

## Lec-2. 等可能概型（古典概型）、几何概型

主讲教师：吴利苏 ([wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn))

主    页：<http://wulisu.cn>

# 目录

## 1. 古典概型

## 2. 例子

- 取球模型
- 超几何分布问题
- 生日问题

- 抽签问题

- 随机数整除模型

- 配对问题

## 3. 几何概型

- 会面问题

## 引例

- 抛硬币观察正反面，样本空间

$$S = \{H, T\}.$$

- 掷骰子观察点数，样本空间

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

## 古典概型

共同点:

- (有限性) 样本空间  $S$  中样本点有限.
- (等可能性) 出现每一个样本点的概率相等.

## 古典概型

共同点:

- (有限性) 样本空间  $S$  中样本点有限.
- (等可能性) 出现每一个样本点的概率相等.

满足以上两个特点的试验称为等可能概型(古典概型).

## 古典概型概率计算公式

设古典概型的样本空间  $S = \{e_1, \dots, e_n\}$  由  $n$  个样本点构成,  $A$  为任一包含  $k$  个样本点的事件, 则事件  $A$  的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}.$$

## 例 (取球模型)

设袋中有 6 只球, 其中 4 只白球, 2 只红球, 从袋中取球两次, 每次随机取一只.

- 无放回取样, 第一次取一只球, 不放回, 第二次从剩余的球中再取一球.
- 放回抽样, 第一次取一只球, 放回, 第二次从全部的球中再取一球.

求

- (1) 取到两只白球的概率.
- (2) 取到两只同色球的概率.
- (3) 取到两次球中至少有一只白球的概率.

解: 设  $A$  表示事件取到两只白球,  $B$  表示事件取到两只同色球,  $C$  表示事件至少有一只白球.

(a) 无放回取样:

(1) 样本空间中的元素为  $6 \times 5 = 30$ , 事件  $A$  包含  $4 \times 3 = 12$ , 则  $P(A) = \frac{4 \times 3}{6 \times 5} = \frac{2}{5}$ .

(2)  $P(B) = \frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{15}$ ,  $P(A) + P(B) = \frac{7}{15}$ .

(3)  $P(C) = 1 - P(B) = \frac{14}{15}$ . 或者

$$P(C) = \frac{4 \times 3}{6 \times 5} + \frac{4 \times 2}{6 \times 5} + \frac{2 \times 4}{6 \times 5} = \frac{14}{15}.$$

(b) 放回抽样:

(1) 样本空间中的元素为  $6 \times 6 = 36$ , 事件  $A$  包含  $4 \times 4 = 16$ , 则  $P(A) = \frac{4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{4}{9}$ .

(2)  $P(B) = \frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{9}$ ,  $P(A) + P(B) = \frac{5}{9}$ .

(3)  $P(C) = 1 - P(B) = \frac{8}{9}$ .

□



### 例 (超几何分布问题)

设  $N$  件产品, 其中有  $D$  件次品, 从中取出  $n$  件, 问其中恰有  $k$  ( $k \leq D$ ) 件次品的概率是多少?

### 例 (超几何分布问题)

设  $N$  件产品, 其中有  $D$  件次品, 从中取出  $n$  件, 问其中恰有  $k$  ( $k \leq D$ ) 件次品的概率是多少?

解: 
$$P = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}.$$



## 例 (生日问题)

某班 30 个学生都是同一年出生的, 求

- (1) 有 10 个学生生日是 1 月 1 日, 另外 20 个是 12 月 31 日的概率.
- (2) 至少有两人生日相同的概率?

## 例 (生日问题)

某班 30 个学生都是同一年出生的, 求

(1) 有 10 个学生生日是 1 月 1 日, 另外 20 个是 12 月 31 日的概率.

(2) 至少有两人生日相同的概率?

解: 记  $A$  为事件: 有 10 个学生生日是 1 月 1 日, 另外 20 个是 12 月 31 日.

$$P(A) = \frac{C_{30}^{10} C_{20}^{20}}{365^{20}}.$$

记  $B$  为事件: 至少有两人生日相同.

$$P(B) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - 29)}{365^{30}} \approx 0.706.$$

## 例 (抽签问题)

袋中有  $a$  只白球,  $b$  只红球,  $k$  ( $k \leq a + b$ ) 个人依次在袋中取一只球.

- 放回抽样;
- 不放回抽样.

求第  $i$  个人取到白球的概率.

解: (1)  $p = \frac{a}{a+b}$ .

(2) 总样本点  $(a+b)(a+b-1)\dots(a+b-k+1) = A_{a+b}^k$ .

第  $i$  个取到白球  $C_a^1 A_{a+b-1}^{k-1}$ ,

$$P = \frac{a A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k} = \frac{a}{a+b}.$$

□

即  $k$  个人取球虽先后次序不同, 各人取得白球的概率是一样的. 放不放回概率也一样一样. 类似地买彩票, 抽奖, 抓阄等, 也是如此.

### 例 (随机数整除模型)

从  $1 \sim 2000$  的整数中随机地取一个数. 问取到的整数既不能被 6 整除, 又不能被 8 整除的概率是多少?

## 例 (随机数整除模型)

从  $1 \sim 2000$  的整数中随机地取一个数. 问取到的整数既不能被 6 整除, 又不能被 8 整除的概率是多少?

解: 记  $A$  为事件能被 6 整除. 记  $B$  为事件能被 8 整除.

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\&= 1 - P(A \cup B) \\&= 1 - (P(A) + P(B) - P(AB)).\end{aligned}$$

其中  $P(A) = \frac{333}{2000}$ ,  $P(B) = \frac{250}{2000}$ ,  $P(AB) = \frac{83}{2000}$  (被最小公倍数 24 整除).

所以  $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1500}{2000} = \frac{3}{4}$ .

□



## 练习

掷 3 颗均匀的骰子, 求点数之和为 4 的概率.

## 练习

掷 3 颗均匀的骰子, 求点数之和为 4 的概率.

解: 记  $A$  为事件点数之和为 4.

样本空间中的元素为个数  $6 \times 6 \times 6$ ,

$A$  包含  $\{1, 1, 2\}$ ,  $\{1, 2, 1\}$ ,  $\{2, 1, 1\}$ .

$$P(A) = \frac{3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{72}.$$



### 例 (配对问题)

从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 问

- (1) 恰有两只配对成双的概率.
- (2) 至少有两只配对成双的概率.

### 例 (配对问题)

从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 问

(1) 恰有两只配对成双的概率.

(2) 至少有两只配对成双的概率.

解: (1) 
$$P = \frac{C_6^1 C_5^2 C_2^1 C_2^1}{C_{12}^4} = \frac{16}{33}.$$

(2) 
$$P = 1 - \frac{C_6^4 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1}{C_{12}^4}.$$



## 例

将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中去, 这 15 名新生中有 3 名优秀. 问

(1) 每个班级分配到一名优秀的概率.

(2) 3 名优秀分配到同一个班级的概率.

## 例

将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中去, 这 15 名新生中有 3 名优秀. 问

(1) 每个班级分配到一名优秀的概率.

(2) 3 名优秀分配到同一个班级的概率.

解: (1) 总样本点  $C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$ , 每个班级分配到一名优秀  
 $3! C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$ .

$$P = \frac{3! C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}.$$

$$(2) P = \frac{C_3^3 C_{12}^2 C_{10}^5 C_5^5}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}.$$

□

## 例

设有甲、乙、丙三个班级，思考下面试验的样本点数分别是多少？

**(1)** 15 名新生随机地平均分配到三个班级；

## 例

设有甲、乙、丙三个班级，思考下面试验的样本点数分别是多少？

- (1) 15 名新生随机地平均分配到三个班级；
- (2) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求其中一个班分 3 人，一个班分 5 人，一个班分 7 人；



## 例

设有甲、乙、丙三个班级，思考下面试验的样本点数分别是多少？

- (1) 15 名新生随机地平均分配到三个班级；
- (2) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求其中一个班分 3 人，一个班分 5 人，一个班分 7 人；
- (3) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求甲班分 3 人，乙班分 5 人，丙班分 7 人；

## 例

设有甲、乙、丙三个班级，思考下面试验的样本点数分别是多少？

- (1) 15 名新生随机地平均分配到三个班级；
- (2) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求其中一个班分 3 人，一个班分 5 人，一个班分 7 人；
- (3) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求甲班分 3 人，乙班分 5 人，丙班分 7 人；
- (4) 15 名新生随机分配到三个班级中，要求其中一个班分 3 人，其余两个班分别分 6 人；

解:

**(1)**  $C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5;$

**(2)**  $C_{15}^3 C_{12}^5 C_7^7 \cdot A_3^3;$

**(3)**  $C_{15}^3 C_{12}^5 C_7^7;$

**(4)**  $C_{15}^3 C_{12}^6 C_6^6 \cdot 3.$



## 例

某接待站在某一周曾接待过 12 次来访, 已知所有这 12 次接待都是在周二和周四. 问是否可推断接待时间是规定的?

## 例

某接待站在某一周曾接待过 12 次来访, 已知所有这 12 次接待都是在周二和周四. 问是否可推断接待时间是规定的?

解: 假设没有规定. 每天的接待是等可能的.  
总样本点  $7^{12}$ . 12 次接待都是周二和周四  $2^{12}$ .

$$P = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003.$$

小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的 (实际推断原理).

所以, 可推断接待时间是规定的.



## 几何概型 (样本空间无限)

当随机试验的样本空间是某个区域, 并且任意一点落在度量 (长度, 面积, 体积) 相同的子区域是等可能的, 则事件  $A$  的概率可定义为

$$P(A) = \frac{S_A}{S},$$

其中  $S$  是样本空间的度量,  $S_A$  是事件  $A$  的子区域的度量.

这类样本空间无限的概率模型称为几何概型.

## 例 (会面问题)

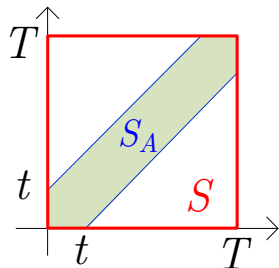
甲乙两人相约 0 点到  $T$  点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人  $t(t < T)$  时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到  $T$  时的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

## 例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到  $T$  点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人  $t(t < T)$  时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到  $T$  时的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

解: 设  $x$  和  $y$  分别为甲乙两人到达的时刻,  
 $0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T$ , 两人会面的充要条件  
 $|x - y| \leq t$ .

$$P = \frac{S_A}{S} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2}.$$





例

在长度为  $a$  的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

## 例

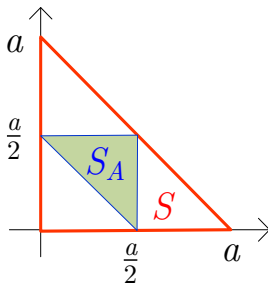
在长度为  $a$  的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为  $x, y, a - x - y$ .

$$S = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\},$$

$$A = \{\text{构成三角形}\}$$

$$A \text{ 发生} \iff \begin{cases} x + y > a - x - y; \\ y + (a - x - y) > x; \\ x + (a - x - y) > y. \end{cases}$$



## 例

在长度为  $a$  的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

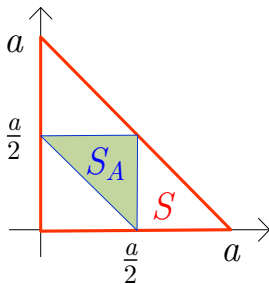
解: 设三段分别长为  $x, y, a - x - y$ .

$$S = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\},$$

$A = \{\text{构成三角形}\}$

$$A \text{ 发生} \iff \begin{cases} x + y > a - x - y; \\ y + (a - x - y) > x; \\ x + (a - x - y) > y. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{a}{2} < x + y < a; \\ 0 < x < \frac{a}{2}; \\ 0 < y < \frac{a}{2}. \end{cases}$$



## 例

在长度为  $a$  的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为  $x, y, a - x - y$ .

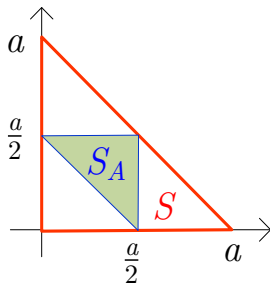
$$S = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\},$$

$$A = \{\text{构成三角形}\}$$

$$A \text{ 发生} \iff \begin{cases} x + y > a - x - y; \\ y + (a - x - y) > x; \\ x + (a - x - y) > y. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{a}{2} < x + y < a; \\ 0 < x < \frac{a}{2}; \\ 0 < y < \frac{a}{2}. \end{cases}$$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}.$$



□