线性代数-17

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 24 日

本次课内容

1. 相似对角化

2. 实对称矩阵的正交相似对角化

3. 二次型和对称矩阵

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $AP=P\Lambda$. 令 $P=(P_1,\cdots,P_n)$, 则

$$A(P_1,\cdots,P_n)=(P_1,\cdots,P_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$
$$=(\lambda_1P_1,\cdots,\lambda_nP_n)$$

$\Leftrightarrow$ $AP_i=\lambda_iP_i,\ i=1,2,\cdots,n$, $P_1,\cdots,P_n$ 线性无关.

$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 (可对角化)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 不可对角化矩阵的互异特征值一定少于 n 个.

- （推论）若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值，则 A 可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.

- 若 n 阶方阵 A 可相似对角化，则可通过求 A 的所有特征向量来求可逆阵 P.
- 可逆阵 P 不唯一, 并且可能是复矩阵.

例题

例 (例 10)

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

是否可对角化？若能，

1) 求可逆阵 P 和对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;
2) 求 $\varphi(A) = A^3 + 2A^2 - 3A$. （与 P43 例 15 对比）

例 (例 10)

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

是否可对角化？若能，

1) 求可逆阵 P 和对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;
2) 求 $\varphi(A) = A^3 + 2A^2 - 3A$.（与 P43 例 15 对比）

解法：1. 求特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$，由 $f(\lambda) = 0$ 得特征值;
2. 依次解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$，得特征值 λ_i 对应的特征向量;
3. 给出可逆阵 P.

例 (例 11)

问 t 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可对角化.

实对称的正交相似对角化

定义

若存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 A 可以正交相似对角化.

定义

若存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 A 可以正交相似对角化.

定理 (定理 5)

设 A 为实矩阵, 则 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^{T}$.

实对称的正交相似对角化

定义

若存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 A 可以正交相似对角化.

定理 (定理 5)

设 A 为实矩阵, 则 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

- 性质 1: 实对称阵的特征值必为实数.
- 性质 2: 实对称阵的不同特征值对应的特征向量必正交.

例 (例 12)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一个正交阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

例题

例 (例 12)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一个正交阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

解法：1. 计算 $|\lambda E - A|$, 求 A 的特征值;

2. 求 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系, 得 A 的线性无关特征向量;

3. 将基础解系正交化、单位化;

4. 写 $P^{-}1AP = P^T AP = \Lambda$, 注意特征值与特征向量对应顺序.

例 (例 13)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求 A^n.

下次课预告：二次型和对称矩阵

例 (P53 习题 1-(5))

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

例 (P53 习题 1-(5))

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- Section-5、6、7 的中心任务: 化简二次型/对称阵.
  寻找可逆 (正交) 线性变换 $X=PY$, 使得
  $$f(X)=f(PY)=Y^TP^TAPY=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$$
  矩阵语言：寻找可逆 (正交) 阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

例 (P53 习题 1-(5))

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- **Section-5、6、7 的中心任务: 化简二次型/对称阵.**
  寻找可逆 (正交) 线性变换 $X=PY$, 使得

$$f(X)=f(PY)=Y^TP^TAPY=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$$

矩阵语言：寻找可逆 (正交) 阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

小结

- 相似对角化;
- 实对称阵的正交相似对角化.

作业

- Page139-Page140：16、19-1、20、23、24、26-1.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 24 日