

线性代数-18

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 28 日

1. 二次型和对称矩阵
2. 二次型的化简
3. 合同不变量和正定二次型

例 (P53 习题 1-(5))

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

例 (P53 习题 1-(5))

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

- 二次型 $f(X) = X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- 中心任务: 化简二次型/对称阵.
寻找可逆 (正交) 线性变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

矩阵语言: 寻找可逆 (正交) 矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

例 (P53 习题 1-(5))

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

- 二次型 $f(X) = X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- 中心任务: 化简二次型/对称阵.
寻找可逆 (正交) 线性变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

矩阵语言: 寻找可逆 (正交) 矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

二次型

定义

含 n 个变量二次齐次函数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

二次型

定义

含 n 个变量二次齐次函数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

- 只含平方项的二次型 $f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 称为标准形(或法式).

二次型

定义

含 n 个变量二次齐次函数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

- 只含平方项的二次型 $f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 称为标准形(或法式).
- 在标准式的基础上, 若 $\lambda_i = 1, -1, 0$, 则称 f 为规范形.

二次型的表示

- 组合式

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$\Rightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

二次型的表示

- 组合式

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$\Rightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

- 矩阵式

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

二次型和对称矩阵

- 对任意矩阵 A , $f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T + A}{2} X$, 其中 $\frac{A^T + A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

二次型和对称矩阵

- 对任意矩阵 A , $f(X) = X^T A X = X^T \frac{A^T + A}{2} X$, 其中 $\frac{A^T + A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = X^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} X$$

- 二次型和对称矩阵是一一对应的
- 若 A 为对称阵, 则称 A 为二次型 $f(X) = X^T A X$ 的矩阵. 称二次型 f 为对称矩阵 A 的二次型.
- 二次型的秩定义为对称矩阵的秩, i.e. $R(f) = R(A)$.
- 二次型的化简 \Leftrightarrow 对称矩阵的化简.

- 例: $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = X^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} X$

- 通过配方知

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a \left(x_1 + \frac{b}{a}x_2 \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a} \right) x_2^2 \\ &= \left(\sqrt{a}x_1 + \frac{b}{\sqrt{a}}x_2 \right)^2 + \left(\sqrt{c - \frac{b^2}{a}}x_2 \right)^2 \end{aligned}$$

- 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{b}{a}x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{a}x_1 + \frac{b}{\sqrt{a}}x_2 \\ z_2 = \sqrt{c - \frac{b^2}{a}}x_2 \end{cases}$$

- 则有标准形 $f = ay_1^2 + \left(c - \frac{b^2}{a} \right) y_2^2$ 和规范形 $f = z_1^2 + z_2^2$.

- 例: $f(X) = X^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} X$
- 取 (可逆) 线性变换

$$X = PY, \quad \text{其中 } P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = QZ, \quad \text{其中 } Q = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{c - \frac{b^2}{a}} \end{pmatrix}^{-1}$$

- 则有标准形 $f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P X = Y^T \begin{pmatrix} a & \\ & c - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix} Y$

$$\text{规范形 } f = f(QZ) = Z^T Q^T A Q Z = Z^T \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} Z.$$

二次型化简：任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

- 设 $f(X) = X^T A X$ 为二次型, A 为对称矩阵 ($A^T = A$).
- 定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化: 即对于任意对称矩阵 A , 存在正交阵 P , 使得 $P^{-1} A P = P^T A P = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为对角阵.

二次型化简：任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

- 设 $f(X) = X^T A X$ 为二次型, A 为对称矩阵 ($A^T = A$).
- 定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化: 即对于任意对称矩阵 A , 存在正交阵 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为对角阵.

- 对于任意二次型 f , 存在正交变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = X^T A X = Y^T P^T A P Y = Y^T \Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

二次型化简：正交相似对角化

例 (例 14)

化简二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

解法：将二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 正交相似对角化，则

$X = PY$ 即为所求.

二次型化简：配方法（选学）

例

化简二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

并求所用变换矩阵.

解法：有平方项则配平方，无平方项则凑平方项.

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4(y_2 + y_3)(y_2 - y_3) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2. \end{aligned}$$

(对称) 矩阵的合同关系

- 二次型 $f(X) = X^T A X$, 取可逆变换 $X = PY$, 则

$$f = X^T A X = Y^T P^T A P Y$$

- 若存在可逆阵 P , 使得 $B = P^T A P$, 则称矩阵 A, B 合同.

- 给定对称矩阵 A , 如果存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = \Lambda$$

为对角阵, 则称对称阵 A 可以合同对角化.

此时, Λ 称为对称阵 A 的 (合同) 标准形; 进一步, 若 Λ 的对角线元素只能取 $1, -1, 0$, 则 Λ 称为对称阵 A 的 (合同) 规范形.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正(负)惯性指数、符号差、正(负)定性.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p ；
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数，记为 q ；
- $p - q$ 称为二次型的符号差；
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p ；
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数，记为 q ；
- $p - q$ 称为二次型的符号差；
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

定理 (定理 7: 惯性定理)

正负惯性指数是合同不变量.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、符号差、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p ；
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数，记为 q ；
- $p - q$ 称为二次型的符号差；
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

定理 (定理 7: 惯性定理)

正负惯性指数是合同不变量.

注：实对称矩阵 A, B 合同 $\Leftrightarrow A, B$ 的正负惯性指数相同.

二次型和对称阵的正定性

$f(X) = X^T A X$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

\Leftrightarrow 正惯性指数 $p = n;$

\Leftrightarrow 对称阵 A 的特征值全为正;

\Leftrightarrow 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

\Leftrightarrow 存在可逆阵 C , 使得对称阵 $A = C^T C$.

二次型和对称阵的正定性

$f(X) = X^T A X$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

\Leftrightarrow 正惯性指数 $p = n$; (正定性是合同不变性)

\Leftrightarrow 对称阵 A 的特征值全为正;

\Leftrightarrow 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

\Leftrightarrow 存在可逆阵 C , 使得对称阵 $A = C^T C$.

二次型和对称阵的正定性

$f(X) = X^T A X$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) > 0;$

\Leftrightarrow 正惯性指数 $p = n$; (正定性是合同不变性)

\Leftrightarrow 对称阵 A 的特征值全为正;

\Leftrightarrow 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

\Leftrightarrow 存在可逆阵 C , 使得对称阵 $A = C^T C$.

正定矩阵的性质:

- 若实对称阵 A 为正定的, 则 A^{-1}, A^T, A^* 也都为正定矩阵.
- 若实对称阵 A, B 为正定的, 则 $A + B$ 也是正定矩阵.

二次型和对称阵的负定性

$f(X) = X^T A X$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) < 0;$

\Leftrightarrow 负惯性指数 $q = n;$

\Leftrightarrow 对称阵 A 的特征值全为负;

\Leftrightarrow 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正.

二次型和对称阵的负定性

$f(X) = X^T A X$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) < 0;$

\Leftrightarrow 负惯性指数 $q = n$; (负定性是合同不变性)

\Leftrightarrow 对称阵 A 的特征值全为负;

\Leftrightarrow 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正.

二次型和对称阵的负定性

$f(X) = X^T A X$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow \forall X \neq 0, f(X) < 0;$

\Leftrightarrow 负惯性指数 $q = n;$

\Leftrightarrow 对称阵 A 的特征值全为负;

\Leftrightarrow 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正.

回顾:

- 主子式: 行指标、列指标相同的子式.
- 顺序主子式: 前 k 行、前 k 列构成的子式.
- 注意: 第六版教材没有区分主子式和顺序主子式, 描述有歧义. 定理 9 以第七版为准!

例题

例 (例 17)

判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性.

正定性和负定性的应用

正(负)定矩阵的应用:

- 若 $f = ax^2 + bxy + cy^2$ 正定, 则二次曲线 $f = 1$ 为平面上的椭圆.
- 若 $f = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ 正定, 则二次曲面 $f = 1$ 为三维空间中的椭球面.
- 二元函数极值点的刻画:

定理 (同济高等数学下 P113)

二元函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近光滑, $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, 令

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

若 H 正定, 则 $f(x_0, y_0)$ 为极小值; 若 H 负定, 则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

小结

- 二次型和对称矩阵;
- 二次型化标准形: 正交变换法 (和配方法);
- 对称矩阵的合同和正定性.

- 思考题：设 A, B 是 n 阶实对称矩阵，若 A 和 B 合同 (i.e. 存在可逆矩阵 P ，使得 $P^T A P = B$)，则称 A 和 B 属于同一个合同类. 问 n 阶实对称矩阵的合同类最多有多少个？
(提示：正负惯性指数是对称阵合同的完全不变量，所以只需考虑正负惯性指数的所有可能取值，即满足 $0 \leq p + q \leq n$ 的正整数 p, q 的所有可能取值.)
- Page141: 29-1、32-1、34-1、35.

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 28 日