

答疑：基础解系、特征向量、线性变换矩阵、 正交变换矩阵的不唯一性

吴利苏 (wulisu@sdust.edu.cn)

2022 年 12 月

有数位同学向我确认，在求正交变换化二次型为标准型时，求得的正交矩阵 P 与参考答案不同，是否正确，问题何在？现答疑如下：

1 基础解系的不唯一性

齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系定义为解集/解空间

$$S = \{X \mid AX = 0\}$$

的极大无关组。所以， S 的任意一个极大无关组都是组 $AX = 0$ 的一组基础解系，所以基础解系是不唯一的。任意两组基础解系都是等价的（可以相互线性表示），所以若我们求得的基础解系和参考答案中的基础解系是等价的，那我们所求的是正确的。最简单也是最常见 2 种等价关系：

- $R(A) = n - 1$ ，即基础解系只包含一个解向量。此时，参考答案给出的是 ξ ，自己所求的为 $k\xi$ ， $k \neq 0$ （比如 $-\xi$ ），那我们求得的基础解系是正确的。

这是因为 $X = \xi$ 为 $AX = 0$ 的非零解，则 $X = k\xi$ ($k \neq 0$) 也是 $AX = 0$ 的非零解。进一步， $AX = 0$ 的任意一个非零解和 $X = \xi$ 都只差一个非零常数倍，所以 $AX = 0$ 的任意一个非零解都可作为基础解系。

- $R(A) = n - 2$ ，即基础解系只包含两个解向量，设为 ξ_1, ξ_2 。则任意和 ξ_1, ξ_2 等价的 α_1, α_2 都是 $AX = 0$ 的基础解系。从向量空间的角度看，

解空间 $S = L(\xi_1, \xi_2) = L(\alpha_1, \alpha_2)$, 不同的基础解系可以看作 S 的不同的基.

2 线性变换矩阵和正交变换矩阵的不唯一性

在方针 A 的相似对角化和正交相似对角化时, 求线性变换矩阵和正交变换矩阵, 实际上就是求每个特征值 λ 对应的特征向量, 也就是求齐次线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ (等价的 $(A - \lambda E)X = 0$) 的基础解系. 由于基础解系不唯一, 所以线性变换矩阵和正交变换矩阵也是不唯一的. 所以求得的变换矩阵和参考答案不一样, 也不一定是错的.

以求正交变换矩阵为例, 不唯一的原因可能有:

- 齐次线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 的基础解系取法不唯一, 这个最常见. 例如, 参考答案是 ξ , 你的答案是 $-\xi$.
- 特征向量的排列顺序不一样. 例如, 参考答案是 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 你的答案是 ξ_3, ξ_2, ξ_1 .
- 同一特征值对应多个特征向量, 正交化的次序不唯一. 例如, 参考答案将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 正交化得到 $\alpha_1 = \xi_1, \alpha_2, \alpha_3$, 你的答案将 ξ_3, ξ_2, ξ_1 正交化得到 $\beta_1 = \xi_3, \beta_2, \beta_3$.

3 如何做到和参考答案一致

- 特征值的顺序从小到大排列.
- 求特征值 λ 对应的特征向量时,
 - 将齐次线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 的系数矩阵 $\lambda E - A$ 化为行最简形;
 - 自由未知量的取法: 每个非零行首个非零元 1 所在列以外的列对应的未知量. “阶梯形靠近竖线的列不取, 剩余的列取为自由未知量”. 比如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由未知量取为 x_3 . (实际上, x_1, x_2, x_3 其中任意一个都可以取为自由未知量)

- 依次令自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 得到顺序排列的基础解系/特征向量.
- 按照上面的顺序进行正交化.

这样, 大概率会和参考答案一致。

如果在以上过程中, 进行了一些化简。比如求得的特征向量为 $\xi = (-1, -\frac{1}{2}, 1, 0)$, 为了去掉分母并使得负号尽量少, 可取特征 $\xi' = (2, 1, -2, 0)$, 则得到的变换矩阵可能就不同了。但是, 也鼓励大家在计算过程中进行适当化简后, 再进行后面操作, 以减少计算量。

所以不要求大家的答案和参考答案一致, 大家的期末试卷答案只要是对的, 都会有分的。

4 正交变换矩阵的不唯一性代表什么

对于二次型来说, 他表示向量空间 \mathbb{R}^n 的二次曲面。二次型可以在正交变换化简为标准型, 表示存在 (但不唯一) 的一组标准正交基, 使得二次曲面在这组标准正交基下的表达式为 $f = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$. 比如 \mathbb{R}^2 中的圆, 在自然基

$$e_1 = (1, 0)^T, e_2 = (0, 1)^T$$

的表达式为 $x^2 + y^2 = f$, 在其他标准正交基

$$\alpha_1 = (\cos \theta, \sin \theta)^T, \alpha_2 = (\sin \theta, -\cos \theta)^T$$

的表达式也为形式 $X^2 + Y^2 = f$.

如仍有疑问可以继续邮箱联系我!