线性代数-2

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学，数学学院

本次课内容

1. 逆序数和行列式的定义 2
2. 行列式的性质

回顾

- n 阶行列式的递归定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}M_{1n}$$

- 三阶行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}. \end{aligned}$$

定义 (n 阶行列式的直接定义)

n 阶行列式为 n^2 个数排成 n 行 n 列的数阵决定的一个数，其值可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

- 把 n 个不同元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列，简称排列.
- $1, 2, \cdots, n$ 有多少种排列可能？（$n\,!$）
  - 二阶行列式有 $2 = 2 \cdot 1$ 项，三阶行列式有 $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ 项. 恰好与可能的排列数对应.
- 规定一个标准排列，通常令 $12 \cdots n$ 为标准排列. 排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中某两个元素的次序与标准排列中次序不同时，就称为 1 个逆序. 例如设标准排列是 123，则排列 321 中的 3 和 1 就是逆序的.
- 排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中的所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$.
- 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

- 考虑 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个元素. 设标准排列为 $12\cdots n$, $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列. 设 t_i 为 p_i 前面的元素中比 p_i 大的元素的个数, 则

$$t(p_1p_2\cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n.$$

同理, 设 l_i 为 p_i 后面的元素中比 p_i 小的元素的个数, 则

$$t(p_1p_2\cdots p_n) = l_1 + l_2 + \cdots + l_n.$$

例

求排列 32514 的逆序数.

解:

例

讨论 $1, 2, 3$ 所有全排列的奇偶性.

解:

- 奇排列对应的项为负; 偶排列对应的项为正.

定义 (n 阶行列式的直接定义)

n 阶行列式为 n^2 个数排成 n 行 n 列的数阵决定的一个数，其值可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

注: n 阶行列式的递归定义和直接定义是等价的.

注:

- n 阶行列式共有 $n!$ 项;
- 每一项都是位于不同行不同列的元素的乘积;
- 每一项都可写为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$, 其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的某个排列;
- $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时, 对应项取正号;
  $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时, 对应项取负号;

1.4 行列式的性质

性质 1: 行列式与其转置行列式相等

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为 D 的**转置**.

例 (下三角行列式的转置)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1: 行列式与其转置相等

Proposition

$$D^T = D.$$

证明: 行列式计算中行和列的地位是一样的.

性质 2: 交换两行 (列), 行列式变号.

Proposition

交换行列式的两行 (列), 行列式变号.

证明:

推论

行列式的两行 (列) 相同, 则行列式为 0.

证明:

性质 3: 某行 (列) 乘数 k, 等价于行列式乘数 k

Proposition

行列式的某一行 (列) 中的所有元素都乘同一数 k, 等于用数 k 乘此行列式.

证明:

推论

行列式中某行 (列) 的公因子可以提到行列式记号的外面.

证明:

性质 4: 两行 (列) 成比例，行列式为 0

Proposition

行列式中如果有两行 (列) 元素成比例, 则此行列式等于零.

证明:

性质 5: 一行 (列) 可加, 则行列式可加

Proposition

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明:

性质 6: 某行 (列)k 倍加到另一行 (列), 行列式不变

Proposition

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明:

例题：数字行列式化三角形

例

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解:

例题：循环行列式

例

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解:

例

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解:

例题：分块行列式

例

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\
\vdots & & \vdots & & 0 & \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\
c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

解:

例

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

解:

例

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & c & c & \cdots & c \\ c & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

解:

例

解方程

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

解:

- 行列式的直接定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

  其中 $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

- 行列式的性质.

作业

- P21. 4-(2)(3)(5)、6-3、8-2

欢迎提问和讨论

主讲: 吴利苏 (http://wulisu.cn)

Email: wulisu@sdust.edu.cn