1. 常见公式

1.1. 乘法公式

1. 分配律：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
2. 完全平方：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
   - 三項完全平方：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
3. 差平方：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
   - 三數差平方：$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
4. 平方差：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
5. 和立方：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
6. 差立方：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7. 立方和：$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
8. 立方差：$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
9. 等幂求和：$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
10. 等幂和差：$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
11. 平方和、平方差延伸：$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
12. 多項式平方：$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$
13. 三數和立方：$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$

Figure 1: 乘法公式

参考资料:

- wiki: 乘法公式

1.2. 三角函数

a 角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
a 弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
正弦 Sina	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
余弦 Cosa	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
正切 tana	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0
余切 Cota	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	不存在	0	不存在

Figure 2: 特殊角三角函数值

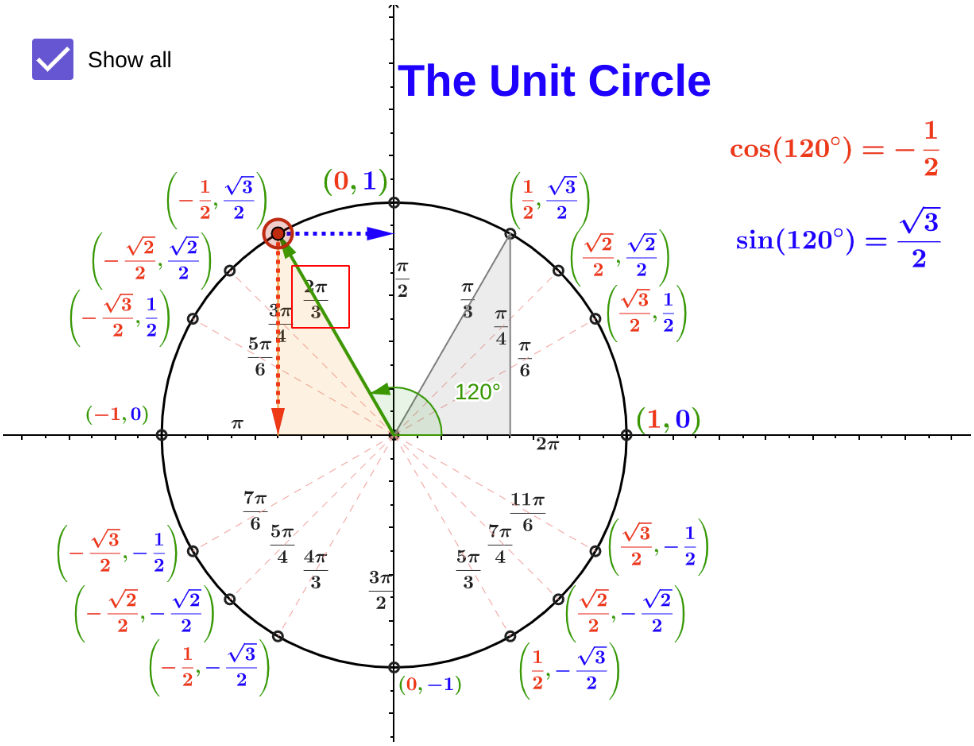

Figure 3: 特殊角三角函数值

参考资料:

- GeoGebra特殊角三角函数值
- wiki: 三角函数
- 特殊三角函数值

1.3. 泰勒展开

无穷可微函数$f(x)$的泰勒展开式为:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1}$$

$f^n(a)$表示函数f在a处的n阶导数,如果$a=0$,也把这个级数叫做麦克劳林级数.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall(\text{对所有X都成立}) \tag{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad \forall \tag{3}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad \forall \tag{4}$$

参考资料:

- wiki: 泰勒级数

1.4. 常见求导公式

线性法则

$$\frac{\mathrm{d}(Mf)}{\mathrm{d}x} = M\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}; \qquad [Mf(x)]' = Mf'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}(f \pm g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

乘法定则

$$\frac{\mathrm{d}fg}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

除法定则

$$\frac{\mathrm{d}\frac{f}{g}}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g - f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \qquad (g \neq 0)$$

倒数定则

$$\frac{\mathrm{d}\frac{1}{g}}{\mathrm{d}x} = \frac{-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \qquad (g \neq 0)$$

复合函数求导法则（连锁定则）

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

$$\frac{\mathrm{d}f[g(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f'[g(x)]g'(x)$$

反函数的导数

由于 $g(f(x)) = x$，故 $g(f(x))' = 1$，根据复合函数求导法则，则 $g(f(x))' = \frac{\mathrm{d}g[f(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(f)}{\mathrm{d}f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 1$

所以 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}g(f)}{\mathrm{d}f}} = [\frac{\mathrm{d}g(f)}{\mathrm{d}f}]^{-1} = [g'(f)]^{-1}$

同理 $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g}} = [\frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g}]^{-1} = [f'(g)]^{-1}$

广义幂法则

$$(f^g)' = \left(e^{g\ln f}\right)' = f^g\left(g'\ln f + \frac{g}{f}f'\right)$$

Figure 4: 求导法则

$$\left(e^x\right)' = e^x \tag{5}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)} \tag{6}$$

参考资料:

- wiki: 导数列表

2. 公式理解

2.1. 泰勒展开

2.1.1. $\sin x$

```
# 首先，计算 sin(x) 在 x=0 处的函数值和各阶导数。根据正弦函数的定义，有：
sin(0) = 0

# 对正弦函数求一阶导数，得到：

d/dx sin(x) = cos(x)
cos(0) = 1

# 对正弦函数求二阶导数，得到：
d^2/dx^2 sin(x) = -sin(x)
-sin(0) = 0

# 对正弦函数求三阶导数，得到：
d^3/dx^3 sin(x) = -cos(x)
-cos(0) = -1

# 对正弦函数求四阶导数，得到：
d^4/dx^4 sin(x) = sin(x)
sin(0) = 0

# 以此类推，可以得到：

d^5/dx^5 sin(x) = cos(x)
cos(0) = 1

d^6/dx^6 sin(x) = -sin(x)
-sin(0) = 0

d^7/dx^7 sin(x) = -cos(x)
-cos(0) = -1

d^8/dx^8 sin(x) = sin(x)
sin(0) = 0

# 根据泰勒级数展开式，将这些导数带入公式：
sin(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2! + f'''(0)x^3/3! + ...
```

2.1.2. e^x

```
e^x的导数还是e^x
e^0 = 1
...

□□□□□□□□□□

e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + x^6/6! + ...
```

2.2. 复数域内指数函数

$$z = a + ib \quad \text{复数的直角坐标表示} \tag{7}$$

$$z = re^{i\theta} \quad \text{极坐标表示} \tag{8}$$

$$re^{ix} = r\cos x + r * i * \sin x \tag{9}$$

在复平面上 [编辑]

如同在实数情况下，在复平面的指数函数可以用多种等价方式定义。比如幂级数形式的:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

或者序列的极限:

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

它带有虚数周期$2\pi i$[prove 1]，它可以写为

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

这里的a和b是实数值。参见欧拉公式，这个公式把指数函数和三角函数与指数函数联系起来。

在考虑定义在复平面上的函数的时候，指数函数拥有重要的性质

- $e^{z+w} = e^z e^w$
- $e^0 = 1$
- $e^z \neq 0$
- $\frac{d}{dz}e^z = e^z$
- $(e^z)^n = e^{nz}, n \in \mathbb{Z}$

对于所有的z和w。

Figure 5: 复指数函数

当 $r = 1, \theta = \pi$时，这就是欧拉公式:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{10}$$

常见的值如下:

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i * \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{11}$$

它的意思是在复平面上以1为起点，沿着单位圆逆时针旋转120度到达的点。

根据 Figure 5 的指数运算可得:

$$\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1 \tag{12}$$

可以理解为走了3个120°

根据 Figure 5 的指数运算可得:

$$\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \tag{13}$$

可以理解为走了2个120°

2.3. 一元三次方程

一元二次方程有0,1,2个实根

一元3次方程，最多有3个实根，至少有1个实根

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0 \tag{14}$$

令:

$$x = t - \frac{b}{3a} \tag{15}$$

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \tag{16}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \tag{17}$$

可化简的 Equation 14 为:

$$t^3 + pt = q = 0 \tag{18}$$

有很多方法可以求解 Equation 18

2.3.1. 卡尔达诺(Cardano)公式

$$u = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} \tag{19}$$

$$v = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} \tag{20}$$

简写以下:

$$\Delta = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \tag{21}$$

$$u = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)} \tag{22}$$

$$u = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)} \tag{23}$$

$$w = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i * \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{24}$$

$$\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i * \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{25}$$

则:

$$t_1 = u + v \tag{26}$$

$$t_2 = wu + w^2v = -\frac{u+v}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) \tag{27}$$

$$t_3 = w^2u + wv = -\frac{u+v}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) \tag{28}$$

其中的 $0, w, w^2$ 可以根据 Equation 12，理解为复平面内圆半径为1的三个点

然后根据 Equation 15 可得 x

2.3.2. 判别式(Discriminant)

可以证明实数根数目依赖于辅助方程的判别式$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$，

- 若$\Delta > 0$，方程有一个实根和两个共轭复根；
- 若$\Delta = 0$，方程有三个实根：当$\frac{q^2}{4} = -\frac{p^3}{27} = 0$时，方程有一个三重实根；当$\frac{q^2}{4} = -\frac{p^3}{27} \neq 0$时，方程的三个实根中有两个相等；
- 若$\Delta < 0$，方程有三个不等的实根：$x_1 = 2\sqrt{Q}\cos\frac{\theta}{3} - \frac{b}{3a}, x_{2,3} = 2\sqrt{Q}\cos\frac{\theta \pm 2\pi}{3} - \frac{b}{3a}$,其中 $\theta = \arccos\frac{R}{Q\sqrt{Q}}, Q = -\frac{p}{3}, R = \frac{q}{2}$（注意，由于此公式应对于$x^3 + px = q$的形式，因此这里的$q$实际上是前段的$-q$，应用时务必注意取负号即$R = -\frac{q}{2}$）。

Figure 6: 一元三次方程判别式

参考资料:

- 知乎: 一元三次方程的求根公式
- wiki: 一元三次方程，含推导和例子
- 从一元二次方程到群论(4)：卡尔达诺公式