Fundamental Groups of Small Covers

1 Introduction

1.1 Small Cover

凸多面体 P 是指 $\mathbb{R}^n$ 中非空有限多个点集的凸包，或者等价的是 $\mathbb{R}^n$ 中有限个半空间的有界交，即

$$P = conv\{p_1, p_2, \cdots, p_\ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l_i, x\rangle \geq -a_i, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

其中 l_i 为 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的线性函数，$a_i \in \mathbb{R}$.

凸多面体的维数就是指凸包或者有界交的维数。若无特殊说明，本文中的所考虑的多面体均指 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维凸多面体，记为 P. 我们把 P 的边界记为 K. 把 P 的内部记为 P°. 凸子集 $F \subset P$ 称为 P 的面，若 F 是多面体 P 与某一个半空间 $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x\rangle \geq -a\}$ 的交，且 $P^\circ \cap \partial V = \varnothing$. 子集 $\varnothing$ 和 P 本身都为 P 的面，称为平凡面；其他的面称为真面. P 的 0 维面称为 P 的顶点，P 的 1 维面称为 P 的边，P 的 $n-1$ 维面称为 P 的 *facet*. 记 f_i 为 P 的 i 维面的个数，称 $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ 为 P 的 *f-vector*. 取 $f_{-1} = 1$，则 P 的 *h-vector* $\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, \cdots, h_n)$ 由下面等式定义

$$h_0 t^n + \cdots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}$$

由 Dehn-Sommerville 关系知 $h_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \cdots, n$，为方便我们在本文中将 P 的 facets 的个数记为 $f_{n-1} = m$，即 P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$.

我们称多面体 P 是单（simple）的，若 P 的每个顶点恰好是 P 中 n 个 facets 的交，等价地，每个顶点处恰好有 n 条边. 单多面体中任意余维数为 k 的面 f 总可以 (唯一) 表示为 $f = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$，其中 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 为包含 f 的 facets.

取 $\mathbb{Z}_2=\{1,-1\}$ 为二元乘法群或者模空间，$\mathbb{Z}_2^n$ 表示它们的乘积，e_i 表示 $\mathbb{Z}_2^n$ 第 i 个标准向量. 设 P 为 n 维单凸多面体，$\mathcal{F}(P)$ 为 P 的 facets 集，对每一个 facet $F_i\in\mathcal{F}(P)$，我们定义一个染色 $\lambda(F_i)\in\mathbb{Z}_2^n$，使得对 P 的每一个顶点 $p=F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n$，满足 $span\{\lambda(F_1),\lambda(F_2),\cdots,\lambda(F_n)\}\cong\mathbb{Z}_2^n$. 进一步我们称 $\lambda:\mathcal{F}(P)\longrightarrow\mathbb{Z}_2^n$ 为下面将要构造的 small cover M 的示性函数. 需要注意的是，下文出现的多面体指数之间的乘法，均默认为群 $\mathbb{Z}_2^n$ 中的乘法运算.

注 对于任意单凸多面体，满足上面条件的染色不一定存在，参考 Davis-Januszkiewicz [5]. *Nonexample 1.22*（*Duals of cyclic ploytope*）

现在我们定义单凸多面体 P 上的 small cover. 对任意点 $x\in P$，记 $f(x)$ 为 P 中包含 x 为相对内点的唯一的面，例如 x 为 P 内部的点时，则 $f(x)=P$; x 为 P 的顶点时，则 $f(x)=F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n$，其中 $\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$ 为包含点 x 的 n 个 facets. 不妨设 $f(x)=F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_k$ 为 P 的任意一个固定的余 k 维面，记 $G_{f(x)}=\langle\lambda(F_1),\lambda(F_2),\cdots,\lambda(F_k)\rangle=\langle\lambda(F_i):x\in F_i\rangle$. 则定义 small cover 为

$$M=(P\times\mathbb{Z}_2^n)/\sim \tag{1}$$

$(x,g)\sim(y,h)$ 当且仅当 $x=y, g^{-1}h\in G_{f(x)}$. 这里 $G_{f(x)}<\mathbb{Z}_2^n$ 实际上是点 x 处的 *isotopy subgroup*，i.e. $\{g\in\mathbb{Z}_2^n:gx=x\}$. 进一步，设 $\pi:M\longrightarrow P$ 为一个自然的投射.

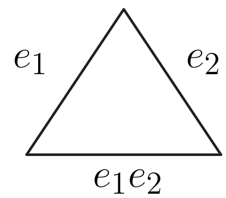
另外，我们也可以比较直观的构造一个 small cover. 任取 P 的一个顶点 p_0，不妨记 p_0 附近的 facets 为 $F_1,F_2,\cdots,F_n$，且对应 facet 上的染色为 $\lambda(F_i)=e_i, i=1,2,\cdots,n$. 首先我们把 P 放到 $\mathbb{R}^n$ 的第一卦限中，使得 p_0 与原点重合，第 i 个 facet F_i 落在 $x_i=0$ 的坐标面上. 然后我们将 P 沿着坐标面反射，得到原点附近的 P 的 2^n 个 copy，我们把这 2^n 个 P 的 copy 组成的多面体记为 Q，p_0 自然的落在 Q 的内部. 我们给第 g 个坐标卦限的 copy 一个自然的标号 $g\in\mathbb{Z}_2^n$. 最后我们再将 Q 剩余的 facets 按照染色信息成对粘合起来，具体第 g_1 个 P 的 copy 的 facet F_i 与第 g_2 个 P 的 facet F_j 粘，当且仅当 $i=j$, $g_1^{-1}g_2=\lambda(F_i)$. 这样就得到 P 上的 small cover M.

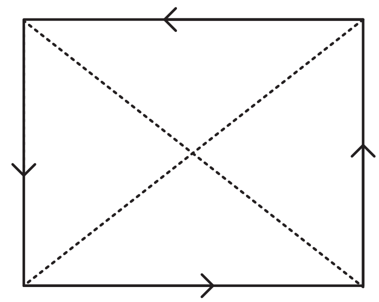
命题 1.1 *small cover 为连通闭流形.*

证明： 参考 Davis-Januszkiewicz [5]. 性质 *1.7*

1.2 Examples of Small Covers

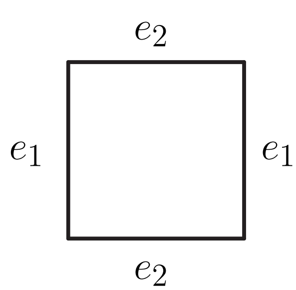
例 1 当 $P = \triangle^n$ 时，$\mathcal{F}(P)$ 上本质上只有一种染色，如 $n = 2$ 时，

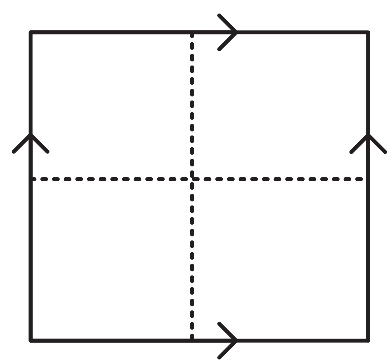


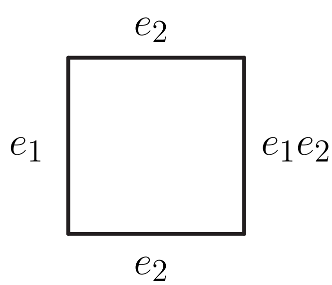


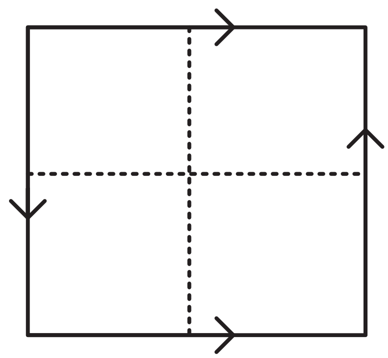
先将 P 在一个点处粘，得到一个大的四边形，由染色信息知它的对边沿着箭头方向粘，这是一个 $\mathbb{R}P^2$.

例 2 当 P^2 为四边形时，$\mathcal{F}(P)$ 上有下面两种不同的染色，









同样的操作，我们可以分别得到 T^2 和 Klein bottle.

例 3 （P^2 是一个 m 边形时）

M 是由 4 个 m-gon 沿边粘成的曲面，所以 M 的欧拉数为 $\chi(M) = 4-m$. 当 m 为奇数时，M 为 $m-2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和；当 m 为偶数时，M 为 $m-2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和或着为 $\frac{m-2}{2}$ 个 T^2 的连通和. 所以 small cover 决定了除 S^2 外的所有二维闭曲面.

在本文中，我们主要通过构造 small cover 的一种自然的胞腔分解来计算基本群的群表示. 我们由 Hurewicz 定理知道，胞腔复形的基本群可以由它们的二维骨架确定，所以在本文中，我们将构造 small cover 的胞腔结构，计算基本群时，仅考虑它们的二维骨架. 另外我们将 small cover M 的 k 维骨架记为 $M[k]$，将多面体 P 的 k 维骨架记为 $P[k]$.

2 Cell Structure

由于单凸多面体具有很好的组合性质，所以我们可以通过不同的方式来构造 Small cover 的胞腔结构. 比如由单多面体面结构诱导的胞腔结构；small cover 的 perfect 胞腔结构，见 Davis-Januszkiewicz [5].; 由单多面体的 cubical subdivision 所诱导的胞腔结构，见 Buchstaber [2]. 在下面一节我们在 Q 上作类似的 cubical subdivision， 来构造 small cover 一种更自然的胞腔分解，在这种胞腔结构，可以方便的得到 small cover 基本

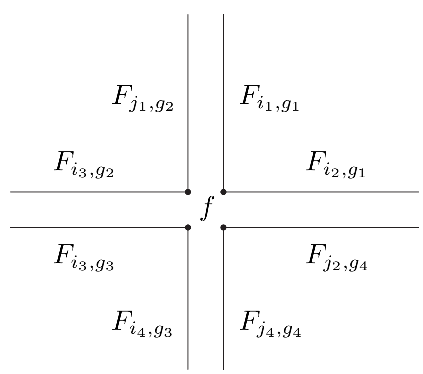
群的一个简洁的表示. 对于一般的单凸多面体 P，总存在它的一个 cubical subdivision，我们将这种分解拉到 small cover，我们自然地可以得到 small cover 一种胞腔分解. 而 Q 一般来说未必是单的，所以我们下面构造的这种分解不是严格意义的 cubical. 进一步，这多面体 Q 的面结构诱导的 M 的一个胞腔分解，我们下面构造的胞腔分解实际上是这种胞腔结构 Poincare 意义上的对偶.

2.1 Definitions and Constructions

同上面，我们首先将 $|\mathbb{Z}_2^n| = 2^n$ 个多面体 P 的 copy 在 P 的任一顶点 p_0 处粘合，得到一个大的 n 维多面体 Q，这里 Q 也可以看作将多面体 P 沿着它的一点 p_0 附近的 facets 作反射得到.

由 Q 的构造知，Q 中的每一个 P 自然地拥有一个标号 $g \in \mathbb{Z}_2^n$，我们将第 g 个多面体 P 记为 P_g，将 Q 中 P_g 的第 i 个 facet F_i 记为 $F_{i,g}$. 若 P_g 的 k 维面 $f_i^k \subset \partial Q$，此时 f_i^k 称为 Q 的外 *face*，否则称为 Q 的内 *face*，将 Q 的内、外面集分别记为 $in(Q), out(Q)$. 接下来把 Q 的外 facets 按照染色信息配对粘合就可以得到商空间 – small cover M. 我们注意到 M 的所有的 facets 上存在一种自然的配对结构. 配对的规则由 P 上的染色 λ 决定. 这种配对结构有助于我们描述 M 的基本群. 下面，我们引入 M 的面配对结构的定义.

定义 1 facets-pair structure of X.



设 X 为一个 n 维连通拓扑空间，X 可以由若干个单凸多面体 $\{P_g^n : g = 1, 2, \cdots, N\}$ 粘合而成，我们记 P_g 的第 i 个 facet F_i 为 $F_{i,g}$，并且满

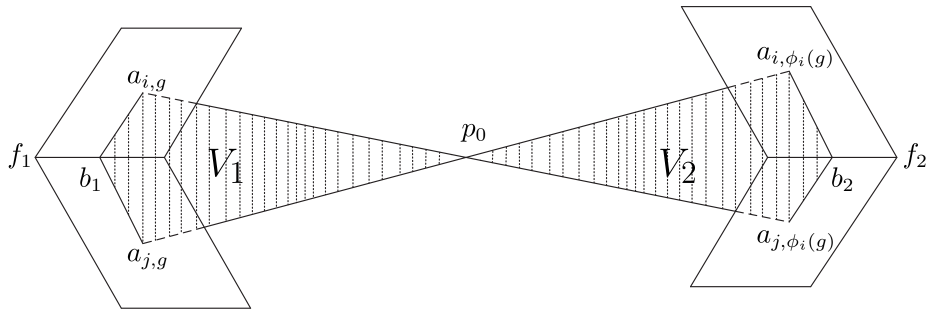
足下面两个条件：
1、任意 facet F_{i,g_1} 唯一配对 F_{j,g_2}. 即存在一个同胚 $\tau_{i,g_1}: F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$ 与 $\tau_{j,g_1}: F_{j,g_2} \longrightarrow F_{i,g_1}$ 使得 $\tau_{i,g_1} = \tau_{j,g_2}^{-1}$. 我们称 $\widehat{F} = \{F_{i,g_1}, F_{j,g_2}\}$ 为一个 *facet* 对，称 F_{j,g_2} 为 F_{i,g_1} 的配对 *facet*.
2、对任意余二维面 $f = F_{i_1,g_1} \cap F_{i_2,g_1}$，如果 $\tau_{i_1,g_1}(f) = F_{j_1,g_2} \cap F_{j_3,g_2}$，$\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{j_2,g_4} \cap F_{j_4,g_4}$，则 $\tau_{j_3,g_2}\tau_{i_1,g_1}(f) = \tau_{j_4,g_4}\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{i_3,g_3} \cap F_{i_4,g_3}$. 这里不排除 $F_{j_2,g_4} = F_{j_3,g_2}$ 或者 $F_{i_2,g_1} = F_{i_3,g_3}$.

则我们称 $\mathcal{S} = \{\widehat{F}_{i,g}, \tau_{i,g}\}$ 为 $\{P_l^n\}$ 上的一个 *facets-pairing structure*，$\tau_{i,g}: F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$ 为 $\mathcal{S}$ 的 *structure map*. 记一步，若 X 为闭的，我们称 $\mathcal{S}$ 是 M 的一个完全的 facets-pairing structure $\square$

事实上，$\mathcal{F}(P)$ 上的示性函数 $\lambda: \mathcal{F}(P) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 决定了 M 上的一个配对结构. $F_{i,g_1} \sim F_{j,g_2}$ 当且仅当 $F_i = F_j$，$\lambda(F_i) = (g_1)^{-1}g_2$. 反之，若知道 $\{P_g^n : g = 1, 2, \cdots, N\}$ 上的一个完全配对结构，我们也可以构造出一个闭流形 M. 进一步由 $\lambda(F_i) = (g_1)^{-1}g_2$ 得 $g_2 = g_1 \cdot \lambda(F_i)$，即对 Q 的任意一个 facet $F_{i,g}$，他的配对 facet 为 $F_{i,\phi_i(g)}$，其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i) : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$. 下面，我们把 M 的 facets pair 记为 $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}, \forall g \in \mathbb{Z}_2^n$. Q 到 P 有一个自然地投射，我们记为

$$\bar{\pi} : Q \longrightarrow P \tag{2}$$

下面构造 M 的 cell structure. 首先我们将 $M[0]$ 取为点 p_0，并且设为 M 的基点. 我们在 Q 的每一对余 1 维面处构造 1-cells. 对 Q 的每对 facets pair$\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$（包括所有的内 facets、外 facets），任取 $F_{i,g}$，$F_{i,\phi_i(g)}$ 内部的点 $a_{i,g}, a_{i,\phi_i(g)}$（不妨取为 $F_{i,g}$，$F_{i,\phi_i(g)}$ 的重心），使得 $\bar{\pi}(a_{i,g}) = \bar{\pi}(a_{i,\phi_i(g)}) = a_i \in P$，在 Q 的内部取连接 p_0 到 $a_{i,g}, a_{i,\phi_i(g)}$ 的两条简单有向道路（不妨取为直线段），记为 $\overrightarrow{a_{i,g}}, \overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}$. 则 $\overrightarrow{a_{i,g}}(\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}})^{-1}$ 为 M 中以 p_0 为起点的一条有向闭路，记为 $x_{i,g}$，另外记 $x_{i,\phi_i(g)} = x_{i,g}^{-1}$，它表示 M 中以 p_0 为起点的有向闭路 $\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}(\overrightarrow{a_{i,g}})^{-1}$. 若我们不考虑 $x_{i,g}$(或 $x_{i,\phi_i(g)}$) 的方向，则 $x_{i,g} - \{p_0\} \cong e^1$（或 $x_{i,\phi_i(g)} - \{p_0\} \cong e^1$），这里 e^k 表示 M 一个 k 维 cell. M 中的每一对 facets pair 都决定了一个 1-cell. 在上述构造中，所有的 $\{x_{i,g}\}$ 都仅交于 0-skelton p_0 处. 这样我们就获得 M 的 1-skelton $M[1] = \bigvee_{p_0} x_{i,g}$.



我们在余 2 维面处构造 2-cells. 设 $f_1 = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 为 Q 的任意一个余 2 维面，则令 $f_2 = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)}$，$f_3 = F_{i,\phi_i\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_i\phi_j(g)}$，$f_4 = F_{i,\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_j(g)}$，使得 $\{\bar{\pi}(f_k), k = 1,2,3,4\}$ 在 P 中的像相同，记为 f，这里 $\phi_i\phi_j(g) = \phi_i(g\cdot\lambda(f_j)) = g\cdot\lambda(f_j)\cdot\lambda(f_i)$. 取 f 内部的一个点 b，对应 f_k 上的点设为 b_k，$k = 1,2,3,4$. 取 V_1 为经过点 $b_k, p_0, a_{i,g}, a_{j,g}$ 的二维简单区域，如取 b 为 $span\{\vec{a_i}, \vec{a_j}\}$ 与 f 的交点，其中 $\vec{a_i} = \bar{\pi}(\overrightarrow{a_{i,g}}), \vec{a_j} = \bar{\pi}(\overrightarrow{a_{j,g}})$，这里的 $span\{\vec{a_i}, \vec{a_j}\} \triangleq \{\vec{x} = k_1\vec{a_i} + k_2\vec{a_j},\ k_1, k_2 \geq 0\}$. 则 $V_1 = span\{\overrightarrow{a_{i,g}}, \overrightarrow{a_{j,g}}\} \cap P_g \cong D^2_+$. 类似确定 $V_2 = span\{\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}, \overrightarrow{a_{j,\phi_i(g)}}\} \cap P_{\phi_i(g)}, V_3 = span\{\overrightarrow{a_{i,\phi_i\phi_j(g)}}, \overrightarrow{a_{j,\phi_i\phi_j(g)}}\} \cap P_{\phi_i\phi_j(g)}, V_4 = span\{\overrightarrow{a_{i,\phi_j(g)}}, \overrightarrow{a_{j,\phi_j(g)}}\} \cap P_{\phi_j(g)}$，则 $\{V_k : k = 1,2,3,4\}$ 在 M 中实际上粘合成一个闭的 D^2，记为 D^2_f，且 D^2_f 的边界落在 M 的 1-skelton 中. 对应的二维 cell $e^2_f = (D^2_f)^\circ$. 这样就得到 2-skelton $M[2] = M[1] \cup \{e^2_f\}$.

依次进行下去，我们可以在 Q 的余 k 维面 $f^k_l = F_{i_1,g} \cap F_{i_2,g} \cap \cdots \cap F_{i_k,g}$ 处可构造 M 的 $k{-}cells$. 我们可以类似取 $V_l = span\{a_{i_1,g}, a_{i_2,g}, \cdots, a_{i_k,g}\} \cap P_g, l = 1,2,\cdots,2^k$，它们在 M 中粘成一个 k 维闭圆盘，记为 D^k，则 ∂D^k 落在 $M[k-1]$ 中，且 D^k 对应 M 的 k-cell 可以为

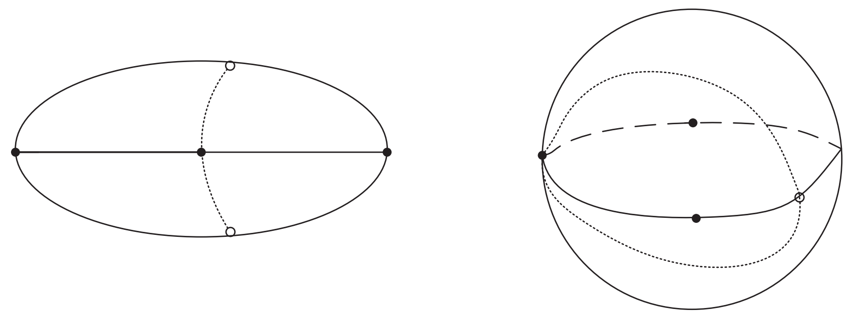
$$e^k \cong (D^k)^\circ = \left(\bigcup_{\{l=1,2,\cdots,2^k\}} V_l \right)^\circ .$$

最终我们可以在 Q 的顶点处构造 M 的 h_0 个 $n-cells$.

注 在上述构造中，若点 $p_0 \in F_{i,g}$，则 $a_{i,g}$ 可能包含在 $F_{i,g}$ 中，此时我们的构造方法依然适应，且 facet $F_{i,g}$ 对应的 $x_{i,g}$ 在 Q 中与点道路同伦.

事实上，对于具有 facets pair 结构的任意拓扑流形都可类似构造其胞腔结构. 如我们考虑

例 4 我们将三角形沿着他们对应的边粘和得到一个 S^2



按照上面步骤，我们可以得到 S^2 的一个胞腔分解 $S^2 = e_0 \cup e^1 \cup e^2_1 \cup e^2_2$

2.2 Calculation and Example

在这种胞腔结构下，我们可以得到 $\pi_1(M)$ 的一个比较简洁的群表示. 下面我们分析 M 的基本群. small cover 的基本群 $\pi_1(M)$ 的生成元可取为 facets 对应的有向闭路 $\{x_{i,g}\}$. $\pi_1(M)$ 的关系由二维胞腔及配对关系决定. 对任意 facet pair $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$ 对应一对互逆的生成元 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$，即配对关系为 $x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1$. 对于任意余二维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g} (\neq \varnothing) \subset Q$，由 f 确定的二维胞腔 e_f 决定一个关系 $r_f = \partial D_f^2 = x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)} = 1$，即 $x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = (x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)})^{-1}$
$= (x_{j,\phi_j(g)})^{-1}(x_{i,\phi_i\phi_j(g)})^{-1} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}$. 从而我们得到 $\pi_1(M)$ 的一个群表示.

$$\begin{aligned}\pi_1(M) = \langle x_{i,g}, i = 1, 2, \cdots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n : x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g;\\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}, \forall f = F_{i,g} \cap F_{j,g} \neq \varnothing\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i)$

我们记 $\mathcal{F}_1(Q)$ 为 Q 的内 facets 集; 记 $\mathcal{F}_2(Q)$ 为 Q 的内 facets 集附近的 facets 集，即 $\mathcal{F}_2(Q) = \{F \in \mathcal{F}(Q) \cap \partial Q : \exists G \in \mathcal{F}_1(Q), st.\ F \cap G \neq \varnothing\}$; 记 $\mathcal{F}_3(Q)$ 为 Q 外 facets 集剩余的 facets 集. 则我们有下面结论.

引理 2.1 $\forall F_i \in \mathcal{F}(P)$ 固定，则 $\pi^{-1}(F_i) = \{F_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 对应的生成元 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是彼此相关的. 特别地，当 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_1(Q)$ 时，$x_{i,g} = 1$;

当 $F_{i,g_1}, F_{i,g_2} \in \mathcal{F}_2(Q)$ 时，若 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} \neq \varnothing$，则 $x_{i,g_1} = x_{i,g_2}$，否则 $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

进一步，设 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 为 Q 中任意一个固定的余二维面. 当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 都属于 $\mathcal{F}_1(Q)$，即 f 为内面时，f 对应的关系为 1；当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 分别属于 $\mathcal{F}_2(Q)$ 和 $\mathcal{F}_1(Q)$ 时，f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$.

证明： 若 $F_{i,g}$ 为内 facets，则 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 包含在 Q 的内部，可缩为点道路，故 $x_{i,g} = 1$. 对于内余 2 维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 确定的关系，为内生成元的组合，故也是平凡的. 若 $F_{i,g}, F_{j,g}$ 分别为外面和内面，不妨设 $F_{i,g}$ 为外面，$F_{j,g}$ 为内面，则 $x_{j,g} = x_{j,\phi_i(g)} = 1$，所以 f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$. 即内面附近的且相交为余二维面 f 的 facets 对应的生成元是彼此相关的. 又因为每对 facets pair 对应的生成元互为逆元，所以当 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} = \varnothing$ 时，$x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

最后，我们考虑 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_3(Q)$ 的情况. 我们不妨固定 $F_{i,1} \in \pi^{-1}(F_i)$，对应的生成元为 $x_{i,1}$. 首先它的配对 facets 对应的生成元 $x_{i,\phi_i(1)} = (x_{i,1})^{-1}$. 由于与 $F_{i,1}$ 相交的 facets 都在 P_1 中，所以任意 $f = F_{i,1} \cap F_{j,1} \neq \varnothing$ 对应的关系为 $x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)} = x_{j,1}x_{i,\phi_j(1)}$，即 $x_{i,\phi_j(1)} = x_{i,\lambda(F_j)} = (x_{j,1})^{-1}x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)}$. 然后，我们对 $F_{i,\phi_j(1)}$ 进行上面的讨论. 所以 $\forall g \in \langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\}\rangle$，$x_{i,g}$ 都与 $x_{i,1}$ 相关，其中 $j \in \{j : F_j \cap F_i \neq \varnothing\}$. 我们仅考虑 F_i 一个顶点处的染色，我们知 $\langle\{\phi_j(1)\}\rangle \cong \mathbb{Z}_2^n / \langle\phi_i(1)\rangle$. 所以 $\langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\}\rangle \cong \mathbb{Z}_2^n$，这就证明了所有的 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是相关的. $\square$

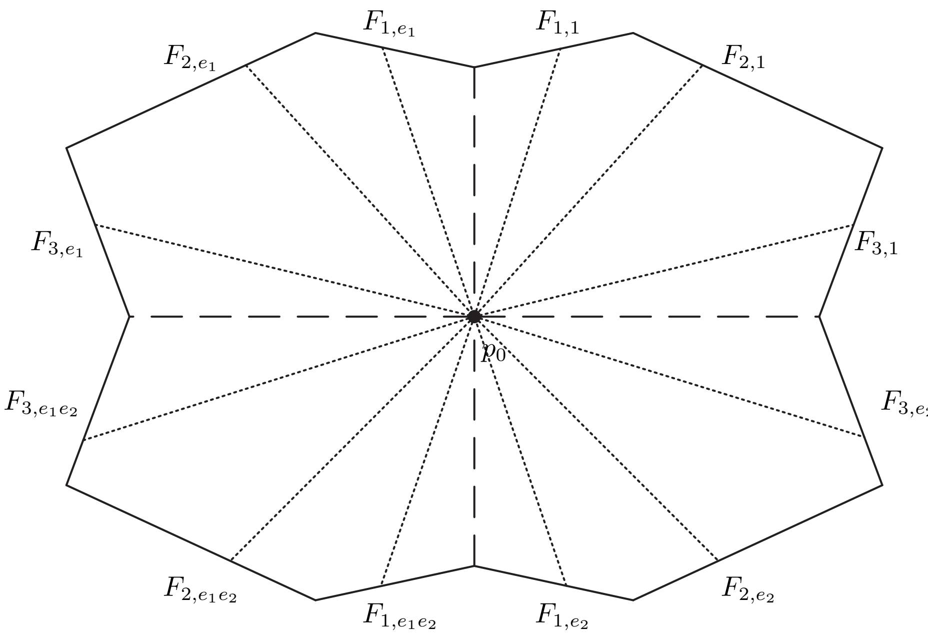
注 1、注意这里不排除 $F_{i,g} \cap F_{i,\phi_j(g)}, F_{i,g} \cap F_{i,\phi_i\phi_j(g)}$ 都为 Q 中非空的余二维面的情况，此时 $(x_{i,\phi_j(g)})^{-1} = x_{i,\phi_i\phi_j(g)} = x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$，i.e. $(x_{i,\phi_j(g)})^2 = 1$. 从而 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 为 $\pi_1(M)$ 中的相等的二阶生成元.

2、Davis-Januszkiewicz [5] theroem 3.1 中指出 small cover Mod 2 Betti 数 $b_i(M) = h_i(P)$（这里 h_i 定义中 f_k 表示 P 中余 $k+1$ 维面的个数）. $b_1(M) = h_i(P) = m - n$，即在 perfect 意义上的胞腔结构得到基本群生成元个数为 $m-n$ 个. 在这里所有外 facets 决定的生成元实际上也是 $m-n$ 个. 并且是 $\pi_1(M)$ 最少生成元个数（待证）.

猜想： P 中存在 Δ^2 面当且仅当 $\pi_1(M)$ 中有二阶元.（必要性易证）

在下面例子中，我们只取每个 facets pair 中的其中一个 facets 对应的闭路作为基本群的生成元.

例 5 P 为五边形时，$\mathcal{F}$ 上的染色依次取为 $\{e_2, e_1e_2, e_1, e_2, e_1\}$，$Q$ 可视为 12 边形，对应 6 对外 facets，4 组余二维外面。



Q 中的 facets pair 有 $\{F_{2,e_1}, F_{2,e_2}\}, \{F_{1,e_1}, F_{1,e_1e_2}\}, \{F_{1,1}, F_{1,e_2}\}, \{F_{2,1}, F_{2,e_1e_2}\}$，$\{F_{3,1}, F_{3,e_1}\}$，$\{F_{3,e_2}, F_{3,e_1e_2}\}$（内部 facets pair 对应平凡生成元，我们暂不考虑）. 给所有道路一个指向 p_0 的方向，不妨设 p_0 为基本群基点，取生成元为

$$\begin{cases} x_{2,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_2}})^{-1} \\ x_{1,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{1,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_2}})^{-1} \\ x_{2,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{3,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1}})^{-1} \\ x_{3,e_2} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,e_2}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1e_2}})^{-1} \end{cases}$$

在余 2 维面 p_1, p_2, p_3, p_4 处确定四组关系：

在 p_1 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1} = x_{1,e_1}$;

在 p_2 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1}x_{2,e_2} = x_{2,1}x_{1,e_1e_2}$，即 $x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1} = x_{2,1}(x_{1,e_1})^{-1}$;

在 p_3 处胞腔对应的关系为 $x_{2,1}x_{3,e_1e_2} = x_{3,1}x_{2,e_1}$，即 $x_{2,1}(x_{3,e_2})^{-1} = x_{3,1}x_{2,e_1}$;

在 p_4 处胞腔对应的关系为 $x_{3,1} = x_{3,e_2}$.

从而

$$
\begin{aligned}
\pi_1(M) = \langle x_{2,e_1}, x_{1,e_1}, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,e_2} | x_{1,1}(x_{1,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{3,e_2})^{-1}, \\
x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1}x_{2,e_1}\rangle \quad (4) \\
\cong \langle x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1} | x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1}\rangle
\end{aligned}
$$

即 $\pi_1(M) \cong \langle x, y, z | xy^{-1}xzy^{-1}z\rangle$

2.3 Connection with Group of Deck Transformation

设 $\pi : M \longrightarrow P$ 为单多面体 P 上的 small cover. P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$. 下面我们将构造 small cover $\pi : M \longrightarrow P$ 的（万有）覆叠空间

$$\mathcal{M} = Q \times \pi_1(M)/\sim \tag{5}$$

(Q, ν_1) 的外 facet F_{i,g_1} 与 (Q, ν_2) 的外 facet F_{j,g_2} 粘当且仅当 $i = j$, $g_1(g_2)^{-1} = \lambda(F_i)$, $\nu_1(\nu_2)^{-1} = x_{i,g_1}$（或者等价的 $\nu_2(\nu_1)^{-1} = x_{i,g_2}$），其中 ν_1，$\nu_2 \in \pi_1(M)$，Q 为上文构造的多面体. 下面为记号方便，我们把 (Q, ν) 简记为 Q_ν，Q_ν 的 facet $F_{i,g}$ 记为 $F^{\nu}_{i,g}$.

下面我们将说明 $\mathcal{M}$ 实际上只与单多面体 P 及 P 的面结构有关.

我们首先定义由 P 的面结构决定的 *right-angle Coxeter group* W_P 如下:

$$W_P = \langle F_1, \cdots, F_m : F_i^2 = 1; (F_iF_j)^2 = 1, \forall F_i, F_j \in \mathcal{F}(P), F_i \cap F_j \neq \varnothing\rangle$$

Davis-Januszkiewicz [5] 中构造了

$$\mathcal{L} = (P \times W_P)/\sim \tag{6}$$

其中 $(x_1, g_1) \sim (x_2, g_2)$ 当且仅当 $x_1 = x_2$，$g_1(g_2)^{-1} \in \langle F : x \in F,\ F \in \mathcal{F}(P)\rangle$. 且由 Davis [3]（Theorem 10.1 and 13.5）知 $\mathcal{L}$ 为单连通的.

设 $\widetilde{\lambda} : \mathbb{Z}_2^m \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 为 $\mathcal{F}(P)$ 上特征映射诱导的群同态，定义映射 ψ 为投射 $W \longrightarrow W^{ab} \cong \mathbb{Z}_2^m$ 和 $\widetilde{\lambda}$ 的复合.

引理 2.2 设 $\pi : M \longrightarrow P$ 为单多面体 P 上的 *small cover*，则有群短正合列

$$1 \xrightarrow{\beta} \pi_1(M) \longrightarrow W_P \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1$$

其中 $\pi_1(M)\cong\ker\psi$ 为 W_P 的子群，$W_P=\pi_1(M)\rtimes\mathbb{Z}_2^n$

证:在 Davis-Januszkiewicz [5] 中，我们知道有上面正合列成立，且 $\pi_1(M)\cong\ker\psi$ 为 W_P 的正规子群. 不妨设 p_0 附近的 facets 为 $\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$，$\lambda(F_i)=e_i$，考虑 $\gamma:\mathbb{Z}_2^n\longrightarrow W_P,\gamma(e_i)=F_i,i=1,2,\cdots,n$，则 $\psi\circ\gamma=id_{\mathbb{Z}_2^n}$，即上面短正合列是可裂的，故 $W_P=\pi_1(M)\rtimes\mathbb{Z}_2^n$. □

引理 2.3 $\mathcal{L}\cong\mathcal{M}$

证:由 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{M}$ 的构造中，它们局部都是通过单多面体 P 的顶点附近的 facets 做反射得到的，所以我们只需要证明 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{M}$ 中的 P 存在着某种 index 对应即可. $W_P=\pi_1(M)\rtimes\mathbb{Z}_2^n$，所以任意 $\omega\in W_P$，存在唯一的 $\nu\in\pi_1(M),g\in\mathbb{Z}_2^n$，使得 $\omega=\nu g$. 为了避免混淆，我们把 W_P 的第 i 个生成元 F_i 记为 ω_i. 我们下面仅考虑第 $1=1'\cdot 1''$（分别为 $W_P,\pi_1(M),\mathbb{Z}_2^n$ 中的单位元）个多面体 P 的第 i 个面 F_i 的情况，在 $\mathcal{L}$ 中，它与第 ω_i 个 P 的面 F_i 粘，不妨设 $\omega_i=\nu_1 g_1$，其中 $\nu_1\in\pi_1(M),g_1\in\mathbb{Z}_2^n$；另一方面在 $\mathcal{M}$ 中，$F_{i,1''}^{1'}$ 与 $F_{i,\lambda(F_i)}^{x_{i,1}}$ 配对粘在一起. 由于 P 相对于 $\mathcal{M}$ 的覆叠变换群仍为面生成的 W_P，所以 $x_{i,1}\lambda(F_i)=\omega_i$，由于 $\omega_i=\nu_1 g_1$ 是唯一的，所以 $x_{i,1}=\nu_1,\lambda(F_i)=g_1$，即证. 其他位置的 P 类似，所以 $\mathcal{M},\mathcal{L}$ 局部构造一致，从而为同一个空间。 □

注 在我们的胞腔构造过程中，设 $\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$ 为顶点 p_0 附近的 n 个 facets，$\lambda(F_i)=e_i,i=1,2,\cdots,n$，从而我们可以把 2^n 个 P 的 copy 在 p_0 处粘在一起得到 Q，即取 $\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$ 为 Q 的内 facets，最后得到基本群的表达形式如(3). 这在引理 2.2 的短正合列中，等价于 $\psi(F_i)=\lambda(F_i)=e_i,i=1,2,\cdots,n$. $\psi(F_k)=\lambda(F_k)=\prod\delta_i e_i=\prod\delta_i\lambda(F_i)=\prod\delta_i\psi(F_i)$，所以 $\psi(F_k\left(\prod F_i^{\delta_i}\right)^{-1})=1$，其中 $k=1,2,\cdots,m$；$i=1,2,\cdots,n$. $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 在 M 中对应的闭路是可缩的，所以 F_k 对应的闭路是 $\ker\psi$ 的生成元. 我们设 $\varphi:\mathbb{Z}_2^n\longrightarrow Aut(\pi_1(M))$ via $\varphi(g)(h)=\beta^{-1}(\gamma(g)\beta(h)\gamma(g^{-1}))=\beta^{-1}(\gamma(g)\beta(h)\gamma(g))$，其中 $g\in\mathbb{Z}_2^n,h\in\pi_1(M)$. 我们可以规定 W_P 的生成元 F_i 可以对应 $(x_{i,1},\ \lambda(F_i))$，一般地 $F_iF_j=(x_{i,1},\lambda(F_i))\cdot(x_{j,1},\lambda(F_j))=(x_{i,1}\varphi_{\lambda(F_i)}(x_{j,1}),\lambda(F_i)\lambda(F_j))$. 特别的若 F_i 为内 facet，则 $F_iF_j=(x_{j,e_i},\lambda(F_i)\lambda(F_j))$.

接下来我们将证明 $\mathcal{M}$ 为 M 的万有覆叠空间. $\mathcal{M}$ 到 M 有一个自然

的投射，我们记为 $\Pi : \mathcal{M} \longrightarrow M$.

$$
\begin{tikzcd}
Q \times \pi_1(M) \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "\widetilde{\Pi}"'] & Q \times \pi_1(M)/\sim = \mathcal{M} \arrow[d, "\Pi"'] \\
Q \arrow[r, "q"] & Q/\sim = M
\end{tikzcd}
$$

其中 q, q' 是粘合 Q 和 Q 的 copy 的 facets 决定的商映射.

下面我们说明，small cover 中的任意一个点在某种意义上是地位是一样的.

引理 2.4 *设 $\pi : M \longrightarrow P$ 为一个固定的 small cover，则 $\forall x \in M$，M 可以在点 x 处分解成 2^n 个同构于 P 的多面体.*

证明：我们考虑商映射 $q : Q \longrightarrow M$，这里不妨设 Q 是凸的. 若 $q^{-1}(x) \subset Q^\circ$，则 $q^{-1}(x)$ 为单元集，不妨设 $y = q^{-1}(x)$. 我们在 Q 的内部将点 p_0 连同它附近的 Q 的内面线性地拉到到点 x 处，则此时 Q 可以看为点 x 附近的 2^n 个 P 的 copy 粘成的.

若 $q^{-1}(x) \subset \partial Q$，任取 $y \in q^{-1}(x)$，我们记 $f(y)$ 为 $out(Q)$ 中包含 y 为相对内点的最小的面，不妨设 $f(y)$ 为余 k 维的，则所有的 $\{f(y) : y \in q^{-1}(x)\}$ 都是 identity，且 $|(q')^{-1}(x)| = 2^k$. 事实上，商映射 q 对 ∂Q 上点的局部作用就是将 $q^{-1}(x)$ 中的点连同包含这些点为相对内点的最小的面粘在一起. 接下来我们将 Q 重新分解成 P 的 copy，并将它们在 $f(y)$ 的某个顶点处粘在一起，得到一个大的多面体，记为 Q'，将 Q' 的外 facets 按照染色信息成对粘在一起，得到同样的 small cover M. 此时 x 在 Q' 中的原象位于 Q' 的内部，进行上面讨论. □

定理 2.5 *$\mathcal{M}$ 为 M 的万有覆叠空间.*

证明：根据上面引理，我们不妨考虑点 $x = \pi^{-1}(p_0) \in M$，则 $q^{-1}(x) \subset Q^\circ$ 为单元集，我们可以取包含 $q^{-1}(x)$ 的 n 维实心开球 U，满足 $U \subset Q^\circ$. 则 $q(U)$ 为 M 中包含 x 的开邻域，与 U 为 identity. 且 $(\widetilde{\Pi})^{-1}(U)$ 为 $|\pi_1(M)|$ 个互不相交开球的并，即

$$(\widetilde{\Pi})^{-1}(U) = \bigsqcup_{\nu \in \pi_1(M)} V_\nu$$

其中每个 $V_\nu \subset (Q_\nu)^\circ$ 与 U 为 identity. 则

$$(\Pi)^{-1}(q(U)) = q'((\widetilde{\Pi})^{-1}(U)) = \bigsqcup_{\nu \in \pi_1(M)} q'(V_\nu)$$

为一族互不相交的开集，且 Π 限制在每一个 $q'(V_\nu)$ 上都为到 $q(U)$ 的 identity.

当 $q^{-1}(x) \subset \partial Q$ 时，我们将 Q 换成 Q'，得到的 $\mathcal{M}$ 实际上是不变的，这是因为 $\mathcal{M}$ 是由多面体 P 决定的. 所以我们可以类似进行上面的操作.

故 $\mathcal{M}$ 为 M 的覆叠空间. 又因为 $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}$ 为单连通的，故为万有覆叠空间. □

设 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 为上面覆叠空间 $\Pi : \mathcal{M} \longrightarrow M$ 的覆叠变换群. 由于 $\mathcal{M}$ 是单连通的，所以 $\pi_1(M) \cong D(\mathcal{M}, \Pi, M)$. 下面我们根据上面构造的 cell structure（的 2-skeleton）来刻画 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的生成元.

对于 Q 中的每个 facet $F_{i,g}$，我们定义 $\mathcal{M}$ 上的**面映射** $\Gamma_{i,g} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. $\forall x \in \mathcal{M}$，存在某个 Q_{ν_1}，使得 $x \in Q_{\nu_1}$，由 $\mathcal{M}$ 的构造知存在唯一的 Q_{ν_2}，使得 $F_{i,g} \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$，我们定义 $\Gamma_{i,g}(x)$ 为 $\Pi^{-1}(\Pi(x)) \cap Q_{\nu_2}$ 中的唯一的一点，这样定义的 $\Gamma_{j,g'}$ 显然是 well-defined 的. $\Gamma_{i,g}$ 的连续性也是显然的.

类似引理 2.1容易验证

引理 2.6 *1、$\Gamma_{i,g}\Gamma_{i,\phi_i(g)}(x) = x$.*
2、若存在 $F_{j,g'}(\neq F_{i,g}) \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$，则 $\Gamma_{j,g'}(x) = \Gamma_{i,g}(x)$.
3、若 facet $F_{i,g} \in in(Q)$，此时 $Q_{\nu_1} = Q_{\nu_2}, \Gamma_{i,g} = id$.

进一步我们有

引理 2.7 *面映射 $\Gamma_{i,g} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}$ 上的覆叠变换.*

命题 2.8 *$D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 可以由面映射 $\{\Gamma_{i,g}\}$ 来刻画.*

证明: $\mathcal{M}$ 为单连通的，此时 $\pi_1(M, p_0)$ 到 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的满同态实际上为群同构，它将 $[x_{i,g}] \in \pi_1(M, p_0)$ 映为 $\Gamma_{i,g}$. 我们不妨取点 $x = \pi^{-1}(p_0) \in M$，则 $\{\Pi^{-1}(x)\}$ 实际上是每个 Q 中 p_0 的 copy. 我们取第 1 个 Q_1 中的 p_0 的 copy，记为 y_0，其中 1 为 $\pi_1(M)$ 的单位元. 所以我们只需要验证 $\Gamma_{i,g}(y_0) = \widetilde{x_{i,g}}(1)$，其中 $\widetilde{x_{i,g}}$ 是 $x_{i,g}$ 在 $\mathcal{M}$ 中的一段提升. $\Gamma_{i,g}(y_0)$ 实际上是 $Q_{x_{i,g}}$ 中的 p_0 的 copy，即 $\widetilde{x_{i,g}}(1)$. 所以 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的生成元可以自然的选为 Q 的 facets 对应的面映射. □

综上，我们有下面结论：

定理 2.9 *$\Pi : \mathcal{M} \longrightarrow M$ 为 M 的万有覆叠空间，复叠变换群 $D(\mathcal{L}, \Pi, M) \cong \pi_1(M)$ 可以由 Q 的 facets 对应的面映射生成.*

2.4 Else

最后我们解释一下我们这种胞腔结构的自然. 我们考虑 $M[2]$，它的 0-skeleton 只有一个点 p_0; 它的 1-skeleton 是 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 的一点并，对应 $\pi_1(M)$ 的生成元; 它的每一个二维胞腔对应 $\pi_1(M)$ 的一个关系. 即 $M[2]$ 是 $\pi_1(M, p_0)$ 的 *presentation complex*. 进一步，我们将 M 的这种胞腔结构提升到它的万有覆叠空间 $\mathcal{M}$ 中，则 $\mathcal{M}[2]$ 实际上是 $\pi_1(M, p_0)$ 的 *Cayley 2-complex*.

事实上，将单多面体 P 视为一个 right angle orbifold，则 small cover $\pi : M \longrightarrow P$ 为 P 上的 covering orbifold. 由于 M 为一个闭流形，P 为一个 good orbifod，则 P 的单连通的 covering orbifold $\mathcal{M}$ 为它的万有 covering orbifold. 进一步，covering orbifold $\tau : \mathcal{M} \longrightarrow P$ 为 covering space $\Pi : \mathcal{M} \longrightarrow M$ 和 small cover $\pi : M \longrightarrow P$ 的复合. 它们的覆叠变换群分别为 $W_P, \pi_1(M)$ 和 $\mathbb{Z}_2^n$.（Davis-Januszkiewicz [5]）

我们定义 π_1^{orb} 为 universal orbifold cover $\tau : \mathcal{M} \longrightarrow P$ 的覆叠变换群. 即 $\pi_1^{orb}(P) = W_P$，此时 $\pi_1^{orb}(P)$ 和 $\pi_1(M)$ 存在自然的子群关系. 我们对单多面体 P 做类似的 cubical 分解，则某种意义上，$P[2]$ 为 W_P 的 presentation complex. 把这种分解提升到 $\mathcal{M}$ 中，则 [2] 实际上是 W_P 的一个 Cayley 2-complex. （Davis [4]）

我们设 []

3 Application

设 $\mathfrak{F}$ 为单多面体 P 的任意一个 k-face. 则它依然是单凸的，且 $\mathcal{F}(\mathfrak{F})$ 可以继承 $\mathcal{F}(P)$ 上的染色，进而可以构造 $\mathfrak{F}$ 上的 small cover $\pi_{\mathfrak{F}} : M_{\mathfrak{F}} \longrightarrow \mathfrak{F}$. 在 Davis [5] Lemma 1.3 中，我们知道 $M_{\mathfrak{F}}$ 为 M 的 k 维连通子流形. 在这一节中，我们利用上面的胞腔结构，考虑 $\pi_1(M_{\mathfrak{F}})$ 与 $\pi_1(M)$ 之间的关系. 设 $\rho : \mathfrak{F} \longrightarrow P$ 为面包含映射. p_0 为 $\mathfrak{F}$ 的一个顶点. $\rho_* : \pi_1(M_F) \longrightarrow \pi_1(M)$ 为 ρ 诱导的基本群同态.

引理 3.1 *设 $\pi_1(M, p_0) = \langle G : R \rangle$，$\pi_1(M_{\mathfrak{F}}, p_0) = \langle G_{\mathfrak{F}} : R_{\mathfrak{F}} \rangle$，则 $G_{\mathfrak{F}} \subset G, R_{\mathfrak{F}} \subset R$，且 $\rho_*|_{G_{\mathfrak{F}}} = id$.*

证明： 不妨取 F 为 P 的第一个的 facet，p_0 为 F 的一个顶点，自然也

是 P 的一个顶点，我们分别将 $\{(F,g)\}_{g\in\mathbb{Z}_2^{n-1}}$ 与 $\{(P,g)\}_{g\in\mathbb{Z}_2^n}$ 在点 p_0 处粘合在一起，分别得到多面体 Q 与 $Q_F = F\times\mathbb{Z}_2^{n-1}/\sim$. 则 $out(Q_F)\subset out(Q), in(Q_F)\subset in(Q)$. 设 $f_i = F_i\cap F\neq\varnothing$ 为 F 的一个任意的 facet，$f_i\cap f_j = F_i\cap F_j\cap F\neq\varnothing$ 为 F 的一个任意的余 2 维面. 设 $f_{i,g} = F_{i,g}\cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)}\cap F_{1,\phi_i(g)}$ 为 Q_F 中的任意一个 facet，其中 $\{F_{1,g}, F_{1,\phi_i(g)}\}$ 为 $\{P_g : g\in\mathbb{Z}_2^n\}$ 中的 facets-pair. 由引理 2.1 ，我们知道 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路与 $F_{i,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)}$ 在 Q 中对应的有向闭路 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$ 是定点同伦的，所以我们不妨记 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路为 $x_{i,g}$. 对于 Q_F 中的任意一个余 2 维面 $f_{i,g}\cap f_{j,g} = F_{i,g}\cap F_{j,g}\cap F_{1,g}\neq\varnothing$ 所对应的二维胞腔 D_l 与 $F_{i,g}\cap F_{j,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)}\cap F_{j,\phi_i(g)}$ 所对应的二维胞腔 $D_g, D_{\phi_i(g)}$ 是也是定点同伦的，所以在 $\pi_1(M_F)$ 中，$f_{i,g}\cap f_{j,g}$ 决定的关系与 $F_{i,g}\cap F_{j,g}(\cap F_{1,g}\neq\varnothing)$ 或者 $F_{i,\phi_i(g)}\cap F_{j,\phi_i(g)}(\cap F_{1,\phi_i(g)}\neq\varnothing)$ 在 $\pi_1(M)$ 中决定的关系对应。所以 M_F 的基本群为

$$\begin{aligned}\pi_1(M_F) = \langle x_{i,g}, i=1,2,\cdots,m', g\in\mathbb{Z}_2^{n-1} : x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g \\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)} = 1, \forall f_{i,g}\cap f_{j,g}\neq\varnothing\rangle\end{aligned} \quad (7)$$

其中 $f_{i,g}\cap f_{j,g} = F_{i,g}\cap F_{j,g}\cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)}\cap F_{j,\phi_i(g)}\cap F_{1,\phi_i(g)}\neq\varnothing$. 即形式上 $\pi_1(M_F)$ 的生成元集 G_F 和关系集 R_F 都可为 $\pi_1(M)$ 的生成元集 G 和关系集 R 的子集. 进一步，这种关系是由包含映射 $\rho : F\longrightarrow P$ 所诱导的，即对 $\rho_* : \pi_1(M_F)\longrightarrow\pi_1(M)$ 有 $\rho_*|_{G_F} = id$.

进一步对一般的 k 维面 $\mathfrak{F}$，我们不断进行上面的操作，则 $\pi_1(M_{\mathfrak{F}})$ 和 $\pi_1(M)$ 都有上面的关系. □

可以看出一般 ρ_* 不一定是单同态. 如下面的例子.

例 6 取 $P = I\times\triangle^2$ 为三棱柱，共有 5 个 facets $\{F_i\}_{i=1,2,3,4,5}$，我们给上下底面 F_1, F_2 染色 e_1，侧面 F_3, F_4, F_5 染色为 $e_2, e_3, e_1e_2e_3$，由 P 的 h-vector 知，$\pi_1(M)$ 有两个生成元和两个关系，它的任意一个侧面上的 small cover 基本群有两个生成元，一个关系.

即 $\pi_1(M) = \langle x, y : x^2 = yxyx^{-1} = 1\rangle, \pi_1(M_F) = \langle x, y : yxyx^{-1} = 1\rangle$

$$\rho_* : \pi_1(M_F)\longrightarrow\pi_1(M)$$

满足 $\rho_*(x) = x, \rho_*(y) = y$，但 ρ_* 非单.

定义 2 我们称一个单纯复形 K 为 *flag* 的，如果 K 中两两相连的顶点集张成 K 中的一个单形. 等价地，K 中不含维数 ≥ 2 的空单形.

我们称一个单多面体 P 为 flag 的，如果 $K = \partial P$ 为 flag 的. 等价地，P 中两两相交的面必有公共的交.

例 7 1、一个 m 边形为 flag 的，当且仅当 $m > 3$.

2、flag 多面体的面是 flag 的.

设 F 为单多面体 P 的第 1 个 facet，并取定 F 的一个顶点 p_0. 我们记 W_F, W_P 分别为 F 和 P 的 Coxeter group，$\pi_F : M_F \longrightarrow F$ 和 $\pi_P : M \longrightarrow P$ 分别为 F 和 P 上的 small cover. 设 $\rho : F \longrightarrow P$ 为面包含映射，$\beta : W_F \longrightarrow W_P$ 为 ρ 诱导的 Coxeter group 之间的群同态，$\rho_* : \pi_1(M_F, p_0) \longrightarrow \pi_1(M, p_0)$ 为 ρ 诱导的 small cover 基本群之间的群同态. 另外我们把 W_P 的生成元集 $\mathcal{F}(P)$ 记为 $\widetilde{G}_P$，关系集记为 $\widetilde{R}_P$；把 W_F 的生成元集 $\mathcal{F}(F)$ 记为 $\widetilde{G}_F$，关系集记为 $\widetilde{R}_F$. 取 p_0 为基点，按照引理中的方式，分别得到 $\pi_1(W_F, p_0)$ 和 $\pi_1(W_P, p_0)$ 的群表示，分别记它们生成元集为 G_F, G_P，关系集为 R_F, R_P. 下面证明当 P 为 flag 时，β 和 ρ_* 都是单的.

引理 3.2 $\widetilde{G}_F \subset \widetilde{G}_P$，$\widetilde{R}_F \subset \widetilde{R}_P$，进一步 $\beta|_{\widetilde{G}_F} = id$.

证明：类似上面引理的证明.

引理 3.3 当 P 为 *flag* 时，$\beta : W_F \longrightarrow W_P$ 为单的.

证明：当单多面体 P 为 flag 时，若 $F \cap F_i \neq \varnothing, F \cap F_j \neq \varnothing$，则 $F \cap F_i \cap F_j \neq \varnothing$，即 W_P 中 F 附近的任意余二维面 $f \subset P$ 对应的关系一定可以继承到 W_F 中. 这保证了下面这个态射的定义合理性. 我们构造群态射

$$\eta_* : W_P \longrightarrow W_F \tag{8}$$

满足 $\eta_*|_{\widetilde{G}_P - \widetilde{G}_F} = 1$，$\eta_*|_{\widetilde{G}_F} = id$.

η_* 为一个群同态显然. 下面我们验证 η_* 定义的合理性. 我们考虑 W_P 中的关系在 η_* 下的像是否为 W_F 的单位元. P 中与 F 相交的 facets 集 (包含 F)，我们记为 $\mathcal{F}_1$，与 $\mathcal{F}_1$ 中 facets 相交且不包含 F 的 facets 集，我们记为 $\mathcal{F}_2$，剩余的 facets 我们记为 $\mathcal{F}_3$. 则 η_* 将 $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ 中 facets 对应的生成元映为 1. 对于 W_P 的关系 $(F_i)^2 = 1$，当 $F_i \in \mathcal{F}_1$ 时，$\eta_*(F_iF_i) = (F_i)^2 = 1$；当 $F_i \in \mathcal{F}(F) - \mathcal{F}_1$ 时，$\eta_*(F_iF_i) = 1$. 对于 Q 中的任意余二位面 $f = F_i \cap F_j$，若 F_i, F_j 都属于 $\mathcal{F}_1$，则由 P 的 flag 性质知 $f \cap F \neq \varnothing$，从而 η_* 将 $f \subset P$ 所

对应的关系映为 W_F 的一个关系；若 F_i, F_j 都不属于 $\mathcal{F}_1$，则对应关系在 η_* 下的像为 1；若 F_i, F_j 分别属于 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$，不妨设 $F_i \subset \mathcal{F}_1, F_j \subset \mathcal{F}_2$，设这个关系为 $(F_iF_j)^2 = 1$，则 $\eta_*(F_iF_jF_iF_j) = \eta_*(F_i)\eta_*(F_j)\eta_*(F_i)\eta_*(F_j) = (F_i)^2 = 1$. 所以对任意关系 $r \in W_P, \eta_*(r) \equiv 1$，即 η_* 为 well-defined.

最后容易验证 $\eta_*\beta = id : W_F \longrightarrow W_F$，即 β 为单的. $\square$

定理 3.4 *当多面体 P 为 flag 时，ρ_* 为单同态.*

证明： 考虑 pull back

$$\begin{tikzcd} M_F \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[d, "\pi_F"'] & M \arrow[d, "\pi_P"] \\ F \arrow[r, "\rho"] & P \end{tikzcd}$$

则

$$\begin{tikzcd} \pi_1(M_F) \arrow[r, "\rho_*"] \arrow[d, "(\pi_F)_*"'] & \pi_1(M) \arrow[d, "(\pi_P)_*"] \\ W_F \arrow[r, "\beta"] & W_P \end{tikzcd}$$

为交换的.

所以当 P 为 flag 时，β 为单的，所以 $\beta(\pi_F)_* = (\pi_P)_*\rho_*$ 为单的，从而 ρ_* 为单的. 这里的 ρ_* 即为面包含映射 ρ 所诱导的基本群同态. $\square$

对于单多面体 P 的任意 k 维面 $\mathfrak{F}$，设 $\rho : \mathfrak{F} \longrightarrow P$ 为面包含映射，则 ρ 可以分解为 facet 包含映射的复合，从而此时 ρ 诱导的基本群同态也为单的.

推论 1 *对于单多面体 P 的任意 k 维面 $\mathfrak{F}$，它的面包含映射诱导的基本群同态为单的.*

定义 3 我们称一个连通闭流形 M 为 aspherical 的，若 $\pi_k(M) = 0, k \geq 2$.

Borel conjecture 设 $f : M \longrightarrow N$ 为同伦等价，其中 M, N 为同维数闭的 aspherical 流形，则 f 同伦于一个同胚映射。

定理 3.5 **([6])** *Let M be a small cover of P. Then the following statements are equivalent.*

1、M is aspherical.

2、The boundary of P is dual to a flag complex.

3、The natural piecewise Euclidean metric on the dual cubical cellulation of M is nonpositively curved.

定理 3.6 **([8])** *Let $f : N \longrightarrow M$ be a homotopy equivalence between closed smooth manifolds such that M supports a non-positively curved Riemannian metric. Then N and M are stably homeomorphic; i.e.*

$$f \times id : N \times \mathbb{R}^{m+4} \longrightarrow M \times \mathbb{R}^{m+4} \tag{9}$$

is homotopic to a homeomorphism where $m = \dim M$.

上面定理说明，当流形 M 是一个 non-positively curved Riemannian 流形，且 $\dim(M) \neq 3, 4$，Borel conjecture 成立. 可以验证 small cover 为这样的闭流形.

推论 2 设 $n(> 4)$ 维闭流形 M, N 都为 *flag* 单多面体上的 *small cover*，若 $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$，则 M 和 N 是同胚的.

对于 3 维情况，在 [1] 中指出，Borel conjecture 对所有的三维流形都成立. 我们感兴趣的是 aspherical small cover M 是不是一个 Haken manifold

定义 4 A Haken 3-manifold is a compact 3-manifolds which are

(1) P^2-irreducible and

(2) sufficiently large – i.e. contain a properly embedded, 2-sided, incompressible surface.

命题 3.7 *P^2-irreducible M wtih $H_1(M)$ infinite is a Haken manifold.*

证明: 由 Hempel [10] Lemma 6.6 知 M 包含一个 properly embedded 2-sided, nonseparating incompressible surface S. □

引理 3.8 设 M 是 3 维 *flag* 多面体 P 上的一个 *small cover*，则 $H_1(M)$ 是 *infinite* 的.

证明： 由引理 3.1 知，$\rho_*|_{G_F} = id$，而 $G - G_F$ 与 G_F 是独立的，所以 $H_1(M_F) = \pi_1^{\mathrm{ab}}(M_F)$ 是 $H_1(M) = \pi_1^{\mathrm{ab}}(M)$ 的直和项. 又 P 为 flag 的，所以二维闭曲面 M_F 不是 $\mathbb{R}P^2$，故 $\mathbb{Z}$ 为 $H_1(M_F)$ 的直和项. 所以 $H_1(M)$ infinite.

推论 3 *Aspherical small covers are Haken manifolds.*

证明: 设 P 为三维单的 flag 多面体（不包含单形面），M 为 P 上的 small cover，M 是 aspherical 的. 由 Sphere Theorem，我们知道三维闭可定向流形是 aspherical 的，当且仅当它是 irreducible 和 π_1 infinite 的. 进一步为 P^2-irreducible，又 $H_1(M)$ 为 infinite 的，故 aspherical small cover M 为 Haken 流形. □

可定向 aspherical 流形为 irreducible 的，故为 prime 的，故同伦等价诱导同胚. 尽管 $\{M_F\}$ 中不一定存在 M 的 two-sided incompressible surface（考虑正十二面体上的 small cover），但 M_F 拥有许多好的性质，比如包含映射诱导的基本群同态为单的. 特别地，我们沿着 M_F 去切 M，这在我们构造的胞腔结构中，相当于把与 F 横截相交的那些一维闭路 $\{x\}$ 切开，或者给面 F 一个平凡的 color. 此时对应在我们上面构造的胞腔结构中，是把 facets 对应的闭路切开，从而这些闭路决定的生成元变为平凡元，基本群得到化简. 所以从这里我们猜测，类似于 Hierachy of Waldhausen 的操作对（高维）aspherical small cover 也是有效的. 这对高维 small cover 中的 borel 猜想的证明提供一种可行的 idea. 而且 Davis 等一些人已经在做了一些这方面的工作，比如对高维 Haken 流形的推广.

参考文献

[1] M. Aschenbrenner, S. Friedl and H. Wilton, 3-manifold groups, *Mathematics* (2013), 1-149

[2] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, Torus actions and their applications in topology and combinatorics, *University Lecture Series, 24. American Mathematical Society, Providence, RI,* (2002)

[3] M.W. Davis, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, *Ann. Math. (2)* 117 (1983), 293-325.

[4] M.W. Davis, Exotic aspherical manifolds, *Topology of high-dimensional manifolds.* (Trieste, 2001), 371-404.

[5] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, Convex polytopes, coxeter orbifolds and torus actions, *Duke Math. J.* 62 (1991), 417-451.

[6] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Nonpositive curvature of blow-ups, *Selecta Math.(N.S.)* 4 (1998), 491-547.

[7] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Fundamental groups of blow-ups, *Advances in mathematics.* 177 (2003), 115-179.

[8] F.T. Farrell, The Borel conjecture, *Topology of high-dimensional manifolds.* (Trieste, 2001), 225-298.

[9] A. Hatcher, Spaces of Incompressible Surfaces, *Mathematics.* (1999).

[10] J. Hempel, 3-manifolds, *Annals of Mathematics studies.* 86 (1978).

[11] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.* (2)87 (1968), 56-88.

[12] S. Kuroki, M. Masuda, and L. Yu, Small covers, infra-solvmanifolds and curvature, *Forum mathematicum.* 27(5)(2015), 2981-3004

[13] L. Yu, Crystallographic groups with cubic normal fundamental domain, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B39, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.* (2013), 233-244