线性代数-10

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 7 日

本次课内容

1. 线性方程组和初等行变换

2. 线性方程组解的存在性

3. Cramer 法则

例 (线性方程组的矩阵表示)

m 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$B=(A\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为 $AX=\boldsymbol{\beta}$.

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B=(A\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为 $AX=\boldsymbol{\beta}$.

- A 称为线性方程组的系数矩阵;

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B=(A\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为 $AX=\boldsymbol{\beta}$.

- A 称为线性方程组的系数矩阵;
- B 称为线性方程组的增广矩阵;

令

$$A=(a_{ij}),\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$B=(A\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组 (1) 的矩阵表示可写为 $AX=\boldsymbol{\beta}$.

- A 称为线性方程组的系数矩阵;
- B 称为线性方程组的增广矩阵;
- 若 $\boldsymbol{\beta}=0$, 则 $AX=0$ 称为齐次线性方程组;
  否则称 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 为非齐次线性方程组.

例

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ \qquad\quad 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

解:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

解:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 - E_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

解:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 - E_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

消元法化简线性方程组

解:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 - E_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{E_3 - 5E_2 \\ E_4 - 7E_2}]{E_1 + 2E_2} \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_3 - 4x_4 = 12 \\ 4x_3 - 8x_4 = 24 \end{cases}$$

消元法化简线性方程组

解:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 - E_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{E_3 - 5E_2 \\ E_4 - 7E_2}]{E_1 + 2E_2} \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_3 - 4x_4 = 12 \\ 4x_3 - 8x_4 = 24 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[E_4 \times \frac{1}{4}]{E_3 \times \frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

解:

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\
x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 1 \\
\qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\
\quad 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3
\end{cases}
$$

$$
\xrightarrow{E_2 - E_1}
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\
\quad 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\
\qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\
\quad 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3
\end{cases}
$$

$$
\xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3}
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\
\qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\
\quad 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\
\quad 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_1 + 2E_2} \\ E_3 - 5E_2 \\ E_4 - 7E_2 \end{array}
\begin{cases}
x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 = -2 \\
\qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\
\qquad\quad 2x_3 - 4x_4 = 12 \\
\qquad\quad 4x_3 - 8x_4 = 24
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c} E_3 \times \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{\hphantom{E_3 \times}} \\ E_4 \times \frac{1}{4} \end{array}
\begin{cases}
x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 = -2 \\
\qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\
\qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 6 \\
\qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 6
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c} E_1 - E_3 \\ \xrightarrow{E_2 + E_3} \\ E_4 - E_3 \end{array}
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad\qquad = -8 \\
\qquad x_2 \qquad - x_4 = 3 \\
\qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 6 \\
\qquad\qquad\qquad\ 0 = 0
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = x_4 + 3 \\ x_3 = 2x_4 + 6 \end{cases}$$

- 取 $x_4 = c$ 为自由未知量，则线性方程组的一般解/通解为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ c+3 \\ 2c+6 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  其中 c 为任意常数.

- 线性方程组的三种变换不改变方程组的解.
  - 交换两个方程的位置: $E_i \leftrightarrow E_j$
  - 方程等号两端同乘非零常数 k: $E_i \times k$
  - 方程加上另一个方程的 k 倍: $E_i + kE_j$

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$(A, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 - E_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$(A, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 - E_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$(A, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{E_3 - 5E_2 \\ E_4 - 7E_2}]{E_1+2E_2} \left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & & +x_3 & -\ 2x_4 & = & -2 \\ & x_2 & -x_3 & +\ \ x_4 & = & -3 \\ & & 2x_3 & -\ 4x_4 & = & 12 \\ & & 4x_3 & -\ 8x_4 & = & 24 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 - 5r_2 \\ r_4 - 7r_2}]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{E_3-5E_2\\E_4-7E_2}]{E_1+2E_2}\begin{cases} x_1 \qquad +x_3-2x_4 = -2 \\ \qquad x_2 -x_3+\ x_4 = -3 \\ \qquad\qquad 2x_3-4x_4 = 12 \\ \qquad\qquad 4x_3-8x_4 = 24 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[E_4\times\frac{1}{4}]{E_3\times\frac{1}{2}}\begin{cases} x_1 \qquad +x_3-2x_4 = -2 \\ \qquad x_2 -x_3+\ x_4 = -3 \\ \qquad\qquad x_3-2x_4 = 6 \\ \qquad\qquad x_3-2x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-5r_2\\r_4-7r_2}]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times\frac{1}{4}]{r_3\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{E_3-5E_2\\ E_4-7E_2}]{E_1+2E_2}\begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3-2x_4 = -2\\ \quad x_2 \;-x_3+\;\;x_4 = -3\\ \quad\quad\quad 2x_3-4x_4 = 12\\ \quad\quad\quad 4x_3-8x_4 = 24\end{cases}$$

$$\xrightarrow[E_4\times\frac14]{E_3\times\frac12}\begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3-2x_4 = -2\\ \quad x_2 \;-x_3+\;\;x_4 = -3\\ \quad\quad\quad x_3-2x_4 = 6\\ \quad\quad\quad x_3-2x_4 = 6\end{cases}$$

$$\xrightarrow[E_4-E_3]{\substack{E_1-E_3\\ E_2+E_3}}\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad\quad\quad = -8\\ \quad x_2 \quad\quad -\;x_4 = 3\\ \quad\quad\quad x_3-2x_4 = 6\\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; 0 = 0\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-5r_2\\ r_4-7r_2}]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-2&-2\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-4&12\\0&0&4&-8&24\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times\frac14]{r_3\times\frac12}\begin{pmatrix}1&0&1&-2&-2\\0&1&-1&1&-3\\0&0&1&-2&6\\0&0&1&-2&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{\substack{r_1-r_3\\ r_2+r_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{E_3-5E_2\\ E_4-7E_2}]{E_1+2E_2}\begin{cases} x_1 \quad +x_3-2x_4=-2\\ x_2-x_3+x_4=-3\\ 2x_3-4x_4=12\\ 4x_3-8x_4=24\end{cases}$$

$$\xrightarrow[E_4\times\frac{1}{4}]{E_3\times\frac{1}{2}}\begin{cases} x_1 \quad +x_3-2x_4=-2\\ x_2-x_3+x_4=-3\\ x_3-2x_4=6\\ x_3-2x_4=6\end{cases}$$

$$\xrightarrow[E_4-E_3]{\substack{E_1-E_3\\ E_2+E_3}}\begin{cases} x_1 =-8\\ x_2-x_4=3\\ x_3-2x_4=6\\ 0=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-5r_2\\ r_4-7r_2}]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-2&-2\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-4&12\\0&0&4&-8&24\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times\frac{1}{4}]{r_3\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&-2&-2\\0&1&-1&1&-3\\0&0&1&-2&6\\0&0&1&-2&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{\substack{r_1-r_3\\ r_2+r_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形

- 设线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \boldsymbol{\beta}_m$ 的增广矩阵为 $B = (A_{m\times n}, \boldsymbol{\beta}_m)$. 则对线性方程组进行消元化简 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 B 作初等行变换.

- 设线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \boldsymbol{\beta}_m$ 的增广矩阵为 $B = (A_{m\times n}, \boldsymbol{\beta}_m)$. 则对线性方程组进行消元化简 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 B 作初等行变换.
- 如果两个线性方程组的增广矩阵行等价，则这两个方程组具有相同的解（同解）.

- 设线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \boldsymbol{\beta}_m$ 的增广矩阵为 $B = (A_{m\times n}, \boldsymbol{\beta}_m)$. 则对线性方程组进行消元化简 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 B 作初等行变换.
- 如果两个线性方程组的增广矩阵行等价，则这两个方程组具有相同的解（同解）.
- 解线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$：使用初等行变换化简增广矩阵,

$$(A, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\text{有限次行变换}} \text{行最简形}$$

则行最简形对应的线性方程组的解即为原方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的解.

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 & = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 & = 1 \end{cases}$$

- 当 $R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) + 1$ 时，产生矛盾方程，则方程组无解；

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ \qquad\; x_2 & = 2 \\ \qquad\; 0 & = 3 \end{cases} \qquad\qquad (A, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$R(A) \leq R(A, \boldsymbol{\beta}) \leq R(A) + 1$

- 当 $R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) + 1$ 时，产生矛盾方程，则方程组无解；

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \quad\;\; x_2 = 2 \\ \quad\;\; 0 = 3 \end{cases} \qquad (A, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **当 $R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) = n$ 时，A 列满秩，则方程组有唯一解；**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \quad\;\; x_2 = 2 \end{cases} \qquad (A, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(A) \le R(A,\boldsymbol{\beta}) \le R(A)+1$

- 当 $R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A)+1$ 时，产生矛盾方程，则方程组无解；

$$\begin{cases} x_1+x_2 &= 1 \\ \quad\;\; x_2 &= 2 \\ \quad\;\; 0 &= 3 \end{cases} \qquad (A,\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- 当 $R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A) = n$ 时，A 列满秩，则方程组有唯一解；

$$\begin{cases} x_1+x_2 &= 1 \\ \quad\;\; x_2 &= 2 \end{cases} \qquad (A,\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 当 $R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A) < n$ 时，有自由未知量，则方程组有无穷解.

$$\begin{cases} x_1+x_2 &= 1 \\ \quad\;\; 0 &= 0 \end{cases} \qquad (A,\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩的应用：判断线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X = \boldsymbol{\beta}$ 为一个非齐次 n 元线性方程组, 则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A) < R(A, \boldsymbol{\beta})$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \boldsymbol{\beta})$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \boldsymbol{\beta}) = n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \boldsymbol{\beta}) < n$.

秩的应用：判断线性方程组 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

秩的应用：判断线性方程组 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

- $X=0$ 是任意齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.
- 求解 $AX=\beta \Rightarrow$ 通过初等行变换化增广矩阵 (A,β) 为行最简形，判断解的存在性并求解.

例

设

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + px_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 7x_4 = q \end{cases}$$

讨论 p, q 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

秩的进一步应用：判断矩阵方程 $AX = B$ 解的存在性.

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

秩的进一步应用：判断矩阵方程 $AX = B$ 解的存在性.

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

定理

$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

例

利用线性方程组配平化学方程式

$$C_2H_2 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O.$$

设含有 n 个未知量 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

令

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$|A|$ 称为线性方程组 (2) 的系数行列式.

令

$$|A_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{1,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 (Carmer 法则)

若系数行列式 $|A| \neq 0$，则线性方程组 *(2)* 有唯一解

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

本章小结

- 利用矩阵的初等行变换判断线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性, 并求解.
- Carmer 法则.

作业

(a). 设

$$\begin{cases} (1+\boldsymbol{\lambda})x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + (1+\boldsymbol{\lambda})x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\boldsymbol{\lambda})x_3 & = \boldsymbol{\lambda} \end{cases}$$

讨论 $\boldsymbol{\lambda}$ 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

(b). Page_{102} 5(初等变换做); $\text{Page}_{112-113}$ 2-4, 3-2, 4-1, 5, 7; Page_{118} 2, 3-1, 4, 8; Page_{121} 10.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 7 日