

## 摘要

本文介绍了不同的分数阶微积分的定义，总结了基于Grümwald-Letnikov分数阶微积分定义的微积分算子在图像增强、图像去噪、图像边缘检测等数字图像处理中的应用，及介绍了基于分数阶各向异性扩散方程的图像去噪中模型。

具体包括：关于分数阶微积分的不同定义和它们的性质及不同定义之间的联系；传统一阶梯度算子、二阶Laplace算子在图像锐化中的应用；分数阶微分算子在图像锐化中的应用；分数阶积分算子在图像平滑去噪中的应用；傅里叶变换及分数阶微积分的傅里叶频谱分析；基于分数阶偏微分方程的扩散去噪模型；传统一阶梯度算子、二阶Laplace算子在图像边缘检测中的应用；分数阶微分算子在图像边缘检测中的应用。**关键词：** 分数阶微积分；图像增强；图像去噪；边缘检测

## Abstract

In this paper, different definitions of fractional calculus are considered. It reviews conclusions of its applications in digital image processing, which is mainly about image enhancement, image denoising, image edge detection, on the basis of the definition of Grünwald-Letnikov. Moreover, the application of fractional-order anisotropic diffusion partial in image denoising is introduced as well.

Specifically speaking, the paper covers contents as followings: different definitions of fractional derivatives and fractional integrals, their properties and connections between them; applications of inter-order differentiation operators, such as order 1st used by the gradient or order 2 used by Laplacian, in Image Sharpening; applications of fractional differential operator in the image sharpening; applications of fractional integral operator in image smoothing denoising; Fourier Transform and the spectrum analysis of fractional calculus; diffusion denoising model based on fractional-order partial differential equations; applications of inter-order differentiation operators in image edge detection; applications of fractional differential operator in the image edge detection.

**Keywords:** fractional calculus, image enhancement, image denoising, edge detection

## 目录

摘要 .....	i
Abstract .....	ii
目录 .....	iii
<b>0 引言 .....</b>	<b>1</b>
<b>1 分数阶微积分 .....</b>	<b>3</b>
1.1 分数阶微积分的定义 .....	3
1.1.1 定义 .....	3
1.1.2 三种常用分数阶微积分定义之间的联系 .....	6
1.2 分数阶微积分的一些性质 .....	6
1.3 分数阶微积分对信号的频域分析 .....	9
<b>2 图像增强 .....</b>	<b>14</b>
2.1 一阶梯度锐化算法和二阶Laplace算子锐化算法 .....	15
2.1.1 一阶锐化算法 .....	15
2.1.2 Laplace算子锐化算法 .....	16
2.2 基于分数阶微分算子的图像锐化模型 .....	18
2.2.1 分数阶微分掩模的构造 .....	18
2.3 仿真结果 .....	20
<b>3 图像去噪 .....</b>	<b>22</b>
3.1 傅里叶变换 .....	22
3.2 基于分数阶积分算子的图像去噪模型 .....	24

3.3 基于分数阶偏微分方程的图像去噪模型 .....	26
3.3.1 P-M模型 .....	26
3.3.2 基于分数阶导数的正则模型 .....	26
3.3.3 数值计算 .....	27
3.4 仿真结果 .....	28
<b>4 边缘检测 .....</b>	<b>33</b>
4.1 边缘点的定义 .....	33
4.2 一阶、二阶检测算子 .....	34
4.3 基于分数阶微分的边缘检测模型 .....	35
4.4 仿真结果 .....	36
<b>附录 A 相关代码 .....</b>	<b>39</b>
A.1 频域分析 .....	39
A.2 图像增强 .....	39
A.3 图像去噪 .....	40
A.4 边缘检测 .....	43
<b>附录 B 翻译 .....</b>	<b>44</b>
B.1 Applications of Fractional Calculus .....	45
B.2 分数阶微积分的应用 .....	57
<b>参考文献 .....</b>	<b>62</b>
<b>致 谢 .....</b>	<b>64</b>

## 0 引言

分数阶微积分理论是分析任意阶微分和积分性质应用的数学工具，现在在工程、数学、经济及其他一些领域都有研究。最早分数阶微分的出现可推至大约300年前，此后许多数学家，如 N.H.Abel、M.Caputo、L.Euler、J.Fourier、A.K.Grümwald、J.Hadamard、G.H.Hardy、O.Heaviside — H.J.Holmgren、P.S.Laplace、G.W.Leibniz、A.V.Letnikov、J.Liouville、B.Riemann、M.Riesz、H.Weyl，都对分数阶微积分作出过贡献。

早期分数阶微积分的研究主要是理论研究，几乎不涉及到应用。直到最近几十年，才广泛从纯数学转到应用上来。由于分数阶微积分算子的记忆性质，相比于整数阶微积分更适合用来描述自然现象。而分数阶微积分理论在图像处理中的应用研究更只有十几年的时间，目前在图像增强（图像锐化）、图像去噪（图像平滑去噪）、图像边缘检测、图像重建与恢复、图像分割、数字水印和图像模式识别等方面都有研究。

本文主要介绍和总结分数阶微积分的一些理论及分数阶微积分在图像去噪、图像增强、图像边缘检测已有的一些研究。在第一章中，我们总结了分数阶微积分的一些理论。我们在第一节给出了不同的分数阶微积分定义和三种常用于应用的分数阶微积分定义（Grümwald-Letnikov微积分定义、Riemann-Liouville微积分定义、M.Caputo微积分定义）之间的联系；第二节给出了分数阶微积分的一些性质，包括分数阶微积分算子的线性性质、半群性质、记忆性质、弱导数性质等；第三节分析了分数阶微分算子、积分算子对不同频率信号的作用，在这里我们可以直观看出分数阶微积分和整数阶微积分的联系和差别。

由于微分算子对图像边缘、纹理等高频信息敏感（这也要求图像需要高的信噪比），所以微分算子可以用于图像锐化和图像边缘检测。在第二章中，我们总结了微分算子（基于一阶梯度算子和二阶Laplace算子的整数阶微分算子，分数阶微分算子）在图像增强中的应用。第一节中，我们介绍了传统一阶梯度算子和二阶Laplace算子在图像增强中的应用；第二节，我们构造了分数阶锐化算子。在第四章中，我们总结了

微分算子在边缘检测中的应用，由于其检测原理和第二章锐化一样，除给出边缘点定义，我们不再累述，仅另构造一基于八方向的  $3 \times 3$  的边缘检测算子。

在第三章中，我们总结了基于分数阶积分算子的图像去噪模型和基于偏微分方程的图像去噪模型。在第二节中，我们构造了基于分数阶积分的空域去噪模型。第三节中给出了经典的 PM 方程，和基于分数阶偏微分方程的频域扩散去噪模型。另外由于图像噪声主要对应傅里叶域的高频部分，所以我们在第一节中给出了一些常见的傅里叶变换；为保证偏微分方程弱解的正则性，我们在第一章第二节给出了 Sobolev 空间的定义。

在第二、三、四章的最后，我们列出了一些仿真结果，并在附录中给出了相应的 Matlab 代码。需要指出的是，基于偏微分方程的去噪模型计算复杂度高，且去噪效率并不优于一般的扩散去噪模型。当然它在去噪的同时保持边缘这一特性也是非常优秀的。我们认为分数阶微积分理论在图像处理中的研究可以多和其他算法，特别是一些智能算法（如遗传算法），结合起来，在简化计算的同时提高处理效率。当然，目前也有许多这样结合的算法，如分数阶和混沌系统结合分数阶混沌系统用于数字图像加密；分数阶偏微分方程与遗传算法等智能算法结合，应用于数字 3D 图像重建等等。还有分数阶微积分在图像其他方面的应用，如图像识别、数字水印等在此不作介绍。

# 1 分数阶微积分

早在 Leibniz 时期，在法国数学家 L'Hôpital 曾在给 Leibniz 的信中，就出现了关于  $\frac{1}{2}$  阶导数的疑问。在接下来三百年多来，许多数学家们都曾提出过自己的分数阶微积分的定义，现在最常用的有 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义（G-L 定义）、Riemann-Liouville 分数阶微积分定义（R-L 定义）、M.Caputo 分数阶微积分定义。如今，随着分数阶微积分理论不断的丰富，分数阶微积分开始在工程上控制、信号处理等许多领域得到应用，分数阶微积分所具有的各种独特的性质也越来越引起人们的注意。

## 1.1 分数阶微积分的定义

### 1.1.1 定义

分数阶微积分可以看作整数阶微积分的推广，一般与整数阶微积分不矛盾的定义都可作为分数阶微积分的定义。下面给出几种分数阶微积分的定义：

**L.Euler (1730)**

当  $n \in \mathbb{Z}^+$ ，对  $x^m$  求  $n$  阶导数有：

$$\frac{d^n x^m}{x^n} = m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n} \quad (1.1)$$

又

$$\Gamma(m+1) = m(m-1) \cdots (m-n+1)\Gamma(m-n+1) \quad (1.2)$$

故可定义  $x^m$  的分数阶次导数为

$$\frac{d^\alpha x^m}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}x^{m-\alpha} \quad (1.3)$$

其中

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.4)$$

### J.B.J.Fourier (1820-1822)

已知傅里叶积分公式:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp \quad (1.5)$$

定义  $f(x)$  的分数阶微积分为:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + \alpha \frac{\pi}{2}) dp \quad (1.6)$$

### N.H.Abel (1832-1826)

已知:

$$\int_0^x \frac{s'(\eta)}{(x - \eta)^\alpha} d\eta = \phi(x) \quad (1.7)$$

定义  $\phi(x)$  的任意  $\alpha$  阶导数满足:

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d^{-\alpha} \phi(x)}{dx^{-\alpha}} \quad (1.8)$$

### J.Liouville (1832-1855)

考虑到函数  $f(x)$  的指数展开:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x} \quad (1.9)$$

又由

$$\frac{d^m e^{ax}}{dx^m} = a^m e^{ax} \quad (1.10)$$

故定义分数阶导数为:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x} \quad (1.11)$$

定义分数阶积分:

$$\int_0^\alpha \Phi(x) dx^\alpha = \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \Phi(x + \tau) \tau^{\alpha-1} d\tau \quad (1.12)$$

$$\int^{\alpha} \Phi(x) dx^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \Phi(x - \tau) \tau^{\alpha-1} d\tau \quad (1.13)$$

分数阶微分另外一种定义:

$$\frac{d^{\alpha} F(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha}}{h^{\alpha}} [F(x) \frac{\alpha}{1} F(x + h) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} F(x + 2h) + \dots] \quad (1.14)$$

$$\frac{d^{\alpha} F(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{1}{h^{\alpha}} [F(x) \frac{\alpha}{1} F(x - h) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} F(x - 2h) + \dots] \quad (1.15)$$

**G.F.B.Riemann (1847-1876)**

他定义分数阶积分为:

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt + \psi(t) \quad (1.16)$$

**N.Ya.Sonin (1869) , A.V.Letnitov (1872) , H.Laurent (1884) ,**

**N.Nekrasove (1888) , K.Nishimoto (1987)**

考虑到柯西积分公式:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t - z)^{n+1}} dt \quad (1.17)$$

类似定义分数阶导数:

$$D^{\alpha} f(z) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi i} \int_c^{x^+} \frac{f(t)}{(t - z)^{\alpha+1}} dt \quad (1.18)$$

另外现在应用比较广泛的的三种分数阶微积分定义:

**Grümwald-Letnikov定义 (G-L定义)**

$${}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (1.19)$$

**Riemann-Liouville定义 (R-L定义)**

$${}_a^R D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, n - 1 \leq \alpha < n \quad (1.20)$$

**M.Caputo定义 (1967)**

$${}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, n - 1 \leq \alpha < n \quad (1.21)$$

### 1.1.2 三种常用分数阶微积分定义之间的联系

**命题1：**当分数阶微积分的阶次 $\alpha$ 满足 $n-1 < \alpha < n$ , 且 $f(x)$ 的 $[n-1] + 1$ 阶导数存在且连续时, R-L定义与G-L定义等价。在同样条件下, G-L定义和Caputo定义等价。

**命题2： R-L定义和Caputo定义的联系：**当分数阶微积分的阶次 $\alpha$ 为正整数和负实数时, R-L定义和Caputo定义有如下关系:

$${}^R D^\alpha = {}^C D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^n \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.22)$$

$${}^R D^\alpha [f(t) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}] = {}^C D^\alpha f(t), \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.23)$$

三种定义形式不同, 决定它们的应用领域也不同 (事实上, 它们也正是为适应不同领域研究而提出的)。如G-L分数阶微积分定义在数值计算中可以转为卷积运算, 故适合应用在信号处理中。本文所讨论的分数阶微积分也是基于G-L分数阶微积分定义。R-L分数阶微积分定义于数学理论上, 可以计算一些简单函数的解析解, 从而讨论他们的数学性质。Caputo分数阶微积分定义的Laplace变换形式很好, 主要应用在控制动力系统等领域。

## 1.2 分数阶微积分的一些性质

分数阶微积分算子具有很好的分析性质, 如线性性质, 解析性质, 半群性质, 弱导数性质等等。下面列举分数阶微积分的一些性质。

**线性性质:**

$$D^\alpha (af(x) + bg(x)) = aD^\alpha f(x) + bD^\alpha g(x) \quad (1.24)$$

**半群性质:**

$$(D^\alpha)(D^\beta)f = (D^\beta)(D^\alpha)f = (D^{\alpha+\beta})f \quad (\alpha, \beta \leq 0) \quad (1.25)$$

记忆性：

考察积分

$$\int_0^t k(t-t')f(t')dt' \quad (1.26)$$

表示的记忆特性，其中  $k(t-t')$  为记忆核函数。若该过程不具有记忆性，取核函数为Dirac函数，即

$$k(t) = \delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

则有积累效应函数为  $f(t)$ ，若该过程具有全记忆性，取核函数为Heaviside函数，即

$$k(t) = H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

则积累效应函数为  $\int_0^t f(t')dt'$ 。计算无记忆和全记忆所对应核函数的Laplace变换，得：

$$\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1 (= \frac{1}{s^0}) \quad \mathcal{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s} (= \frac{1}{s^1}) \quad (1.29)$$

将其推广，对于介于无记忆和全记忆之间的情况。设其核函数满足

$$\mathcal{L}(k(t))(s) = \frac{1}{s^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1.30)$$

由逆Laplace变换得

$$k(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.31)$$

其中  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ，此时积累效应函数为

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^t (t-t')^{\alpha-1} f(t')dt' \quad (1.32)$$

按照Liouvill的分数阶积分定义，积累效应函数可表为分数阶积分

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^t (t-t')^{\alpha-1} f(t')dt', \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1.33)$$

从而说明分数阶积分具有记忆性。

### 弱导数和 Sobolev 空间

**定义1:** (弱导数的定义) 设  $u, v \in L^1_{loc}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ , 对  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  若有等式

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx \quad (1.34)$$

成立, 则称  $v$  是  $u$  的  $\alpha$  阶弱导数, 记  $v = D^\alpha u$ 。

**定义2:** (Sobolev 空间的定义) 对  $1 \leq p \leq +\infty$ , 令

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{Z}^+, |\alpha| \leq m\} \quad (1.35)$$

其中  $D^\alpha u$  为  $u$  的  $\alpha$  阶弱导数, 对于  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  定义其范数为

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p,\Omega} = \|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.36)$$

赋以范数 1.36 的  $W^{m,p}(\Omega)$  空间称为  $\Omega$  上的  $m$  阶 Sobolev 空间。

**定义3:** ( $\mathbf{R}^2$  上的分数阶 Sobolev 空间的定义)  $\forall s \in \mathbf{R}^+$ , 定义  $s$  阶 Sobolev 空间  $H^s(\mathbf{R}^2)$  为

$$H^s(\mathbf{R}^2) = \{g \in L^2(\mathbf{R}^2) : (1 + |\omega_1|^2 + |\omega_2|^2)^{s/2} \hat{g}(\omega) \in L^2(\mathbf{R}^2)\} \quad (1.37)$$

其中  $L^2(\mathbf{R}^2) = \{f(\mathbf{x}) | f(\mathbf{x}) \text{ 在 } \mathbf{R}^2 \text{ 上可测且 } \int_{\mathbf{R}^2} |f(x)|^p d\mathbf{x} < \infty\}$ ,  $\hat{g}$  为  $g$  的傅里叶变换。

$H^s(\mathbf{R}^2)$  空间为一个 Hilbert 空间, 其内积定义为:

$$\langle g, h \rangle_s = \int (1 + |\omega_1|^2 + |\omega_2|^2)^s \hat{g} \bar{\hat{h}} d\omega_1 d\omega_2 \quad (1.38)$$

其相应范数定义为  $\|g\|_s = \sqrt{\langle g, g \rangle_s}$ 。

弱导数的一些基本性质

**命题3:** 设  $u, v \in W_{k,p}(U)$ ,  $|\alpha| \leq k$ , 则

- (1)  $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|}(U)$  且  $\forall |\alpha| + |\beta| \leq k$ ,  $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ ;
- (2)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u + \mu v \in W_{k,p}(U)$  且  $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ ;

(3)若  $V$  是  $U$  的一个开集, 则  $u \in W^{k,p}(V)$ ;

(4)若  $\xi \in C_0^\infty(U)$ , 则  $\xi u \in W^{k,p}(U)$  且

$$D^\alpha(\xi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \xi D^{\alpha-\beta} u$$

其中,  $\binom{\alpha}{\beta} = C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

### 1.3 分数阶微积分对信号的频域分析

对任意  $f(t) \in L^2(R)$ , 其傅里叶变换为

$$\hat{f}(\omega) = \int_R f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (1.39)$$

对于  $f(t)$  的  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) 阶导数在频域的等价形式为

$$D^n f(t) \xleftrightarrow{FT} (\hat{D}f)^n(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) = \hat{d}^n(\omega) \hat{f}(\omega) \quad (1.40)$$

推广到分数阶导数有

$$D^\alpha f(t) \xleftrightarrow{FT} (\hat{D}f)^\alpha(\omega) = (i\omega)^\alpha \hat{f}(\omega) = \hat{d}^\alpha(\omega) \hat{f}(\omega) \quad (1.41)$$

其中  $\hat{d}^\alpha(\omega)$  为:

$$\begin{cases} \hat{d}^\alpha(\omega) = (i\omega)^\alpha = \hat{\nu}^\alpha(\omega) \cdot \exp(i\theta_k(\omega)) \\ \hat{\nu}^\alpha(\omega) = |\omega|^\alpha, \theta_k(\omega) = \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) \end{cases} \quad (1.42)$$

取导数阶次 $\alpha = 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 1.8, 2$ , 绘得微分幅频曲线  
有

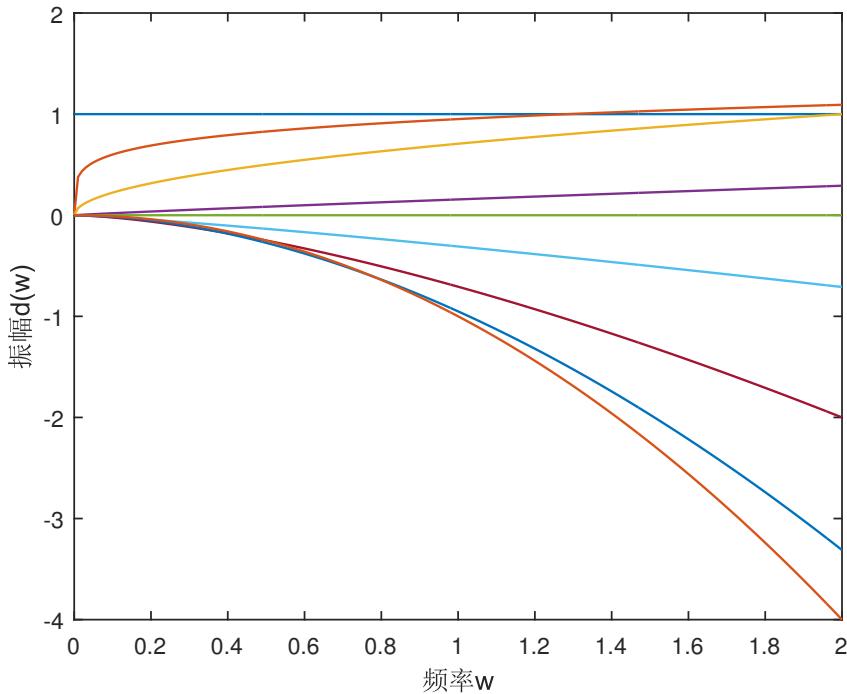


图 1.1: 分数阶微分的幅频特征曲线

将阶次 $\alpha > 1$ 的振幅取正有：

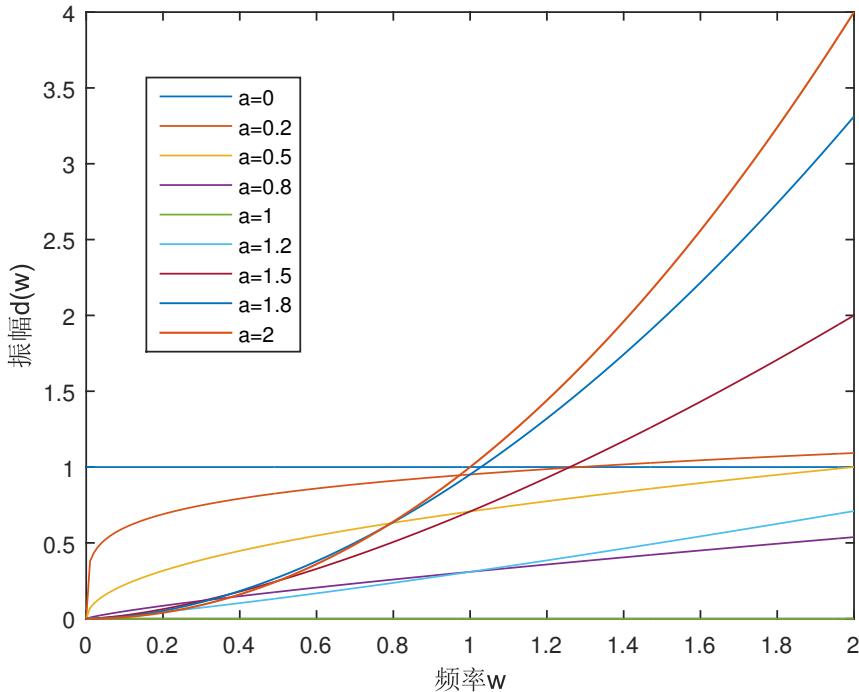


图 1.2: 分数阶微分的幅频特征曲线图

从上图可以看出：

- 1、微分算子对高频信号都有增强作用，且增强幅度随着信号频率和微分阶次而非线性增大；
- 2、当阶次 $\alpha = 0$ 时，对信号没有作用；
- 3、当阶次 $0 < \alpha < 1$ 时，微分算子对相对低频信号的影响幅度要低于一阶和二阶微分算子，但对相对高频信号的增强效果要低于一阶和二阶微分算子；
- 4、当阶次 $1 < \alpha < 2$ 时，微分算子对相对低频信号的影响幅度要低于一阶和二阶微分算子，对相对高频部分信号的增强幅度要高于一阶微分算子，但低于二阶微分算子；

综上得知，分数阶微分算子增强高频信号的同时能够更好非线性保留低频信号。

取积分阶次  $\alpha = 0, -0.2, -0.5, -0.8, -1, -1.2, -1.5, -1.8, -2$ , 绘得幅频曲线有

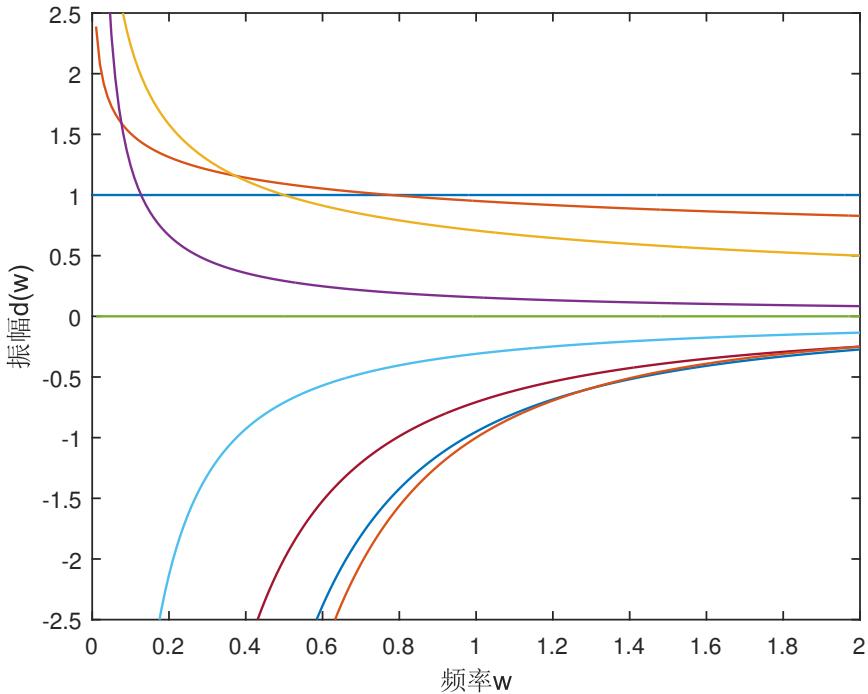


图 1.3: 分数阶积分的幅频特征曲线

将阶次 $\alpha < -1$ 的振幅取正有：

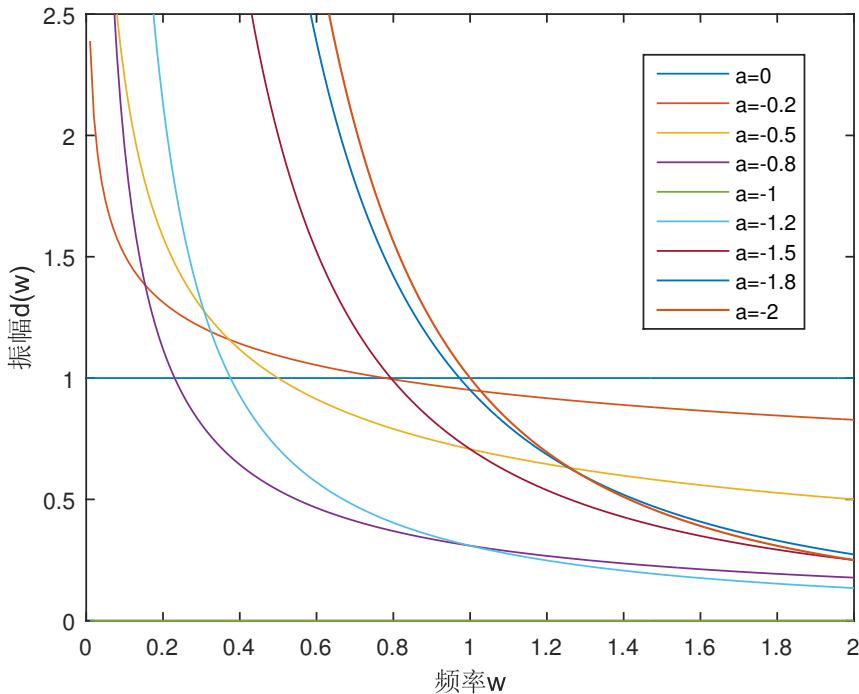


图 1.4：分数阶积分的幅频特征曲线图

从上图可以看出：

- 1、积分分算子对高频信号都有衰减作用，且衰减幅度随着信号频率和微分阶次而非线性增大；
- 2、当阶次 $\alpha = 0$ 时，对信号没有作用；
- 3、当阶次 $-1 < \alpha < 0$ 时，积分分算子对相对低频信号的幅值进行了一定的提高，其幅度要高于一阶积分算子小于二阶积分算子，但对相对高频信号的衰减效果要弱于一阶和二阶积分算子；
- 4、当阶次 $-2 < \alpha < -1$ 时，分算子对相对低频信号的幅值进行了相当的提高，对相对高频部分信号的衰减效果要弱于一阶积分算子，但强于二阶积分算子；

综上得知，分数阶积分算子衰弱相对高频信号的同时对最高频部分进行非线性保留；在增强相对低频信号的同时对最低频进行大幅度增强。

## 2 图像增强

图像增强是指按特定的需要将图像中感兴趣的特征有选择地突出，衰减不需要的特征，提高图像的可读性。图像增强的目的主要有两个：一是改善图像的视觉效果，提高图像清晰度；二是将图像转换成一种更适合人类或机器进行分析处理的形式，一遍获得更多有用的信息。

图像增强的方法有很多种，按照增强的目的和效果划分，图像增强方法大致可以分为灰度级修正、图像平滑、图像锐化、图像增晰和彩色增强。按照处理空间划分，又可分为空域增强（空域增强）和频率域增强（频域增强）。空域增强是指直接对图像像素进行处理，主要包括灰度变换、直方图修正、图像空域平滑和锐化、彩色增强等。频域增强是指在图像的某种变换域内（一般常用傅里叶变换域），对变换后的系数进行运算，然后再反变换到原来的空间域，得到增强的图像，主要包括低通滤波、高通滤波、带阻滤波、同态滤波等。

其中，图像锐化处理是指增强和提取目标细节、边缘轮廓信息的处理方法。图像锐化也有空域和频域两种处理方法，在空间域中常采用微分运算进行图像锐化。需要注意的是，利用微分运算锐化图像，会将噪声放大，所以要求需要锐化的图像有较高的信噪比。图像锐化的通用公式可以写为：

$$g = \alpha f_{original} - f_{lowpass} = (\alpha - 1)f_{original} + f_{highpass} \quad (2.1)$$

或为

$$g = f_{original} + \alpha f_{highpass} \quad (2.2)$$

传统锐化方法有一阶梯度算子锐化和二阶Laplace算子锐化。本章中除介绍上述两种锐化算法外，着重介绍分数阶微分在图像锐化中的应用。

## 2.1 一阶梯度锐化算法和二阶Laplace算子锐化算法

### 2.1.1 一阶锐化算法

对于图像 $[f(x, y)]_{m \times n}$ , 在点 $(x, y)$ 处的梯度为:

$$\text{grad}(x, y) = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

其中梯度方向为:

$$\theta = \arctan \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} / \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

梯度的方向表示 $f(x, y)$ 变化最大的方向。

梯度大小为:

$$\text{grad}(x, y) = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y} = \sqrt{\left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2} \quad (2.5)$$

梯度的大小表示 $f(x, y)$ 在其最大变化率方向上的单位距离所增加的量。

常用两种梯度计算公式为:

水平垂直差分法: .

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sqrt{(f(x+1, y) - f(x, y))^2 + (f(x, y+1) - f(x, y))^2} \\ &\approx |f(x+1, y) - f(x, y)| + |f(x, y+1) - f(x, y)| \end{aligned} \quad (2.6)$$

Roberts梯度法:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sqrt{(f(x+1, y+1) - f(x, y))^2 + (f(x, y+1) - f(x+1, y))^2} \\ &\approx |f(x+1, y+1) - f(x, y)| + |f(x, y+1) - f(x+1, y)| \end{aligned} \quad (2.7)$$

在实际应用中, 利用卷积运算近似梯度,  $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 各使用一个模板(算子), 常用的算子如下:

算子名称	$G_x$	$G_y$
Roberts算子	$\begin{bmatrix} -1_{\Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0_{\Delta} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Prewitt算子	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0_{\Delta} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0_{\Delta} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Sobel算子	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0_{\Delta} & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0_{\Delta} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
Isotropic算子	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0_{\Delta} & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0_{\Delta} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

### 2.1.2 Laplace算子锐化算法

连续的二元函数 $f(x, y)$ ,在 $(x, y)$ 处的Laplace算子定义为:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (2.8)$$

对于离散的数字图像,  $f(x, y)$ 的Laplace算子 $[\nabla^2 f(x, y)]$ 为:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\ &\quad + f(x, y-1) - 4f(x, y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

常用的两个Laplace算子:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4_{\Delta} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8_{\Delta} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

从而得到锐化模板为：

**Laplace图像增强模板：**

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5_{\Delta} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9_{\Delta} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Laplace图像锐化增强模板是一种高通滤波器，它将原始图像叠加到Laplace变换的处理结果中去，可以使图像中的各灰度值得到保留，使灰度突变处的对比度得到增强，最终结果是在保留图像背景的前提下，突出图像中细节信息。

另外，二阶锐化算法还有：

**Wallis锐化：**

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x, y) = & \log(f(x, y)) - \frac{1}{4} \log(f(x+1, y)) - \frac{1}{4} \log(f(x-1, y)) \\ & - \frac{1}{4} \log(f(x, y+1)) - \frac{1}{4} \log(f(x, y-1)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

**LOG锐化：**

二维高斯函数：

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.11)$$

则有LOG锐化表达式：

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(x, y) = & \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \\ = & \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left( \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} - 1 \right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

## 2.2 基于分数阶微分算子的图像锐化模型

### 2.2.1 分数阶微分掩模的构造

按照G-L分数阶微积分的定义：

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(t - mh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(t - mh) \end{aligned} \quad (2.13)$$

在区间 $[a, t]$ 中，取 $h = 1$ ，故得 $f$ 的分数阶次差分为：

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &\triangleq f(t) + (-\alpha)f(t-1) + \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)}{2}f(t-2) \\ &\quad + \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)}{6}f(t) + \dots \\ &\quad + \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\alpha)}f(t-m) \end{aligned} \quad (2.14)$$

进一步，按照G-L分数阶微积分定义，图像 $f(x, y)$ 在 $x$ 和 $y$ 方向的偏分数阶微分为：

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(x, y)_x &\triangleq f(x, y) + (-\alpha)f(x-1, y) \\ &\quad + \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)}{2}f(x-2, y) \\ &\quad + \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)}{6}f(x-3, y) \\ &\quad + \dots + \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\alpha)}f(x-m, y) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(x, y)_y &\triangleq f(x, y) + (-\alpha)f(x, y-1) \\ &\quad + \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)}{2}f(x, y-2) \\ &\quad + \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)}{6}f(x, y-3) \\ &\quad + \dots + \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\alpha)}f(x, y-m) \end{aligned} \quad (2.16)$$

故得分数阶掩模算子的滤波系数为：

$$\begin{cases} W_{D_0} = 1 \\ W_{D_1} = -\alpha \\ W_{D_2} = \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)}{2} \\ W_{D_3} = \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)}{6} \\ \vdots \\ W_{D_m} = \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)\cdots(-\alpha+m-1)}{m!} \end{cases} \quad (2.17)$$

分数阶微分图像增强掩模算子：

$$\begin{bmatrix} W_{D_m} & 0 & \cdots & 0 & W_{D_m} & 0 & \cdots & 0 & W_{D_m} \\ 0 & W_{D_{m-1}} & \cdots & 0 & W_{D_{m-1}} & 0 & \cdots & W_{D_{m-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{D_1} & W_{D_1} & W_{D_1} & \cdots & 0 & 0 \\ W_{D_m} & W_{D_{m-1}} & \cdots & W_{D_1} & W_{D_0} & W_{D_1} & \cdots & W_{D_{m-1}} & W_{D_m} \\ 0 & 0 & \cdots & W_{D_1} & W_{D_1} & W_{D_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & W_{D_{m-1}} & \cdots & 0 & W_{D_{m-1}} & 0 & \cdots & W_{D_{m-1}} & 0 \\ W_{D_m} & 0 & \cdots & 0 & W_{D_m} & 0 & \cdots & 0 & W_{D_m} \end{bmatrix}$$

取一个 $7 \times 7$ 大小的八方向微分算子（Tiansi微分算子）对于非八方向上的数值取零，有

**Tiansi微分算子**

$$\begin{bmatrix} W_{D_3} & 0 & 0 & W_{D_3} & 0 & 0 & W_{D_3} \\ 0 & W_{D_2} & 0 & W_{D_2} & 0 & W_{D_2} & 0 \\ 0 & 0 & W_{D_1} & W_{D_1} & W_{D_1} & 0 & 0 \\ W_{D_3} & W_{D_2} & W_{D_1} & W_{D_0} & W_{D_1} & W_{D_2} & W_{D_3} \\ 0 & 0 & W_{D_1} & W_{D_1} & W_{D_1} & 0 & 0 \\ 0 & W_{D_2} & 0 & W_{D_2} & 0 & W_{D_2} & 0 \\ W_{D_3} & 0 & 0 & W_{D_3} & 0 & 0 & W_{D_3} \end{bmatrix}$$

## 2.3 仿真结果

### 一阶梯度算子与二阶Laplace锐化算子

利用一阶和二阶锐化算子锐化 $512 \times 512$ 的标准lena图，下列依次为lena图、lena灰度图、Roberts锐化算子、Sobel锐化算子、Prewitt锐化算子、Isotropic锐化算子、Laplace锐化算子、LOG锐化算子（Gauss-Laplace锐化算子）：



图 2.1: lena图及其灰度图

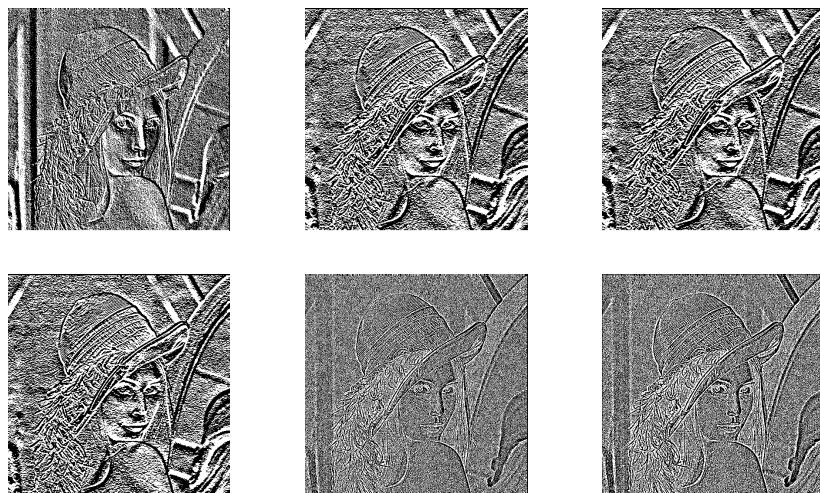


图 2.2: 一阶、二阶锐化算子

分数阶锐化算子 分数阶阶次依次取  $\alpha = 1, 1.2, 1.5, 1.7, 2$  ,分别对 $512 \times 512$ 的lena图和小丑鱼锐化:

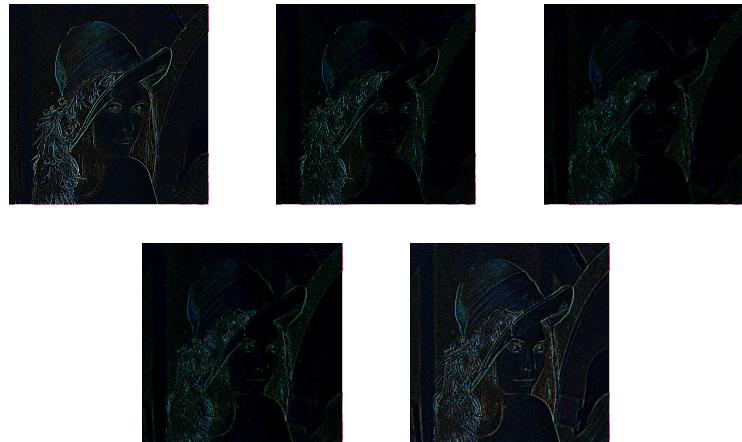


图 2.3: 分数阶锐化算子的lena图

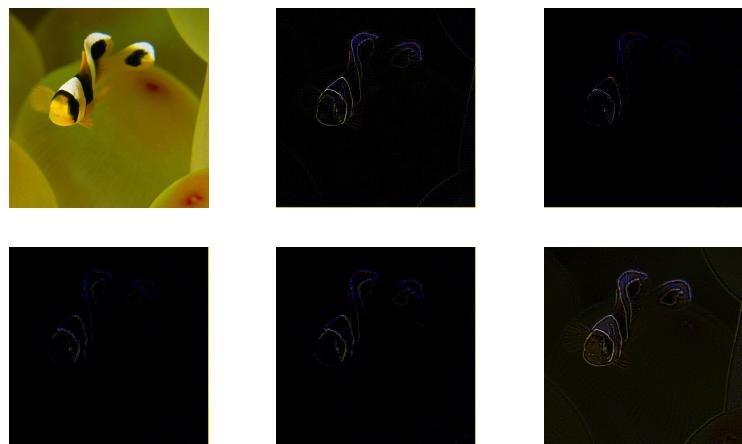


图 2.4: 分数阶锐化算子的小丑鱼图

### 3 图像去噪

数字图像在获取、存储、传输过程中，势必会受到外界影响，从而产生了图像噪声。常见的图像噪声有两种：一种是噪声幅值相同，而出现位置随机的椒盐噪声；另一种是每一点都受噪声影响，而幅值随机的高斯噪声。另外，噪声幅值分布统计看，又有高斯噪声、瑞利噪声和白噪声之分。

在傅里叶变换频谱中，高频部分对应图像的细节、边缘和噪声，低频部分对应图像背景和图像平坦区域。介于这点，在傅里叶域中进行去噪处理，效果会比较好。所以本文首先介绍图像的傅里叶变换，其次讨论分数阶积分和分数阶偏微分方程在图像去噪中的应用。

#### 3.1 傅里叶变换

常见傅里叶变换有：

##### 一维傅里叶变换

设 $f(t)$ 是一个连续时间信号，满足Dirichlet条件，且 $f(t)$ 属于 $L_2$ 空间，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (3.1)$$

那么， $f(t)$ 的傅里叶变换存在，定义为：

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi j ut} dt \quad (3.2)$$

其逆变换为：

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi j ut} du \quad (3.3)$$

##### 一维快速傅里叶变换

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left[-\frac{2\pi j ux}{N}\right] \quad (3.4)$$

其逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{-2\pi j \frac{ux}{N}} \quad (3.5)$$

类似，可以定义二维傅里叶变换。

### 二维傅里叶变换

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi j(ux+vy)} dx dy \quad (3.6)$$

其反变换为

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi j(ux+vy)} du dv \quad (3.7)$$

### 二维离散傅里叶变换

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (3.8)$$

其逆变换为

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi j(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (3.9)$$

二维离散傅里叶变换有很好的性质，如可分离性、平移性、周期性、共轭对称性、旋转不变性等等。利用这些性质可得下面二维快速傅里叶变换。

### 二维快速傅里叶变换 (DFFT)

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{NN} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j(\frac{ux+vy}{N})} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j(\frac{ux}{N})} \times \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j(\frac{vy}{N})} \end{aligned} \quad (3.10)$$

其逆变换为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{NN} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{-2\pi j(\frac{ux+vy}{N})} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u, v) e^{-2\pi j(\frac{ux}{N})} \times \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{-2\pi j(\frac{vy}{N})} \end{aligned} \quad (3.11)$$

下面给出分数阶微分、偏微分在傅里叶域中的定义。

$\forall u \in L^2(\mathbf{R}^2)$ ，则  $u$  存在傅里叶变换，定义其在傅里叶域对应的分数阶偏导数

$$D_{x_1}^\alpha u \leftrightarrow (jw_1)^\alpha \hat{u}(w_1, w_2) \quad (3.12)$$

记作  $\hat{D}_x^\alpha u$ ，其在频域中差分定义为

$$D_x^\alpha u \leftrightarrow \left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi j w_1}{m}\right)\right)^\alpha \hat{u}(w_1, w_2) \quad (3.13)$$

利用中心差分离散化  $D_x^\alpha u$ ，由二维离散傅里叶变换的平移性质得中心差分

$$\tilde{D}_x^\alpha u = D_x^\alpha u(x + \frac{\alpha}{2}, y) \leftrightarrow \left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi j w_1}{m}\right)\right)^\alpha \exp\left(\frac{\pi\alpha j w_1}{m}\right) \hat{u}(w_1, w_2) \quad (3.14)$$

则

$$\tilde{D}_x^\alpha u = F^{-1} \left[ \left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi j w_1}{m}\right)\right)^\alpha \exp\left(\frac{\pi\alpha j w_1}{m}\right) F(u) \right] \quad (3.15)$$

### 3.2 基于分数阶积分算子的图像去噪模型

同分数阶微分用于图像增强的分析，按照G-L分数阶微积分定义，图像  $f(x, y)$  在  $x$  和  $y$  方向的偏分数阶积分为：

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(x, y)_x &\stackrel{\Delta}{=} f(x, y) + \alpha f(x - 1, y) \\ &+ \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} f(x - 2, y) \\ &+ \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{6} f(x - 3, y) \\ &+ \cdots + \frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m + 1)\Gamma(\alpha)} f(x - m, y) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(x, y)_y &\stackrel{\Delta}{=} f(x, y) + \alpha f(x, y - 1) \\ &+ \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} f(x, y - 2) \\ &+ \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{6} f(x, y - 3) \\ &+ \cdots + \frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m + 1)\Gamma(\alpha)} f(x, y - m) \end{aligned} \quad (3.17)$$

故有分数阶积分滤波器的构造

$$\begin{bmatrix} W_{D_m} & 0 & \cdots & 0 & W_{D_m} & 0 & \cdots & 0 & W_{D_m} \\ 0 & W_{D_{m-1}} & \cdots & 0 & W_{D_{m-1}} & 0 & \cdots & W_{D_{m-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{D_1} & W_{D_1} & W_{D_1} & \cdots & 0 & 0 \\ W_{D_m} & W_{D_{m-1}} & \cdots & W_{D_1} & 8W_{D_0} & W_{D_1} & \cdots & W_{D_{m-1}} & W_{D_m} \\ 0 & 0 & \cdots & W_{D_1} & W_{D_1} & W_{D_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & W_{D_{m-1}} & \cdots & 0 & W_{D_{m-1}} & 0 & \cdots & W_{D_{m-1}} & 0 \\ W_{D_m} & 0 & \cdots & 0 & W_{D_m} & 0 & \cdots & 0 & W_{D_m} \end{bmatrix}$$

其中：

$$\begin{cases} W_{D_0} = 1 \\ W_{D_1} = \alpha \\ W_{D_2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \\ W_{D_3} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} \\ \vdots \\ W_{D_m} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m-1)}{m!} \end{cases} \quad (3.18)$$

取一个 $7 \times 7$ 大小的八方向微分算子（Tiansi微分算子）对于非此八方向的数值为零。

$$\begin{bmatrix} W_{D_3} & 0 & 0 & W_{D_3} & 0 & 0 & W_{D_3} \\ 0 & W_{D_2} & 0 & W_{D_2} & 0 & W_{D_2} & 0 \\ 0 & 0 & W_{D_1} & W_{D_1} & W_{D_1} & 0 & 0 \\ W_{D_3} & W_{D_2} & W_{D_1} & 8W_{D_0} & W_{D_1} & W_{D_2} & W_{D_3} \\ 0 & 0 & W_{D_1} & W_{D_1} & W_{D_1} & 0 & 0 \\ 0 & W_{D_2} & 0 & W_{D_2} & 0 & W_{D_2} & 0 \\ W_{D_3} & 0 & 0 & W_{D_3} & 0 & 0 & W_{D_3} \end{bmatrix}$$

### 3.3 基于分数阶偏微分方程的图像去噪模型

#### 3.3.1 P-M模型

1990年, Perona和Malik提出了下列模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c(|\nabla u|^2)\nabla u), & \text{在 } (0, T) \times \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, & \text{在 } (0, T) \times \partial\Omega \text{ 上} \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), & \text{在 } \Omega \text{ 内} \end{cases} \quad (3.19)$$

其中,  $c(|\nabla u|^2)$ 为依赖图像的扩散率函数, 当 $c(|\nabla u|^2) \equiv 1$ 时, PM方程退化为热方程。通过定义适当的扩散率函数, PM模型可以在去噪的同时保护边缘等细节。PM方程是一个各向异性扩散方程, 也是分数阶微积分理论应用于图像处理的先河。尽管早期PM模型存在缺点, 但其意义是非常重要的。

#### 3.3.2 基于分数阶导数的正则模型

PM方程可以看作能量泛函欧拉方程:

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|\nabla u|)d\Omega, \quad (3.20)$$

其中,  $f(x) \geq 0$ 是一个增函数, 与扩散系数 $c$ 满足:

$$c(s) = \frac{f'(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \quad (3.21)$$

因此, 各向异性扩散被解释成求一个能量泛函极小化的能量耗散过程。

进一步, 考虑基于分数阶梯度的能量泛函:

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|D^{\alpha} u|)d\Omega \quad (3.22)$$

其中,  $D^{\alpha}$ 表示 $\alpha$ 阶梯度算子,  $D^{\alpha}u = (D_{x_1}^{\alpha}u, D_{x_2}^{\alpha}u)$ ,  $|D^{\alpha}u| = \sqrt{(D_{x_1}^{\alpha}u)^2 + (D_{x_2}^{\alpha}u)^2}$

若上述能量泛函有极小解 $u$ , 则可用变分求其欧拉方程。任取函数 $\eta(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , 令

$$\Phi(a) = E(u + a\eta) = \int_{\Omega} f(|D^{\alpha}u + aD^{\alpha}\eta|)dx \quad (3.23)$$

则  $a = 0$  定为  $\Phi(a)$  的极小点，故

$$\begin{aligned} 0 = \Phi'(0) &= \frac{d}{da} \int_{\Omega} f(|D^\alpha u + a D^\alpha \eta|) dx|_{a=0} \\ &= \int_{\Omega} (f'(|D^\alpha u|) \frac{D_{x_1}^\alpha u}{|D^\alpha u|} D_{x_1}^\alpha \eta + f'(|D^\alpha u|) \frac{D_{x_2}^\alpha u}{|D^\alpha u|} D_{x_2}^\alpha \eta) dx \\ &= \int_{\Omega} ((D_{x_1}^\alpha)^*(c(|D^\alpha u|^2) D_{x_1}^\alpha u) + (D_{x_2}^\alpha)^*(c(|D^\alpha u|^2) D_{x_2}^\alpha u)) \eta dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

对任意  $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  成立，其中， $(D_{x_i}^\alpha)^*$  为  $D_{x_i}^\alpha$  的共轭， $i = 1, 2$ 。故

$$(D_{x_1}^\alpha)^*(c(|D^\alpha u|^2) D_{x_1}^\alpha u) + (D_{x_2}^\alpha)^*(c(|D^\alpha u|^2) D_{x_2}^\alpha u) = 0 \quad (3.25)$$

即为 3.22 的 Euler-Lagrange 方程。求 3.22 的极小解可用最速下降法求解：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (D_x^\alpha)^*(c(|D^\alpha u|^2) D_x^\alpha u) + (D_y^\alpha)^*(c(|D^\alpha u|^2) D_y^\alpha u) \quad (3.26)$$

一般给上面方程 3.26 边界上为 0 的条件，即  $D^\alpha \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ ， $\mathbf{n}$  为  $\partial\Omega$  的单位外法向量，以原图像为初值，利用有限差分即可求解。

当  $\alpha = 1$  时，方程 3.26 就是 Perona-Malik 方程，当  $\alpha = 2$  时，方程 3.26 就是四阶各向异性扩散方程，当  $1 < \alpha < 2$  时，方程 3.26 是 Perona-Malik 方程和四阶各向异性扩散方程的插值。

### 3.3.3 数值计算

**步骤1** 设图像为  $u$ ，迭代次数为  $K$ ，时间步长为  $\Delta t$ 。令  $n = 0$ ,  $u_n = u$ ，计算  $u_n$  的二维 Fourier 变换，记作  $\hat{u}_n$ 。

**步骤2** 由 3.15 计算  $\alpha$  阶差分  $\tilde{D}_x^\alpha u_n$  和  $\tilde{D}_y^\alpha u_n$ 。

**步骤3** 计算  $h_{xn} = c(|\tilde{D}_x^\alpha u_n|^2) \tilde{D}_x^\alpha u_n$  和  $h_{yn} = c(|\tilde{D}_y^\alpha u_n|^2) \tilde{D}_y^\alpha u_n$ 。

**步骤4** 计算  $\hat{g}_n = K_1^* \circ F(h_{xn}) + K_2^* \circ F(h_{yn})$ 。

**步骤5** 计算  $\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n - \Delta t \cdot \hat{g}_n$ 。

若  $n = K$ ，计算  $\hat{u}_{n+1}$  的二维傅里叶逆变换，停止。否则， $n = n+1$

。

其中，时间步长取  $\Delta t = 4^{-\alpha}$ ，扩散函数取  $c(x) = \frac{1}{1+x}$ ，

$$K_1^* = \text{diag} \left( \text{conj} \left( \left( 1 - \exp \left( -\frac{2\pi j w_1}{m} \right) \right)^\alpha \exp \left( \frac{\alpha \pi j w_1}{m} \right) \right) \right) \quad (3.27)$$

$$K_2^* = \text{diag} \left( \text{conj} \left( \left( 1 - \exp \left( -\frac{2\pi j w_2}{m} \right) \right)^\alpha \exp \left( \frac{\alpha \pi j w_2}{m} \right) \right) \right) \quad (3.28)$$

### 3.4 仿真结果

lena图及添加高斯噪声椒盐噪声图



图 3.1: 分数阶平滑算子的对含高斯噪声lena图

利用分数阶积分算子平滑含高斯噪声的lena图，分数阶阶次依次为 $\alpha = 0.4, 0.5, 1, 1.5, 1.7, 2$ 。

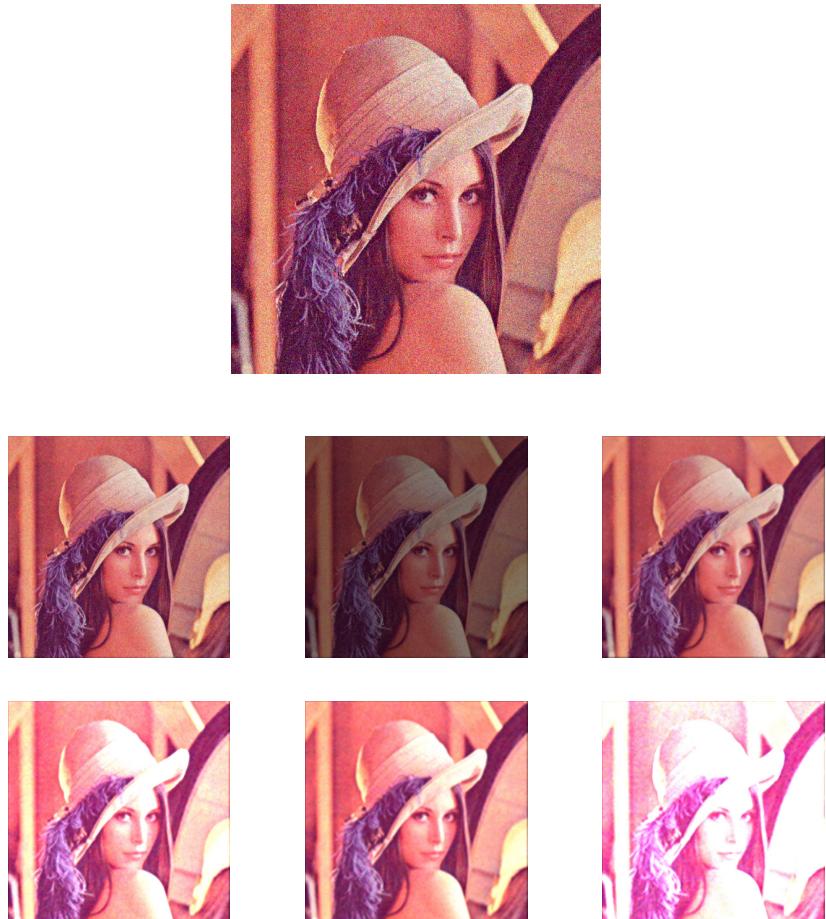


图 3.2: 分数阶平滑算子的对含高斯噪声lena图

利用分数阶积分平滑含椒盐噪声的lena图， 分数阶阶次依次为 $\alpha = 0.4, 0.5, 1, 1.5, 1.7, 2$ 。

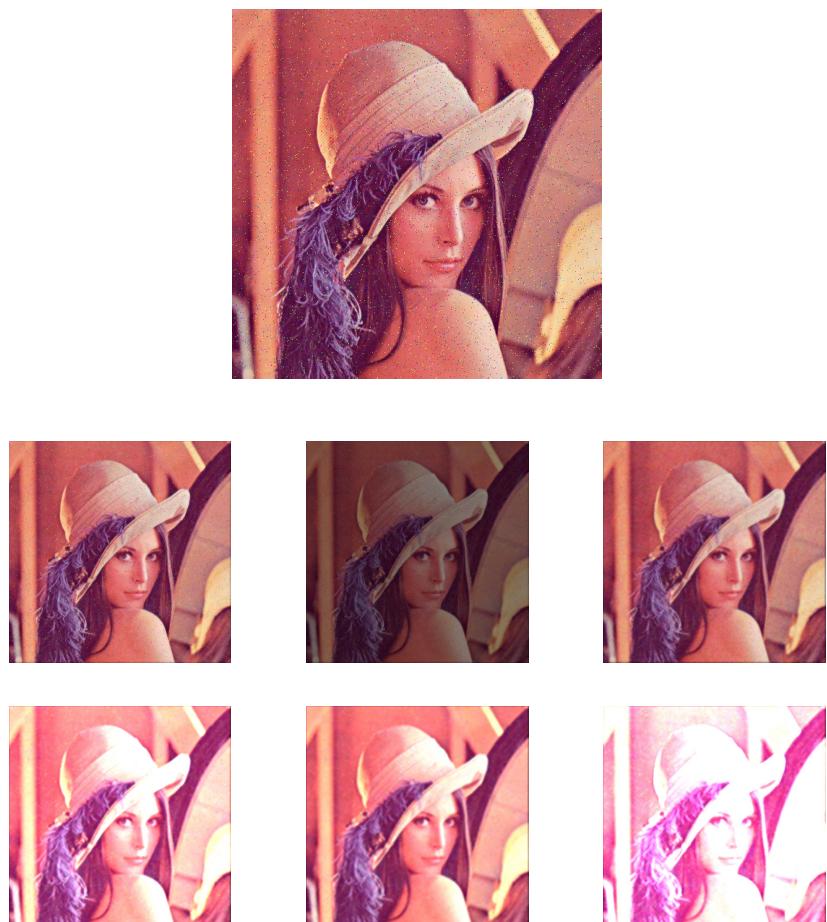


图 3.3: 分数阶平滑算子的对含椒盐噪声lena图

下面依次为lena图及添加了高斯噪声、椒盐噪声的lena图和它们所对应傅里叶频谱



图 3.4: lena图及添加高斯噪声、椒盐噪声和其所对应傅里叶频谱

下面为扩散方程含高斯噪声和椒盐的lena图迭代结果，分步阶次依次为 $\alpha = 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ 。考虑运行时间取迭代次数为7.



图 3.5: 分数阶平滑算子的对含高斯噪声lena图



图 3.6: 分数阶平滑算子的对含椒盐噪声lena图

## 4 边缘检测

图像边缘含有丰富信息，是图像中对象的最重要的特征之一，是图像分割、模式识别等许多处理中获得图像特征的重要属性。图像边缘检测和图像锐化类似，可以利用一阶导数极值（梯度算子）或者二阶导数的零点（Laplace算子）。只是在图像输出时，可以有多种选择，如二值图像输出（确定边缘位置）、给背景特定灰度值（研究边缘灰度变化）等等。

在本章中，给出边缘点的定义，直接给出常用的一阶和二阶及其他检测算子，对于分数阶微分检测算子，将构造较为简单的 $3 \times 3$ 的检测算子。

### 4.1 边缘点的定义

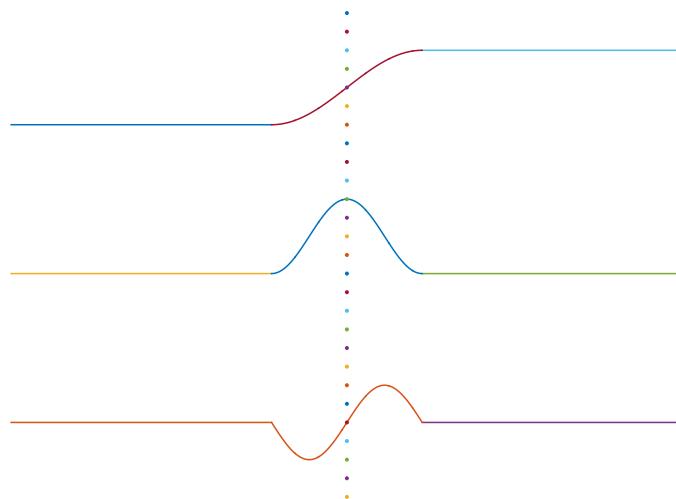


图 4.1：自上而下分别为曲线边缘和其一阶、二阶导数曲线

如上图所示：定义曲线的边缘点为曲线最陡的地方，对应一阶导数的极值，和二阶导数的零点。同理对于图像来说，图像的边缘在切面

意义上，等同于一维曲线的边缘点。因此可以用一阶梯度算子，和二阶Laplace算子及具有弱导数性质的分数阶微分算子进行检测。

## 4.2 一阶、二阶检测算子

常用一阶梯度检测算子：

算子名称	$G_x$	$G_y$
Roberts算子	$\begin{bmatrix} -1_{\Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0_{\Delta} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Prewitt算子	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0_{\Delta} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0_{\Delta} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Sobel算子	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0_{\Delta} & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0_{\Delta} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
Isotropic算子	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0_{\Delta} & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0_{\Delta} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$
Sobel $\pm 45^{\circ}$ 算子	$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0_{\Delta} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{-45^{\circ}}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0_{\Delta} & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{45^{\circ}}$

二阶Laplace检测算子：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4_{\Delta} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4_{\Delta} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8_{\Delta} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss-Laplace检测算子：

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & -4 \\ -4 & 8 & 24 & 8 & -4 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

### 4.3 基于分数阶微分的边缘检测模型

由3.16、3.17得，图像在 $x$ 负方向、 $y$ 正方向、 $\pm 45^\circ$ 方向的掩模算子

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a_\Delta & \frac{a^2-a}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2-a}{2} & 0 \\ 0 & -a_\Delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ x\text{负方向} & y\text{正方向} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{a^2-a}{2} \\ 0 & -a_\Delta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{a^2-a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -a_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 45^\circ & -45^\circ \end{array}$$

类似得到 $x$ 正方向、 $y$ 负方向、 $\pm 135^\circ$ 方向的掩模算子，将八个方向的掩模算子相加，得：

分数阶掩模

$$\begin{bmatrix} \frac{a^2-a+2}{2} & \frac{a^2-a+2}{2} & \frac{a^2-a+2}{2} \\ \frac{a^2-a+2}{2} & -8a_\Delta & \frac{a^2-a+2}{2} \\ \frac{a^2-a+2}{2} & \frac{a^2-a+2}{2} & \frac{a^2-a+2}{2} \end{bmatrix}$$

## 4.4 仿真结果

### 一阶梯度算子与二阶Laplace检测算子

利用一阶和二阶锐化算子锐化 $512 \times 512$ 的标准lena图，下列依次为lena图、lena灰度图、Roberts检测算子、Sobel检测算子、Prewitt检测算子、Laplace检测算子、LOG检测算子（Gauss-Laplace检测算子）：

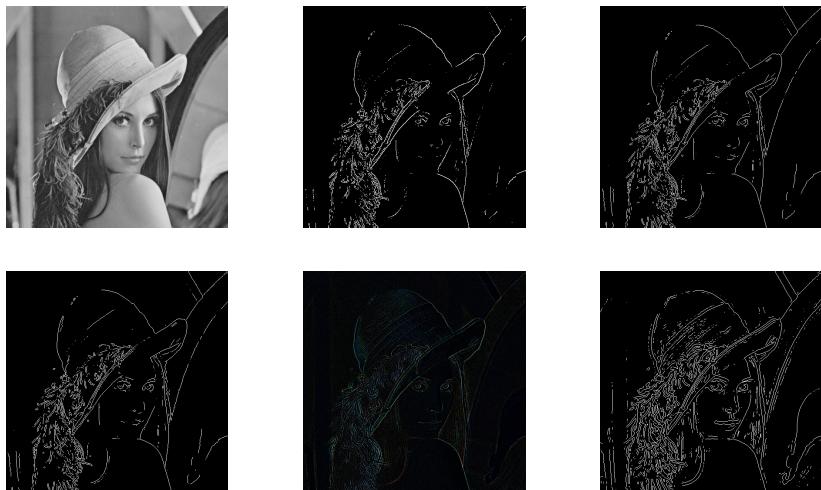


图 4.2: 一阶、二阶检测算子

下列依次为lena图、沿x方向Isotropic检测算子、沿y方向Isotropic检测算子、Sobe45°l检测算子、Sobe-45°l检测算子：

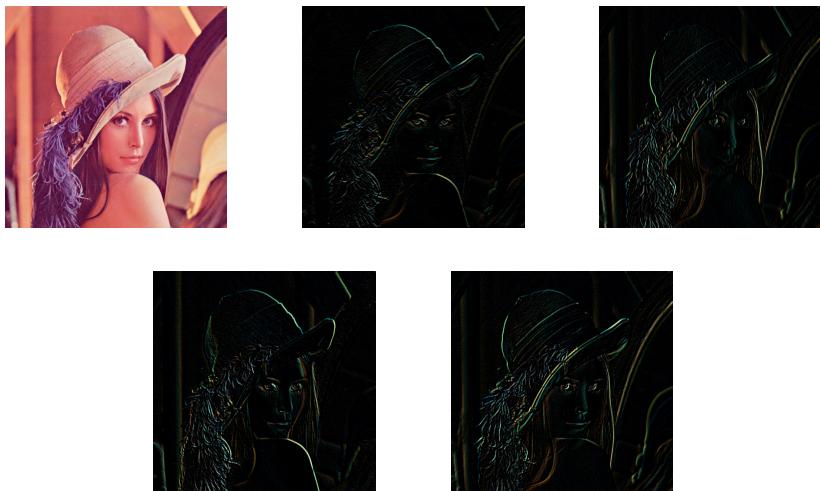


图 4.3: 沿不同方向检测算子

下列依次为lena图和四叶草图、 $\alpha = 1, 1.2, 1.5, 1.7, 2$

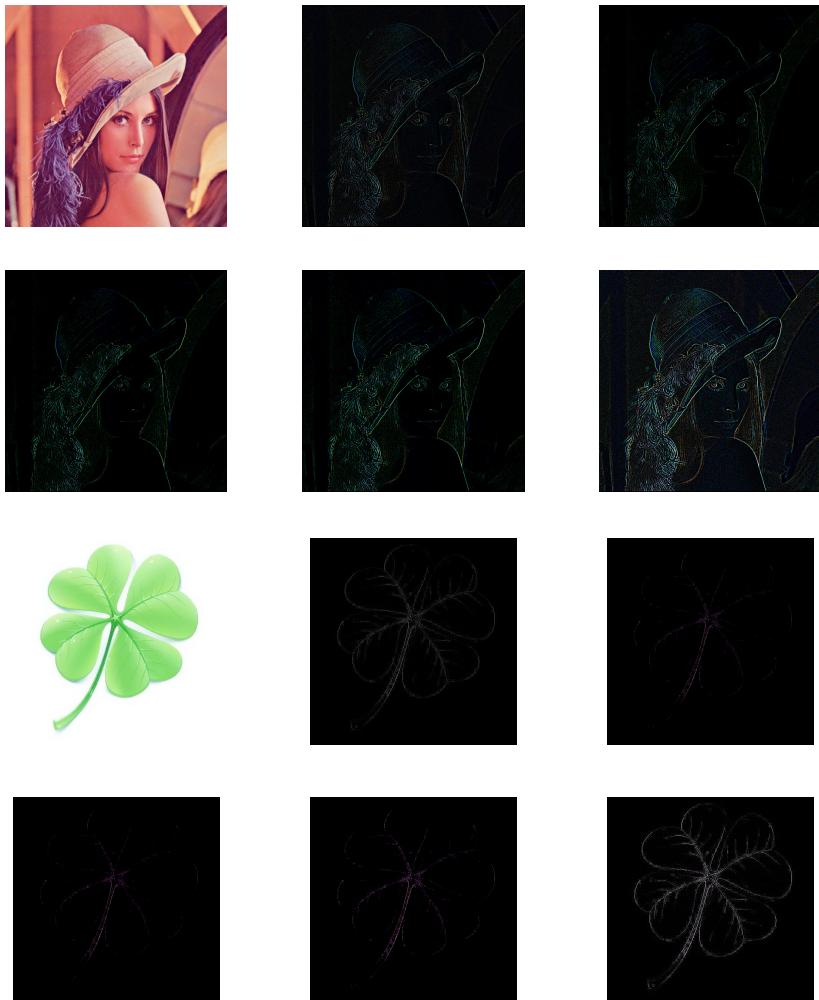


图 4.4: 分数阶检测算子

## 附录 A 相关代码

### A.1 频域分析

```
x=-2:0.01:2;  
a=0;%a分别取不同值。  
f=(abs(x)).^a.*exp(sign(x).*(i*a*pi/2));  
plot(x,f,'linewidth',1)  
hold on;  
  
...  
xlabel('频率w');ylabel('振幅d(w)');
```

### A.2 图像增强

```
I=imread('C:\Users\sgg\Desktop\素材\6.tiff');%获取lena图  
i=rgb2gray(I);%转为灰度图  
%一阶、二阶锐化算子滤波  
h1=[0 0 0;0 1;0 -1 0];  
i1=filter2(h1,i);  
h2=fspecial('sobel');  
i2=filter2(h2,i);  
h3=fspecial('prewitt');  
i3=filter2(h3,i);  
h4=[1 sqrt(2) 1;0 0 0;-1 -sqrt(2) -1];  
i4=filter2(h4,i);  
h5=fspecial('laplacian');  
i5=filter2(h5,i);
```

```

h6=fspecial('log');
i6=filter2(h6,i);
%%%%%%%%%%%%%
%不同阶次分数阶导数锐化算子
a=1;
a0=1;
a1=-a;
a2=-a*(-a+1)/2;
a3=-a*(-a+1)*(-a+2)/6;
h=[a3 0 0 a3 0 0 a3;
0 a2 0 a2 0 a2 0;
0 0 a1 a1 a1 0 0;
a3 a2 a1 8*a0 a1 a2 a3;
0 0 a1 a1 a1 0 0;
0 a2 0 a2 0 a2 0;
a3 0 0 a3 0 0 a3;];
f1 = imfilter(I,h);%滤波
figure;imshow(f1);%显示图像

```

### A.3 图像去噪

```

%分数阶积分平滑去噪
i1=imnoise(I,'gaussian');%添加高斯噪声
i2=imnoise(I,'salt & pepper', 0.02);%添加椒盐噪声
figure;imshow(i1);
figure;imshow(i2);
%构造分数阶平滑滤波器
a=1;
a0=1;
a1=a;

```

```
a2=a*(a+1)/2;
a3=a*(a+1)*(a+2)/6;
h=[a3 0 0 a3 0 0 a3;
0 a2 0 a2 0 a2 0;
0 0 a1 a1 a1 0 0;
a3 a2 a1 8*a0 a1 a2 a3;
0 0 a1 a1 a1 0 0;
0 a2 0 a2 0 a2 0;
a3 0 0 a3 0 0 a3;];
f1 = imfilter(i1,h/32);
figure;imshow(f1);
f2 = imfilter(i2,h/32);
figure;imshow(f2);
%快速傅里叶变换
j=fft2(i);
k=fftshift(j);
l=log(abs(k));
figure;imshow(l,[]);%显示傅里叶频谱
%扩散方程去噪
%迭代次数取7
%步长取 $4^{-\alpha}$ 
%扩散函数为 $c(x) = \frac{1}{1+x}$ 
J=fft2(i);
m =size(I,1);
n =size(I,2);
dx=zeros(m ,n);
dy=zeros(m ,n);
Dx=zeros(m ,n);
Dy=zeros(m ,n);
hx=zeros(m ,n);
hy=zeros(m ,n);
```

```
gg=zeros(m ,n);
alpha=1.5;% $\alpha$ 取1到2之间1, 1.25, 1.5,1.75, 2
k=7;
delta=4 $\hat{(-\alpha)}$ ;
for j=1:k
for p=1:m
for q=1:n
dx(p,q)=(1-exp(-sqrt(-1)*2*pi*p/m)) $\hat{\alpha}$ *exp(sqrt(-1)*pi*p* $\alpha$ /m)*J(p,q);
dy(p,q)=(1-exp(-sqrt(-1)*2*pi*q/m)) $\hat{\alpha}$ *exp(sqrt(-1)*pi*q* $\alpha$ /m)*J(p,q);
end
end
Dx=ifft2(dx);
Dy=ifft2(dy);
for p=1:m
for q=1:n      hh=1/(1+Dx(p,q) $\hat{2}$ +Dy(p,q) $\hat{2}$ );
hx(p,q)=hh*Dx(p,q);
hy(p,q)=hh*Dy(p,q);
end
end
hx=fft2(hx);
hy=fft2(hy);
for p=1:m
for q=1:n
gg(p,q)=conj((1-exp(-sqrt(-1)*2*pi*p/m)) $\hat{\alpha}$ *exp(sqrt(-1)*pi*p* $\alpha$ /m))
*hx(p,q)+conj((1-exp(-sqrt(-1)*2*pi*q/m)) $\hat{\alpha}$ *exp(sqrt(-1)*pi*q* $\alpha$ /m))*hx(
J(p,q)=J(p,q)-delta*gg(p,q);
end
end
end
II=ifft2(J);
imshow(II,[]);
```

## A.4 边缘检测

```
%一阶、二阶边缘检测  
bw1=edge(i,'roberts');  
bw2=edge(i,'sobel'); bw3=edge(i,'prewitt');  
bw4=edge(i,'log');  
bw7 = imfilter(I,[-1 -sqrt(2) -1;0 0 0;1 sqrt(2) 1]/2,'replicate');  
bw6 = imfilter(I,[-1 0 1;-sqrt(2) 0 sqrt(2);-1 0 1]/2,'replicate');  
z45 = imfilter(I,[0 -1 -2;1 0 -1;2 1 0]/2,'replicate');  
f45 = imfilter(I,[-2 -1 0;-1 0 1;0 1 2]/2,'replicate');  
bw5 = imfilter(I,[1 1 1;1 -8 1;1 1 1]/2,'replicate');  
%3*3八方向分数阶微分检测算子  
a=0.5;  
b=(a*a-a+2)/2;  
h=[b b b;b -8*a b;b b b];  
fr1 = imfilter(I,h/2);  
imshow(fr1);
```

## 附录 B 翻译

## Applications of Fractional Calculus

Mehdi Dalir

Department of Mathematics

Faculty of Sciences

Islamic Azad University of Varamin(Pishva)

Varamin-Tehran-Iran

Majid Bashour

Department of Mathematics

Faculty of Sciences

Islamic Azad University of Varamin(Pishva)

Varamin-Tehran-Iran

[majidbashour@yahoo.com](mailto:majidbashour@yahoo.com)

### Abstract

Different definitions of fractional derivatives and fractional Integrals (Differintegrals) are considered. By means of them explicit formula and graphs of some special functions are derived. Also we review some applications of the theory of fractional calculus.

**Mathematics Subject Classification:** 26A33

**Keywords:** fractional derivative, fractional Integral, differintegrals

## 1 Introduction

Fractional calculus is a field of mathematics study that grows out of the traditional definitions of calculus integral and derivative operators in much the same way fractional exponents is an outgrowth of exponents with integer value.

The concept of fractional calculus( fractional derivatives and fractional integral) is not new. In 1695 *L'Hospital* asked the question as to the meaning of  $d^n y/dx^n$  if  $n = 1/2$ ; that is " what if  $n$  is fractional?". *Leibniz* replied that "  $d^{1/2} x$  will be equal to  $x\sqrt{dx : x}$ " .

It is generally known that integer-order derivatives and integrals have clear physical and geometric interpretations. However, in case of fractional-order integration and differentiation, which represent a rapidly growing field both in

theory and in applications to real world problems, it is not so. Since the appearance of the idea of differentiation and integration of arbitrary (not necessary integer) order there was not any acceptable geometric and physical interpretation of these operations for more than 300 year. In [11], it is shown that geometric interpretation of fractional integration is "Shadows on the walls", and its Physical interpretation is "Shadows of the past".

In the last years has found use in studies of viscoelastic materials, as well as in many fields of science and engineering including fluid flow, rheology, diffusive transport, electrical networks, electromagnetic theory and probability.

In this paper we consider different definitions of fractional derivatives and integrals (differintegrals). For some elementary functions, explicit formula of fractional derivative and integral are presented. Also we present some applications of fractional calculus in science and engineering.

## 2 Different Definitions

In this section we consider different definitions of fractional calculus.

### 1. L. Euler(1730):

Euler generalized the formula

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$$

by using of the following property of Gamma function,

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)\cdots(m-n+1)\Gamma(m-n+1)$$

to obtain

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}.$$

Gamma function is defined as follows.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Re(z) > 0$$

### 2. J. B. J. Fourier (1820 - 1822):

By means of integral representation

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp$$

he wrote

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + n\frac{\pi}{2}) dp,$$

### 3. N. H. Abel (1823- 1826):

Abel considered the integral representation  $\int_0^x \frac{s'(\eta)d\eta}{(x-\eta)^\alpha} = \psi(x)$  for arbitrary  $\alpha$  and then wrote

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha}\psi(x)}{dx^{-\alpha}}.$$

### 4. J. Liouville (1832 - 1855):

- I. In his first definition, according to exponential representation of a function  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$ , he generalized the formula  $\frac{d^m e^{ax}}{dx^n} = a^m e^{ax}$  as

$$\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}$$

II. Second type of his definition was *Fractional Integral*

$$\int_x^\mu \Phi(x) dx^\mu = \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \int_0^\infty \Phi(x+\alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$$

$$\int_x^\mu \Phi(x) dx^\mu = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \Phi(x-\alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$$

By substituting of  $\tau = x + \alpha$  and  $\tau = x - \alpha$  in the above formulas respectively, he obtained

$$\int_x^\mu \Phi(x) dx^\mu = \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \int_x^\infty (\tau-x)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau$$

$$\int_x^\mu \Phi(x) dx^\mu = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x (x-\tau)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau.$$

III. Third definition, includes *Fractional derivative*,

$$\begin{aligned}\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} &= \frac{(-1)^\mu}{h^\mu} \left( F(x) \frac{\mu}{1} F(x+h) + + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} F(x+2h) - \dots \right) \\ \frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} &= \frac{1}{h^\mu} \left( F(x) \frac{\mu}{1} F(x-h) + + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} F(x-2h) - \dots \right).\end{aligned}$$

**5. G. F. B. Riemann (1847 - 1876):**

His definition of Fractional Integral is

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \psi(t)$$

**6. N. Ya. Sonin (1869), A. V. Letnikov (1872), H. Laurent (1884), N. Nekrasove (1888), K. Nishimoto (1987-):**

They considered to the Cauchy Integral formula

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

and substituted  $n$  by  $\nu$  to obtain

$$D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c^{x^+} \frac{f(t)}{(t-z)^{\nu+1}} dt.$$

**7. Riemann-Liouville definition:**

The popular definition of fractional calculus is this which shows joining of two previous definitions.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (n-1 \leq \alpha < n)$$

**8. Grünwald-Letnikov:**

This is another joined definition which is sometimes useful.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh)$$

## 9. M. Caputo (1967):

The second popular definition is

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n - 1 \leq \alpha < n)$$

## 10. K. S. Miller, B. Ross (1993):

They used differential operator  $D$  as

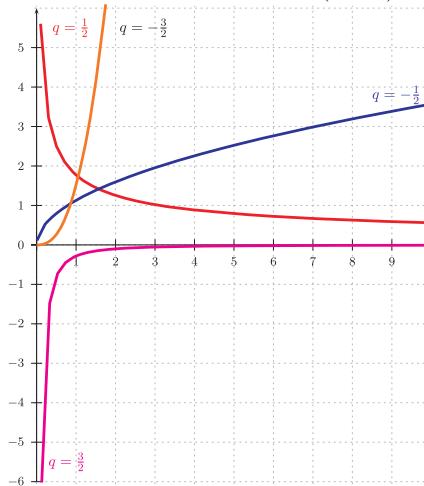
$$D^{\bar{\alpha}} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \cdots D^{\alpha_n} f(t), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

which  $D^{\alpha_i}$  is Riemann-Liouville or Caputo definitions.

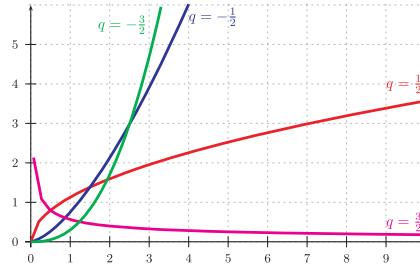
### 3 Fractional derivative of Some special Functions

In this section we give more explicit formulas of fractional derivative and integral of some special functions and then consider to there graph.

1. Unit function: For  $f(x) = 1$  we have  $\frac{d^q 1}{dx^q} = \frac{x^{-q}}{\Gamma(1-q)}$  for all  $q$

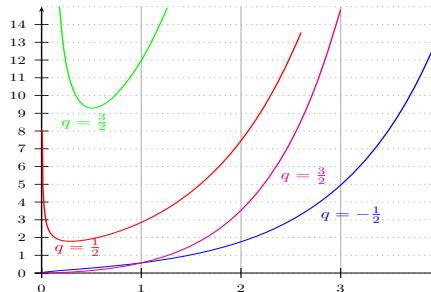


2. **Identity function:** For  $f(x) = x$  we have  $\frac{d^q x}{dx^q} = \frac{x^{1-q}}{\Gamma(2-q)}$

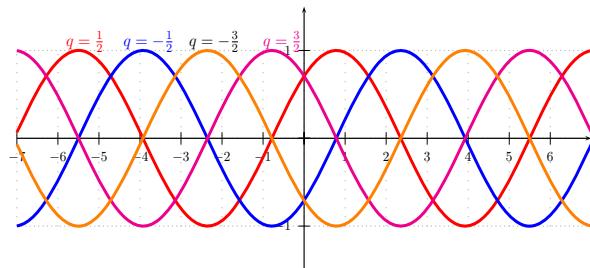


3. **Exponential function:** Fractional differintegral of the function  $f(x) = e^x$  is

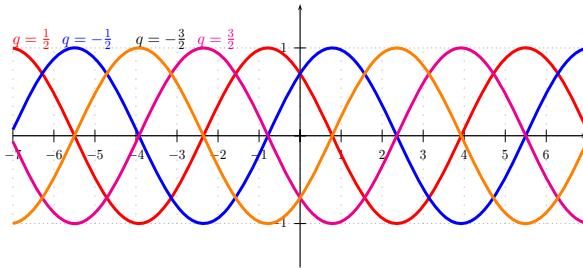
$$\frac{d^q e^{\pm x}}{dx^q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)}$$



4. **Sin function:** If  $f(x) = \sin x$  then  $\frac{d^q \sin(x)}{dx^q} = \sin\left(x + \frac{q\pi}{2}\right)$



5. **Cosin function:** If  $f(x) = \cos x$  then  $\frac{d^q \cos(x)}{dx^q} = \cos\left(x + \frac{q\pi}{2}\right)$



## 4 Applications of Fractional Calculus

The basic mathematical ideas of fractional calculus (integral and differential operations of noninteger order) were developed long ago by the mathematicians Leibniz (1695), Liouville (1834), Riemann (1892), and others and brought to the attention of the engineering world by Oliver Heaviside in the 1890s, it was not until 1974 that the first book on the topic was published by Oldham and Spanier. Recent monographs and symposia proceedings have highlighted the application of fractional calculus in physics, continuum mechanics, signal processing, and electromagnetics. Here we state some of applications.

### 1. First one

It may be important to point out that the first application of fractional calculus was made by Abel(1802-1829) in the solution of an integral equation that arises in the formulation of the *tautochronous problem*. This problem deals with the determination of the shape of a frictionless plane curve through the origin in a vertical plane along which a particle of mass  $m$  can fall in a time that is independent of the starting position. If the sliding time is constant  $T$ , then the Abel integral equation(1823) is

$$\sqrt{2g}T = \int_0^\eta (\eta - y)^{-\frac{1}{2}} f'(y) dy,$$

where  $g$  is the acceleration due to gravity,  $(\xi, \eta)$  is the initial position and  $s = f(y)$  is the equation of the sliding curve. It turns out that this equation is equivalent to the fractional integral equation

$$T\sqrt{2g} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) {}_0D_\eta^{-\frac{1}{2}} f'(\eta)$$

Indeed, Heaviside gave an interpretation of  $\sqrt{p} = D^{\frac{1}{2}}$  so that  ${}_0D_t^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ .

## 2. Electric transmission lines

During the last decades of the nineteenth century, Heaviside successfully developed his operational calculus without rigorous mathematical arguments. In 1892 he introduced the idea of fractional derivatives in his study of electric transmission lines. Based on the symbolic operator form solution of heat equation due to Gregory(1846), Heaviside introduced the letter  $p$  for the differential operator  $\frac{d}{dt}$  and gave the solution of the diffusion equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 p$$

for the temperature distribution  $u(x, t)$  in the symbolic form

$$u(x, t) = A \exp(ax\sqrt{p}) + B \exp(-ax\sqrt{p})$$

in which  $p \equiv \frac{d}{dx}$  was treated as constant, where  $a$ ,  $A$  and  $B$  are also constant.

## 3. Ultrasonic wave propagation in human cancellous bone

N. Sebaa, Z. E. A. Fellah, W. Lauriks, C. Depollier[12]

Fractional calculus is used to describe the viscous interactions between fluid and solid structure. Reflection and transmission scattering operators are derived for a slab of cancellous bone in the elastic frame using Blot's theory. Experimental results are compared with theoretical predictions for slow and fast waves transmitted through human cancellous bone samples

## 4. Modeling of speech signals using fractional calculus

Assaleh, K.; Ahmad, W.M.[1]

In this paper, a novel approach for speech signal modeling using fractional calculus is presented. This approach is contrasted with the celebrated Linear Predictive Coding (LPC) approach which is based on integer order models. It is demonstrated via numerical simulations that by using a few integrals of fractional orders as basis functions, the speech signal can be modeled accurately.

## 5. Modeling the Cardiac Tissue Electrode Interface Using Fractional Calculus

R.L. Magin [7]

The tissue electrode interface is common to all forms of biopotential recording (e.g., ECG, EMG, EEG) and functional electrical stimulation (e.g., pacemaker, cochlear implant, deep brain stimulation). Conventional lumped element circuit models of electrodes can be extended by generalization of the order of differentiation through modification of the

defining current-voltage relationships. Such fractional order models provide an improved description of observed bioelectrode behaviour, but recent experimental studies of cardiac tissue suggest that additional mathematical tools may be needed to describe this complex system.

#### 6. Application of Fractional Calculus to the sound Waves Propagation in Rigid Porous Materials

Z. E. A. Fellah, C.Depollier[3]

The observation that the asymptotic expressions of stiffness and damping in porous materials are proportional to fractional powers of frequency suggests the fact that time derivatives of fractional order might describe the behaviour of sound waves in this kind of materials, including relaxation and frequency dependence.

#### 7. Using Fractional Calculus for Lateral and Longitudinal Control of Autonomous Vehicles

J.I. Suárez , B.M. Vinagre , A.J. Calderón , C.A. Monje and Y.Q. Chen[14]

Here it is presented the use of Fractional Order Controllers (FOC) applied to the path-tracking problem in an autonomous electric vehicle. A lateral dynamic model of a industrial vehicle has been taken into account to implement conventional and Fractional Order Controllers. Several control schemes with these controllers have been simulated and compared.

#### 8. Application of fractional calculus in the theory of viscoelasticity

E. Soczkiewicz[13]

The advantage of the method of fractional derivatives in theory of viscoelasticity is that it affords possibilities for obtaining constitutive equations for elastic complex modulus of viscoelastic materials with only few experimentally determined parameters. Also the fractional derivative method has been used in studies of the complex moduli and impedances for various models of viscoelastic substances.

#### 9. Fractional differentiation for edge detection

B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, Ch. Ceyral[9]

In image processing, edge detection often makes use of integer-order differentiation operators, especially order 1 used by the gradient and order 2 by the Laplacian. This paper demonstrates how introducing an edge detector based on non-integer (fractional) differentiation can improve the criterion of thin detection, or detection selectivity in the case of parabolic luminance transitions, and the criterion of immunity to noise, which can be interpreted in term of robustness to noise in general.

**10. Wave propagation in viscoelastic horns using a fractional calculus rheology model**

Margulies, Timothy[8]

The complex mechanical behavior of materials are characterized by fluid and solid models with fractional calculus differentials to relate stress and strain fields. Fractional derivatives have been shown to describe the viscoelastic stress from polymer chain theory for molecular solutions. Here the propagation of infinitesimal waves in one dimensional horns with a small cross-sectional area change along the longitudinal axis are examined. In particular, the linear, conical, exponential, and catenoidal shapes are studied. The wave amplitudes versus frequency are solved analytically and predicted with mathematical computation. Fractional rheology data from Bagley are incorporated in the simulations. Classical elastic and fluid “Webster equations” are recovered in the appropriate limits. Horns with real materials that employ fractional calculus representations can be modeled to examine design trade-offs for engineering or for scientific application.

**11. Application of Fractional Calculus to Fluid Mechanics**

Vladimir V. Kulish and José L. Lage[4]

Application of fractional calculus to the solution of time-dependent, viscous-diffusion fluid mechanics problems are presented. Together with the Laplace transform method, the application of fractional calculus to the classical transient viscous-diffusion equation in a semi-infinite space is shown to yield explicit analytical (fractional) solutions for the shear-stress and fluid speed anywhere in the domain. Comparing the fractional results for boundary shear-stress and fluid speed to the existing analytical results for the first and second Stokes problems, the fractional methodology is validated and shown to be much simpler and more powerful than existing techniques.

## References

- [1] K. Assaleh; W.M. Ahmad,*Modeling of speech signals using fractional calculus* 9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications, 2007. ISSPA 2007. 12-15 Feb. 2007 Page(s):1 - 4
- [2] J. F. Douglas, Some applications of fractional calculus to polymer science, Advances in chemical physics, Vol 102, John Wiley & Sons, Inc.

- [3] Z. E. A. Fellah, C. Depollier, *Application of fractional calculus to the sound waves propagation in rigid porous materials: Validation via ultrasonic measurement*, Acta Acustica vol.88(2002)34-39
- [4] V. V. Kulish and José L. Lage *Application of Fractional Calculus to Fluid Mechanics* J. Fluids Eng. – September 2002 – Volume 124, Issue 3, 803 (4 pages)
- [5] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, INC. 1974
- [6] R. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering, Part1*, Crit Rev Biomed Eng 2004; 32(1):1-104
- [7] R. L. Magin, *Modeling the Cardiac Tissue Electrode Interface Using Fractional Calculus* Journal of Vibration and Control, Vol. 14, No. 9-10, 1431-1442 (2008)
- [8] Margulies, Timothy *Wave propagation in viscoelastic horns using a fractional calculus rheology model* Acoustical Society of America Journal, Volume 114, Issue 4, pp. 2442-2442 (2003).
- [9] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, Ch. Ceyral, *Fractional differentiation for edge detection* Fractional Signal Processing and Applications Volume 83, Issue 11, Pages 2285-2480 (November 2003)
- [10] J. Munkhammar, Riemann - Liouville Fractional Derivatives and the Taylor - Riemann Series, U. U. D. M. Project report 2004:7
- [11] I. Podlubny, *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, fractional calculus and applied analysis, Vol 5, Number 4(2002)
- [12] N. Sebaa, Z. E. A. Fellah, W. Lauriks, C. Depollier, *Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone*, Signal Processing archive Volume 86 , Issue 10 (2006)2668 - 2677
- [13] E. Soczkiewicz, *Application of fractional calculus in the theory of viscoelasticity* Molecular and Quantum Acoustics Vol.23,397-404(2002)
- [14] J.I. Suárez , B.M. Vinagre , A.J. Calderón , C.A. Monje and Y.Q. Chen *Using Fractional Calculus for Lateral and Longitudinal Control of Autonomous Vehicles* Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin / Heidelberg, Volume 2809/2004

- [15] B. M. Vinagre and YangQuan Chen, Fractional Calculus Applications In Automatic Control and Robotics, 41st IEEE Conference on decision and control Tutorial Workshop#2, Las Vegas, Desember 2002

**Received:** October, 2009

# 分数阶微积分的应用

Mehdi Dalir

Majid Bashour

2015 年 6 月 18 日

## 摘要

首先，我们总结了不同分数阶微分和分数阶积分的定义；其次，由不同的定义，我们给出了一些常见函数的分数阶微分、积分公式和相应的图像；最后，我们列出了一些分数阶微积分理论的应用。

**关键字：** 分数阶微分、分数阶积分、微积分算子

## 1 引言

分数阶微积分是将整数阶微分、积分定义的指数由整数值扩展到分数值的一门数学研究，可以看作传统整数阶微积分的推广。分数阶微积分（分数阶微分、分数阶积分）的概念并不新颖，早在 1965 年，*L'Hôpital* 曾写信给 Leibniz，对于  $\frac{d^n y}{d^n x}$  当  $n = \frac{1}{2}$  时，即取分数时，代表什么含义。Leibniz 回复他可以将  $d^{1/2}x$  看成  $x\sqrt{dx : x}$ 。

通常整数阶微分、积分都有明确的物理和几何意义，以此类推，分数阶积分和微分在理论研究和在现实问题的应用上应该有急速的发展，然而事实并非如此。因为在过去的 300 多年里，没有出现任何有关于任意阶（不一定为整数）微分和积分可以接受的物理几何解释。在文献 [11] 中指出，分数阶积分的几何解释是“墙上的影子”，物理解释是“过去的影子”。在过去的几年中已经将分数阶微积分应用在粘弹性材料研究中，同时运用在许多科学和工程领域，如在流体学、流变学、了、渗透扩散、电网、电磁场和概率。

在本文中，我们考虑不同的微分和积分（微积分算子）定义。给出了一些基本函数的分数阶微分和积分公式。此外，我们总结了目前分数阶微积分在科学和工程上的一些应用。

## 2 不同的分数阶微积分定义

在这一节我们给出分数阶微积分的不同定义。

### 1. L.Euler (1730)

欧拉用下面伽马函数

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)\cdots(m-n+1)\Gamma(m-n+1)$$

将导数公式

$$\frac{d^n x^m}{x^n} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$$

推广得

$$\frac{d^\alpha x^m}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}x^{m-\alpha}$$

其中伽马函数定义如下。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

### 2. J.B.J.Fourier (1820-1822)

已知傅里叶积分公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp$$

他给出

$$\frac{d^\alpha f(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + \alpha \frac{\pi}{2}) dp$$

### 3. N.H.Abel (1832-1826)

考虑积分  $\int_0^x \frac{s'(\eta)}{(x-\eta)^\alpha} d\eta = \phi(x)$ , 故定义  $\phi(x)$  的任意  $\alpha$  阶导数为

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha} \phi(x)}{dx^{-\alpha}}$$

### 4. J.Liouville (1832-1855)

1. 在他的第一个定义里, 考虑一个函数的指数展开式  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$  他由  $\frac{d^m e^{ax}}{dx^m} = a^m e^{ax}$  定义分数阶导数

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x}$$

2. 第二种定义是分数阶积分

$$\int^{\alpha} \Phi(x) dx^{\alpha} = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \Phi(x + \tau) \tau^{\alpha-1} d\tau$$

$$\int^{\alpha} \Phi(x) dx^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \Phi(x - \tau) \tau^{\alpha-1} d\tau$$

分别用  $\mu = x + \tau$  和  $\mu = x - \tau$  代入上面的公式, 得

$$\int^{\alpha} \Phi(x) dx^{\alpha} = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (\mu - x)^{\alpha-1} \Phi(\mu) d\mu$$

$$\int^{\alpha} \Phi(x) dx^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x - \mu)^{\alpha-1} \Phi(\mu) d\mu$$

3. 第三种定义, 包括分数阶微分

$$\frac{d^{\alpha} F(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha}}{h^{\alpha}} [F(x) \frac{\alpha}{1} F(x+h) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} F(x+2h) + \dots]$$

$$\frac{d^{\alpha} F(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{1}{h^{\alpha}} [F(x) \frac{\alpha}{1} F(x-h) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} F(x-2h) + \dots]$$

### 5. G.F.B.Riemann (1847-1876)

他定义分数阶积分为

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \psi(t)$$

6. N.Ya.Sonin(1869), A.V.Letnitov(1872), H.Laurent(1884), N.Nekrasove (1888) , K.Nishimoto (1987)

他们考虑到柯西积分公式:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

用  $\alpha$  替换  $n$  得

$$D^{\alpha} f(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_c^{x^+} \frac{f(t)}{(t-z)^{\alpha+1}} dt$$

### 7. Riemann-Liouville 定义

这是最常用的微积分定义, 上上面两种定义的结合

$${}_a^R D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, n-1 \leq \alpha < n$$

### 8. Grünwald-Letnikov 定义

这是另一个比较常用的定义

$${}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh)$$

## 9. M.Caputo 定义 (1967)

第二种常用的定义

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, n-1 \leq \alpha < n$$

## 10. K.S.Miller, B.Ross(1933)

对不同的微积分算子  $D$  有

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

其中  $D^{\alpha_i}$  是 Riemann-Liouville 或者 Caputo 定义。

# 3 一些特殊函数的分数阶微分

在这一节里，我们给出了一些特殊函数的分数阶微分公式并给出相应的图像。

## 1. 常函数

对任意  $\alpha$ ， $f(x) = 1$  的任意  $\alpha$  阶导数为  $\frac{d^\alpha 1}{dx^\alpha} = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ 。

…此处有图…

## 2. 恒等函数

$f(x) = x$  的任意  $\alpha$  阶导数为  $\frac{d^\alpha x}{dx^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ 。

…此处有图…

## 3. 指数函数

$f(x) = e^x$  的任意  $\alpha$  阶导数为

$$\frac{d^\alpha e^x}{dx^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

。

…此处有图…

## 4. 正弦函数

若  $f(x) = \sin(x)$ ，则  $\frac{d^\alpha \sin(x)}{dx^\alpha} = \sin(x + \frac{\alpha\pi}{2})$ 。

…此处有图…

## 5. 余弦函数

若  $f(x) = \cos(x)$ ，则  $\frac{d^\alpha \cos(x)}{dx^\alpha} = \cos(x + \frac{\alpha\pi}{2})$ 。

…此处有图…

## 4 分数阶微积分的应用

分数阶微积分（非整数阶微分和积分）在基础数学的探索进行了很长时间，数学家 Leibniz (1695), Liouville (1834), Riemann (1892) 及其他一些数学家都曾研究过分数阶微积分。到 19 世纪 90 年代，Oliver Heaviside 将其因为工程领域。直到 1974 年，Oldham 和 Spanier 才出版了第一本关于分数阶微积分的书。最近，一些专题论文和研讨会的发表、召开，进一步强调了分数阶微积分在物理学、连续介质力学、信号处理和电磁学中的应用。在这里，我们总结分数阶微积分的一些应用。

### 1. 首先

需要指出，分数阶微积分的第一个应用，是 Abel(1802-1829) 将其用于解决等时问题的积分公式。这个问题是关于一个质量为  $m$  的粒子，在一段时间里，垂直通过一无摩擦平面，其原点和起始点相互独立。若令滑动时间为常数  $T$ ，则 Abel 积分方程为 (1823)

$$\sqrt{2gT} = \int_0^\eta (\eta - y) f'(y) dy$$

其中  $g$  为重力加速度，初始位置为  $(\xi, \eta)$ ，滑动曲线方程为  $s = f(y)$ 。可以证明这个方程等同于一个分数阶积分方程。

$$\sqrt{2gT} = \Gamma(\frac{1}{2}) {}_0D_\eta^{-\frac{1}{2}} f'(\eta)$$

事实上，Heaviside 给出了一个解释， $\sqrt{p} = D^{\frac{1}{2}}$ ，故  ${}_0D_t^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ 。

### 2. 输电线路

在过去的 19 世纪的几十年里，Heaviside 没有严格数学证明的成功发展了他的算子分析。在 1882 年，他将分数阶微积分思想引入到输电线路的研究中。基于 Gregory(1846) 解决热方程的符号算子，Heaviside 引入了  $p$  阶微分算子  $D$  解扩散方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 p$$

$u(x, t)$  为温度分布函数。

$$u(x, t) = A \exp(ax\sqrt{p}) + B \exp(-ax\sqrt{p})$$

其中  $p = \frac{d}{dx}$  看作一个常数， $a, A, B$  也为常数。

...

## 参考文献

- [1] 谢凤英. 数字图像处理及应用. 电子工业出版社, 北京, 2014.6.
- [2] 朱虹. 数字图像处理基础与应用. 清华大学出版社, 北京, 2013.1.
- [3] 冯象初, 王卫卫. 图像处理的变分和偏微分方程方法. 科学出版社, 北京, 2009.
- [4] Mehdi Dalir, Majid Bashour. **Applications of Fractional Calculus**. *Applied Mathematical Sciences*, Vol.4, no.21, 1021-1032, 2010.
- [5] Stanislas Larnier, Roberto Mecca . **Fractional-order Diffusion for Image Reconstruction**.
- [6] 张慧琛. 分数阶微积分的一些性质及证明. 2010.
- [7] 王在华. 分数阶微积分:描述记忆特性与中间过程的数学工具. 2011.
- [8] 黄果, 许黎, 蒲亦非 . 分数阶微积分在图像处理中的研究综述 . 计算机应用研究, Vol.29, no.2, 414-420, 2012.
- [9] 陈炳权, 刘宏立, 孟凡斌 . 数字图像处理技术的现状及其发展方向 . 吉林大学学报, 2015.
- [10] 卢洋 . 分数阶微分应用于图像边缘检测的研究 . 2009.
- [11] 官茜. 基于分数阶偏微分方程的图像去噪算法研究 . 2014 .
- [12] 王琳倩. 分数阶微积分在图像处理中的研究. 2013.
- [13] 白键 . 脊波、曲波线和偏微分方程在图像处理中的算法研究 . 2007.
- [14] Jiang Bai , Xiang-Chu Feng . **Fractional-Order Anisotropic Diffusion for Image Denoising** . *IEEE transactions on image processing*, Vol.16, no.10, pp.2492-2502, 2007 .

- [15] B.Mathieu, P.Melchior, A.Oustaloup, Ch.Ceyral . **Fractional differentiation for edge detection** . *Signal Processing*, 2421-2432, 2003 .
- [16] 杨迎春, 桂志国, 李化奇, 李晓岩 . 基于分数阶导数的自适应各向异性扩散图像去噪模型 . 中北大学学报, Vol.32, no.4, 512-517, 2011 .
- [17] Pietro Perona , Jitendra Malik . **Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion**. *IEEE transaction on analysis and machine intelligence*, Vol.12, no.7, 629-639, 1990 .
- [18] Pedram sGhamisi, Micael S.Couceiro , Jon Atli Benediktsson, Nuno M.F. Ferreira . **An efficient method for segmentation of images based on fractional calculus and natural selection**. *Expert Systems with Applications*, 12407-12417, 2012 .
- [19] Ibrahima N'Doye, Mohamed Darouach, Holger Voos . **Observer-Based Approach for fractional-Order Chaotic Synchronization and Communication**. *2013 European Control Conference*, 4281-4286, 2013 .

## 致 谢

值此论文完成之际，谨在此向多年来给予我关心和帮助的老师、同学、朋友和家人表示衷心的感谢！

特别感谢我的指导老师白占兵老师对我的帮助，和学院所有老师对我的传道授业解惑之恩。

...

谨把本文献给我最亲爱的家人！