

Fundamental Groups of Small Covers

1 Introduction

1.1 Small Cover

凸多面体 P 是指 \mathbb{R}^n 中非空有限多个点集的凸包, 或者等价的是 \mathbb{R}^n 中有限个半空间的有界交, 即

$$P = \text{conv}\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l_i, x \rangle \geq -a_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

其中 l_i 为 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的线性函数, $a_i \in \mathbb{R}$.

凸多面体的维数就是指凸包或者有界交的维数. 若无特殊说明, 本文中的所考虑的多面体均指 \mathbb{R}^n 中的 n 维凸多面体, 记为 P . 我们把 P 的边界记为 K . 把 P 的内部记为 P° . 凸子集 $F \subset P$ 称为 P 的面, 若 F 是多面体 P 与某一个半空间 $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x \rangle \geq -a\}$ 的交, 且 $P^\circ \cap \partial V = \emptyset$. 子集 \emptyset 和 P 本身都为 P 的面, 称为平凡面; 其他的面称为真面. P 的 0 维面称为 P 的顶点, P 的 1 维面称为 P 的边, P 的 $n-1$ 维面称为 P 的 facet. 记 f_i 为 P 的 i 维面的个数, 称 $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ 为 P 的 f -vector. 取 $f_{-1} = 1$, 则 P 的 h -vector $\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ 由下面等式定义

$$h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1}$$

由 Dehn-Sommerville 关系知 $h_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \dots, n$, 为方便我们在本文中将 P 的 facets 的个数记为 $f_{n-1} = m$, 即 P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$.

我们称多面体 P 是单 (simple) 的, 若 P 的每个顶点恰好是 P 中 n 个 facets 的交, 等价地, 每个顶点处恰好有 n 条边. 单多面体中任意余维数为 k 的面 f 总可以 (唯一) 表示为 $f = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k$, 其中 F_1, F_2, \dots, F_k 为包含 f 的 facets.

取 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ 为二元乘法群或者模空间, \mathbb{Z}_2^n 表示它们的乘积, e_i 表示 \mathbb{Z}_2^n 第 i 个标准向量. 设 P 为 n 维单凸多面体, $\mathcal{F}(P)$ 为 P 的 facets 集, 对每一个 facet $F_i \in \mathcal{F}(P)$, 我们定义一个染色 $\lambda(F_i) \in \mathbb{Z}_2^n$, 使得对 P 的每一个顶点 $p = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$, 满足 $\text{span}\{\lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_n)\} \cong \mathbb{Z}_2^n$. 进一步我们称 $\lambda: \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 为下面将要构造的 small cover M 的示性函数. 需要注意的是, 下文出现的多面体指数之间的乘法, 均默认为群 \mathbb{Z}_2^n 中的乘法运算.

注 对于任意单凸多面体, 满足上面条件的染色不一定存在, 参考 Davis-Januszkiewicz [5]. *Nonexample 1.22 (Duals of cyclic polytope)*

现在我们定义单凸多面体 P 上的 small cover. 对任意点 $x \in P$, 记 $f(x)$ 为 P 中包含 x 为相对内点的唯一的面, 例如 x 为 P 内部的点时, 则 $f(x) = P$; x 为 P 的顶点时, 则 $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$, 其中 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 为包含点 x 的 n 个 facets. 不妨设 $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$ 为 P 的任意一个固定的余 k 维面, 记 $G_{f(x)} = \langle \lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_k) \rangle = \langle \lambda(F_i) : x \in F_i \rangle$. 则定义 small cover 为

$$M = (P \times \mathbb{Z}_2^n) / \sim \quad (1)$$

$(x, g) \sim (y, h)$ 当且仅当 $x = y, g^{-1}h \in G_{f(x)}$. 这里 $G_{f(x)} < \mathbb{Z}_2^n$ 实际上是点 x 处的 *isotopy subgroup*, i.e. $\{g \in \mathbb{Z}_2^n : gx = x\}$. 进一步, 设 $\pi: M \rightarrow P$ 为一个自然的投射.

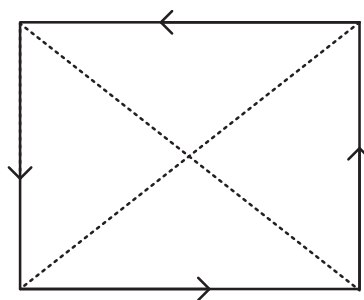
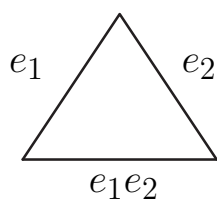
另外, 我们也可以比较直观的构造一个 small cover. 任取 P 的一个顶点 p_0 , 不妨记 p_0 附近的 facets 为 F_1, F_2, \dots, F_n , 且对应 facet 上的染色为 $\lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \dots, n$. 首先我们把 P 放到 \mathbb{R}^n 的第一卦限中, 使得 p_0 与原点重合, 第 i 个 facet F_i 落在 $x_i = 0$ 的坐标面上. 然后我们将 P 沿着坐标面反射, 得到原点附近的 P 的 2^n 个 copy, 我们把这 2^n 个 P 的 copy 组成的多面体记为 Q , p_0 自然的落在 Q 的内部. 我们给第 g 个坐标卦限的 copy 一个自然的标号 $g \in \mathbb{Z}_2^n$. 最后我们再将 Q 剩余的 facets 按照染色信息成对粘合起来, 具体第 g_1 个 P 的 copy 的 facet F_i 与第 g_2 个 P 的 facet F_j 粘, 当且仅当 $i = j, g_1^{-1}g_2 = \lambda(F_i)$. 这样就得到 P 上的 small cover M .

命题 1.1 *small cover 为连通闭流形.*

证明: 参考 Davis-Januszkiewicz [5]. 性质 1.7

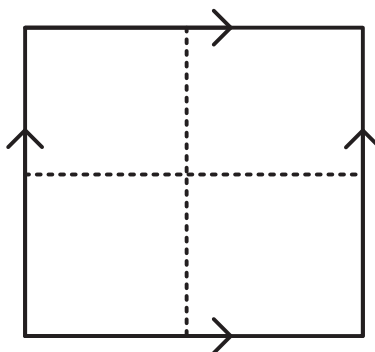
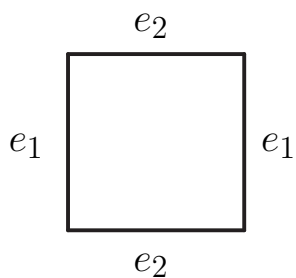
1.2 Examples of Small Covers

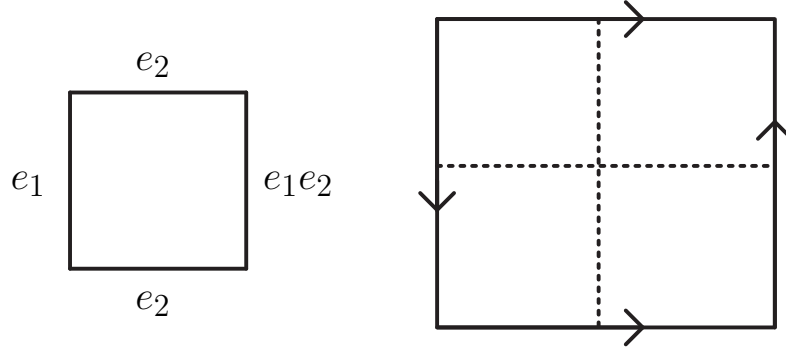
例 1 当 $P = \triangle^n$ 时, $\mathcal{F}(P)$ 上本质上只有一种染色, 如 $n = 2$ 时,



先将 P 在一个点处粘, 得到一个大四边形, 由染色信息知它的对边沿着箭头方向粘, 这是一个 $\mathbb{R}P^2$.

例 2 当 P^2 为四边形时, $\mathcal{F}(P)$ 上有下面两种不同的染色,





同样的操作，我们可以分别得到 T^2 和 Klein bottle.

例 3 (P^2 是一个 m 边形时)

M 是由 4 个 m -gon 沿边粘成的曲面，所以 M 的欧拉数为 $\chi(M) = 4 - m$. 当 m 为奇数时， M 为 $m - 2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和；当 m 为偶数时， M 为 $m - 2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和或着为 $\frac{m-2}{2}$ 个 T^2 的连通和. 所以 small cover 决定了除 S^2 外的所有二维闭曲面.

在本文中，我们主要通过构造 small cover 的一种自然的胞腔分解来计算基本群的群表示. 我们由 Hurewicz 定理知道，胞腔复形的基本群可以由它们的二维骨架确定，所以在本文中，我们将构造 small cover 的胞腔结构，计算基本群时，仅考虑它们的二维骨架. 另外我们将 small cover M 的 k 维骨架记为 $M[k]$ ，将多面体 P 的 k 维骨架记为 $P[k]$.

2 Cell Structure

由于单凸多面体具有很好的组合性质，所以我们可以通过不同的方式来构造 Small cover 的胞腔结构. 比如由单多面体面结构诱导的胞腔结构；small cover 的 perfect 胞腔结构，见 Davis-Januszkiewicz [5].; 由单多面体的 cubical subdivision 所诱导的胞腔结构，见 Buchstaber [2]. 在下面一节我们在 Q 上作类似的 cubical subdivision，来构造 small cover 一种更自然的胞腔分解，在这种胞腔结构，可以方便的得到 small cover 基本群的一个简

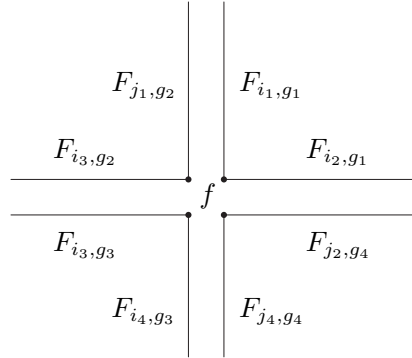
洁的表示. 对于一般的单凸多面体 P , 总存在它的一个 cubical subdivision, 我们将这种分解拉到 small cover, 我们自然地可以得到 small cover 一种胞腔分解. 而 Q 一般来说未必是单的, 所以我们下面构造的这种分解不是严格意义的 cubical. 进一步, 这多面体 Q 的面结构诱导的 M 的一个胞腔分解, 我们下面构造的胞腔分解实际上是这种胞腔结构 Poincare 意义上的对偶.

2.1 Definitions and Constructions

同上面, 我们首先将 $|\mathbb{Z}_2^n| = 2^n$ 个多面体 P 的 copy 在 P 的任一顶点 p_0 处粘合, 得到一个大的 n 维多面体 Q , 这里 Q 也可以看作将多面体 P 沿着它的一点 p_0 附近的 facets 作反射得到.

由 Q 的构造知, Q 中的每一个 P 自然地拥有一个标号 $g \in \mathbb{Z}_2^n$, 我们将第 g 个多面体 P 记为 P_g , 将 Q 中 P_g 的第 i 个 facet F_i 记为 $F_{i,g}$. 若 P_g 的 k 维面 $f_i^k \subset \partial Q$, 此时 f_i^k 称为 Q 的外 face, 否则称为 Q 的内 face, 将 Q 的内、外面集分别记为 $in(Q), out(Q)$. 接下来把 Q 的外 facets 按照染色信息配对粘合就可以得到商空间 – small cover M . 我们注意到 M 的所有的 facets 上存在一种自然的配对结构. 配对的规则由 P 上的染色 λ 决定. 这种配对结构有助于我们描述 M 的基本群. 下面, 我们引入 M 的面配对结构的定义.

定义 1 facets-pair structure of X .



设 X 为一个 n 维连通拓扑空间, X 可以由若干个单凸多面体 $\{P_g^n : g = 1, 2, \dots, N\}$ 粘合而成, 我们记 P_g 的第 i 个 facet F_i 为 $F_{i,g}$, 并且满足

下面两个条件:

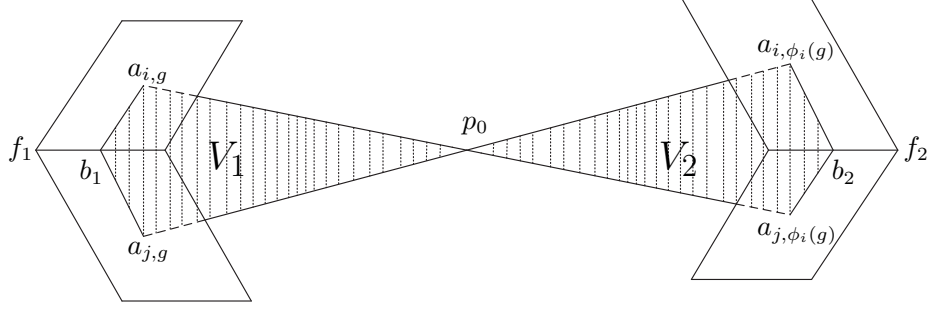
- 1、任意 facet F_{i,g_1} 唯一配对 F_{j,g_2} . 即存在一个同胚 $\tau_{i,g_1} : F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$ 与 $\tau_{j,g_1} : F_{j,g_2} \longrightarrow F_{i,g_1}$ 使得 $\tau_{i,g_1} = \tau_{j,g_2}^{-1}$. 我们称 $\widehat{F} = \{F_{i,g_1}, F_{j,g_2}\}$ 为一个 *facet* 对, 称 F_{j,g_2} 为 F_{i,g_1} 的配对 *facet*.
- 2、对任意余二维面 $f = F_{i_1,g_1} \cap F_{i_2,g_1}$, 如果 $\tau_{i_1,g_1}(f) = F_{j_1,g_2} \cap F_{j_3,g_2}$, $\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{j_2,g_4} \cap F_{j_4,g_4}$, 则 $\tau_{j_3,g_2}\tau_{i_1,g_1}(f) = \tau_{j_4,g_4}\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{i_3,g_3} \cap F_{i_4,g_3}$. 这里不排除 $F_{j_2,g_4} = F_{j_3,g_2}$ 或者 $F_{i_2,g_1} = F_{i_3,g_3}$.

则我们称 $\mathcal{S} = \{\widehat{F}_{i,g}, \tau_{i,g}\}$ 为 $\{P_l^n\}$ 上的一个 *facets-pairing structure*, $\tau_{i,g} : F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$ 为 \mathcal{S} 的 *structure map*. 记一步, 若 X 为闭的, 我们称 \mathcal{S} 是 M 的一个完全的 *facets-pairing structure* \square

事实上, $\mathcal{F}(P)$ 上的示性函数 $\lambda : \mathcal{F}(P) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 决定了 M 上的一个配对结构. $F_{i,g_1} \sim F_{j,g_2}$ 当且仅当 $F_i = F_j$, $\lambda(F_i) = (g_1)^{-1}g_2$. 反之, 若知道 $\{P_g^n : g = 1, 2, \dots, N\}$ 上的一个完全配对结构, 我们也可以构造出一个闭流形 M . 进一步由 $\lambda(F_i) = (g_1)^{-1}g_2$ 得 $g_2 = g_1 \cdot \lambda(F_i)$, 即对 Q 的任意一个 facet $F_{i,g}$, 他的配对 facet 为 $F_{i,\phi_i(g)}$, 其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i) : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$. 下面, 我们把 M 的 facets pair 记为 $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}, \forall g \in \mathbb{Z}_2^n$. Q 到 P 有一个自然地投射, 我们记为

$$\bar{\pi} : Q \longrightarrow P \quad (2)$$

下面构造 M 的 cell structure. 首先我们将 $M[0]$ 取为点 p_0 , 并且设为 M 的基点. 我们在 Q 的每一对余 1 维面处构造 1-cells. 对 Q 的每对 facets pair $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$ (包括所有的内 facets、外 facets), 任取 $F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}$ 内部的点 $a_{i,g}, a_{i,\phi_i(g)}$ (不妨取为 $F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}$ 的重心), 使得 $\bar{\pi}(a_{i,g}) = \bar{\pi}(a_{i,\phi_i(g)}) = a_i \in P$, 在 Q 的内部取连接 p_0 到 $a_{i,g}, a_{i,\phi_i(g)}$ 的两条简单有向道路 (不妨取为直线段), 记为 $\overrightarrow{a_{i,g}}, \overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}$. 则 $\overrightarrow{a_{i,g}}(\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}})^{-1}$ 为 M 中以 p_0 为起点的一条有向闭路, 记为 $x_{i,g}$, 另外记 $x_{i,\phi_i(g)} = x_{i,g}^{-1}$, 它表示 M 中以 p_0 为起点的有向闭路 $\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}(\overrightarrow{a_{i,g}})^{-1}$. 若我们不考虑 $x_{i,g}$ (或 $x_{i,\phi_i(g)}$) 的方向, 则 $x_{i,g} - \{p_0\} \cong e^1$ (或 $x_{i,\phi_i(g)} - \{p_0\} \cong e^1$), 这里 e^k 表示 M 一个 k 维 cell. M 中的每一对 facets pair 都决定了一个 1-cell. 在上述构造中, 所有的 $\{x_{i,g}\}$ 都仅交于 0-skelton p_0 处. 这样我们就获得 M 的 1-skelton $M[1] = \bigvee_{p_0} x_{i,g}$.



我们在余 2 维面处构造 2-cells. 设 $f_1 = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 为 Q 的任意一个余 2 维面, 则令 $f_2 = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)}$, $f_3 = F_{i,\phi_i\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_i\phi_j(g)}$, $f_4 = F_{i,\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_j(g)}$, 使得 $\{\pi(f_k), k = 1, 2, 3, 4\}$ 在 P 中的像相同, 记为 f , 这里 $\phi_i\phi_j(g) = \phi_i(g \cdot \lambda(f_j)) = g \cdot \lambda(f_j) \cdot \lambda(f_i)$. 取 f 内部的一个点 b , 对应 f_k 上的点设为 b_k , $k = 1, 2, 3, 4$. 取 V_1 为经过点 $b_k, p_0, a_{i,g}, a_{j,g}$ 的二维简单区域, 如取 b 为 $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\}$ 与 f 的交点, 其中 $\vec{a}_i = \pi(\vec{a}_{i,g}), \vec{a}_j = \pi(\vec{a}_{j,g})$, 这里的 $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\} \triangleq \{\vec{x} = k_1\vec{a}_i + k_2\vec{a}_j, k_1, k_2 \geq 0\}$. 则 $V_1 = \text{span}\{\vec{a}_{i,g}, \vec{a}_{j,g}\} \cap P_g \cong D_+^2$. 类似确定 $V_2 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_i(g)}, \vec{a}_{j,\phi_i(g)}\} \cap P_{\phi_i(g)}$, $V_3 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_i\phi_j(g)}, \vec{a}_{j,\phi_i\phi_j(g)}\} \cap P_{\phi_i\phi_j(g)}$, $V_4 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_j(g)}, \vec{a}_{j,\phi_j(g)}\} \cap P_{\phi_j(g)}$, 则 $\{V_k : k = 1, 2, 3, 4\}$ 在 M 中实际上粘合成一个闭的 D^2 , 记为 D_f^2 , 且 D_f^2 的边界落在 M 的 1-skelton 中. 对应的二维 cell $e_f^2 = (D_f^2)^\circ$. 这样就得到 2-skelton $M[2] = M[1] \cup \{e_f^2\}$.

依次进行下去, 我们可以在 Q 的余 k 维面 $f_l^k = F_{i_1,g} \cap F_{i_2,g} \cap \cdots \cap F_{i_k,g}$ 处可构造 M 的 k -cells. 我们可以类似取 $V_l = \text{span}\{a_{i_1,g}, a_{i_2,g}, \dots, a_{i_k,g}\} \cap P_g, l = 1, 2, \dots, 2^k$, 它们在 M 中粘成一个 k 维闭圆盘, 记为 D^k , 则 ∂D^k 落在 $M[k-1]$ 中, 且 D^k 对应 M 的 k -cell 可以为

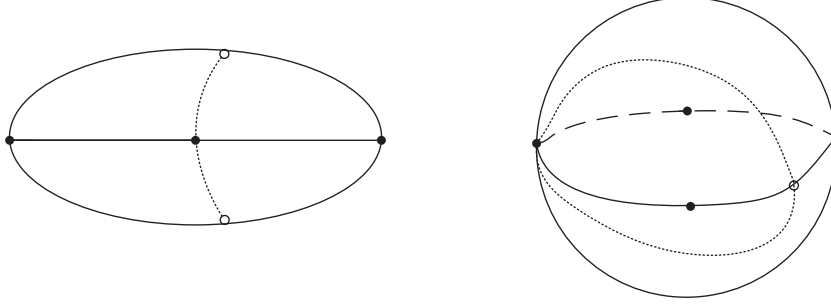
$$e^k \cong (D^k)^\circ = \left(\bigcup_{\{l=1,2,\dots,2^k\}} V_l \right)^\circ.$$

最终我们可以在 Q 的顶点处构造 M 的 h_0 个 n -cells.

注 在上述构造中, 若点 $p_0 \in F_{i,g}$, 则 $a_{i,g}$ 可能包含在 $F_{i,g}$ 中, 此时我们的构造方法依然适应, 且 facet $F_{i,g}$ 对应的 $x_{i,g}$ 在 Q 中与点道路同伦.

事实上, 对于具有 facets pair 结构的任意拓扑流形都可类似构造其胞腔结构. 如我们考虑

例 4 我们将三角形沿着他们对应的边粘和得到一个 S^2



按照上面步骤, 我们可以得到 S^2 的一个胞腔分解 $S^2 = e_0 \cup e^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2$

2.2 Calculation and Example

在这种胞腔结构下, 我们可以得到 $\pi_1(M)$ 的一个比较简洁的群表示. 下面我们分析 M 的基本群. small cover 的基本群 $\pi_1(M)$ 的生成元可取为 facets 对应的有向闭路 $\{x_{i,g}\}$. $\pi_1(M)$ 的关系由二维胞腔及配对关系决定. 对任意 facet pair $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$ 对应一对互逆的生成元 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$, 即配对关系为 $x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1$. 对于任意余二维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g} (\neq \emptyset) \subset Q$, 由 f 确定的二维胞腔 e_f 决定一个关系 $r_f = \partial D_f^2 = x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i(g)}x_{j,\phi_j(g)} = 1$, 即 $x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = (x_{i,\phi_i(g)}x_{j,\phi_j(g)})^{-1}$
 $= (x_{j,\phi_j(g)})^{-1}(x_{i,\phi_i(g)})^{-1} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}$. 从而我们得到 $\pi_1(M)$ 的一个群表示.

$$\begin{aligned} \pi_1(M) = \langle x_{i,g}, i = 1, 2, \dots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n : x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g; \\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}, \forall f = F_{i,g} \cap F_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i)$

我们记 $\mathcal{F}_1(Q)$ 为 Q 的内 facets 集; 记 $\mathcal{F}_2(Q)$ 为 Q 的内 facets 集附近的 facets 集, 即 $\mathcal{F}_2(Q) = \{F \in \mathcal{F}(Q) \cap \partial Q : \exists G \in \mathcal{F}_1(Q), st. F \cap G \neq \emptyset\}$; 记 $\mathcal{F}_3(Q)$ 为 Q 外 facets 集剩余的 facets 集. 则我们有下面结论.

引理 2.1 $\forall F_i \in \mathcal{F}(P)$ 固定, 则 $\pi^{-1}(F_i) = \{F_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 对应的生成元 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是彼此相关的. 特别地, 当 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_1(Q)$ 时, $x_{i,g} = 1$;

当 $F_{i,g_1}, F_{i,g_2} \in \mathcal{F}_2(Q)$ 时, 若 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} \neq \emptyset$, 则 $x_{i,g_1} = x_{i,g_2}$, 否则 $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

进一步, 设 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 为 Q 中任意一个固定的余二维面. 当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 都属于 $\mathcal{F}_1(Q)$, 即 f 为内面时, f 对应的关系为 1; 当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 分别属于 $\mathcal{F}_2(Q)$ 和 $\mathcal{F}_1(Q)$ 时, f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$.

证明: 若 $F_{i,g}$ 为内 facets, 则 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 包含在 Q 的内部, 可缩为点道路, 故 $x_{i,g} = 1$. 对于内余 2 维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 确定的关系, 为内生成元的组合, 故也是平凡的. 若 $F_{i,g}, F_{j,g}$ 分别为外面和内面, 不妨设 $F_{i,g}$ 为外面, $F_{j,g}$ 为内面, 则 $x_{j,g} = x_{j,\phi_i(g)} = 1$, 所以 f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$. 即内面附近的且相交为余二维面 f 的 facets 对应的生成元是彼此相关的. 又因为每对 facets pair 对应的生成元互为逆元, 所以当 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} = \emptyset$ 时, $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

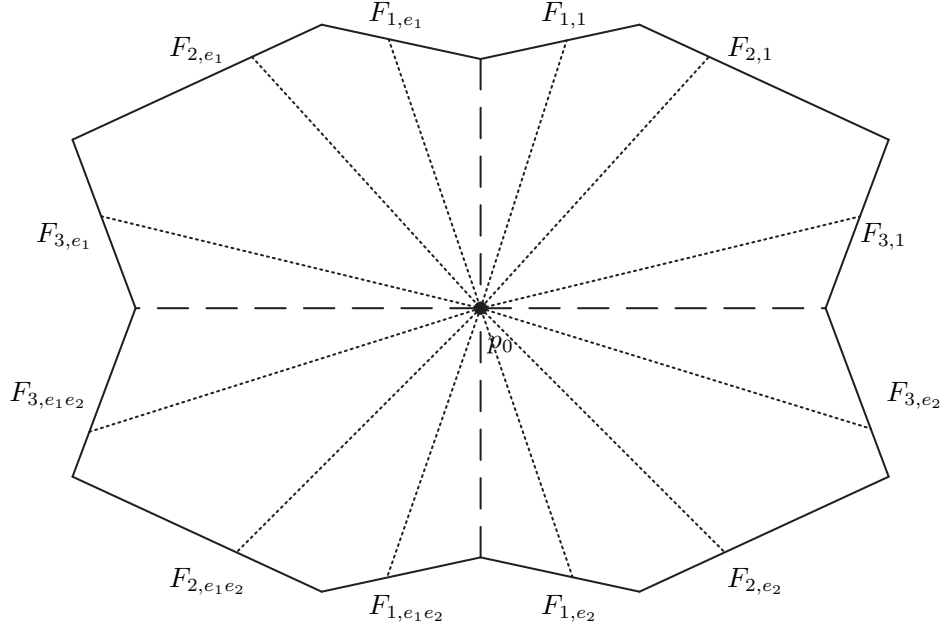
最后, 我们考虑 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_3(Q)$ 的情况. 我们不妨固定 $F_{i,1} \in \pi^{-1}(F_i)$, 对应的生成元为 $x_{i,1}$. 首先它的配对 facets 对应的生成元 $x_{i,\phi_i(1)} = (x_{i,1})^{-1}$. 由于与 $F_{i,1}$ 相交的 facets 都在 P_1 中, 所以任意 $f = F_{i,1} \cap F_{j,1} \neq \emptyset$ 对应的关系为 $x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)} = x_{j,1}x_{i,\phi_j(1)}$, 即 $x_{i,\phi_j(1)} = x_{i,\lambda(F_j)} = (x_{j,1})^{-1}x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)}$. 然后, 我们对 $F_{i,\phi_j(1)}$ 进行上面的讨论. 所以 $\forall g \in \langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle$, $x_{i,g}$ 都与 $x_{i,1}$ 相关, 其中 $j \in \{j : F_j \cap F_i \neq \emptyset\}$. 我们仅考虑 F_i 一个顶点处的染色, 我们知 $\langle \phi_j(1) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n / \langle \phi_i(1) \rangle$. 所以 $\langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n$, 这就证明了所有的 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是相关的. \square

注 1、 注意这里不排除 $F_{i,g} \cap F_{i,\phi_j(g)}, F_{i,g} \cap F_{i,\phi_i\phi_j(g)}$ 都为 Q 中非空的余二维面的情况, 此时 $(x_{i,\phi_j(g)})^{-1} = x_{i,\phi_i\phi_j(g)} = x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$, i.e. $(x_{i,\phi_j(g)})^2 = 1$. 从而 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 为 $\pi_1(M)$ 中的相等的二阶生成元.

2、Davis-Januszkiewicz [5] theroem 3.1 中指出 small cover Mod 2 Betti 数 $b_i(M) = h_i(P)$ (这里 h_i 定义中 f_k 表示 P 中余 $k+1$ 维面的个数). $b_1(M) = h_1(P) = m - n$, 即在 perfect 意义上的胞腔结构得到基本群生成元个数为 $m - n$ 个. 在这里所有外 facets 决定的生成元实际上也是 $m - n$ 个. 并且是 $\pi_1(M)$ 最少生成元个数 (2.2).

在下面例子中, 我们只取每个 facets pair 中的其中一个 facets 对应的闭路作为基本群的生成元.

例 5 P 为五边形时, \mathcal{F} 上的染色依次取为 $\{e_2, e_1e_2, e_1, e_2, e_1\}$, Q 可视为 12 边形, 对应 6 对外 facets, 4 组余二维外面。



Q 中的 facets pair 有 $\{F_{2,e_1}, F_{2,e_2}\}, \{F_{1,e_1}, F_{1,e_1e_2}\}, \{F_{1,1}, F_{1,e_2}\}, \{F_{2,1}, F_{2,e_1e_2}\}, \{F_{3,1}, F_{3,e_1}\}, \{F_{3,e_2}, F_{3,e_1e_2}\}$ (内部 facets pair 对应平凡生成元, 我们暂不考虑). 给所有道路一个指向 p_0 的方向, 不妨设 p_0 为基本群基点, 取生成元为

$$\begin{cases} x_{2,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_2}})^{-1} \\ x_{1,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,e_1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{1,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{1,e_2}})^{-1} \\ x_{2,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{2,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{3,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,1}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1}})^{-1} \\ x_{3,e_2} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,e_2}} \cdot (\overrightarrow{a_{3,e_1e_2}})^{-1} \end{cases}$$

在余 2 维面 p_1, p_2, p_3, p_4 处确定四组关系:

在 p_1 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1} = x_{1,e_1}$;

在 p_2 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1}x_{2,e_2} = x_{2,1}x_{1,e_1e_2}$, 即 $x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1} = x_{2,1}(x_{1,e_1})^{-1}$;

在 p_3 处胞腔对应的关系为 $x_{2,1}x_{3,e_1e_2} = x_{3,1}x_{2,e_1}$, 即 $x_{2,1}(x_{3,e_2})^{-1} = x_{3,1}x_{2,e_1}$;

在 p_4 处胞腔对应的关系为 $x_{3,1} = x_{3,e_2}$.

从而

$$\begin{aligned}\pi_1(M) &= \langle x_{2,e_1}, x_{1,e_1}, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,e_2} | x_{1,1}(x_{1,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{3,e_2})^{-1}, \\ &\quad x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1}x_{2,e_1} \rangle \\ &\cong \langle x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1} | x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1} \rangle\end{aligned}\quad (4)$$

即 $\pi_1(M) \cong \langle x, y, z | xy^{-1}xzy^{-1}z \rangle$

2.3 Universal Covering Space

设 $\pi : M \rightarrow P$ 为单多面体 P 上的 small cover. P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$. 下面我们将构造 small cover $\pi : M \rightarrow P$ 的 (万有) 覆盖空间

$$\mathcal{M} = Q \times \pi_1(M) / \sim \quad (5)$$

(Q, ν_1) 的外 facet F_{i,g_1} 与 (Q, ν_2) 的外 facet F_{j,g_2} 粘当且仅当 $i = j$, $g_1(g_2)^{-1} = \lambda(F_i)$, $\nu_1(\nu_2)^{-1} = x_{i,g_1}$ (或者等价的 $\nu_2(\nu_1)^{-1} = x_{i,g_2}$), 其中 $\nu_1, \nu_2 \in \pi_1(M)$, Q 为上文构造的多面体. 下面为记号方便, 我们把 (Q, ν) 简记为 Q_ν , Q_ν 的 facet $F_{i,g}$ 记为 $F_{i,g}^\nu$.

下面我们将说明 \mathcal{M} 实际上只与单多面体 P 及 P 的面结构有关.

我们首先定义由 P 的面结构决定的 *right-angle Coxeter group* W_P 如下:

$$W_P = \langle F_1, \dots, F_m : F_i^2 = 1; (F_i F_j)^2 = 1, \forall F_i, F_j \in \mathcal{F}(P), F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle$$

Davis-Januszkiewicz [5] 中构造了

$$\mathcal{L} = (P \times W_P) / \sim \quad (6)$$

其中 $(x_1, g_1) \sim (x_2, g_2)$ 当且仅当 $x_1 = x_2$, $g_1(g_2)^{-1} \in \langle F : x \in F, F \in \mathcal{F}(P) \rangle$. 且由 Davis [3] (Theorem 10.1 and 13.5) 知 \mathcal{L} 为单连通的.

设 $\tilde{\lambda} : \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 为 $\mathcal{F}(P)$ 上特征映射诱导的群同态, 定义映射 ψ 为投射 $W \rightarrow W^{ab} \cong \mathbb{Z}_2^m$ 和 $\tilde{\lambda}$ 的复合.

引理 2.2 设 $\pi : M \rightarrow P$ 为单多面体 P 上的 *small cover*, 则有群短正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\alpha} W_P \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2^n \rightarrow 1 \quad (7)$$

其中 $\pi_1(M) \cong \ker \psi$ 为 W_P 的子群, $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$

证: 在 Davis-Januszkiewicz [5] 中, 我们知道有上面正合列成立, 且 $\pi_1(M) \cong \ker \psi$ 为 W_P 的正规子群. 不妨设 p_0 附近的 facets 为 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, $\lambda(F_i) = e_i$, 考虑 $\gamma: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow W_P$, $\gamma(e_i) = F_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $\psi \circ \gamma = \text{id}_{\mathbb{Z}_2^n}$, 即上面短正合列是可裂的, 故 $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$. \square

引理 2.3 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$

证明: \mathcal{L} 和 \mathcal{M} 之间的同胚是由分裂短正合列 7 给出的,

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\alpha} W_P \begin{array}{c} \xleftarrow{\psi} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1$$

其中 $\psi \circ \gamma = \text{id}_{\mathbb{Z}_2^n}$.

我们定义 $h: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ via. $h(x, \omega) = (x_g, \nu)$, 其中 $g = \psi(\omega) \in \mathbb{Z}_2^n$, $\nu = \beta(\omega) \in \pi_1(M)$ 是唯一的.

定义 $h^{-1}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ via. $h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \gamma(g)\alpha(\nu))$.

$h \circ h^{-1}(x_g, \nu) = h(x, \gamma(g)\alpha(\nu)) = (x_g, \nu)$;

$h^{-1} \circ h(x, \omega) = h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \gamma(g)\alpha(\nu)) = (x, \omega)$.

h, h^{-1} 局部上为 identity, 故为局部同胚.

所以 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$ \square

注 在我们的胞腔构造过程中, 设 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 为顶点 p_0 附近的 n 个 facets, $\lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \dots, n$, 从而我们可以把 2^n 个 P 的 copy 在 p_0 处粘在一起得到 Q , 即取 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 为 Q 的内 facets, 最后得到基本群的表达形式如 (3). 这在引理 2.2 的短正合列中, 等价于 $\psi(F_i) = \lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \dots, n$. 所以 $\psi(F_k) = \lambda(F_k) = \prod e_i^{\delta_i} = \prod \lambda(F_i)^{\delta_i} = \prod \psi(F_i)^{\delta_i}$, 即 $\psi(F_k (\prod F_i^{\delta_i})^{-1}) = 1$, 其中 $k = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n; \delta_i$ 表示 $\lambda(F_k)$ 上有无 e_i 分量. F_1, F_2, \dots, F_n 在 M 中对应的闭路是可缩的, 所以 F_k 对应的闭路是 $\ker \psi$ 的生成元. 我们不妨设 $\alpha(x_{k,1}) = F_k (\prod F_i^{\delta_i})^{-1}$, 则 $F_k = \alpha(x_{k,1})\gamma(\lambda(F_k)) \triangleq (x_{k,1}, \lambda(F_k))$. 进一步我们设 $\varphi: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(M))$ via $\varphi_g(\nu) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(\nu)\gamma(g^{-1})) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(\nu)\gamma(g))$, 其中 $g \in \mathbb{Z}_2^n, \nu \in \pi_1(M)$. 定义 $(\nu_1, g_1) \cdot (\nu_2, g_2) = (\nu_1\varphi_{g_1}(\nu_2), g_1g_2)$. 所以 h 的定义可以从 W_P 的生成元 F_i 延拓到整个群 W_P 中.

接下来我们将证明 \mathcal{M} 为 M 的万有覆叠空间. \mathcal{M} 到 M 有一个自然的

投射, 我们记为 $\Pi: \mathcal{M} \longrightarrow M$.

$$\begin{array}{ccc} Q \times \pi_1(M) & \xrightarrow{q'} & Q \times \pi_1(M) / \sim = \mathcal{M} \\ \tilde{\Pi} \downarrow & & \downarrow \Pi \\ Q & \xrightarrow{q} & Q / \sim = M \end{array}$$

其中 q, q' 是粘合 Q 和 Q 的 copy 的 facets 决定的商映射.

定理 2.4 \mathcal{M} 为 M 的万有覆叠空间.

证明: 由 \mathcal{M} 的定义知 $\mathcal{M}/\pi_1(M) = M$. 下面只需要证明 $\forall x \in \mathcal{M}$, 存在包含点 x 的开邻域 U , 使得不同的 $\nu \in \pi_1(M)$, $\nu(U)$ 不交.

当点 $x \in Q^\circ$ 时, 取包含点 x 的一个实心开球邻域 U , 使得 $U \subset Q^\circ$, 此时 $\nu(U)$ 落在不同指标的 Q 中, 是不交的. 当点 $x \in \text{out}(Q) = \partial Q$ 时, 我们取

若 $q^{-1}(x) \subset \partial Q$, 我们记 $f(x)$ 为 $\text{out}(Q)$ 中包含 x 为相对内点的最小的面, 不妨设 $f(x)$ 为余 k 维的, 则我们取包含点 x 的实心开球邻域 U , 满足 U 与包含点 x 的 Q 的 copy 的交都是 $\frac{1}{2^k}$ 球, 这时 $\nu(U)$ 显然也是不交的.

所以 \mathcal{M} 是 M 一个正则的覆叠空间, 又 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$ 是单连通的, 故为万有覆叠空间. \square

设 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 为上面覆叠空间 $\Pi: \mathcal{M} \longrightarrow M$ 的覆叠变换群. 由于 \mathcal{M} 是单连通的, 所以 $\pi_1(M) \cong D(\mathcal{M}, \Pi, M)$. 下面我们根据上面构造的 cell structure (的 2-skeleton) 来刻画 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的生成元.

对于 Q 中的每个 facet $F_{i,g}$, 我们定义 \mathcal{M} 上的面映射 $\Gamma_{i,g}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. $\forall x \in \mathcal{M}$, 存在某个 Q_{ν_1} , 使得 $x \in Q_{\nu_1}$, 由 \mathcal{M} 的构造知存在唯一的 Q_{ν_2} , 使得 $F_{i,g} \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$, 我们定义 $\Gamma_{i,g}(x)$ 为 $\Pi^{-1}(\Pi(x)) \cap Q_{\nu_2}$ 中的唯一的一点, 这样定义的 $\Gamma_{i,g}$ 显然是 well-defined 的. $\Gamma_{i,g}$ 的连续性也是显然的.

类似引理 2.1 容易验证

引理 2.5 1、 $\Gamma_{i,g}\Gamma_{i,\phi_i(g)}(x) = x$.

2、若存在 $F_{j,g'} (\neq F_{i,g}) \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$, 则 $\Gamma_{j,g'}(x) = \Gamma_{i,g}(x)$.

3、若 facet $F_{i,g} \in \text{in}(Q)$, 此时 $Q_{\nu_1} = Q_{\nu_2}, \Gamma_{i,g} = \text{id}$.

进一步我们有

引理 2.6 面映射 $\Gamma_{i,g}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ 为 \mathcal{M} 上的覆叠变换.

命题 2.7 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 可以由面映射 $\{\Gamma_{i,g}\}$ 来刻画.

证明: \mathcal{M} 为单连通的, 此时 $\pi_1(M, p_0)$ 到 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的满同态实际上为群同构, 它将 $[x_{i,g}] \in \pi_1(M, p_0)$ 映为 $\Gamma_{i,g}$. 我们不妨取点 $x = \pi^{-1}(p_0) \in M$, 则 $\{\Pi^{-1}(x)\}$ 实际上是每个 Q 中 p_0 的 copy. 我们取第 1 个 Q_1 中的 p_0 的 copy, 记为 y_0 , 其中 1 为 $\pi_1(M)$ 的单位元. 所以我们只需要验证 $\Gamma_{i,g}(y_0) = \widetilde{x_{i,g}}(1)$, 其中 $\widetilde{x_{i,g}}$ 是 $x_{i,g}$ 在 \mathcal{M} 中的一段提升. $\Gamma_{i,g}(y_0)$ 实际上是 $Q_{x_{i,g}}$ 中的 p_0 的 copy, 即 $\widetilde{x_{i,g}}(1)$. 所以 $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ 的生成元可以自然的选为 Q 的 facets 对应的面映射. \square

综上, 我们有下面结论:

定理 2.8 $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow M$ 为 M 的万有覆叠空间, 复叠变换群 $D(\mathcal{L}, \Pi, M) \cong \pi_1(M)$ 可以由 Q 的 facets 对应的面映射生成.

2.4 Naturality of the Cell Structure of Small Cover

最后我们解释一下我们这种胞腔结构的自然. 我们考虑 $M[2]$, 它的 0-skeleton 只有一个点 p_0 ; 它的 1-skeleton 是 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 的一点并, 对应 $\pi_1(M)$ 的生成元; 它的每一个二维胞腔对应 $\pi_1(M)$ 的一个关系. 即 $M[2]$ 是 $\pi_1(M, p_0)$ 的 *presentation complex*. 进一步, 我们将 M 的这种胞腔结构提升到它的万有覆叠空间 \mathcal{M} 中, 则 $\mathcal{M}[2]$ 实际上是 $\pi_1(M, p_0)$ 的 *Cayley 2-complex*.

事实上, 将单多面体 P 视为一个 right angle orbifold, 则 small cover $\pi: M \rightarrow P$ 为 P 上的 covering orbifold. 由于 M 为一个闭流形, P 为一个 good orbifold, 则 P 的单连通的 covering orbifold \mathcal{M} 为它的万有 covering orbifold. 进一步, covering orbifold $\tau: \mathcal{M} \rightarrow P$ 为 covering space $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow M$ 和 small cover $\pi: M \rightarrow P$ 的复合. 它们的覆叠变换群分别为 $W_P, \pi_1(M)$ 和 \mathbb{Z}_2^n . (Davis-Januszkiewicz [5])

我们定义 π_1^{orb} 为 universal orbifold cover $\tau: \mathcal{M} \rightarrow P$ 的覆叠变换群. 即 $\pi_1^{orb}(P) = W_P$, 此时 $\pi_1^{orb}(P)$ 和 $\pi_1(M)$ 存在自然的子群关系. 我们对单多面体 P 做类似的 cubical 分解, 则某种意义上, $P[2]$ 为 W_P 的 presentation complex. 把这种分解提升到 \mathcal{M} 中, 则 $[2]$ 实际上是 W_P 的一个 Cayley 2-complex. (Davis [4])

3 π_1 -injective

设 F 为单多面体 P 的任意一个 facet, 则它依然是单凸的, 且 $\mathcal{F}(F)$ 可以继承 $\mathcal{F}(P)$ 上的染色, 进而可以构造 F 上的 small cover $\pi_F : M_F \rightarrow F$. 在 Davis-Januszkiewicz [5] Lemma 1.3 中, 我们知道 M_F 为 M 的 $n-1$ 维连通子流形.

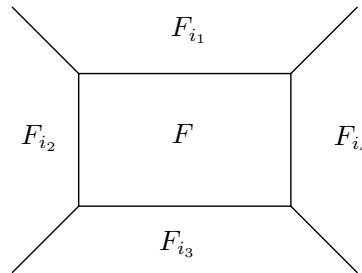
在这一节中, 我们利用上面的胞腔结构, 考虑 $\pi_1(M_F)$ 与 $\pi_1(M)$ 之间的关系. 我们设多面体 F, P 对应的 Coxeter group 分别为 $W_P = \langle G : R \rangle$, $W_F = \langle G_F : R_F \rangle$. 我们取定 F 的一个顶点 p_0 为基点, 我们将多面体 P 的 copy 在 p_0 处粘在一起, 从我们构造的胞腔结构中, 得到 M, M_F 的基本群的表示, 如 (3), 记 $\pi_1(M, p_0) = \langle \tilde{G} : \tilde{R} \rangle$, $\pi_1(M_F, p_0) = \langle \tilde{G}_F : \tilde{R}_F \rangle$.

下面我们设 $\rho : F \rightarrow P$ 为面包含映射, $\rho_* : W_F \rightarrow W_P$ 为 ρ 决定的 Coxeter group 之间的群同态, 设 $\tilde{\rho} : M_F \rightarrow M$ 为 ρ 决定的 Facet 子流形到 M 的包含映射, $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_F) \rightarrow \pi_1(M)$ 为它诱导的基本群之间的群同态. 下面不妨设 F 为单多面体 P 的第 1 个 facet, $\lambda(F) = e_1$.

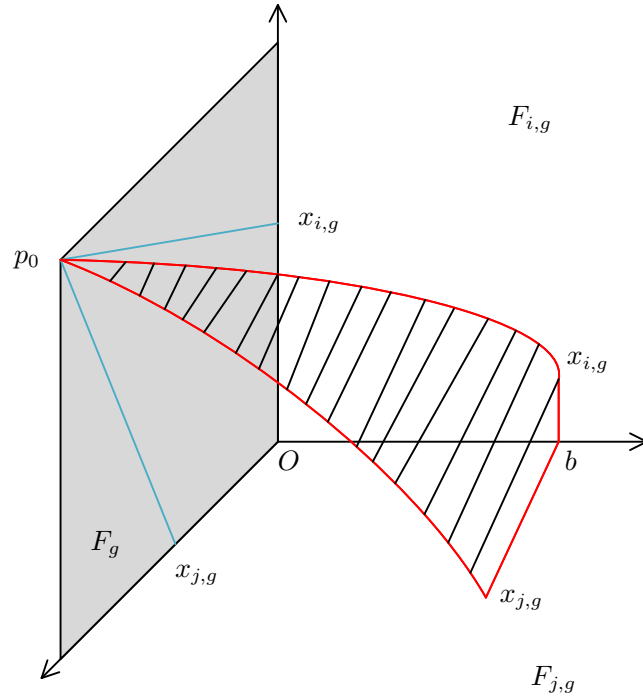
引理 3.1 1、 G_F 与 $\rho_*(G_F)$, R_F 与 $\rho_*(R_F)$ 都为一一的;

2、 \tilde{G}_F 与 $\tilde{\rho}_*(\tilde{G}_F)$, \tilde{R}_F 与 $\tilde{\rho}_*(\tilde{R}_F)$ 都为一一的.

证明: 1、设 P 中与 F 相交的 Facets 集为 $\mathcal{F}_1 = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_m}\} \subset \mathcal{F}(P)$, 则 $G_F = \mathcal{F}(F) = \{F_{i_1} \cap F, F_{i_2} \cap F, \dots, F_{i_m} \cap F\}$. 所以自然地, $\rho_*(F_{i_k} \cap F) = F^{-1}F_{i_k}F = FF_{i_k}F$. 设 $\beta : W_P \rightarrow W_P$ via, $\omega \mapsto F\omega F$ 为 W_P 上的自同构, 它的逆仍为 β . 记 $\rho'_* \triangleq \beta \circ \rho_*$, 则 $\rho'_*(F_{i_k} \cap F) = F_{i_k}$. 进一步, F 中余二维面 (不妨) $(F_{i_1} \cap F) \cap (F_{i_2} \cap F) \neq \emptyset$ 决定的关系 $((F_{i_1} \cap F)(F_{i_2} \cap F))^2$ 在 ρ'_* 下的像为 $(F_{i_1}F_{i_2})^2$. 即 ρ'_* 把 W_F 中的生成元和关系映为群 W_P 中的生成元和关系. 注意到 $\rho_* = \beta \circ \rho'_*$, 故 $\rho_*(G_F), \rho_*(R_F)$ 也对应群 W_P 中的生成元和关系.



2、我们下面证明 M_F 的二维骨架 $M_F[2]$ 可以自然的包含到 $M[2]$ 中. 我们分别将 $\{F_g\}_{g \in \mathbb{Z}_2^{n-1}}$ 与 $\{P_g\}_{g \in \mathbb{Z}_2^n}$ 在点 p_0 处粘合在一起, 分别得到多面体 Q 与 $Q_F = F \times \mathbb{Z}_2^{n-1} / \sim$. 则 $out(Q_F) \subset out(Q), in(Q_F) \subset in(Q)$. 设 $f_i = F_i \cap F \neq \emptyset$ 为 F 的一个任意的 facet, $f_i \cap f_j = F_i \cap F_j \cap F \neq \emptyset$ 为 F 的一个任意的余 2 维面. 设 $f_{i,g} = F_{i,g} \cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{1,\phi_i(g)}$ 为 Q_F 中的任意一个 facet, 其中 $\{F_{1,g}, F_{1,\phi_i(g)}\}$ 为 $\{P_g : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 中的 facets-pair. 由引理 2.1, 我们知道 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路与 $F_{i,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)}$ 在 Q 中对应的有向闭路 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$ 是定点同伦的, 所以我们不妨记 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路为 $x_{i,g}$. 对于 Q_F 中的任意一个余 2 维面 $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} \neq \emptyset$ 所对应的二维胞腔 D_l 与 $F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)}$ 所对应的二维胞腔 $D_g, D_{\phi_i(g)}$ 也是定点同伦的, 所以在 $\pi_1(M_F)$ 中, $f_{i,g} \cap f_{j,g}$ 决定的关系与 $F_{i,g} \cap F_{j,g} (\cap F_{1,g} \neq \emptyset)$ 或者 $F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)} (\cap F_{1,\phi_i(g)} \neq \emptyset)$ 在 $\pi_1(M)$ 中决定的关系对应. 所以 M_F 的基本群为



$$\pi_1(M_F) = \langle x_{i,g}, i = i_1, i_2, \dots, i_{m'}, g \in \mathbb{Z}_2^{n-1} : x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g \\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)} = 1, \forall f_{i,g} \cap f_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (8)$$

其中 $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_i(g)} \cap F_{1,\phi_i(g)} \neq \emptyset$. 即形式上 $\pi_1(M_F)$ 的生成元集 \tilde{G}_F 和关系集 \tilde{R}_F 都可为 $\pi_1(M)$ 的生成元集 \tilde{G} 和关系集 \tilde{R} 的子集. 进一步, 这种关系是映射 $\tilde{\rho} : M_F \rightarrow M$ 所诱导的, 即 $\tilde{\rho}_*$ 把生成元映为生成元, 把关系映为关系. \square

进一步对一般的 k 维面 f , 由归纳知, 则 W_f 和 W , $\pi_1(M_f)$ 和 $\pi_1(M)$ 都有上面的关系. 不妨仍记 $\rho : f \rightarrow P$ 为面包含映射, $\rho_* : W_f \rightarrow W$ 为 Coxeter group 之间的群同态, $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_f, p_0) \rightarrow \pi_1(M, p_0)$ 为基本群之间的群同态, 则

推论 1 1、 G_f 与 $\rho_*(G_f)$, R_f 与 $\rho_*(R_f)$ 都为一一的;
2、 \tilde{G}_f 与 $\tilde{\rho}_*(\tilde{G}_f)$, \tilde{R}_f 与 $\tilde{\rho}_*(\tilde{R}_f)$ 都为一一的.

由上面引理, W_F 中的文字可以用 W_P 中的生成元和关系来表示, $\pi_1(M_F)$ 可以用 $\pi_1(M)$ 中的生成元和关系来表示. 即 $\rho'_*(\omega) = \omega, \tilde{\rho}_*(\nu) = \nu, \forall \omega \in W_F, \nu \in \pi_1(M_F)$. 但一般 ρ'_* 与 $\tilde{\rho}_*$ 不一定是单同态. 如

例 6 取 $P = I \times \Delta^2$ 为三棱柱, 共有 5 个 facets $\{F_i\}_{i=1,2,3,4,5}$, 我们给上下底面 F_1, F_2 染色 e_1 , 侧面 F_3, F_4, F_5 染色为 $e_2, e_3, e_1e_2e_3$, 由 P 的 h -vector 知, $\pi_1(M)$ 有两个生成元和两个关系, 它的任意一个侧面上的 small cover 基本群有两个生成元, 一个关系.

$$\text{即 } \pi_1(M) = \langle x, y : x^2 = yxyx^{-1} = 1 \rangle, \pi_1(M_F) = \langle x, y : yxyx^{-1} = 1 \rangle$$

$$\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_F) \longrightarrow \pi_1(M)$$

满足 $\tilde{\rho}_*(x) = x, \tilde{\rho}_*(y) = y$, 但 $\tilde{\rho}_*$ 非单.

此时 ρ'_* 也不是单的, 等价地 ρ_* 不单. 不妨考虑 F_5 , 则 $F_3 \cap F_4$ 在 W_P 中决定的关系 $(F_3F_4)^2 = 1$ 是 $((F_3 \cap F_5)(F_4 \cap F_5))^2 (\neq 1) \in W_{F_5}$ 在 ρ'_* 下的像.

定义 2 我们称一个单纯复形 K 为 *flag* 的, 如果 K 中两两相连的顶点集张成 K 中的一个单形. 等价地, K 中不含维数 ≥ 2 的空单形.

我们称一个单多面体 P 为 *flag* 的, 如果 $K = \partial P$ 为 *flag* 的. 等价地, P 中两两相交的面必有公共的交.

例 7 1、一个 m 边形为 *flag* 的, 当且仅当 $m > 3$.

2、flag 多面体的面是 flag 的.

下面证明当 P 为 flag 时, ρ_* 和 $\tilde{\rho}_*$ 都是单的.

引理 3.2 当 P 为 flag 时, $\rho_* : W_F \longrightarrow W_P$ 为单的.

证明: $\rho_* = \beta \circ \rho'_*$, β 为同构, 故 ρ_* 单当且仅当 ρ'_* 单. 下面证明当多面体 P 是 flag 时, ρ'_* 是单的.

当单多面体 P 为 flag 时, 若 $F \cap F_i \neq \emptyset, F \cap F_j \neq \emptyset$, 则 $F \cap F_i \cap F_j \neq \emptyset$, 即 P 中 F 附近的任意余二维面 $f \subset P$ 对应的关系一定可以继承到 W_F 中. 这保证了下面这个态射的定义合理性. 我们构造群态射

$$\eta_* : W_P \longrightarrow W_F \quad (9)$$

满足 $\eta_*|_{G-G_F} = 1$, $\eta_*|_{G_F} = id$.

下面我们验证 η_* 定义的合理性. 我们考虑 W_P 中的关系在 η_* 下的像是否仍为 W_F 的单位元. 设 P 中与 F 相交的 facets 集 (不包含 F) 为 $\mathcal{F}_1 (= G_F)$, 剩余的 facets 我们记为 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(F) - \mathcal{F}_1$. 则 η_* 将 \mathcal{F}_2 中 facets 对应的生成元映为 1.

对于 W_P 的关系 $F_i^2 = 1$, 当 $F_i \in \mathcal{F}_1$ 时, $\eta_*(F_i^2) = (F_i \cap F)^2 = 1$; 当 $F_i \in \mathcal{F}_2$ 时, $\eta_*(F_i^2) = 1$.

P 中的任意余二维面 $f = F_i \cap F_j \neq \emptyset$ 决定的关系为 $(F_i F_j)^2 = 1$. 若 F_i, F_j 都属于 \mathcal{F}_1 , 则由 P 的 flag 性质知 $f \subset F$, 从而 η_* 将 $f \subset P$ 所对应的关系映为 W_F 的一个关系; 若 F_i, F_j 都不属于 \mathcal{F}_1 , 则对应关系在 η_* 下的像为 1; 若 F_i, F_j 分别属于 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, 不妨设 $F_i \subset \mathcal{F}_1, F_j \subset \mathcal{F}_2$, 则 $\eta_*(F_i F_j F_i F_j) = \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) = (F_i \cap F)^2 = 1$.

所以对任意关系 $r \in W_P, \eta_*(r) \equiv 1$, 即 η_* 为 well-defined 的群同态.

最后容易验证 $\eta_* \circ \rho'_* = id : W_F \longrightarrow W_F$, 即 ρ'_* 为单的. \square

定理 3.3 P 为 flag 时, $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_F, p_0) \longrightarrow \pi_1(M, p_0)$ 为单同态.

证明: 考虑

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M_F) & \xrightarrow{\tilde{\rho}_*} & \pi_1(M) \\ \downarrow (\pi_F)_* & & \downarrow \pi_* \\ W_F & \xrightarrow{\rho_*} & W_P \xrightleftharpoons[\beta]{\beta(\cong)} W_P \end{array}$$

设 x_k 为 $\pi_1(M_F)$ 的 $F_k \cap F$ 对应的一个生成元, 则 $\pi_* \circ \tilde{\rho}_*(x_k) = \pi_*(x_k) = F_k(\prod F_i^{\delta_i})^{-1}$; $\rho_* \circ (\pi_F)_*(x_k) = \rho_*(F_k(\prod F_i^{\delta_i})^{-1}) = \beta \circ \rho'_*(F_k(\prod F_i^{\delta_i})^{-1}) = \beta(F_k(\prod F_i^{\delta_i})^{-1}) = FF_k(\prod F_i^{\delta_i})^{-1}F$. 所以对 $\forall \nu \in \pi_1(M_F)$, $\beta \circ \rho_* \circ (\pi_F)_*(\nu) = \rho'_* \circ (\pi_F)_*(\nu) = \pi_* \circ \tilde{\rho}_*(\nu)$. 即上面图表离交换相差 W_P 上的一个自同构.

所以当 P 为 flag 时, ρ'_* 为单的, 所以 $\rho'_* \circ (\pi_F)_* = \pi_* \circ \tilde{\rho}_*$ 为单的, 从而 $\tilde{\rho}_*$ 为单的.

事实上, 考虑下面图表

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_1(M_F) & \xrightarrow{(\pi_F)_*} & W_F & \xrightarrow{\psi_F} & \mathbb{Z}_2^{n-1} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \tilde{\rho}_* & & \downarrow \rho_* & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(M) & \xrightarrow{\pi_*} & W_P & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1 \\
 & & & & \downarrow \beta(\cong) & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

记 $\theta : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{n-1} = \mathbb{Z}_2^n / \langle e_1 \rangle$ 为特征映射诱导的商映射. 则 $\theta \circ \psi \circ \rho'_*(F_k \cap F) = \theta \circ \psi(F_k) = \theta(\lambda(F_k)) = \lambda(F_k) / \langle e_1 \rangle = \psi_F(F_k \cap F)$, 上面图表中第三个竖向群同态取为 θ 的可裂逆, 则右边矩形也是交换的, 此时由五引理也可以得到 $\tilde{\rho}_*$ 单. \square

由于 flag 多面体的 face 也是 flag 的, 所以对任意 k 维面 f , 由归纳知, 也有类似的结论.

推论 2 单多面体 P 为 flag, $\rho_* : W_f \longrightarrow W$ 和 $\tilde{\rho}_* : \pi_1(M_f, p_0) \longrightarrow \pi_1(M, p_0)$ 为单同态.

定义 3 我们称一个连通闭流形 M 为 aspherical 的, 若 $\pi_k(M) = 0, k \geq 2$.

Borel conjecture 设 $f : M \longrightarrow N$ 为同伦等价, 其中 M, N 为同维数闭的 aspherical 流形, 则 f 同伦于一个同胚映射.

定理 3.4 ([6]) *Let M be a small cover of P . Then the following statements are equivalent.*

- 1、 M is aspherical.
- 2、The boundary of P is dual to a flag complex.
- 3、The natural piecewise Euclidean metric on the dual cubical cellulation of M is nonpositively curved.

定理 3.5 ([8]) *Let $f : N \longrightarrow M$ be a homotopy equivalence between closed smooth manifolds such that M supports a non-positively curved Riemannian metric. Then N and M are stably homeomorphic; i.e.*

$$f \times id : N \times \mathbb{R}^{m+4} \longrightarrow M \times \mathbb{R}^{m+4} \quad (10)$$

is homotopic to a homeomorphism where $m = \dim M$.

上面定理说明, 当流形 M 是一个 non-positively curved Riemannian 流形, 且 $\dim(M) \neq 3, 4$, Borel conjecture 成立. 可以验证 small cover 为这样的闭流形.

推论 3 设 $n(> 4)$ 维闭流形 M, N 都为 flag 单多面体上的 small cover, 若 $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$, 则 M 和 N 是同胚的.

对于 3 维情况, 在 [1] 中指出, Borel conjecture 对所有的三维流形都成立. 我们感兴趣的是 aspherical small cover M 是不是一个 Haken manifold

定义 4 A Haken 3-manifold is a compact 3-manifolds which are

- (1) P^2 -irreducible and
- (2) sufficiently large – i.e. contain a properly embedded, 2-sided, incompressible surface.

命题 3.6 P^2 -irreducible M with $H_1(M)$ infinite is a Haken manifold.

证明: 由 Hempel [10] Lemma 6.6 知 M 包含一个 properly embedded 2-sided, nonseparating incompressible surface S . \square

引理 3.7 (* 待证) 设 M 是 3 维 flag 多面体 P 上的一个 small cover, 则 $H_1(M)$ 是 infinite 的.

证明:

推论 4 Aspherical small covers are Haken manifolds.

证明: 设 P 为三维单的 flag 多面体 (不包含单形面), M 为 P 上的 small cover, M 是 aspherical 的. 由 Sphere Theorem, 我们知道三维闭可定向流形是 aspherical 的, 当且仅当它是 irreducible 和 π_1 infinite 的. 进一步为 P^2 -irreducible, 又 $H_1(M)$ 为 infinite 的, 故 aspherical small cover M 为 Haken 流形. \square

定理 3.8 在三维 small cover 范畴中, 下列条件等价.

- (1) M 是 *aspherical* 的,
- (2) M 是 P^2 -irreducible 的.
- (3) M 是 *Haken* 的.

进一步, 此时 $H_1(M)$ 是 *infinite* 的.*

可定向 aspherical 流形为 irreducible 的, 故为 prime 的, 故同伦等价诱导同胚. 尽管 $\{M_F\}$ 中不一定存在 M 的 two-sided incompressible surface (考虑正十二面体上的 small cover), 但 M_F 拥有许多好的性质, 比如包含映射诱导的基本群同态为单的. 特别地, 我们沿着 M_F 去切 M , 这在我们构造的胞腔结构中, 相当于把与 F 横截相交的那些一维闭路 $\{x\}$ 切开, 或者给面 F 一个平凡的 color. 此时对应在我们上面构造的胞腔结构中, 是把 facets 对应的闭路切开, 从而这些闭路决定的生成元变为平凡元, 基本群得到化简. 所以从这里我们猜测, 类似于 Hierachy of Waldhausen 的操作对 (高维) aspherical small cover 也是有效的. 这对高维 small cover 中的 borel 猜想的证明提供一种可行的 idea. 而且 Davis 等一些人已经在做了一些这方面的工作, 比如对高维 Haken 流形的推广.

参考文献

- [1] M. Aschenbrenner, S. Friedl and H. Wilton, 3-manifold groups, *Mathematics* (2013), 1-149
- [2] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, Torus actions and their applications in topology and combinatorics, *University Lecture Series, 24. American Mathematical Society, Providence, RI*, (2002)
- [3] M.W. Davis, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, *Ann. Math. (2)* 117 (1983), 293-325.
- [4] M.W. Davis, Exotic aspherical manifolds, *Topology of high-dimensional manifolds*. (Trieste, 2001), 371-404.
- [5] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, Convex polytopes, coxeter orbifolds and torus actions, *Duke Math. J.* 62 (1991), 417-451.
- [6] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Nonpositive curvature of blow-ups, *Selecta Math.(N.S.)* 4 (1998), 491-547.
- [7] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Fundamental groups of blow-ups, *Advances in mathematics*. 177 (2003), 115-179.
- [8] F.T. Farrell, The Borel conjecture, *Topology of high-dimensional manifolds*. (Trieste, 2001), 225-298.
- [9] A. Hatcher, Spaces of Incompressible Surfaces, *Mathematics*. (1999).
- [10] J. Hempel, 3-manifolds, *Annals of Mathematics studies*. 86 (1978).
- [11] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.* (2)87 (1968), 56-88.
- [12] S. Kuroki, M. Masuda, and L. Yu, Small covers, infra-solvmanifolds and curvature, *Forum mathematicum*. 27(5)(2015), 2981-3004
- [13] L. Yu, Crystallographic groups with cubic normal fundamental domain, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B39, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto*. (2013), 233-244