线性代数-13

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 14 日

回顾

向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, $B: \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$, $B = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A)$.

回顾

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.

回顾

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\leq R(A)$.

回顾

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$.

回顾

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$.

回顾

向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, $B: \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$, $B = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = m$, 列满秩.

回顾

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$, 列满秩.
- 部分向量组线性相关 $\Rightarrow$ 整体向量组线性相关.

回顾

向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, $B: \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$, $B = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = m$, 列满秩.
- 部分向量组线性相关 $\Rightarrow$ 整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关 $\Rightarrow$ 部分向量组线性无关.

回顾

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$, 列满秩.
- 部分向量组线性相关 $\Rightarrow$ 整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关 $\Rightarrow$ 部分向量组线性无关.
- 个数大于维数向量组必线性相关.

回顾

向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, $B: \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l$;
矩阵 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$, $B = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l)$,

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = m$, 列满秩.
- 部分向量组线性相关 $\Rightarrow$ 整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关 $\Rightarrow$ 部分向量组线性无关.
- 个数大于维数向量组必线性相关.
- 向量组 A 线性无关，再加向量 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，且表示唯一. $(\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) = m.)$

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$; 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$.

- 同型矩阵 $A\sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$
  $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P,Q, 使得 $PAQ=B$
  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$; 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$.

- 同型矩阵 $A\sim B\Leftrightarrow A\xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}}B$
  $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P,Q, 使得 $PAQ=B$
  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.

- 同维数列向量组 A,B 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 A,B 可以相互线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX=B$ 和 $BY=A$ 都有解
  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$.
  $\Leftrightarrow (A,O)\overset{c}{\sim}(O,B)$.

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$; 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$.

- 同型矩阵 $A\sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$

  $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P,Q, 使得 $PAQ=B$

  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.

- 同维数列向量组 A,B 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 A,B 可以相互线性表示

  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX=B$ 和 $BY=A$ 都有解

  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$.

  $\Leftrightarrow (A,O)\overset{c}{\sim}(O,B)$.

- 初等变换的角度看向量组等价:

$$(A,O)\xrightarrow{\text{初等列变换}}(A,B)\xrightarrow{\text{初等列变换}}(O,B).$$

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$; 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$.

- 同型矩阵 $A\sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$
  $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P,Q, 使得 $PAQ=B$
  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.

- 同维数列向量组 A,B 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 A,B 可以相互线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX=B$ 和 $BY=A$ 都有解
  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$.
  $\Leftrightarrow (A,O)\overset{c}{\sim}(O,B)$.

- 初等变换的角度看向量组等价:

$$(A,O)\xrightarrow{\text{初等列变换}}(A,B)\xrightarrow{\text{初等列变换}}(O,B).$$

- 如果 $m=n$, 则列向量组 A,B 等价 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A\overset{c}{\sim}B$.

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$; 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$.

- 同型矩阵 $A\sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$
  $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P,Q, 使得 $PAQ=B$
  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.
- 同维数列向量组 A,B 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 A,B 可以相互线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX=B$ 和 $BY=A$ 都有解
  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$.
  $\Leftrightarrow (A,O)\overset{c}{\sim}(O,B)$.
- 初等变换的角度看向量组等价:

$$(A,O)\xrightarrow{\text{初等列变换}}(A,B)\xrightarrow{\text{初等列变换}}(O,B).$$

- 如果 $m=n$, 则列向量组 A,B 等价 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A\overset{c}{\sim}B$.
- 如果向量组 B 是向量组 A 的部分向量组, 则向量组 A,B 等价
  $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.

本次课内容

1. 最大无关组和向量组的秩

2. 向量组的秩和矩阵的秩

最大无关组的两种定义

设向量组 $A_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 的一个部分组,
定义 1:

- 向量组 $A_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
- 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量 (若存在的话) 都线性相关,

则称向量组 A_0 为向量组 A 的一个最大线性无关组 (最大无关组).

最大无关组的两种定义

设向量组 $A_0: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 的一个部分组,

定义 1:

- 向量组 $A_0: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
- 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量 (若存在的话) 都线性相关,

则称向量组 A_0 为向量组 A 的一个最大线性无关组 (最大无关组).

定义 2:

- 向量组 $A_0: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
- 向量组 A 中任意一个向量都可由向量组 A_0 线性表示,

此时 A_0 也为向量组 A 的一个最大无关组. (也称为极大无关组)

由定义 2 知

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

由定义 2 知

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

定义

最大无关组 A_0 所含向量的个数 r 称为向量组 A 的**秩**，记为 R_A 或 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

由定义 2 知

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

定义

最大无关组 A_0 所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩，记为 R_A 或 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

注：

- 只含零向量的向量组的秩规定为 0.
- 向量组 A, B 等价，则 $R_A = R_B$. （定理 5）
  但反之，当 $R_A = R_B = R_{(A,B)}$ 时，维数相同的向量组 A, B 等价.

例 (例 8)

全体 n 维向量构成的向量组记为 $\mathbb{R}^n$. $e_1, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个最大无关组，故 $\mathbb{R}^n$ 的秩为 n.

例 (例 8)

全体 n 维向量构成的向量组记为 $\mathbb{R}^n$. $e_1, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个最大无关组，故 $\mathbb{R}^n$ 的秩为 n.

- 最大无关组的意义—少表示多，有限表示无限：
  即可以用有限个向量 (最大无关组) 来表示无穷多个向量.

例题 9

例

设

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 & = 0 \end{cases}$$

的全体解向量构成的向量组为 S，求 R_S.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 $=$ 它的列向量组的秩 $=$ 它的行向量组的秩.

定理 (定理 6)

矩阵的秩 $=$ 它的列向量组的秩 $=$ 它的行向量组的秩.

所以，上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩：

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以，上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩：

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 $=$ 它的列向量组的秩 $=$ 它的行向量组的秩.

所以，上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩：

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\boldsymbol{\beta})} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 $=$ 它的列向量组的秩 $=$ 它的行向量组的秩.

所以，上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩：

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\boldsymbol{\beta})} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.

定理 (定理 6)

矩阵的秩 $=$ 它的列向量组的秩 $=$ 它的行向量组的秩.

所以，上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩：

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$.

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以，上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩：

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\boldsymbol{\beta})} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \le R_A$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R_A < m$.

定理 (定理 6)

矩阵的秩 $=$ 它的列向量组的秩 $=$ 它的行向量组的秩.

所以，上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩：

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R_A < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R_A = m$.

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以，上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩：

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R_A < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R_A = m$.

因此，我们可以不用在意 $R(A)$ 中的大写字母 A 是表示向量组，还是表示矩阵.

性质

性质 (初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性)

设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, $A\overset{r}{\sim}B$, 则

- 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关;
- 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性相关;

性质 (初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性)

设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, $A\overset{r}{\sim}B$, 则

- 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关;
- 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性相关;

证明: $A\overset{r}{\sim}B$, 则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解, 即:

$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$ 成立 $\Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=0$ 成立.

例 (例 6)

求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示其余向量.

例 (例 7)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & a+2 & a \end{pmatrix},$$

问

- a 取何值时，矩阵 A 的列向量组线性无关;
- a 取何值时，矩阵 A 的列向量组线性相关，求秩和一个最大无关组.

性质

- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且 $R_A = R_B$, 则向量组等价. (提示：考虑合并向量组 (A, B).)
- $R(A+B) \le R(A) + R(B)$.
- $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$.

例 (P148：17)

设向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)K_{s\times r},$$

向量组 A 线性无关. 证明：$R_B=R(K)$.

几点注释：

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B=r\Leftrightarrow R(K)=r$.
- 若 $s=r$, 则 K 为方阵. 此时，向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述：$B=AK_{s\times r}$, A 列满秩，则 $R(B)=R(K)$;
  特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
  $s=r$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

例 (P148：17)

设向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)K_{s\times r},$$

向量组 A 线性无关. 证明：$R_B=R(K)$.

几点注释：

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B=r\Leftrightarrow R(K)=r$.
- 若 $s=r$, 则 K 为方阵. 此时，向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述：$B=AK_{s\times r}$, A 列满秩，则 $R(B)=R(K)$;
  特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
  $s=r$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

例 (P148：17)

设向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)K_{s\times r},$$

向量组 A 线性无关. 证明：$R_B=R(K)$.

几点注释：

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B=r\Leftrightarrow R(K)=r$.
- 若 $s=r$, 则 K 为方阵. 此时，向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述：$B=AK_{s\times r}$, A 列满秩，则 $R(B)=R(K)$;
  特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
  $s=r$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

例 (P148：17)

设向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)K_{s\times r},$$

向量组 A 线性无关. 证明：$R_B=R(K)$.

几点注释：

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B=r\Leftrightarrow R(K)=r$.
- 若 $s=r$, 则 K 为方阵. 此时，向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述：$B=AK_{s\times r}$, A 列满秩，则 $R(B)=R(K)$;
  特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
  $s=r$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

小结

- 向量组的秩、最大无关组.
- 求向量组的秩和最大无关组，用最大无关组表示其他向量.
- 向量组的秩和矩阵的秩的关系.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 14 日