $n$  维向量  $X$  的长度 (或范数).

- 向量长度满足以下性质:

- 非负性:  $X=0 \Leftrightarrow [X, X]=0$ ,  $X \neq 0 \Leftrightarrow [X, X] > 0$ ;
- 齐次性:  $||\lambda X|| = |\lambda| \cdot ||X||$

- 若  $||X|| = 1$ , 则称  $X$  为单位向量.

- 若  $\alpha \neq 0$ , 则  $X = \frac{\alpha}{||\alpha||}$  为一个单位向量, 此过程称为单位化.

## 夹角和正交的定义

- 设  $X, Y$  为  $n$  维非零向量, 则

$$\theta = \arccos \frac{[X, Y]}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

称为向量  $X, Y$  的夹角.

- 若  $[X, Y] = 0$ , 则称向量  $X$  和  $Y$  正交.

## 小结

- 向量空间、解空间、生成空间、子空间、基、维数、坐标；
- 基变换公式、过渡矩阵、坐标变换公式；
- 内积、长度、夹角、正交.



- P113: 33、37、38

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2022 年 10 月 22 日