

线性代数-17

主讲: 吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 1 日

1. 方阵的相似

1. 特征值和特征向量的定义

2. 特征值的性质

3. 特征向量的性质

方阵的相似

定义

设 A, B 为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 P 使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称矩阵 A, B 相似, 记为 $A \xrightarrow{\text{相似}} B$.

- 线性变换在不同基下的矩阵是相似的.
- 相似是一种等价关系, 即满足反身性、对称性和传递性.

相似不变量

设 $A \xrightarrow{\text{相似}} B$, 则

- A 和 B 等价, $R(A) = R(B)$.
- $|A| = |B|$, 所以 A 可逆当且仅当 B 可逆.
- $\varphi(A) \xrightarrow{\text{相似}} \varphi(B)$, 其中 $\varphi(x)$ 是一个多项式.

相似不变量

设 $A \xrightarrow{\text{相似}} B$, 则

- A 和 B 等价, $R(A) = R(B)$.
- $|A| = |B|$, 所以 A 可逆当且仅当 B 可逆.
- $\varphi(A) \xrightarrow{\text{相似}} \varphi(B)$, 其中 $\varphi(x)$ 是一个多项式.

问题: 相似的矩阵最本质的共性是什么?

相似不变量

设 $A \xrightarrow{\text{相似}} B$, 则

- A 和 B 等价, $R(A) = R(B)$.
- $|A| = |B|$, 所以 A 可逆当且仅当 B 可逆.
- $\varphi(A) \xrightarrow{\text{相似}} \varphi(B)$, 其中 $\varphi(x)$ 是一个多项式.

问题: 相似的矩阵最本质的共性是什么?

⇒ 特征值和特征多项式.

相似不变量

设 $A \stackrel{\text{相似}}{\sim} B$, 则

- A 和 B 等价, $R(A) = R(B)$.
- $|A| = |B|$, 所以 A 可逆当且仅当 B 可逆.
- $\varphi(A) \stackrel{\text{相似}}{\sim} \varphi(B)$, 其中 $\varphi(x)$ 是一个多项式.

问题: 相似的矩阵最本质的共性是什么?

⇒ 特征值和特征多项式.

- 特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$;

特征值: $f(\lambda) = 0$ 的根.

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值, 非零向量 X 为 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值, 非零向量 X 为 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值, 非零向量 X 为 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$
 $\Leftrightarrow (\lambda E - A)X = 0$ 有非零解 X

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值, 非零向量 X 为 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$
 $\Leftrightarrow (\lambda E - A)X = 0$ 有非零解 X
 $\Leftrightarrow R(\lambda E - A) < n \Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值, 非零向量 X 为 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$
 $\Leftrightarrow (\lambda E - A)X = 0$ 有非零解 X
 $\Leftrightarrow R(\lambda E - A) < n \Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$
 \Rightarrow 特征值都为 $|\lambda E - A| = 0$ 的解.

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值, 非零向量 X 为 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

• 存在非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$

$\Leftrightarrow (\lambda E - A)X = 0$ 有非零解 X (特征向量为 $(\lambda E - A)X = 0$ 的非零解)

$\Leftrightarrow R(\lambda E - A) < n \Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

\Rightarrow 特征值都为 $|\lambda E - A| = 0$ 的解.

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值, 非零向量 X 为 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$
 $\Leftrightarrow (\lambda E - A)X = 0$ 有非零解 X (特征向量为 $(\lambda E - A)X = 0$ 的非零解)
 $\Leftrightarrow R(\lambda E - A) < n \Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$
 \Rightarrow 特征值都为 $|\lambda E - A| = 0$ 的解.
- 特征多项式: $f(\lambda) = |\lambda E - A|$; 特征方程: $f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$

求特征向量

设 $\lambda = \lambda_i$ 为矩阵 A 的一个特征值, 则

$$(\lambda E - A)X = 0$$

的任意非零解 $X = P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量.

求特征向量

设 $\lambda = \lambda_i$ 为矩阵 A 的一个特征值, 则

$$(\lambda E - A)X = 0$$

的任意非零解 $X = P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量.

例 (例 1)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

求特征向量

设 $\lambda = \lambda_i$ 为矩阵 A 的一个特征值, 则

$$(\lambda E - A)X = 0$$

的任意非零解 $X = P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量.

例 (例 1)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解法: 1. 求特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$, 解 $f(\lambda) = 0$ 得特征值;
2. 依次解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的非零解, 得特征值 λ_i 对应的特征向量.

- 对角矩阵 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 的特征值为对角线元素.

例子

例

求下面矩阵的特征值和线性无关的特征向量

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例子

例

求下面矩阵的特征值和线性无关的特征向量

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- λ_i 是 A 的一个特征值, 则齐次线性方程组 $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的基础解系就是矩阵 A 关于特征值 λ_i 的全体特征向量的一个最大无关组.

特征值的性质

- 代数基本定理: 一元 n 次方程

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

在复数域内有 n 个解 (重根按重数计).

- 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为特征方程 $|A - \lambda E| = 0$ 的 n 个解, 则

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

性质

n 阶方阵 A 有 n 个特征值 (计重数).

- 实矩阵的特征值和特征向量有可能是复数. 例如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

相似不变量：相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值

定理 (定理 2)

若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A, B 的特征值相同.

相似不变量：相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值

定理 (定理 2)

若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A, B 的特征值相同.

- 反之不成立. 特征值相同的两个矩阵不一定相似. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

相似不变量: 相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值

定理 (定理 2)

若 n 阶矩阵 A 和 B 相似, 则 A, B 的特征值相同.

- 反之不成立. 特征值相同的两个矩阵不一定相似. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 若 $A \stackrel{\text{相似}}{\sim} \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 则 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

相似不变量-特征值

性质

- (i) $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n;$
- (ii) $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$
- (iii) A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 无零特征值;
- (v) $R(A) \geq$ 非零特征值的个数.

相似不变量-特征值

性质

- (i) $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n;$
- (ii) $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$
- (iii) A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 无零特征值;
- (v) $R(A) \geq$ 非零特征值的个数.

性质

如果 n 阶矩阵 A 和 B 相似, 则

- (i) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B);$
- (ii) $|A| = |B|;$
- (iii) A 和 B 等价, 从而 $R(A) = R(B)$. 特别地, A 可逆当且仅当 B 可逆.

例子

例

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ 相似, 求 x .

例

已知 $\lambda_1 = 12$ 为矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的一个特征值, 求常数 a 和其余特征值.

性质

设 λ 为方阵 A 的特征值, 则

- (1) $c\lambda$ 为 cA 的特征值;
- (2) λ^k 为 A^k 的特征值;
- (3) 设 $\varphi(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$, 则 $\varphi(\lambda)$ 为 $\varphi(A)$ 的特征值;
- (4) 当 A 可逆时, $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值. $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值;
- (5) λ 为 A^T 的特征值.

例子

例

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, -2, 3$, 求

- A^{-1} 、 A^* 、 $A^2 + 2A + E$ 和 $A^* - 2A$ 的特征值;
- $|A|, |A^* - 2A|$.

定理 (定理 4)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 为方阵 A 的 m 个互异特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 依次为与之对应的特征向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

特征向量的性质: 不同特征值对应的特征向量线性无关

定理 (定理 4)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 为方阵 A 的 m 个互异特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 依次为与之对应的特征向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

定理 (定理 5)

设 λ_1, λ_2 为方阵 A 的两个不同特征值, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 和 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 分别是关于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量, 则 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关.

例子

例 (例 6)

设 λ_1, λ_2 为方阵 A 的两个不同特征值, 对应的特征向量分别为 P_1, P_2 , 证明 $P_1 + P_2$ 不是 A 的特征向量.

相似对角化

- 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或可对角化).

相似对角化

- 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或可对角化).
- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

相似对角化

- 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或可对角化).
- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 若 n 阶矩阵 A 和 B 都可相似对角化, 则 A 和 B 相似当且仅当他们特征值相同.

- 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或可对角化).
- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 若 n 阶矩阵 A 和 B 都可相似对角化, 则 A 和 B 相似当且仅当他们特征值相同.
- 对角化问题: 是否存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.
(下节课内容)

- 相似不变量: 特征多项式、特征值、行列式、迹、阶次、秩.
- 相似不变性: 可逆.
- 求特征值和特征向量.
- 特征值的性质:
 - n 阶矩阵的特征值有 n 个 (计重数), 且有可能为复数;
 - 相似的矩阵有相同的特征值、迹、行列式;
 - 矩阵多项式的特征值是特征值的多项式.
- 特征向量的性质:
 - 不同特征值对应的特征向量线性无关.
- 下次课: 方阵的相似对角化和对称阵的正交相似对角化.

练习

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

作业

- 思考题：两个相似矩阵的特征向量一定相同吗？为什么？
(假设矩阵 A 和 B 相似, λ 为他们的一个特征值. 若 $A\alpha = \lambda\alpha$, 那么 $B\alpha = \lambda\alpha$? 若不成立, 尝试思考矩阵 B 关于特征值 λ 的特征向量和矩阵 A 关于特征值 λ 的特征向量之间的关系.)
- Page₁₈₉ 4(2), 5, 6.
- Page₁₉₈ 3, 5(2), 6.
- Page₂₀₅ 1(3), 3(1), 4, 5.

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 11 月 1 日