

Fundamental Groups of Small Covers

1 Introduction

1.1 Small Cover

凸多面体 P 是指 \mathbb{R}^n 中非空有限多个点集的凸包, 或者等价的是 \mathbb{R}^n 中有限个半空间的有界交, 即

$$P = \text{conv}\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l_i, x \rangle \geq -a_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

其中 l_i 为 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的线性函数, $a_i \in \mathbb{R}$.

凸多面体的维数就是指凸包或者有界交的维数. 若无特殊说明, 本文中所考虑的多面体均指 \mathbb{R}^n 中的 n 维凸多面体, 记为 P . 我们把 P 的边界记为 K . 把 P 的内部记为 P° . 凸子集 $F \subset P$ 称为 P 的面, 若 F 是多面体 P 与某一个半空间 $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x \rangle \geq -a\}$ 的交, 且 $P^\circ \cap \partial V = \emptyset$. 子集 \emptyset 和 P 本身都为 P 的面, 称为平凡面; 其他的面称为真面. P 的 0 维面称为 P 的顶点, P 的 1 维面称为 P 的边, P 的 $n-1$ 维面称为 P 的 facet. 记 f_i 为 P 的 i 维面的个数, 称 $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ 为 P 的 f -vector. 取 $f_{-1} = 1$, 则 P 的 h -vector $\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ 由下面等式定义

$$h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1}$$

由 Dehn-Sommerville 关系知 $h_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \dots, n$, 为方便我们在本文中将 P 的 facets 的个数记为 $f_{n-1} = m$, 即 P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$.

我们称多面体 P 是单 (simple) 的, 若 P 的每个顶点恰好是 P 中 n 个 facets 的交, 等价地, 每个顶点处恰好有 n 条边. 单多面体中任意余维数为 k 的面 f 总可以 (唯一) 表示为 $f = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k$, 其中 F_1, F_2, \dots, F_k 为包含 f 的 facets.

取 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ 为二元乘法群或者模空间, \mathbb{Z}_2^n 表示它们的乘积, e_i 表示 \mathbb{Z}_2^n 第 i 个标准向量. 设 P 为 n 维单凸多面体, $\mathcal{F}(P)$ 为 P 的 facets 集, 对每一个 facet $F_i \in \mathcal{F}(P)$, 我们定义一个染色 $\lambda(F_i) \in \mathbb{Z}_2^n$, 使得对 P 的每一个顶点 $p = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$, 满足 $\text{span}\{\lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_n)\} \cong \mathbb{Z}_2^n$. 进一步我们称 $\lambda: \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 为下面将要构造的 small cover M 的示性函数. 需要注意的是, 下文出现的多面体指数之间的乘法, 均默认为群 \mathbb{Z}_2^n 中的乘法运算.

注 对于任意单凸多面体, 满足上面条件的染色不一定存在, 参考 Davis-Januszkiewicz [5]. *Nonexample 1.22 (Duals of cyclic polytope)*

现在我们定义单凸多面体 P 上的 small cover. 对任意点 $x \in P$, 记 $f(x)$ 为 P 中包含 x 为相对内点的唯一的面, 例如 x 为 P 内部的点时, 则 $f(x) = P$; x 为 P 的顶点时, 则 $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$, 其中 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 为包含点 x 的 n 个 facets. 不妨设 $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$ 为 P 的任意一个固定的余 k 维面, 记 $G_{f(x)} = \langle \lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_k) \rangle = \langle \lambda(F_i) : x \in F_i \rangle$. 则定义 small cover 为

$$M = (P \times \mathbb{Z}_2^n) / \sim \quad (1)$$

$(x, g) \sim (y, h)$ 当且仅当 $x = y, g^{-1}h \in G_{f(x)}$. 这里 $G_{f(x)} < \mathbb{Z}_2^n$ 实际上是点 x 处的 *isotopy subgroup*, i.e. $\{g \in \mathbb{Z}_2^n : gx = x\}$. 进一步, 设 $\pi: M \rightarrow P$ 为一个自然的投射.

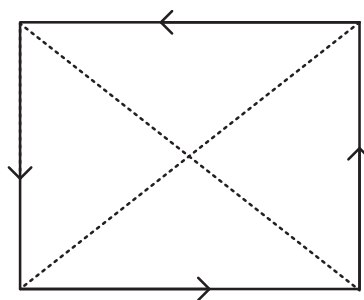
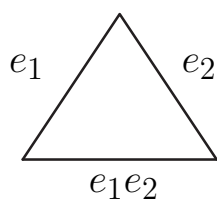
另外, 我们也可以比较直观的构造一个 small cover. 任取 P 的一个顶点 p_0 , 不妨记 p_0 附近的 facets 为 F_1, F_2, \dots, F_n , 且对应 facet 上的染色为 $\lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \dots, n$. 首先我们把 P 放到 \mathbb{R}^n 的第一卦限中, 使得 p_0 与原点重合, 第 i 个 facet F_i 落在 $x_i = 0$ 的坐标面上. 然后我们将 P 沿着坐标面反射, 得到原点附近的 P 的 2^n 个 copy, 我们把这 2^n 个 P 的 copy 组成的多面体记为 Q , p_0 自然的落在 Q 的内部. 我们给第 g 个坐标卦限的 copy 一个自然的标号 $g \in \mathbb{Z}_2^n$. 最后我们再将 Q 剩余的 facets 按照染色信息成对粘合起来, 具体第 g_1 个 P 的 copy 的 facet F_i 与第 g_2 个 P 的 facet F_j 粘, 当且仅当 $i = j, g_1^{-1}g_2 = \lambda(F_i)$. 这样就得到 P 上的 small cover M .

命题 1.1 *small cover 为连通闭流形.*

证明: 参考 Davis-Januszkiewicz [5]. 性质 1.7

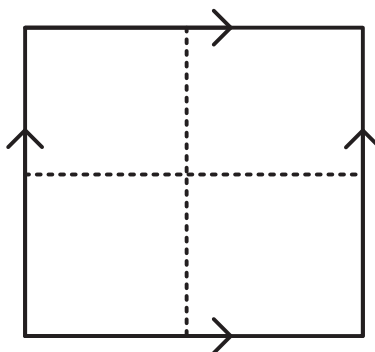
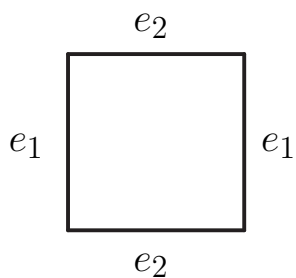
1.2 Examples of Small Covers

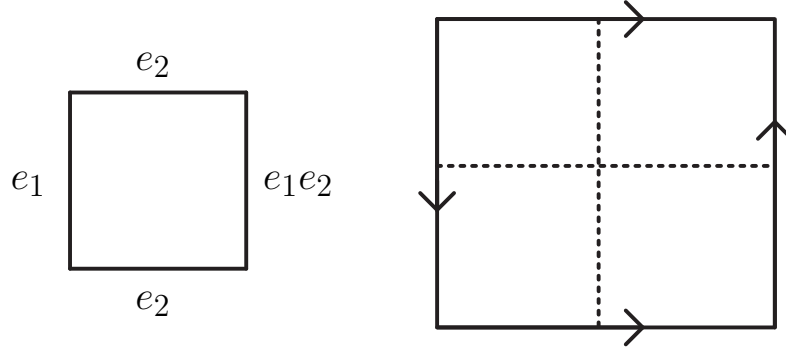
例 1 当 $P = \triangle^n$ 时, $\mathcal{F}(P)$ 上本质上只有一种染色, 如 $n = 2$ 时,



先将 P 在一个点处粘, 得到一个大四边形, 由染色信息知它的对边沿着箭头方向粘, 这是一个 $\mathbb{R}P^2$.

例 2 当 P^2 为四边形时, $\mathcal{F}(P)$ 上有下面两种不同的染色,





同样的操作，我们可以分别得到 T^2 和 Klein bottle.

例 3 (P^2 是一个 m 边形时)

M 是由 4 个 m -gon 沿边粘成的曲面，所以 M 的欧拉数为 $\chi(M) = 4 - m$. 当 m 为奇数时， M 为 $m - 2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和；当 m 为偶数时， M 为 $m - 2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和或着为 $\frac{m-2}{2}$ 个 T^2 的连通和. 所以 small cover 决定了除 S^2 外的所有二维闭曲面.

在本文中，我们主要通过构造 small cover 的一种自然的胞腔分解来计算基本群的群表示. 我们由 Hurewicz 定理知道，胞腔复形的基本群可以由它们的二维骨架确定，所以在本文中，我们将构造 small cover 的胞腔结构，计算基本群时，仅考虑它们的二维骨架. 另外我们将 small cover M 的 k 维骨架记为 $M[k]$ ，将多面体 P 的 k 维骨架记为 $P[k]$.

2 Cell Structure

由于单凸多面体具有很好的组合性质，所以我们可以通过不同的方式来构造 Small cover 的胞腔结构. 比如由单多面体面结构诱导的胞腔结构；small cover 的 perfect 胞腔结构，见 Davis-Januszkiewicz [5].; 由单多面体的 cubical subdivision 所诱导的胞腔结构，见 Buchstaber [2]. 在下面一节我们在 Q 上作类似的 cubical subdivision，来构造 small cover 一种更自然的胞腔分解，在这种胞腔结构，可以方便的得到 small cover 基本群的一个简

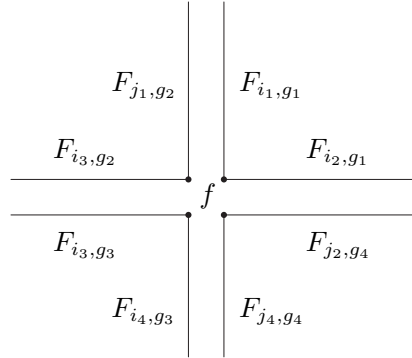
洁的表示. 对于一般的单凸多面体 P , 总存在它的一个 cubical subdivision, 我们将这种分解拉到 small cover, 我们自然地可以得到 small cover 一种胞腔分解. 而 Q 一般来说未必是单的, 所以我们下面构造的这种分解不是严格意义的 cubical. 进一步, 这多面体 Q 的面结构诱导的 M 的一个胞腔分解, 我们下面构造的胞腔分解实际上是这种胞腔结构 Poincare 意义上的对偶.

2.1 Definitions and Constructions

同上面, 我们首先将 $|\mathbb{Z}_2^n| = 2^n$ 个多面体 P 的 copy 在 P 的任一顶点 p_0 处粘合, 得到一个大的 n 维多面体 Q , 这里 Q 也可以看作将多面体 P 沿着它的一点 p_0 附近的 facets 作反射得到.

由 Q 的构造知, Q 中的每一个 P 自然地拥有一个标号 $g \in \mathbb{Z}_2^n$, 我们将第 g 个多面体 P 记为 P_g , 将 Q 中 P_g 的第 i 个 facet F_i 记为 $F_{i,g}$. 若 P_g 的 k 维面 $f_i^k \subset \partial Q$, 此时 f_i^k 称为 Q 的外 face, 否则称为 Q 的内 face, 将 Q 的内、外面集分别记为 $in(Q), out(Q)$. 接下来把 Q 的外 facets 按照染色信息配对粘合就可以得到商空间 – small cover M . 我们注意到 M 的所有的 facets 上存在一种自然的配对结构. 配对的规则由 P 上的染色 λ 决定. 这种配对结构有助于我们描述 M 的基本群. 下面, 我们引入 M 的面配对结构的定义.

定义 1 facets-pair structure of X .



设 X 为一个 n 维连通拓扑空间, X 可以由若干个单凸多面体 $\{P_g^n : g = 1, 2, \dots, N\}$ 粘合而成, 我们记 P_g 的第 i 个 facet F_i 为 $F_{i,g}$, 并且满足

下面两个条件:

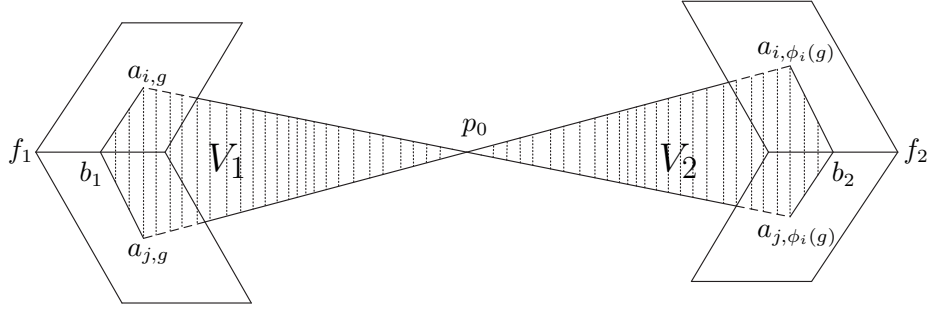
- 1、任意 facet F_{i,g_1} 唯一配对 F_{j,g_2} . 即存在一个同胚 $\tau_{i,g_1} : F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$ 与 $\tau_{j,g_1} : F_{j,g_2} \longrightarrow F_{i,g_1}$ 使得 $\tau_{i,g_1} = \tau_{j,g_2}^{-1}$. 我们称 $\widehat{F} = \{F_{i,g_1}, F_{j,g_2}\}$ 为一个 *facet* 对, 称 F_{j,g_2} 为 F_{i,g_1} 的配对 *facet*.
- 2、对任意余二维面 $f = F_{i_1,g_1} \cap F_{i_2,g_1}$, 如果 $\tau_{i_1,g_1}(f) = F_{j_1,g_2} \cap F_{j_3,g_2}$, $\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{j_2,g_4} \cap F_{j_4,g_4}$, 则 $\tau_{j_3,g_2}\tau_{i_1,g_1}(f) = \tau_{j_4,g_4}\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{i_3,g_3} \cap F_{i_4,g_3}$. 这里不排除 $F_{j_2,g_4} = F_{j_3,g_2}$ 或者 $F_{i_2,g_1} = F_{i_3,g_3}$.

则我们称 $\mathcal{S} = \{\widehat{F}_{i,g}, \tau_{i,g}\}$ 为 $\{P_l^n\}$ 上的一个 *facets-pairing structure*, $\tau_{i,g} : F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$ 为 \mathcal{S} 的 *structure map*. 记一步, 若 X 为闭的, 我们称 \mathcal{S} 是 M 的一个完全的 *facets-pairing structure* \square

事实上, $\mathcal{F}(P)$ 上的示性函数 $\lambda : \mathcal{F}(P) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 决定了 M 上的一个配对结构. $F_{i,g_1} \sim F_{j,g_2}$ 当且仅当 $F_i = F_j$, $\lambda(F_i) = (g_1)^{-1}g_2$. 反之, 若知道 $\{P_g^n : g = 1, 2, \dots, N\}$ 上的一个完全配对结构, 我们也可以构造出一个闭流形 M . 进一步由 $\lambda(F_i) = (g_1)^{-1}g_2$ 得 $g_2 = g_1 \cdot \lambda(F_i)$, 即对 Q 的任意一个 facet $F_{i,g}$, 他的配对 facet 为 $F_{i,\phi_i(g)}$, 其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i) : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$. 下面, 我们把 M 的 facets pair 记为 $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}, \forall g \in \mathbb{Z}_2^n$. Q 到 P 有一个自然地投射, 我们记为

$$\bar{\pi} : Q \longrightarrow P \quad (2)$$

下面构造 M 的 cell structure. 首先我们将 $M[0]$ 取为点 p_0 , 并且设为 M 的基点. 我们在 Q 的每一对余 1 维面处构造 1-cells. 对 Q 的每对 facets pair $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$ (包括所有的内 facets、外 facets), 任取 $F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}$ 内部的点 $a_{i,g}, a_{i,\phi_i(g)}$ (不妨取为 $F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}$ 的重心), 使得 $\bar{\pi}(a_{i,g}) = \bar{\pi}(a_{i,\phi_i(g)}) = a_i \in P$, 在 Q 的内部取连接 p_0 到 $a_{i,g}, a_{i,\phi_i(g)}$ 的两条简单有向道路 (不妨取为直线段), 记为 $\overrightarrow{a_{i,g}}, \overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}$. 则 $\overrightarrow{a_{i,g}}(\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}})^{-1}$ 为 M 中以 p_0 为起点的一条有向闭路, 记为 $x_{i,g}$, 另外记 $x_{i,\phi_i(g)} = x_{i,g}^{-1}$, 它表示 M 中以 p_0 为起点的有向闭路 $\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}(\overrightarrow{a_{i,g}})^{-1}$. 若我们不考虑 $x_{i,g}$ (或 $x_{i,\phi_i(g)}$) 的方向, 则 $x_{i,g} - \{p_0\} \cong e^1$ (或 $x_{i,\phi_i(g)} - \{p_0\} \cong e^1$), 这里 e^k 表示 M 一个 k 维 cell. M 中的每一对 facets pair 都决定了一个 1-cell. 在上述构造中, 所有的 $\{x_{i,g}\}$ 都仅交于 0-skelton p_0 处. 这样我们就获得 M 的 1-skelton $M[1] = \bigvee_{p_0} x_{i,g}$.



我们在余 2 维面处构造 2-cells. 设 $f_1 = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 为 Q 的任意一个余 2 维面, 则令 $f_2 = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)}$, $f_3 = F_{i,\phi_i\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_i\phi_j(g)}$, $f_4 = F_{i,\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_j(g)}$, 使得 $\{\pi(f_k), k = 1, 2, 3, 4\}$ 在 P 中的像相同, 记为 f , 这里 $\phi_i\phi_j(g) = \phi_i(g \cdot \lambda(f_j)) = g \cdot \lambda(f_j) \cdot \lambda(f_i)$. 取 f 内部的一个点 b , 对应 f_k 上的点设为 b_k , $k = 1, 2, 3, 4$. 取 V_1 为经过点 $b_k, p_0, a_{i,g}, a_{j,g}$ 的二维简单区域, 如取 b 为 $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\}$ 与 f 的交点, 其中 $\vec{a}_i = \pi(\vec{a}_{i,g}), \vec{a}_j = \pi(\vec{a}_{j,g})$, 这里的 $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\} \triangleq \{\vec{x} = k_1\vec{a}_i + k_2\vec{a}_j, k_1, k_2 \geq 0\}$. 则 $V_1 = \text{span}\{\vec{a}_{i,g}, \vec{a}_{j,g}\} \cap P_g \cong D_+^2$. 类似确定 $V_2 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_i(g)}, \vec{a}_{j,\phi_i(g)}\} \cap P_{\phi_i(g)}$, $V_3 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_i\phi_j(g)}, \vec{a}_{j,\phi_i\phi_j(g)}\} \cap P_{\phi_i\phi_j(g)}$, $V_4 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_j(g)}, \vec{a}_{j,\phi_j(g)}\} \cap P_{\phi_j(g)}$, 则 $\{V_k : k = 1, 2, 3, 4\}$ 在 M 中实际上粘合成一个闭的 D^2 , 记为 D_f^2 , 且 D_f^2 的边界落在 M 的 1-skelton 中. 对应的二维 cell $e_f^2 = (D_f^2)^\circ$. 这样就得到 2-skelton $M[2] = M[1] \cup \{e_f^2\}$.

依次进行下去, 我们可以在 Q 的余 k 维面 $f_l^k = F_{i_1,g} \cap F_{i_2,g} \cap \cdots \cap F_{i_k,g}$ 处可构造 M 的 k -cells. 我们可以类似取 $V_l = \text{span}\{a_{i_1,g}, a_{i_2,g}, \dots, a_{i_k,g}\} \cap P_g, l = 1, 2, \dots, 2^k$, 它们在 M 中粘成一个 k 维闭圆盘, 记为 D^k , 则 ∂D^k 落在 $M[k-1]$ 中, 且 D^k 对应 M 的 k -cell 可以为

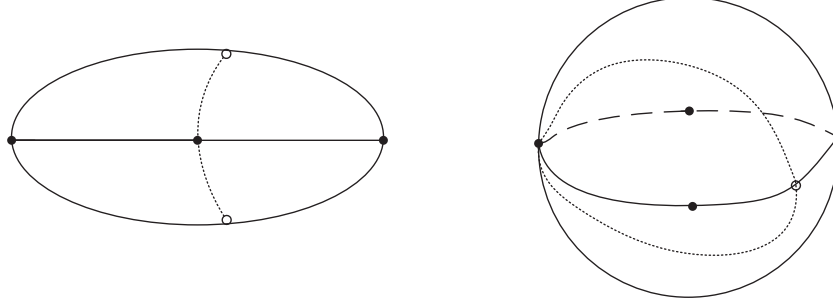
$$e^k \cong (D^k)^\circ = \left(\bigcup_{\{l=1,2,\dots,2^k\}} V_l \right)^\circ.$$

最终我们可以在 Q 的顶点处构造 M 的 h_0 个 n -cells.

注 在上述构造中, 若点 $p_0 \in F_{i,g}$, 则 $a_{i,g}$ 可能包含在 $F_{i,g}$ 中, 此时我们的构造方法依然适应, 且 facet $F_{i,g}$ 对应的 $x_{i,g}$ 在 Q 中与点道路同伦.

事实上, 对于具有 facets pair 结构的任意拓扑流形都可类似构造其胞腔结构. 如我们考虑

例 4 我们将三角形沿着他们对应的边粘和得到一个 S^2



按照上面步骤，我们可以得到 S^2 的一个胞腔分解 $S^2 = e_0 \cup e^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2$

2.2 Calculation and Example

在这种胞腔结构下，我们可以得到 $\pi_1(M)$ 的一个比较简洁的群表示. 下面我们分析 M 的基本群. small cover 的基本群 $\pi_1(M)$ 的生成元可取为 facets 对应的有向闭路 $\{x_{i,g}\}$. $\pi_1(M)$ 的关系由二维胞腔及配对关系决定. 对任意 facet pair $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$ 对应一对互逆的生成元 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$, 即配对关系为 $x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1$. 对于任意余二维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g} (\neq \emptyset) \subset Q$, 由 f 确定的二维胞腔 e_f 决定一个关系 $r_f = \partial D_f^2 = x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i(g)}x_{j,\phi_j(g)} = 1$, 即 $x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = (x_{i,\phi_i(g)}x_{j,\phi_j(g)})^{-1}$
 $= (x_{j,\phi_j(g)})^{-1}(x_{i,\phi_i(g)})^{-1} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}$. 从而我们得到 $\pi_1(M)$ 的一个群表示.

$$\begin{aligned} \pi_1(M) = \langle x_{i,g}, i = 1, 2, \dots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n : x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g; \\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}, \forall f = F_{i,g} \cap F_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i)$

我们记 $\mathcal{F}_1(Q)$ 为 Q 的内 facets 集; 记 $\mathcal{F}_2(Q)$ 为 Q 的内 facets 集附近的 facets 集, 即 $\mathcal{F}_2(Q) = \{F \in \mathcal{F}(Q) \cap \partial Q : \exists G \in \mathcal{F}_1(Q), st. F \cap G \neq \emptyset\}$; 记 $\mathcal{F}_3(Q)$ 为 Q 外 facets 集剩余的 facets 集. 则我们有下面结论.

引理 2.1 $\forall F_i \in \mathcal{F}(P)$ 固定, 则 $\pi^{-1}(F_i) = \{F_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 对应的生成元 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是彼此相关的. 特别地, 当 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_1(Q)$ 时, $x_{i,g} = 1$;

当 $F_{i,g_1}, F_{i,g_2} \in \mathcal{F}_2(Q)$ 时, 若 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} \neq \emptyset$, 则 $x_{i,g_1} = x_{i,g_2}$, 否则 $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

进一步, 设 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 为 Q 中任意一个固定的余二维面. 当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 都属于 $\mathcal{F}_1(Q)$, 即 f 为内面时, f 对应的关系为 1; 当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 分别属于 $\mathcal{F}_2(Q)$ 和 $\mathcal{F}_1(Q)$ 时, f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$.

证明: 若 $F_{i,g}$ 为内 facets, 则 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 包含在 Q 的内部, 可缩为点道路, 故 $x_{i,g} = 1$. 对于内余 2 维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 确定的关系, 为内生成元的组合, 故也是平凡的. 若 $F_{i,g}, F_{j,g}$ 分别为外面和内面, 不妨设 $F_{i,g}$ 为外面, $F_{j,g}$ 为内面, 则 $x_{j,g} = x_{j,\phi_i(g)} = 1$, 所以 f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$. 即内面附近的且相交为余二维面 f 的 facets 对应的生成元是彼此相关的. 又因为每对 facets pair 对应的生成元互为逆元, 所以当 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} = \emptyset$ 时, $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

最后, 我们考虑 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_3(Q)$ 的情况. 我们不妨固定 $F_{i,1} \in \pi^{-1}(F_i)$, 对应的生成元为 $x_{i,1}$. 首先它的配对 facets 对应的生成元 $x_{i,\phi_i(1)} = (x_{i,1})^{-1}$. 由于与 $F_{i,1}$ 相交的 facets 都在 P_1 中, 所以任意 $f = F_{i,1} \cap F_{j,1} \neq \emptyset$ 对应的关系为 $x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)} = x_{j,1}x_{i,\phi_j(1)}$, 即 $x_{i,\phi_j(1)} = x_{i,\lambda(F_j)} = (x_{j,1})^{-1}x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)}$. 然后, 我们对 $F_{i,\phi_j(1)}$ 进行上面的讨论. 所以 $\forall g \in \langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle$, $x_{i,g}$ 都与 $x_{i,1}$ 相关, 其中 $j \in \{j : F_j \cap F_i \neq \emptyset\}$. 我们仅考虑 F_i 一个顶点处的染色, 我们知 $\langle \{\phi_j(1)\} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n / \langle \phi_i(1) \rangle$. 所以 $\langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n$, 这就证明了所有的 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是相关的. \square

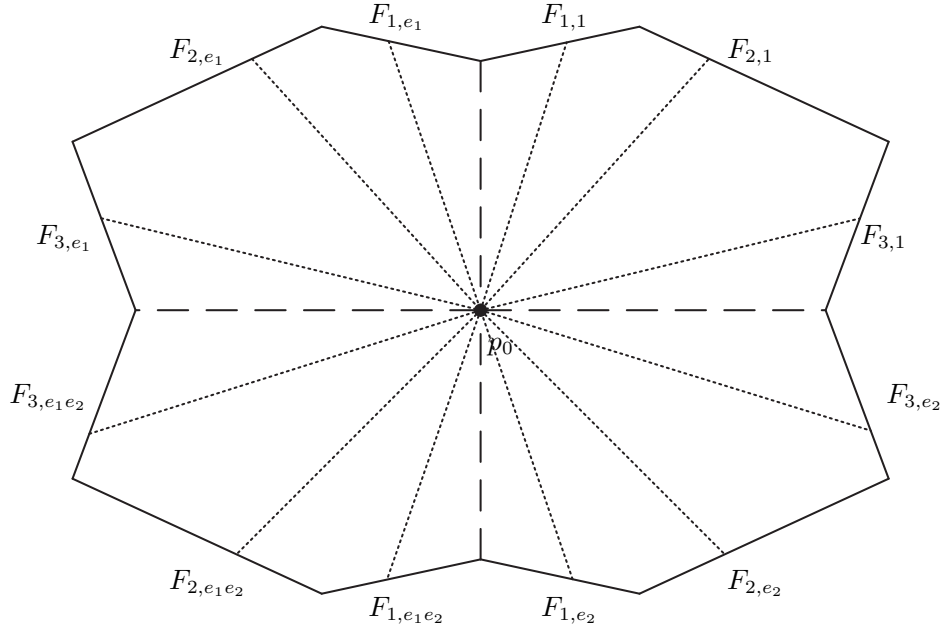
注 1、注意这里不排除 $F_{i,g} \cap F_{i,\phi_j(g)}, F_{i,g} \cap F_{i,\phi_i\phi_j(g)}$ 都为 Q 中非空的余二维面的情况, 此时 $(x_{i,\phi_j(g)})^{-1} = x_{i,\phi_i\phi_j(g)} = x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$, i.e. $(x_{i,\phi_j(g)})^2 = 1$. 从而 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 为 $\pi_1(M)$ 中的相等的二阶生成元.

2、Davis-Januszkiewicz [5] theroem 3.1 中指出 small cover Mod 2 Betti 数 $b_i(M) = h_i(P)$ (这里 h_i 定义中 f_k 表示 P 中余 $k+1$ 维面的个数). $b_1(M) = h_1(P) = m - n$, 即在 perfect 意义上的胞腔结构得到基本群生成元个数为 $m - n$ 个. 在这里所有外 facets 决定的生成元实际上也是 $m - n$ 个. 并且是 $\pi_1(M)$ 最少生成元个数 (待证).

猜想: P 中存在 Δ^2 面当且仅当 $\pi_1(M)$ 中有二阶元. (必要性易证)

在下面例子中, 我们只取每个 facets pair 中的其中一个 facets 对应的闭路作为基本群的生成元.

例 5 P 为五边形时, \mathcal{F} 上的染色依次取为 $\{e_2, e_1e_2, e_1, e_2, e_1\}$, Q 可视为 12 边形, 对应 6 对外 facets, 4 组余二维外面.



Q 中的 facets pair 有 $\{F_{2,e_1}, F_{2,e_2}\}, \{F_{1,e_1}, F_{1,e_1e_2}\}, \{F_{1,1}, F_{1,e_2}\}, \{F_{2,1}, F_{2,e_1e_2}\}, \{F_{3,1}, F_{3,e_1}\}, \{F_{3,e_2}, F_{3,e_1e_2}\}$ (内部 facets pair 对应平凡生成元, 我们暂不考虑). 给所有道路一个指向 p_0 的方向, 不妨设 p_0 为基本群基点, 取生成元为

$$\begin{cases} x_{2,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_2}})^{-1} \\ x_{1,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{1,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_2}})^{-1} \\ x_{2,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{3,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1}})^{-1} \\ x_{3,e_2} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,e_2}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1e_2}})^{-1} \end{cases}$$

在余 2 维面 p_1, p_2, p_3, p_4 处确定四组关系:

在 p_1 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1} = x_{1,e_1}$;

在 p_2 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1}x_{2,e_2} = x_{2,1}x_{1,e_1e_2}$, 即 $x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1} = x_{2,1}(x_{1,e_1})^{-1}$;

在 p_3 处胞腔对应的关系为 $x_{2,1}x_{3,e_1e_2} = x_{3,1}x_{2,e_1}$, 即 $x_{2,1}(x_{3,e_2})^{-1} = x_{3,1}x_{2,e_1}$;

在 p_4 处胞腔对应的关系为 $x_{3,1} = x_{3,e_2}$.

从而

$$\begin{aligned}\pi_1(M) &= \langle x_{2,e_1}, x_{1,e_1}, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,e_2} | x_{1,1}(x_{1,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{3,e_2})^{-1}, \\ &\quad x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1}x_{2,e_1} \rangle \\ &\cong \langle x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1} | x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1} \rangle\end{aligned}\quad (4)$$

即 $\pi_1(M) \cong \langle x, y, z | xy^{-1}xzy^{-1}z \rangle$

2.3 Universal Covering Space

设 $\pi : M \rightarrow P$ 为单多面体 P 上的 small cover. P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$. 下面我们将构造 small cover $\pi : M \rightarrow P$ 的 (万有) 覆叠空间

$$\mathcal{M} = Q \times \pi_1(M) / \sim \quad (5)$$

(Q, ν_1) 的外 facet F_{i,g_1} 与 (Q, ν_2) 的外 facet F_{j,g_2} 粘当且仅当 $i = j$, $g_1(g_2)^{-1} = \lambda(F_i)$, $\nu_1(\nu_2)^{-1} = x_{i,g_1}$ (或者等价的 $\nu_2(\nu_1)^{-1} = x_{i,g_2}$), 其中 $\nu_1, \nu_2 \in \pi_1(M)$, Q 为上文构造的多面体. 下面为记号方便, 我们把 (Q, ν) 简记为 Q_ν , Q_ν 的 facet $F_{i,g}$ 记为 $F_{i,g}^\nu$.

下面我们将说明 \mathcal{M} 实际上只与单多面体 P 及 P 的面结构有关.

我们首先定义由 P 的面结构决定的 *right-angle Coxeter group* W_P 如下:

$$W_P = \langle F_1, \dots, F_m : F_i^2 = 1; (F_i F_j)^2 = 1, \forall F_i, F_j \in \mathcal{F}(P), F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle$$

Davis-Januszkiewicz [5] 中构造了

$$\mathcal{L} = (P \times W_P) / \sim \quad (6)$$

其中 $(x_1, g_1) \sim (x_2, g_2)$ 当且仅当 $x_1 = x_2$, $g_1(g_2)^{-1} \in \langle F : x \in F, F \in \mathcal{F}(P) \rangle$. 且由 Davis [3] (Theorem 10.1 and 13.5) 知 \mathcal{L} 为单连通的.

设 $\tilde{\lambda} : \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 为 $\mathcal{F}(P)$ 上特征映射诱导的群同态, 定义映射 ψ 为投射 $W \rightarrow W^{ab} \cong \mathbb{Z}_2^m$ 和 $\tilde{\lambda}$ 的复合.

引理 2.2 设 $\pi : M \rightarrow P$ 为单多面体 P 上的 *small cover*, 则有群短正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\alpha} W_P \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2^n \rightarrow 1 \quad (7)$$

其中 $\pi_1(M) \cong \ker \psi$ 为 W_P 的子群, $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$

证: 在 Davis-Januszkiewicz [5] 中, 我们知道有上面正合列成立, 且 $\pi_1(M) \cong \ker \psi$ 为 W_P 的正规子群. 不妨设 p_0 附近的 facets 为 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, $\lambda(F_i) = e_i$, 考虑 $\gamma: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow W_P$, $\gamma(e_i) = F_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $\psi \circ \gamma = \text{id}_{\mathbb{Z}_2^n}$, 即上面短正合列是可裂的, 故 $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$. \square

引理 2.3 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$

证明: \mathcal{L} 和 \mathcal{M} 之间的同胚是由分裂短正合列 7 给出的,

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} W_P \begin{array}{c} \xleftarrow{\psi} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1$$

其中 $\beta: W_P \rightarrow \pi_1(M)$ via. $\beta(F_i) = x_{i,1}$. 则 $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\pi_1(M)}$, $\psi \circ \gamma = \text{id}_{\mathbb{Z}_2^n}$. $\beta \circ \gamma(e_i) = \beta(F_i) = x_{i,1} = 1 \in \pi_1(M_P)$, $i = 1, 2, \dots, n$. i.e. $\beta \circ \gamma = 1$.

我们定义 $h: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ via. $h(x, \omega) = (x_g, \nu)$, 其中 $g = \psi(\omega) \in \mathbb{Z}_2^n$, $\nu = \beta(\omega) \in \pi_1(M)$ 是唯一的.

定义 $h^{-1}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ via. $h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \gamma(g)\alpha(\nu))$.

$h \circ h^{-1}(x_g, \nu) = h(x, \gamma(g)\alpha(\nu)) = (x_g, \nu)$;

$h^{-1} \circ h(x, \omega) = h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \gamma(g)\alpha(\nu)) = (x, \omega)$

h, h^{-1} 的连续性是由于它们作用在 x 的局部为 identity.

故 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$ \square

注 在我们的胞腔构造过程中, 设 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 为顶点 p_0 附近的 n 个 facets, $\lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \dots, n$, 从而我们可以把 2^n 个 P 的 copy 在 p_0 处粘在一起得到 Q , 即取 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 为 Q 的内 facets, 最后得到基本群的表达形式如 (3). 这在引理 2.2 的短正合列中, 等价于 $\psi(F_i) = \lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \dots, n$. 所以 $\psi(F_k) = \lambda(F_k) = \prod e_i^{\delta_i} = \prod \lambda(F_i)^{\delta_i} = \prod \psi F_i^{\delta_i}$, 即 $\psi(F_k (\prod F_i^{\delta_i})^{-1}) = 1$, 其中 $k = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n; \delta_i$ 表示 $\lambda(F_k)$ 上有无 e_i 分量. F_1, F_2, \dots, F_n 在 M 中对应的闭路是可缩的, 所以 F_k 对应的闭路是 $\ker \psi$ 的生成元. 我们不妨设 $\alpha(x_{i,1}) = F_i$, 则 $F_i = \alpha(x_{i,1})\gamma(\lambda(F_i)) \stackrel{\Delta}{=} (x_{i,1}, \lambda(F_i))$. 进一步我们设 $\varphi: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(M))$ via $\varphi(g)(h) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(h)\gamma(g^{-1})) = \beta(\gamma(g)\alpha(h)\gamma(g))$, 其中 $g \in \mathbb{Z}_2^n, h \in \pi_1(M)$. 定义 $(\nu_1, g_1) \cdot (\nu_2, g_2) = (\nu_1 \varphi_{g_1}(\nu_2), g_1 g_2)$. 所以 h 的定义可以从 W_P 的生成元 F_i 延拓到整个群 W_P 中.

接下来我们将证明 \mathcal{M} 为 M 的万有覆盖空间. \mathcal{M} 到 M 有一个自然的

投射, 我们记为 $\Pi: \mathcal{M} \longrightarrow M$.

$$\begin{array}{ccc} Q \times \pi_1(M) & \xrightarrow{q'} & Q \times \pi_1(M) / \sim = \mathcal{M} \\ \tilde{\Pi} \downarrow & & \downarrow \Pi \\ Q & \xrightarrow{q} & Q / \sim = M \end{array}$$

其中 q, q' 是粘合 Q 和 Q 的 copy 的 facets 决定的商映射.

定理 2.4 \mathcal{M} 为 M 的万有覆叠空间.

证明: 由 \mathcal{M} 的定义知 $\mathcal{M}/\pi_1(M) = M$. 下面只需要证明 $\forall x \in \mathcal{M}$, 存在包含点 x 的开邻域 U , 使得不同的 $\nu \in \pi_1(M)$, $\nu(U)$ 不交.

当点 $x \in Q^\circ$ 时, 取包含点 x 的一个实心开球邻域 U , 使得 $U \subset Q^\circ$, 此时 $\nu(U)$ 落在不同指标的 Q 中, 是不交的. 当点 $x \in \text{out}(Q) = \partial Q$ 时, 我们取

若 $q^{-1}(x) \subset \partial Q$, 我们记 $f(x)$ 为 $\text{out}(Q)$ 中包含 x 为相对内点的最小的面, 不妨设 $f(x)$ 为余 k 维的, 则我们取包含点 x 的实心开球邻域 U , 满足 U 与包含点 x 的 Q 的 copy 的交都是 $\frac{1}{2^k}$ 球, 这时 $\nu(U)$ 显然也是不交的.

所以 \mathcal{M} 是 M 一个正则的覆叠空间, 又 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$ 是单连通的, 故为万有覆叠空间. \square

设 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 为上面覆叠空间 $\Pi: \mathcal{M} \longrightarrow M$ 的覆叠变换群. 由于 \mathcal{M} 是单连通的, 所以 $\pi_1(M) \cong D(\mathcal{M}, \Pi, M)$. 下面我们根据上面构造的 cell structure (的 2-skeleton) 来刻画 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的生成元.

对于 Q 中的每个 facet $F_{i,g}$, 我们定义 \mathcal{M} 上的面映射 $\Gamma_{i,g}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. $\forall x \in \mathcal{M}$, 存在某个 Q_{ν_1} , 使得 $x \in Q_{\nu_1}$, 由 \mathcal{M} 的构造知存在唯一的 Q_{ν_2} , 使得 $F_{i,g} \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$, 我们定义 $\Gamma_{i,g}(x)$ 为 $\Pi^{-1}(\Pi(x)) \cap Q_{\nu_2}$ 中的唯一的一点, 这样定义的 $\Gamma_{i,g}$ 显然是 well-defined 的. $\Gamma_{i,g}$ 的连续性也是显然的.

类似引理 2.1 容易验证

引理 2.5 1、 $\Gamma_{i,g}\Gamma_{i,\phi_i(g)}(x) = x$.

2、若存在 $F_{j,g'} (\neq F_{i,g}) \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$, 则 $\Gamma_{j,g'}(x) = \Gamma_{i,g}(x)$.

3、若 facet $F_{i,g} \in \text{in}(Q)$, 此时 $Q_{\nu_1} = Q_{\nu_2}, \Gamma_{i,g} = \text{id}$.

进一步我们有

引理 2.6 面映射 $\Gamma_{i,g}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ 为 \mathcal{M} 上的覆叠变换.

命题 2.7 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 可以由面映射 $\{\Gamma_{i,g}\}$ 来刻画.

证明: \mathcal{M} 为单连通的, 此时 $\pi_1(M, p_0)$ 到 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的满同态实际上为群同构, 它将 $[x_{i,g}] \in \pi_1(M, p_0)$ 映为 $\Gamma_{i,g}$. 我们不妨取点 $x = \pi^{-1}(p_0) \in M$, 则 $\{\Pi^{-1}(x)\}$ 实际上是每个 Q 中 p_0 的 copy. 我们取第 1 个 Q_1 中的 p_0 的 copy, 记为 y_0 , 其中 1 为 $\pi_1(M)$ 的单位元. 所以我们只需要验证 $\Gamma_{i,g}(y_0) = \widetilde{x_{i,g}}(1)$, 其中 $\widetilde{x_{i,g}}$ 是 $x_{i,g}$ 在 \mathcal{M} 中的一段提升. $\Gamma_{i,g}(y_0)$ 实际上是 $Q_{x_{i,g}}$ 中的 p_0 的 copy, 即 $\widetilde{x_{i,g}}(1)$. 所以 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的生成元可以自然的选为 Q 的 facets 对应的面映射. \square

综上, 我们有下面结论:

定理 2.8 $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow M$ 为 M 的万有覆叠空间, 复叠变换群 $D(\mathcal{L}, \Pi, M) \cong \pi_1(M)$ 可以由 Q 的 facets 对应的面映射生成.

2.4 Naturality of the Cell Structure of Small Cover

最后我们解释一下我们这种胞腔结构的自然. 我们考虑 $M[2]$, 它的 0-skeleton 只有一个点 p_0 ; 它的 1-skeleton 是 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 的一点并, 对应 $\pi_1(M)$ 的生成元; 它的每一个二维胞腔对应 $\pi_1(M)$ 的一个关系. 即 $M[2]$ 是 $\pi_1(M, p_0)$ 的 *presentation complex*. 进一步, 我们将 M 的这种胞腔结构提升到它的万有覆叠空间 \mathcal{M} 中, 则 $\mathcal{M}[2]$ 实际上是 $\pi_1(M, p_0)$ 的 *Cayley 2-complex*.

事实上, 将单多面体 P 视为一个 right angle orbifold, 则 small cover $\pi: M \rightarrow P$ 为 P 上的 covering orbifold. 由于 M 为一个闭流形, P 为一个 good orbifold, 则 P 的单连通的 covering orbifold \mathcal{M} 为它的万有 covering orbifold. 进一步, covering orbifold $\tau: \mathcal{M} \rightarrow P$ 为 covering space $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow M$ 和 small cover $\pi: M \rightarrow P$ 的复合. 它们的覆叠变换群分别为 $W_P, \pi_1(M)$ 和 \mathbb{Z}_2^n . (Davis-Januszkiewicz [5])

我们定义 π_1^{orb} 为 universal orbifold cover $\tau: \mathcal{M} \rightarrow P$ 的覆叠变换群. 即 $\pi_1^{orb}(P) = W_P$, 此时 $\pi_1^{orb}(P)$ 和 $\pi_1(M)$ 存在自然的子群关系. 我们对单多面体 P 做类似的 cubical 分解, 则某种意义上, $P[2]$ 为 W_P 的 presentation complex. 把这种分解提升到 \mathcal{M} 中, 则 $[2]$ 实际上是 W_P 的一个 Cayley 2-complex. (Davis [4])

3 Application

设 f 为单多面体 P 的任意一个 k -face. 则它依然是单凸的, 且 $\mathcal{F}(f)$ 可以继承 $\mathcal{F}(P)$ 上的染色, 进而可以构造 f 上的 small cover $\pi_f : M_f \rightarrow f$. 在 Davis-Januszkiewicz [5] Lemma 1.3 中, 我们知道 M_f 为 M 的 k 维连通子流形. 在这一节中, 我们利用上面的胞腔结构, 考虑 $\pi_1(M_f)$ 与 $\pi_1(M)$ 之间的关系. 设 $\rho : f \rightarrow P$ 为面包含映射. p_0 为 f 的一个顶点. $\rho_* : \pi_1(M_f) \rightarrow \pi_1(M)$ 为 ρ 诱导的基本群同态.

引理 3.1 设 $\pi_1(M, p_0) = \langle G : R \rangle$, $\pi_1(M_f, p_0) = \langle G_f : R_f \rangle$, 则 $G_f \subset G, R_f \subset R$, 且 $\rho_*|_{G_f} = id$.

证明: 不妨取 F 为 P 的第一个 facet, p_0 为 F 的一个顶点, 自然也是 P 的一个顶点, 我们分别将 $\{(F, g)\}_{g \in \mathbb{Z}_2^{n-1}}$ 与 $\{(P, g)\}_{g \in \mathbb{Z}_2^n}$ 在点 p_0 处粘合在一起, 分别得到多面体 Q 与 $Q_F = F \times \mathbb{Z}_2^{n-1} / \sim$. 则 $out(Q_F) \subset out(Q), in(Q_F) \subset in(Q)$. 设 $f_i = F_i \cap F \neq \emptyset$ 为 F 的一个任意的 facet, $f_i \cap f_j = F_i \cap F_j \cap F \neq \emptyset$ 为 F 的一个任意的余 2 维面. 设 $f_{i,g} = F_{i,g} \cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{1,\phi_i(g)}$ 为 Q_F 中的任意一个 facet, 其中 $\{F_{1,g}, F_{1,\phi_i(g)}\}$ 为 $\{P_g : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 中的 facets-pair. 由引理 2.1, 我们知道 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路与 $F_{i,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)}$ 在 Q 中对应的有向闭路 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$ 是定点同伦的, 所以我们不妨记 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路为 $x_{i,g}$. 对于 Q_F 中的任意一个余 2 维面 $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} \neq \emptyset$ 所对应的二维胞腔 D_l 与 $F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)}$ 所对应的二维胞腔 $D_g, D_{\phi_i(g)}$ 也是定点同伦的, 所以在 $\pi_1(M_F)$ 中, $f_{i,g} \cap f_{j,g}$ 决定的关系与 $F_{i,g} \cap F_{j,g} (\cap F_{1,g} \neq \emptyset)$ 或者 $F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)} (\cap F_{1,\phi_i(g)} \neq \emptyset)$ 在 $\pi_1(M)$ 中决定的关系对应. 所以 M_F 的基本群为

$$\begin{aligned} \pi_1(M_F) = \langle x_{i,g}, i = 1, 2, \dots, m', g \in \mathbb{Z}_2^{n-1} : x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g \\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i(g)}x_{j,\phi_j(g)} = 1, \forall f_{i,g} \cap f_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (8) \end{aligned}$$

其中 $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)} \cap F_{1,\phi_i(g)} \neq \emptyset$. 即形式上 $\pi_1(M_F)$ 的生成元集 G_F 和关系集 R_F 都可为 $\pi_1(M)$ 的生成元集 G 和关系集 R 的子集. 进一步, 这种关系是由包含映射 $\rho : F \rightarrow P$ 所诱导的, 即对 $\rho_* : \pi_1(M_F) \rightarrow \pi_1(M)$ 有 $\rho_*|_{G_F} = id$.

进一步对一般的 k 维面 f , 我们不断进行上面的操作, 则 $\pi_1(M_f)$ 和 $\pi_1(M)$ 都有上面的关系. \square

可以看出一般 ρ_* 不一定是单同态. 如下面的例子.

例 6 取 $P = I \times \triangle^2$ 为三棱柱, 共有 5 个 facets $\{F_i\}_{i=1,2,3,4,5}$, 我们给上下底面 F_1, F_2 染色 e_1 , 侧面 F_3, F_4, F_5 染色为 $e_2, e_3, e_1e_2e_3$, 由 P 的 h -vector 知, $\pi_1(M)$ 有两个生成元和两个关系, 它的任意一个侧面上的 small cover 基本群有两个生成元, 一个关系.

$$\text{即 } \pi_1(M) = \langle x, y : x^2 = yxyx^{-1} = 1 \rangle, \pi_1(M_F) = \langle x, y : yxyx^{-1} = 1 \rangle$$

$$\rho_* : \pi_1(M_F) \longrightarrow \pi_1(M)$$

满足 $\rho_*(x) = x, \rho_*(y) = y$, 但 ρ_* 非单.

定义 2 我们称一个单纯复形 K 为 *flag* 的, 如果 K 中两两相连的顶点集张成 K 中的一个单形. 等价地, K 中不含维数 ≥ 2 的空单形.

我们称一个单多面体 P 为 *flag* 的, 如果 $K = \partial P$ 为 *flag* 的. 等价地, P 中两两相交的面必有公共的交.

例 7 1、一个 m 边形为 *flag* 的, 当且仅当 $m > 3$.

2、*flag* 多面体的面是 *flag* 的.

设 F 为单多面体 P 的第 1 个 facet, 并取定 F 的一个顶点 p_0 . 我们记 W_F, W_P 分别为 F 和 P 的 Coxeter group, $\pi_F : M_F \rightarrow F$ 和 $\pi_P : M \rightarrow P$ 分别为 F 和 P 上的 small cover. 设 $\rho : F \rightarrow P$ 为面包含映射, $\hat{\rho} : W_F \rightarrow W_P$ 为 ρ 诱导的 Coxeter group 之间的群同态, $\rho_* : \pi_1(M_F, p_0) \rightarrow \pi_1(M, p_0)$ 为 ρ 诱导的 small cover 基本群之间的群同态. 另外我们把 W_P 的生成元集 $\mathcal{F}(P)$ 记为 \tilde{G}_P , 关系集记为 \tilde{R}_P ; 把 W_F 的生成元集 $\mathcal{F}(F)$ 记为 \tilde{G}_F , 关系集记为 \tilde{R}_F . 取 p_0 为基点, 按照引理中的方式, 分别得到 $\pi_1(W_F, p_0)$ 和 $\pi_1(W_P, p_0)$ 的群表示, 分别记它们生成元集为 G_F, G_P , 关系集为 R_F, R_P . 下面证明当 P 为 *flag* 时, $\hat{\rho}$ 和 ρ_* 都是单的.

引理 3.2 $\tilde{G}_F \subset \tilde{G}_P, \tilde{R}_F \subset \tilde{R}_P$, 进一步 $\hat{\rho}|_{\tilde{G}_F} = id$.

证明: 类似上面引理的证明.

引理 3.3 当 P 为 *flag* 时, $\hat{\rho} : W_F \rightarrow W_P$ 为单的.

证明: 当单多面体 P 为 *flag* 时, 若 $F \cap F_i \neq \emptyset, F \cap F_j \neq \emptyset$, 则 $F \cap F_i \cap F_j \neq \emptyset$, 即 P 中 F 附近的任意余二维面 $f \subset P$ 对应的关系一定可以继承到 W_F 中. 这保证了下面这个态射的定义合理性. 我们构造群态射

$$\eta_* : W_P \longrightarrow W_F \tag{9}$$

满足 $\eta_*|_{\tilde{G}_P - \tilde{G}_F} = 1$, $\eta_*|_{\tilde{G}_F} = id$.

η_* 为一个群同态显然. 下面我们验证 η_* 定义的合理性. 我们考虑 W_P 中的关系在 η_* 下的像是否为 W_F 的单位元. P 中与 F 相交的 facets 集 (包含 F), 我们记为 \mathcal{F}_1 , 与 \mathcal{F}_1 中 facets 相交且不包含 F 的 facets 集, 我们记为 \mathcal{F}_2 , 剩余的 facets 我们记为 \mathcal{F}_3 . 则 η_* 将 $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ 中 facets 对应的生成元映为 1. 对于 W_P 的关系 $(F_i)^2 = 1$, 当 $F_i \in \mathcal{F}_1$ 时, $\eta_*(F_i F_i) = (F_i)^2 = 1$; 当 $F_i \in \mathcal{F}(F) - \mathcal{F}_1$ 时, $\eta_*(F_i F_i) = 1$. 对于 Q 中的任意余二位面 $f = F_i \cap F_j$, 若 F_i, F_j 都属于 \mathcal{F}_1 , 则由 P 的 flag 性质知 $f \cap F \neq \emptyset$, 从而 η_* 将 $f \subset P$ 所对应的关系映为 W_F 的一个关系; 若 F_i, F_j 都不属于 \mathcal{F}_1 , 则对应关系在 η_* 下的像为 1; 若 F_i, F_j 分别属于 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, 不妨设 $F_i \subset \mathcal{F}_1, F_j \subset \mathcal{F}_2$, 设这个关系为 $(F_i F_j)^2 = 1$, 则 $\eta_*(F_i F_j F_i F_j) = \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) = (F_i)^2 = 1$. 所以对任意关系 $r \in W_P, \eta_*(r) \equiv 1$, 即 η_* 为 well-defined.

最后容易验证 $\eta_* \circ \hat{\rho} = id : W_F \longrightarrow W_F$, 即 $\hat{\rho}$ 为单的. \square

定理 3.4 当多面体 P 为 flag 时, ρ_* 为单同态.

证明: 考虑 pull back

$$\begin{array}{ccc} M_F & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & M \\ \pi_F \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ F & \xrightarrow{\rho} & P \end{array}$$

则考虑

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M_F) & \xrightarrow{\rho_*} & \pi_1(M) \\ (\pi_F)_* \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ W_F & \xrightarrow{\hat{\rho}} & W_P \end{array}$$

设 x_i 为 $\pi_1(M_F)$ 的 $F_i \cap F$ 对应的一个生成元, 则 $\pi_* \circ \rho_*(x_i) = \pi_*(x_i) = F_i$; $\hat{\rho} \circ (\pi_F)_*(x_i) = \hat{\rho}(F_i \cap F) = F_i$. 所以上面图表是可交换的.

事实上, 将短正合列 7, 看为 $\mathcal{M} \longrightarrow M \longrightarrow P$ 的覆叠变换群之间的关

系, 则有

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_1(M_F) & \xrightarrow{(\pi_F)_*} & W_F & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2^{n-1} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \rho_* & & \downarrow \hat{\rho} & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(M) & \xrightarrow{\pi_*} & W & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1
 \end{array}$$

则由五引理知 ρ_* 单.

所以当 P 为 flag 时, $\hat{\rho}$ 为单的, 所以 $\hat{\rho}(\pi_F)_* = (\pi)_*\rho_*$ 为单的, 从而 ρ_* 为单的. 这里的 ρ_* 即为面包包含映射 ρ 所诱导的基本群同态. \square

对于单多面体 P 的任意 k 维面 f , 设 $\rho: f \rightarrow P$ 为面包包含映射, 则 ρ 可以分解为 facet 包含映射的复合, 从而此时 ρ 诱导的基本群同态也为单的.

推论 1 对于单多面体 P 的任意 k 维面 f , 它的面包含映射诱导的基本群同态为单的.

定义 3 我们称一个连通闭流形 M 为 aspherical 的, 若 $\pi_k(M) = 0, k \geq 2$.

Borel conjecture 设 $f: M \rightarrow N$ 为同伦等价, 其中 M, N 为同维数闭的 aspherical 流形, 则 f 同伦于一个同胚映射.

定理 3.5 ([6]) *Let M be a small cover of P . Then the following statements are equivalent.*

- 1、 M is aspherical.
- 2、The boundary of P is dual to a flag complex.
- 3、The natural piecewise Euclidean metric on the dual cubical cellulation of M is nonpositively curved.

定理 3.6 ([8]) *Let $f: N \rightarrow M$ be a homotopy equivalence between closed smooth manifolds such that M supports a non-positively curved Riemannian metric. Then N and M are stably homeomorphic; i.e.*

$$f \times id: N \times \mathbb{R}^{m+4} \longrightarrow M \times \mathbb{R}^{m+4} \quad (10)$$

is homotopic to a homeomorphism where $m = \dim M$.

上面定理说明, 当流形 M 是一个 non-positively curved Riemannian 流形, 且 $\dim(M) \neq 3, 4$, Borel conjecture 成立. 可以验证 small cover 为这样的闭流形.

推论 2 设 $n(> 4)$ 维闭流形 M, N 都为 *flag* 单多面体上的 *small cover*, 若 $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$, 则 M 和 N 是同胚的.

对于 3 维情况, 在 [1] 中指出, Borel conjecture 对所有的三维流形都成立. 我们感兴趣的是 aspherical small cover M 是不是一个 Haken manifold

定义 4 A Haken 3-manifold is a compact 3-manifolds which are

- (1) P^2 -irreducible and
- (2) sufficiently large – i.e. contain a properly embedded, 2-sided, incompressible surface.

命题 3.7 P^2 -irreducible M with $H_1(M)$ infinite is a Haken manifold.

证明: 由 Hempel [10] Lemma 6.6 知 M 包含一个 properly embedded 2-sided, nonseparating incompressible surface S . \square

引理 3.8 设 M 是 3 维 *flag* 多面体 P 上的一个 *small cover*, 则 $H_1(M)$ 是 infinite 的.

证明:

推论 3 Aspherical small covers are Haken manifolds.

证明: 设 P 为三维单的 *flag* 多面体 (不包含单形面), M 为 P 上的 small cover, M 是 aspherical 的. 由 Sphere Theorem, 我们知道三维闭可定向流形是 aspherical 的, 当且仅当它是 irreducible 和 π_1 infinite 的. 进一步为 P^2 -irreducible, 又 $H_1(M)$ 为 infinite 的, 故 aspherical small cover M 为 Haken 流形. \square

定理 3.9 在三维 *small cover* 范畴中, 下列条件等价.

- (1) M 是 aspherical 的,
- (2) M 是 P^2 -irreducible 的.
- (3) M 是 Haken 的.

进一步, 此时 $H_1(M)$ 是 infinite 的.*

可定向 aspherical 流形为 irreducible 的, 故为 prime 的, 故同伦等价诱导同胚. 尽管 $\{M_F\}$ 中不一定存在 M 的 two-sided incompressible surface (考虑正十二面体上的 small cover), 但 M_F 拥有许多好的性质, 比如包含映射诱导的基本群同态为单的. 特别地, 我们沿着 M_F 去切 M , 这在我们

构造的胞腔结构中，相当于把与 F 横截相交的那些一维闭路 $\{x\}$ 切开，或者给面 F 一个平凡的 color. 此时对应在我们上面构造的胞腔结构中，是把 facets 对应的闭路切开，从而这些闭路决定的生成元变为平凡元，基本群得到化简. 所以从这里我们猜测，类似于 Hierachy of Waldhausen 的操作对 (高维) aspherical small cover 也是有效的. 这对高维 small cover 中的 borel 猜想的证明提供一种可行的 idea. 而且 Davis 等一些人已经在做了一些这方面的工作，比如对高维 Haken 流形的推广.

参考文献

- [1] M. Aschenbrenner, S. Friedl and H. Wilton, 3-manifold groups, *Mathematics* (2013), 1-149
- [2] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, Torus actions and their applications in topology and combinatorics, *University Lecture Series, 24. American Mathematical Society, Providence, RI*, (2002)
- [3] M.W. Davis, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, *Ann. Math. (2)* 117 (1983), 293-325.
- [4] M.W. Davis, Exotic aspherical manifolds, *Topology of high-dimensional manifolds*. (Trieste, 2001), 371-404.
- [5] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, Convex polytopes, coxeter orbifolds and torus actions, *Duke Math. J.* 62 (1991), 417-451.
- [6] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Nonpositive curvature of blow-ups, *Selecta Math.(N.S.)* 4 (1998), 491-547.
- [7] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Fundamental groups of blow-ups, *Advances in mathematics*. 177 (2003), 115-179.
- [8] F.T. Farrell, The Borel conjecture, *Topology of high-dimensional manifolds*. (Trieste, 2001), 225-298.
- [9] A. Hatcher, Spaces of Incompressible Surfaces, *Mathematics*. (1999).
- [10] J. Hempel, 3-manifolds, *Annals of Mathematics studies*. 86 (1978).
- [11] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.* (2)87 (1968), 56-88.
- [12] S. Kuroki, M. Masuda, and L. Yu, Small covers, infra-solvmanifolds and curvature, *Forum mathematicum*. 27(5)(2015), 2981-3004
- [13] L. Yu, Crystallographic groups with cubic normal fundamental domain, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B39, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto*. (2013), 233-244