

线性代数-11：第二、三章习题课

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 12 日

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.
 - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) > R(A)$.
(等价说法 $R(A, \beta) \neq R(A)$ 或 $R(A, \beta) = R(A) + 1$).

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.
 - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) > R(A)$.
(等价说法 $R(A, \beta) \neq R(A)$ 或 $R(A, \beta) = R(A) + 1$).
 - 有解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.
 - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) > R(A)$.
(等价说法 $R(A, \beta) \neq R(A)$ 或 $R(A, \beta) = R(A) + 1$).
 - 有解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
(A 为方阵时, 此时 A 可逆, 可用 **Cramer** 法则.)

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.
 - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) > R(A)$.
(等价说法 $R(A, \beta) \neq R(A)$ 或 $R(A, \beta) = R(A) + 1$).
 - 有解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
(A 为方阵时, 此时 A 可逆, 可用 Carmer 法则.)
 - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) > n$.

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.
 - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) > R(A)$.
(等价说法 $R(A, \beta) \neq R(A)$ 或 $R(A, \beta) = R(A) + 1$).
 - 有解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
(A 为方阵时, 此时 A 可逆, 可用 Carmer 法则.)
 - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) < n$.
- 齐次线性方程组 $AX = 0$ 解的存在性.

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.
 - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) > R(A)$.
(等价说法 $R(A, \beta) \neq R(A)$ 或 $R(A, \beta) = R(A) + 1$).
 - 有解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
(A 为方阵时, 此时 A 可逆, 可用 Carmer 法则.)
 - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) < n$.
- 齐次线性方程组 $AX = 0$ 解的存在性.
 - 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.
 - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) > R(A)$.
(等价说法 $R(A, \beta) \neq R(A)$ 或 $R(A, \beta) = R(A) + 1$).
 - 有解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
(A 为方阵时, 此时 A 可逆, 可用 Carmer 法则.)
 - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) < n$.
- 齐次线性方程组 $AX = 0$ 解的存在性.
 - 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
 - 有非零解 (或无穷解) $\Leftrightarrow R(A) < n$.

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.
 - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) > R(A)$.
(等价说法 $R(A, \beta) \neq R(A)$ 或 $R(A, \beta) = R(A) + 1$).
 - 有解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
(A 为方阵时, 此时 A 可逆, 可用 Carmer 法则.)
 - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) < n$.
- 齐次线性方程组 $AX = 0$ 解的存在性.
 - 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
 - 有非零解 (或无穷解) $\Leftrightarrow R(A) < n$.
- 方程组 $AX = B$ 解的存在性.

线性方程组-回顾

- 通过初等行变换求解线性方程组.
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性.
 - 无解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) > R(A)$.
(等价说法 $R(A, \beta) \neq R(A)$ 或 $R(A, \beta) = R(A) + 1$).
 - 有解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
 - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
(A 为方阵时, 此时 A 可逆, 可用 Carmer 法则.)
 - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A) < n$.
- 齐次线性方程组 $AX = 0$ 解的存在性.
 - 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.
(其中 n 为未知量个数, 此时系数矩阵 A 列满秩.)
 - 有非零解 (或无穷解) $\Leftrightarrow R(A) < n$.
- 方程组 $AX = B$ 解的存在性.
 - 有解 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$.

矩阵和线性方程组

- 主要工具:

矩阵和线性方程组

- 主要工具：
 - 初等行变换.

矩阵和线性方程组

- 主要工具：
 - 初等行变换.
- 基本要求:

矩阵和线性方程组

- 主要工具：
 - 初等行变换.
- 基本要求：
 - 通过初等行变换把矩阵化为行最简形.

矩阵和线性方程组

- 主要工具：
 - 初等行变换.
- 基本要求：
 - 通过初等行变换把矩阵化为行最简形.
- 基本题型:

矩阵和线性方程组

- 主要工具:
 - 初等行变换.
- 基本要求:
 - 通过初等行变换把矩阵化为行最简形.
- 基本题型:
 - 求解矩阵方程 $AX = B$.
81 页例 6, 83 页 5 和 6, 91 页 9、10 和 11.

矩阵和线性方程组

- 主要工具:
 - 初等行变换.
- 基本要求:
 - 通过初等行变换把矩阵化为行最简形.
- 基本题型:
 - 求解矩阵方程 $AX = B$.
81 页例 6, 83 页 5 和 6, 91 页 9、10 和 11.
 - 讨论含参量线性方程组何时无解、有唯一解、有无穷解, 并在有无穷解时求通解.
116 页例 3 和例 4, 107 页例 4, 108 页例 6, 113 页 5、6、7 和 9, 118 页 6 和 7, 121 页 5、6、7、8、9.

本次课内容

1. 讨论含参量方阵的秩：
行列式 or 初等变换
2. 多项式和摄动法
3. 矩阵的幂级数
4. 秩和方阵的等价分类
5. 秩和伴随矩阵
6. 分块矩阵的初等变换
7. 特殊矩阵
8. 矩阵的多项式

1. 讨论含参方阵的秩： 行列式 or 初等变换

含参线性方程组

例
设

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时, 方程组有唯一解, 无解, 无穷解? 并在有无穷解时求通解.

- 初等变换法: $(A, \beta) \xrightarrow{r}$ 行阶梯形, 讨论 $R(A)$ 和 $R(A, \beta)$. 求无穷解时, 行阶梯形 \xrightarrow{r} 行最简形. 初等变换时, 注意分母不要出现参数.
- 行列式法: $|A| = 0$ 解出未知参数, 分别单独讨论. 求 $|A|$ 时, 先尽量用行变换化简, 方便后面单独讨论.

1. 讨论含参方阵的秩： 行列式 or 初等变换

循环矩阵的秩

循环矩阵的秩

- 循环矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}_n$$

其中 $b \neq 0$.

- 则

$$R(A) = \begin{cases} 1, & \text{若 } a = b \\ n - 1, & \text{若首行之和等于零, } a + (n - 1)b = 0 \\ n, & \text{其他.} \end{cases}$$

- 88 页 1-1, 89 页 6, 91 页 1-4.

2. 多项式和摄动法

例

设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 为 n 次多项式. 证明: 如果 $f(x)$ 至少有 $n+1$ 个不同的零点, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明:

推论

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为两个 n 次多项式. 证明: 如果 $f(x) - g(x)$ 至少有 $n+1$ 个不同的零点, 则 $f(x) \equiv g(x)$.

严格对角占优矩阵

- 若方阵 $A = (a_{ij})$ 满足:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 A 为严格对角占优矩阵.

- 例如

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 严格对角占优矩阵是可逆的.
- 对任意矩阵 A , x 足够大时, $xE + A$ 是严格对角占优的, 故可逆.

摄动法

- 一些结论在可逆的条件下往往容易得到，不可逆情况可以借助“摄动法”转为可逆条件下证明.

例 (93 页 19)

证明 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

- A 可逆时, $|A| \neq 0$. 对 $AA^* = |A|E$ 两边取行列式
 $\implies |A| \cdot |A^*| = |A|^n \xrightarrow{|A| \neq 0} |A^*| = |A|^{n-1}$.
- A 不可逆时, 如何证?

- 考虑 $xE + A$, 令

$$f(x) = |(xE + A)^*|, \quad g(x) = |xE + A|^{n-1}$$

取充分多的互不相同的 x_i , 使得 $x_i E + A$ 可逆. 从而

$$|(x_i E + A)^*| = |x_i E + A|^{n-1}.$$

即 $f(x_i) = g(x_i)$. 所以 $f(x) - g(x)$ 有足够多的互不相同的零点, 根据上面推论, 有 $f(x) \equiv g(x)$.

进一步, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是多项式函数, 是连续的. 所以

$$f(0) = g(0), \text{ i.e. } |A^*| = |A|^{n-1}.$$

3. 矩阵的幂级数

矩阵的幂级数

例 (91 页 7)

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$. 求 A^{-1} .

• 建议 $(A, E) \xrightarrow{r} (E, A^{-1})$.

• 令 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$, $B^4 = 0$.

则 $A = E + B + B^2 + B^3$, $A^{-1} = E - B$.

例 (91 页 7)

已知 $B^n = O$, 证明 $(E - B)^{-1} = E + B + B^2 + \cdots + B^{n-1}$.

- 对比幂级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots.$$

- 在研究生阶段的线性代数中, 可以用矩阵的幂级数定义矩阵函数

$$e^A, \sin A, \cdots.$$

4. 秩和方阵的等价分类

秩和方阵的等价分类

思考题：设 A, B 都为 n 阶方阵. 若 $A \sim B$, 则称 A 和 B 属于同一个等价类. 问 n 阶方阵全体有多少个等价类?

秩和方阵的等价分类

思考题：设 A, B 都为 n 阶方阵. 若 $A \sim B$, 则称 A 和 B 属于同一个等价类. 问 n 阶方阵全体有多少个等价类？

- $n+1$ 个等价类, 且每一个等价类里的标准形分别是:

$$R_0 = O, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, R_n = E_n.$$

矩阵的秩和方阵的等价分类

1. 设 A 为 n 阶方阵,

- $R(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$;
- $R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为非零列向量
 $\Leftrightarrow A$ 的任意两行 (两列) 成比例;
- $R(A) = n \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E$
 $\Leftrightarrow A$ 可以写出有限个初等矩阵的乘积
 $\Leftrightarrow AX = 0$ 只有唯一零解
 $\Leftrightarrow A$ 的列 (行) 向量组线性无关
 $\Leftrightarrow A$ 没有零特征值.

矩阵的秩和矩阵的等价

2. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵,

- $R(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$;
- $R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为非零列向量 \Leftrightarrow 行列成比例.
- $R(A_{m \times n}) = n \Leftrightarrow A$ 列满秩
 $\Leftrightarrow A \sim \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$
 \Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使得 $PA = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$
 \Rightarrow 左消去律成立: 若 $AX = AY \Leftrightarrow X = Y$,
或 $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

例题

例

$R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为非零列向量.

$$\xRightarrow{A \text{ 为方阵}} A^n = (\beta^T \alpha)^{n-1} A.$$

例题

例

$R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为非零列向量.

$$\xRightarrow{A \text{ 为方阵}} A^n = (\beta^T \alpha)^{n-1} A.$$

例

秩 $R(A) = r$ 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

例题

例

$R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为非零列向量.

$$\xrightarrow{A \text{ 为方阵}} A^n = (\beta^T \alpha)^{n-1} A.$$

例

秩 $R(A) = r$ 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

例 (122 页 15)

A 列满秩, $AB = C$. 证明: $BX = 0$ 和 $CX = 0$ 同解.

5. 秩和伴随矩阵

例 (93 页 18)

设 A 为 n 阶方阵, 则

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n; \\ 1, & R(A) = n - 1; \\ 0, & R(A) \leq n - 2. \end{cases}$$

- $R(A) = n \Leftrightarrow R(A^*) = n, A^* = |A| \cdot A^{-1}, |A^*| = |A|^{n-1};$
- $R(A) = n - 1 \Leftrightarrow R(A^*) = 1;$
- $R(A) \leq n - 2 \Leftrightarrow A^* = O.$

6. 分块矩阵的初等变换

分块矩阵的初等变换和秩不等式

- 分块矩阵的初等变换：若矩阵 A 可逆，令 $r_2 - CA^{-1}r_1$ ，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例 (88 页秩的性质 7)

若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = O$ ，则 $R(A) + R(B) \leq n$.

证明：

$$\begin{aligned} R(A) + R(B) &= R \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \leq R \begin{pmatrix} E & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \\ &= R \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= n \end{aligned}$$

7. 特殊矩阵

几种特殊矩阵

5. 设 A 为 n 阶方阵,

- 若存在 n 使得 $A^n = A$, 则称 A 为幂等矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = E$, 则称 A 为幂幺矩阵;
特别地, 若 $A^2 = E$, 则称 A 为对合矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = O$, 则称 A 为幂零矩阵.
- 若 $AA^T = E$, 则称 A 为正交矩阵.

例

- 若 $\alpha^T \beta = 1$, 则 $A = \alpha \beta^T$ 为幂等矩阵.
- 初等矩阵 $E(i, j)$ 为对合矩阵.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为幂零矩阵.
- $H = E - 2XX^T$ 为正交矩阵, 其中 $X^T X = 1$.

特殊矩阵

例 (泡利矩阵)

泡利矩阵是对合矩阵.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

在量子力学中, 泡利矩阵是泡利方程中描述磁场和自旋之间相互作用的一项.

8. 矩阵的多项式

矩阵的多项式

例

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求 A^{10} , B^9 , B^6 .

- 二项式展开: $(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n$.
- 若存在可逆阵 P 使得 $A = P\Lambda P^{-1}$, 其中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为对角矩阵, 则

$$f(A) = Pf(\Lambda)P^{-1} = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}.$$

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 12 日