

线性代数-13

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 21 日

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = m$, 列满秩.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = m$, 列满秩.
- 部分向量组线性相关 \Rightarrow 整体向量组线性相关.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = m$, 列满秩.
- 部分向量组线性相关 \Rightarrow 整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关 \Rightarrow 部分向量组线性无关.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = m$, 列满秩.
- 部分向量组线性相关 \Rightarrow 整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关 \Rightarrow 部分向量组线性无关.
- 个数大于维数向量组必线性相关.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$;

矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = m$, 列满秩.
- 部分向量组线性相关 \Rightarrow 整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关 \Rightarrow 部分向量组线性无关.
- 个数大于维数向量组必线性相关.
- 向量组 A 线性无关, 再加向量 β 线性相关 $\Rightarrow \beta$ 可由向量组 A 线性表示, 且表示唯一. ($\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) = m$.)

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$; 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$.

- 同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$
 - \Leftrightarrow 存在可逆阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$
 - $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$.

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$; 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$.

- 同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$
 \Leftrightarrow 存在可逆阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$.
- 同维数列向量组 A, B 等价 \Leftrightarrow 向量组 A, B 可以相互线性表示
 \Leftrightarrow 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
 $\Leftrightarrow (A, O) \overset{c}{\sim} (O, B)$.

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$; 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$.

- 同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$
 \Leftrightarrow 存在可逆阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$.
- 同维数列向量组 A, B 等价 \Leftrightarrow 向量组 A, B 可以相互线性表示
 \Leftrightarrow 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
 $\Leftrightarrow (A, O) \overset{c}{\sim} (O, B)$.
- 初等变换的角度看向量组等价:

$$(A, O) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (A, B) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (O, B).$$

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$; 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$.

- 同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$
 \Leftrightarrow 存在可逆阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$.
- 同维数列向量组 A, B 等价 \Leftrightarrow 向量组 A, B 可以相互线性表示
 \Leftrightarrow 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
 $\Leftrightarrow (A, O) \overset{c}{\sim} (O, B)$.
- 初等变换的角度看向量组等价:

$$(A, O) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (A, B) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (O, B).$$

- 如果 $m = l$, 则列向量组 A, B 等价 \Leftrightarrow 矩阵 $A \overset{c}{\sim} B$.

向量组的等价和矩阵的等价

向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \dots, \beta_l$; 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_l)$.

- 同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B$
 \Leftrightarrow 存在可逆阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$.
- 同维数列向量组 A, B 等价 \Leftrightarrow 向量组 A, B 可以相互线性表示
 \Leftrightarrow 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$.
 $\Leftrightarrow (A, O) \overset{c}{\sim} (O, B)$.
- 初等变换的角度看向量组等价:

$$(A, O) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (A, B) \xrightarrow{\text{初等列变换}} (O, B).$$

- 如果 $m = l$, 则列向量组 A, B 等价 \Leftrightarrow 矩阵 $A \overset{c}{\sim} B$.
- 如果向量组 B 是向量组 A 的部分向量组, 则向量组 A, B 等价
 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$.

本次课内容

1. 最大无关组和向量组的秩
2. 向量组的秩和矩阵的秩

最大无关组的两种定义

设向量组 $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的一个部分组,

定义 1:

- 向量组 $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
- 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量 (若存在的话) 都线性相关,

则称向量组 A_0 为向量组 A 的一个最大线性无关组 (最大无关组).

最大无关组的两种定义

设向量组 $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的一个部分组,

定义 1:

- 向量组 $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
- 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量 (若存在的话) 都线性相关,

则称向量组 A_0 为向量组 A 的一个最大线性无关组 (最大无关组).

定义 2:

- 向量组 $A_0: \alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
- 向量组 A 中任意一个向量都可由向量组 A_0 线性表示,

此时 A_0 也为向量组 A 的一个最大无关组. (也称为极大无关组)

向量组的秩-向量组的等价不变量

由定义 2 知

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

向量组的秩-向量组的等价不变量

由定义 2 知

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

定义

最大无关组 A_0 所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩, 记为 R_A 或 $R(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

向量组的秩-向量组的等价不变量

由定义 2 知

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

定义

最大无关组 A_0 所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩, 记为 R_A 或 $R(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

注:

- 只含零向量的向量组的秩规定为 0.

向量组的秩-向量组的等价不变量

由定义 2 知

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

定义

最大无关组 A_0 所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩, 记为 R_A 或 $R(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

注:

- 只含零向量的向量组的秩规定为 0.
- 向量组 A, B 等价, 则 $R_A = R_B$.

向量组的秩-向量组的等价不变量

由定义 2 知

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

定义

最大无关组 A_0 所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩, 记为 R_A 或 $R(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

注:

- 只含零向量的向量组的秩规定为 0.
- 向量组 A, B 等价, 则 $R_A = R_B$.
- 当 $R_A = R_B = R_{(A,B)}$ 时, 维数相同的向量组 A, B 等价.

例 2

例

全体 n 维向量构成的向量组记为 \mathbb{R}^n . e_1, \dots, e_n 为 \mathbb{R}^n 的一个最大无关组, 故 \mathbb{R}^n 的秩为 n .

例 2

例

全体 n 维向量构成的向量组记为 \mathbb{R}^n . e_1, \dots, e_n 为 \mathbb{R}^n 的一个最大无关组, 故 \mathbb{R}^n 的秩为 n .

- 最大无关组的意义—少表示多, 有限表示无限:
即可以用有限个向量 (最大无关组) 来表示无穷多个向量.

例 4

例
设

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

的全体解向量构成的向量组为 S , 求 R_S .

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R_A < m$.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R_A < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R_A = m$.

$R(A)$ 和 R_A 的关系

定理 (定理 6)

矩阵的秩 = 它的列向量组的秩 = 它的行向量组的秩.

所以, 上次课中矩阵的秩可以换为向量组的秩:

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R_A < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R_A = m$.

因此, 我们可以不用在意 $R(A)$ 中的大写字母 A 是表示向量组, 还是表示矩阵.

性质

性质 (初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性)

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $A \stackrel{r}{\sim} B$, 则

- 向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 \Leftrightarrow 向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关;
- 向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 \Leftrightarrow 向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性相关;

性质

性质 (初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性)

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $A \stackrel{r}{\sim} B$, 则

- 向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 \Leftrightarrow 向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关;
- 向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 \Leftrightarrow 向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性相关;

证明: $A \stackrel{r}{\sim} B$, 则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解, 即:

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 成立 $\Leftrightarrow x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n = 0$ 成立.

例 (例 6)

求向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

的一个最大无关组, 并用最大无关组线性表示其余向量.

例 (例 6)

求向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

的一个最大无关组, 并用最大无关组线性表示其余向量.

思路:

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简形}.$

每个非零行首个非零元所在列对应的列向量线性无关.

例 7

例

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & a+2 & a \end{pmatrix},$$

问

- a 取何值时, 矩阵 A 的列向量组线性无关;
- a 取何值时, 矩阵 A 的列向量组线性相关, 求秩和一个最大无关组.

性质

- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示, 且 $R_A = R_B$, 则向量组等价.
(提示: 考虑合并向量组 (A, B) .)
- $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$.
- $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

练习

例

设向量组 $B: \beta_1, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times t},$$

向量组 A 线性无关. 证明: $R_B = R(K)$.

几点注释:

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B = t \Leftrightarrow R(K) = t$.
- 若 $s = t$, 则 K 为方阵. 此时, 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述: $B = AK_{s \times t}$, A 列满秩, 则 $R(B) = R(K)$;
特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
 $s = t$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

练习

例

设向量组 $B: \beta_1, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times t},$$

向量组 A 线性无关. 证明: $R_B = R(K)$.

几点注释:

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B = t \Leftrightarrow R(K) = t$.
- 若 $s = t$, 则 K 为方阵. 此时, 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述: $B = AK_{s \times t}$, A 列满秩, 则 $R(B) = R(K)$;
特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
 $s = t$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

练习

例

设向量组 $B: \beta_1, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times t},$$

向量组 A 线性无关. 证明: $R_B = R(K)$.

几点注释:

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B = t \Leftrightarrow R(K) = t$.
- 若 $s = t$, 则 K 为方阵. 此时, 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述: $B = AK_{s \times t}$, A 列满秩, 则 $R(B) = R(K)$;
特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
 $s = t$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

练习

例

设向量组 $B: \beta_1, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times t},$$

向量组 A 线性无关. 证明: $R_B = R(K)$.

几点注释:

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B = t \Leftrightarrow R(K) = t$.
- 若 $s = t$, 则 K 为方阵. 此时, 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述: $B = AK_{s \times t}$, A 列满秩, 则 $R(B) = R(K)$;
特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
 $s = t$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

小结

- 向量组的秩、最大无关组.
- 求向量组的秩和最大无关组，用最大无关组表示其他向量.
- 向量组的秩和矩阵的秩的关系.

第八周作业

- Page₁₃₂ 3, 4, 6, 7
- Page₁₄₀ 1-(3), 2, 3, 7-(2), 8
- Page₁₄₈ 2-(2), 3, 6, 7, 8
- Page₁₅₆ 1-(4)(5), 2-(2), 5, 7

例

设向量组 $B: \beta_1, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1, \dots, \beta_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) K_{s \times t},$$

向量组 A 线性无关. 证明: $R_B = R(K)$.

提示: K 的列向量组的最大无关组决定向量组 B 的一个最大无关组.

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 21 日