线性代数-12

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 16 日

本次课内容

1. 向量组的线性表示

2. 向量组的线性相关性

- 将线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\boldsymbol{\beta}_m$ 的系数矩阵 A 进行列分块,

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

- 将线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\boldsymbol{\beta}_m$ 的系数矩阵 A 进行列分块,

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

  - 向量组: 若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合. 例如 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是一个含 n 个 m 维向量的向量组, 记为 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$.

- 将线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \boldsymbol{\beta}_m$ 的系数矩阵 A 进行列分块,

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}.$$

  - 向量组: 若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合. 例如 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是一个含 n 个 m 维向量的向量组, 记为 $A : \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$.
  - 线性组合: 形如

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

的表达式称为向量组 A 的一个线性组合.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -5 & 7\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^T\\ \boldsymbol{\beta}_2^T\\ \boldsymbol{\beta}_3^T\end{pmatrix}$$

所有列向量构成列向量组:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\-1\\7\end{pmatrix}.$$

所有行向量构成行向量组:

$$\boldsymbol{\beta}_1^T=(1,2,1,-2),\boldsymbol{\beta}_2^T=(2,3,0,-1),\boldsymbol{\beta}_3^T=(1,-1,-5,7).$$

- 若
$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$
则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.
- $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)X_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解

向量的线性表示

- 若
$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$
则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.
- $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX = (\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解
$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

- 若

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

- $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX = (\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解

$$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n).$$

定理 (定理 1)

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\boldsymbol{\beta}) = R(A)$.

注：任意有序的向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 一一对应. 为方便, 我们把矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也记为 A.

注:

给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$

注:

给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$

- n 维零向量可由任意 n 维向量组线性表示:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_m.$$

注:

给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$

- n 维零向量可由任意 n 维向量组线性表示:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_m.$$

- 向量组中任一向量都可由这个向量组线性表示:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i-1} + 1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_m.$$

注:

给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$

- n 维零向量可由任意 n 维向量组线性表示:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_m.$$

- 向量组中任一向量都可由这个向量组线性表示:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i-1} + 1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_m.$$

- 设 n 维向量组
$e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \cdots, 0)^T, \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)^T$,
则有

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n.$$

我们称 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 n 维基本单位向量组.

例

设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix},$$

证明向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并求出表达式.

解法：求解线性方程组 $AX=\beta$，

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\text{行最简形}.$$

例

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\a+2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\b\end{pmatrix},$$

问 a,b 取何值时，

- $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.
- $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示唯一.
- $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示不唯一.

- 向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l$ 可由向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

向量组的线性表示

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 A 线性表示

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$ 有解

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}_{m\times l}$$

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$ 有解
  $\Leftrightarrow$ $R(A,B)=R(A)$.

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}_{m\times l}$$

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示
$\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 A 线性表示
$\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$ 有解
$\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$.

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}_{m\times l}$$

定理 (定理 2)

向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示
$\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$.

- 若向量组 A, B 可以相互线性表示，则称向量组 A, B 等价.

向量组的等价满足反身性、对称性、传递性，是一种等价关系.

例 (128 页例 3)

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 和三维基本单位向量组 e_1, e_2, e_3 等价，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

性质

- 若矩阵 $A \overset{r}{\sim} B$, 则 A, B 的行向量组等价;
- 若矩阵 $A \overset{c}{\sim} B$, 则 A, B 的列向量组等价.

性质

- 若矩阵 $A \overset{r}{\sim} B$, 则 A, B 的行向量组等价;
- 若矩阵 $A \overset{c}{\sim} B$, 则 A, B 的列向量组等价.

证明: $A_{m\times n} \overset{c}{\sim} B_{m\times n}$, 则存在可逆矩阵 Q, 使得

$$AQ = B$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n).$$

则 B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示, 反之, 由 $BQ^{-1} = A$ 得 A 的列向量组可由 B 的列向量组线性表示.

向量组的等价

- 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 A, B 可以相互线性表示

- 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 A, B 可以相互线性表示 $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解

向量组的等价

- 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 A, B 可以相互线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
  $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$ 且 $R(B) = R(B, A)$

向量组的等价

- 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 A, B 可以相互线性表示
$\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
$\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$ 且 $R(B) = R(B, A)$
$\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B) = R(B, A) = R(B)$.

- 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 A, B 可以相互线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ 且 $R(B) = R(B, A)$
  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B, A) = R(B)$.

推论 (1)

向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 和向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 等价
$\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B)$.

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$

控" 秩" 定理

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$
  $\Rightarrow R(B)\leq R(A,B)=R(A)$.

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$
  $\Rightarrow R(B)\le R(A,B)=R(A)$.

推论 (2)

向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
$\Rightarrow R(B)\le R(A)$.

例

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 等价.

思路：求 $R(A), R(A,B), R(B)$,

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行阶梯/行最简形}.$$

例

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

其中 $t \in \mathbb{R}$ 为参数.

- t 取何值时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 等价.
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 等价时, 写出相应线性表示.

例

设 n 维向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, 证明基本单位向量组 $e_1,\cdots,e_n$ 可由 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

例

设 n 维向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, 证明基本单位向量组 $e_1,\cdots,e_n$ 可由 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

注：

- 矩阵描述: 存在矩阵 K, 使得 $AK=E_n \Leftrightarrow R(A)=n$;
- 矩阵方程描述: $AX=E$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

定义

给定向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 若存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0,$$

则称向量组 A 线性相关.
若仅当 $k_1=\cdots=k_n=0$ 时, $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$ 才成立, 则称向量组 A 线性无关.

定义

给定向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 若存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0,$$

则称向量组 A 线性相关.
若仅当 $k_1=\cdots=k_n=0$ 时, $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$ 才成立, 则称向量组 A 线性无关.

- 只含 1 个零向量的向量组线性相关.
- 2 个三维向量线性无关 $\Leftrightarrow$ 不共线.
- 3 个三维向量线性无关 $\Leftrightarrow$ 不共面.

- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow AX_n = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$;
  向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow AX_n = 0$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.

- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow AX_n = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$;
  向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow AX_n = 0$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.

定理 (定理 4)

向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < n$;
向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = n$.

- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow AX_n = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$;
  向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow AX_n = 0$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.

定理 (定理 4)

向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < n$;
向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = n$.

推论 (1)

n 个 n 维向量线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

线性相关性

- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow AX_n = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$;
  向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow AX_n = 0$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.

定理 (定理 4)

向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < n$;
向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = n$.

推论 (1)

n 个 n 维向量线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

推论 (2)

当 $m > n$ 时, m 个 n 维向量线性相关. 特别地, $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

134 页例 1

例

证明 n 维基本单位向量 $e_1, \cdots, e_n$ 线性无关.

例 2

例

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

例

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，

$$\begin{cases} \beta_1 & = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 & = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 & = \alpha_3 + \alpha_1 \end{cases}$$

证向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例 4⋆⋆⋆

例

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 & = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 & = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3 & = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1 \end{cases}$$

证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

证明 1: 设有 x_1, x_2, x_3 使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = 0$$

$$\underline{\cdots\cdots}$$

得 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

例 3

例

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性无关, a, b, c 取何值时, 向量组 $a\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, b\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, c\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

- $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示, 且表达式唯一.
  - $AX=\boldsymbol{\beta}$, $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=m$, A 列满秩, 则有唯一解.
- 设向量组 A 是向量组 B 的一个部分向量组, 则
  - A 线性相关 $\Rightarrow$ B 线性相关, 即部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关;
  - B 线性无关 $\Rightarrow$ A 线性无关, 即整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关.
- 设向量组 A 是向量组 B 中的向量尾端增加一些分量后得到的向量组, 则
  - A 线性相关 $\Rightarrow$ B 线性相关, 即长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关;
  - B 线性无关 $\Rightarrow$ A 线性无关, 即短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且 $s>m$, 则 B 线性相关. 即可以被包含向量个数更少的向量组线性表示的向量组，必线性相关.

性质

- $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示, 且表达式唯一.
  - $AX=\boldsymbol{\beta}$, $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=m$, A 列满秩, 则有唯一解.
- 设向量组 A 是向量组 B 的一个部分向量组, 则
  - A 线性相关 $\Rightarrow$ B 线性相关, 即部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关;
  - B 线性无关 $\Rightarrow$ A 线性无关, 即整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关.
- 设向量组 A 是向量组 B 中的向量尾端增加一些分量后得到的向量组, 则
  - A 线性相关 $\Rightarrow$ B 线性相关, 即长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关;
  - B 线性无关 $\Rightarrow$ A 线性无关, 即短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且 $s>m$, 则 B 线性相关. 即可以被包含向量个数更少的向量组线性表示的向量组, 必线性相关.

性质

- $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示, 且表达式唯一.
  - $AX=\boldsymbol{\beta}$, $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=m$, A 列满秩, 则有唯一解.
- 设向量组 A 是向量组 B 的一个部分向量组, 则
  - A 线性相关 $\Rightarrow$ B 线性相关, 即部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关;
  - B 线性无关 $\Rightarrow$ A 线性无关, 即整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关.
- 设向量组 A 是向量组 B 中的向量尾端增加一些分量后得到的向量组, 则
  - A 线性相关 $\Rightarrow$ B 线性相关, 即长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关;
  - B 线性无关 $\Rightarrow$ A 线性无关, 即短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且 $s>m$, 则 B 线性相关. 即可以被包含向量个数更少的向量组线性表示的向量组，必线性相关.

性质

- $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示, 且表达式唯一.
  - $AX=\boldsymbol{\beta}$, $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=m$, A 列满秩, 则有唯一解.
- 设向量组 A 是向量组 B 的一个部分向量组, 则
  - A 线性相关 $\Rightarrow$ B 线性相关, 即部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关;
  - B 线性无关 $\Rightarrow$ A 线性无关, 即整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关.
- 设向量组 A 是向量组 B 中的向量尾端增加一些分量后得到的向量组, 则
  - A 线性相关 $\Rightarrow$ B 线性相关, 即长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关;
  - B 线性无关 $\Rightarrow$ A 线性无关, 即短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且 $s>m$, 则 B 线性相关. 即可以被包含向量个数更少的向量组线性表示的向量组, 必线性相关.

向量个数角度:

- 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关;

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\text{线性相关} \Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}\text{线性相关}.$$

- 整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关;

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}\text{线性无关} \Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\text{线性无关}.$$

向量维数角度:

- 长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} \text{长尾相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{短尾相关}.$$

- 短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{短尾无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} \text{长尾无关}.$$

例

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，证明：

- α_1 可由 α_2, α_3 线性表示；
- α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

例

已知
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$
若 $A\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，求 a.

线性表示的判定

- $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$
  $\Leftrightarrow AX = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)X_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解
  $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.

- $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$
  $\Leftrightarrow AX = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)X_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解
  $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.
- 向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l$ 可由向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)X = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$.

线性表示的判定

- $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$
  $\Leftrightarrow AX = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)X_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解
  $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.
- 向量组 $B : \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l$ 可由向量组 $A : \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)X = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$.
- 向量组 A, B 等价
  $\Leftrightarrow$ 向量组 A, B 可以相互线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B)$
  $\overset{\text{个数相同}}{\Longleftrightarrow} A \overset{c}{\sim} B$.

线性相关的判定

- 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关
  $\Leftrightarrow$ 存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$ 使得
  $$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0,$$
  $\Leftrightarrow$ n 元齐次线性方程组 $AX_n=0$ 有非零解
  $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的秩小于列向量的个数, $R(A)<n$
  $\Leftrightarrow$ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

线性无关的判定

- 向量组 $A : \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关
  $\Leftrightarrow$ 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$, 则必有
  $$k_1 = \cdots = k_n = 0$$
  $\Leftrightarrow$ n 元齐次线性方程组 $AX_n = 0$ 只有零解
  $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 的秩等于列向量的个数, $R(A) = n$, 列满秩
  $\Leftrightarrow$ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

小结

第三章是用矩阵语言来描述线性方程组, 而这一章是用向量语言 (几何语言) 来描述线性方程组.

- 向量组、线性组合、线性表示、向量组的等价、线性相关和线性无关;
- 判断是否可以线性表示、是否等价、是否线性相关和线性无关.
- 本次课结论: 联系线性方程组解的存在性和秩的关系.

第八周作业

- Page_{132} 3, 4, 6, 7
- Page_{140} 1-(3), 2, 3, 7-(2), 8
- Page_{148} 2-(2), 3, 6, 7, 8
- Page_{156} 1-(4)(5), 2-(2), 5, 7

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 10 月 16 日