

线性代数-16

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 26 日

1. 特征值和特征向量的定义

2. 特征值和特征向量的性质

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和 **非零向量** X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的 **特征值**(**特征根**), 非零向量 X 为 A 关于特征值 λ 的 **特征向量**.

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和 **非零向量** X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的 **特征值**(**特征根**), 非零向量 X 为 A 关于特征值 λ 的 **特征向量**.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$
 $\Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0$ 有非零解 X
 $\Leftrightarrow R(A - \lambda E) < n \Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0$
 \Rightarrow 特征值都为 $|A - \lambda E| = 0$ 的解.

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和 **非零向量** X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的 **特征值**(**特征根**), 非零向量 X 为 A 关于特征值 λ 的 **特征向量**.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$
 $\Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0$ 有非零解 X
 $\Leftrightarrow R(A - \lambda E) < n \Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0$ (特征方程)
 \Rightarrow 特征值都为 $|A - \lambda E| = 0$ 的解.

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和 **非零向量** X , 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的 **特征值**(**特征根**), 非零向量 X 为 A 关于特征值 λ 的 **特征向量**.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$
 $\Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0$ 有非零解 X
 $\Leftrightarrow R(A - \lambda E) < n \Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0$ (特征方程)
 \Rightarrow 特征值都为 $|A - \lambda E| = 0$ 的解.
- **特征多项式**: $f(\lambda) = |A - \lambda E|$.

特征值

- 代数基本定理：一元 n 次方程

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

在复数域内有 n 个解 (重根按重数计).

- 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为特征方程 $|A - \lambda E| = 0$ 的 n 个解, 则

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

性质

n 阶方阵 A 有 n 个特征值 (计重数).

相似不变量: 相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值

定理 (定理 3)

若 n 阶矩阵 A 和 B 相似, 则 A, B 的特征多项式相同, 从而特征值也相同.

特征值

性质

- (i) $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n;$
- (ii) $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$
- (iii) A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 无零特征值.

特征值

性质

- (i) $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$;
- (ii) $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$;
- (iii) A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 无零特征值.

性质

如果 n 阶矩阵 A 和 B 相似, 则

- (i) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$;
- (ii) $|A| = |B|$;
- (iii) A 和 B 等价, 从而 $R(A) = R(B)$. 特别地, A 可逆当且仅当 B 可逆.

相似对角化

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 相似, 则 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

相似对角化

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 相似, 则 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

- 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或对角化).

相似对角化

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 相似, 则 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

- 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或对角化).

注: 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

相似对角化

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 相似, 则 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

- 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或对角化).

注: 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 对角化问题: 是否存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

例子

例 (例 7)

设 λ 为方阵 A 的特征值, 证明:

- (1) $c\lambda$ 为 cA 的特征值;
- (2) λ^k 为 A^k 的特征值;
- (3) 设 $\varphi(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, 则 $\varphi(\lambda)$ 为 $\varphi(A)$ 的特征值;
- (4) 当 A 可逆时, $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值. $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值.

例子

例 (例 8)

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 求 $A^* + 3A - 2E$ 的特征值和行列式.

求特征向量

设 $\lambda = \lambda_i$ 为矩阵 A 的一个特征值, 则

$$(A - \lambda_i E)X = 0$$

的任意非零解 $X = P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量.

求特征向量

设 $\lambda = \lambda_i$ 为矩阵 A 的一个特征值, 则

$$(A - \lambda_i E)X = 0$$

的任意非零解 $X = P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量.

例 (例 5)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

求特征向量

设 $\lambda = \lambda_i$ 为矩阵 A 的一个特征值, 则

$$(A - \lambda_i E)X = 0$$

的任意非零解 $X = P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量.

例 (例 5)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解法: 1. 求特征多项式 $f(\lambda) = |A - \lambda E|$, 解 $f(\lambda) = 0$ 得特征值;
2. 依次解齐次线性方程组 $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的非零解, 得特征值 λ_i 对应的特征向量.

例 (例 6)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和线性无关的特征向量.

例子

例 (例 6)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和线性无关的特征向量.

- λ_i 是 A 的一个特征值, 则齐次线性方程组 $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的基础解系就是矩阵 A 关于特征值 λ_i 的全体特征向量的一个最大无关组.

特征向量的性质: 不同特征值对应的特征向量线性无关

定理 (定理 2)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 为方阵 A 的 m 个特征值, P_1, P_2, \dots, P_m 依次为与之对应的特征向量. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 互不相同, 则 P_1, P_2, \dots, P_m 线性无关.

推论

设 λ_1, λ_2 为方阵 A 的两个不同特征值, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 和 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 分别是关于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量, 则 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关.

例子

例 (例 9)

设 λ_1, λ_2 为方阵 A 的两个不同特征值, 对应的特征向量分别为 P_1, P_2 , 证明 $P_1 + P_2$ 不是 A 的特征向量.

小结

- 相似不变量: 特征多项式、特征值、行列式、迹、阶次、秩.
- 相似不变性: 可逆.
- 计算特征值和特征向量, 计算特征多项式.
- 下次课: 方阵的相似对角化和对称阵的正交相似对角化.

练习

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

作业

- 思考题：两个相似矩阵的特征向量一定一样吗？为什么？
- Page₁₃₉：6-(1)、9、13.

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 26 日