

# 《线性代数》第五章作业 (6 月 18 日提交)

临班 370

2023 年 5 月 23 日

班级: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

(注意: 本章所有矩阵都为实矩阵.)

1. 判断题:

(1) (相似不变量) 若矩阵  $A, B$  相似, 则

- ① 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ .
- ②  $A, B$  具有相同的阶次.
- ③  $R(A) = R(B)$ , 从而  $A \sim B$ .
- ④  $A, B$  的特征多项式相等.
- ⑤  $A, B$  的特征值相等.
- ⑥  $|A| = |B|$ . 进一步,  $A$  可逆当且仅当  $B$  可逆.
- ⑦  $\text{tr}A = \text{tr}B$ .

(2) 矩阵  $A_n$  可以相似对角化

- $\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角矩阵.
- $\Leftrightarrow A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.
- $\Leftrightarrow$  每个特征值的代数重数和几何重数相等.
- $\Leftrightarrow$  极小多项式是一次因式的乘积.
- $\Leftarrow$  实对称矩阵以及和实对称相似的矩阵可相似对角化.
- $\Leftarrow$  具有  $n$  个互不相同特征值的矩阵可相似对角化.

(3) (合同不变量) 若矩阵  $A, B$  是合同的, 则

- ① 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^T A P = B$ .
- ②  $A, B$  具有相同的阶次.
- ③  $R(A) = R(B)$ , 从而  $A \sim B$ .
- ④  $A, B$  的正定性相同.
- ⑤  $A, B$  行列式的符号相同.
- ⑥  $A$  可逆当且仅当  $B$  可逆.

(4) 矩阵  $A$  可以合同对角化

$\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^T A P$  为对角矩阵.

$\Leftrightarrow A^T = A, A$  为对称阵. 任意对称矩阵都可以合同对角化.

(5) (正交相似不变量) 若矩阵  $A, B$  是正交相似的, 则

- ① 存在正交矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1} A P = P^T A P = B$ . 即是相似也是合同.
- ②  $A, B$  具有相同的阶次.
- ③  $R(A) = R(B)$ , 从而  $A \sim B$ .
- ④  $A, B$  的特征多项式相等.
- ⑤  $A, B$  的特征值相等.
- ⑥  $|A| = |B|$ . 进一步,  $A$  可逆当且仅当  $B$  可逆.
- ⑦  $\text{tr} A = \text{tr} B$ .
- ⑧  $A, B$  的正定性相同.

(6) 矩阵  $A$  可以正交相似对角化

$\Leftrightarrow$  存在正交矩阵  $P$ , 使得  $P^T A P = P^{-1} A P$  为对角矩阵.

$\Leftrightarrow A^T = A, A$  为对称阵. 任意对称矩阵都可以正交相似对角化.

2. 计算题:

(1) 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 计算:

①  $\psi(A) = A^{10} - 5A^8 + 3E$ .

②  $|\psi(A)|$ .

(2) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  与  $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$  相似. 求:

①  $x, y$ .

② 求一个正交矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ .

(3) 设二次型  $f(X) = X^TAX = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$ .

① 写出二次型  $f$  的矩阵;

② 求正交变换  $X = PY$ , 把二次型  $f$  化为标准形.

③ 判断  $f$  是否为正定二次型.

④ 证明:  $\min_{X \neq 0} \frac{f(X)}{X^TX} = 2$ .

4. 证明题:

(1) 设  $\lambda$  为  $n$  阶可逆矩阵  $A$  的特征值, 证明  $\frac{|A|}{\lambda}$  为  $A^*$  的特征值.

5. 思考题:

- 矩阵  $A$  相似对角矩阵  $\Lambda$  是指: 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ . 思考这里的可逆矩阵  $P$  是否唯一. 若不唯一, 则设  $P_1$  和  $P_2$  都使得  $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = \Lambda$ , 则  $P_1$  和  $P_2$  有什么关系?
- 矩阵  $A$  正交相似对角矩阵  $\Lambda$  是指: 存在正交矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ . 思考这里的  $P$  是否唯一. 若不唯一, 则设  $P_1$  和  $P_2$  都使得  $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = \Lambda$ , 则  $P_1$  和  $P_2$  又有什么关系?