

# 线性代数-11

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学, 数学学院

# 本次课内容

1. 向量组的线性表示
2. 向量组的线性相关性

- 将线性方程组  $A_{m \times n} X_n = \beta_m$  的系数矩阵  $A$  进行列分块,

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = \beta.$$

- 将线性方程组  $A_{m \times n} X_n = \beta_m$  的系数矩阵  $A$  进行列分块,

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = \beta.$$

- 向量组: 若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合.  
例如  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$  是一个含  $n$  个  $m$  维向量的向量组,  
记为  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ .

- 将线性方程组  $A_{m \times n} X_n = \beta_m$  的系数矩阵  $A$  进行列分块,

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = \beta.$$

- 向量组: 若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合.  
例如  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$  是一个含  $n$  个  $m$  维向量的向量组,  
记为  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ .
- 线性组合: 形如

$$\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

的表达式称为向量组  $A$  的一个线性组合.

- 若

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

则称向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示.

- $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta$  有解

- 若

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

则称向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示.

- $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta$  有解  
 $\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$

# 线性表示

- 若

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

则称向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示.

- $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta$  有解  
 $\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$

定理 (定理 1)

向量  $\beta$  可由向量组  $A : \alpha_1, \cdots, \alpha_n$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A).$

注: 任意有序的向量组  $A : \alpha_1, \cdots, \alpha_n$  都对应矩阵  $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ . 为方便, 我们把矩阵  $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$  也记为  $A$ .



- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$

# 线性表示

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  有解  
 $\Leftrightarrow$

# 线性表示

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$ .

## 定理 (定理 2)

向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$ .

# 线性表示

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$ .

## 定理 (定理 2)

向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$ .

## 推论

向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  和向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  等价  
 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B)$ .

## 例 1

例  
设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

证明向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 并求出表达式.

解法:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简形}.$$

## 例 2

例  
设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  和向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  等价.

解法:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简形}.$$

## “秩”定理

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$

## “秩”定理

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$   
 $\Rightarrow R(B) \leq R(A, B) = R(A).$



## “秩”定理

- 向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Leftrightarrow$  矩阵方程  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  有解  
 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$   
 $\Rightarrow R(B) \leq R(A, B) = R(A).$

### 定理 (定理 3)

向量组  $B: \beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示  
 $\Rightarrow R(B) \leq R(A).$

## 例 3

### 例 (例 3)

设  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  构成  $n \times m$  矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $n$  阶单位矩阵  $E = (e_1, \dots, e_n)$  的列向量称为单位坐标向量.  
证明  $e_1, \dots, e_n$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

## 例 3

### 例 (例 3)

设  $n$  维向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  构成  $n \times m$  矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $n$  阶单位矩阵  $E = (e_1, \dots, e_n)$  的列向量称为单位坐标向量.

证明  $e_1, \dots, e_n$  可由向量组  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

注:

- 矩阵描述: 存在矩阵  $K$ , 使得  $AK = E_n \Leftrightarrow R(A) = n$ ;
- 矩阵方程描述:  $AX = E$  有解  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

# 线性相关性质

## 定义

给定向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  若存在不全为 0 的数  $k_1, \dots, k_n$ , 使得

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = O,$$

则称向量组  $A$  线性相关, 否则称为线性无关.

# 线性相关性质

## 定义

给定向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  若存在不全为 0 的数  $k_1, \dots, k_n$ , 使得

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = O,$$

则称向量组  $A$  线性相关, 否则称为线性无关.

- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow A_{m \times n} X_n = O$  有非零解  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;  
向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow A_{m \times n} X_n = O$  有唯一零解  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

# 线性相关性质

## 定义

给定向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  若存在不全为 0 的数  $k_1, \dots, k_n$ , 使得

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = O,$$

则称向量组  $A$  线性相关, 否则称为线性无关.

- 向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow A_{m \times n} X_n = O$  有非零解  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;  
向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow A_{m \times n} X_n = O$  有唯一零解  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

## 定理 (定理 4)

向量组  $A$  线性相关  $\Leftrightarrow R(A) < n$ ;

向量组  $A$  线性无关  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

## 例 4

例

讨论  $n$  维单位坐标向量  $e_1, \dots, e_n$  的线性相关性.

## 例 5

例  
设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

讨论向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关性.



## 例 6

例

讨论向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,

$$\begin{cases} \beta_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 &= \alpha_3 + \alpha_1 \end{cases}$$

证向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关.

证明 1: 设有  $x_1, x_2, x_3$  使得

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = O$$

.....

得  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . 故  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关.

## 定理 5

### 定理 (定理 5)

- 1、 若向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则向量组  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  也线性相关; 若向量组  $B$  线性无关, 则向量组  $A$  也线性无关.
  - 2、 设  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  包含  $m$  个  $n$  维向量, 若  $m > n$ , 则向量组  $A$  线性相关. 特别地,  $n+1$  个  $n$  维向量一定线性相关.
  - 3、  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关,  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示, 且表达式唯一.
- 部分线性相关  $\Rightarrow$  整体线性相关;  
整体线性无关  $\Rightarrow$  部分线性无关.
  - 长尾相关  $\Rightarrow$  短尾相关; 短尾无关  $\Rightarrow$  长尾无关.
  - $AX = \beta$ ,  $R(A, \beta) < R(A) = m$ ,  $A$  列满秩, 则有唯一解.

## 定理 5

### 定理 (定理 5)

- 1、若向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则向量组  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  也线性相关; 若向量组  $B$  线性无关, 则向量组  $A$  也线性无关.
  - 2、设  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  包含  $m$  个  $n$  维向量, 若  $m > n$ , 则向量组  $A$  线性相关.  
特别地,  $n+1$  个  $n$  维向量一定线性相关.
  - 3、 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关,  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示, 且表达式唯一.
- 部分线性相关  $\Rightarrow$  整体线性相关;  
整体线性无关  $\Rightarrow$  部分线性无关.
  - 长尾相关  $\Rightarrow$  短尾相关; 短尾无关  $\Rightarrow$  长尾无关.
  - $AX = \beta$ ,  $R(A, \beta) < R(A) = m$ ,  $A$  列满秩, 则有唯一解.

## 定理 5

### 定理 (定理 5)

- 1、若向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则向量组  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  也线性相关; 若向量组  $B$  线性无关, 则向量组  $A$  也线性无关.
  - 2、设  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  包含  $m$  个  $n$  维向量, 若  $m > n$ , 则向量组  $A$  线性相关. 特别地,  $n+1$  个  $n$  维向量一定线性相关.
  - 3、 $A: \alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关,  $B: \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则向量  $\beta$  可由向量组  $A$  线性表示, 且表达式唯一.
- 部分线性相关  $\Rightarrow$  整体线性相关;  
整体线性无关  $\Rightarrow$  部分线性无关.
  - 长尾相关  $\Rightarrow$  短尾相关; 短尾无关  $\Rightarrow$  长尾无关.
  - $AX = \beta$ ,  $R(A, \beta) < R(A) = m$ ,  $A$  列满秩, 则有唯一解.

## 例 7

例

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 向量组  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 证明:

- $\alpha_1$  可由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表示;
- $\alpha_4$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

# 线性相关的判定

- 向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性相关  
 $\Leftrightarrow$  存在不全为 0 的数  $k_1, \dots, k_n$  使得

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = O,$$

$\Leftrightarrow n$  元齐次线性方程组  $AX_n = O$  有非零解

$\Leftrightarrow$  矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  的秩小于向量的个数,  $R(A) < n$

$\Leftrightarrow$  向量组  $A$  中至少有一个向量能由其余  $n-1$  个向量线性表示.

# 线性无关的判定

- 向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性无关  
 $\Leftrightarrow$  若  $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = O$ , 则必有

$$k_1 = \dots = k_n = 0$$

$\Leftrightarrow n$  元齐次线性方程组  $AX_n = O$  只有零解

$\Leftrightarrow$  矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  的秩等于向量的个数,  $R(A) = n$  列满秩

$\Leftrightarrow$  向量组  $A$  中任何一个向量都不能由其余  $n-1$  个向量线性表示.

# 小结

第二、三两章是用矩阵语言来描述线性方程组，而这一章是用向量语言 (几何语言) 来描述线性方程组和矩阵.

- 向量组、线性组合、线性表示、向量组的等价、线性相关和线性无关;
- 判断是否可以线性表示、是否等价、是否线性相关和线性无关.
- 5 个定理: 联系矩阵相关结论.



- P110: 2, 3, 4, 9.

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2022 年 10 月 9 日