线性代数-9

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学，数学学院

回顾：矩阵的初等变换

- **矩阵的初等变换:**

$$r_i \leftrightarrow r_j.r_i \times k, r_i + kr_j, c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + kc_j$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j . r_i \times k,\, r_i + kr_j,\, c_i \leftrightarrow c_j,\, c_i \times k,\, c_i + kc_j$$

- 矩阵的等价：

$$A \overset{r}{\sim} B, A \overset{c}{\sim} B, A \sim B;$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j . r_i \times k,\, r_i + k r_j,\, c_i \leftrightarrow c_j,\, c_i \times k,\, c_i + k c_j$$

- 矩阵的等价：

$$A \overset{r}{\sim} B, A \overset{c}{\sim} B, A \sim B;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

回顾：矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换:

$$r_i \leftrightarrow r_j . r_i \times k,\, r_i + kr_j,\, c_i \leftrightarrow c_j,\, c_i \times k,\, c_i + kc_j$$

- 矩阵的等价：

$$A \overset{r}{\sim} B, A \overset{c}{\sim} B, A \sim B;$$

- 矩阵的等价化简：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \text{标准形}$$

- 初等矩阵：

$$E(i,j), E(i(k)), E(ij(k));$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0;$
- 初等变换的应用：

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A\ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B\ P)$;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A\ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B\ P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A\ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E\ A^{-1})$;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A\ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B\ P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A\ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E\ A^{-1})$;
  - 求 $A^{-1}B$ $:\Rightarrow (A\ B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E\ A^{-1}B)$;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B$ $:\Rightarrow (A\ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B\ P)$;
  - 求 A^{-1} $:\Rightarrow (A\ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E\ A^{-1})$;
  - 求 $A^{-1}B$ $:\Rightarrow (A\ B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E\ A^{-1}B)$;
  - 解 $AX = \beta$ $:\Rightarrow (A\ \beta) \xrightarrow{\text{行变换}}$ 行最简形;

回顾：矩阵的初等变换

- 初等变换和初等矩阵联系：左行右列；
- 可逆矩阵可表示为初等矩阵乘积；

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} PA \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} P'PA \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} P'PAQ$$

- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- 初等变换的应用：
  - 求可逆 P, 使得 $PA = B \ :\Rightarrow (A\ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (B\ P)$;
  - 求 $A^{-1} \ :\Rightarrow (A\ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E\ A^{-1})$;
  - 求 $A^{-1}B \ :\Rightarrow (A\ B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E\ A^{-1}B)$;
  - 解 $AX = \beta \ :\Rightarrow (A\ \beta) \xrightarrow{\text{行变换}}$ 行最简形;
  - 注：求可逆 Q, 使得 $AQ = B$; A^{-1}; BA^{-1}; $X^TA = \beta^T$ 用列分块，初等列变换.

本次课内容

矩阵的秩和线性方程组解的存在性

引入

- 如何判断 $A \sim B$？

引入

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 根据定义，如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 根据定义，如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.
  - 根据初等变换和初等矩阵的联系，如果存在可逆 P 和可逆 Q，使得 $PAQ = B$，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.

引入

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 根据定义，如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.
  - 根据初等变换和初等矩阵的联系，如果存在可逆 P 和可逆 Q，使得 $PAQ = B$，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗？

引入

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 根据定义，如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.
  - 根据初等变换和初等矩阵的联系，如果存在可逆 P 和可逆 Q，使得 $PAQ = B$，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗？
- 有！研究等价矩阵 A 和 B 的共性：
  (不变性/不变量：在有限初等变换下保持不变的性质和数量)

引入

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 根据定义，如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.
  - 根据初等变换和初等矩阵的联系，如果存在可逆 P 和可逆 Q，使得 $PAQ = B$，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗？
- 有！研究等价矩阵 A 和 B 的共性：
（不变性/不变量：在有限初等变换下保持不变的性质和数量）
  - 例如等价的方阵具有相同的可逆性，若 A 可逆，B 不可逆，则必有 $A \nsim B$.

引入

- 如何判断 $A \sim B$？
  - 根据定义，如果经过有限次初等行变换和初等列变换可以把 A 变为 B，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.
  - 根据初等变换和初等矩阵的联系，如果存在可逆 P 和可逆 Q，使得 $PAQ = B$，则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.
- 有更简单的方法判断 $A \sim B$ 或 $A \nsim B$ 吗？
- 有！研究等价矩阵 A 和 B 的共性：
（不变性/不变量：在有限初等变换下保持不变的性质和数量）
  - 例如等价的方阵具有相同的可逆性，若 A 可逆，B 不可逆，则必有 $A \nsim B$.
- 矩阵的秩，一个等价完全不变量：两个同型矩阵 $A \sim B \Leftrightarrow A, B$ 的秩相同.

k 阶子式

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k\leq \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k 阶子式

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k \le \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k 阶子式

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列，$k \le \min\{m,n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

k 阶子式

- k 阶子式：任取矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 行 k 列, $k \le \min\{m, n\}$，其行列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- 区分 k 阶子式、子块、余子式、代数余子式.

矩阵的秩

定义

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D，而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的最高阶非零子式, 数 r 称为 A 的秩，记为 $R(A)$ 或 $r(A)$.

定义

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D, 而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的**最高阶非零子式**, 数 r 称为 A 的**秩**, 记为 $R(A)$ 或 $r(A)$.

- $R(O) := 0, \quad R(E_n) = n, \quad R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r.$

定义

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D，而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的最高阶非零子式, 数 r 称为 A 的秩，记为 $R(A)$ 或 $r(A)$.

- $R(O) := 0, \quad R(E_n) = n, \quad R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r.$
- 行阶梯形矩阵的秩为非零行的行数.

定义

若 A 存在一个非零 r 阶子式 D, 而所有的 $r+1$ 阶子式都为零 (如果存在), 则称 D 为 A 的最高阶非零子式, 数 r 称为 A 的秩, 记为 $R(A)$ 或 $r(A)$.

- $R(O) := 0, \quad R(E_n) = n, \quad R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r.$
- 行阶梯形矩阵的秩为非零行的行数.
- $R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

- 证明思路：有限次初等变换不改变方阵的行列式是否为零这一结论.

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

- 证明思路：有限次初等变换不改变方阵的行列式是否为零这一结论.
- $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆 P, Q 使得 $PAQ = B$.

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

- 证明思路：有限次初等变换不改变方阵的行列式是否为零这一结论.
- $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆 P, Q 使得 $PAQ = B$.
  所以矩阵与可逆矩阵相乘, 秩不变, i.e.

$$R(A) = R(PAQ) = R(PA) = R(AQ).$$

秩为等价不变量

定理

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

- 证明思路：有限次初等变换不改变方阵的行列式是否为零这一结论.
- $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆 P, Q 使得 $PAQ = B$.
  所以矩阵与可逆矩阵相乘, 秩不变，i.e.

$$R(A) = R(PAQ) = R(PA) = R(AQ).$$

- 计算 $R(A)$：通过初等行变换把 A 化为行阶梯形,

$$R(A) = \text{行阶梯形的非零行数}.$$

例题

例

求 $R(A)$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例题

例

设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix},$$
已知 $R(A) = 2$, 求 λ 和 μ.

秩的性质

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;

秩的性质

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;

2) $R(A^T) = R(A)$;

性质

1) $0 \leq R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;
5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,
   特别地，$R(A) \le R(A, \beta) \le R(A) + 1$;

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;
5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,
   特别地，$R(A) \le R(A, \beta) \le R(A) + 1$;
6) $R(A + B) \le R(A) + R(B)$;

秩的性质

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;
5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,
   特别地，$R(A) \le R(A, \beta) \le R(A) + 1$;
6) $R(A + B) \le R(A) + R(B)$;
7) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$;

性质

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;
2) $R(A^T) = R(A)$;
3) A, B 同型，则 $A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B)$;
4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A) = R(PA) = R(AQ)$;
5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,
   特别地，$R(A) \le R(A, \beta) \le R(A) + 1$;
6) $R(A + B) \le R(A) + R(B)$;
7) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$;
8) 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$，则 $R(A) + R(B) \le n$.

例题

例

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

例题

例

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

- $R(A_{m\times n})=n$, 则称 A 为列满秩矩阵；
  $R(A_{m\times n})=m$, 则称 A 为行满秩矩阵；
  $R(A_{m\times n})=n=m$, 则称 A 为满秩矩阵.

例

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

- $R(A_{m\times n})=n$, 则称 A 为列满秩矩阵；
  $R(A_{m\times n})=m$, 则称 A 为行满秩矩阵;
  $R(A_{m\times n})=n=m$, 则称 A 为满秩矩阵.
- $AB=O$, A 列满秩，则 $B=O$.
  即 A 列满秩，则有左消去律；同理，B 行满秩，则有右消去律。

例

证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$, 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

- $R(A_{m\times n})=n$, 则称 A 为列满秩矩阵；
  $R(A_{m\times n})=m$, 则称 A 为行满秩矩阵;
  $R(A_{m\times n})=n=m$, 则称 A 为满秩矩阵.
- $AB=O$, A 列满秩，则 $B=O$.
  即 A 列满秩，则有左消去律；同理，B 行满秩，则有右消去律。
- A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 满秩.

例题

例

设 A 为 n 阶矩阵，证明 $R(A+E)+R(A-E) \geq n$.

线性方程组解的存在性

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

- 求解 $AX=\beta\Rightarrow$ 通过初等行变换化增广矩阵 (A,β) 为行最简形，判断解的存在性并求解.

例题

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 & = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 & = 0 \end{cases}$$

例

设

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 & = 0 \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

例题

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

定理

$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

小结

1、 秩的定义、求 $R(A)$;

2、 判断线性方程组 $AX=\beta$ 解的存在性，并求解.

练习

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 & = 0 \end{cases}$$

作业

- P78-80. 10-(3)、12、14-(4)、17、20.
- 本次作业下周四之前提交电子版，下周四收发作业本.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2022 年 9 月 28 日