

# Fundamental Groups of Small Covers

## 1 Introduction

### 1.1 Small Cover

凸多面体  $P$  是指  $\mathbb{R}^n$  中非空有限多个点集的凸包, 或者等价的是  $\mathbb{R}^n$  中有限个半空间的有界交, 即

$$P = \text{conv}\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l_i, x \rangle \geq -a_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

其中  $l_i$  为  $(\mathbb{R}^n)^*$  中的线性函数,  $a_i \in \mathbb{R}$ .

凸多面体的维数就是指凸包或者有界交的维数。若无特殊说明, 本文中的所考虑的多面体均指  $\mathbb{R}^n$  中的  $n$  维凸多面体, 记为  $P$ . 我们把  $P$  的边界记为  $K$ . 把  $P$  的内部记为  $P^\circ$ . 凸子集  $F \subset P$  称为  $P$  的面, 若  $F$  是多面体  $P$  与某一个半空间  $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x \rangle \geq -a\}$  的交, 且  $P^\circ \cap \partial V = \emptyset$ . 子集  $\emptyset$  和  $P$  本身都为  $P$  的面, 称为平凡面; 其他的面称为真面.  $P$  的 0 维面称为  $P$  的顶点,  $P$  的 1 维面称为  $P$  的边,  $P$  的  $n-1$  维面称为  $P$  的 facet. 记  $f_i$  为  $P$  的  $i$  维面的个数, 称  $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$  为  $P$  的  $f$ -vector. 取  $f_{-1} = 1$ , 则  $P$  的  $h$ -vector  $\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$  由下面等式定义

$$h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1}$$

由 Dehn-Sommerville 关系知  $h_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \dots, n$ , 为方便我们在本文中将  $P$  的 facets 的个数记为  $f_{n-1} = m$ , 即  $P$  的 facets 集为  $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ .

我们称多面体  $P$  是单 (simple) 的, 若  $P$  的每个顶点恰好是  $P$  中  $n$  个 facets 的交, 等价地, 每个顶点处恰好有  $n$  条边. 单多面体中任意余维数为  $k$  的面  $f$  总可以 (唯一) 表示为  $f = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k$ , 其中  $F_1, F_2, \dots, F_k$  为包含  $f$  的 facets.

取  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$  为二元乘法群或者模空间,  $\mathbb{Z}_2^n$  表示它们的乘积,  $e_i$  表示  $\mathbb{Z}_2^n$  第  $i$  个标准向量. 设  $P$  为  $n$  维单凸多面体,  $\mathcal{F}(P)$  为  $P$  的 facets 集, 对每一个 facet  $F_i \in \mathcal{F}(P)$ , 我们定义它上面的一个染色  $\lambda(F_i) \in \mathbb{Z}_2^n$ , 使得对  $P$  的每一个顶点  $p = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ , 满足  $\text{span}\{\lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_n)\} \cong \mathbb{Z}_2^n$ . 我们称  $\lambda: \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$  为下面将要构造的 small cover  $M$  的示性函数.

注 对于任意单凸多面体, 满足上面条件的染色不一定存在, 参考 Davis-Januszkiewicz [5]. *Nonexample 1.22 (Duals of cyclic polytope)*

现在我们定义单凸多面体  $P$  上的 small cover. 对任意点  $x \in P$ , 记  $f(x)$  为  $P$  中包含  $x$  为相对内点的唯一的面, 例如  $x$  为  $P$  内部的点时, 则  $f(x) = P$ ;  $x$  为  $P$  的顶点时, 则  $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ , 其中  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  为包含点  $x$  的  $n$  个 facets. 不妨设  $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$  为  $P$  的任意一个固定的余  $k$  维面, 记  $G_{f(x)} = \langle \lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_k) \rangle = \langle \lambda(F_i) : x \in F_i \rangle$ . 则定义 small cover 为

$$M = (P \times \mathbb{Z}_2^n) / \sim \quad (1)$$

$(x, g) \sim (y, h)$  当且仅当  $x = y, g^{-1}h \in G_{f(x)}$ . 这里  $G_{f(x)} < \mathbb{Z}_2^n$  实际上是点  $x$  处的 *isotropy subgroup*, i.e.  $\{g \in \mathbb{Z}_2^n : gx = x\}$ . 进一步, 设  $\pi: M \rightarrow P$  为  $M$  到  $P$  的投射.

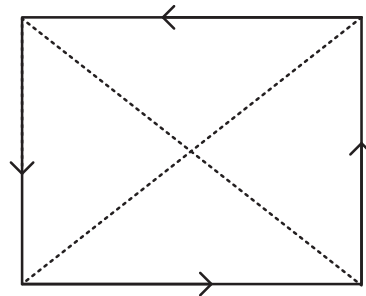
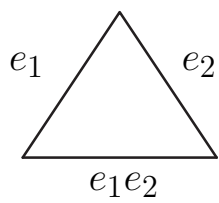
另外, 我们也可以比较直观得描述一个 small cover. 首先我们将  $2^n$  个单多面体  $P$  在  $P$  的一个顶点处粘在一起. 任取  $P$  的一个顶点  $p_0$ , 不妨记  $p_0$  附近的 facets 为  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , 且对应 facet 上的染色为  $\lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 首先我们把  $P$  放到  $\mathbb{R}^n$  的第一卦限中, 使得  $p_0$  与原点重合, 第  $i$  个 facet  $F_i$  落在  $x_i = 0$  的坐标面上. 然后我们将  $P$  沿着坐标面反射, 得到  $2^n$  个  $P$  组成的大多面体, 记为  $Q$ , 其中  $p_0$  自然的落在  $Q$  的内部. 我们给第  $g$  个坐标卦限中的  $P$  一个自然的标号  $g \in \mathbb{Z}_2^n$ . 最后我们再将  $Q$  剩余的 facets 按照染色信息成对粘合起来, 即第  $g_1$  个  $P$  的 facet  $F_i$  与第  $g_2$  个  $P$  的 facet  $F_j$  粘, 当且仅当  $i = j, g_1^{-1}g_2 = \lambda(F_i)$ . 这样我们就得到  $P$  上的 small cover  $M$ .

**命题 1.1** *small cover 为连通闭流形.*

**证明:** 参考 Davis-Januszkiewicz [5]. 性质 1.7

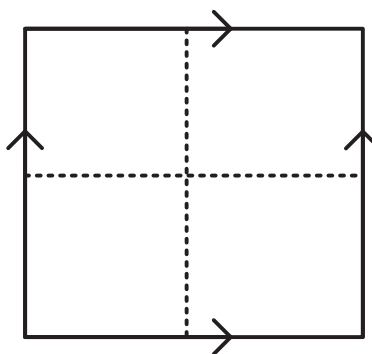
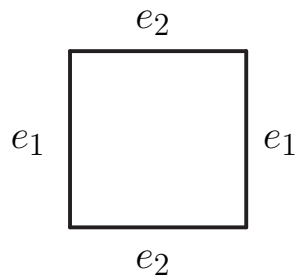
## 1.2 Examples of Small Covers

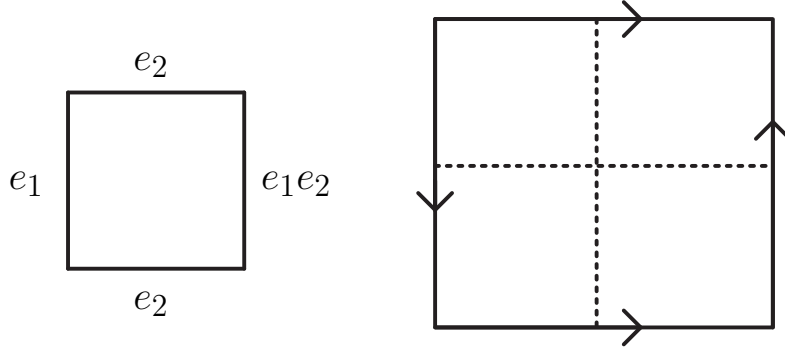
**例 1** 当  $P = \triangle^n$  时,  $\mathcal{F}(P)$  上本质上只有一种染色, 如  $n = 2$  时,



先将  $P$  在一个点处粘，得到一个大的四边形，由染色信息知它的对边沿着箭头方向粘，这是一个  $\mathbb{R}P^2$ .

**例 2** 当  $P^2$  为四边形时， $\mathcal{F}(P)$  上有下面两种不同的染色，





同样的操作，我们可以分别得到  $T^2$  和 Klein bottle.

**例 3** ( $P^2$  是一个  $m$  边形时)

$M$  是由 4 个  $m$ -gon 沿边粘成的曲面，所以  $M$  的欧拉数为  $\chi(M) = 4 - m$ . 当  $m$  为奇数时， $M$  为  $m - 2$  个  $\mathbb{R}P^2$  的连通和；当  $m$  为偶数时， $M$  为  $m - 2$  个  $\mathbb{R}P^2$  的连通和或着为  $\frac{m-2}{2}$  个  $T^2$  的连通和. 所以 small cover 决定了除  $S^2$  外的所有二维闭曲面.

由 Hurewicz 定理知道，胞腔复形的基本群可以由它们的二维骨架确定，所以在本文中，我们将构造 small cover 的一种胞腔结构，并利用它的二维骨架来计算基本群. 此外，我们记 small cover  $M$  的  $k$  维骨架为  $M[k]$ ，记多面体  $P$  的  $k$  维面结构为  $P[k]$ .

## 2 Cell Structure

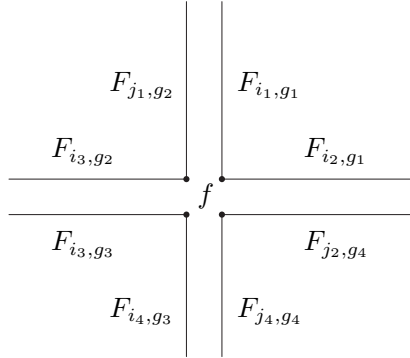
由于单凸多面体具有很好的组合性质，所以我们可以通过不同的方式来构造 Small cover 的胞腔结构. 比如由单多面体的面结构诱导的 small cover 上的胞腔结构；small cover 的 perfect 胞腔结构，见 Davis-Januszkiewicz [5] Theorem 3.1; 由单多面体的 cubical subdivision 所诱导的胞腔结构，见 Buchstaber [2]. 在下面一节中，我们对  $Q$  作类似 cubical subdivision 的操作，来构造 small cover 上一种较自然的胞腔分解. 在这种胞腔结构，可以方便的得到  $\pi_1(M)$  的一个简洁的表示.

对于一般的单凸多面体  $P$ ，总存在它的 cubical subdivision，我们将这种分解拉到 small cover，我们自然地可以得到 small cover 一种胞腔分解。而  $Q$  一般来说未必是单的，所以我们下面构造的这种 b 胞腔分解并不是严格意义的 cubical。进一步，多面体  $Q$  的面结构诱导的  $M$  的一个胞腔分解，而我们下面构造的胞腔分解实际上是这种胞腔结构 Poincare 意义上的对偶。

## 2.1 Definitions and Constructions

由  $Q$  的构造知， $Q$  中的每一个  $P$  自然地拥有一个标号  $g \in \mathbb{Z}_2^n$ ，我们将第  $g$  个单多面体  $P$  记为  $P_g$ ，将  $Q$  中  $P_g$  的第  $i$  个 facet  $F_i$  记为  $F_{i,g}$ 。若  $P_g$  的  $k$  维面  $f_i^k \subset \partial Q$ ，此时  $f_i^k$  称为  $Q$  的外 face，否则称为  $Q$  的内 face，将  $Q$  的内、外面集分别记为  $in(Q), out(Q)$ 。我们注意到  $Q$  的所有的 facets 上存在一种自然的配对结构。配对的规则由  $P$  上的染色  $\lambda$  决定。这种配对结构有助于我们描述  $M$  的基本群。下面，我们引入  $M$  的面配对结构的定义。

**定义 1 ([13] Facets-pair structure)**



设  $X$  为一个  $n$  维连通拓扑空间， $X$  可以由有限个  $n$  维单凸多面体  $\{P_g^n : g = 1, 2, \dots, N\}$  粘合而成，同样我们记  $P_g$  的第  $i$  个 facet  $F_i$  为  $F_{i,g}$ ，并且满足下面两个条件：

- 1、任意 facet  $F_{i,g_1}$  唯一配对  $F_{j,g_2}$ 。即存在一个同胚  $\tau_{i,g_1} : F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$  与  $\tau_{j,g_1} : F_{j,g_2} \longrightarrow F_{i,g_1}$  使得  $\tau_{i,g_1} = \tau_{j,g_2}^{-1}$ 。我们称  $\hat{F} = \{F_{i,g_1}, F_{j,g_2}\}$  为一个 facet 对，称  $F_{j,g_2}$  为  $F_{i,g_1}$  的配对 facet。
- 2、对任意余二维面  $f = F_{i_1,g_1} \cap F_{i_2,g_1}$ ，如果  $\tau_{i_1,g_1}(f) = F_{j_1,g_2} \cap F_{j_3,g_2}$ ， $\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{j_2,g_4} \cap F_{j_4,g_4}$ ，则  $\tau_{j_3,g_2} \tau_{i_1,g_1}(f) = \tau_{j_4,g_4} \tau_{i_2,g_1}(f) = F_{i_3,g_3} \cap F_{i_4,g_3}$ 。

这里不排除  $F_{j_2, g_4} = F_{j_3, g_2}$  或者  $F_{i_2, g_1} = F_{i_3, g_3}$ .

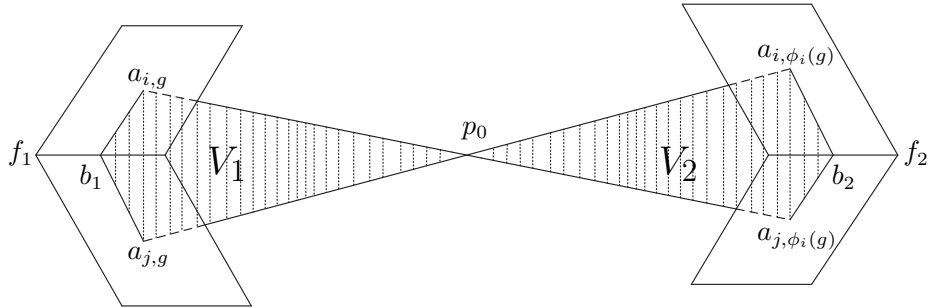
则我们称  $\mathcal{S} = \{\hat{F}_{i, g}, \tau_{i, g}\}$  为  $X$  上的一个 *facets-pairing structure*,  $\tau_{i, g} : F_{i, g_1} \rightarrow F_{j, g_2}$  为  $\mathcal{S}$  的 *structure map*.  $\square$

事实上,  $\mathcal{F}(P)$  上的示性函数  $\lambda : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$  决定了  $M$  上的一个配对结构.  $F_{i, g_1} \sim F_{j, g_2}$  当且仅当  $F_i = F_j$ ,  $\lambda(F_i) = (g_1)^{-1}g_2$ , 当且仅当  $i = j$ ,  $g_2 = g_1 \cdot \lambda(F_i)$ , 即对  $Q$  的任意一个 facet  $F_{i, g}$ , 他的配对 facet 为  $F_{i, \phi_i(g)}$ , 其中  $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i) : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ . 下面, 我们把  $M$  的 facets pair 记为  $\{F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}\}$ .

$Q$  到  $P$  有一个自然地投射, 我们记为

$$\bar{\pi} : Q \rightarrow P \quad (2)$$

下面构造  $M$  的 cell structure. 首先我们将  $M[0]$  取为点  $p_0$ , 并且设为  $M$  的基点. 我们在  $Q$  的每一对余 1 维面处构造 1-cells. 对  $Q$  的每对 facets pair  $\{F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}\}$  (包括所有的内 facets、外 facets), 任取  $F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}$  内部的点  $a_{i, g}, a_{i, \phi_i(g)}$  (不妨取为  $F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}$  的重心), 使得  $\bar{\pi}(a_{i, g}) = \bar{\pi}(a_{i, \phi_i(g)}) = a_i \in P$ , 在  $Q$  的内部取连接  $p_0$  到  $a_{i, g}, a_{i, \phi_i(g)}$  的两条简单有向道路 (不妨取为直线段), 记为  $\overrightarrow{a_{i, g}}, \overrightarrow{a_{i, \phi_i(g)}}$ . 则  $\overrightarrow{a_{i, g}}(\overrightarrow{a_{i, \phi_i(g)}})^{-1}$  为  $M$  中以  $p_0$  为起点的一条有向闭路, 记为  $x_{i, g}$ , 另外记  $x_{i, \phi_i(g)} = x_{i, g}^{-1}$ , 它表示  $M$  中以  $p_0$  为起点的有向闭路  $\overrightarrow{a_{i, \phi_i(g)}}(\overrightarrow{a_{i, g}})^{-1}$ . 若我们不考虑  $x_{i, g}$  (或  $x_{i, \phi_i(g)}$ ) 的方向, 则  $x_{i, g} - \{p_0\} \cong e^1$  (或  $x_{i, \phi_i(g)} - \{p_0\} \cong e^1$ ), 这里  $e^k$  表示  $M$  一个  $k$  维 cell.  $M$  中的每一对 facets pair 都决定了一个 1-cell. 在上述构造中, 所有的  $\{x_{i, g}\}$  都仅交于 0-skelton  $p_0$  处. 这样我们就获得  $M$  的 1-skelton  $M[1] = \bigvee_{p_0} x_{i, g}$ .



我们在余 2 维面处构造 2-cells. 设  $f_1 = F_{i, g} \cap F_{j, g}$  为  $Q$  的任意一个余 2 维面, 则令  $f_2 = F_{i, \phi_i(g)} \cap F_{j, \phi_i(g)}$ ,  $f_3 = F_{i, \phi_i \phi_j(g)} \cap F_{j, \phi_i \phi_j(g)}$ ,

$f_4 = F_{i,\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_j(g)}$ , 使得  $\{\pi(f_k), k = 1, 2, 3, 4\}$  在  $P$  中的像相同, 记为  $f$ , 这里  $\phi_i\phi_j(g) = \phi_i(g \cdot \lambda(f_j)) = g \cdot \lambda(f_j) \cdot \lambda(f_i)$ . 取  $f$  内部的一个点  $b$ , 对应  $f_k$  上的点设为  $b_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . 取  $V_1$  为经过点  $b_k, p_0, a_{i,g}, a_{j,g}$  的二维简单区域, 如取  $b$  为  $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\}$  与  $f$  的交点, 其中  $\vec{a}_i = \pi(\overrightarrow{a_{i,g}}), \vec{a}_j = \pi(\overrightarrow{a_{j,g}})$ , 这里的  $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\} \triangleq \{\vec{x} = k_1\vec{a}_i + k_2\vec{a}_j, k_1, k_2 \geq 0\}$ . 则  $V_1 = \text{span}\{\vec{a}_{i,g}, \vec{a}_{j,g}\} \cap P_g \cong D_+^2$ . 类似确定  $V_2 = \text{span}\{\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}, \overrightarrow{a_{j,\phi_i(g)}}\} \cap P_{\phi_i(g)}, V_3 = \text{span}\{\overrightarrow{a_{i,\phi_i\phi_j(g)}}, \overrightarrow{a_{j,\phi_i\phi_j(g)}}\} \cap P_{\phi_i\phi_j(g)}, V_4 = \text{span}\{\overrightarrow{a_{i,\phi_j(g)}}, \overrightarrow{a_{j,\phi_j(g)}}\} \cap P_{\phi_j(g)}$ , 则  $\{V_k : k = 1, 2, 3, 4\}$  在  $M$  中实际上粘合成一个闭的  $D^2$ , 记为  $D_f^2$ , 且  $D_f^2$  的边界落在  $M$  的 1-skelton 中. 对应的二维 cell  $e_f^2 = (D_f^2)^\circ$ . 这样就得到 2-skelton  $M[2] = M[1] \cup \{e_f^2\}$ .

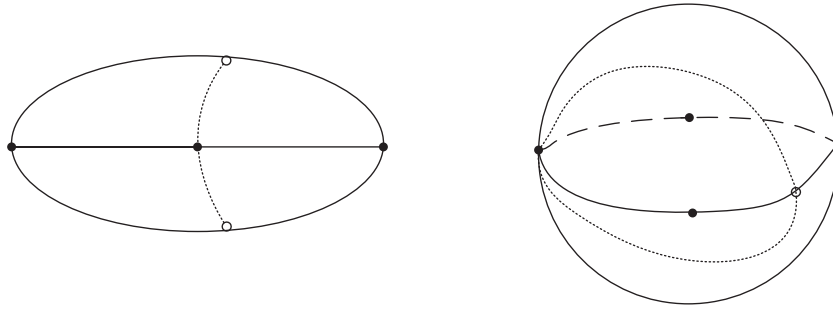
依次进行下去, 我们可以在  $Q$  的余  $k$  维面  $f_l^k = F_{i_1,g} \cap F_{i_2,g} \cap \cdots \cap F_{i_k,g}$  处可构造  $M$  的  $k$ -cells. 我们可以类似取  $V_l = \text{span}\{a_{i_1,g}, a_{i_2,g}, \dots, a_{i_k,g}\} \cap P_g, l = 1, 2, \dots, 2^k$ , 它们在  $M$  中粘成一个  $k$  维闭圆盘, 记为  $D^k$ , 则  $\partial D^k$  落在  $M[k-1]$  中, 且  $D^k$  对应  $M$  的  $k$ -cell 可以为

$$e^k \cong (D^k)^\circ = \left( \bigcup_{\{l=1,2,\dots,2^k\}} V_l \right)^\circ.$$

最终我们可以在  $Q$  的顶点处构造  $M$  的  $h_0$  个  $n$ -cells.

注 在上述二维胞腔的构造中, 若  $F_{i,g}$  包含点  $p_0$ , 则  $a_{i,g}$  可能包含在  $F_{i,g}$  中, 此时我们构造的  $V_i$  不是 cube 的, 但我们的构造依然适用. 进一步, 此时 facet  $F_{i,g}$  对应的  $x_{i,g}$  在  $M$  中与点道路同伦. 事实上, 对于具有 facets pair 结构的任意拓扑流形都可类似构造其胞腔结构. 如我们考虑

**例 4** 我们将三角形沿着他们对应的边粘和得到一个  $S^2$



按照上面步骤, 我们可以得到  $S^2$  的一个胞腔分解  $S^2 = e_0 \cup e^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2$

## 2.2 Calculation and Example

small cover 的基本群  $\pi_1(M)$  的生成元可取为 facets 对应的有向闭路  $\{x_{i,g}\}$ .  $\pi_1(M)$  的关系由二维胞腔及配对关系决定. 对  $M$  中的任意 facet pair  $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$  对应一对互逆的生成元  $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$ , 即配对关系为  $x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1$ . 对于任意余二维面  $f = F_{i,g} \cap F_{j,g} (\neq \emptyset) \subset Q$ , 由  $f$  确定的二维胞腔  $e_f$  决定一个关系  $r_f = \partial D_f^2 = x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)} = 1$ , 即  $x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = (x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)})^{-1} = (x_{j,\phi_j(g)})^{-1}(x_{i,\phi_i\phi_j(g)})^{-1} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}$ . 从而我们得到  $\pi_1(M)$  的一个群表示.

$$\begin{aligned} \pi_1(M) = \langle x_{i,g}, i = 1, 2, \dots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n : x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g; \\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}, \forall f = F_{i,g} \cap F_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (3) \end{aligned}$$

其中  $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i)$

我们记  $\mathcal{F}_1(Q)$  为  $Q$  的内 facets 集; 记  $\mathcal{F}_2(Q)$  为  $Q$  的内 facets 集附近的 facets 集, 即  $\mathcal{F}_2(Q) = \{F \in \mathcal{F}(Q) \cap \partial Q : \exists G \in \mathcal{F}_1(Q), \text{st. } F \cap G \neq \emptyset\}$ ; 记  $\mathcal{F}_3(Q)$  为  $Q$  外 facets 集剩余的 facets 集. 则我们有下面结论.

**引理 2.1**  $\forall F_i \in \mathcal{F}(P)$  固定, 则  $\bar{\pi}^{-1}(F_i) = \{F_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  对应的生成元  $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  是彼此相关的. 特别地, 当  $F_{i,g} \in \mathcal{F}_1(Q)$  时,  $x_{i,g} = 1$ ; 当  $F_{i,g_1}, F_{i,g_2} \in \mathcal{F}_2(Q)$  时, 若  $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} \neq \emptyset$ , 则  $x_{i,g_1} = x_{i,g_2}$ , 否则  $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$ .

进一步, 设  $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$  为  $Q$  中任意一个固定的余二维面. 当  $F_{i,g}$  和  $F_{j,g}$  都属于  $\mathcal{F}_1(Q)$ , 即  $f$  为内面时,  $f$  对应的关系为 1; 当  $F_{i,g}$  和  $F_{j,g}$  分别属于  $\mathcal{F}_2(Q)$  和  $\mathcal{F}_1(Q)$  时,  $f$  对应的关系为  $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$ .

**证明:** 若  $F_{i,g}$  为内 facets, 则  $\overrightarrow{x_{i,g}}$  包含在  $Q$  的内部, 可缩为点道路, 故  $x_{i,g} = 1$ . 对于内余 2 维面  $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$  确定的关系, 为内生成元的组合, 故也是平凡的. 若  $F_{i,g}, F_{j,g}$  分别为外面和内面, 不妨设  $F_{i,g}$  为外面,  $F_{j,g}$  为内面, 则  $x_{j,g} = x_{j,\phi_i(g)} = 1$ , 所以  $f$  对应的关系为  $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$ . 即内面附近的且相交为余二维面  $f$  的 facets 对应的生成元是彼此相关的. 又因为每对 facets pair 对应的生成元互为逆元, 所以当  $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} = \emptyset$  时,  $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$ .

最后, 我们考虑  $F_{i,g} \in \mathcal{F}_3(Q)$  的情况. 我们不妨固定  $F_{i,1} \in \bar{\pi}^{-1}(F_i)$ , 对应的生成元为  $x_{i,1}$ . 首先它的配对 facets 对应的生成元  $x_{i,\phi_i(1)} = (x_{i,1})^{-1}$ .



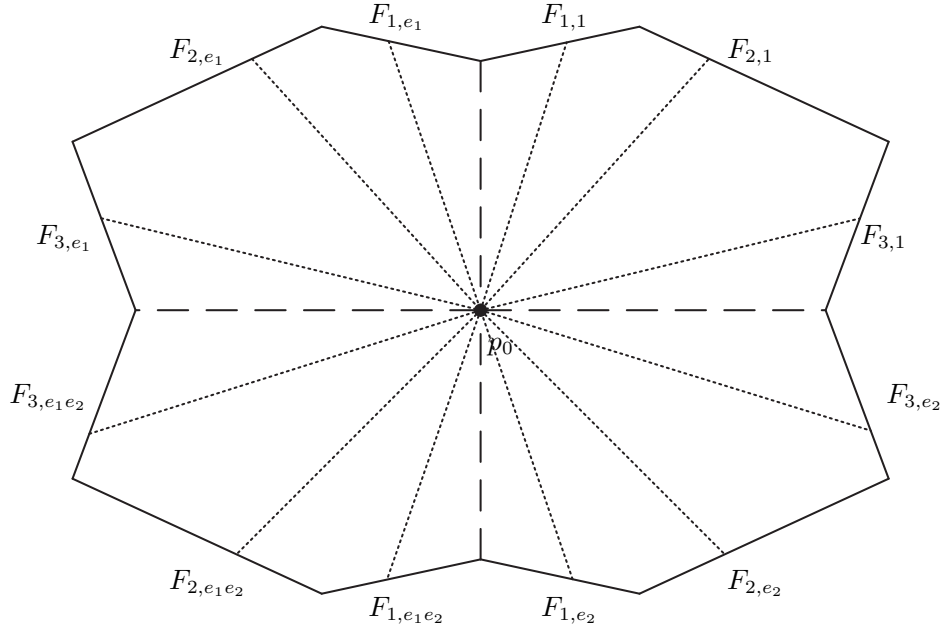
由于与  $F_{i,1}$  相交的 facets 都在  $P_1$  中, 所以任意  $f = F_{i,1} \cap F_{j,1} \neq \emptyset$  对应的关系为  $x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)} = x_{j,1}x_{i,\phi_j(1)}$ , 即  $x_{i,\phi_j(1)} = x_{i,\lambda(F_j)} = (x_{j,1})^{-1}x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)}$ . 然后, 我们对  $F_{i,\phi_j(1)}$  进行上面的讨论. 所以  $\forall g \in \langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle$ ,  $x_{i,g}$  都与  $x_{i,1}$  相关, 其中  $j \in \{j : F_j \cap F_i \neq \emptyset\}$ . 我们仅考虑  $F_i$  一个顶点处的染色, 我们知  $\langle \{\phi_j(1)\} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n / \langle \phi_i(1) \rangle$ . 所以  $\langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n$ , 这就证明了所有的  $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  是相关的.  $\square$

注 1、注意这里不排除  $F_{i,g} \cap F_{i,\phi_j(g)}, F_{i,g} \cap F_{i,\phi_i\phi_j(g)}$  都为  $Q$  中非空的余二维面的情况, 此时  $(x_{i,\phi_j(g)})^{-1} = x_{i,\phi_i\phi_j(g)} = x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$ , i.e.  $(x_{i,\phi_j(g)})^2 = 1$ . 从而  $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  为  $\pi_1(M)$  中的相等的二阶生成元.

2、Davis-Januszkiewicz [5] theroem 3.1 中指出 small cover Mod 2 Betti 数  $b_i(M) = h_i(P)$  (这里  $h_i$  定义中  $f_k$  表示  $P$  中余  $k+1$  维面的个数).  $b_1(M) = h_1(P) = m - n$ , 即在 perfect 意义上的胞腔结构得到基本群生成元个数为  $m - n$  个. 在这里所有外 facets 决定的生成元实际上也是  $m - n$  个.

在下面例子中, 我们只取每个 facets pair 中的其中一个 facets 对应的闭路作为基本群的生成元.

**例 5**  $P$  为五边形时,  $\mathcal{F}$  上的染色依次取为  $\{e_2, e_1e_2, e_1, e_2, e_1\}$ ,  $Q$  可视为 12 边形, 对应 6 对外 facets, 4 组余二维外面。



$Q$  中的 facets pair 有  $\{F_{2,e_1}, F_{2,e_2}\}, \{F_{1,e_1}, F_{1,e_1e_2}\}, \{F_{1,1}, F_{1,e_2}\}, \{F_{2,1}, F_{2,e_1e_2}\}, \{F_{3,1}, F_{3,e_1}\}, \{F_{3,e_2}, F_{3,e_1e_2}\}$  (内部 facets pair 对应平凡生成元, 我们暂不考虑). 给所有道路一个指向  $p_0$  的方向, 不妨设  $p_0$  为基本群基点, 取生成元为

$$\begin{cases} x_{2,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_2}})^{-1} \\ x_{1,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{1,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_2}})^{-1} \\ x_{2,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{3,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1}})^{-1} \\ x_{3,e_2} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,e_2}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1e_2}})^{-1} \end{cases}$$

在余 2 维面  $p_1, p_2, p_3, p_4$  处确定四组关系:

在  $p_1$  处胞腔对应的关系为  $x_{1,1} = x_{1,e_1}$ ;

在  $p_2$  处胞腔对应的关系为  $x_{1,1}x_{2,e_2} = x_{2,1}x_{1,e_1e_2}$ , 即  $x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1} = x_{2,1}(x_{1,e_1})^{-1}$ ;

在  $p_3$  处胞腔对应的关系为  $x_{2,1}x_{3,e_1e_2} = x_{3,1}x_{2,e_1}$ , 即  $x_{2,1}(x_{3,e_2})^{-1} = x_{3,1}x_{2,e_1}$ ;

在  $p_4$  处胞腔对应的关系为  $x_{3,1} = x_{3,e_2}$ . 从而

$$\begin{aligned}\pi_1(M) &= \langle x_{2,e_1}, x_{1,e_1}, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,e_2} | x_{1,1}(x_{1,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{3,e_2})^{-1}, \\ &\quad x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1}x_{2,e_1} \rangle \\ &\cong \langle x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1} | x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1} \rangle\end{aligned}\quad (4)$$

即  $\pi_1(M) \cong \langle x, y, z | xy^{-1}xzy^{-1}z \rangle$

### 2.3 Universal Covering Space

设  $\pi : M \rightarrow P$  为单多面体  $P$  上的 small cover.  $P$  的 facets 集为  $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ . 下面我们将构造 small cover  $\pi : M \rightarrow P$  的 (万有) 覆盖空间

$$\mathcal{M} = Q \times \pi_1(M) / \sim \quad (5)$$

$(Q, \nu_1)$  的外 facet  $F_{i,g_1}$  与  $(Q, \nu_2)$  的外 facet  $F_{j,g_2}$  粘当且仅当  $i = j$ ,  $g_1(g_2)^{-1} = \lambda(F_i)$ ,  $\nu_1(\nu_2)^{-1} = x_{i,g_1}$  (或者等价的  $\nu_2(\nu_1)^{-1} = x_{i,g_2}$ ), 其中  $\nu_1, \nu_2 \in \pi_1(M)$ . 下面为方便, 我们把  $(Q, \nu)$  简记为  $Q_\nu$ ,  $Q_\nu$  的 facet  $F_{i,g}$  记为  $F_{i,g}^\nu$ .

下面我们说明  $\mathcal{M}$  实际上只与单多面体  $P$  及  $P$  的面结构有关. 我们首先定义由  $P$  的面结构决定的 *right-angle Coxeter group*  $W_P$  如下:

$$W_P = \langle F_1, \dots, F_m : F_i^2 = 1; (F_i F_j)^2 = 1, \forall F_i, F_j \in \mathcal{F}(P), F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle$$

Davis-Januszkiewicz [5] Lemma 4.4 中构造了

$$\mathcal{L} = (P \times W_P) / \sim \quad (6)$$

其中  $(x_1, g_1) \sim (x_2, g_2)$  当且仅当  $x_1 = x_2$ ,  $g_1(g_2)^{-1} \in \langle F : x \in F, F \in \mathcal{F}(P) \rangle$ . 且由 Davis [3] (Theorem 10.1 and 13.5) 知  $\mathcal{L}$  为单连通的.

定义群同态  $\psi : W \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ , 其中  $\psi(F_i) = \lambda(F_i), i = 1, 2, \dots, m$ .

**引理 2.2** 设  $\pi : M \rightarrow P$  为单多面体  $P$  上的 small cover, 则有群短正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow W_P \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2^n \rightarrow 1 \quad (7)$$

其中  $\pi_1(M) \cong \ker \psi$  为  $W_P$  的子群,  $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$

**证:** 在 Davis-Januszkiewicz [5] 推论 4.5 中, 我们知道有上面正合列成立, 且

$\pi_1(M) \cong \ker \psi$  为  $W_P$  的正规子群. 不妨设  $p_0$  附近的 facets 为  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ ,  $\lambda(F_i) = e_i$ , 考虑  $\gamma: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow W_P$ ,  $\gamma(e_i) = F_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $\psi \circ \gamma = id_{\mathbb{Z}_2^n}$ , 即上面短正合列是可裂的, 故  $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$ .  $\square$

**定义 2**  $\pi_1(M, p_0)$  如形式 3, 定义

$$\begin{aligned} \alpha: \pi_1(M, p_0) &\longrightarrow W \\ x_{i,g} &\longmapsto \gamma(\phi_i(g)) \cdot \gamma(\phi_i(1))F_i \cdot \gamma(\phi_i(g)) = \gamma(g)F_i\gamma(\phi_i(g)) \triangleq \widehat{F_{i,g}} \end{aligned}$$

**引理 2.3**  $\alpha$  是 *well-defined*, 单的, 且  $\text{im } \alpha = \ker \psi$ .

**证:** 首先验证  $\alpha$  将关系映为关系. 对于配对关系,

$$\begin{aligned} \alpha(x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)}) &= \alpha(x_{i,g})\alpha(x_{i,\phi_i(g)}) \\ &= \gamma(g)F_i\gamma(\phi_i(g)) \cdot \gamma(\phi_i(g))F_i\gamma(g) \\ &= \gamma(g)(F_i)^2\gamma(g) = 1 \end{aligned}$$

对于余二维面对应的关系,

$$\begin{aligned} \alpha(x_{i,g}x_{j,\phi_j(g)}x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)}) &= \alpha(x_{i,g})\alpha(x_{j,\phi_j(g)})\alpha(x_{i,\phi_i\phi_j(g)})\alpha(x_{j,\phi_j(g)}) \\ &= \gamma(g)(F_iF_j)^2\gamma(g) = 1 \end{aligned}$$

所以  $\alpha$  是 *well-defined*.

从上面我们发现  $\alpha$  将  $Q$  中的余二维面对应的关系及关系的共轭一一地映到对应  $P$  中余二维面所决定的关系及关系的共轭. 我们在 Coexter group 中加入一些冗余的生成元和关系, 得

$$\begin{aligned} W = W' &= \langle F_i, \widehat{F_{i,g}}, i = 1, 2, \dots, m; g \in \mathbb{Z}_2^n : \widehat{F_{i,g}}\widehat{F_{i,\phi_i(g)}} = 1, \\ &\quad \widehat{F_{i,g}}\widehat{F_{j,\phi_j(g)}}\widehat{F_{i,\phi_i\phi_j(g)}}\widehat{F_{j,\phi_j(g)}} = 1, \forall i, j, g; f = F_{i,g} \cap F_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (8) \end{aligned}$$

任取  $\nu \in \pi_1(M)$  为生成元上的文字, 则  $\alpha(\nu) \in W$  为  $\{\widehat{F_{i,g}}\}$  上的文字. 若  $\alpha(\nu) = 1$ , 则它可以由  $W$  中的关系及关系的共轭拼成, 然后我们把每一小段关系或关系的共轭, 唯一地对应到  $\pi_1(M)$  中的关系及关系的共轭, 然后依次拼成一个新的文字  $\nu' (= 1)$ . 则  $\nu = \nu' = 1 \in \pi_1(M)$ . 即  $\alpha$  是单的.

$\text{im } \alpha$  显然为  $W$  的子群, 下说明它是  $W$  的正规子群. 任意  $\widehat{F_{i,g}} \in \text{im } \alpha, F_k \in W$ ,

$$\begin{aligned} F_k\widehat{F_{i,g}}F_k^{-1} &= \widehat{F_{k,1}}\gamma(\phi_k(1))\widehat{F_{i,g}}\gamma(\phi_k(1))\widehat{F_{k,\phi_k(1)}} \\ &= \widehat{F_{k,1}}\widehat{F_{i,g\cdot\phi_k(1)}}\widehat{F_{k,\phi_k(1)}} \in \text{im } \alpha \end{aligned}$$

进一步, 对任意  $\alpha(\nu) \in \text{im } \alpha, \omega \in W$ , 都有  $\omega\alpha(\nu)\omega^{-1} \in \text{im } \alpha$ . 即  $\text{im } \alpha$  是正规的. 而  $W/\text{im } \alpha \cong \mathbb{Z}_2^n$ . 故  $\text{im } \alpha = \ker \psi$ .  $\square$

**引理 2.4**  $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$

**证明:**  $\mathcal{L}$  和  $\mathcal{M}$  之间的同胚是由分裂短正合列 (7) 给出的,

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\alpha} W_P \begin{array}{c} \xleftarrow{\psi} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1$$

其中  $\psi \circ \gamma = \text{id}_{\mathbb{Z}_2^n}$ .

注意到  $F_i = \alpha(x_{i,1})\gamma(\phi_i(1)) \triangleq (x_{k,1}, \phi_i(1)) = (x_{k,1}, \lambda(F_k))$ . 进一步我们设  $\varphi : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \text{Aut}(\pi_1(M))$  via  $\varphi_g(\nu) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(\nu)\gamma(g^{-1})) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(\nu)\gamma(g))$ , 其中  $g \in \mathbb{Z}_2^n, \nu \in \pi_1(M)$ . 定义  $(\nu_1, g_1) \cdot (\nu_2, g_2) = (\nu_1\varphi_{g_1}(\nu_2), g_1g_2)$ .

下面我们定义  $h : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$  via.  $h(x, \omega) = (x_g, \nu)$ , 当  $\omega = F_k$  时,  $\omega = \alpha(x_{k,1})\gamma(\lambda(F_k))$ . 由于  $W_P$  是群  $\mathbb{Z}_2^n$  和  $\pi_1(M)$  半直积, 所以这种分解是唯一的. 进一步,  $\forall \omega \in W_P$  为  $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$  上的文字, 则有分解  $\omega = \alpha(\nu)\gamma(g) = (\nu, g)$ , 其中  $g \in \mathbb{Z}_2^n, \nu \in \pi_1(M)$  是唯一的.

定义  $h^{-1} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$  via.  $h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \alpha(\nu)\gamma(g))$ .

$h \circ h^{-1}(x_g, \nu) = h(x, \alpha(\nu)\gamma(g)) = (x_g, \nu)$ ;

$h^{-1} \circ h(x, \omega) = h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \alpha(\nu)\gamma(g)) = (x, \omega)$ .

$h, h^{-1}$  局部上为 identity, 故为局部同胚.

所以  $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$   $\square$

接下来我们将证明  $\mathcal{M}$  为  $M$  的万有覆叠空间. 我们记  $\Pi : \mathcal{M} \longrightarrow M$  为  $\mathcal{M}$  到  $M$  的投射.

$$\begin{array}{ccc} Q \times \pi_1(M) & \xrightarrow{q'} & Q \times \pi_1(M) / \sim = \mathcal{M} \\ \tilde{\Pi} \downarrow & & \downarrow \Pi \\ Q & \xrightarrow{q} & Q / \sim = M \end{array}$$

其中  $q, q'$  是粘合  $F_{i,g_1}^{\nu_1}$  和  $F_{i,g_2}^{\nu_2}$  决定的商映射.

**定理 2.5**  $\mathcal{M}$  为  $M$  的万有覆叠空间.

**证明:** 由  $\mathcal{M}$  的定义知  $\mathcal{M}/\pi_1(M) = M$ . 下面只需要证明  $\forall x \in \mathcal{M}$ , 存在包含点  $x$  的开邻域  $U$ , 使得不同的  $\nu \in \pi_1(M)$ ,  $\nu(U)$  不交.

当点  $x = q^{-1}(x) \in Q^\circ$  时, 取包含点  $x$  的一个实心开球邻域  $U$ , 使得  $U \subset Q^\circ$ , 此时  $\nu(U)$  落在不同指标的  $Q$  中, 是不交的. 当  $x = q^{-1}(x) \in \partial Q$ , 我们记  $f(x)$  为  $\text{out}(Q)$  中包含  $x$  为相对内点的最小的面, 不妨设  $f(x)$  为余  $k$  维的, 则我们取包含点  $x$  的实心开球邻域  $U$ , 满足  $U$  与包含点  $x$  的  $Q$  的 copy 的交都是  $\frac{1}{2^k}$  球, 这时  $\nu(U)$  显然也是不交的.

所以  $\mathcal{M}$  是  $M$  一个正则的覆叠空间, 又  $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$  是单连通的, 故为万有覆叠空间.  $\square$

设  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  为上面覆叠空间  $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow M$  的覆叠变换群. 由于  $\mathcal{M}$  是单连通的, 所以  $\pi_1(M) \cong D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ . 下面我们根据上面构造的 cell structure (的 2-skeleton) 来刻画  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  的生成元.

对于  $Q$  中的每个 facet  $F_{i,g}$ , 我们定义  $\mathcal{M}$  上的面映射  $\Gamma_{i,g}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ .  $\forall x \in \mathcal{M}$ , 存在某个  $Q_{\nu_1}$ , 使得  $x \in Q_{\nu_1}$ , 由  $\mathcal{M}$  的构造知存在唯一的  $Q_{\nu_2}$ , 使得  $F_{i,g} \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$ , 我们定义  $\Gamma_{i,g}(x)$  为  $\Pi^{-1}(\Pi(x)) \cap Q_{\nu_2}$  中的唯一的一点, 这样定义的  $\Gamma_{j,g'}$  显然是 well-defined 的.  $\Gamma_{i,g}$  的连续性也是显然的.

类似引理 2.1 容易验证

**引理 2.6** 1、 $\Gamma_{i,g}\Gamma_{i,\phi_i(g)}(x) = x$ .

2、若存在  $F_{j,g'} (\neq F_{i,g}) \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$ , 则  $\Gamma_{j,g'}(x) = \Gamma_{i,g}(x)$ .

3、若 facet  $F_{i,g} \in \text{in}(Q)$ , 此时  $Q_{\nu_1} = Q_{\nu_2}$ ,  $\Gamma_{i,g} = \text{id}$ .

进一步我们有

**引理 2.7** 面映射  $\Gamma_{i,g}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  为  $\mathcal{M}$  上的覆叠变换.

**命题 2.8**  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  可以由面映射  $\{\Gamma_{i,g}\}$  来刻画.

**证明:**  $\mathcal{M}$  为单连通的, 此时  $\pi_1(M, p_0)$  到  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  的满同态实际上为群同构, 它将  $[x_{i,g}] \in \pi_1(M, p_0)$  映为  $\Gamma_{i,g}$ . 我们不妨取点  $x = \pi^{-1}(p_0) \in M$ , 则  $\{\Pi^{-1}(x)\}$  实际上是每个  $Q$  中  $p_0$  的 copy. 我们取第 1 个  $Q_1$  中的  $p_0$  的 copy, 记为  $y_0$ , 其中 1 为  $\pi_1(M)$  的单位元. 所以我们只需要验证  $\Gamma_{i,g}(y_0) = \widetilde{x_{i,g}}(1)$ , 其中  $\widetilde{x_{i,g}}$  是  $x_{i,g}$  在  $\mathcal{M}$  中的一段提升.  $\Gamma_{i,g}(y_0)$  实际上是  $Q_{x_{i,g}}$  中的  $p_0$  的 copy, 即  $\widetilde{x_{i,g}}(1)$ . 所以  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  的生成元可以自然的选为  $Q$  的 facets 对应的面映射.  $\square$

综上, 我们有下面结论:

**定理 2.9**  $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow M$  为  $M$  的万有覆叠空间, 复叠变换群  $D(\mathcal{L}, \Pi, M) \cong \pi_1(M)$  可以由  $Q$  的 facets 对应的面映射生成.

## 2.4 Naturality of the Cell Structure

最后我们解释一下我们这种胞腔结构的自然性. 我们考虑  $M[2]$ , 它的 0-skeleton 只有一个点  $p_0$ ; 它的 1-skeleton 是  $\overrightarrow{x_{i,g}}$  的一点并, 对应  $\pi_1(M)$  的生成元; 它的每一个二维胞腔对应  $\pi_1(M)$  的一个关系. 即  $M[2]$  是  $\pi_1(M, p_0)$  的 *presentation complex*. 进一步, 我们将  $M$  的这种胞腔结构提升到它的万有覆盖空间  $\mathcal{M}$  中, 则  $\mathcal{M}[2]$  实际上是  $\pi_1(M, p_0)$  的 *Cayley 2-complex*.

事实上, 将单多面体  $P$  视为一个 right angle orbifold, 则 small cover  $\pi : M \rightarrow P$  为  $P$  上的一个 covering orbifold. 由于  $M$  为一个闭流形,  $P$  为一个 good orbifold, 则  $P$  的单连通的 covering orbifold  $\mathcal{M}$  为它的万有 covering orbifold. 进一步, covering orbifold  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow P$  为 covering space  $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow M$  和 small cover  $\pi : M \rightarrow P$  的复合. 它们的覆盖变换群分别为  $W_P, \pi_1(M)$  和  $\mathbb{Z}_2^n$ . (Davis-Januszkiewicz [5])

我们定义  $\pi_1^{orb}$  为 universal orbifold cover  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow P$  的覆盖变换群. 即  $\pi_1^{orb}(P) = W_P$ . 我们对单多面体  $P$  做类似的 cubical 分解, 则某种意义上,  $P[2]$  为  $W_P$  的 presentation complex. 把这种分解提升到  $\mathcal{M}$  中, 则  $\mathcal{M}'[2]$  实际上是  $W_P$  的一个 Cayley 2-complex (Davis [4]). 我们可以类似定义  $P$  的 facets pair 结构, 每个  $F_i$  都是对合的, 即它的配对 facet 是它本身, 对应的面映射为反射. 进一步, facet  $F$  中  $F' \cap F$  对应的面映射, 在面包含作用下, 对应  $W_P$  中的  $FF'F = F'$ .

### 3 $\pi_1$ -injectivity of Facial Submanifold

设  $F$  为单多面体  $P$  的任意一个 facet, 则它依然是单凸的, 且  $\mathcal{F}(F)$  可以继承  $\mathcal{F}(P)$  上的染色, 进而可以构造  $F$  上的 small cover  $\pi_F : M_F \rightarrow F$ . 在 Davis-Januszkiewicz [5] Lemma 1.3 中, 我们知道  $M_F$  为  $M$  的  $n-1$  维连通子流形.

在这一节中, 我们利用上面的胞腔结构, 考虑  $\pi_1(M_F)$  与  $\pi_1(M)$  之间的关系. 我们设多面体  $P, F$  对应的 Coxeter group 分别为  $W_P = \langle G : R \rangle$ ,  $W_F = \langle G_F : R_F \rangle$ . 我们取定  $F$  的一个顶点  $p_0$  为基点, 我们将  $2^n$  个单多面体  $P$  在  $p_0$  处粘在一起, 分析它们的胞腔结构, 可以得到  $M, M_F$  的基本群, 群表示形式如 (3), 记  $\pi_1(M, p_0) = \langle \tilde{G} : \tilde{R} \rangle$ ,  $\pi_1(M_F, p_0) = \langle \tilde{G}_F : \tilde{R}_F \rangle$ .

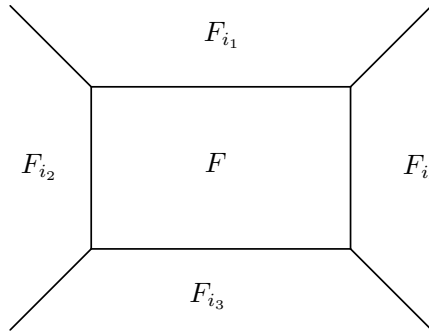
下面我们设  $\rho : F \rightarrow P$  为面包包含映射,  $\rho_* : W_F \rightarrow W_P$  为  $\rho$  决定的 Coxeter group 之间的群同态, 设  $\tilde{\rho} : M_F \rightarrow M$  为  $\rho$  决定的 Facet 子流形  $M_F$  到  $M$  的包含映射,  $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_F) \rightarrow \pi_1(M)$  为它诱导的基本群之间的群同态.

下面不妨设  $F$  为单多面体  $P$  的第 1 个 facet,  $\lambda(F) = e_1$ .

**引理 3.1** 1、 $\rho_*|_{G_F}$  和  $\rho_*|_{R_F}$  都为单射.

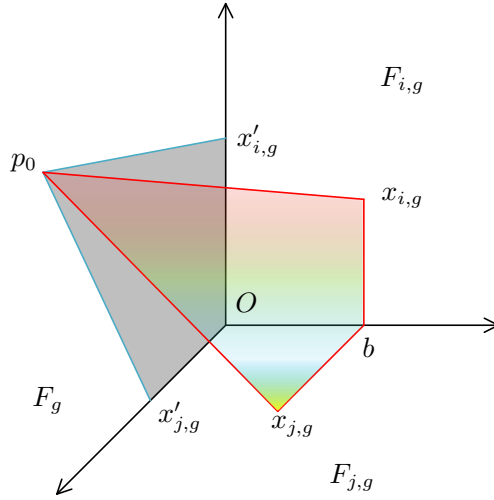
2、 $\tilde{\rho}_*|_{\tilde{G}_F}$  和  $\tilde{\rho}_*|_{\tilde{R}_F}$  都为单射.

**证明:** 1、设  $P$  中与  $F$  相交的 Facets 集为  $\mathcal{F}_1 = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_{m'}}\} \subset \mathcal{F}(P)$ , 则  $G_F = \mathcal{F}(F) = \{F_{i_1} \cap F, F_{i_2} \cap F, \dots, F_{i_{m'}} \cap F\}$ . 所以自然地,  $\rho_*(F_{i_k} \cap F) = F F_{i_k} F = F_{i_k}$ . 进一步,  $F$  中余二维面 (不妨取)  $(F_{i_1} \cap F) \cap (F_{i_2} \cap F) (\neq \emptyset)$  决定的关系  $((F_{i_1} \cap F)(F_{i_2} \cap F))^2$  在  $\rho_*$  的像为  $(F_{i_1} F_{i_2})^2$ . 即  $\rho_*$  把  $W_F$  中的生成元和关系单得映为群  $W_P$  中的生成元和关系.





2、我们下面证明  $M_F$  的二维骨架  $M_F[2]$  可以自然的包含到  $M[2]$  中. 我们分别将  $\{F_g\}_{g \in \mathbb{Z}_2^{n-1}}$  与  $\{P_g\}_{g \in \mathbb{Z}_2^n}$  在点  $p_0$  处粘合在一起, 分别得到多面体  $Q$  与  $Q_F = F \times \mathbb{Z}_2^{n-1} / \sim$ . 则  $out(Q_F) \subset out(Q), in(Q_F) \subset in(Q)$ . 设  $f_i = F_i \cap F \neq \emptyset$  为  $F$  的一个任意的 facet,  $f_i \cap f_j = F_i \cap F_j \cap F \neq \emptyset$  为  $F$  的一个任意的余 2 维面. 设  $f_{i,g} = F_{i,g} \cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{1,\phi_i(g)}$  为  $Q_F$  中的任意一个 facet, 其中  $\{F_{1,g}, F_{1,\phi_i(g)}\}$  为  $\{P_g : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  中的 facets-pair. 由引理 2.1, 我们知道  $f_{i,g}$  在  $Q_F$  中对应的有向闭路与  $F_{i,g}$  和  $F_{i,\phi_i(g)}$  在  $Q$  中对应的有向闭路  $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$  是定点同伦的, 所以我们不妨记  $f_{i,g}$  在  $Q_F$  中对应的有向闭路为  $x_{i,g}$ . 对于  $Q_F$  中的任意一个余 2 维面  $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} \neq \emptyset$  所对应的二维胞腔  $D_l$  与  $F_{i,g} \cap F_{j,g}$  和  $F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)}$  所对应的二维胞腔  $D_g, D_{\phi_i(g)}$  也是定点同伦的, 所以在  $\pi_1(M_F)$  中,  $f_{i,g} \cap f_{j,g}$  决定的关系与  $F_{i,g} \cap F_{j,g} (\cap F_{1,g} \neq \emptyset)$  或者  $F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)} (\cap F_{1,\phi_i(g)} \neq \emptyset)$  在  $\pi_1(M)$  中决定的关系对应. 所以  $M_F$  的基本群为



$$\pi_1(M_F) = \langle x_{i,g}, i = i_1, i_2, \dots, i_{m'}, g \in \mathbb{Z}_2^{n-1} : x_{i,g} x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g \\ x_{i,g} x_{j,\phi_i(g)} x_{i,\phi_i(g)} x_{j,\phi_j(g)} = 1, \forall f_{i,g} \cap f_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (9)$$

其中  $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)} \cap F_{1,\phi_i(g)} \neq \emptyset$ . 即形式上  $\pi_1(M_F)$  的生成元集  $\tilde{G}_F$  和关系集  $\tilde{R}_F$  都可为  $\pi_1(M)$  的生成元集  $\tilde{G}$  和

关系集  $\tilde{R}$  的子集. 进一步, 这种关系是映射  $\tilde{\rho} : M_F \rightarrow M$  所诱导的, 即  $\tilde{\rho}_*$  也把生成元单得映为生成元, 把关系单得映为关系.  $\square$

对于  $P$  的任意一个  $k$  维面  $f$ , 由归纳知  $W_f$  和  $W$ ,  $\pi_1(M_f)$  和  $\pi_1(M)$  都有上面的关系. 不妨仍记  $\rho : f \rightarrow P$  为面包包含映射,  $\rho_* : W_f \rightarrow W$  为 Coxeter group 之间的群同态,  $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_f, p_0) \rightarrow \pi_1(M, p_0)$  为基本群之间的群同态, 则

**推论 1** 1、 $\rho_*|_{G_f}$  和  $\rho_*|_{R_f}$  都为单射.

2、 $\tilde{\rho}_*|_{\tilde{G}_f}$  和  $\tilde{\rho}_*|_{\tilde{R}_f}$  都为单射.

根据上面的引理,  $W_F$  中的文字可以用  $W_P$  中的生成元来表示,  $\pi_1(M_F)$  的文字可以用  $\pi_1(M)$  中的生成元来表示. 即有  $\rho_*(\omega) = \omega, \tilde{\rho}_*(\nu) = \nu, \forall \omega \in W_F, \nu \in \pi_1(M_F)$ . 但一般  $\rho_*$  与  $\tilde{\rho}_*$  不一定是单同态. 如

**例 6** 取  $P = I \times \Delta^2$  为三棱柱, 共有 5 个 facets  $\{F_i\}_{i=1,2,3,4,5}$ , 我们给上下底面  $F_1, F_2$  染色  $e_1$ , 侧面  $F_3, F_4, F_5$  染色为  $e_2, e_3, e_1e_2e_3$ , 由  $P$  的  $h$ -vector 知,  $\pi_1(M)$  有两个生成元和两个关系, 它的任意一个侧面上的 small cover 基本群有两个生成元, 一个关系.

$$\text{即 } \pi_1(M) = \langle x, y : x^2 = yxyx^{-1} = 1 \rangle, \pi_1(M_F) = \langle x, y : yxyx^{-1} = 1 \rangle$$

$$\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_F) \longrightarrow \pi_1(M)$$

满足  $\tilde{\rho}_*(x) = x, \tilde{\rho}_*(y) = y$ , 但  $\tilde{\rho}_*$  非单.

此时  $\rho_*$  也不是单的. 不妨考虑  $F_5$ , 则  $F_3 \cap F_4$  在  $W_P$  中决定的关系  $(F_3F_4)^2 = 1$  是  $((F_3 \cap F_5)(F_4 \cap F_5))^2 (\neq 1) \in W_{F_5}$  在  $\rho_*$  下的像.

**定义 3** 我们称一个单纯复形  $K$  为 *flag* 的, 如果  $K$  中两两相连的顶点集张成  $K$  中的一个单形. 等价地,  $K$  中不含维数  $\geq 2$  的空单形.

我们称一个单多面体  $P$  为 *flag* 的, 如果  $K = \partial P$  为 *flag* 的. 等价地,  $P$  中两两相交的面必有公共的交.

**例 7** 1、一个  $m$  边形为 *flag* 的, 当且仅当  $m > 3$ .

2、*flag* 多面体的面是 *flag* 的.

下面证明当  $P$  为 *flag* 时,  $\rho_*$  和  $\tilde{\rho}_*$  都是单的.

**引理 3.2** 当  $P$  为 *flag* 时,  $\rho_* : W_F \rightarrow W_P$  为单的.

**证明:** 当单多面体  $P$  为 *flag* 时, 若  $F \cap F_i \neq \emptyset, F \cap F_j \neq \emptyset$ , 则  $F \cap F_i \cap F_j \neq \emptyset$ ,

即  $P$  中  $F$  附近的任意余二维面  $f \subset P$  对应的关系一定可以继承到  $W_F$  中. 这保证了下面这个态射的定义合理性.

$$\eta_* : W_P \longrightarrow W_F \quad (10)$$

其中  $\eta_*|_{G-G_F} = 1$ ,  $\eta_*|_{G_F} = id$ .

下面我们验证  $\eta_*$  定义的合理性. 我们考虑  $W_P$  中的关系在  $\eta_*$  下的像是否为  $W_F$  的单位元. 设  $P$  中与  $F$  相交的 facets 集 (不包含  $F$ ) 为  $\mathcal{F}_1 (= G_F)$ , 剩余的 facets 我们记为  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(F) - \mathcal{F}_1$ . 则  $\eta_*$  将  $\mathcal{F}_2$  中 facets 对应的生成元映为 1.

对于  $W_P$  的关系  $F_i^2 = 1$ , 当  $F_i \in \mathcal{F}_1$  时,  $\eta_*(F_i^2) = (F_i \cap F)^2 = 1$ ; 当  $F_i \in \mathcal{F}_2$  时,  $\eta_*(F_i^2) = 1$ .

$P$  中的任意余二维面  $f = F_i \cap F_j \neq \emptyset$  决定的关系为  $(F_i F_j)^2 = 1$ . 若  $F_i, F_j$  都属于  $\mathcal{F}_1$ , 则由  $P$  的 flag 性质知  $f \subset F$ , 从而  $\eta_*$  将  $f \subset P$  所对应的关系映为  $W_F$  的一个关系; 若  $F_i, F_j$  都不属于  $\mathcal{F}_1$ , 则对应关系在  $\eta_*$  下的像为 1; 若  $F_i, F_j$  分别属于  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ , 不妨设  $F_i \subset \mathcal{F}_1, F_j \subset \mathcal{F}_2$ , 则  $\eta_*(F_i F_j F_i F_j) = \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) = (F_i \cap F)^2 = 1$ .

所以对任意关系  $r \in W_P, \eta_*(r) \equiv 1$ , 即  $\eta_*$  为 well-defined 的群同态.

最后容易验证  $\eta_* \circ \rho_* = id : W_F \longrightarrow W_F$ , 即  $\rho_*$  为单的.  $\square$

**定理 3.3**  $P$  为 flag 时,  $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_F, p_0) \longrightarrow \pi_1(M, p_0)$  为单同态.

**证明:** 考虑

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(M_F) & \xrightarrow{\alpha_F} & W_F & & \\ \tilde{\rho}_* \downarrow & & \downarrow \rho_* & \searrow \rho'_* & \\ \pi_1(M) & \xrightarrow{\alpha} & W_P & \xrightarrow{\beta} & W'_P \end{array}$$

其中  $\beta : W_P \longrightarrow W'_P = W_P / \langle F \rangle$  为商映射, 它把  $\omega \in W_P$  映为  $[\omega] \in W'_P$ .  $\rho'_* = \beta \circ \rho_* : W_F \longrightarrow W'_P$ . 则容易验证  $\rho'_*$  也是单的. 设  $x_{k,g}$  为  $\pi_1(M_F)$  的  $F_k \cap F$  对应的一个生成元, 则  $\beta \circ \alpha \circ \tilde{\rho}_*(x_{k,g}) = \beta \circ \alpha(x_{k,g}) = \beta \circ \alpha(x_{k,g}) = \beta(\widehat{F_{k,g}}) = [\widehat{F_{k,g}}]$ ;  $\rho'_* \circ \alpha_F(x_{k,g}) = \rho'_*(F_{k,g} \cap F) = [\widehat{F_{k,g}}]$ . 进一步, 对  $\forall \nu \in \pi_1(M_F), \rho'_* \circ \alpha_F(\nu) = \beta \circ \alpha \circ \tilde{\rho}_*(\nu)$ .

所以当  $P$  为 flag 时,  $\rho'_*$  为单的, 所以  $\rho'_* \circ (\pi_F)_* = \beta \circ \alpha \circ \tilde{\rho}_*$  为单的, 从而  $\tilde{\rho}_*$  为单的.

事实上,  $\rho_*$  单蕴含  $\tilde{\rho}_*$  单, 考虑下面图表

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1(M_F) & \hookrightarrow & W_F & \xrightarrow{\psi_F} & \mathbb{Z}_2^{n-1} \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow \tilde{\rho}_* & & \downarrow \rho_* & & \uparrow \theta \\
1 & \longrightarrow & \pi_1(M) & \hookrightarrow & W_P & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1
\end{array}$$

其中  $\theta : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{n-1} = \mathbb{Z}_2^n / \langle \lambda(F) \rangle = \mathbb{Z}_2^n / \langle e_1 \rangle$  为特征映射诱导的商映射. 则  $\theta \circ \psi \circ \rho_*(F_k \cap F) = \theta \circ \psi(F_k) = \theta \circ (\lambda(F_k)) = \lambda(F_k) / \langle e_1 \rangle = \psi_F(F_k \cap F)$ , 即右边矩形是交换的.

$\forall \nu \in \ker(\psi_F) = \pi_1(M_F)$ , 则  $\theta \circ \psi \circ \rho_*(\nu) = \psi_F(\nu) = 1$ , 故  $\psi \circ \rho_*(\nu) = 1$  或者  $e_1$ . 当  $\psi \circ \rho_*(\nu) = 1$  时,  $\rho_*(\nu) \in \ker(\psi) = \pi_1(M)$ , 所以  $\tilde{\rho}_*(\nu) = \rho_*(\nu)$ . 若  $\psi \circ \rho_*(\nu) = e_1$ . 若  $\psi \circ \rho_*(\nu) = e_1 = \psi(F)$ , 则  $\tilde{\rho}_*(\nu) = \rho_*(\nu)F \in \ker(\psi) = \pi_1(M)$ , 此时  $\tilde{\rho}_*(\nu) \neq 1$ . 若  $\tilde{\rho}_*(\nu) = \rho_*(\nu)F = 1$ , 则  $\rho_*(\nu) = F^{-1} = F$ , 矛盾. 所以从  $\rho_*$  的单蕴含  $\tilde{\rho}_*$  单.  $\square$

**注** 左边矩形是交换的当且仅当与  $F$  相交的每一个 facet  $F_i$  的染色  $\lambda(F_i)$  不含  $e_1$  分量.

由于 flag 多面体的 face 也是 flag 的, 所以对任意  $k$  维面  $f$ , 由归纳知, 也有类似的结论.

**推论 2** 单多面体  $P$  为 flag,  $\rho_* : W_f \longrightarrow W$  和  $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_f, p_0) \longrightarrow \pi_1(M, p_0)$  为单同态. 此时  $\rho_*|_{W_f}, \tilde{\rho}_*|_{\pi_1(M_f, p_0)}$  都为同构.

**定义 4** 我们称一个连通闭流形  $M$  为 aspherical 的, 若  $\pi_k(M) = 0, k \geq 2$ .

**Borel conjecture** 设  $f : M \longrightarrow N$  为同伦等价, 其中  $M, N$  为同维数闭的 aspherical 流形, 则  $f$  同伦于一个同胚映射。

**定理 3.4 ([6])** *Let  $M$  be a small cover of  $P$ . Then the following statements are equivalent.*

- 1、 $M$  is aspherical.
- 2、The boundary of  $P$  is dual to a flag complex.
- 3、The natural piecewise Euclidean metric on the dual cubical cellulation of  $M$  is nonpositively curved.

**定理 3.5 ([8])** *Let  $f : N \longrightarrow M$  be a homotopy equivalence between closed smooth manifolds such that  $M$  supports a non-positively curved Riemannian metric. Then  $N$  and  $M$  are stably homeomorphic; i.e.*

$$f \times id : N \times \mathbb{R}^{m+4} \longrightarrow M \times \mathbb{R}^{m+4} \quad (11)$$

*is homotopic to a homeomorphism where  $m = \dim M$ .*

上面定理说明, 当流形  $M$  是一个 non-positively curved Riemannian 流形, 且  $\dim(M) \neq 3, 4$ , Borel conjecture 成立. 可以验证 small cover 为这样的闭流形.

**推论 3** 设  $n(> 4)$  维闭流形  $M, N$  都为 flag 单多面体上的 small cover, 若  $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$ , 则  $M$  和  $N$  是同胚的.

对于 3 维情况, 在 [1] 中指出, Borel conjecture 对所有的三维流形都成立. 我们感兴趣的是 aspherical small cover  $M$  是不是一个 Haken manifold

**定义 5** A Haken 3-manifold is a compact 3-manifolds which are

- (1)  $P^2$ -irreducible and
- (2) sufficiently large – i.e. contain a properly embedded, 2-sided, incompressible surface.

**命题 3.6**  $P^2$ -irreducible  $M$  with  $H_1(M)$  infinite is a Haken manifold.

**证明:** 由 Hempel [10] Lemma 6.6 知  $M$  包含一个 properly embedded 2-sided, nonseparating incompressible surface  $S$ .  $\square$

**引理 3.7 (\* 待证)** 设  $M$  是 3 维 flag 多面体  $P$  上的一个 small cover, 则  $H_1(M)$  是 infinite 的.

**证明:**

**推论 4** Aspherical small covers are Haken manifolds.

**证明:** 设  $P$  为三维单的 flag 多面体 (不包含单形面),  $M$  为  $P$  上的 small cover,  $M$  是 aspherical 的. 由 Sphere Theorem, 我们知道三维闭可定向流形是 aspherical 的, 当且仅当它是 irreducible 和  $\pi_1$  infinite 的. 进一步为  $P^2$ -irreducible, 又  $H_1(M)$  为 infinite 的, 故 aspherical small cover  $M$  为 Haken 流形.  $\square$

**定理 3.8** 在三维 small cover 范畴中, 下列条件等价.

- (1)  $M$  是 *aspherical* 的,
- (2)  $M$  是  $P^2$ -irreducible 的.
- (3)  $M$  是 *Haken* 的.

进一步, 此时  $H_1(M)$  是 *infinite* 的.\*

可定向 aspherical 流形为 irreducible 的, 故为 prime 的, 故同伦等价诱导同胚. 尽管  $\{M_F\}$  中不一定存在  $M$  的 two-sided incompressible surface (考虑正十二面体上的 small cover), 但  $M_F$  拥有许多好的性质, 比如包含映射诱导的基本群同态为单的. 特别地, 我们沿着  $M_F$  去切  $M$ , 这在我们构造的胞腔结构中, 相当于把与  $F$  横截相交的那些一维闭路  $\{x\}$  切开, 或者给面  $F$  一个平凡的 color. 此时对应在我们上面构造的胞腔结构中, 是把 facets 对应的闭路切开, 从而这些闭路决定的生成元变为平凡元, 基本群得到化简. 所以从这里我们猜测, 类似于 Hierachy of Waldhausen 的操作对 (高维) aspherical small cover 也是有效的. 这对高维 small cover 中的 borel 猜想的证明提供一种可行的 idea. 而且 Davis 等一些人已经在做了一些这方面的工作, 比如对高维 Haken 流形的推广.

## 参考文献

- [1] M. Aschenbrenner, S. Friedl and H. Wilton, 3-manifold groups, *Mathematics* (2013), 1-149
- [2] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, Torus actions and their applications in topology and combinatorics, *University Lecture Series, 24. American Mathematical Society, Providence, RI*, (2002)
- [3] M.W. Davis, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, *Ann. Math. (2)* 117 (1983), 293-325.
- [4] M.W. Davis, Exotic aspherical manifolds, *Topology of high-dimensional manifolds*. (Trieste, 2001), 371-404.
- [5] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, Convex polytopes, coxeter orbifolds and torus actions, *Duke Math. J.* 62 (1991), 417-451.
- [6] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Nonpositive curvature of blow-ups, *Selecta Math.(N.S.)* 4 (1998), 491-547.
- [7] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Fundamental groups of blow-ups, *Advances in mathematics*. 177 (2003), 115-179.
- [8] F.T. Farrell, The Borel conjecture, *Topology of high-dimensional manifolds*. (Trieste, 2001), 225-298.
- [9] A. Hatcher, Spaces of Incompressible Surfaces, *Mathematics*. (1999).
- [10] J. Hempel, 3-manifolds, *Annals of Mathematics studies*. 86 (1978).
- [11] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.* (2)87 (1968), 56-88.
- [12] S. Kuroki, M. Masuda, and L. Yu, Small covers, infra-solvmanifolds and curvature, *Forum mathematicum*. 27(5)(2015), 2981-3004
- [13] L. Yu, Crystallographic groups with cubic normal fundamental domain, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B39, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto*. (2013), 233-244