Lec-7. 正态分布、随机变量的函数分布

主讲教师：吴利苏 **(wulisu@sdust.edu.cn)**
主　　页：wulisu.cn

目录

1. 正态分布

- 标准正态分布

2. 随机变量的函数分布

- 离散型随机变量的函数分布
- 连续型随机变量的函数分布

正态分布 (高斯分布 Gauss)

例

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\mu, \sigma(\sigma > 0)$ 为常数, 则称 X 服从参数 μ, σ 的正态分布或高斯分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- 非负性：$f(x) \geq 0$.
- 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

证明：令 $\frac{(x-\mu)}{\sigma}=t$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

记 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, 则

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}dtdu.$$

取极坐标变换, 令 $t=r\cos\theta$, $u=r\sin\theta$, 则

$$I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta=2\pi.$$

$I>0$, 则 $I=\sqrt{2\pi}$, 故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$.

性质 (正态分布的性质)

(1) $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, 故 $\forall h>0$,

$$P\{\mu-h<X\le\mu\}=P\{\mu<X\le\mu+h\}.$$

性质 (正态分布的性质)

(1) $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, 故 $\forall h>0$,

$$P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\}.$$

(2) 当 $x\leq\mu$ 时, $f(x)$ 严格单调增.

性质 (正态分布的性质)

(1) $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, 故 $\forall h>0$,

$$P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\}.$$

(2) 当 $x\leq\mu$ 时, $f(x)$ 严格单调增.

(3)

$$f_{\max}=f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma},$$

且 x 离 μ 越远, $f(x)$ 值越小, 落在 x 附近的概率越小.

性质 (正态分布的性质)

(4) 在 $x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点.

性质 (正态分布的性质)

(4) 在 $x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点.

(5) 以 x 轴为渐近线, 即 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

性质 (正态分布的性质)

(4) 在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点.

(5) 以 x 轴为渐近线, 即 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

(6) 当 σ 固定, 改变 μ 的大小时, $f(x)$ 的图像形状不变, 沿 x 轴平移. μ 为位置参数, 决定对称轴的位置.

性质 (正态分布的性质)

(4) 在 $x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点.

(5) 以 x 轴为渐近线, 即 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

(6) 当 σ 固定, 改变 μ 的大小时, $f(x)$ 的图像形状不变, 沿 x 轴平移. μ 为位置参数, 决定对称轴的位置.

(7) 当 μ 固定, 改变 σ 的大小时, $f(x)$ 的图像形状变, σ 越小, 图像越高越瘦; σ 越大, 图像越胖. σ 为尺度参数, 决定曲线分散程度.

正态分布的用途

- 自然界和人类社会中很多现象可以看成正态分布. 比如, 人的身高, 体重, 医学检验指标, 测量误差, 半导体器件中的热噪声电流或电压.
- 正态分布是最常见的一种分布. 一个变量如果受到大量微小的, 独立的随机因素的影响, 则一般是正态随机变量.
- 二项分布、泊松分布的极限分布是正态分布. (第五章)

正态分布的分布函数

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

正态分布的概率计算

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$
\begin{aligned}
P\{X \leq x\} &= F(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad \text{(无初等原函数)} \\
&= ?
\end{aligned}
$$

正态分布的概率计算

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$
\begin{aligned}
P\{X \le x\} = F(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad \text{(无初等原函数)} \\
&= ?
\end{aligned}
$$

- 用 Matlab, excel, R 语言等;
- 数值积分;
- 转为标准正态分布, 通过标准正态分布表求.

标准正态分布

- 若 $Z \sim N(0,1)$, 称 Z 服从标准正态分布.

标准正态分布

- 若 $Z \sim N(0,1)$, 称 Z 服从标准正态分布.
- Z 的概率密度函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

标准正态分布

- 若 $Z \sim N(0,1)$, 称 Z 服从标准正态分布.
- Z 的概率密度函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- 分布函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

标准正态分布

- 若 $Z \sim N(0,1)$, 称 Z 服从标准正态分布.
- Z 的概率密度函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- 分布函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

性质 (标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

性质 (标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

证: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
P\{Z \le x\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\} &= P\{X \le \mu + \sigma x\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt \\
&\xlongequal{\text{令}\,u=\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \\
&= \Phi(x).
\end{aligned}
$$

故 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. $\square$

推论

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\}$$
$$= \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

推论

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\}$$
$$= \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

对 $\forall (x_1, x_2]$, 有

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\}$$
$$= \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma}).$$

证:

$$
\begin{aligned}
P\{x_1 < X \le x_2\} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= \int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt - \int_{-\infty}^{\frac{x_1-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\
&= \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma}). \qquad \square
\end{aligned}
$$

例

用天平称一实际重量为 μ 的物体, 天平得读数为随机变量 X, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求读数与 μ 的偏差在 3σ 范围内的概率.

例

用天平称一实际重量为 μ 的物体，天平得读数为随机变量 X，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求读数与 μ 的偏差在 3σ 范围内的概率.

解:

$$\begin{aligned} P\{|X-\mu| < 3\sigma\} &= P\{-3\sigma < X-\mu < 3\sigma\} \\ &= P\{-3 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 3\} \\ &= \Phi(3) - \Phi(-3) \\ &= 2\Phi(3) - 1 \\ &= 0.9973. \end{aligned}$$

在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 内几乎是肯定的概率.

σ 法则

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

- $P\{|X-\mu| < \sigma\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 68.26\%$;
- $P\{|X-\mu| < 2\sigma\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 95.44\%$;
- $P\{|X-\mu| < 3\sigma\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = 99.74\%$.

例

将一温度调节器放置在储存着某种液体的容器内, 调节器调整在 d ℃, 液体的温度 X (以 ℃ 计) 是一个随机变量, 且 $X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1) 若 $d = 90$ ℃, 求 X 小于 89 ℃ 的概率.

(2) 若要求保持液体的温度至少为 80 ℃ 的概率不低于 0.99, 问 d 至少为多少?

解: (1)

$$
\begin{aligned}
P\{X<89\} &= P\{\frac{X-90}{0.5}<\frac{89-90}{0.5}\} \\
&= \Phi(-2)=1-\Phi(2) \\
&= 0.0228.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
P\{X\geq 80\} &= P\{\frac{X-d}{0.5}\geq\frac{80-d}{0.5}\} \\
&= 1-P\{\frac{X-d}{0.5}<\frac{80-d}{0.5}\} \\
&= 1-\Phi(\frac{80-d}{0.5})\geq 0.99.
\end{aligned}
$$

即 $\Phi(\frac{d-80}{0.5})\geq 0.99=\Phi(2.327)$, 故 $d\geq 81.1635$. $\square$

随机变量的函数分布

- 已知 X 的分布, g 为连续函数. 如何求 $Y = g(X)$ 的分布?

随机变量的函数分布

- 已知 X 的分布, g 为连续函数. 如何求 $Y=g(X)$ 的分布?
- 例如：把圆半径的测量值记为随机变量 X, 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 问圆的面积 $Y=\pi X^2$ 的分布是?

随机变量的函数分布

- 已知 X 的分布, g 为连续函数. 如何求 $Y=g(X)$ 的分布?
- 例如：把圆半径的测量值记为随机变量 X, 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 问圆的面积 $Y=\pi X^2$ 的分布是?
- 类似，将在第三章第五节中学习两个随机变量的函数分布.

例

设 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	0.1	0.6	0.3

$Y = X^2$, 求 Y 的分布律.

解: X 的取值为 $-1,0,1$, 则 $Y=X^2$ 可能的取值为 $0,1$.

又 $\{Y=0\}=\{X=0\}$,

$\{Y=1\}=\{X=1\}\cup\{X=-1\}$, 所以

$P\{Y=0\}=0.6$, $P\{Y=1\}=0.4$,

X	0	1
P	0.6	0.4

$\square$

离散型随机变量函数的分布函数

设离散型随机变量 X 的分布律为:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$
P_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$

则 $Y = g(X)$

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\ldots$	$g(x_k)$	$\ldots$
P_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$

若 $g(x_k)$ 给出 Y 的所有可能取值, 再利用等价事件来给出概率分布函数 $P\{Y = y_j\} = P\{X \in D\}$.

例

X	-1	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

例

X	-1	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

解:

Y	-4	-1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\square$

例

设 X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 < x < 4; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度.

解: 先求 $Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X+8 \le y\}$$
$$= P\{X \le \frac{y-8}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,dx$$

由分布函数 F_Y 求 f_Y.

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \left[\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,dx\right]' = f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\left(\frac{y-8}{2}\right)'$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{8}\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\left(\frac{y-8}{2}\right)' & 0 < \frac{y-8}{2} < 4; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{y-8}{32} & 8 < y < 16; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

□

例

设 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ x^3 e^{-x^2} & x \geq 0. \end{cases}$$

求 $Y = X^2$ 和 $Y = 2X + 3$ 的概率密度.

解: $(Y = X^2)$

显然 $Y \leq 0$,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$$

$$= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = P\{X \leq \sqrt{y}\} = \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx.$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \frac{ye^{-y}}{2} & y \geq 0. \end{cases}$$

$(Y = 2X + 3)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{2X + 3 \le y\} \\ &= P\{X \le \frac{y-3}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F'_Y(y) &= f_X(\frac{y-3}{2}) \cdot (\frac{y-3}{2})' \\ &= \begin{cases} 0 & y < 3; \\ \frac{1}{2} \cdot (\frac{y-3}{2})^3 e^{-(\frac{y-3}{2})^2} & y \ge 3. \end{cases} \end{aligned}$$ $\square$

连续型随机变量函数的分布函数

Step-1 根据 X 的取值范围给出 Y 的取值范围;

Step-2 写出 Y 的分布函数,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\};$$

Step-3 找出 $\{Y \le y\}$ 的等价事件
$F_Y(y) = P\{X \in D\};$

Step-4 出 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

例

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, $-\infty < x < +\infty$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解: $Y = X^2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})' & y > 0; \\ 0 & y \leq 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) & y > 0. \\ 0 & y \leq 0. \end{cases}$$

□

χ^2 分布

定义

若 $X \sim N(0,1)$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < +\infty$. 则 $Y = X^2$ 的概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0; \\ 0 & y \le 0. \end{cases}$$

称 Y 服从自由度为 1 的 χ^2 分布.

一般地, 若 $X_1, \ldots, X_n$ 服从 $N(0,1)$ 分布, 则 $\chi^2 = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布.

反函数法求连续型随机变量的概率密度

- 上例中，当 $y > 0$ 时，以 $-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}$ 代替 $X^2 \le y$ 可以推广到求连续型随机变量的更一般的函数的函数分布或概率密度.
- 设 $Y = g(X)$, 若连续函数 $y = g(x)$ 具有<u>反函数</u>$x = h(y)$, 则 $Y = g(X) < y$ 可用 $x \in \{h(y) \mid g(X) < y\}$ 代替.
- 比如, 设 g 为严格单调函数，则有下面定理.

定理

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$. 又设 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)| & \alpha < y < \beta; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

证: $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加. 它的反函数存在, 且在 (α, β) 内严格单调增, 可导.
记 $F_X(x)$, $F_Y(y)$,

- $y \le \alpha$, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0$,
- $y \ge \beta$, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 1$,
- $\alpha < y < \beta$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} \\ &= P\{X \le h(y)\} = F_X(h(y)) \end{aligned}$$

.

所以, $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]h'(y) & \alpha < y < \beta; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$.

$g'(x) < 0$，同样可以证明

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)](-h'(y)) & \alpha < y < \beta; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \qquad \square$$

$g'(x) < 0$，同样可以证明

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)](-h'(y)) & \alpha < y < \beta; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \qquad \square$$

注

若 $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 以外等于零，则只需假设在 $[a, b]$ 上恒有 $g'(x) > 0$（或 $g'(x) < 0$），
$\alpha = \min\{g(a), g(b)\}$, $\beta = \max\{g(a), g(b)\}$.

例

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b(a \neq 0)$, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

例

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b(a \neq 0)$, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

$y = g(x) = ax + b$, $g'(x) = a \neq 0$,

$x = h(y) = \frac{y-b}{a}$, $h'(y) = \frac{1}{a}$,

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-(b+a\mu))^2}{2\sigma^2 a^2}}.$$

即 $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

特别取 $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$, 得 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. $\square$

例

$X \sim N(1,3)$, $Y = 3 - 2X$, 则 Y 服从什么分布？

例

$X \sim N(1,3)$, $Y = 3 - 2X$, 则 Y 服从什么分布?

$Y \sim N(1,12)$.

例

设电压 $V = A\sin\theta$, 其中 A 是一个已知得正常数, 相角 Θ 是一个随机变量且有 $\Theta \sim \mathrm{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 试求电压 V 的概率密度.

例

设电压 $V = A\sin\theta$, 其中 A 是一个已知得正常数, 相角 Θ 是一个随机变量且有 $\Theta \sim \mathrm{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 试求电压 V 的概率密度.

解: $v = g(\theta) = A\sin\theta$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上恒有
$g'(\theta) = A\sin\theta > 0$. 且有反函数
$\theta = h(v) = \arcsin\frac{v}{A}$, $h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}}$.

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}.$$

得 $$\psi(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}} & v \in (-A, A); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}. \qquad \square$$

设 $g(x)$ 是连续函数,

- X 是离散型 $\Rightarrow$ $Y = g(X)$ 是离散型;
- X 是连续型 $\nRightarrow$ $Y = g(X)$ 是连续型.

反例

例

$$X \sim \cup(0,2),\ g(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1]; \\ 1 & x \in [1,2]; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

问 $Y = g(X)$ 是否为连续型或离散型随机变量?

解：$X \sim U(0,2)$, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0,2); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

Y 的取值为 $[0,1]$, 所以

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$;

当 $y \geq 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 1$;

当 $0 \leq y < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} \\ &= \int_{g(x) \leq y} f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{y} f(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^y \frac{1}{2} \mathrm{d}\, x = \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

所以 $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \frac{y}{2} & 0 \le y < 1; \\ 1 & y \ge 1. \end{cases}$

$F_Y(y)$ 在 $y = 1$ 处不连续, 所以 $Y = g(X)$ 不是连续型随机变量；$F_Y(y)$ 也不是阶梯函数, 所以 $Y = g(X)$ 不是离散型随机变量. $\square$