Lec-19. 数理统计介绍、随机样本、统计量

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：wulisu.cn

本章内容

t 分布

F 分布

正态总体的抽样分布

2. t 分布

定义

设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且 X, Y 相互独立, 则称

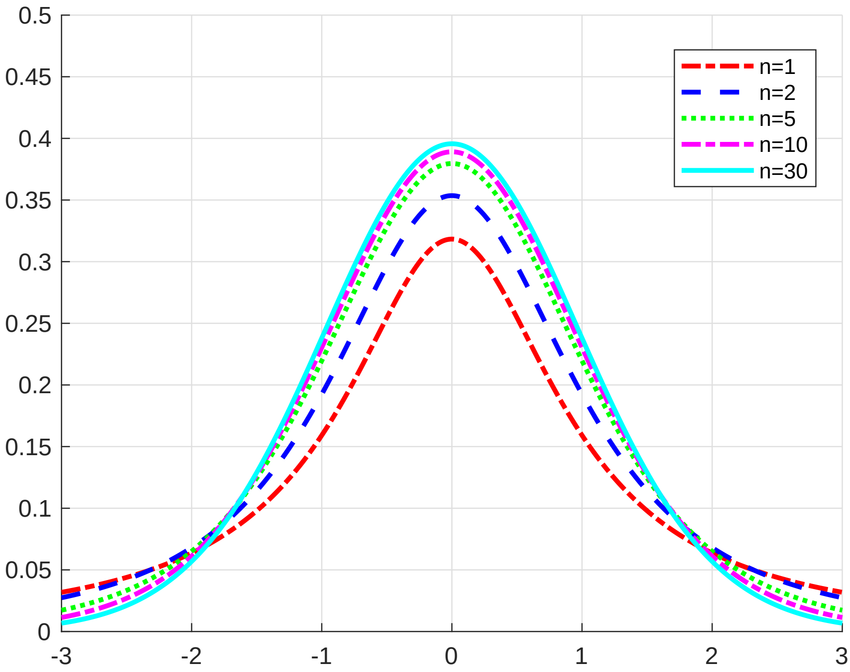
$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

为服从自由度为 n 的t 分布, 记为 $t \sim t(n)$.

概率密度和图像

t 分布又称学生氏分布, 概率密度为

$$h(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty.$$



0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
n=1
n=2
n=5
n=10
n=30

性质

1. 关于 $t=0$ 对称.
2. $$\lim_{n\to\infty} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

   当 n 充分大, t 分布近似 $N(0,1)$； 当 n 较小时, t 分布与 $N(0,1)$ 相差很大.

性质

- t 分布的上分位数　对于给定的 α，满足

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)\,dt = \alpha$$

的 $t_\alpha(n)$ 是 $t(n)$ 分布的上 α 分位数.

性质

- t 分布的上分位数　对于给定的 α，满足
$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)\,dt = \alpha$$
的 $t_\alpha(n)$ 是 $t(n)$ 分布的上 α 分位数.
- $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$.
分布函数的角度：$1 - F(x) = F(-x)$.

性质

- t 分布的上分位数　对于给定的 α，满足

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)\,dt = \alpha$$

  的 $t_\alpha(n)$ 是 $t(n)$ 分布的上 α 分位数.

- $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$.
  分布函数的角度：$1 - F(x) = F(-x)$.
- 当 $n \leq 45$ 时，查表 Page-399，求 $t_\alpha(n)$.

性质

- t 分布的上分位数　对于给定的 α，满足

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)\,dt = \alpha$$

的 $t_\alpha(n)$ 是 $t(n)$ 分布的上 α 分位数.

- $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$.
分布函数的角度：$1 - F(x) = F(-x)$.
- 当 $n \le 45$ 时, 查表 Page-399, 求 $t_\alpha(n)$.
- 当 $n > 45$ 时, $t_\alpha(n) \approx z_\alpha$.

例

设 $T \sim t(n)$, $t(n)$ 的上 α 分位数满足

$$P\{T > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(y)\,dy = \alpha,$$

求 $t_{0.05}(10), t_{0.025}(15)$ 的值.

例

设 $T \sim t(n)$, $t(n)$ 的上 α 分位数满足

$$P\{T > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(y)\,dy = \alpha,$$

求 $t_{0.05}(10)$, $t_{0.025}(15)$ 的值.

解: $t_{0.05}(10) = 1.8125$, $t_{0.025}(15) = 2.1315$. $\square$

3. F 分布

定义

设 $U \sim \chi^2(n_1)$, $V \sim \chi^2(n_2)$ 且 U, V 相互独立, 则称

$$F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$$

服从自由度为 (n_1, n_2) 的F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$.

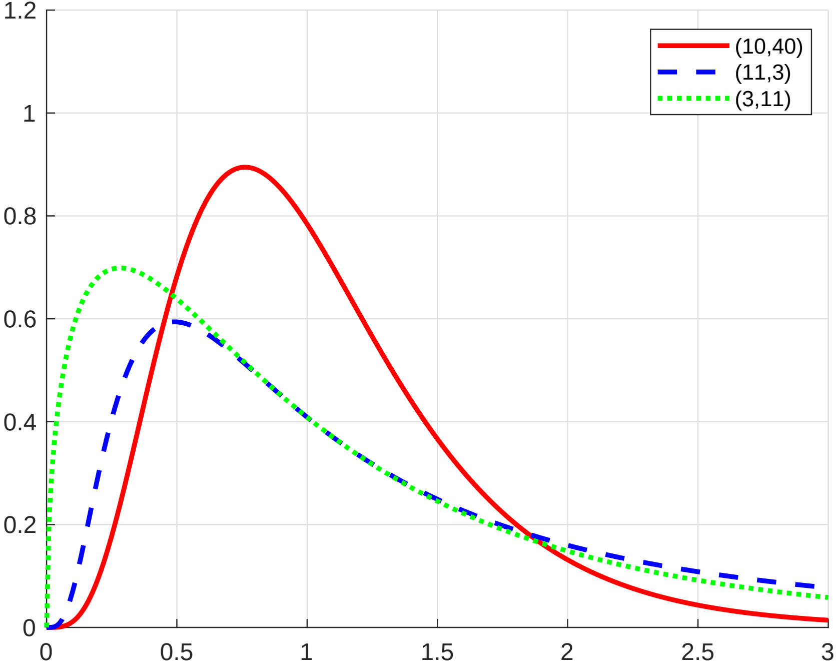
3. F 分布的概率密度和图像

概率密度

$$\phi(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}}y^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})(1+\frac{n_1 y}{n_2})^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & y>0; \\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}y^{\frac{n_1}{2}-1}}{\mathrm{B}(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})(n_2+n_1 y)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & y>0; \\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 Beta 函数 $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.



(10,40)
(11,3)
(3,11)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

3. F 分布的性质

- 若 $F \sim F(n_1, n_2)$，则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$.
- 上分位数 对于给定的 α，$0 < \alpha < 1$, 满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty} \phi(y)\,dy = \alpha$$

的 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 就是 $F(n_1, n_2)$ 分布的上 α 分位数.

求 F 分布的上 α 分位数

- 查表 Page401-404
  $F_{0.025}(8,7) = 4.90$, $F_{0.05}(30,14) = 2.31$.

求 F 分布的上 α 分位数

- 查表 Page401-404
  $F_{0.025}(8,7) = 4.90$, $F_{0.05}(30,14) = 2.31$.
- F 分布的上 α 分位数满足

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}. \tag{1}$$

求 F 分布的上 α 分位数

- 查表 Page401-404
  $F_{0.025}(8,7)=4.90,\ F_{0.05}(30,14)=2.31.$
- F 分布的上 α 分位数满足

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}. \tag{1}$$

- 利用上式，可以求分布表中未列出的常用的上 α 分位数.
  例如：$F_{0.95}(12,9)=0.357.$

(1) 式的证明: $F \sim F(n_1, n_2)$

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\{F > F_{1-\alpha}(n_1, n_2)\} \\
&= P\left\{\frac{1}{F} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right\} \\
&= 1 - P\left\{\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right\} \\
&= 1 - P\left\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right\}
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$, 则

$$
P\{\frac{1}{F} > F_{\alpha}(n_2, n_1)\} = \alpha = P\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\},
$$

故 $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$. $\square$

例

X, Y, Z 相互独立, 服从 $N(0,1)$, 则

(1) $X^2 + Y^2 + Z^2 \sim \chi^2(3)$,

(2) $\frac{X}{\sqrt{(Y^2+Z^2)/2}} \sim t(2)$,

(3) $\frac{2X^2}{Y^2+Z^2} \sim F(1,2)$.

例

若 $t \sim t(n)$, 则 $t^2 \sim F(1,n)$.

4. 正态总体的抽样分布

- 设总体 X 的期望、方差存在，

$$E(X) = \mu, \qquad D(X) = \sigma^2.$$

- 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$$

分别是样本均值和样本方差，则有

$$E(\overline{X}) = \mu, \qquad D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

4. 正态总体的抽样分布

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum(\sigma^2+\mu^2) - n(\sigma^2/n+\mu^2)\right)\\
&= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

$$
D(S^2) = D\left(\tfrac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2\right)\right) = ?.
$$

4. 正态总体的抽样分布

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum(\sigma^2+\mu^2) - n(\sigma^2/n+\mu^2)\right) \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

$$D(S^2) = D\left(\tfrac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2\right)\right) = ?.$$

一般不能由 μ, σ^2 表示.

定理 (正态总体的抽样分布)

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \ldots, X_n$ 是样本, 样本均值和样本方差分别为

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

则

(1) $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

(3) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

(2) 的证明见本章末二维码.

例

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \ldots, X_n$ 是样本, 则

(1) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

(2) $\frac{\sum(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \sum \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$.

其原因是在 (1) 式中有一个约束条件

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0.$$

(3) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$的证明：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

相互独立，由 t 分布的定义

$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Big/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$. $\square$

例

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \ldots, X_n$ 是样本, 样本方差为 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \overline{X})^2$. 求 $D(S^2)$.

解: $\because \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

$\therefore D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$.

$\therefore D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$. □

- 随 n 增大, $D(S^2)$ 减小, 样本方差的方差变小. 所以, 可用样本方差 S^2 推断总体方差.

定理 (两个正态总体的抽样分布)

设 $X_1, \ldots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ 分别是正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, 且相互独立. 样本均值分别为 $\overline{X}, \overline{Y}$; 样本方差分别为 S_1^2, S_2^2. 则

(1) $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$;

(2) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时,

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

其中 $S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w = \sqrt{S_w^2}$.

证明 (1):

$$\chi_1^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1),$$

$$\chi_2^2 = \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$$

S_1^2, S_2^2 独立.

$\therefore$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \Big/ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{\chi_1^2/(n_1-1)}{\chi_2^2/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

证明 (2): 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时,

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_1}\right)$$

$$U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

又

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1),\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

且相互独立, 故有 χ^2 分布的可加性,

$$V=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2).$$

U, V 相互独立. 由 t 分布的定义,

$$\frac{U}{\sqrt{V/(n_1+n_2-2)}} = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w = \sqrt{S_w^2}$. $\square$

U, V 相互独立的证明见本章末二维码.

思考: 若 σ^2 未知, 为什么用 S_w^2 来估计 σ^2, 而不用 S_1^2 或 S_2^2 来估计 σ^2 呢?

- $E(S_1^2) = E(S_2^2) = E(S_w^2) = \sigma^2$;
- $D(S_1^2) = \frac{2\sigma^4}{n_1-1}$, $D(S_2^2) = \frac{2\sigma^4}{n_2-1}$,

$$D(S_w^2) = \frac{2\sigma^4}{n_1+n_2-2}$$

S_w^2 包含更多信息, 具有更小的方差.

- 对于单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 得到了 $\overline{X}, S^2$ 的分布，用于对 μ, σ^2 进行推断 (区间估计，假设检验).
- 对于两个独立正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 得到了 $\overline{X} - \overline{Y}, S_1^2/S_2^2$ 的分布，用于对 $\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 进行推断.

定理 3 的证明

令 $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}, i = 1, 2, ..., n,$ 则由定理 3 的假设知，$Z_1, Z_2, ..., Z_n$ 相互独立，且都服从 N(0,1) 分布，而

$$\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma};$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(X_i - \mu) - (\overline{X} - \mu)}{\sigma}\right]^2$$

$$= \sum_{i}(Z_i - \overline{Z})^2 = \sum_{i} Z_i^2 - n\overline{Z}^2.$$

取一 n 阶正交矩阵 $A=(a_{i_j})$，其中第一行的元素均为 $1/\sqrt{n}$. 作正交变换

$$\mathbf{Y}=\mathbf{AZ},$$

其中

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

由于 $Y_i=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}Z_j, i=1,2,...,n$. 故 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 仍为正态变量，由 $Z_i \sim N(0,1), i=1,2,...,n$ 知

$$E(Y_i)=E\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Z_j\Big)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E(Z_j)=0$$

又由 $\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, ..., n$, 知

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_k) = \mathrm{Cov}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Z_j, \sum_{l=1}^{n} a_{kl}Z_l\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ij}a_{kl}\mathrm{Cov}(Z_j, Z_l) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik}$$

(由正交矩阵的性质), 故 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 两两不相关. 又由于 n 维随机变量 $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ 是由 n 维正态随机变量 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 经由线性变换而得到的，因此 $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ 也是 n 维正态随机变量 (参见第 4 章 §4).

于是由 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 两两不相关可推得 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 相互独立 (参见第 4 章 § 4), 且有 $Y_i \sim N(0,1), i=1,2,\ldots,n$. 而

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} Z_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} Z_j = \sqrt{n}\,\overline{Z};$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = Y^{\mathrm{T}} Y = (A\mathbf{Z})^{\mathrm{T}}(A\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\mathbf{Z} \\ = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2, \end{aligned}$$

于是

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - n\overline{Z}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2.$$

由于 $Y_2, Y_3, ..., Y_n$ 相互独立,
且 $Y_i \sim N(0,1), i=2,3,...,n$, 知 $\sum_{i=2} Y_i^2 \sim \chi^2(n-1)$. 从而证得

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

再者，$\overline{X} = \sigma\overline{Z} + \mu = \frac{\sigma Y_1}{\sqrt{n}} + \mu$ 仅依赖于 Y_1,
而 $S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2$ 仅依赖于 Y_2，$Y_3, ..., Y_n$.
再由 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 的独立性，推知 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

定理 3 的推广

定理 3 中 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立这一结论，还能推广到多个同方差正态总体的情形.
例如，对于两个同方差正态总体的情形. 设 $\overline{X}, \overline{Y}, S_1^2, S_2^2$ 是定理 5 的 2° 中所说的正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本均值和样本方差. 只要引入正交矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_i$ 为 n_i 阶正交矩阵，其第一行元素都是 $1/\sqrt{n_i}$ $(i = 1, 2)$.

与上面同样的做法，考察向量 $Z = TV$ 各分量的独立性，其中

$$V^{\mathrm{T}} = (V_1, V_2, \cdots, V_n),$$

$$V_i = (X_i - \mu_1)/\sigma, \quad i = 1, 2, \cdots, n_1,$$

$$V_{n_1+j} = (Y_j - \mu_2)/\sigma, \quad j = 1, 2, \cdots, n_2, \quad n_1 + n_2 = n,$$

就可证得 $\overline{X}, \overline{Y}, S_1^2, S_2^2$ 相互独立.

对于 $m(m \geq 2)$ 个同方差的正态总体的情形，设 $\overline{X}_i, S_i^2$ 分别是总体 $N(\mu_i, \sigma^2), i = 1, 2, ..., m$ 的样本均值和样本方差，且设各样本相互独立，则 $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_m, S_1^2, S_2^2, ..., S_m^2$ 相互独立.