

线性代数-15

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学, 数学学院

本次课内容

1. 正交向量组
2. Schmidt 正交化
3. 正交矩阵和正交变换

正交向量组

- 内积

$$[X, Y] = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

- 若 $[X, Y] = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 一组两两正交的非零向量.

正交向量组

- 内积

$$[X, Y] = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

- 若 $[X, Y] = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 一组两两正交的非零向量.

定理 (定理 1: 正交向量组必线性无关)

若 n 维向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是一组两两正交的非零向量, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

例 (例 1)

已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

正交. 求一个非零向量 α_3 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

标准正交基的定义

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 e_1, \dots, e_r 为向量空间 $V (V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量, 如果

- e_1, \dots, e_r 为 V 的一组基 (最大无关组);
- e_1, \dots, e_r 两两正交;
- e_1, \dots, e_r 都为单位向量,

则称 e_1, \dots, e_r 为 V 的一组标准正交基.

标准正交基的定义

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 e_1, \dots, e_r 为向量空间 $V(V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量, 如果

- e_1, \dots, e_r 为 V 的一组基 (最大无关组);
- e_1, \dots, e_r 两两正交;
- e_1, \dots, e_r 都为单位向量,

则称 e_1, \dots, e_r 为 V 的一组标准正交基.

定义 (正交基)

设 n 维向量 e_1, \dots, e_r 为向量空间 $V(V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量, 如果

- e_1, \dots, e_r 为 V 的一组基 (最大无关组);
- e_1, \dots, e_r 两两正交,

则称 e_1, \dots, e_r 为 V 的一组正交基.

例子

例

设 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 为 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基, 求 $\beta = (1, 2, 3)^T$ 在这组基下的坐标.

例子

例

设 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 为 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基, 求 $\beta = (1, 2, 3)^T$ 在这组基下的坐标.

- 设 e_1, \dots, e_r 为 V 的一组标准正交基,

$$\alpha = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r \in V$$

则 $[\alpha, e_i] = [\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r, e_i] = \lambda[e_i, e_i] = \lambda_i$.

- 如何得到向量空间的标准正交基?

Schmidt 正交化：从一般基得到正交基的算法

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一组基,

- 正交化 (Schmidt 正交化):

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1,$$

...

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\beta_1, \alpha_r]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_r]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 - \dots - \frac{[\beta_{r-1}, \alpha_r]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]} \beta_{r-1},$$

- 单位化:

$$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \dots, e_r = \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}.$$

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_r)$$

性质

在 *Schmidt* 正交化过程中, 对任意 $k = 1 \dots, r$, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 与 β_1, \dots, β_k 等价. 特别地, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_r 等价.

例 2

例

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 试用 Schmidt 正交化把这组向量标准正交化.

例 3

例

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 α_2, α_3 , 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

正交矩阵的概念和性质

定义 (定义 4: 正交矩阵)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^T A = E \quad (i.e. \ A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为**正交矩阵**, 简称**正交阵**.

正交矩阵的概念和性质

定义 (定义 4: 正交矩阵)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^T A = E \quad (i.e. \ A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为**正交矩阵**, 简称**正交阵**.

- 矩阵 A 为正交矩阵当且仅当 A 的列 (行) 向量组是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基.
- 正交矩阵的逆矩阵和转置矩阵也是正交矩阵.
- 正交矩阵的行列式为 ± 1 .
- 正交矩阵的乘积也是正交矩阵.

例 4

例

验证矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

为正交矩阵.

例 (Lecture-5)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^T \alpha = 1$,

$$H = E - 2\alpha\alpha^T.$$

证明 H 为对称阵, 且 $HH^T = E$.

所以 H 为一个正交矩阵.

向量空间上的线性变换

例 (Lecture-5: 线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

则得 n 维向量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. 矩阵 $A = (a_{ij})$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

向量空间上的线性变换

例 (Lecture-5: 线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

则得 n 维向量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. 矩阵 $A = (a_{ij})$ 表示上面线性变换, 则有

$$Y = AX.$$

- 线性变换和 n 阶方阵一一对应.

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵, 则线性变换 $Y = PX$ 称为正交变换.

正交变换

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵, 则线性变换 $Y = PX$ 称为正交变换.

- 正交变换保持内积不变.

$$[PX, PY] = (PX)^T PY = X^T P^T PY = X^T Y = [X, Y]$$

- 正交变换保持长度不变.
- 正交变换保持夹角不变.

例 (Lecture-5)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^T \alpha = 1$,

$$H = E - 2\alpha\alpha^T.$$

则 $H^T = H$, 且 $HH^T = E$. 则 $Y = HX$ 是一个正交变换 (称为镜面反射).

线性变换在不同基下的矩阵

设 e_1, \dots, e_n 为 \mathbb{R}^n 的自然基, 在这组基下设线性变换

$$Y = AX$$

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为 \mathbb{R}^n 的另外一组基, 则有基变换公式

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (e_1, \dots, e_n)P.$$

则 X, Y 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为 \mathbb{R}^n 的坐标分别为

$$X' = P^{-1}X, \quad Y' = P^{-1}Y$$

所以, 在新坐标下线性替换可以表示为:

$$Y' = P^{-1}APX'.$$

线性变换在不同基下的矩阵

定义 (定义 7: 相似矩阵)

设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵, 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 B 为 A 的相似矩阵, 或称矩阵 A, B 相似.

线性变换在不同基下的矩阵

定义 (定义 7: 相似矩阵)

设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵, 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 B 为 A 的相似矩阵, 或称矩阵 A, B 相似.

- 相似变换就是指把 A 变为 $P^{-1}AP$ 的操作.
- P 称为相似变换矩阵.

线性变换在不同基下的矩阵

定义 (定义 7: 相似矩阵)

设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵, 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 B 为 A 的相似矩阵, 或称矩阵 A, B 相似.

- 相似变换就是指把 A 变为 $P^{-1}AP$ 的操作.
- P 称为相似变换矩阵.
- 和矩阵等价类似, 矩阵的相似是一种等价关系.
 - 反身性: A 与 A 自身相似;
 - 对称性: A 相似于 B , 则 B 相似于 A ;
 - 传递性: A 与 B 相似, B 与 C 相似, 则 A 与 C 相似.

线性变换在不同基下的矩阵

定义 (定义 7: 相似矩阵)

设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵, 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 B 为 A 的相似矩阵, 或称矩阵 A, B 相似.

- 相似变换就是指把 A 变为 $P^{-1}AP$ 的操作.
- P 称为相似变换矩阵.
- 和矩阵等价类似, 矩阵的相似是一种等价关系.
 - 反身性: A 与 A 自身相似;
 - 对称性: A 相似于 B , 则 B 相似于 A ;
 - 传递性: A 与 B 相似, B 与 C 相似, 则 A 与 C 相似.
- 下次课将介绍在相似变换下保持不变的量: 特征值和特征向量.

小结

- 正交向量组、标准正交基;
- Schmidt 正交化;
- 正交矩阵和正交变换;
- 矩阵相似和相似变换.

- 设向量组

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1) 将向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Schmidt 正交化为 e_1, e_2, e_3 ; (P138: 2-(2))
 - 2) 将 α_4 表示为 e_1, e_2, e_3 线性组合的形式.
- P138: 4、5.

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2022 年 10 月 25 日