放射性测量的统计误差实验报告

[redacted]

2022 年 11 月 11 日

1 实验目的

验证原子核衰变及放射性计数的统计规律。並且需要了解统计误差的意义，掌握计算统计误差的方法。同時掌握对测量精度的要求，合理选择测量时间的方法。

2 实验原理

放射性原子核的衰变彼此是独立无关的，我们无法预知每个原子核的衰变时刻。两次原子核衰变的时间间隔也不一样，在重复的放射性测量中，即使保持完全相同的实验条件，每次测量的结果也不完全相同，而是围绕着其平均值上下涨落，有时甚至差别很大。这种现象就叫做放射性计数的统计性。放射性计数的这种统计性反映了放射性原子核衰变本身固有的特性、与使用的测量仪器及技术无关。放射性测量就是在衰变的统计涨落影响下进行的，因此了解统计误差的规律，对评估测结果的可靠性是很必要的。

1．核衰变的统计规律放射性原子核衰变的统计分布可以根据数理统计分布的理论来推导。放射性原子核衰变的过程是一个相互独立彼此无关的过程，即每一个原子核的衰变是完全独立的，和别的原子核是否衰变没有关系，而且哪一个原子核先衰变，哪一个

原子核后衰变也纯属偶然的，并无一定的次序，因此放射性原子核的衰变可以看成是一种伯努里试验问题。设在 t=0 时，放射性原子核的总数是N_0，在t 时间内将有一部分核发生了衰变。已知任何一个核在 t 时间内衰变的概率为$W = (1 - e^{\lambda t})$，不衰变的概率为$q = 1 - W = e^{\lambda t}$, λ 是该放性原子核的衰变常数。利用二项式分布可以得到总核数N_0在 t 时间内有 N 个核发生衰变的概率W（N）为:

$$W(N) = \frac{N_0!}{(N_0-N)!N!}(1 - e^{-\lambda t})N(e^{-\lambda t})^{N_0-N}$$

在 t 时间内，衰变掉的原子核平均数为:

$$\bar{N} = N_0W = N_0(1 - e^{-\lambda t})$$

其相应的均方根差为:

$$\sigma = \sqrt{N_0Wq} = \sqrt{\bar{N}(1 - W)} = (\bar{N}e^{-\lambda t})^{\frac{1}{2}}$$

假如$\lambda t << 1$，即时间 t 远比半衰期小，这时σ可简化为$\sigma = \sqrt{\bar{N}}$。

N_0总是一个很大的数目，而且如果满足$\lambda t << 1$，则二项式分布可以简化为泊松分布，因为在二项式分布中， N_0不小于 100，而且 W 不大于0.01 的情况下，泊松分布能很好的近似于二项式分布。此时几率分布可写成:

$$W(N) = \frac{\bar{N}}{N!}e^{-N}$$

在泊松分布中，N的取值范围为所有的正整数（0，1，2，3⋯），并且在 N =$\bar{N}$ 附近时，W（N）有一极大值。当较小时，分布是不对称的;较大时，分布渐趋近于对称，当$\bar{N} \geq 20$时，泊松分布一般就可用正态（高斯）分布来代替。$W(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(N-\bar{N})^2}{2\sigma^2}}$

当我们用探测器记录衰变粒子引起的脉冲数时，这个脉冲数与衰变原子核数是成正比的。通过观察大量的单个衰变事件，就可以得到在顶定时间间隔内可能发生的衰变数。假设在时间间隔 t 内核衰变的平均数为，则在此时间间隔t内衰变数为 N 的出现几率为W (N) 。当$\bar{N}$较大（一般大于20）时，在同一测量装置上对同一放射源进行多次测

量，在坐标纸上画出每一次测量值出现的几率，就可以得到高斯分布曲线（见图 1-2）。若以出现几率最大的测量值为轴线，高斯分布曲线是对称的，它表示单次测值偏离平均值（真值）的几率是正负对称的，偏离愈大，出现的几率意小：出现几率较大的计数值与平均值的偏差较小。所以我们在实际测量中，当测量时间 t 小于放射性核的半衰期时，可以用一次测量结果 N 来代替平均值，其统计差为$\sigma = \sqrt{N}$测量结果可以写成:

$$N \pm \sqrt{N}$$

它的物理意义表示在完全相同的条件下再进行一次测量，其测量值处于N 到 N + 范围内的几率为68.3% ，用数理统计的术语来说，我们把68.3%称为“置信度”。相应的置信区间为 N± ，而当置信区间为N±2 和N±3 时，相应的置信度为 95.5%和 99.7%，测量的相对误差为$\delta = \frac{\sigma}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ δ可以用来说明测量的精度。

3 内容

在相同条件下，对本底进行重复测量，画出本底计数的频率分布图，并与理论分布图作比较。然後根据实验精度要求选择测量时间。再用χ^2检验法检验放射性计数的统计分布类型。

2．测量时间的选择

测量放射性时，一般对计数率$n = \frac{N}{t}$（脉冲数 / 秒）或放射性的衰变率A（衰变数/秒）感兴趣，因为时间 t 的测量不受统计涨落影响，所以

$$\frac{N \pm \sqrt{N}}{t} = \frac{N}{t} \pm \frac{\sqrt{N}}{t}$$

因此计数率的统计误差可表示为

$$n \pm \sqrt{\frac{n}{t}} = n(1 \pm \frac{1}{\sqrt{nt}}) = n(1 \pm \frac{1}{\sqrt{N}})$$

只要计数 N 相同，计数率和计数的相对误差是一样的。当计数率不变时，测时间越长，误差越小；当测量时间被限定时，则计数率越高，误差越小。如果进行 m 次重复测量，

总计数为 N_0，平均计数为N，总计数和误差用$m\bar{N} \pm \sqrt{m\bar{N}}$表示，平均计数及统计误差可表示为

$$\bar{N} \pm \sqrt{\frac{\bar{N}}{m}} = \bar{N}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{m\bar{N}}}) = \bar{N}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{N_0}})$$

由此可见，测量次数越多，误差越小，精确度越高。但m 次测量总计数N，和平均值$\bar{N}$的相对误差是一样的在测量较强的放射性时，必须对测量结果进行由于探测系统分辨时间不够小所引起的漏计数的校正。而在低水平测量中，必须考虑到本底计数的统计涨落。所谓本底涨落是由于宇宙线和测量装置周围有微量放射性物质的沾染等原因造成的。本底计数也服从统计规律。考虑本底的统计误差后，源的净计数率的数学表达式为

$$n \pm \sigma_n = (n_s - n_b) \pm \sqrt{\frac{n_s}{t_s} - \frac{n_b}{t_b}}$$

而相对误差为

$$\delta = \sqrt{\frac{n_s}{t_s} - \frac{n_b}{t_b}}/(n_s - n_b)$$

式中 n_s为测量源加本底的总计数率，n_b为没有放射源时的本底计数率，t_s为有源时的测量时间，t_b为本底测量时间。

从上式可以看出

1．本底计数率越大，对测量精度的影响越大，因此在测量时应很好屏蔽，想方设法或减小本底计数率。

2．为了减少 n 的误差应增加 t_s和 t_b，但过长的测量时间对我们并不利，故要选择合适的测量时间。一般是在限定的误差范围内，确定最短的测量时间；或者是在总测量时间一定时合理地分配 t_s和 t_b，以获得最小的测量误差。被测样品放射性愈强，本底测量时间就愈短，究竟选用多长的测量时间，由测量精度决定。样品的本底测量时间各为

$$t_s = \frac{n_s + \sqrt{n_s n_b}}{(n_s - n_b)^2 \delta^2}$$

$$t_b = \frac{n_b + \sqrt{n_s n_b}}{(n_s - n_b)^2 \delta^2}$$

4 实验结果

4.1 0.1s

根据实验结果，0.1s的频率直方图与其高斯和泊松分布图如下

$\bar{N} \pm \sigma = 2911, \bar{N} \pm 2\sigma = 3493, \bar{N} \pm 3\sigma = 3837$ $\sqrt{\bar{N}} = 1.8035$ 其$\chi^2 = 0.18413399289035015$

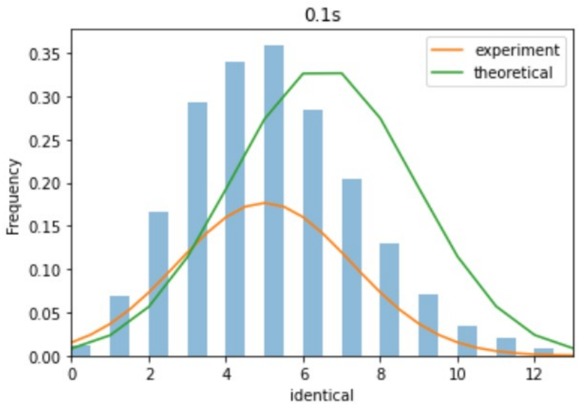

图 1: 0.1s Gauss分布

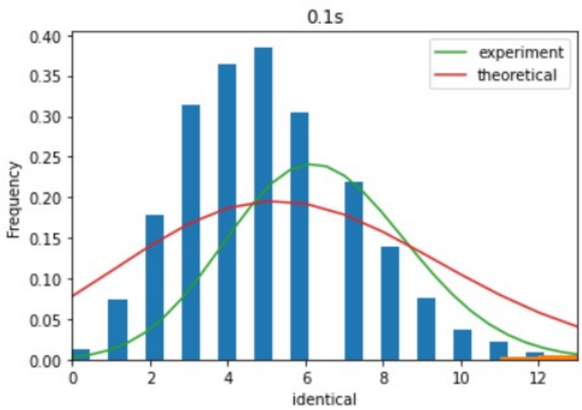

图 2: 0.1s Poisson分布

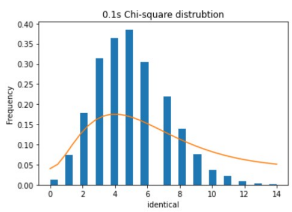

图 3: 0.1s Chi-square

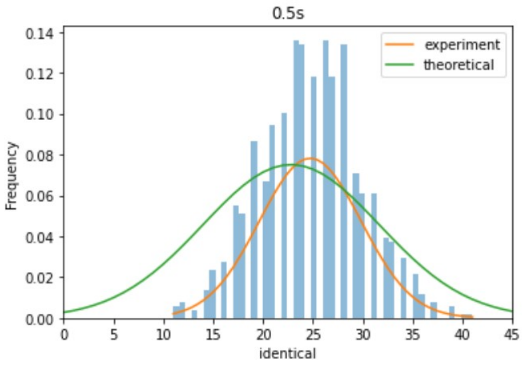

图 4: 0.5s Gauss分布

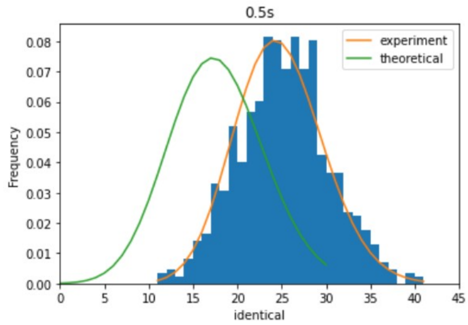

图 5: 0.5s Poisson分布

4.2 0.5s

0.5s的频率直方图与其高斯和泊松分布图如图4,5

$\bar{N}\pm\sigma = 744$,$\bar{N}\pm 2\sigma = 801$,$\bar{N}\pm 3\sigma = 827$ $\sqrt{\bar{N}} = 2.3051$ 其$\chi^2 = 0.08413399289035015$

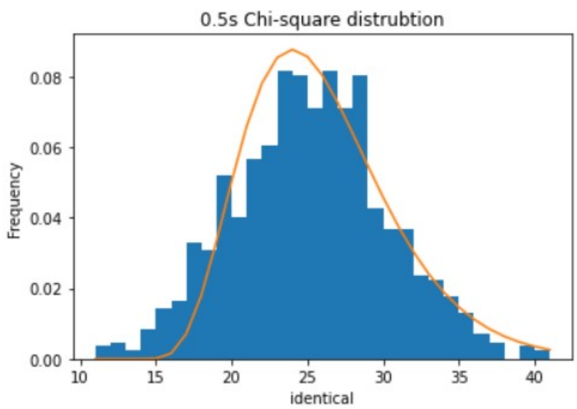

图 6: 0.5s Chi-square

5 appendix-code

注：分段编程，所以在进行不同分布拟合的时候需要把其他代码注释掉，不然无法使用

```
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import scipy
import numpy as np
import scipy.stats
from scipy.stats import chisquare
from scipy.stats import chi2

data = pd.read_csv("C:\\Users\\toby1\\Desktop\\Gauss.csv", header=None)

#Gauss.csv
_, bins, _ = plt.hist(data, 30, density=1, alpha=1)
mu, sigma = scipy.stats.norm.fit(data)
best_fit_line = scipy.stats.norm.pdf(bins, mu, sigma)
another = scipy.stats.norm.pdf(bins,3.252716524307662,
    1.1951825754469236)


plt.ylabel('Frequency')
plt.xlabel('identical')
plt.title('0.1s')
plt.plot(bins, best_fit_line,another)
plt.xlim([0, 13])
plt.gca().legend(('experiment','theoretical'))
#Poisson
best_fit_line1 = scipy.stats.poisson.pmf(bins, mu)
another1 = scipy.stats.poisson.pmf(bins,mu)

plt.ylabel('Frequency')
```

```
plt.xlabel('identical')
plt.title('0.1s')
plt.plot(bins, best_fit_line1,another1)
plt.xlim([0, 13])
plt.gca().legend(('experiment','theoretical'))


chisquare(data, axis=None)
plt.ylabel('Frequency')
plt.xlabel('identical')
plt.title('0.1s Chi-square distrubtion')
#pvalue=0.18413399289035015
plt.plot(bins, chi2.pdf(bins, df=6))
```

Listing 1: 0.1s

```
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import scipy
import scipy.stats
import numpy as np
from scipy.stats import chisquare
from scipy.stats import chi2


data = pd.read_csv("C:\\Users\\toby1\\Desktop\\Poisson.csv", header=
 None)

#Gauss
_, bins, _ = plt.hist(data, 30, density=1, alpha=1)
```

```
mu, sigma = scipy.stats.norm.fit(data)
best_fit_line = scipy.stats.norm.pdf(bins, mu, sigma)
another = scipy.stats.norm.pdf(bins,24.685029175026674,
 5.313618128260691)

plt.ylabel('Frequency')
plt.xlabel('identical')
plt.title('0.5s')
plt.plot(bins, best_fit_line,another)
plt.xlim([0, 45])
plt.gca().legend(('experiment','theoretical'))

#Poisson
#mu1 = scipy.stats.poisson.pmf(data)
best_fit_line1 = scipy.stats.poisson.pmf(bins, mu)
another1 = scipy.stats.poisson.pmf(bins,mu)

plt.ylabel('Frequency')
plt.xlabel('identical')
plt.title('0.5s')
plt.plot(bins, best_fit_line1,another1)
plt.xlim([0, 45])
plt.gca().legend(('experiment','theoretical'))

chisquare(data, axis=None)
#0.08413399289035015
plt.ylabel('Frequency')
plt.xlabel('identical')
plt.title('0.5s Chi-square distrubtion')
```

```

plt.plot(bins, chi2.pdf(bins, df=12))
```

Listing 2: 0.5s