线性代数-1

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学，数学学院

主讲：吴利苏，数学学院

邮箱：wulisu@sdust.edu.cn （最佳联系方式）

办公室：实训楼 1708 右 (提前邮箱预约)

QQ 群：704922102 (线性代数 2023)

教材:《线性代数》第六版, 同济大学

参考书: Introduction to linear algebra, Gilbert Strang

作业: 每章一次, 共 5 次, 每章结束前发布,
见 http://wulisu.cn/。

- 第 1 次作业提交日期: 4 月 22 日
- 第 2 次作业提交日期: 5 月 13 日
- 第 3 次作业提交日期: 5 月 27 日
- 第 4 次作业提交日期: 6 月 10 日
- 第 5 次作业提交日期: 6 月 18 日

- 最终成绩 = 期末成绩 *0.6+ 线上成绩 *0.2+ 平时成绩 *0.2
- 线上成绩：期末考试 30 分，章测试 30 分，平时成绩 40 分（其中平时成绩中学习进度 30 分，学习行为 10 分）
- 平时成绩（20 分）：作业 15 分 + 课堂测验 5 分.

一个调查问卷

本次课内容

1. 线性代数导论

2、行列式的定义 1

何为线性代数?

- 代数 (Algebra)

何为线性代数？

- 代数 (Algebra)
  - 数：整数 $(\mathbb{Z})$、有理数 $(\mathbb{Q})$、实数 $(\mathbb{R})$、复数 $(\mathbb{C})$;

何为线性代数？

- 代数 (Algebra)
  - 数：整数 ($\mathbb{Z}$)、有理数 ($\mathbb{Q}$)、实数 ($\mathbb{R}$)、复数 ($\mathbb{C}$);
  - 结构：

$$\begin{cases} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2\text{、}\sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \cdots \end{cases}$$

何为线性代数?

- 代数 (Algebra)
  - 数：整数 ($\mathbb{Z}$)、有理数 ($\mathbb{Q}$)、实数 ($\mathbb{R}$)、复数 ($\mathbb{C}$);
  - 结构：

$$\begin{cases} \text{一元结构：相反数、开根号、}x^2\text{、}\sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \cdots \end{cases}$$

- 线性代数 (Linear algebra)

何为线性代数？

- 代数 (Algebra)
  - 数：整数 ($\mathbb{Z}$)、有理数 ($\mathbb{Q}$)、实数 ($\mathbb{R}$)、复数 ($\mathbb{C}$);
  - 结构：

$$\begin{cases} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2\text{、} \sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \cdots \end{cases}$$

- 线性代数 (Linear algebra)
  - 集合 + 线性结构

何为线性代数？

- 代数 (Algebra)
  - 数：整数 ($\mathbb{Z}$)、有理数 ($\mathbb{Q}$)、实数 ($\mathbb{R}$)、复数 ($\mathbb{C}$);
  - 结构：

$$\begin{cases} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2\text{、} \sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \cdots \end{cases}$$

- 线性代数 (Linear algebra)
  - 集合 + 线性结构
    - 线性性质

$$f(k \cdot A + l \cdot B) = k \cdot f(A) + l \cdot f(B)$$

何为线性代数？

- 代数 (Algebra)
  - 数：整数 ($\mathbb{Z}$)、有理数 ($\mathbb{Q}$)、实数 ($\mathbb{R}$)、复数 ($\mathbb{C}$);
  - 结构：

$$\begin{cases} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2\text{、} \sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \cdots \end{cases}$$

- 线性代数 (Linear algebra)
  - 集合 + 线性结构
    - 线性性质

$$f(k \cdot A + l \cdot B) = k \cdot f(A) + l \cdot f(B)$$

  - 线性代数就是具有线性结构的代数.

何为线性代数？

- 代数 (Algebra)
  - 数：整数 ($\mathbb{Z}$)、有理数 ($\mathbb{Q}$)、实数 ($\mathbb{R}$)、复数 ($\mathbb{C}$);
  - 结构：

$$\begin{cases} \text{一元结构：相反数、开根号、} x^2\text{、} \sin x; \\ \text{二元结构：} + \quad - \quad \times \quad /; \\ \text{更抽象的代数结构：群、环、域、范畴、} \cdots \end{cases}$$

- 线性代数 (Linear algebra)
  - 集合 + 线性结构
    - 线性性质

$$f(k \cdot A + l \cdot B) = k \cdot f(A) + l \cdot f(B)$$

  - 线性代数就是具有线性结构的代数.
  - 例如：数、向量、线性方程组、矩阵、内积、行列式.

线性代数的中心问题：解线性方程组

例 (鸡兔同笼)

今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何？

解：设鸡 x 兔 y, 则

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases} \tag{1}$$

消元得

$$\begin{cases} x=\frac{35\times4-94\times1}{1\times4-2\times1}=23 \\ y=\frac{94\times1-35\times2}{1\times4-2\times}=12 \end{cases}$$

故鸡兔各 23、12 只.

记

$$a \times d - b \times c \triangleq \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{cases} x = \frac{35\times4-94\times1}{1\times4-2\times1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 94 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} \\ \\ y = \frac{94\times1-35\times2}{1\times4-2\times1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 2 & 94 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

- 将线性方程组 (1) 中未知量的系数表示为向量的形式，则

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}35\\95\end{pmatrix}$$

- 将线性方程组 (1) 中线性方程表示为内积的形式，则

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=35\\[2ex]\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=94\end{cases}$$

线性方程组与矩阵

- 将线性方程组 (1) 中线性方程表示为内积的形式，则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 94 \end{pmatrix}$$

- 通过对矩阵的讨论和计算，就能解决：
    - 线性方程组是否有解？有唯一解？有无穷解？
    - 线性方程组有解时，解的形式和解之间的关系.
    - 线性方程组无解时，可分析近似解.
    - 对大规模线性方程组（未知量多、方程多、未知量与方程个数不等），亦有可分析的手段.

如何学（好）线性代数？

- 学习线代可能的困难：概念较抽象、知识点较零散、做题时可能不容易有思路.

本门课程的学习步骤：

- Step-1：务必掌握理解基本概念、定义和结论;
- Step-2：熟悉应用基本计算方法;
- Step-3：学完每章节后及时整理回顾，通过做题把零散知识点联系在一起.

第一章　行列式（determinant）

主要内容

1) 行列式的定义: 1.1–1.3
2) 行列式的性质: 1.4
3) 行列式的展开: 1.5
4) 行列式的计算

1.1 、二阶行列式

二阶行列式就是一个 2×2 数阵表示的一个数,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中

- a_{ij} 表示行列式的第 i 行 j 列的元素, 称为行列式的 (i,j) 元;
- a_{11}, a_{22} 称为主对角元, a_{12}, a_{21} 称为副对角元;
- 对角线法则: 二阶行列式的值为主对角元之积减去副对角元之积的差.

定义 (n 阶行列式的递归定义)

n 阶行列式为 n^2 个数排成 n 行 n 列的数阵决定的一个数，其值可以递归定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

其中 M_{ij} 为划掉行列式的第 i 行和第 j 列，得到的 $n-1$ 阶行列式，称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式.

- n 阶行列式通常可简记为 D、D_n 或 $\det(a_{ij})$，a_{ij} 为行列式的 (i,j) 元;
- 行列式的本质是数.

例 (下三角行列式)

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明:

例题

例 (对角行列式)

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明:

例 (三阶行列式的对角线法则)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例

分别用行列式的递归定义和对角线法则计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

解:

小结

- 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

- n 阶行列式的递归定义

$$D_n = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}M_{1n}$$

作业

- 利用行列式的递归定义证明 P3 公式 (6), 尝试思考等号右边每一项的正负号和下标之间的关系.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

- P21. 1-(1)(2)、3、4-(5).

欢迎提问和讨论

主讲: 吴利苏 (http://wulisu.cn)

Email: wulisu@sdust.edu.cn