

Fundamental Groups of Small Covers

1 Introduction

1.1 Small Cover

凸多面体 P 是指 \mathbb{R}^n 中非空有限多个点集的凸包, 或者等价的是 \mathbb{R}^n 中有限个半空间的有界交, 即

$$P = \text{conv}\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l_i, x \rangle \geq -a_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

其中 l_i 为 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的线性函数, $a_i \in \mathbb{R}$.

凸多面体的维数就是指凸包或者有界交的维数。若无特殊说明, 本文中的所考虑的多面体均指 \mathbb{R}^n 中的 n 维凸多面体, 记为 P . 我们把 P 的边界记为 K . 把 P 的内部记为 P° . 凸子集 $F \subset P$ 称为 P 的面, 若 F 是多面体 P 与某一个半空间 $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x \rangle \geq -a\}$ 的交, 且 $P^\circ \cap \partial V = \emptyset$. 子集 \emptyset 和 P 本身都为 P 的面, 称为平凡面; 其他的面称为真面. P 的 0 维面称为 P 的顶点, P 的 1 维面称为 P 的边, P 的 $n-1$ 维面称为 P 的 facet. 记 f_i 为 P 的 i 维面的个数, 称 $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ 为 P 的 f -vector. 取 $f_{-1} = 1$, 则 P 的 h -vector $\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ 由下面等式定义

$$h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1}$$

由 Dehn-Sommerville 关系知 $h_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \dots, n$, 为方便我们在本文中将 P 的 facets 的个数记为 $f_{n-1} = m$, 即 P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$.

我们称多面体 P 是单 (simple) 的, 若 P 的每个顶点恰好是 P 中 n 个 facets 的交, 等价地, 每个顶点处恰好有 n 条边. 单多面体中任意余维数为 k 的面 f 总可以 (唯一) 表示为 $f = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k$, 其中 F_1, F_2, \dots, F_k 为包含 f 的 facets.

取 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ 为二元乘法群或者模空间, \mathbb{Z}_2^n 表示它们的乘积, e_i 表示 \mathbb{Z}_2^n 第 i 个标准向量. 设 P 为 n 维单凸多面体, $\mathcal{F}(P)$ 为 P 的 facets 集, 对每一个 facet $F_i \in \mathcal{F}(P)$, 我们定义它上面的一个染色 $\lambda(F_i) \in \mathbb{Z}_2^n$, 使得对 P 的每一个顶点 $p = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$, 满足 $\text{span}\{\lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_n)\} \cong \mathbb{Z}_2^n$. 我们称 $\lambda : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 为下面将要构造的 small cover M 的示性函数.

注 对于任意单凸多面体, 满足上面条件的染色不一定存在, 参考 Davis-Januszkiewicz [?]. *Nonexample 1.22 (Duals of cyclic polytope)*

现在我们定义单凸多面体 P 上的 small cover. 对任意点 $x \in P$, 记 $f(x)$ 为 P 中包含 x 为相对内点的唯一的面, 例如 x 为 P 内部的点时, 则 $f(x) = P$; x 为 P 的顶点时, 则 $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$, 其中 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 为包含点 x 的 n 个 facets. 不妨设 $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$ 为 P 的任意一个固定的余 k 维面, 记 $G_{f(x)} = \langle \lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_k) \rangle = \langle \lambda(F_i) : x \in F_i \rangle$. 则定义 small cover 为

$$M = (P \times \mathbb{Z}_2^n) / \sim \quad (1)$$

$(x, g) \sim (y, h)$ 当且仅当 $x = y, g^{-1}h \in G_{f(x)}$. 这里 $G_{f(x)} < \mathbb{Z}_2^n$ 实际上是点 x 处的 *isotropy subgroup*, i.e. $\{g \in \mathbb{Z}_2^n : gx = x\}$. 进一步, 设 $\pi : M \rightarrow P$ 为 M 到 P 的投射.

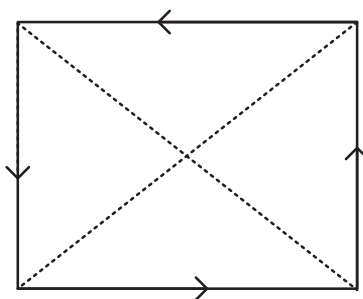
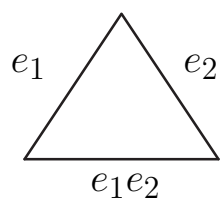
另外, 我们也可以比较直观得描述一个 small cover. 首先我们将 2^n 个单多面体 P 在 P 的一个顶点处粘在一起. 任取 P 的一个顶点 p_0 , 不妨记 p_0 附近的 facets 为 F_1, F_2, \dots, F_n , 且对应 facet 上的染色为 $\lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \dots, n$. 首先我们把 P 放到 \mathbb{R}^n 的第一卦限中, 使得 p_0 与原点重合, 第 i 个 facet F_i 落在 $x_i = 0$ 的坐标面上. 然后我们将 P 沿着坐标面反射, 得到 2^n 个 P 组成的大多面体, 记为 Q , 其中 p_0 自然的落在 Q 的内部. 我们给第 g 个坐标卦限中的 P 一个自然的标号 $g \in \mathbb{Z}_2^n$. 最后我们再将 Q 剩余的 facets 按照染色信息成对粘合起来, 即第 g_1 个 P 的 facet F_i 与第 g_2 个 P 的 facet F_j 粘, 当且仅当 $i = j, g_1^{-1}g_2 = \lambda(F_i)$. 这样我们就得到 P 上的 small cover M .

命题 1.1 *small cover 为连通闭流形.*

证明: 参考 Davis-Januszkiewicz [?]. 性质 1.7

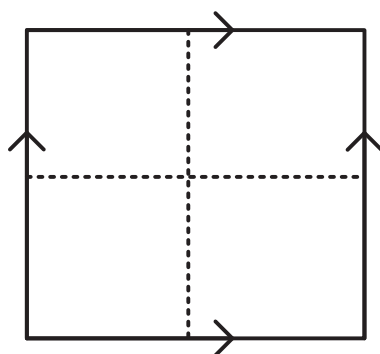
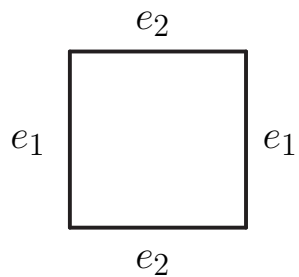
1.2 Examples of Small Covers

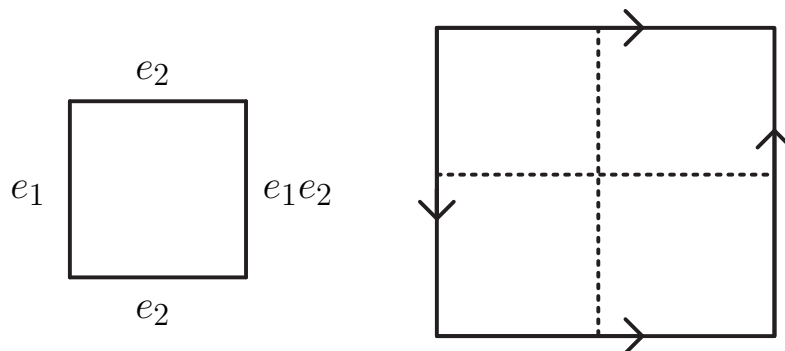
例 1 当 $P = \triangle^n$ 时, $\mathcal{F}(P)$ 上本质上只有一种染色, 如 $n = 2$ 时,



先将 P 在一个点处粘, 得到一个大的四边形, 由染色信息知它的对边沿着箭头方向粘, 这是一个 $\mathbb{R}P^2$.

例 2 当 P^2 为四边形时, $\mathcal{F}(P)$ 上有下面两种不同的染色,





同样的操作，我们可以分别得到 T^2 和 Klein bottle.

例 3 (P^2 是一个 m 边形时)

M 是由 4 个 m -gon 沿边粘成的曲面，所以 M 的欧拉数为 $\chi(M) = 4 - m$. 当 m 为奇数时， M 为 $m - 2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和；当 m 为偶数时， M 为 $m - 2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和或着为 $\frac{m-2}{2}$ 个 T^2 的连通和. 所以 small cover 决定了除 S^2 外的所有二维闭曲面.

由 Hurewicz 定理知道，胞腔复形的基本群可以由它们的二维骨架确定，所以在本文中，我们将构造 small cover 的一种胞腔结构，并利用它的二维骨架来计算基本群. 此外，我们记 small cover M 的 k 维骨架为 $M[k]$ ，记多面体 P 的 k 维面结构为 $P[k]$.

2 Cell Structure

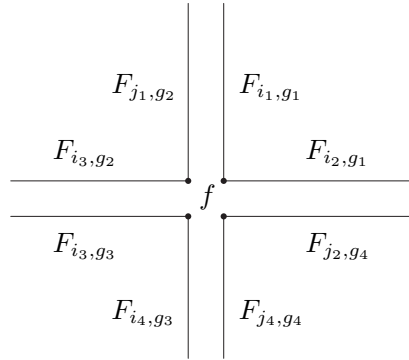
由于单凸多面体具有很好的组合性质，所以我们可以通过不同的方式来构造 Small cover 的胞腔结构. 比如由单多面体的面结构诱导的 small cover 上的胞腔结构；small cover 的 perfect 胞腔结构，见 Davis-Januszkiewicz [?] Theorem 3.1; 由单多面体的 cubical subdivision 所诱导的胞腔结构，见 Buchstaber [?]. 在下面一节中，我们对 Q 作类似 cubical subdivision 的操作，来构造 small cover 上一种较自然的胞腔分解. 在这种胞腔结构，可以方便的得到 $\pi_1(M)$ 的一个简洁的表示.

对于一般的单凸多面体 P , 总存在它的 cubical subdivision, 我们将这种分解拉到 small cover, 我们自然地可以得到 small cover 一种胞腔分解. 而 Q 一般来说未必是单的, 所以我们下面构造的这种 b 胞腔分解并不是严格意义的 cubical. 进一步, 多面体 Q 的面结构诱导的 M 的一个胞腔分解, 而我们下面构造的胞腔分解实际上是这种胞腔结构 Poincare 意义上的对偶.

2.1 Definitions and Constructions

由 Q 的构造知, Q 中的每一个 P 自然地拥有一个标号 $g \in \mathbb{Z}_2^n$, 我们将第 g 个单多面体 P 记为 P_g , 将 Q 中 P_g 的第 i 个 facet F_i 记为 $F_{i,g}$. 若 P_g 的 k 维面 $f_i^k \subset \partial Q$, 此时 f_i^k 称为 Q 的外 face, 否则称为 Q 的内 face, 将 Q 的内、外面集分别记为 $in(Q), out(Q)$. 我们注意到 Q 的所有的 facets 上存在一种自然的配对结构. 配对的规则由 P 上的染色 λ 决定. 这种配对结构有助于我们描述 M 的基本群. 下面, 我们引入 M 的面配对结构的定义.

定义 1 ([?] Facets-pair structure)



设 X 为一个 n 维连通拓扑空间, X 可以由有限个 n 维单凸多面体 $\{P_g^n : g = 1, 2, \dots, N\}$ 粘合而成, 同样我们记 P_g 的第 i 个 facet F_i 为 $F_{i,g}$, 并且满足下面两个条件:

1、任意 facet F_{i,g_1} 唯一配对 F_{j,g_2} . 即存在一个同胚 $\tau_{i,g_1} : F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$ 与 $\tau_{j,g_1} : F_{j,g_2} \longrightarrow F_{i,g_1}$ 使得 $\tau_{i,g_1} = \tau_{j,g_2}^{-1}$. 我们称 $\hat{F} = \{F_{i,g_1}, F_{j,g_2}\}$ 为一个 facet 对, 称 F_{j,g_2} 为 F_{i,g_1} 的配对 facet.

2、对任意余二维面 $f = F_{i_1, g_1} \cap F_{i_2, g_1}$, 如果 $\tau_{i_1, g_1}(f) = F_{j_1, g_2} \cap F_{j_3, g_2}$, $\tau_{i_2, g_1}(f) = F_{j_2, g_4} \cap F_{j_4, g_4}$, 则 $\tau_{j_3, g_2} \tau_{i_1, g_1}(f) = \tau_{j_4, g_4} \tau_{i_2, g_1}(f) = F_{i_3, g_3} \cap F_{i_4, g_3}$. 这里不排除 $F_{j_2, g_4} = F_{j_3, g_2}$ 或者 $F_{i_2, g_1} = F_{i_3, g_3}$.

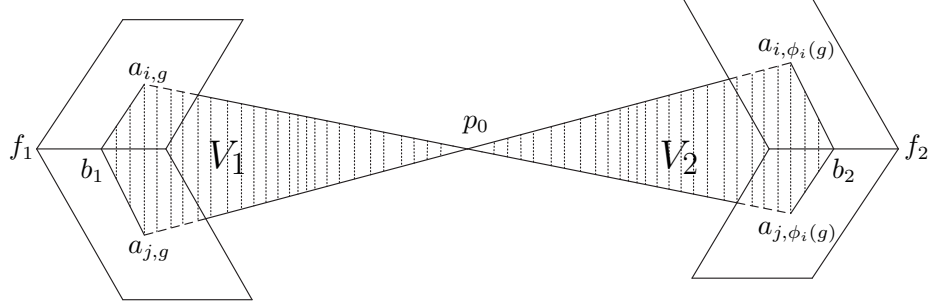
则我们称 $\mathcal{S} = \{\widehat{F}_{i, g}, \tau_{i, g}\}$ 为 X 上的一个 *facets-pairing structure*, $\tau_{i, g} : F_{i, g_1} \rightarrow F_{j, g_2}$ 为 \mathcal{S} 的 *structure map*. \square

事实上, $\mathcal{F}(P)$ 上的示性函数 $\lambda : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 决定了 M 上的一个配对结构. $F_{i, g_1} \sim F_{j, g_2}$ 当且仅当 $F_i = F_j$, $\lambda(F_i) = (g_1)^{-1} g_2$, 当且仅当 $i = j$, $g_2 = g_1 \cdot \lambda(F_i)$, 即对 Q 的任意一个 facet $F_{i, g}$, 他的配对 facet 为 $F_{i, \phi_i(g)}$, 其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i) : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$. 下面, 我们把 M 的 facets pair 记为 $\{F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}\}$.

Q 到 P 有一个自然地投射, 我们记为

$$\bar{\pi} : Q \rightarrow P \quad (2)$$

下面构造 M 的 cell structure. 首先我们将 $M[0]$ 取为点 p_0 , 并且设为 M 的基点. 我们在 Q 的每一对余 1 维面处构造 1-cells. 对 Q 的每对 facets pair $\{F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}\}$ (包括所有的内 facets、外 facets), 任取 $F_{i, g}$, $F_{i, \phi_i(g)}$ 内部的点 $a_{i, g}, a_{i, \phi_i(g)}$ (不妨取为 $F_{i, g}$, $F_{i, \phi_i(g)}$ 的重心), 使得 $\bar{\pi}(a_{i, g}) = \bar{\pi}(a_{i, \phi_i(g)}) = a_i \in P$, 在 Q 的内部取连接 p_0 到 $a_{i, g}, a_{i, \phi_i(g)}$ 的两条简单有向道路 (不妨取为直线段), 记为 $\overrightarrow{a_{i, g}}, \overrightarrow{a_{i, \phi_i(g)}}$. 则 $\overrightarrow{a_{i, g}}(\overrightarrow{a_{i, \phi_i(g)}})^{-1}$ 为 M 中以 p_0 为起点的一条有向闭路, 记为 $x_{i, g}$, 另外记 $x_{i, \phi_i(g)} = x_{i, g}^{-1}$, 它表示 M 中以 p_0 为起点的有向闭路 $\overrightarrow{a_{i, \phi_i(g)}}(\overrightarrow{a_{i, g}})^{-1}$. 若我们不考虑 $x_{i, g}$ (或 $x_{i, \phi_i(g)}$) 的方向, 则 $x_{i, g} - \{p_0\} \cong e^1$ (或 $x_{i, \phi_i(g)} - \{p_0\} \cong e^1$), 这里 e^k 表示 M 一个 k 维 cell. M 中的每一对 facets pair 都决定了一个 1-cell. 在上述构造中, 所有的 $\{x_{i, g}\}$ 都仅交于 0-skelton p_0 处. 这样我们就获得 M 的 1-skelton $M[1] = \bigvee_{p_0} x_{i, g}$.



我们在余 2 维面处构造 2-cells. 设 $f_1 = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 为 Q 的任意一个余 2 维面, 则令 $f_2 = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)}$, $f_3 = F_{i,\phi_i\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_i\phi_j(g)}$, $f_4 = F_{i,\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_j(g)}$, 使得 $\{\pi(f_k), k = 1, 2, 3, 4\}$ 在 P 中的像相同, 记为 f , 这里 $\phi_i\phi_j(g) = \phi_i(g \cdot \lambda(f_j)) = g \cdot \lambda(f_j) \cdot \lambda(f_i)$. 取 f 内部的一个点 b , 对应 f_k 上的点设为 b_k , $k = 1, 2, 3, 4$. 取 V_1 为经过点 $b_k, p_0, a_{i,g}, a_{j,g}$ 的二维简单区域, 如取 b 为 $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\}$ 与 f 的交点, 其中 $\vec{a}_i = \pi(\vec{a}_{i,g}), \vec{a}_j = \pi(\vec{a}_{j,g})$, 这里的 $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\} \triangleq \{\vec{x} = k_1\vec{a}_i + k_2\vec{a}_j, k_1, k_2 \geq 0\}$. 则 $V_1 = \text{span}\{\vec{a}_{i,g}, \vec{a}_{j,g}\} \cap P_g \cong D_+^2$. 类似确定 $V_2 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_i(g)}, \vec{a}_{j,\phi_i(g)}\} \cap P_{\phi_i(g)}$, $V_3 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_i\phi_j(g)}, \vec{a}_{j,\phi_i\phi_j(g)}\} \cap P_{\phi_i\phi_j(g)}$, $V_4 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_j(g)}, \vec{a}_{j,\phi_j(g)}\} \cap P_{\phi_j(g)}$, 则 $\{V_k : k = 1, 2, 3, 4\}$ 在 M 中实际上粘合成一个闭的 D^2 , 记为 D_f^2 , 且 D_f^2 的边界落在 M 的 1-skelton 中. 对应的二维 cell $e_f^2 = (D_f^2)^\circ$. 这样就得到 2-skelton $M[2] = M[1] \cup \{e_f^2\}$.

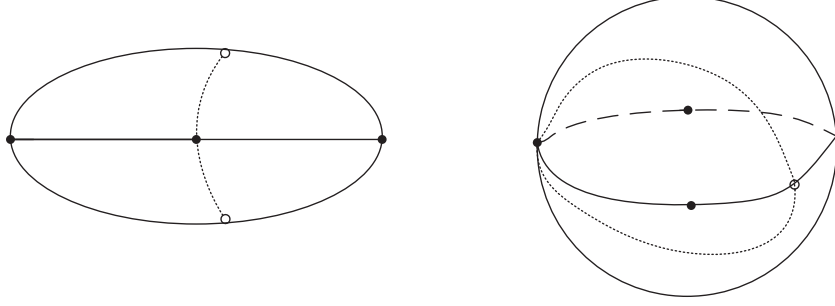
依次进行下去, 我们可以在 Q 的余 k 维面 $f_l^k = F_{i_1,g} \cap F_{i_2,g} \cap \cdots \cap F_{i_k,g}$ 处可构造 M 的 k -cells. 我们可以类似取 $V_l = \text{span}\{a_{i_1,g}, a_{i_2,g}, \dots, a_{i_k,g}\} \cap P_g, l = 1, 2, \dots, 2^k$, 它们在 M 中粘成一个 k 维闭圆盘, 记为 D^k , 则 ∂D^k 落在 $M[k-1]$ 中, 且 D^k 对应 M 的 k -cell 可以为

$$e^k \cong (D^k)^\circ = \left(\bigcup_{\{l=1,2,\dots,2^k\}} V_l \right)^\circ.$$

最终我们可以在 Q 的顶点处构造 M 的 h_0 个 n -cells.

注 在上述二维胞腔的构造中, 若 $F_{i,g}$ 包含点 p_0 , 则 $a_{i,g}$ 可能包含在 $F_{i,g}$ 中, 此时我们构造的 V_i 不是 cube 的, 但我们的构造依然适用. 进一步, 此时 facet $F_{i,g}$ 对应的 $x_{i,g}$ 在 M 中与点道路同伦. 事实上, 对于具有 facets pair 结构的任意拓扑流形都可类似构造其胞腔结构. 如我们考虑

例 4 我们将三角形沿着他们对应的边粘和得到一个 S^2



按照上面步骤, 我们可以得到 S^2 的一个胞腔分解 $S^2 = e_0 \cup e^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2$

2.2 Calculation and Example

small cover 的基本群 $\pi_1(M)$ 的生成元可取为 facets 对应的有向闭路 $\{x_{i,g}\}$. $\pi_1(M)$ 的关系由二维胞腔及配对关系决定. 对 M 中的任意 facet pair $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$ 对应一对互逆的生成元 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$, 即配对关系为 $x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1$. 对于任意余二维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g} (\neq \emptyset) \subset Q$, 由 f 确定的二维胞腔 e_f 决定一个关系 $r_f = \partial D_f^2 = x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)} = 1$, 即 $x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = (x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)})^{-1} = (x_{j,\phi_j(g)})^{-1}(x_{i,\phi_i\phi_j(g)})^{-1} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}$. 从而我们得到 $\pi_1(M)$ 的一个群表示.

$$\begin{aligned} \pi_1(M) = \langle x_{i,g}, i = 1, 2, \dots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n : x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g; \\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}, \forall f = F_{i,g} \cap F_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i)$

我们记 $\mathcal{F}_1(Q)$ 为 Q 的内 facets 集; 记 $\mathcal{F}_2(Q)$ 为 Q 的内 facets 集附近的 facets 集, 即 $\mathcal{F}_2(Q) = \{F \in \mathcal{F}(Q) \cap \partial Q : \exists G \in \mathcal{F}_1(Q), st. F \cap G \neq \emptyset\}$; 记 $\mathcal{F}_3(Q)$ 为 Q 外 facets 集剩余的 facets 集. 则我们有下面结论.

引理 2.1 $\forall F_i \in \mathcal{F}(P)$ 固定, 则 $\pi^{-1}(F_i) = \{F_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 对应的生成元 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是彼此相关的. 特别地, 当 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_1(Q)$ 时, $x_{i,g} = 1$; 当 $F_{i,g_1}, F_{i,g_2} \in \mathcal{F}_2(Q)$ 时, 若 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} \neq \emptyset$, 则 $x_{i,g_1} = x_{i,g_2}$, 否则 $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

进一步, 设 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 为 Q 中任意一个固定的余二维面. 当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 都属于 $\mathcal{F}_1(Q)$, 即 f 为内面时, f 对应的关系为 1; 当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 分别属于 $\mathcal{F}_2(Q)$ 和 $\mathcal{F}_1(Q)$ 时, f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$.

证明: 若 $F_{i,g}$ 为内 facets, 则 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 包含在 Q 的内部, 可缩为点道路, 故 $x_{i,g} = 1$. 对于内余 2 维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 确定的关系, 为内生成元的组合, 故也是平凡的. 若 $F_{i,g}, F_{j,g}$ 分别为外面和内面, 不妨设 $F_{i,g}$ 为外面, $F_{j,g}$ 为内面, 则 $x_{j,g} = x_{j,\phi_i(g)} = 1$, 所以 f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$. 即内面附近的且相交为余二维面 f 的 facets 对应的生成元是彼此相关的. 又因为每对 facets pair 对应的生成元互为逆元, 所以当 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} = \emptyset$ 时, $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

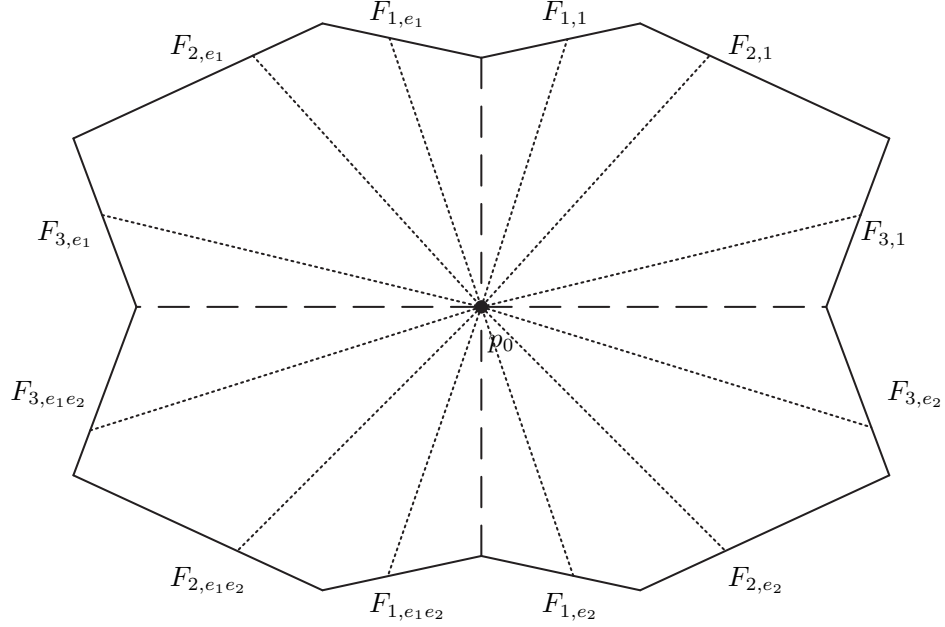
最后, 我们考虑 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_3(Q)$ 的情况. 我们不妨固定 $F_{i,1} \in \pi^{-1}(F_i)$, 对应的生成元为 $x_{i,1}$. 首先它的配对 facets 对应的生成元 $x_{i,\phi_i(1)} = (x_{i,1})^{-1}$. 由于与 $F_{i,1}$ 相交的 facets 都在 P_1 中, 所以任意 $f = F_{i,1} \cap F_{j,1} \neq \emptyset$ 对应的关系为 $x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)} = x_{j,1}x_{i,\phi_j(1)}$, 即 $x_{i,\phi_j(1)} = x_{i,\lambda(F_j)} = (x_{j,1})^{-1}x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)}$. 然后, 我们对 $F_{i,\phi_j(1)}$ 进行上面的讨论. 所以 $\forall g \in \langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle$, $x_{i,g}$ 都与 $x_{i,1}$ 相关, 其中 $j \in \{j : F_j \cap F_i \neq \emptyset\}$. 我们仅考虑 F_i 一个顶点处的染色, 我们知 $\langle \{\phi_j(1)\} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n / \langle \phi_i(1) \rangle$. 所以 $\langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n$, 这就证明了所有的 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是相关的. \square

注 1、 注意这里不排除 $F_{i,g} \cap F_{i,\phi_j(g)}, F_{i,g} \cap F_{i,\phi_i\phi_j(g)}$ 都为 Q 中非空的余二维面的情况, 此时 $(x_{i,\phi_j(g)})^{-1} = x_{i,\phi_i\phi_j(g)} = x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$, i.e. $(x_{i,\phi_j(g)})^2 = 1$. 从而 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 为 $\pi_1(M)$ 中的相等的二阶生成元.

2、Davis-Januszkiewicz [?] theroem 3.1 中指出 small cover Mod 2 Betti 数 $b_i(M) = h_i(P)$ (这里 h_i 定义中 f_k 表示 P 中余 $k+1$ 维面的个数). $b_1(M) = h_1(P) = m-n$, 即在 perfect 意义上的胞腔结构得到基本群生成元个数为 $m-n$ 个. 在这里所有外 facets 决定的生成元实际上也是 $m-n$ 个.

在下面例子中, 我们只取每个 facets pair 中的其中一个 facets 对应的闭路作为基本群的生成元.

例 5 P 为五边形时, \mathcal{F} 上的染色依次取为 $\{e_2, e_1e_2, e_1, e_2, e_1\}$, Q 可视为 12 边形, 对应 6 对外 facets, 4 组余二维外面。



Q 中的 facets pair 有 $\{F_{2,e_1}, F_{2,e_2}\}, \{F_{1,e_1}, F_{1,e_1e_2}\}, \{F_{1,1}, F_{1,e_2}\}, \{F_{2,1}, F_{2,e_1e_2}\}, \{F_{3,1}, F_{3,e_1}\}, \{F_{3,e_2}, F_{3,e_1e_2}\}$ (内部 facets pair 对应平凡生成元, 我们暂不考虑). 给所有道路一个指向 p_0 的方向, 不妨设 p_0 为基本群基点, 取生成元为

$$\begin{cases} x_{2,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_2}})^{-1} \\ x_{1,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{1,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_2}})^{-1} \\ x_{2,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{3,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1}})^{-1} \\ x_{3,e_2} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,e_2}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1e_2}})^{-1} \end{cases}$$

在余 2 维面 p_1, p_2, p_3, p_4 处确定四组关系:

在 p_1 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1} = x_{1,e_1}$;

在 p_2 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1}x_{2,e_2} = x_{2,1}x_{1,e_1e_2}$, 即 $x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1} = x_{2,1}(x_{1,e_1})^{-1}$;

在 p_3 处胞腔对应的关系为 $x_{2,1}x_{3,e_1e_2} = x_{3,1}x_{2,e_1}$, 即 $x_{2,1}(x_{3,e_2})^{-1} = x_{3,1}x_{2,e_1}$;

在 p_4 处胞腔对应的关系为 $x_{3,1} = x_{3,e_2}$. 从而

$$\begin{aligned}\pi_1(M) &= \langle x_{2,e_1}, x_{1,e_1}, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,e_2} | x_{1,1}(x_{1,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{3,e_2})^{-1}, \\ &\quad x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1}x_{2,e_1} \rangle \quad (4) \\ &\cong \langle x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1} | x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1} \rangle\end{aligned}$$

即 $\pi_1(M) \cong \langle x, y, z | xy^{-1}xzy^{-1}z \rangle$

2.3 Universal Covering Space

设 $\pi : M \rightarrow P$ 为单多面体 P 上的 small cover. P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$. 下面我们将构造 small cover $\pi : M \rightarrow P$ 的 (万有) 覆叠空间

$$\mathcal{M} = Q \times \pi_1(M) / \sim \quad (5)$$

(Q, ν_1) 的外 facet F_{i,g_1} 与 (Q, ν_2) 的外 facet F_{j,g_2} 粘当且仅当 $i = j$, $g_1(g_2)^{-1} = \lambda(F_i)$, $\nu_1(\nu_2)^{-1} = x_{i,g_1}$ (或者等价的 $\nu_2(\nu_1)^{-1} = x_{i,g_2}$), 其中 $\nu_1, \nu_2 \in \pi_1(M)$. 下面为方便, 我们把 (Q, ν) 简记为 Q_ν , Q_ν 的 facet $F_{i,g}$ 记为 $F_{i,g}^\nu$.

下面我们说明 \mathcal{M} 实际上只与单多面体 P 及 P 的面结构有关. 我们首先定义由 P 的面结构决定的 *right-angle Coxeter group* W_P 如下:

$$W_P = \langle F_1, \dots, F_m : F_i^2 = 1; (F_i F_j)^2 = 1, \forall F_i, F_j \in \mathcal{F}(P), F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle$$

Davis-Januszkiewicz [?] Lemma 4.4 中构造了

$$\mathcal{L} = (P \times W_P) / \sim \quad (6)$$

其中 $(x_1, g_1) \sim (x_2, g_2)$ 当且仅当 $x_1 = x_2$, $g_1(g_2)^{-1} \in \langle F : x \in F, F \in \mathcal{F}(P) \rangle$. 且由 Davis [?] (Theorem 10.1 and 13.5) 知 \mathcal{L} 为单连通的.

定义群同态 $\psi : W \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$, 其中 $\psi(F_i) = \lambda(F_i), i = 1, 2, \dots, m$.

引理 2.2 设 $\pi : M \rightarrow P$ 为单多面体 P 上的 small cover, 则有群短正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow W_P \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2^n \rightarrow 1 \quad (7)$$

其中 $\pi_1(M) \cong \ker \psi$ 为 W_P 的子群, $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$

证: 在 Davis-Januszkiewicz [?] 推论 4.5 中, 我们知道有上面正合列成立, 且

$\pi_1(M) \cong \ker \psi$ 为 W_P 的正规子群. 不妨设 p_0 附近的 facets 为 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, $\lambda(F_i) = e_i$, 考虑 $\gamma: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow W_P$, $\gamma(e_i) = F_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $\psi \circ \gamma = \text{id}_{\mathbb{Z}_2^n}$, 即上面短正合列是可裂的, 故 $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$. \square

定义 2 $\pi_1(M, p_0)$ 如形式??, 定义

$$\begin{aligned} \alpha: \pi_1(M, p_0) &\longrightarrow W \\ x_{i,g} &\longmapsto \gamma(\phi_i(g)) \cdot \gamma(\phi_i(1))F_i \cdot \gamma(\phi_i(g)) = \gamma(g)F_i\gamma(\phi_i(g)) \triangleq \widehat{F_{i,g}} \end{aligned}$$

引理 2.3 α 是 *well-defined*, 单的, 且 $\text{im } \alpha = \ker \psi$.

证: 首先验证 α 将关系映为关系. 对于配对关系,

$$\begin{aligned} \alpha(x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)}) &= \alpha(x_{i,g})\alpha(x_{i,\phi_i(g)}) \\ &= \gamma(g)F_i\gamma(\phi_i(g)) \cdot \gamma(\phi_i(g))F_i\gamma(g) \\ &= \gamma(g)(F_i)^2\gamma(g) = 1 \end{aligned}$$

对于余二维面对应的关系,

$$\begin{aligned} \alpha(x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)}) &= \alpha(x_{i,g})\alpha(x_{j,\phi_i(g)})\alpha(x_{i,\phi_i\phi_j(g)})\alpha(x_{j,\phi_j(g)}) \\ &= \gamma(g)(F_iF_j)^2\gamma(g) = 1 \end{aligned}$$

所以 α 是 well-defined.

从上面我们发现 α 将 Q 中的余二维面对应的关系及关系的共轭一一地映到对应 P 中余二维面所决定的关系及关系的共轭. 所以 W 中某个文字等于 1, 在 $\pi_1(M)$ 中一定存在唯一等于 1 的文字和它对应. 所以 α 是单的.

$\psi \circ \alpha = 1$, 故 $\text{im } \alpha \subset \ker \psi$. 而任意 $\ker \psi$ 中的元素可以用 $\widehat{F_{i,1}}$ 来表示. 故 $\text{im } \alpha = \ker \psi$. \square

引理 2.4 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$

证明: \mathcal{L} 和 \mathcal{M} 之间的同胚是由分裂短正合列 (??) 给出的,

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\alpha} W_P \begin{matrix} \xrightarrow{\psi} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{matrix} \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1$$

其中 $\psi \circ \gamma = \text{id}_{\mathbb{Z}_2^n}$.

注意到 $F_i = \alpha(x_{i,1})\gamma(\phi_i(1)) \triangleq (x_{k,1}, \phi_i(1)) = (x_{k,1}, \lambda(F_k))$. 进一步我们设 $\varphi: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(M))$ via $\varphi_g(\nu) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(\nu)\gamma(g^{-1})) =$

$\alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(\nu)\gamma(g))$, 其中 $g \in \mathbb{Z}_2^n, \nu \in \pi_1(M)$. 定义 $(\nu_1, g_1) \cdot (\nu_2, g_2) = (\nu_1 \varphi_{g_1}(\nu_2), g_1 g_2)$.

下面我们定义 $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ via. $h(x, \omega) = (x_g, \nu)$, 当 $\omega = F_k$ 时, $\omega = \alpha(x_{k,1})\gamma(\lambda(F_k))$. 由于 W_P 是群 \mathbb{Z}_2^n 和 $\pi_1(M)$ 半直积, 所以这种分解是唯一的. 进一步, $\forall \omega \in W_P$ 为 $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ 上的文字, 则有分解 $\omega = \alpha(\nu)\gamma(g) = (\nu, g)$, 其中 $g \in \mathbb{Z}_2^n, \nu \in \pi_1(M)$ 是唯一的.

定义 $h^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ via. $h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \alpha(\nu)\gamma(g))$.

$h \circ h^{-1}(x_g, \nu) = h(x, \alpha(\nu)\gamma(g)) = (x_g, \nu)$;

$h^{-1} \circ h(x, \omega) = h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \alpha(\nu)\gamma(g)) = (x, \omega)$.

h, h^{-1} 局部上为 identity, 故为局部同胚.

所以 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$ □

接下来我们将证明 \mathcal{M} 为 M 的万有覆叠空间. 我们记 $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow M$ 为 \mathcal{M} 到 M 的投射.

$$\begin{array}{ccc} Q \times \pi_1(M) & \xrightarrow{q'} & Q \times \pi_1(M) / \sim = \mathcal{M} \\ \tilde{\Pi} \downarrow & & \Pi \downarrow \\ Q & \xrightarrow{q} & Q / \sim = M \end{array}$$

其中 q, q' 是粘合 $F_{i, g_1}^{\nu_1}$ 和 $F_{i, g_2}^{\nu_2}$ 决定的商映射.

定理 2.5 \mathcal{M} 为 M 的万有覆叠空间.

证明: 由 \mathcal{M} 的定义知 $\mathcal{M}/\pi_1(M) = M$. 下面只需要证明 $\forall x \in \mathcal{M}$, 存在包含点 x 的开邻域 U , 使得不同的 $\nu \in \pi_1(M)$, $\nu(U)$ 不交.

当点 $x = q^{-1}(x) \in Q^\circ$ 时, 取包含点 x 的一个实心开球邻域 U , 使得 $U \subset Q^\circ$, 此时 $\nu(U)$ 落在不同指标的 Q 中, 是不交的. 当 $x = q^{-1}(x) \in \partial Q$, 我们记 $f(x)$ 为 $out(Q)$ 中包含 x 为相对内点的最小的面, 不妨设 $f(x)$ 为余 k 维的, 则我们取包含点 x 的实心开球邻域 U , 满足 U 与包含点 x 的 Q 的 copy 的交都是 $\frac{1}{2^k}$ 球, 这时 $\nu(U)$ 显然也是不交的.

所以 \mathcal{M} 是 M 一个正则的覆叠空间, 又 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$ 是单连通的, 故为万有覆叠空间. □

设 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 为上面覆叠空间 $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow M$ 的覆叠变换群. 由于 \mathcal{M} 是单连通的, 所以 $\pi_1(M) \cong D(\mathcal{M}, \Pi, M)$. 下面我们根据上面构造的 cell structure (的 2-skeleton) 来刻画 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的生成元.

对于 Q 中的每个 facet $F_{i,g}$, 我们定义 \mathcal{M} 上的面映射 $\Gamma_{i,g} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. $\forall x \in \mathcal{M}$, 存在某个 Q_{ν_1} , 使得 $x \in Q_{\nu_1}$, 由 \mathcal{M} 的构造知存在唯一的 Q_{ν_2} , 使得 $F_{i,g} \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$, 我们定义 $\Gamma_{i,g}(x)$ 为 $\Pi^{-1}(\Pi(x)) \cap Q_{\nu_2}$ 中的唯一的一点, 这样定义的 $\Gamma_{j,g'}$ 显然是 well-defined 的. $\Gamma_{i,g}$ 的连续性也是显然的. 类似引理??容易验证

引理 2.6 1、 $\Gamma_{i,g}\Gamma_{i,\phi_i(g)}(x) = x$.

2、若存在 $F_{j,g'} (\neq F_{i,g}) \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$, 则 $\Gamma_{j,g'}(x) = \Gamma_{i,g}(x)$.

3、若 $\text{facet } F_{i,g} \in \text{in}(Q)$, 此时 $Q_{\nu_1} = Q_{\nu_2}$, $\Gamma_{i,g} = \text{id}$.

进一步我们有

引理 2.7 面映射 $\Gamma_{i,g} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ 为 \mathcal{M} 上的覆叠变换.

命题 2.8 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 可以由面映射 $\{\Gamma_{i,g}\}$ 来刻画.

证明: \mathcal{M} 为单连通的, 此时 $\pi_1(M, p_0)$ 到 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的满同态实际上为群同构, 它将 $[x_{i,g}] \in \pi_1(M, p_0)$ 映为 $\Gamma_{i,g}$. 我们不妨取点 $x = \pi^{-1}(p_0) \in M$, 则 $\{\Pi^{-1}(x)\}$ 实际上是每个 Q 中 p_0 的 copy. 我们取第 1 个 Q_1 中的 p_0 的 copy, 记为 y_0 , 其中 1 为 $\pi_1(M)$ 的单位元. 所以我们只需要验证 $\Gamma_{i,g}(y_0) = \widetilde{x_{i,g}}(1)$, 其中 $\widetilde{x_{i,g}}$ 是 $x_{i,g}$ 在 \mathcal{M} 中的一段提升. $\Gamma_{i,g}(y_0)$ 实际上是 $Q_{x_{i,g}}$ 中的 p_0 的 copy, 即 $\widetilde{x_{i,g}}(1)$. 所以 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的生成元可以自然的选为 Q 的 facets 对应的面映射. \square

综上, 我们有下面结论:

定理 2.9 $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow M$ 为 M 的万有覆叠空间, 复叠变换群 $D(\mathcal{L}, \Pi, M) \cong \pi_1(M)$ 可以由 Q 的 facets 对应的面映射生成.

2.4 Naturality of the Cell Structure

最后我们解释一下我们这种胞腔结构的自然性. 我们考虑 $M[2]$, 它的 0-skeleton 只有一个点 p_0 ; 它的 1-skeleton 是 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 的一点并, 对应 $\pi_1(M)$ 的生成元; 它的每一个二维胞腔对应 $\pi_1(M)$ 的一个关系. 即 $M[2]$ 是 $\pi_1(M, p_0)$ 的 *presentation complex*. 进一步, 我们将 M 的这种胞腔结构提升到它的万有覆叠空间 \mathcal{M} 中, 则 $\mathcal{M}[2]$ 实际上是 $\pi_1(M, p_0)$ 的 *Cayley 2-complex*.

事实上, 将单多面体 P 视为一个 right angle orbifold, 则 small cover $\pi : M \rightarrow P$ 为 P 上的一个 covering orbifold. 由于 M 为一个闭流形, P

为一个 good orbifold, 则 P 的单连通的 covering orbifold \mathcal{M} 为它的万有 covering orbifold. 进一步, covering orbifold $\tau : \mathcal{M} \rightarrow P$ 为 covering space $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow M$ 和 small cover $\pi : M \rightarrow P$ 的复合. 它们的覆叠变换群分别为 $W_P, \pi_1(M)$ 和 \mathbb{Z}_2^n . (Davis-Januszkiewicz [?])

我们定义 π_1^{orb} 为 universal orbifold cover $\tau : \mathcal{M} \rightarrow P$ 的覆叠变换群. 即 $\pi_1^{orb}(P) = W_P$. 我们对单多面体 P 做类似的 cubical 分解, 则某种意义上, $P[2]$ 为 W_P 的 presentation complex. 把这种分解提升到 \mathcal{M} 中, 则 $\mathcal{M}'[2]$ 实际上是 W_P 的一个 Cayley 2-complex (Davis [?]). 我们可以类似定义 P 的 facets pair 结构, 每个 F_i 都是对合的, 即它的配对 facet 是它本身, 对应的面映射为反射. 进一步, facet F 中 $F' \cap F$ 对应的面映射, 在面包含作用下, 对应 W_P 中的 $FF'F = F'$.

3 π_1 -injectivity of Facial Submanifold

设 F 为单多面体 P 的任意一个 facet, 则它依然是单凸的, 且 $\mathcal{F}(F)$ 可以继承 $\mathcal{F}(P)$ 上的染色, 进而可以构造 F 上的 small cover $\pi_F : M_F \rightarrow F$. 在 Davis-Januszkiewicz [?] Lemma 1.3 中, 我们知道 M_F 为 M 的 $n-1$ 维连通子流形.

在这一节中, 我们利用上面的胞腔结构, 考虑 $\pi_1(M_F)$ 与 $\pi_1(M)$ 之间的关系. 我们设多面体 P, F 对应的 Coxeter group 分别为 $W_P = \langle G : R \rangle$, $W_F = \langle G_F : R_F \rangle$. 我们取定 F 的一个顶点 p_0 为基点, 我们将 2^n 个单多面体 P 在 p_0 处粘在一起, 分析它们的胞腔结构, 可以得到 M, M_F 的基本群, 群表示形式如 (??), 记 $\pi_1(M, p_0) = \langle \tilde{G} : \tilde{R} \rangle$, $\pi_1(M_F, p_0) = \langle \tilde{G}_F : \tilde{R}_F \rangle$.

下面我们设 $\rho : F \rightarrow P$ 为面包含映射, $\rho_* : W_F \rightarrow W_P$ 为 ρ 决定的 Coxeter group 之间的群同态, 设 $\tilde{\rho} : M_F \rightarrow M$ 为 ρ 决定的 Facet 子流形 M_F 到 M 的包含映射, $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_F) \rightarrow \pi_1(M)$ 为它诱导的基本群之间的群同态.

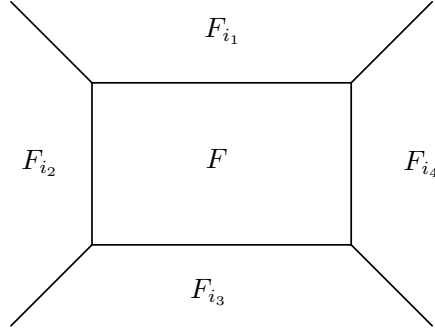
下面不妨设 F 为单多面体 P 的第 1 个 facet, $\lambda(F) = e_1$.

引理 3.1 1、 $\rho_*|_{G_F}$ 和 $\rho_*|_{R_F}$ 都为单射.

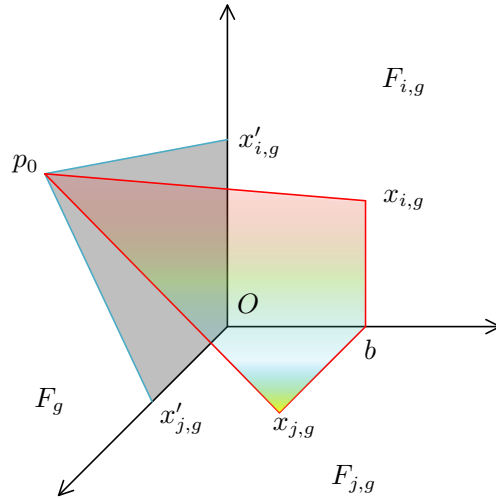
2、 $\tilde{\rho}_*|_{\tilde{G}_F}$ 和 $\tilde{\rho}_*|_{\tilde{R}_F}$ 都为单射.

证明: 1、设 P 中与 F 相交的 Facets 集为 $\mathcal{F}_1 = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_{m'}}\} \subset \mathcal{F}(P)$, 则 $G_F = \mathcal{F}(F) = \{F_{i_1} \cap F, F_{i_2} \cap F, \dots, F_{i_{m'}} \cap F\}$. 所以自然地, $\rho_*(F_{i_k} \cap F) = F F_{i_k} F = F_{i_k}$. 进一步, F 中余二维面 (不妨取) $(F_{i_1} \cap F) \cap (F_{i_2} \cap F) (\neq \emptyset)$ 决定的关系 $((F_{i_1} \cap F)(F_{i_2} \cap F))^2$ 在 ρ_* 的像为 $(F_{i_1} F_{i_2})^2$. 即 ρ_* 把 W_F 中的生成元和关系单得映为群 W_P 中的生成元和关系.

2、我们下面证明 M_F 的二维骨架 $M_F[2]$ 可以自然的包含到 $M[2]$ 中. 我们分别将 $\{F_g\}_{g \in \mathbb{Z}_2^{n-1}}$ 与 $\{P_g\}_{g \in \mathbb{Z}_2^n}$ 在点 p_0 处粘合在一起, 分别得到多面体 Q 与 $Q_F = F \times \mathbb{Z}_2^{n-1} / \sim$. 则 $out(Q_F) \subset out(Q), in(Q_F) \subset in(Q)$. 设 $f_i = F_i \cap F \neq \emptyset$ 为 F 的一个任意的 facet, $f_i \cap f_j = F_i \cap F_j \cap F \neq \emptyset$ 为 F 的一个任意的余 2 维面. 设 $f_{i,g} = F_{i,g} \cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{1,\phi_i(g)}$ 为 Q_F 中的任意一个 facet, 其中 $\{F_{1,g}, F_{1,\phi_i(g)}\}$ 为 $\{P_g : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 中的 facets-pair. 由引理??, 我们知道 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路与 $F_{i,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)}$ 在 Q 中对应的有向闭路 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$ 是定点同伦的, 所以我们不妨记 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路为 $x_{i,g}$. 对于 Q_F 中的任意一个余 2 维



面 $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} \neq \emptyset$ 所对应的二维胞腔 D_l 与 $F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)}$ 所对应的二维胞腔 $D_g, D_{\phi_i(g)}$ 也是定点同伦的, 所以在 $\pi_1(M_F)$ 中, $f_{i,g} \cap f_{j,g}$ 决定的关系与 $F_{i,g} \cap F_{j,g} (\cap F_{1,g} \neq \emptyset)$ 或者 $F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)} (\cap F_{1,\phi_i(g)} \neq \emptyset)$ 在 $\pi_1(M)$ 中决定的关系对应。所以 M_F



的基本群为

$$\pi_1(M_F) = \langle x_{i,g}, i = i_1, i_2, \dots, i_{m'}, g \in \mathbb{Z}_2^{n-1} : x_{i,g} x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g \\ x_{i,g} x_{j,\phi_i(g)} x_{i,\phi_i\phi_j(g)} x_{j,\phi_j(g)} = 1, \forall f_{i,g} \cap f_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (8)$$

其中 $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)} \cap F_{1,\phi_i(g)} \neq \emptyset$. 即形式上 $\pi_1(M_F)$ 的生成元集 \tilde{G}_F 和关系集 \tilde{R}_F 都可为 $\pi_1(M)$ 的生成元集 \tilde{G} 和关系集 \tilde{R} 的子集. 进一步, 这种关系是映射 $\tilde{\rho} : M_F \rightarrow M$ 所诱导的, 即 $\tilde{\rho}_*$ 也把生成元单得映为生成元, 把关系单得映为关系. \square

对于 P 的任意一个 k 维面 f , 由归纳知 W_f 和 W , $\pi_1(M_f)$ 和 $\pi_1(M)$ 都有上面的关系. 不妨仍记 $\rho : f \rightarrow P$ 为面包包含映射, $\rho_* : W_f \rightarrow W$ 为 Coxeter group 之间的群同态, $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_f, p_0) \rightarrow \pi_1(M, p_0)$ 为基本群之间的群同态, 则

推论 1 1、 $\rho_*|_{G_f}$ 和 $\rho_*|_{R_f}$ 都为单射.

2、 $\tilde{\rho}_*|_{\tilde{G}_f}$ 和 $\tilde{\rho}_*|_{\tilde{R}_f}$ 都为单射.

根据上面的引理, W_F 中的文字可以用 W_P 中的生成元来表示, $\pi_1(M_F)$ 的文字可以用 $\pi_1(M)$ 中的生成元来表示. 即有 $\rho_*(\omega) = \omega, \tilde{\rho}_*(\nu) = \nu, \forall \omega \in W_F, \nu \in \pi_1(M_F)$. 但一般 ρ_* 与 $\tilde{\rho}_*$ 不一定是单同态. 如

例 6 取 $P = I \times \triangle^2$ 为三棱柱, 共有 5 个 facets $\{F_i\}_{i=1,2,3,4,5}$, 我们给上下底面 F_1, F_2 染色 e_1 , 侧面 F_3, F_4, F_5 染色为 $e_2, e_3, e_1e_2e_3$, 由 P 的 h -vector 知, $\pi_1(M)$ 有两个生成元和两个关系, 它的任意一个侧面上的 small cover 基本群有两个生成元, 一个关系.

即 $\pi_1(M) = \langle x, y : x^2 = yxyx^{-1} = 1 \rangle, \pi_1(M_F) = \langle x, y : yxyx^{-1} = 1 \rangle$

$$\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_F) \rightarrow \pi_1(M)$$

满足 $\tilde{\rho}_*(x) = x, \tilde{\rho}_*(y) = y$, 但 $\tilde{\rho}_*$ 非单.

此时 ρ_* 也不是单的. 不妨考虑 F_5 , 则 $F_3 \cap F_4$ 在 W_P 中决定的关系 $(F_3F_4)^2 = 1$ 是 $((F_3 \cap F_5)(F_4 \cap F_5))^2 (\neq 1) \in W_{F_5}$ 在 ρ_* 下的像.

定义 3 我们称一个单纯复形 K 为 *flag* 的, 如果 K 中两两相连的顶点集张成 K 中的一个单形. 等价地, K 中不含维数 ≥ 2 的空单形.

我们称一个单多面体 P 为 *flag* 的, 如果 $K = \partial P$ 为 *flag* 的. 等价地, P 中两两相交的面必有公共的交.

例 7 1、一个 m 边形为 *flag* 的, 当且仅当 $m > 3$.

2、*flag* 多面体的面是 *flag* 的.

下面证明当 P 为 *flag* 时, ρ_* 和 $\tilde{\rho}_*$ 都是单的.

引理 3.2 当 P 为 *flag* 时, $\rho_* : W_F \longrightarrow W_P$ 为单的.

证明: 当单多面体 P 为 *flag* 时, 若 $F \cap F_i \neq \emptyset, F \cap F_j \neq \emptyset$, 则 $F \cap F_i \cap F_j \neq \emptyset$, 即 P 中 F 附近的任意余二维面 $f \subset P$ 对应的关系一定可以继承到 W_F 中. 这保证了下面这个态射的定义合理性.

$$\eta_* : W_P \longrightarrow W_F \quad (9)$$

其中 $\eta_*|_{G-G_F} = 1$, $\eta_*|_{G_F} = id$.

下面我们验证 η_* 定义的合理性. 我们考虑 W_P 中的关系在 η_* 下的像是否为 W_F 的单位元. 设 P 中与 F 相交的 facets 集 (不包含 F) 为 $\mathcal{F}_1 (= G_F)$, 剩余的 facets 我们记为 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(F) - \mathcal{F}_1$. 则 η_* 将 \mathcal{F}_2 中 facets 对应的生成元映为 1.

对于 W_P 的关系 $F_i^2 = 1$, 当 $F_i \in \mathcal{F}_1$ 时, $\eta_*(F_i^2) = (F_i \cap F)^2 = 1$; 当 $F_i \in \mathcal{F}_2$ 时, $\eta_*(F_i^2) = 1$.

P 中的任意余二维面 $f = F_i \cap F_j \neq \emptyset$ 决定的关系为 $(F_i F_j)^2 = 1$. 若 F_i, F_j 都属于 \mathcal{F}_1 , 则由 P 的 *flag* 性质知 $f \subset F$, 从而 η_* 将 $f \subset P$ 所对应的关系映为 W_F 的一个关系; 若 F_i, F_j 都不属于 \mathcal{F}_1 , 则对应关系在 η_* 下的像为 1; 若 F_i, F_j 分别属于 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, 不妨设 $F_i \subset \mathcal{F}_1, F_j \subset \mathcal{F}_2$, 则 $\eta_*(F_i F_j F_i F_j) = \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) = (F_i \cap F)^2 = 1$.

所以对任意关系 $r \in W_P, \eta_*(r) \equiv 1$, 即 η_* 为 well-defined 的群同态.

最后容易验证 $\eta_* \circ \rho_* = id : W_F \longrightarrow W_F$, 即 ρ_* 为单的. \square

定理 3.3 P 为 *flag* 时, $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_F, p_0) \longrightarrow \pi_1(M, p_0)$ 为单同态.

证明: 考虑

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M_F) & \xrightarrow{\alpha_F} & W_F \\ \tilde{\rho}_* \downarrow & & \downarrow \rho_* \\ \pi_1(M) & \xrightarrow{\alpha} W_P \xrightarrow{\beta} & W'_P \end{array}$$

其中 $\beta : W_P \longrightarrow W'_P = W_P / \langle F \rangle$ 为商映射, 它把 $\omega \in W_P$ 映为 $[\omega] \in W'_P$. $\rho'_* = \beta \circ \rho_* : W_F \longrightarrow W'_P$. 则容易验证 ρ'_* 也是单的. 设 $x_{k,g}$ 为 $\pi_1(M_F)$ 的 $F_k \cap F$ 对应的一个生成元, 则 $\beta \circ \alpha \circ \tilde{\rho}_*(x_{k,g}) = \beta \circ \alpha(x_{k,g}) = \beta \circ \alpha(x_{k,g}) = \beta(\widehat{F_{k,g}}) = [\widehat{F_{k,g}}]$; $\rho'_* \circ \alpha_F(x_{k,g}) = \rho'_*(\widehat{F_{k,g} \cap F}) = [\widehat{F_{k,g}}]$. 进一步, 对 $\forall \nu \in \pi_1(M_F), \rho'_* \circ \alpha_F(\nu) = \beta \circ \alpha \circ \tilde{\rho}_*(\nu)$.

所以当 P 为 flag 时, ρ'_* 为单的, 所以 $\rho'_* \circ (\pi_F)_* = \beta \circ \alpha \circ \tilde{\rho}_*$ 为单的, 从而 $\tilde{\rho}_*$ 为单的.

事实上, ρ_* 单蕴含 $\tilde{\rho}_*$ 单, 考虑下面图表

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(M_F) & \hookrightarrow & W_F & \xrightarrow{\psi_F} & \mathbb{Z}_2^{n-1} \longrightarrow 1 \\ & & \tilde{\rho}_* \downarrow & & \downarrow \rho_* & & \uparrow \theta \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(M) & \hookrightarrow & W_P & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1 \end{array}$$

其中 $\theta : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{n-1} = \mathbb{Z}_2^n / \langle \lambda(F) \rangle = \mathbb{Z}_2^n / \langle e_1 \rangle$ 为特征映射诱导的商映射. 则 $\theta \circ \psi \circ \rho_*(F_k \cap F) = \theta \circ \psi(F_k) = \theta \circ (\lambda(F_k)) = \lambda(F_k) / \langle e_1 \rangle = \psi_F(F_k \cap F)$, 即右边矩形是交换的.

$\forall \nu \in \ker(\psi_F) = \pi_1(M_F)$, 则 $\theta \circ \psi \circ \rho_*(\nu) = \psi_F(\nu) = 1$, 故 $\psi \circ \rho_*(\nu) = 1$ 或者 e_1 . 当 $\psi \circ \rho_*(\nu) = 1$ 时, $\rho_*(\nu) \in \ker(\psi) = \pi_1(M)$, 所以 $\tilde{\rho}_*(\nu) = \rho_*(\nu)$. 若 $\psi \circ \rho_*(\nu) = e_1$. 若 $\psi \circ \rho_*(\nu) = e_1 = \psi(F)$, 则 $\tilde{\rho}_*(\nu) = \rho_*(\nu)F \in \ker(\psi) = \pi_1(M)$, 此时 $\tilde{\rho}_*(\nu) \neq 1$. 若 $\tilde{\rho}_*(\nu) = \rho_*(\nu)F = 1$, 则 $\rho_*(\nu) = F^{-1} = F$, 矛盾. 所以从 ρ_* 的单蕴含 $\tilde{\rho}_*$ 单. \square

注 左边矩形是交换的当且仅当与 F 相交的每一个 facet F_i 的染色 $\lambda(F_i)$ 不含 e_1 分量.

由于 flag 多面体的 face 也是 flag 的, 所以对任意 k 维面 f , 由归纳知, 也有类似的结论.

推论 2 单多面体 P 为 flag, $\rho_* : W_f \longrightarrow W$ 和 $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_f, p_0) \longrightarrow \pi_1(M, p_0)$ 为单同态. 此时 $\rho_*|_{W_f}, \tilde{\rho}_*|_{\pi_1(M_f, p_0)}$ 都为同构.

定义 4 我们称一个连通闭流形 M 为 aspherical 的, 若 $\pi_k(M) = 0, k \geq 2$.

Borel conjecture 设 $f : M \longrightarrow N$ 为同伦等价, 其中 M, N 为同维数闭的 aspherical 流形, 则 f 同伦于一个同胚映射。

定理 3.4 ([?]) *Let M be a small cover of P . Then the following statements are equivalent.*

- 1、 *M is aspherical.*
- 2、*The boundary of P is dual to a flag complex.*
- 3、*The natural piecewise Euclidean metric on the dual cubical cellulation of M is nonpositively curved.*

定理 3.5 ([?]) *Let $f : N \longrightarrow M$ be a homotopy equivalence between closed smooth manifolds such that M supports a non-positively curved Riemannian metric. Then N and M are stably homeomorphic; i.e.*

$$f \times id : N \times \mathbb{R}^{m+4} \longrightarrow M \times \mathbb{R}^{m+4} \quad (10)$$

is homotopic to a homeomorphism where $m = \dim M$.

上面定理说明, 当流形 M 是一个 non-positively curved Riemannian 流形, 且 $\dim(M) \neq 3, 4$, Borel conjecture 成立. 可以验证 small cover 为这样的闭流形.

推论 3 设 $n(> 4)$ 维闭流形 M, N 都为 flag 单多面体上的 small cover, 若 $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$, 则 M 和 N 是同胚的.

对于 3 维情况, 在 [?] 中指出, Borel conjecture 对所有的三维流形都成立. 我们感兴趣的是 aspherical small cover M 是不是一个 Haken manifold

定义 5 A Haken 3-manifold is a compact 3-manifolds which are

- (1) P^2 -irreducible and
- (2) sufficiently large – i.e. contain a properly embedded, 2-sided, incompressible surface.

命题 3.6 P^2 -irreducible M with $H_1(M)$ infinite is a Haken manifold.

证明: 由 Hempel [?] Lemma 6.6 知 M 包含一个 properly embedded 2-sided, nonseparating incompressible surface S . \square

引理 3.7 (*待证) 设 M 是 3 维 flag 多面体 P 上的一个 small cover, 则 $H_1(M)$ 是 infinite 的.

证明:

推论 4 Aspherical small covers are Haken manifolds.

证明: 设 P 为三维单的 flag 多面体 (不包含单形面), M 为 P 上的 small cover, M 是 aspherical 的. 由 Sphere Theorem, 我们知道三维闭可定向流形是 aspherical 的, 当且仅当它是 irreducible 和 π_1 infinite 的. 进一步为 P^2 -irreducible, 又 $H_1(M)$ 为 infinite 的, 故 aspherical small cover M 为 Haken 流形. \square

定理 3.8 在三维 small cover 范畴中, 下列条件等价.

- (1) M 是 *aspherical* 的,
- (2) M 是 P^2 -irreducible 的.
- (3) M 是 *Haken* 的.

进一步, 此时 $H_1(M)$ 是 *infinite* 的.*

可定向 *aspherical* 流形为 irreducible 的, 故为 prime 的, 故同伦等价诱导同胚. 尽管 $\{M_F\}$ 中不一定存在 M 的 two-sided incompressible surface (考虑正十二面体上的 small cover), 但 M_F 拥有许多好的性质, 比如包含映射诱导的基本群同态为单的. 特别地, 我们沿着 M_F 去切 M , 这在我们构造的胞腔结构中, 相当于把与 F 横截相交的那些一维闭路 $\{x\}$ 切开, 或者给面 F 一个平凡的 color. 此时对应在我们上面构造的胞腔结构中, 是把 facets 对应的闭路切开, 从而这些闭路决定的生成元变为平凡元, 基本群得到化简. 所以从这里我们猜测, 类似于 Hierachy of Waldhausen 的操作对 (高维) *aspherical small cover* 也是有效的. 这对高维 small cover 中的 borel 猜想的证明提供一种可行的 idea. 而且 Davis 等一些人已经在做了一些这方面的工作, 比如对高维 *Haken* 流形的推广.

参考文献

- [1] M. Aschenbrenner, S. Friedl and H. Wilton, 3-manifold groups, *Mathematics* (2013), 1-149
- [2] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, Torus actions and their applications in topology and combinatorics, *University Lecture Series, 24. American Mathematical Society, Providence, RI*, (2002)
- [3] M.W. Davis, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, *Ann. Math. (2)* 117 (1983), 293-325.
- [4] M.W. Davis, Exotic aspherical manifolds, *Topology of high-dimensional manifolds*. (Trieste, 2001), 371-404.
- [5] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, Convex polytopes, coxeter orbifolds and torus actions, *Duke Math. J.* 62 (1991), 417-451.
- [6] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Nonpositive curvature of blow-ups, *Selecta Math.(N.S.)* 4 (1998), 491-547.
- [7] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Fundamental groups of blow-ups, *Advances in mathematics*. 177 (2003), 115-179.
- [8] F.T. Farrell, The Borel conjecture, *Topology of high-dimensional manifolds*. (Trieste, 2001), 225-298.
- [9] A. Hatcher, Spaces of Incompressible Surfaces, *Mathematics*. (1999).
- [10] J. Hempel, 3-manifolds, *Annals of Mathematics studies*. 86 (1978).
- [11] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math. (2)*87 (1968), 56-88.
- [12] S. Kuroki, M. Masuda, and L. Yu, Small covers, infra-solvmanifolds and curvature, *Forum mathematicum*. 27(5)(2015), 2981-3004
- [13] L. Yu, Crystallographic groups with cubic normal fundamental domain, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B39, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto*. (2013), 233-244