线性代数-6

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 16 日

本次课内容

1. 伴随矩阵

2. 逆矩阵的定义和性质

3. 逆矩阵的应用

方阵的伴随矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- A 的伴随矩阵A^* 定义为:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

  其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.
- 注意: A^* 中的 A_{ij} 的指标有个转置!!!

例

求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵.

例

求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵.

性质

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

.

逆矩阵的引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

逆矩阵的引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

- 在计算一次方程 $ax = b$ 时，等号两边同乘 $\frac{1}{a}$, 可解得 $x = \frac{b}{a}$.

逆矩阵的引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

- 在计算一次方程 $ax = b$ 时，等号两边同乘 $\frac{1}{a}$, 可解得 $x = \frac{b}{a}$.
- 一个自然的问题：对于矩阵 A 能不能给出一个类似 $\frac{1}{A}$ 的概念？在求线性方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 时，能不能用

$$X = \frac{\boldsymbol{\beta}}{A}$$

求解？

逆矩阵的引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

- 在计算一次方程 $ax = b$ 时，等号两边同乘 $\frac{1}{a}$, 可解得 $x = \frac{b}{a}$.
- 一个自然的问题：对于矩阵 A 能不能给出一个类似 $\frac{1}{A}$ 的概念？在求线性方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 时，能不能用

$$X = \frac{\boldsymbol{\beta}}{A}$$

求解？
- $\Rightarrow$ 逆矩阵

逆矩阵

定义 (逆矩阵)

对于 A, 如果存在一个 B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

定义 (逆矩阵)

对于n 阶方阵A, 如果存在一个n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

逆矩阵

定义 (逆矩阵)

对于n 阶方阵A, 如果存在一个n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

性质

如果矩阵 A 可逆, 则 A 的逆矩阵唯一.

逆矩阵

定义 (逆矩阵)

对于n阶方阵A, 如果存在一个n阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

性质

如果矩阵 A 可逆, 则 A 的逆矩阵唯一.

- 将 A 的唯一逆矩阵记为 A^{-1}.

例

已知 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$, 求对角矩阵 $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的逆矩阵.

例

已知 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 求对角矩阵 $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的逆矩阵.

解:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

例

已知 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 求对角矩阵 $A = \mathsf{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的逆矩阵.

解:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

例

已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - 2A - 3E = O$, 求 $(A + 5E)^{-1}$.

例

已知 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$, 求对角矩阵 $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的逆矩阵.

解：

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

例

已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A-3E=O$, 求 $(A+5E)^{-1}$.

解：凑 $(A+5E)(A+xE)=A^2-2A+yE$, 得 $x=-7, y=-35$. 所以

$$3E=A^2-2A=(A+5E)(A+xE)-yE \Rightarrow (A+5E)(A+xE)=(3+y)E.$$

$3+y\neq 0$, 所以 $A+5E$ 可逆, 且 $(A+5E)^{-1}=\frac{A+xE}{3+y}=-\frac{1}{32}(A-7E)$.

矩阵可逆的判定：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

矩阵可逆的判定：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

- 若 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$. （定义的简化！）

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

- 若 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$.（定义的简化！）
- 若 A 可逆，则 $A^* = |A|A^{-1}$.

矩阵可逆的判定：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

- 若 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$. （定义的简化！）
- 若 A 可逆，则 $A^* = |A|A^{-1}$.
- $|A| = 0$，则称 A 为奇异的，否则称为非奇异的.

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

- 若 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$. （定义的简化！）
- 若 A 可逆，则 $A^* = |A|A^{-1}$.
- $|A| = 0$，则称 A 为奇异的，否则称为非奇异的.
- A可逆$\Leftrightarrow$$A$非奇异$\Leftrightarrow$$A$ 对应的线性变换非退化($\Leftrightarrow$ A满秩).

逆矩阵的性质

性质

若 A, B 为 n 阶可逆矩阵, 则

- A^{-1} 可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 对于 $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, $\boldsymbol{\lambda} A$ 可逆，且 $(\boldsymbol{\lambda} A)^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}} A^{-1}$;
- A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- AB 可逆，且
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
.

性质

若 A, B 为 n 阶可逆矩阵, 则

- A^{-1} 可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 对于 $\lambda \neq 0$, λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$;
- A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- AB 可逆，且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

.

P 可逆时，消去律成立. 即

- 左消去律: $PA = PB \Rightarrow A = B$;
- 右消去律: $AP = BP \Rightarrow A = B$.

例

1. 二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求 A^{-1}.

例

1. 二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求 A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例

1. 二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求 A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. 方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆，求 A^{-1}.

例

1. 二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求 A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. 方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆，求 A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例题 $\left(A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}\right)$

例

1. 二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求 A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. 方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆，求 A^{-1}.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{27}$，求 $|(3A)^{-1}-27A^*|$.

例

1. 二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 何时可逆？若可逆，求 A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. 方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆，求 A^{-1}.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{27}$，求 $|(3A)^{-1}-27A^*|$. $\quad -16$

例

求解矩阵方程 $XA = 2X + B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

性质

A 为 n 阶方阵，若存在可逆阵 P，使得 $A = P \cdot diag(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n) \cdot P^{-1}$，则矩阵多项式

$$\varphi(A) = P \cdot diag(\varphi(\boldsymbol{\lambda}_1), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}.$$

性质

A 为 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $A = P \cdot diag(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n) \cdot P^{-1}$, 则矩阵多项式

$$\varphi(A) = P \cdot diag(\varphi(\boldsymbol{\lambda}_1), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}.$$

- 对于 n 阶方阵 A, B, 若存在可逆矩阵 P, 使得

$$PAP^{-1} = B$$

则称 A 和 B 是相似的.

性质的证明

- 如果 $A = P\Lambda P^{-1}$, 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$, 故

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m \\
&= a_0 PEP^{-1} + a_1 P\Lambda P^{-1} + \cdots + a_m P\Lambda^m P^{-1} \\
&= P(a_0 E + a_1 \Lambda + \cdots + a_m \Lambda^m) P^{-1} \\
&= P\varphi(\Lambda) P^{-1}
\end{aligned}$$

- 如果 $A = P\boldsymbol{\Lambda}P^{-1}$, 则 $A^k = P\boldsymbol{\Lambda}^k P^{-1}$, 故

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m \\ &= a_0PEP^{-1} + a_1P\boldsymbol{\Lambda}P^{-1} + \cdots + a_mP\boldsymbol{\Lambda}^mP^{-1} \\ &= P(a_0E + a_1\boldsymbol{\Lambda} + \cdots + a_m\boldsymbol{\Lambda}^m)P^{-1} \\ &= P\varphi(\boldsymbol{\Lambda})P^{-1}\end{aligned}$$

- 而 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角矩阵,

$$\varphi(\boldsymbol{\Lambda}) = \mathrm{diag}(\varphi(\boldsymbol{\lambda}_1), \varphi(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\lambda}_n)).$$

性质的证明

- 如果 $A = P\Lambda P^{-1}$, 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$, 故

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m \\ &= a_0PEP^{-1} + a_1P\Lambda P^{-1} + \cdots + a_mP\Lambda^mP^{-1} \\ &= P(a_0E + a_1\Lambda + \cdots + a_m\Lambda^m)P^{-1} \\ &= P\varphi(\Lambda)P^{-1}\end{aligned}$$

- 而 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为对角矩阵,

$$\varphi(\Lambda) = \mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \cdots, \varphi(\lambda_n)).$$

- 所以

$$\varphi(A) = P \cdot \mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1), \cdots, \varphi(\lambda_n)) \cdot P^{-1}.$$

例

设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $AP = P\Lambda$, 求 A^n.

逆矩阵的应用–求矩阵多项式

例

设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $AP = P\Lambda$, 求 A^n.

例

求矩阵多项式 $\varphi(A) = A^3 + 2A^2 - 3A$, 其中 $AP = P\Lambda$,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}.$$

小结

- 伴随矩阵
- 逆矩阵的定义
- A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- 逆矩阵的应用
  - 解矩阵方程,
  - 求矩阵多项式

小结

- 伴随矩阵
- 逆矩阵的定义
- A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- 逆矩阵的应用
  - 解矩阵方程，
  - 求矩阵多项式
  - 解线性方程组 $\Rightarrow$ Carmer 法则 (下一章)
    (系数矩阵为可逆方阵：n 个方程 n 个变量，系数行列式非零.)

小结

- 伴随矩阵
- 逆矩阵的定义
- A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- 逆矩阵的应用
  - 解矩阵方程,
  - 求矩阵多项式
  - 解线性方程组 $\Rightarrow$ Carmer 法则 (下一章)
    (系数矩阵为可逆方阵: n 个方程 n 个变量, 系数行列式非零.)
  - 通讯加密.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 16 日