Fundamental Groups of Small Covers

1 Introduction

1.1 Small Cover

凸多面体 P 是指 $\mathbb{R}^n$ 中非空有限多个点集的凸包，或者等价的是 $\mathbb{R}^n$ 中有限个半空间的有界交，即

$$P = conv\{p_1, p_2, \cdots, p_\ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l_i, x\rangle \geq -a_i, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

其中 l_i 为 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的线性函数，$a_i \in \mathbb{R}$.

凸多面体的维数就是指凸包或者有界交的维数。若无特殊说明，本文中的所考虑的多面体均指 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维凸多面体，记为 P. 我们把 P 的边界记为 K. 把 P 的内部记为 P°. 凸子集 $F \subset P$ 称为 P 的面，若 F 是多面体 P 与某一个半空间 $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x\rangle \geq -a\}$ 的交，且 $P^\circ \cap \partial V = \varnothing$. 子集 $\varnothing$ 和 P 本身都为 P 的面，称为平凡面；其他的面称为真面. P 的 0 维面称为 P 的顶点，P 的 1 维面称为 P 的边，P 的 $n-1$ 维面称为 P 的 *facet*. 记 f_i 为 P 的 i 维面的个数，称 $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ 为 P 的 f*-vector*. 取 $f_{-1} = 1$，则 P 的 h*-vector* $\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, \cdots, h_n)$ 由下面等式定义

$$h_0 t^n + \cdots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}$$

由 Dehn-Sommerville 关系知 $h_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \cdots, n$，为方便我们在本文中将 P 的 facets 的个数记为 $f_{n-1} = m$，即 P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$.

我们称多面体 P 是单（simple）的，若 P 的每个顶点恰好是 P 中 n 个 facets 的交，等价地，每个顶点处恰好有 n 条边. 单多面体中任意余维数为 k 的面 f 总可以 (唯一) 表示为 $f = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$，其中 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 为包含 f 的 facets.

取 $\mathbb{Z}_2=\{1,-1\}$ 为二元乘法群或者模空间，$\mathbb{Z}_2^n$ 表示它们的乘积，e_i 表示 $\mathbb{Z}_2^n$ 第 i 个标准向量. 设 P 为 n 维单凸多面体，$\mathcal{F}(P)$ 为 P 的 facets 集，对每一个 facet $F_i\in\mathcal{F}(P)$，我们定义一个染色 $\lambda(F_i)\in\mathbb{Z}_2^n$，使得对 P 的每一个顶点 $p=F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n$，满足 $span\{\lambda(F_1),\lambda(F_2),\cdots,\lambda(F_n)\}\cong\mathbb{Z}_2^n$. 进一步我们称 $\lambda:\mathcal{F}(P)\longrightarrow\mathbb{Z}_2^n$ 为下面将要构造的 small cover M 的示性函数. 需要注意的是，下文出现的多面体指数之间的乘法，均默认为群 $\mathbb{Z}_2^n$ 中的乘法运算.

注 对于任意单凸多面体，满足上面条件的染色不一定存在，参考 Davis-Januszkiewicz [5]. *Nonexample 1.22*（*Duals of cyclic ploytope*）

现在我们定义单凸多面体 P 上的 small cover. 对任意点 $x\in P$，记 $f(x)$ 为 P 中包含 x 为相对内点的唯一的面，例如 x 为 P 内部的点时，则 $f(x)=P$; x 为 P 的顶点时，则 $f(x)=F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n$，其中 $\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$ 为包含点 x 的 n 个 facets. 不妨设 $f(x)=F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_k$ 为 P 的任意一个固定的余 k 维面，记 $G_{f(x)}=\langle\lambda(F_1),\lambda(F_2),\cdots,\lambda(F_k)\rangle=\langle\lambda(F_i):x\in F_i\rangle$. 则定义 small cover 为

$$M=(P\times\mathbb{Z}_2^n)/\sim \tag{1}$$

$(x,g)\sim(y,h)$ 当且仅当 $x=y,g^{-1}h\in G_{f(x)}$. 这里 $G_{f(x)}<\mathbb{Z}_2^n$ 实际上是点 x 处的 *isotopy subgroup*，i.e. $\{g\in\mathbb{Z}_2^n:gx=x\}$. 进一步，设 $\pi:M\longrightarrow P$ 为一个自然的投射.

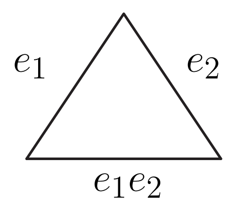
另外，我们也可以比较直观的构造一个 small cover. 任取 P 的一个顶点 p_0，不妨记 p_0 附近的 facets 为 $F_1,F_2,\cdots,F_n$，且对应 facet 上的染色为 $\lambda(F_i)=e_i,i=1,2,\cdots,n$. 首先我们把 P 放到 $\mathbb{R}^n$ 的第一卦限中，使得 p_0 与原点重合，第 i 个 facet F_i 落在 $x_i=0$ 的坐标面上. 然后我们将 P 沿着坐标面反射，得到原点附近的 P 的 2^n 个 copy，我们把这 2^n 个 P 的 copy 组成的多面体记为 Q，p_0 自然的落在 Q 的内部. 我们给第 g 个坐标卦限的 copy 一个自然的标号 $g\in\mathbb{Z}_2^n$. 最后我们再将 Q 剩余的 facets 按照染色信息成对粘合起来，具体第 g_1 个 P 的 copy 的 facet F_i 与第 g_2 个 P 的 facet F_j 粘，当且仅当 $i=j$, $g_1^{-1}g_2=\lambda(F_i)$. 这样就得到 P 上的 small cover M.

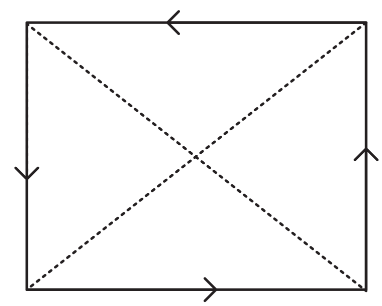
命题 1.1 *small cover 为连通闭流形.*

证明： 参考 Davis-Januszkiewicz [5]. 性质 *1.7*

1.2 Examples of Small Covers

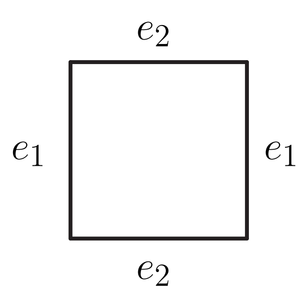
例 1 当 $P = \triangle^n$ 时，$\mathcal{F}(P)$ 上本质上只有一种染色，如 $n = 2$ 时，

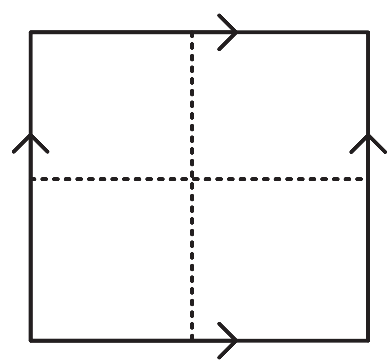


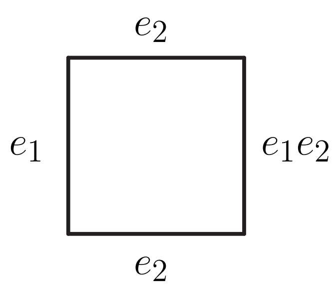


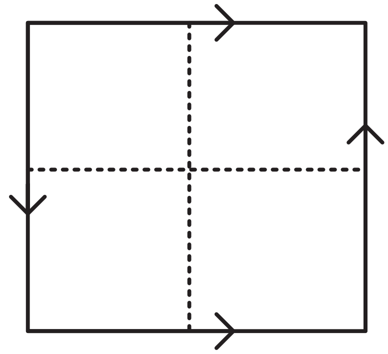
先将 P 在一个点处粘，得到一个大的四边形，由染色信息知它的对边沿着箭头方向粘，这是一个 $\mathbb{R}P^2$.

例 2 当 P^2 为四边形时，$\mathcal{F}(P)$ 上有下面两种不同的染色，









同样的操作，我们可以分别得到 T^2 和 Klein bottle.

例 3 （P^2 是一个 m 边形时）

M 是由 4 个 m-gon 沿边粘成的曲面，所以 M 的欧拉数为 $\chi(M) = 4 - m$. 当 m 为奇数时，M 为 $m-2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和；当 m 为偶数时，M 为 $m-2$ 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和或着为 $\frac{m-2}{2}$ 个 T^2 的连通和. 所以 small cover 决定了除 S^2 外的所有二维闭曲面.

在本文中，我们主要通过构造 small cover 的一种自然的胞腔分解来计算基本群的群表示. 我们由 Hurewicz 定理知道，胞腔复形的基本群可以由它们的二维骨架确定，所以在本文中，我们将构造 small cover 的胞腔结构，计算基本群时，仅考虑它们的二维骨架. 另外我们将 small cover M 的 k 维骨架记为 $M[k]$，将多面体 P 的 k 维骨架记为 $P[k]$.

2 Cell Structure

由于单凸多面体具有很好的组合性质，所以我们可以通过不同的方式来构造 Small cover 的胞腔结构. 比如由单多面体面结构诱导的胞腔结构；small cover 的 perfect 胞腔结构，见 Davis-Januszkiewicz [5].; 由单多面体的 cubical subdivision 所诱导的胞腔结构，见 Buchstaber [2]. 在下面一节我们在 Q 上作类似的 cubical subdivision， 来构造 small cover 一种更自然的胞腔分解，在这种胞腔结构，可以方便的得到 small cover 基本

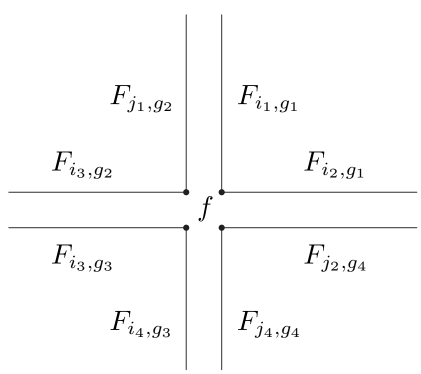
群的一个简洁的表示. 对于一般的单凸多面体 P，总存在它的一个 cubical subdivision，我们将这种分解拉到 small cover，我们自然地可以得到 small cover 一种胞腔分解. 而 Q 一般来说未必是单的，所以我们下面构造的这种分解不是严格意义的 cubical. 进一步，这多面体 Q 的面结构诱导的 M 的一个胞腔分解，我们下面构造的胞腔分解实际上是这种胞腔结构 Poincare 意义上的对偶.

2.1 Definitions and Constructions

同上面，我们首先将 $|\mathbb{Z}_2^n| = 2^n$ 个多面体 P 的 copy 在 P 的任一顶点 p_0 处粘合，得到一个大的 n 维多面体 Q，这里 Q 也可以看作将多面体 P 沿着它的一点 p_0 附近的 facets 作反射得到.

由 Q 的构造知，Q 中的每一个 P 自然地拥有一个标号 $g \in \mathbb{Z}_2^n$，我们将第 g 个多面体 P 记为 P_g，将 Q 中 P_g 的第 i 个 facet F_i 记为 $F_{i,g}$. 若 P_g 的 k 维面 $f_i^k \subset \partial Q$，此时 f_i^k 称为 Q 的外 *face*，否则称为 Q 的内 *face*，将 Q 的内、外面集分别记为 $in(Q), out(Q)$. 接下来把 Q 的外 facets 按照染色信息配对粘合就可以得到商空间 – small cover M. 我们注意到 M 的所有的 facets 上存在一种自然的配对结构. 配对的规则由 P 上的染色 λ 决定. 这种配对结构有助于我们描述 M 的基本群. 下面，我们引入 M 的面配对结构的定义.

定义 1 facets-pair structure of X.



设 X 为一个 n 维连通拓扑空间，X 可以由若干个单凸多面体 $\{P_g^n : g = 1, 2, \cdots, N\}$ 粘合而成，我们记 P_g 的第 i 个 facet F_i 为 $F_{i,g}$，并且满

足下面两个条件：

1、任意 facet F_{i,g_1} 唯一配对 F_{j,g_2}. 即存在一个同胚 $\tau_{i,g_1}: F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$ 与 $\tau_{j,g_1}: F_{j,g_2} \longrightarrow F_{i,g_1}$ 使得 $\tau_{i,g_1} = \tau_{j,g_2}^{-1}$. 我们称 $\widehat{F} = \{F_{i,g_1}, F_{j,g_2}\}$ 为一个 *facet* 对，称 F_{j,g_2} 为 F_{i,g_1} 的配对 *facet*.

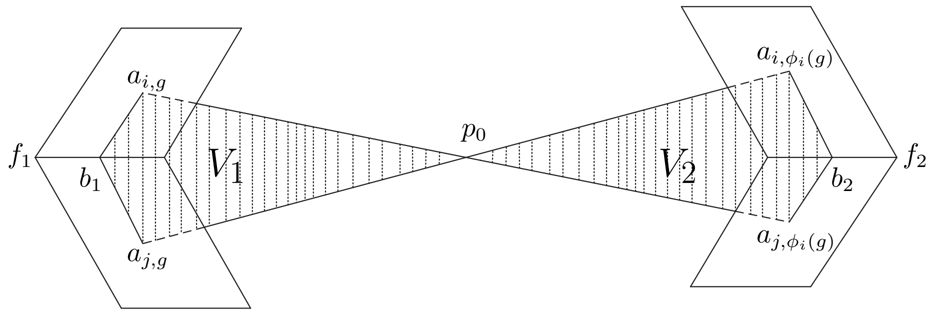
2、对任意余二维面 $f = F_{i_1,g_1} \cap F_{i_2,g_1}$，如果 $\tau_{i_1,g_1}(f) = F_{j_1,g_2} \cap F_{j_3,g_2}$，$\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{j_2,g_4} \cap F_{j_4,g_4}$，则 $\tau_{j_3,g_2}\tau_{i_1,g_1}(f) = \tau_{j_4,g_4}\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{i_3,g_3} \cap F_{i_4,g_3}$. 这里不排除 $F_{j_2,g_4} = F_{j_3,g_2}$ 或者 $F_{i_2,g_1} = F_{i_3,g_3}$.

则我们称 $\mathcal{S} = \{\widehat{F}_{i,g}, \tau_{i,g}\}$ 为 $\{P_l^n\}$ 上的一个 *facets-pairing structure*，$\tau_{i,g}: F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$ 为 $\mathcal{S}$ 的 *structure map*. 记一步，若 X 为闭的，我们称 $\mathcal{S}$ 是 M 的一个完全的 facets-pairing structure □

事实上，$\mathcal{F}(P)$ 上的示性函数 $\lambda: \mathcal{F}(P) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 决定了 M 上的一个配对结构. $F_{i,g_1} \sim F_{j,g_2}$ 当且仅当 $F_i = F_j$，$\lambda(F_i) = (g_1)^{-1}g_2$. 反之，若知道 $\{P_g^n : g = 1, 2, \cdots, N\}$ 上的一个完全配对结构，我们也可以构造出一个闭流形 M. 进一步由 $\lambda(F_i) = (g_1)^{-1}g_2$ 得 $g_2 = g_1 \cdot \lambda(F_i)$，即对 Q 的任意一个 facet $F_{i,g}$，他的配对 facet 为 $F_{i,\phi_i(g)}$，其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i) : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$. 下面，我们把 M 的 facets pair 记为 $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}, \forall g \in \mathbb{Z}_2^n$. Q 到 P 有一个自然地投射，我们记为

$$\bar{\pi}: Q \longrightarrow P \tag{2}$$

下面构造 M 的 cell structure. 首先我们将 $M[0]$ 取为点 p_0，并且设为 M 的基点. 我们在 Q 的每一对余 1 维面处构造 1-cells. 对 Q 的每对 facets pair$\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$（包括所有的内 facets、外 facets），任取 $F_{i,g}$，$F_{i,\phi_i(g)}$ 内部的点 $a_{i,g}, a_{i,\phi_i(g)}$（不妨取为 $F_{i,g}$，$F_{i,\phi_i(g)}$ 的重心），使得 $\bar{\pi}(a_{i,g}) = \bar{\pi}(a_{i,\phi_i(g)}) = a_i \in P$，在 Q 的内部取连接 p_0 到 $a_{i,g}, a_{i,\phi_i(g)}$ 的两条简单有向道路（不妨取为直线段），记为 $\overrightarrow{a_{i,g}}, \overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}$. 则 $\overrightarrow{a_{i,g}}(\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}})^{-1}$ 为 M 中以 p_0 为起点的一条有向闭路，记为 $x_{i,g}$，另外记 $x_{i,\phi_i(g)} = x_{i,g}^{-1}$，它表示 M 中以 p_0 为起点的有向闭路 $\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}}(\overrightarrow{a_{i,g}})^{-1}$. 若我们不考虑 $x_{i,g}$(或 $x_{i,\phi_i(g)}$) 的方向，则 $x_{i,g} - \{p_0\} \cong e^1$（或 $x_{i,\phi_i(g)} - \{p_0\} \cong e^1$），这里 e^k 表示 M 一个 k 维 cell. M 中的每一对 facets pair 都决定了一个 1-cell. 在上述构造中，所有的 $\{x_{i,g}\}$ 都仅交于 0-skelton p_0 处. 这样我们就获得 M 的 1-skelton $M[1] = \bigvee\limits_{p_0} x_{i,g}$.



我们在余 2 维面处构造 2-cells. 设 $f_1=F_{i,g}\cap F_{j,g}$ 为 Q 的任意一个余 2 维面，则令 $f_2=F_{i,\phi_i(g)}\cap F_{j,\phi_i(g)}$，$f_3=F_{i,\phi_i\phi_j(g)}\cap F_{j,\phi_i\phi_j(g)}$，$f_4=F_{i,\phi_j(g)}\cap F_{j,\phi_j(g)}$，使得 $\{\bar{\pi}(f_k),k=1,2,3,4\}$ 在 P 中的像相同，记为 f，这里 $\phi_i\phi_j(g)=\phi_i(g\cdot\lambda(f_j))=g\cdot\lambda(f_j)\cdot\lambda(f_i)$. 取 f 内部的一个点 b，对应 f_k 上的点设为 b_k，$k=1,2,3,4$. 取 V_1 为经过点 $b_k,p_0,a_{i,g},a_{j,g}$ 的二维简单区域，如取 b 为 $span\{\vec{a_i},\vec{a_j}\}$ 与 f 的交点，其中 $\vec{a_i}=\bar{\pi}(\overrightarrow{a_{i,g}}),\vec{a_j}=\bar{\pi}(\overrightarrow{a_{j,g}})$，这里的 $span\{\vec{a_i},\vec{a_j}\}\triangleq\{\vec{x}=k_1\vec{a_i}+k_2\vec{a_j},\ k_1,k_2\geq 0\}$. 则 $V_1=span\{\overrightarrow{a_{i,g}},\overrightarrow{a_{j,g}}\}\cap P_g\cong D^2_+$. 类似确定 $V_2=span\{\overrightarrow{a_{i,\phi_i(g)}},\overrightarrow{a_{j,\phi_i(g)}}\}\cap P_{\phi_i(g)},V_3=span\{\overrightarrow{a_{i,\phi_i\phi_j(g)}},\overrightarrow{a_{j,\phi_i\phi_j(g)}}\}\cap P_{\phi_i\phi_j(g)},V_4=span\{\overrightarrow{a_{i,\phi_j(g)}},\overrightarrow{a_{j,\phi_j(g)}}\}\cap P_{\phi_j(g)}$，则 $\{V_k:k=1,2,3,4\}$ 在 M 中实际上粘合成一个闭的 D^2，记为 D^2_f，且 D^2_f 的边界落在 M 的 1-skelton 中. 对应的二维 cell $e^2_f=(D^2_f)^\circ$. 这样就得到 2-skelton $M[2]=M[1]\cup\{e^2_f\}$.

依次进行下去，我们可以在 Q 的余 k 维面 $f^k_l=F_{i_1,g}\cap F_{i_2,g}\cap\cdots\cap F_{i_k,g}$ 处可构造 M 的 $k-cells$. 我们可以类似取 $V_l=span\{a_{i_1,g},a_{i_2,g},\cdots,a_{i_k,g}\}\cap P_g,l=1,2,\cdots,2^k$，它们在 M 中粘成一个 k 维闭圆盘，记为 D^k，则 ∂D^k 落在 $M[k-1]$ 中，且 D^k 对应 M 的 k-cell 可以为

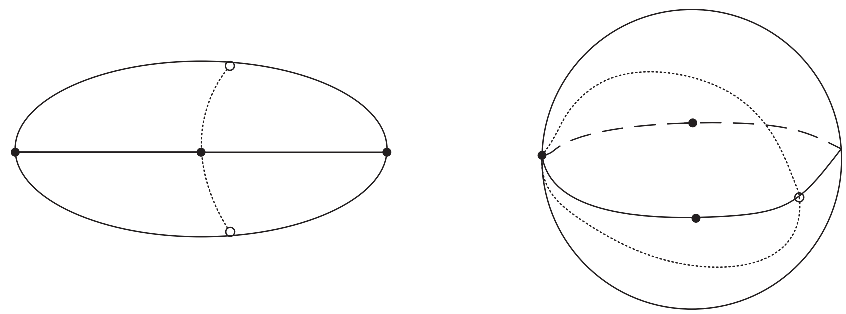
$$e^k\cong(D^k)^\circ=\left(\bigcup_{\{l=1,2,\cdots,2^k\}}V_l\right)^\circ.$$

最终我们可以在 Q 的顶点处构造 M 的 h_0 个 $n-cells$.

注 在上述构造中，若点 $p_0\in F_{i,g}$，则 $a_{i,g}$ 可能包含在 $F_{i,g}$ 中，此时我们的构造方法依然适应，且 facet $F_{i,g}$ 对应的 $x_{i,g}$ 在 Q 中与点道路同伦.

事实上，对于具有 facets pair 结构的任意拓扑流形都可类似构造其胞腔结构. 如我们考虑

例 4 我们将三角形沿着他们对应的边粘和得到一个 S^2



按照上面步骤，我们可以得到 S^2 的一个胞腔分解 $S^2 = e_0 \cup e^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2$

2.2 Calculation and Example

在这种胞腔结构下，我们可以得到 $\pi_1(M)$ 的一个比较简洁的群表示. 下面我们分析 M 的基本群. small cover 的基本群 $\pi_1(M)$ 的生成元可取为 facets 对应的有向闭路 $\{x_{i,g}\}$. $\pi_1(M)$ 的关系由二维胞腔及配对关系决定. 对任意 facet pair $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$ 对应一对互逆的生成元 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$，即配对关系为 $x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1$. 对于任意余二维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g} (\neq \varnothing) \subset Q$，由 f 确定的二维胞腔 e_f 决定一个关系 $r_f = \partial D_f^2 = x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)} = 1$，即 $x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = (x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)})^{-1}$
$= (x_{j,\phi_j(g)})^{-1}(x_{i,\phi_i\phi_j(g)})^{-1} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}$. 从而我们得到 $\pi_1(M)$ 的一个群表示.

$$\begin{aligned} \pi_1(M) = \langle x_{i,g}, i = 1, 2, \cdots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n : x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, \forall i, g; \\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}, \forall f = F_{i,g} \cap F_{j,g} \neq \varnothing \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i)$

我们记 $\mathcal{F}_1(Q)$ 为 Q 的内 facets 集; 记 $\mathcal{F}_2(Q)$ 为 Q 的内 facets 集附近的 facets 集，即 $\mathcal{F}_2(Q) = \{F \in \mathcal{F}(Q) \cap \partial Q : \exists G \in \mathcal{F}_1(Q), st.\ F \cap G \neq \varnothing\}$; 记 $\mathcal{F}_3(Q)$ 为 Q 外 facets 集剩余的 facets 集. 则我们有下面结论.

引理 2.1 $\forall F_i \in \mathcal{F}(P)$ 固定，则 $\pi^{-1}(F_i) = \{F_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 对应的生成元 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是彼此相关的. 特别地，当 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_1(Q)$ 时，$x_{i,g} = 1$;

当 $F_{i,g_1}, F_{i,g_2} \in \mathcal{F}_2(Q)$ 时，若 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} \neq \varnothing$，则 $x_{i,g_1} = x_{i,g_2}$，否则 $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

进一步，设 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 为 Q 中任意一个固定的余二维面. 当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 都属于 $\mathcal{F}_1(Q)$，即 f 为内面时，f 对应的关系为 1；当 $F_{i,g}$ 和 $F_{j,g}$ 分别属于 $\mathcal{F}_2(Q)$ 和 $\mathcal{F}_1(Q)$ 时，f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$.

证明：若 $F_{i,g}$ 为内 facets，则 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 包含在 Q 的内部，可缩为点道路，故 $x_{i,g} = 1$. 对于内余 2 维面 $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ 确定的关系，为内生成元的组合，故也是平凡的. 若 $F_{i,g}, F_{j,g}$ 分别为外面和内面，不妨设 $F_{i,g}$ 为外面，$F_{j,g}$ 为内面，则 $x_{j,g} = x_{j,\phi_i(g)} = 1$，所以 f 对应的关系为 $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$. 即内面附近的且相交为余二维面 f 的 facets 对应的生成元是彼此相关的. 又因为每对 facets pair 对应的生成元互为逆元，所以当 $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} = \varnothing$ 时，$x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$.

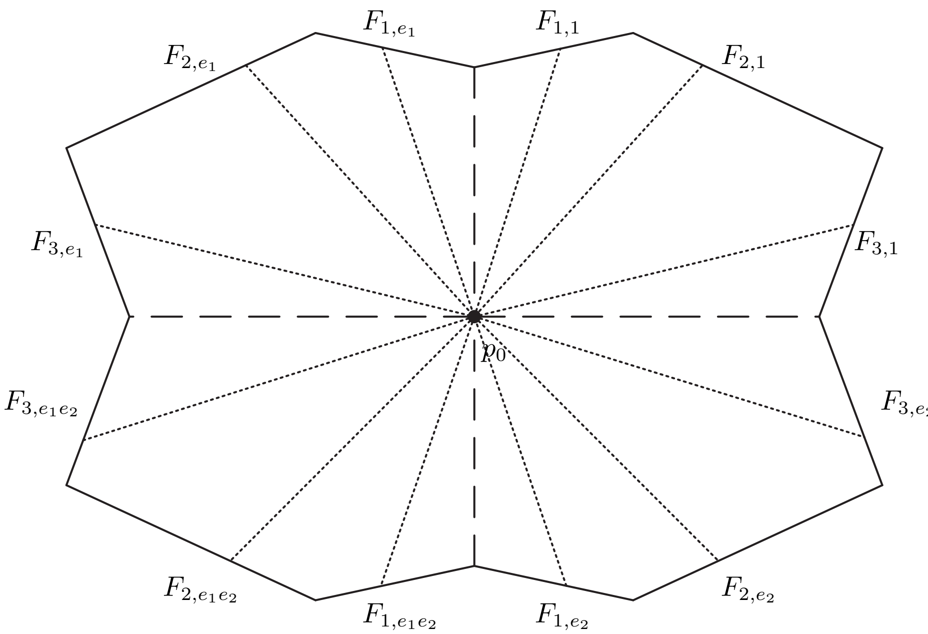
最后，我们考虑 $F_{i,g} \in \mathcal{F}_3(Q)$ 的情况. 我们不妨固定 $F_{i,1} \in \pi^{-1}(F_i)$，对应的生成元为 $x_{i,1}$. 首先它的配对 facets 对应的生成元 $x_{i,\phi_i(1)} = (x_{i,1})^{-1}$. 由于与 $F_{i,1}$ 相交的 facets 都在 P_1 中，所以任意 $f = F_{i,1} \cap F_{j,1} \neq \varnothing$ 对应的关系为 $x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)} = x_{j,1}x_{i,\phi_j(1)}$，即 $x_{i,\phi_j(1)} = x_{i,\lambda(F_j)} = (x_{j,1})^{-1}x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)}$. 然后，我们对 $F_{i,\phi_j(1)}$ 进行上面的讨论. 所以 $\forall g \in \langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\}\rangle$，$x_{i,g}$ 都与 $x_{i,1}$ 相关，其中 $j \in \{j : F_j \cap F_i \neq \varnothing\}$. 我们仅考虑 F_i 一个顶点处的染色，我们知 $\langle \{\phi_j(1)\}\rangle \cong \mathbb{Z}_2^n/\langle \phi_i(1)\rangle$. 所以 $\langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\}\rangle \cong \mathbb{Z}_2^n$，这就证明了所有的 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 是相关的. □

注 1、注意这里不排除 $F_{i,g} \cap F_{i,\phi_j(g)}, F_{i,g} \cap F_{i,\phi_i\phi_j(g)}$ 都为 Q 中非空的余二维面的情况，此时 $(x_{i,\phi_j(g)})^{-1} = x_{i,\phi_i\phi_j(g)} = x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$，i.e. $(x_{i,\phi_j(g)})^2 = 1$. 从而 $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 为 $\pi_1(M)$ 中的相等的二阶生成元.

2、Davis-Januszkiewicz [5] theroem 3.1 中指出 small cover Mod 2 Betti 数 $b_i(M) = h_i(P)$（这里 h_i 定义中 f_k 表示 P 中余 $k+1$ 维面的个数）. $b_1(M) = h_i(P) = m - n$，即在 perfect 意义上的胞腔结构得到基本群生成元个数为 $m - n$ 个. 在这里所有外 facets 决定的生成元实际上也是 $m - n$ 个. 并且是 $\pi_1(M)$ 最少生成元个数（2.2）.

在下面例子中，我们只取每个 facets pair 中的其中一个 facets 对应的闭路作为基本群的生成元.

例 5 P 为五边形时，$\mathcal{F}$ 上的染色依次取为 $\{e_2, e_1e_2, e_1, e_2, e_1\}$，$Q$ 可视为 12 边形，对应 6 对外 facets，4 组余二维外面。



Q 中的 facets pair 有 $\{F_{2,e_1},F_{2,e_2}\},\{F_{1,e_1},F_{1,e_1e_2}\},\{F_{1,1},F_{1,e_2}\},\{F_{2,1},F_{2,e_1e_2}\}$，$\{F_{3,1},F_{3,e_1}\}$，$\{F_{3,e_2},F_{3,e_1e_2}\}$（内部 facets pair 对应平凡生成元，我们暂不考虑）. 给所有道路一个指向 p_0 的方向，不妨设 p_0 为基本群基点，取生成元为

$$\begin{cases} x_{2,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,e_1}}\cdot(\overrightarrow{a_{2,e_2}})^{-1} \\ x_{1,e_1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,e_1}}\cdot(\overrightarrow{a_{1,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{1,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{1,1}}\cdot(\overrightarrow{a_{1,e_2}})^{-1} \\ x_{2,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{2,1}}\cdot(\overrightarrow{a_{2,e_1e_2}})^{-1} \\ x_{3,1} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,1}}\cdot(\overrightarrow{a_{3,e_1}})^{-1} \\ x_{3,e_2} & \longleftrightarrow \overrightarrow{a_{3,e_2}}\cdot(\overrightarrow{a_{3,e_1e_2}})^{-1} \end{cases}$$

在余 2 维面 p_1,p_2,p_3,p_4 处确定四组关系：

在 p_1 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1}=x_{1,e_1}$;

在 p_2 处胞腔对应的关系为 $x_{1,1}x_{2,e_2}=x_{2,1}x_{1,e_1e_2}$, 即 $x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1}=x_{2,1}(x_{1,e_1})^{-1}$;

在 p_3 处胞腔对应的关系为 $x_{2,1}x_{3,e_1e_2}=x_{3,1}x_{2,e_1}$, 即 $x_{2,1}(x_{3,e_2})^{-1}=x_{3,1}x_{2,e_1}$;

在 p_4 处胞腔对应的关系为 $x_{3,1}=x_{3,e_2}$.

从而

$$
\begin{aligned}
\pi_1(M) = \langle x_{2,e_1}, x_{1,e_1}, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,e_2} | x_{1,1}(x_{1,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{3,e_2})^{-1}, \\
x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1}x_{2,e_1}\rangle \quad (4) \\
\cong \langle x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1} | x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1}\rangle
\end{aligned}
$$

即 $\pi_1(M) \cong \langle x, y, z | xy^{-1}xzy^{-1}z\rangle$

2.3 Universal Covering Space

设 $\pi : M \longrightarrow P$ 为单多面体 P 上的 small cover. P 的 facets 集为 $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$. 下面我们将构造 small cover $\pi : M \longrightarrow P$ 的（万有）覆叠空间

$$\mathcal{M} = Q \times \pi_1(M)/\sim \quad (5)$$

(Q, ν_1) 的外 facet F_{i,g_1} 与 (Q, ν_2) 的外 facet F_{j,g_2} 粘当且仅当 $i = j$, $g_1(g_2)^{-1} = \lambda(F_i)$, $\nu_1(\nu_2)^{-1} = x_{i,g_1}$（或者等价的 $\nu_2(\nu_1)^{-1} = x_{i,g_2}$），其中 ν_1, $\nu_2 \in \pi_1(M)$，Q 为上文构造的多面体. 下面为记号方便，我们把 (Q, ν) 简记为 Q_ν，Q_ν 的 facet $F_{i,g}$ 记为 $F_{i,g}^\nu$.

下面我们将说明 $\mathcal{M}$ 实际上只与单多面体 P 及 P 的面结构有关.

我们首先定义由 P 的面结构决定的 *right-angle Coxeter group* W_P 如下:

$$W_P = \langle F_1, \cdots, F_m : F_i^2 = 1; (F_iF_j)^2 = 1, \forall F_i, F_j \in \mathcal{F}(P), F_i \cap F_j \neq \varnothing\rangle$$

Davis-Januszkiewicz [5] 中构造了

$$\mathcal{L} = (P \times W_P)/\sim \quad (6)$$

其中 $(x_1, g_1) \sim (x_2, g_2)$ 当且仅当 $x_1 = x_2$，$g_1(g_2)^{-1} \in \langle F : x \in F,\ F \in \mathcal{F}(P)\rangle$. 且由 Davis [3]（Theorem 10.1 and 13.5）知 $\mathcal{L}$ 为单连通的.

设 $\widetilde{\lambda} : \mathbb{Z}_2^m \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 为 $\mathcal{F}(P)$ 上特征映射诱导的群同态，定义映射 ψ 为投射 $W \longrightarrow W^{ab} \cong \mathbb{Z}_2^m$ 和 $\widetilde{\lambda}$ 的复合.

引理 2.2 设 $\pi : M \longrightarrow P$ 为单多面体 P 上的 *small cover*，则有群短正合列

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\alpha} W_P \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1 \quad (7)$$

其中 $\pi_1(M) \cong \ker\psi$ 为 W_P 的子群，$W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$

证:在 Davis-Januszkiewicz [5] 中，我们知道有上面正合列成立，且 $\pi_1(M) \cong \ker\psi$ 为 W_P 的正规子群. 不妨设 p_0 附近的 facets 为 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$，$\lambda(F_i) = e_i$，考虑 $\gamma : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow W_P$，$\gamma(e_i) = F_i, i = 1, 2, \cdots, n$，则 $\psi \circ \gamma = id_{\mathbb{Z}_2^n}$，即上面短正合列是可裂的，故 $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$. □

引理 2.3 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$

证明: $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{M}$ 之间的同胚是由分裂短正合列 7给出的，

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\alpha} W_P \underset{\gamma}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1$$

其中 $\psi \circ \gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2^n}$.

我们定义 $h : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ via. $h(x, \omega) = (x_g, \nu)$，其中 $g = \psi(\omega) \in \mathbb{Z}_2^n$，$\nu = \beta(\omega) \in \pi_1(M)$ 是唯一的.

定义 $h^{-1} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ via. $h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \gamma(g)\alpha(\nu))$.

$h \circ h^{-1}(x_g, \nu) = h(x, \gamma(g)\alpha(\nu)) = (x_g, \nu)$;

$h^{-1} \circ h(x, \omega) = h^{-1}(x_g, \nu) = (x, \gamma(g)\alpha(\nu)) = (x, \omega)$.

h, h^{-1} 局部上为 identity，故为局部同胚.

所以 $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$ □

注 在我们的胞腔构造过程中，设 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 为顶点 p_0 附近的 n 个 facets，$\lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \cdots, n$，从而我们可以把 2^n 个 P 的 copy 在 p_0 处粘在一起得到 Q，即取 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 为 Q 的内 facets，最后得到基本群的表达形式如（3）. 这在引理 2.2的短正合列中，等价于 $\psi(F_i) = \lambda(F_i) = e_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 所以 $\psi(F_k) = \lambda(F_k) = \prod e_i^{\delta_i} = \prod \lambda(F_i)^{\delta_i} = \prod \psi(F_i^{\delta_i})$，即 $\psi(F_k \left(\prod F_i^{\delta_i}\right)^{-1}) = 1$，其中 $k = 1, 2, \cdots, m$; $i = 1, 2, \cdots, n$; δ_i 表示 $\lambda(F_k)$ 上有无 e_i 分量. $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 在 M 中对应的闭路是可缩的，所以 F_k 对应的闭路是 $\ker\psi$ 的生成元. 我们不妨设 $\alpha(x_{k,1}) = F_k \left(\prod F_i^{\delta_i}\right)^{-1} = F_k \prod F_i^{\delta_i} \triangleq \widehat{F}_k$，其中连乘积中的项是可交换的（$F_1, F_2, \cdots, F_n$ 相交于点 p_0）. 则 $F_k = \alpha(x_{k,1})\gamma(\lambda(F_k)) \triangleq (x_{k,1},\ \lambda(F_k))$. 进一步我们设 $\varphi : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow Aut(\pi_1(M))$ via $\varphi_g(\nu) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(\nu)\gamma(g^{-1})) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(\nu)\gamma(g))$，其中 $g \in \mathbb{Z}_2^n, \nu \in \pi_1(M)$. 定义 $(\nu_1, g_1) \cdot (\nu_2, g_2) = (\nu_1\varphi_{g_1}(\nu_2), g_1 g_2)$. 所以 h 的定义可以从 W_P 的生成元 F_i 延拓到整个群 W_P 中.

接下来我们将证明 $\mathcal{M}$ 为 M 的万有覆叠空间. $\mathcal{M}$ 到 M 有一个自然

的投射，我们记为 $\Pi:\mathcal{M}\longrightarrow M$.

$$\begin{array}{ccc} Q\times\pi_1(M) & \xrightarrow{q'} & Q\times\pi_1(M)/\sim=\mathcal{M} \\ \widetilde{\Pi}\downarrow & & \Pi\downarrow \\ Q & \xrightarrow{q} & Q/\sim=M \end{array}$$

其中 q,q' 是粘合 Q 和 Q 的 copy 的 facets 决定的商映射.

定理 2.4 *$\mathcal{M}$ 为 M 的万有覆叠空间.*

证明： 由 $\mathcal{M}$ 的定义知 $\mathcal{M}/\pi_1(M)=M$. 下面只需要证明 $\forall x\in\mathcal{M}$，存在包含点 x 的开邻域 U，使得不同的 $\nu\in\pi_1(M)$，$\nu(U)$ 不交.

当点 $x\in Q^\circ$ 时，取包含点 x 的一个实心开球邻域 U，使得 $U\subset Q^\circ$，此时 $\nu(U)$ 落在不同指标的 Q 中，是不交的. 当点 $x\in out(Q)=\partial Q$ 时，我们取

若 $q^{-1}(x)\subset\partial Q$，我们记 $f(x)$ 为 $out(Q)$ 中包含 x 为相对内点的最小的面，不妨设 $f(x)$ 为余 k 维的，则我们取包含点 x 的实心开球邻域 U，满足 U 与包含点 x 的 Q 的 copy 的交都是 $\frac{1}{2^k}$ 球，这时 $\nu(U)$ 显然也是不交的.

所以 $\mathcal{M}$ 是 M 一个正则的覆叠空间，又 $\mathcal{L}\cong\mathcal{M}$ 是单连通的，故为万有覆叠空间. □

设 $D(\mathcal{M},\Pi,M)$ 为上面覆叠空间 $\Pi:\mathcal{M}\longrightarrow M$ 的覆叠变换群. 由于 $\mathcal{M}$ 是单连通的，所以 $\pi_1(M)\cong D(\mathcal{M},\Pi,M)$. 下面我们根据上面构造的 cell structure（的 2-skeleton）来刻画 $D(\mathcal{M},\Pi,M)$ 的生成元.

对于 Q 中的每个 facet $F_{i,g}$，我们定义 $\mathcal{M}$ 上的面映射 $\Gamma_{i,g}:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$. $\forall x\in\mathcal{M}$，存在某个 Q_{ν_1}，使得 $x\in Q_{\nu_1}$，由 $\mathcal{M}$ 的构造知存在唯一的 Q_{ν_2}，使得 $F_{i,g}\subset Q_{\nu_1}\cap Q_{\nu_2}$，我们定义 $\Gamma_{i,g}(x)$ 为 $\Pi^{-1}(\Pi(x))\cap Q_{\nu_2}$ 中的唯一的一点，这样定义的 $\Gamma_{j,g'}$ 显然是 well-defined 的. $\Gamma_{i,g}$ 的连续性也是显然的.

类似引理 2.1容易验证

引理 2.5 *1、$\Gamma_{i,g}\Gamma_{i,\phi_i(g)}(x)=x$.*
2、若存在 $F_{j,g'}(\neq F_{i,g})\subset Q_{\nu_1}\cap Q_{\nu_2}$，则 $\Gamma_{j,g'}(x)=\Gamma_{i,g}(x)$.
3、若 facet $F_{i,g}\in in(Q)$，此时 $Q_{\nu_1}=Q_{\nu_2},\Gamma_{i,g}=id$.

进一步我们有

引理 2.6 *面映射 $\Gamma_{i,g}:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}$ 上的覆叠变换.*

命题 2.7 *$D(\mathcal{M},\Pi,M)$ 可以由面映射 $\{\Gamma_{i,g}\}$ 来刻画.*

证明: $\mathcal{M}$ 为单连通的,此时 $\pi_1(M,p_0)$ 到 $D(\mathcal{M},\Pi,M)$ 的满同态实际上为群同构，它将 $[x_{i,g}]\in\pi_1(M,p_0)$ 映为 $\Gamma_{i,g}$. 我们不妨取点 $x=\pi^{-1}(p_0)\in M$，则 $\{\Pi^{-1}(x)\}$ 实际上是每个 Q 中 p_0 的 copy. 我们取第 1 个 Q_1 中的 p_0 的 copy，记为 y_0，其中 1 为 $\pi_1(M)$ 的单位元. 所以我们只需要验证 $\Gamma_{i,g}(y_0)=\widetilde{x_{i,g}}(1)$，其中 $\widetilde{x_{i,g}}$ 是 $x_{i,g}$ 在 $\mathcal{M}$ 中的一段提升. $\Gamma_{i,g}(y_0)$ 实际上是 $Q_{x_{i,g}}$ 中的 p_0 的 copy，即 $\widetilde{x_{i,g}}(1)$. 所以 $D(\mathcal{M},\Pi,M)$ 的生成元可以自然的选为 Q 的 facets 对应的面映射. □

综上，我们有下面结论：

定理 2.8 *$\Pi:\mathcal{M}\longrightarrow M$ 为 M 的万有覆叠空间, 复叠变换群 $D(\mathcal{L},\Pi,M)\cong\pi_1(M)$ 可以由 Q 的 facets 对应的面映射生成.*

2.4 Naturality of the Cell Structure of Small Cover

最后我们解释一下我们这种胞腔结构的自然. 我们考虑 $M[2]$，它的 0-skeleton 只有一个点 p_0; 它的 1-skeleton 是 $\overrightarrow{x_{i,g}}$ 的一点并,对应 $\pi_1(M)$ 的生成元; 它的每一个二维胞腔对应 $\pi_1(M)$ 的一个关系. 即 $M[2]$ 是 $\pi_1(M,p_0)$ 的 *presentation complex.* 进一步，我们将 M 的这种胞腔结构提升到它的万有覆叠空间 $\mathcal{M}$ 中，则 $\mathcal{M}[2]$ 实际上是 $\pi_1(M,p_0)$ 的 *Cayley 2-complex.*

事实上，将单多面体 P 视为一个 right angle orbifold，则 small cover $\pi:M\longrightarrow P$ 为 P 上的 covering orbifold. 由于 M 为一个闭流形，P 为一个 good orbifod，则 P 的单连通的 covering orbifold $\mathcal{M}$ 为它的万有 covering orbifold. 进一步，covering orbifold $\tau:\mathcal{M}\longrightarrow P$ 为 covering space $\Pi:\mathcal{M}\longrightarrow M$ 和 small cover $\pi:M\longrightarrow P$ 的复合. 它们的覆叠变换群分别为 $W_P,\pi_1(M)$ 和 $\mathbb{Z}_2^n$.（Davis-Januszkiewicz [5]）

我们定义 π_1^{orb} 为 universal orbifold cover $\tau:\mathcal{M}\longrightarrow P$ 的覆叠变换群. 即 $\pi_1^{orb}(P)=W_P$，此时 $\pi_1^{orb}(P)$ 和 $\pi_1(M)$ 存在自然的子群关系. 我们对单多面体 P 做类似的 cubical 分解，则某种意义上，$P[2]$ 为 W_P 的 presentation complex. 把这种分解提升到 $\mathcal{M}$ 中，则 [2] 实际上是 W_P 的一个 Cayley 2-complex. （Davis [4]）

3 π_1-injective

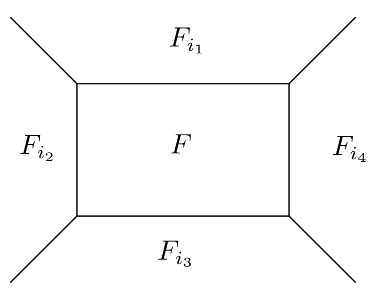
设 F 为单多面体 P 的任意一个 facet，则它依然是单凸的，且 $\mathcal{F}(F)$ 可以继承 $\mathcal{F}(P)$ 上的染色，进而可以构造 F 上的 small cover $\pi_F : M_F \longrightarrow F$. 在 Davis-Januszkiewicz [5] Lemma 1.3 中，我们知道 M_F 为 M 的 $n-1$ 维连通子流形.

在这一节中，我们利用上面的胞腔结构，考虑 $\pi_1(M_F)$ 与 $\pi_1(M)$ 之间的关系. 我们设多面体 F, P 对应的 Coxeter group 分别为 $W_P = \langle G : R\rangle$, $W_F = \langle G_F : R_F\rangle$. 我们取定 F 的一个顶点 p_0 为基点，我们将多面体 P 的 copy 在 p_0 处粘在一起，从我们构造的胞腔结构中，得到 M, M_F 的基本群的表示，如（3），记 $\pi_1(M,p_0) = \langle \widetilde{G} : \widetilde{R}\rangle$ $\pi_1(M_F,p_0) = \langle \widetilde{G}_F : \widetilde{R}_F\rangle$.

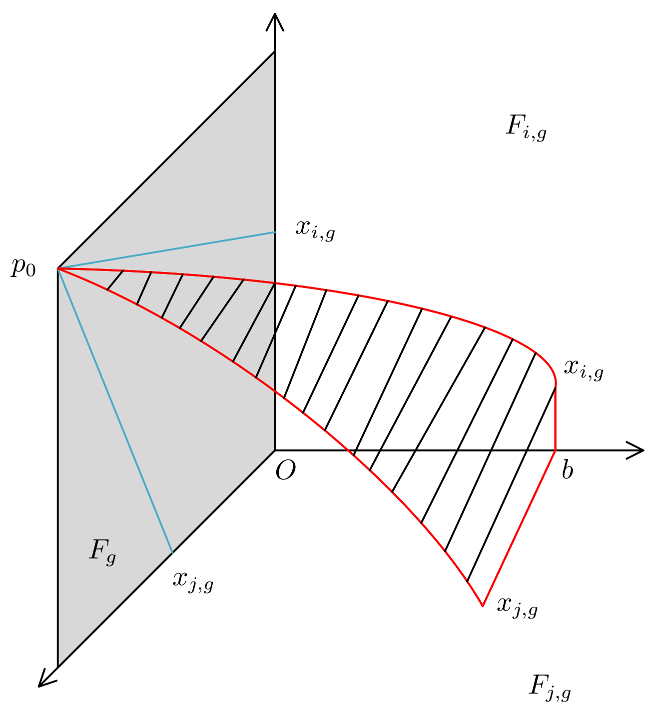
下面我们设 $\rho : F \longrightarrow P$ 为面包含映射，$\rho_* : W_F \longrightarrow W_P$ 为 ρ 决定的 Coxeter group 之间的群同态，设 $\widetilde{\rho} : M_F \longrightarrow M$ 为 ρ 决定的 Facet 子流形到 M 的包含映射，$\widetilde{\rho}_* : \pi_1(M_F) \longrightarrow \pi_1(M)$ 为它诱导的基本群之间的群同态. 下面不妨设 F 为单多面体 P 的第 1 个 facet，$\lambda(F) = e_1$.

引理 3.1 *1、* G_F 与 $\rho_*(G_F)$，R_F 与 $\rho_*(R_F)$ 都为一一的；
2、$\widetilde{G}_F$ 与 $\widetilde{\rho}_*(\widetilde{G}_F)$，$\widetilde{R}_F$ 与 $\widetilde{\rho}_*(\widetilde{R}_F)$ 都为一一的.

证明：1、设 P 中与 F 相交的 Facets 集为 $\mathcal{F}_1 = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \cdots, F_{i_{m'}}\} \subset \mathcal{F}(P)$，则 $G_F = \mathcal{F}(F) = \{F_{i_1}\cap F, F_{i_2}\cap F, \cdots, F_{i_{m'}}\cap F\}$. 所以自然地，$\rho_*(F_{i_k}\cap F) = F^{-1}F_{i_k}F = FF_{i_k}F$. 设 $\beta : W_P \longrightarrow W_P$ *via*, $\omega \longmapsto F\omega F$ 为 W_P 上的自同构，它的逆仍为 β. 记 $\rho'_* \triangleq \beta\circ\rho_*$，则 $\rho'_*(F_{i_k}\cap F) = F_{i_k}$. 进一步，$F$ 中余二维面（不妨）$(F_{i_1}\cap F)\cap(F_{i_2}\cap F) \neq \varnothing$ 决定的关系 $((F_{i_1}\cap F)(F_{i_2}\cap F))^2$ 在 ρ'_* 在的像为 $(F_{i_1}F_{i_2})^2$. 即 ρ'_* 把 W_F 中的生成元和关系映为群 W_P 中的生成元和关系. 注意到 $\rho_* = \beta\circ\rho'_*$，故 $\rho_*(G_F), \rho_*(R_F)$ 也对应群 W_P 中的生成元和关系.



2、我们下面证明 M_F 的二维骨架 $M_F[2]$ 可以自然的包含到 $M[2]$ 中. 我们分别将 $\{F_g\}_{g\in\mathbb{Z}_2^{n-1}}$ 与 $\{P_g\}_{g\in\mathbb{Z}_2^n}$ 在点 p_0 处粘合在一起，分别得到多面体 Q 与 $Q_F = F\times\mathbb{Z}_2^{n-1}/\sim$. 则 $out(Q_F)\subset out(Q), in(Q_F)\subset in(Q)$. 设 $f_i = F_i\cap F\neq\varnothing$ 为 F 的一个任意的 facet，$f_i\cap f_j = F_i\cap F_j\cap F\neq\varnothing$ 为 F 的一个任意的余 2 维面. 设 $f_{i,g} = F_{i,g}\cap F_{1,g} = F_{i,\phi_i(g)}\cap F_{1,\phi_i(g)}$ 为 Q_F 中的任意一个 facet，其中 $\{F_{1,g}, F_{1,\phi_i(g)}\}$ 为 $\{P_g : g\in\mathbb{Z}_2^n\}$ 中的 facets-pair. 由引理 2.1 ，我们知道 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路与 $F_{i,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)}$ 在 Q 中对应的有向闭路 $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$ 是定点同伦的，所以我们不妨记 $f_{i,g}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路为 $x_{i,g}$. 对于 Q_F 中的任意一个余 2 维面 $f_{i,g}\cap f_{j,g} = F_{i,g}\cap F_{j,g}\cap F_{1,g}\neq\varnothing$ 所对应的二维胞腔 D_l 与 $F_{i,g}\cap F_{j,g}$ 和 $F_{i,\phi_i(g)}\cap F_{j,\phi_i(g)}$ 所对应的二维胞腔 $D_g, D_{\phi_i(g)}$ 是也是定点同伦的，所以在 $\pi_1(M_F)$ 中，$f_{i,g}\cap f_{j,g}$ 决定的关系与 $F_{i,g}\cap F_{j,g}(\cap F_{1,g}\neq\varnothing)$ 或者 $F_{i,\phi_i(g)}\cap F_{j,\phi_i(g)}(\cap F_{1,\phi_i(g)}\neq\varnothing)$ 在 $\pi_1(M)$ 中决定的关系对应。 所以 M_F



的基本群为

$$\pi_1(M_F)=\langle x_{i,g}, i=i_1,i_2,\cdots,i_{m'}, g\in\mathbb{Z}_2^{n-1}: x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)}=1,\forall i,g$$
$$x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_i\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)}=1,\forall f_{i,g}\cap f_{j,g}\neq\varnothing\rangle \quad (8)$$

其中 $f_{i,g}\cap f_{j,g}=F_{i,g}\cap F_{j,g}\cap F_{1,g}=F_{i,\phi_i(g)}\cap F_{j,\phi_i(g)}\cap F_{1,\phi_i(g)}\neq\varnothing$. 即形式上 $\pi_1(M_F)$ 的生成元集 $\widetilde{G}_F$ 和关系集 $\widetilde{R}_F$ 都可为 $\pi_1(M)$ 的生成元集 $\widetilde{G}$ 和关系集 $\widetilde{R}$ 的子集. 进一步，这种关系是映射 $\widetilde{\rho}: M_F\longrightarrow M$ 所诱导的，即 $\widetilde{\rho}_*$ 把生成元映为生成元，把关系映为关系. □

进一步对一般的 k 维面 f，由归纳知，则 W_f 和 W，$\pi_1(M_f)$ 和 $\pi_1(M)$ 都有上面的关系. 不妨仍记 $\rho: f\longrightarrow P$ 为面包含映射，$\rho_*: W_f\longrightarrow W$ 为 Coxeter group 之间的群同态，$\widetilde{\rho}_*:\pi_1(M_f,p_0)\longrightarrow\pi_1(M,p_0)$ 为基本群之间的群同态，则

推论 1 *1、 G_f 与 $\rho_*(G_f)$，R_f 与 $\rho_*(R_f)$ 都为一一的；*
2、$\widetilde{G}_f$ 与 $\widetilde{\rho}_*(\widetilde{G}_f)$，$\widetilde{R}_f$ 与 $\widetilde{\rho}_*(\widetilde{R}_f)$ 都为一一的.

由上面引理，W_F 中的文字可以用 W_P 中的生成元和关系来表示，$\pi_1(M_F)$ 可以用 $\pi_1(M)$ 中的生成元和关系来表示. 即 $\rho'_*(\omega)=\omega,\widetilde{\rho}_*(\nu)=\nu,\forall\omega\in W_F,\nu\in\pi_1(M_F)$. 但一般 ρ'_* 与 $\widetilde{\rho}_*$ 不一定是单同态. 如

例 6 取 $P=I\times\triangle^2$ 为三棱柱，共有 5 个 facets $\{F_i\}_{i=1,2,3,4,5}$，我们给上下底面 F_1,F_2 染色 e_1，侧面 F_3,F_4,F_5 染色为 $e_2,e_3,e_1e_2e_3$，由 P 的 h-vector 知，$\pi_1(M)$ 有两个生成元和两个关系，它的任意一个侧面上的 small cover 基本群有两个生成元，一个关系.

即 $\pi_1(M)=\langle x,y: x^2=yxyx^{-1}=1\rangle$,$\pi_1(M_F)=\langle x,y: yxyx^{-1}=1\rangle$

$$\widetilde{\rho}_*:\pi_1(M_F)\longrightarrow\pi_1(M)$$

满足 $\widetilde{\rho}_*(x)=x,\widetilde{\rho}_*(y)=y$，但 $\widetilde{\rho}_*$ 非单.

此时 ρ'_* 也不是单的，等价地 ρ_* 不单. 不妨考虑 F_5，则 $F_3\cap F_4$ 在 W_P 中决定的关系 $(F_3F_4)^2=1$ 是 $((F_3\cap F_5)(F_4\cap F_5))^2(\neq 1)\in W_{F_5}$ 在 ρ'_* 下的像.

定义 2 我们称一个单纯复形 K 为 *flag* 的，如果 K 中两两相连的顶点集张成 K 中的一个单形. 等价地，K 中不含维数 ≥ 2 的空单形.

我们称一个单多面体 P 为 flag 的，如果 $K=\partial P$ 为 flag 的. 等价地，P 中两两相交的面必有公共的交.

例 7 1、一个 m 边形为 flag 的，当且仅当 $m>3$.

2、flag 多面体的面是 flag 的.

下面证明当 P 为 flag 时，ρ_* 和 $\widetilde{\rho}_*$ 都是单的.

引理 3.2 当 P 为 *flag* 时，$\rho_*: W_F \longrightarrow W_P$ 为单的.

证明： $\rho_* = \beta\circ\rho'_*$，$\beta$ 为同构，故 ρ_* 单当且仅当 ρ'_* 单. 下面证明当多面体 P 是 flag 时，ρ'_* 是单的.

当单多面体 P 为 flag 时，若 $F\cap F_i \neq \varnothing, F\cap F_j \neq \varnothing$，则 $F\cap F_i \cap F_j \neq \varnothing$，即 P 中 F 附近的任意余二维面 $f\subset P$ 对应的关系一定可以继承到 W_F 中. 这保证了下面这个态射的定义合理性. 我们构造群态射

$$\eta_*: W_P \longrightarrow W_F \tag{9}$$

满足 $\eta_*|_{G-G_F}=1$，$\eta_*|_{G_F}=id$.

下面我们验证 η_* 定义的合理性. 我们考虑 W_P 中的关系在 η_* 下的像是否为 W_F 的单位元. 设 P 中与 F 相交的 facets 集 (不包含 F) 为 $\mathcal{F}_1(=G_F)$，剩余的 facets 我们记为 $\mathcal{F}_2=\mathcal{F}(F)-\mathcal{F}_1$. 则 η_* 将 $\mathcal{F}_2$ 中 facets 对应的生成元映为 1.

对于 W_P 的关系 $F_i^2=1$，当 $F_i\in\mathcal{F}_1$ 时，$\eta_*(F_i^2)=(F_i\cap F)^2=1$；当 $F_i\in\mathcal{F}_2$ 时，$\eta_*(F_i^2)=1$.

P 中的任意余二维面 $f=F_i\cap F_j\neq\varnothing$ 决定的关系为 $(F_iF_j)^2=1$. 若 F_i,F_j 都属于 $\mathcal{F}_1$，则由 P 的 flag 性质知 $f\subset F$，从而 η_* 将 $f\subset P$ 所对应的关系映为 W_F 的一个关系；若 F_i,F_j 都不属于 $\mathcal{F}_1$，则对应关系在 η_* 下的像为 1；若 F_i,F_j 分别属于 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$，不妨设 $F_i\subset\mathcal{F}_1, F_j\subset\mathcal{F}_2$，则 $\eta_*(F_iF_jF_iF_j)=\eta_*(F_i)\eta_*(F_j)\eta_*(F_i)\eta_*(F_j)=(F_i\cap F)^2=1$.

所以对任意关系 $r\in W_P, \eta_*(r)\equiv 1$，即 η_* 为 well-defined 的群同态.

最后容易验证 $\eta_*\circ\rho'_*=id: W_F\longrightarrow W_F$，即 ρ'_* 为单的. $\square$

定理 3.3 P 为 *flag* 时，$\widetilde{\rho}_*: \pi_1(M_F,p_0)\longrightarrow\pi_1(M,p_0)$ 为单同态.

证明： 考虑

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(M_F) \arrow[r, "\widetilde{\rho}_*"] & \pi_1(M) & \\
W_F \arrow[u, "(\pi_F)_*"] \arrow[r, "\rho_*"] & W_P \arrow[u, "\pi_*"] \arrow[r, shift left, "\beta(\cong)"] & W_P \arrow[l, shift left, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

设 x_k 为 $\pi_1(M_F)$ 的 $F_k \cap F$ 对应的一个生成元，则 $\pi_* \circ \widetilde{\rho}_*(x_k) = \pi_*(x_k) = \widehat{F}_k$; $\rho_* \circ (\pi_F)_*(x_k) = \rho_*(\widehat{F_k \cap F}) = \beta \circ \rho'_*(\widehat{F_k \cap F}) = \beta(\widehat{F}_k) = F\widehat{F}_k F$. 所以对 $\forall \nu \in \pi_1(M_F), \beta \circ \rho_* \circ (\pi_F)_*(\nu) = \rho'_* \circ (\pi_F)_*(\nu) = \pi_* \circ \widetilde{\rho}_*(\nu)$. 即上面图表离交换相差 W_P 上的一个自同构.

所以当 P 为 flag 时，ρ'_* 为单的，所以 $\rho'_* \circ (\pi_F)_* = \pi_* \circ \widetilde{\rho}_*$ 为单的，从而 $\widetilde{\rho}_*$ 为单的.

事实上，我们可以从 $\widetilde{\rho}_*$ 的信息推出 ρ_* 的信息，考虑下面图表

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(M_F) \arrow[r, "(\pi_F)_*"] \arrow[dd, "\widetilde{\rho}_*"'] & W_F \arrow[r, "\psi_F"] \arrow[d, "\rho_*"] & \mathbb{Z}_2^{n-1} \arrow[r] & 1 \\
 & & W_P \arrow[d, "\beta(\cong)"] & & \\
1 \arrow[r] & \pi_1(M) \arrow[r, "\pi_*"] & W_P \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Z}_2^n \arrow[r] \arrow[uu, "\theta"'] & 1
\end{tikzcd}$$

其中 $\theta : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{n-1} = \mathbb{Z}_2^n/\langle \lambda(F) \rangle = \mathbb{Z}_2^n/\langle e_1 \rangle$ 为特征映射诱导的商映射. 则 $\theta \circ \psi \circ \rho'_*(F_k \cap F) = \theta \circ \psi(F_k) = \theta \circ (\lambda(F_k)) = \lambda(F_k)/\langle e_1 \rangle = \psi_F(F_k \cap F)$，即右边矩形是交换的.

$\forall \nu \in \ker(\psi_F) = \pi_1(M_F)$，则 $\theta \circ \psi \circ \rho'_*(\nu) = \psi_F(\nu) = 1$，故 $\psi \circ \rho'_*(\nu) = 1$ *or* e_1. 当 $\psi \circ \rho'_*(\nu) = 1$ 时，$\rho'_*(\nu) \in \ker(\psi) = \pi_1(M)$，所以 $\widetilde{\rho}_*(\nu) = \rho'_*(\nu)$. 而 $\psi \circ \rho'_*(\nu) = e_1$ 时，$\psi \circ \rho'_*(\nu) = e_1 = \psi(F)$，则 $\widetilde{\rho}_*(\nu) = \rho'_*(\nu)F \in \ker(\psi) = \pi_1(M)$，此时 $\widetilde{\rho}_*(\nu) \neq 1$. 若 $\widetilde{\rho}_*(\nu) = \rho'_*(\nu)F = 1$，则 $\rho'_*(\nu) = F^{-1} = F$，这是不可能的. 本质上这是因为 P 中与 F 相交的 facets 上的染色不能与 F 一样. 所以从 ρ_* 的单蕴含 $\widetilde{\rho}_*$ 单. $\square$

由于 flag 多面体的 face 也是 flag 的，所以对任意 k 维面 f，由归纳知，也有类似的结论.

推论 2 *单多面体 P 为 flag，$\rho_* : W_f \longrightarrow W$ 和 $\widetilde{\rho}_* : \pi_1(M_f, p_0) \longrightarrow \pi_1(M, p_0)$ 为单同态.*

定义 3 我们称一个连通闭流形 M 为 aspherical 的，若 $\pi_k(M) = 0, k \geq 2$.

Borel conjecture 设 $f : M \longrightarrow N$ 为同伦等价，其中 M, N 为同维数闭的 aspherical 流形，则 f 同伦于一个同胚映射。

定理 3.4 ([6]) *Let M be a small cover of P. Then the following statements are equivalent.*

1、M is aspherical.

2、The boundary of P is dual to a flag complex.

3、The natural piecewise Euclidean metric on the dual cubical cellulation of M is nonpositively curved.

定理 3.5 ([8]) *Let $f : N \longrightarrow M$ be a homotopy equivalence between closed smooth manifolds such that M supports a non-positively curved Riemannian metric. Then N and M are stably homeomorphic; i.e.*

$$f \times id : N \times \mathbb{R}^{m+4} \longrightarrow M \times \mathbb{R}^{m+4} \tag{10}$$

is homotopic to a homeomorphism where $m = \dim M$.

上面定理说明，当流形 M 是一个 non-positively curved Riemannian 流形，且 $\dim(M) \neq 3, 4$，Borel conjecture 成立. 可以验证 small cover 为这样的闭流形.

推论 3 设 $n(> 4)$ 维闭流形 M, N 都为 *flag* 单多面体上的 *small cover*，若 $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$，则 M 和 N 是同胚的.

对于 3 维情况，在 [1] 中指出，Borel conjecture 对所有的三维流形都成立. 我们感兴趣的是 aspherical small cover M 是不是一个 Haken manifold

定义 4 A Haken 3-manifold is a compact 3-manifolds which are

(1) P^2-irreducible and

(2) sufficiently large – i.e. contain a properly embedded, 2-sided, incompressible surface.

命题 3.6 *P^2-irreducible M wtih $H_1(M)$ infinite is a Haken manifold.*

证明:由 Hempel [10] Lemma 6.6 知 M 包含一个 properly embedded 2-sided, nonseparating incompressible surface S. □

引理 3.7 (*待证) 设 M 是 3 维 *flag* 多面体 P 上的一个 *small cover*，则 $H_1(M)$ 是 *infinite* 的.

证明:

推论 4 *Aspherical small covers are Haken manifolds.*

证明: 设 P 为三维单的 flag 多面体（不包含单形面），M 为 P 上的 small cover，M 是 aspherical 的. 由 Sphere Theorem，我们知道三维闭可定向

流形是 aspherical 的，当且仅当它是 irreducible 和 π_1 infinite 的. 进一步为 P^2-irreducible，又 $H_1(M)$ 为 infinite 的，故 aspherical small cover M 为 Haken 流形. □

定理 3.8 *在三维 small cover 范畴中，下列条件等价.*

(1) M 是 aspherical 的,

(2) M 是 P^2-irreducible 的.

(3) M 是 Haken 的.

*进一步，此时 $H_1(M)$ 是 infinite 的.**

可定向 aspherical 流形为 irreducible 的，故为 prime 的，故同伦等价诱导同胚. 尽管 $\{M_F\}$ 中不一定存在 M 的 two-sided incompressible surface（考虑正十二面体上的 small cover），但 M_F 拥有许多好的性质，比如包含映射诱导的基本群同态为单的. 特别地，我们沿着 M_F 去切 M，这在我们构造的胞腔结构中，相当于把与 F 横截相交的那些一维闭路 $\{x\}$ 切开，或者给面 F 一个平凡的 color. 此时对应在我们上面构造的胞腔结构中，是把 facets 对应的闭路切开，从而这些闭路决定的生成元变为平凡元，基本群得到化简. 所以从这里我们猜测，类似于 Hierachy of Waldhausen 的操作对（高维）aspherical small cover 也是有效的. 这对高维 small cover 中的 borel 猜想的证明提供一种可行的 idea. 而且 Davis 等一些人已经在做了一些这方面的工作，比如对高维 Haken 流形的推广.

参考文献

[1] M. Aschenbrenner, S. Friedl and H. Wilton, 3-manifold groups, *Mathematics* (2013), 1-149

[2] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, Torus actions and their applications in topology and combinatorics, *University Lecture Series, 24. American Mathematical Society, Providence, RI,* (2002)

[3] M.W. Davis, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, *Ann. Math. (2)* 117 (1983), 293-325.

[4] M.W. Davis, Exotic aspherical manifolds, *Topology of high-dimensional manifolds.* (Trieste, 2001), 371-404.

[5] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, Convex polytopes, coxeter orbifolds and torus actions, *Duke Math. J.* 62 (1991), 417-451.

[6] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Nonpositive curvature of blow-ups, *Selecta Math.(N.S.)* 4 (1998), 491-547.

[7] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, Fundamental groups of blow-ups, *Advances in mathematics.* 177 (2003), 115-179.

[8] F.T. Farrell, The Borel conjecture, *Topology of high-dimensional manifolds.* (Trieste, 2001), 225-298.

[9] A. Hatcher, Spaces of Incompressible Surfaces, *Mathematics.* (1999).

[10] J. Hempel, 3-manifolds, *Annals of Mathematics studies.* 86 (1978).

[11] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.* (2)87 (1968), 56-88.

[12] S. Kuroki, M. Masuda, and L. Yu, Small covers, infra-solvmanifolds and curvature, *Forum mathematicum.* 27(5)(2015), 2981-3004

[13] L. Yu, Crystallographic groups with cubic normal fundamental domain, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B39, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.* (2013), 233-244