出 版 说 明

为了满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学参考的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了这套《中学数学》：《代数解题引导》、《初等几何解题引导》、《解析几何解题引导》、《三角解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》（Ⅰ、Ⅱ）。

今后，我们将组织力量继续编写适合中学生课外学习和中学教师教学参考的读物。希望这套书和广大读者见面后，能听到各方面的热情批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八〇年四月

目　录

第一章　直线与圆

§1　曲线与方程

一、概　　述

1. 直线坐标系与坐标

数是代数研究的对象和元素，点是几何研究的对象和元素，它们本不相属，但，坐标系的引进，却使得它们建立了一一对应．即，有了坐标系，我们说数，就可用点表示；我们说点，也可用数表达．

元素是个体的称谓，集合是总体的称谓．这里所说建立了一一对应，是指实数集与某一直线（视作点集）说的．对有理数集说来则不然，因为它们只具备一个对应．

坐标系又分为一维的，二维的，三维的，甚至在抽象空间还有四维的等．这里的维数是指独立变量的个数．

轴、原点、单位长通称为（构成）坐标系的三要素．轴是指定了正向的直线．

一条线段有两个相反的方向，若以 A 为起点，B 为终点，则向量 $\overline{AB}$ 与向量 $\overline{BA}$ 具有

$$\overline{AB}=-\overline{BA}.$$

若 $\overline{AB}$ 在一轴上，则依向量 $\overline{AB}$ 与轴的指向相同为正，否则为负．而 $\overline{AB}$ 的绝对值则在单位长给定之下，依 $\overline{AB}$ 的长度而定．换句话说，在轴上的向量均可用一实数表示．但，若将向

量的起点固定于原点，则不同的终点对应着不同的实数，反过来不同的实数对应着不同的终点．通常称这实数为这点的坐标．

所谓数轴，就是这样的直线，这直线上的点和数之间是已建立起一一对应关系的．

设 $OA_1=x_1$，$OA_2=x_2$，$OA=x$．
则 A_1A_2 的距离：

$$|A_1A_2|=|x_2-x_1|.$$

又若 $\frac{A_1A}{AA_2}=\lambda$，则定比点 A 的坐标为：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad \lambda\neq-1.$$

其中 $\lambda=1$ 时为中点；$\lambda>0$ 时为内分点；$\lambda<0$ 时为外分点．

2．平面直角坐标系与坐标

平面上，有公共原点的互相垂直的两条数轴构成平面直角坐标系．通常，第一轴取水平位置，正向自左至右，叫做横轴；第二轴取铅直位置，正向自下至上，叫做纵轴．

依此，平面上任意一点 M 的位置，可用两个有序数来表示．其第一个为点 M 在横轴上的垂足的（横）坐标 x；其第二个为点 M 在纵轴上的垂足的（纵）坐标 y．常记作 $M(x, y)$．

这一来，通过坐标系的建立，于是使平面点集和有序实数对 (x, y) 集一一对应．这样，就有可能把平面内，关于点的几何问题，转化为关于这些点的坐标即数的问题来进行研究．解析几何就是从这一基本思想出发，用代数的方法来研究几何问题的．

已知两点 $P_1(x_1, y_1)$；$P_2(x_2, y_2)$，则这两点间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

设定比点 P 的坐标为 (x, y)，又已知 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$ $(\lambda\neq-1)$，

则此定比点的坐标为

$$\left(x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$$

其中 $\lambda=1$ 时，P 为 P_1P_2 的中点；$\lambda>0$ 时，P 为 P_1P_2 的内分点；$\lambda<0$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，P 为 P_1P_2 的外分点。

而直线段 P_1P_2 或过 P_1，P_2 的直线的斜率为

$$K=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad (x_2\neq x_1).$$

其中 α 为过 P_1,P_2 两点的直线的倾角．当 $x_2=x_1$ 时，斜率 K 不存在，$\alpha=\frac{\pi}{2}$。

以 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，$P_3(x_3,\ y_3)$ 为顶点的三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

的绝对值．特别当 P_3 在原点时，则此面积 Δ 为

$$\Delta=\frac{1}{2}\left|\,x_1y_2-x_2y_1\,\right|.$$

3．曲线与方程

在解析几何中，曲线都看做点的几何轨迹．即，曲线是一些具有某一共同性质的点的集合．而包含两个变量（x 与 y）的方程，常看作它的无穷个解（x，y）的集合．

以 x 和 y 表示定曲线上任一点的坐标，借助于 x 与 y 间的方程来表示曲线上一切点的共同性质，这样，便形成了变量坐标 x 与 y 间的方程．即，定曲线上任何点的坐标都满足这方程，而不在这曲线上的任何点的坐标就不满足它．于是这方程又称为该曲线的方程．换句话说，曲线方程反映了平面上的

曲线与包含两个变量的方程之间的对应关系.

所谓两曲线的交点，它既在这曲线上又在另一曲线上. 所谓两个二元联立方程的解，它既满足这方程又满足另一方程. 既然曲线方程是反映了曲线与方程的对应关系，因此两曲线的交点，常用反映这两曲线的方程的交

$$(F_1(x,\ y)=0)\cap(F_2(x,\ y)=0)$$

或联立方程

$$\begin{cases}F_1(x,\ y)=0\\F_2(x,\ y)=0\end{cases}$$

的解表示.

二、例　　题

例 1　设 M 是 A、B、C 三点所在直线上的任意一点，求证：

(1) $MA\cdot BC+MB\cdot CA+MC\cdot AB=0$

(2) $MA^2\cdot BC+MB^2\cdot CA+MC^2\cdot AB+BC\cdot CA\cdot AB=0$

分析　MA, MB, MC, AB, BC, CA 都为有向线段，取 A、B、C 三点所在直线为数轴，M 点为原点，给出 A、B、C 三点的坐标，利用有向线段的数量公式代入即可证明.

证　取 A、B、C 三点所在直线为数轴，M 点为原点，设 A、B、C 三点的坐标分别为 a, b, c

(1) $MA\cdot BC+MB\cdot CA+MC\cdot AB$

$=a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)$

$=ac-ab+ab-bc+bc-ac=0$

(2) $MA^2\cdot BC+MB^2\cdot CA+MC^2\cdot AB+BC\cdot CA\cdot AB$

$=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)+(c-b)(a-c)(b-a)=0$

例 2 已知矩形 $ABCD$ 的中心与原点重合，且对角线 BD 与 x 轴重合，A 在第一象限内，$|AB|=\sqrt{6}$ $|BC|=\sqrt{3}$.

(1) 求矩形各顶点的坐标；

(2) 沿 x 轴将下半平面旋转，使其与上半平面垂直，求 A、C 两点间的距离.

解 (1) ∵ $ABCD$ 为矩形，$|AB|=\sqrt{6}$，$|BC|=\sqrt{3}$.

∴ $|BD|=\sqrt{|AB|^2+|CB|^2}=\sqrt{6+3}=3$

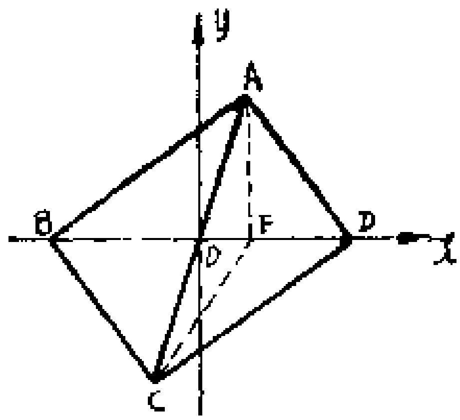


图 1—1

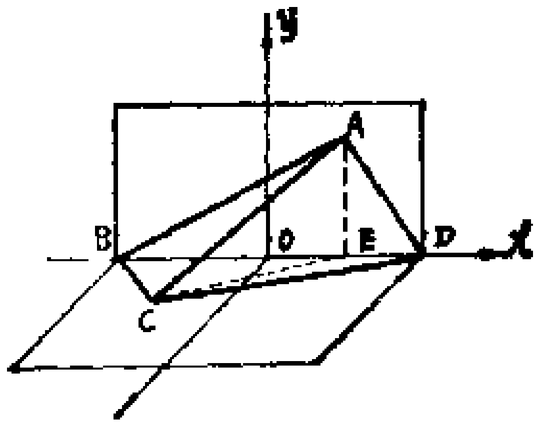


图 1—2

所以 B、D 的坐标分别为 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

设 A 点坐标为 $(x_1,\ y_1)$，引 $AE\perp ox$，E 为垂足，则在 $Rt\Delta OAE$ 和 $Rt\Delta AED$ 中分别有

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=\dfrac{9}{4} \\ \left(x_1-\dfrac{3}{2}\right)^2+y_1^2=3 \end{cases}$$

解之，得 $x_1=\frac{1}{2}$，$y_1=\sqrt{2}$（舍去负值），所以，A 点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{2}\right)$

因 C 点与 A 点关于原点对称，故 C 点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\ -\sqrt{2}\right)$

(2) 在下半平面内连结 CE，因上、下两个半平面互相垂直，AE 垂直于它们的交线 x 轴，故 $CE\perp AE$，因之 ΔAEC 为直角三角形.

$$|CE|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+(0+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad |AC|=\sqrt{(AE)^2+(CE)^2}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$$

〔附注〕 若不规定 A 点所在象限，本例(1)有两组解.

例 3 已知 ΔABC 各边中点为 $D(3,\ -2)$，$E\ (1,\ 6)$ 和 $F\ (-4,\ 2)$，回答下列问题：

(1) 求 ΔABC 各顶点的坐标；

(2) 证明 ΔDEF 与 ΔABC 有共同的重心；

(3) 证明 ΔABC 的重心与三顶点相连所成的三个三角形的面积相等，都等于原三角形面积的三分之一.

解 (1) 设 A、B、C 三点的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$，由中点坐标公式，有

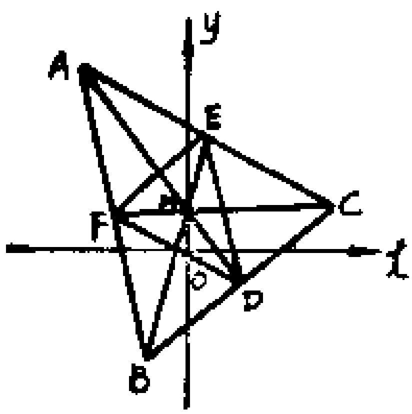


图 1—3

$$\begin{cases}x_1+x_2=8\\x_2+x_3=6\\x_3+x_1=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_1+y_2=4\\y_2+y_3=-4\\y_3+y_1=12\end{cases}$$

分别解之，得

$$x_1=-6,\quad x_2=-2,\quad x_3=8.$$

$$y_1=10,\quad y_2=-6,\quad y_3=2.$$

故 A、B、C 三点的坐标分别为 $(-6, 10)$，$(-2, -6)$，$(8, 2)$.

(2) 设 ΔABC 的重心为 $M(x_M, y_M)$，ΔDEF 的重心为 $M'(x_{M'}, y_{M'})$，则有

$$x_M=\frac{(-6)+(-2)+8}{3}=0$$

$$y_M=\frac{10+(-6)+2}{3}=2$$

$$x_{M'}=\frac{3+1-4}{3}=0 \qquad y_{M'}=\frac{-2+6-2}{3}=2$$

点 M 与 M' 的坐标相同，故 ΔDEF 与 ΔABC 有共同的重心.

(3) 由(2) 知 ΔABC 的重心为 $M(0, 2)$，ΔMAB 的顶点 M，A，B 系按反时针方向排列，故

$$S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ -6 & 10 & 1\\ -2 & -6 & 1\end{vmatrix}=32$$

同理可得

$$S_{\Delta MBC}=S_{\Delta MCA}=32$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-6 & 10 & 1\\ 2 & -6 & 1\\ 8 & 2 & 1\end{vmatrix}=96$$

$$\therefore\quad S_{\Delta MAB}=S_{\Delta MBC}=S_{\Delta MCA}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.$$

〔附注〕 在解析几何中，证明两点重合时，如本例 (2) 的解法，常用证明该两点的坐标相同的方法来解决.

例 4 长度为 $l\geqslant 1$ 的直线段，其两端在抛物线 $y=x^2$ 上移动. 设这一线段的中点为 M，求 M 点到 x 轴距离最短时的坐标.

分析 因线段的两端点在抛物线上移动，设其两端点的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则中点M的纵坐标$\frac{y_1+y_2}{2}$就是M点到x轴的距离d，从而问题归结为求d的极小值，由于y_1，y_2都是变量，所以要考虑利用关系式$y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$，减少变量，化为求一元函数的极植问题.

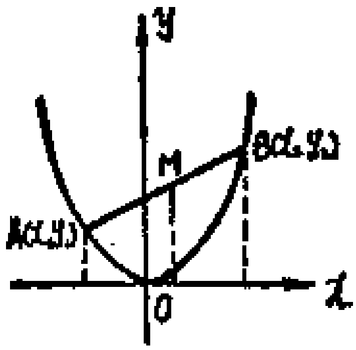


图 1—4

解 设长为$l\geqslant 1$的直线段的两端点A、B在抛物线$y=x^2$上，且其坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)则有

$$y_1=x_1^2,\quad y_2=x_2^2 \qquad ①$$

于是线段AB的中点M到x轴的距离是$d=\frac{y_1+y_2}{2}$ ②

又由题设有

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2 \qquad ③$$

由①②③并令$y_1\cdot y_2=x_1^2\cdot x_2^2=z^2$，则有

$$4z^2+2z+l^2-4d^2-2d=0$$

上式看作z的二次方程，因z必为实数，故判别式的值非负，即

$$\Delta=4-16(l^2-4d^2-2d)\geqslant 0$$

解之，得

$$d\geqslant\frac{2l-1}{4} \text{或} d\leqslant\frac{-2l-1}{4}\text{（这时}d\text{为负数，舍去）}$$

因而d的极小值为$\frac{2l-1}{4}$，就是M点到x轴的最短距离，

这时，$z=-\frac{1}{4}$ 即$x_1x_2=-\frac{1}{4}$，于是

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$$

$$=y_1+y_2+2z$$

$$=\frac{2l-1}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=l-1$$

所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=\pm\sqrt{\frac{l-1}{2}}\ (l\geqslant 1)$

这就是说 M 点的坐标是$\left(\pm\frac{\sqrt{l-1}}{2},\ \frac{2l-1}{4}\right)$

〔**附注**〕 本例的解法中，利用已知曲线的方程进行变量代换，使问题转化为易于求解，这是解析几何解题中一种常用的方法.

本例还有其他解法，如选取 AB 所在直线的倾角 α 为参数来解，请读者考虑.

例 5 等腰$\triangle ABC$ 的底边是 BC，延长一腰 AB 到 D，使 $BD=AB$，则 CD 等于中线 CE 的两倍.

证 以 B 点为原点，以 BC 为 x 轴的正方向，建立直角坐标系如图 1—5.

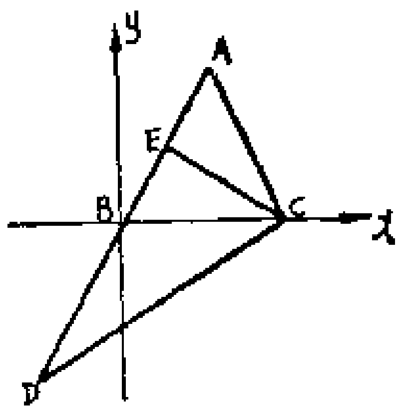


图 1—5

设 C 点坐标为$(a,\ o)$，A 点坐标为$\left(\frac{a}{2},\ h\right)$，因为 E 是 AB 的中点，所以 E 点坐标为$\left(\frac{a}{4},\ \frac{h}{2}\right)$，$D$ 点与 A 点关于原点对称，所以 D 点坐标为$\left(-\frac{a}{2},\ -h\right)$

$$\therefore\quad |CE|=\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{4}-a\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{4h^2+9a^2}$$

$$|CD|=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}-a\right)^2+h^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+9a^2}$$

$\therefore \quad |CD| = 2|CE|$

例 6 在已知正方形 $ABCD$ 内侧作等边三角形 ABK, BCL, CDM 和 DAN，试证：KL, LM, MN 和 NK 这四条线段的中点与 AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN 等八条线段的中点是一个正十二边形的 12 个顶点.

证 以正方形的中心 O 为原点，平行于正方形的边的对称轴为坐标轴，建立坐标系如图 1—6.

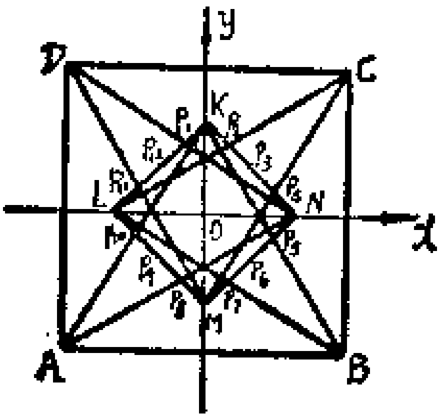


图 1—6

设正方形的边长为 $2a$，则各顶点的坐标分别为

$A(-a, -a)$、$B(a, -a)$、$C(a, a)$、$D(-a, a)$

因 $\triangle ABK$ 为等边三角形，由所取坐标系知 K 点在 y 轴上，且 $|KO| = (\sqrt{3}-1)a$ $\therefore$ K 点坐标为 $(0, (\sqrt{3}-1)a)$

同法可得，N 点坐标为 $((\sqrt{3}-1)a, 0)$

因 M 点与 K 点关于 x 轴对称，L 点与 N 点关于 y 轴对称，故 M 点的坐标为 $(0, -(\sqrt{3}-1)a)$，L 点的坐标为 $(-(\sqrt{3}-1)a, 0)$

根据中点坐标公式可得

DN 的中点 P_1 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a, \frac{a}{2}\right)$;

CL 的中点 P_2 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}\right)$;

NK 的中点 P_3 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a, \frac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)$

又由两点间距离公式，有

$$|P_1P_2|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a-\frac{2-\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$=(2-\sqrt{3})a$$

$$|P_2P_3|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a-\frac{2-\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a-\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$=(2-\sqrt{3})a$$

$\therefore\ |P_1P_2|=|P_2P_3|$

又 $|OP_1|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\ a$,

$$|OP_2|=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\ a$$

$$|OP_3|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,a$$

即 $|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|$

由于另外九个点分别是 P_1，P_2，P_3 的对称点，所以这十二个点都在以 O 为圆心，以 $\sqrt{2-\sqrt{3}}\,a$ 为半径的圆上，并且相邻两点的距离相等，所以它们是正十二边形的 12 个顶点.

〔附注〕 例5与例 6 所用的证明方法叫解析法，也叫做坐标法. 所谓解析法就是通过建立坐标系，把平面图形性质的问题，化为有关点的坐标的数量关系问题，再用代数方法进行讨论.

用解析法，将一个几何问题化为一个代数问题后，解题思路往往比较明确，所以易于入手. 但代数运算是否简单，却有赖于坐标系的选择，坐标系选择得当，可使证明简捷，否则将导致繁琐计算，使问题变得复杂. 选取坐标系时，应着眼于具体图形的特征，通常取图形中某一线段的端点，或线段的中点，或对称中心，或两垂线的交点等作为坐标原点，而将图形中过些点的一条直线作为坐标轴，这样，就能使图形中有关点的坐标尽量简单.

从理论上说，凡几何命题都可用解析法证明，但用解析法并不一定都能使证明过程简捷，一般地说，对于讨论两线段相等、两直线的垂直；平行，线段之积、线段之比、点共线、线共点等问题用解析法较易于思考，而有关角的命题，在许多情况下，用解析法证明就不一定比用综合法简便.

例 7 在正△ABC内有一动点P，P到三个顶点的距离分别为$|PA|$，$|PB|$，$|PC|$，且满足关系式$|PA|^2=|PB|^2+|PC|^2$，求P点的轨迹.

分析 因正△ABC已知，选取适当坐标系后，即可确定三个顶点A、B、C的坐标，再设动点P的坐标为(x, y)，由题设所给出的P点应满足的条件，化为点的坐标间的数量关系式，即可求得P点的轨迹.

解 设正△ABC的边长为$2a$，取BC的中点为原点，BC所在的直线为x轴，建立坐标系如图1—7. 则此三角形各顶点坐标为：$A(0, \sqrt{3}a)$，$B(-a, 0)$，$C(a, 0)$

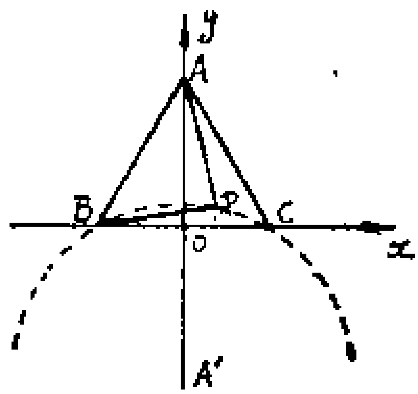


图 1—7

设动点P的坐标为(x, y)

$\because$ $|PA|^2=|PB|^2+|PC|^2$

$\therefore$ $x^2+(y-\sqrt{3}a)^2$

$=(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2$

即 $$x^2+y^2+2\sqrt{3}ay=(2a)^2$$

故P点的轨迹为以$(0, -\sqrt{3}a)$为圆心，正△ABC的边长$2a$为半径的圆，在此三角形内的一段圆弧$\overset{\frown}{BPC}$（不包括端点B，C）.

例 8 过定点B任作直线交定单位圆于P_1、P_2，在这直线上取不同于B的点P，使

$$|P_1P| : |PP_2| = |P_1B| : |BP_1|$$

求 P 的轨迹.

解 取定圆的圆心 O 为原点，过 B 的直线为 y 轴，建立如图 1—8 所示的坐标系，则圆的方程为 $x^2+y^2=1$ ①

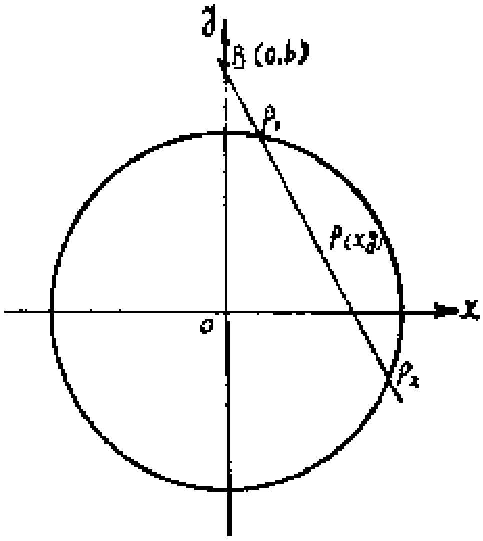


图 1—8

设 B，P_1，P_2 各点坐标分别为 $(0, b)$，(x_1, y_1) 及 (x_2, y_2)，又设 P 点坐标为 (x, y)

令 $\dfrac{P_1P}{PP_2} = -\dfrac{P_1B}{BP_2} = \lambda$

则有

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad ②$$

$$y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \quad ③$$

$$0 = \frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda} \quad ④$$

$$b = \frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda} \quad ⑤$$

又，因 P_1，P_2 在定圆上，它们坐标满足方程①

即 $$x_1^2+y_1^2=1,\ x_2^2+y_2^2=1 \quad ⑥$$

由④得 $$x_1 = \lambda x_2 \quad ⑦$$

由③，⑤得 $$by = \frac{y_1^2-\lambda^2 y_2^2}{1-\lambda^2} \quad ⑧$$

又将⑥⑦式代入⑧消 x_1，x_2，y_1，y_2，λ 得

$$by = \frac{(1-x_1^2)-\lambda^2(1-x_2^2)}{1-\lambda^2} = 1$$

故所求 P 的轨迹是直线 $y=\frac{1}{6}$

〔附注〕 求动点的轨迹方程，应先选取适当的坐标系. 再根据轨迹条件，建立表示动点坐标 (x, y) 之间的方程，一般地，有以下两种情形：(1)由轨迹条件能直接得到动点坐标(x, y)的关系式时(如例 7)，就直接求出；(2) 不易于由轨迹条件直接得到动点坐标(x, y)之间的关系式时(例 8)，可选用适当的辅助变量，把 x，y 分别表示出来， 再消去辅助变量，得到所求的轨迹方程，必要时要研究方程所表示的曲线，并根据题设，确定曲线的存在范围.

例 9 试确定 θ 的取值范围，使直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=2$ 与椭圆 $x^2+3y^2=6$ 有公共点(这里 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$).

分析 两曲线如果有公共点，则这公共点的坐标必定是它们所属方程的公共解，因此，问题归结为，确定 θ 的取值范围，使方程组

$$\begin{cases}x\cos\theta+y\sin\theta=2\\ x^2+3y^2=6\end{cases}$$

有实数解

若将 y 消去，即得一个关于变数 x 的二次方程，根据一元二次方程有实数根的条件，应考虑根与判别式的关系，运用不等式进行研究.

解 直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=2$ ①

当 $\sin\theta\neq0$ 时有

$$y=-x\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{2}{\sin\theta} \quad ②$$

代入椭圆方程 $x^2+3y^2=6$ ③

得 $$x^2+3\left(-x\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{2}{\sin\theta}\right)^2=0$$

上式两边乘以 $\sin^2\theta$，并整理之，得

$$(1+2\cos^2\theta)x^2-12x\cos\theta+6(1+\cos^2\theta)=0 \qquad ④$$

直线与椭圆有公共点的条件是④的判别式 $\Delta\geqslant 0$，也就是

$$\Delta=(6\cos\theta)^2-6(1+2\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)\geqslant 0$$

即 $\qquad 2\cos^4\theta-3\cos^2\theta+1\leqslant 0$

所以 $\qquad (2\cos^2\theta-1)(\cos^2\theta-1)\leqslant 0$

由于 $\quad \cos^2\theta-1=-\sin^2\theta\leqslant 0$

$\therefore \qquad 2\cos^2\theta-1\geqslant 0$

由此得 $\quad \cos\theta\leqslant-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $\cos\theta\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad 0<\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi\leqslant\theta<\pi$

当 $\sin\theta=0$ 时，$\theta=0$，π，直线 (1) 化为 $x=2$ 或 $x=-2$ 它们和椭圆有公共点，故所求的范围是

$$\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4}\pi,\ \pi\right)$$

例 10 作方程 $y=\frac{x^2}{x^2-1}$ 的曲线

解 讨论：

(1) 截距 $\because$ $x=0$ 时 $y=0$，$\therefore$ 曲线通过原点.

(2) 对称性 在原方程中以 $-x$ 换 x，得

$y=\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$，方程不变，所以曲线关于 y 轴对称，在原方程中以 $-y$ 换 y，或同时用 $-x$，$-y$ 换 x，y 方程都改变. 所以曲线关于 x 轴不对称，也不是关于原点中心对称.

(3) 范围 x 可取不为 ±1 的一切实数.

原方程可变形为 $(y-1)x^2-y=0$，这是关于 x 的一元二次方程，因 x 为实数，所以这个二次方程的根的判别式

$$0^2-4(y-1)(-y)\geqslant 0$$

解这个不等式，得 $y\leqslant 0$ 及 $y\geqslant 1$.

将原方程变形为 $y=1+\dfrac{1}{x^2-1}$

当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时都有 $y\to 1$，且总是 $y>1$，当 $|x|<1$ 时 $-1<x^2-1<0$ ∴ $y<0$

列表

x	…	-5	-2	-1.2	-1.1	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.5	-0.3	0
y	…	$1\frac{1}{24}$	$1\frac{1}{3}$	3.3	6	不存在	-4	-2	-1	$-\frac{1}{3}$	-0.1	0

作图：图 1—9.

〔附注〕 关于作方程的曲线还有以下几种特殊情形：

(1) 方程中可能仅含一个变量，但也确定某曲线，如 $y=2$，便确定了一条平行于 x 轴的直线.

(2) 如果方程 $F(x, y)=0$ 的左边可以分解为几个因式，如 $F(x, y)=f(x, y)\cdot\varphi(x, y)$，令每个因式都等于零，得到 $f(x, y)=0$ ① $\varphi(x, y)=0$ ②

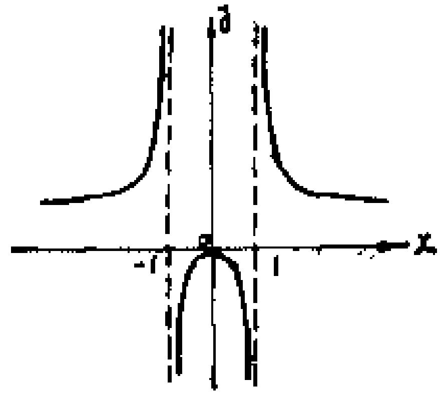


图 1—9

满足方程 $F(x, y)=0$ 的 x，y 的值，必满足方程①或②；反之满足方程①或②的 x，y 的值，必满足方程 $F(x, y)=0$，方程①，②都确定一条曲线，合起来就是方程 $F(x, y)$ 的曲线，如方程 $x^2-y^2=0$，可化为 $(x+y)\cdot(x-y)=0$，表示一对直线 $x+y=0$，$x-y=0$.

(3) 如果方程 $F(x, y)=0$，仅有一组或几组实数解，那

么它所表示的曲线是一个或几个孤立的点，如方程 $(x^2-1)^2+(y^2-4)^2=0$ 表示四个点：(1, 2)，(-1, 2)，(-1, -2) (1, -2)，方程 $x^2+y^2=0$ 仅表示原点.

(4) 如果方程 $F(x, y)=0$ 没有实数解，则它不表示任何曲线，如方程 $x^2+y^2+1=0$，不能为任意实数对所满足，这个方程就没有曲线.

习 题 一

1. B，C，D 三点在数轴上的坐标分别是 a，$2a$，$3a$，$(a>0)$，在数轴上求一点 A，使适合等式

$$|OA|^2+|AB|^2+|AC|^2+|AD|^2=5a^2$$

2. 三角形的两个顶点坐标为 $A(3, 7)$、$B(-2, 5)$ 求第三个顶点 C 的坐标，使 AC 边的中点 E 及 BC 边的中点 D 都在坐标轴上.

3. 在 $\square ABCD$ 中，$AB=8$，$AD=6$，$\angle DAB=60°$，M 为 AB 的中点，以 A 为原点，AB 为 x 轴的正方向，使 D 点在第一象限，求：(1) A、B、C、D 的坐标；(2) DM 与 AC 的交点的坐标.

4. 在以三点 $A(5, -1)$，$B(1, 7)$，$C(-3, 5)$ 为顶点的 ΔABC 中：

(1) 求其重心和外心的坐标；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

5. 求一点 $M(x, y)$，使它到已知三点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ 的距离的平方和为最小.

6. 求夹在两曲线 $y=2x^4-7x^2+5$ 与 $y=-2x^4+2x-5$ 之间，且平行于 y 轴的线段的最小值.

7. x_1，x_2，y_1，y_2 为任何实数，证明：

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

8．在曲线 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 上取一点 P，使它与两定点 $A(-1,\ 0)$，$B(1,\ 0)$ 的距离的平方和为最小，求 P 的坐标．

9．在直角坐标系中，有两点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1, b_2)$ 且 $|OA|=a$，$|OB|=b$，$\angle AOB=\theta$，如果 a_1，a_2，b_1，b_2，a，b 都是有理数，那么 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 也是有理数．

10．证明不存在顶点都是有理点的正三角形(坐标都是有理数的点叫有理点)．

11．在直角坐标系中有五个整点．证明：必有两点所连线段的中点也是整点．(坐标都是整数的点叫整点，也叫格点)

12．$\triangle ABC$ 的顶点是 $A(0,\ 0)$，$B(4,\ 8)$，$C(6,\ -4)$，已知点 M 内分 AB 所成的比是 3:1，P 是 AC 边上的一点且 $\triangle APM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积的一半，求 P 分 AC 所成的比．

13．在 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 BC 上，顺次取 M_1、M_2……M_n 把 BC 分成 $n+1$ 等分，两直角边是 b，c 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(AM_1^2+AM_2^2+\cdots\cdots+AM_n^2)$$

14．质点 M_1，M_2 的位置是 $M_1(0,\ 0)$，$M_2(a,\ b)$ $(a<0,\ b>0)$ M_2 由原位置以等速度 v 沿 x 轴正方向运动，同时 M_1 也由原位置作等速直线运动，为了使 M_1 以最慢的速度与 M_2 相碰，试确定

(1) M_1 运动的速度(大小和方向)；

(2) 质点从开始运动到相碰所需要的时间．

15．设 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(a\cos\theta_1,\ b\sin\theta_1)$ $B(a\cos\theta_2,\ b\sin\theta_2)$，$C(a\cos\theta_3,\ b\sin\theta_3)$；求证：它的面积是

$$\left|2ab\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\cdot\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right|$$

16. 已知三角形的两个顶点是(5, 1), (-2, 2), 第三个顶点在x轴上, 且其面积等于10, 求第三个顶点的坐标.

17. 证明顶点为整点的任意多边形, 其面积的二倍必定是整数.

18. D, E, F分别在ΔABC的三边BC, CA, AB上, 并且$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}$; 求证: ΔABC与ΔDEF有公共重心.

19. G是ΔABC的重心, P是任意一点; 证明:

$$PA^2+PB^2+PC^2=AG^2+BG^2+CG^2+3PG^2$$

20. M是正方形$ABCD$的BC边上一点, K是$\angle DAM$的平分线与CD的交点; 求证: $|AM|=|DK|+|BM|$

21. A、B、C、D是平面上四点, 根据它们的坐标, 求出$ABCD$是平行四边形的条件, 并且用坐标方法证明平行四边行的对角线互相平分.

22. 若圆内接四边形的对角线互相垂直, 则自对角线交点到一边中点的线段等于其对边到圆心的距离.

23. 以$\square ABCD$的两邻边AB与BC为边所作的两个正方形的面积之和不小于$\square ABCD$的两对角线为边所作的矩形的面积, 试证明之.

24. 取长为a的线段AB, 点C在AB的延长线上移动, 以AC为直径, 在AC上方作半圆, 设其与过B点且垂直于AC的直线相交于M, 过M、C两点分别作AC及BM的平行线, 此两直线交于P, 试求P点的轨迹方程.

26. 已知两点A、B和比值λ ($\lambda\neq1$). 求证: 和A、B两点距离之比等于λ的点的轨迹是AB关于比值λ的内分点与外分点为直径的两端点的圆.

27. 动点 P 从原点出发，在 x 轴正方向前进 a，然后向左转成直角前进 $ar(0<r<1)$，再向右转成直角前进 ar^2，如此继续下去，

(1) 求极限点的坐标.

(2) 如果 r 是变量，求极限点的轨迹方程.

28. 二曲线 $y=x(a-x)$，$y=x^3$ 有三个不同的交点时，求 a 值的范围.

29. a，b 应满足什么条件，使得对于任意的 m，直线 $y=mx+b$ 与曲线 $(x-1)^2+a^2y^2-a^2=0$ 总有公共点.

30. 讨论并作出下列方程 $y=\sqrt{|1-x^2|}$ 的曲线

§2 直线与二元一次方程

一、概　　述(如表)

	名称	表达式	说明
直线方程	点斜式	①当 $k\neq\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ 时，$y-y_0=k(x-x_0)$ ② 当 $k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ 时，$x=x_0$	(x_0,y_0)—已知点， k—斜率， (x,y)—流动点.
	一般式	$Ax+By+C=0$ (A,B 不同时为零)	任何平面上的直线可用二元一次方程表示,反之亦然.
	斜截式(简化式)	$y=kx+b$	k—斜率，b—截距.
	两点式	$\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$	$\left.\begin{matrix}(x_0,y_0)\\(x_1,y_1)\end{matrix}\right\}$ 已知点 (x,y) — 流动点

	名 称	表 达 式	说 明
直线方程	截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a—横截距，b—纵截距经过原点或平行于坐标轴直线不能用此表达.
	法线式	$x\cos\theta+y\sin\theta=p$ 或 $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$	p—原点到直线的距离， θ—法线的幅角. $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ — 法式因子，注意其符号法则.
点与直线的关系	点在直线上	$Ax_0+By_0+C=0$	(x_0,y_0)—点 $Ax+By+C=0$—直线
	点在直线的上方	$Ax_0+By_0+C>0$	
	点在直线的下方	$Ax_0+By_0+C<0$	
	点到直线的距离	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 或 $d=\lvert x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-p\rvert$	
两直线间的关系	平 行 （充要条件）	$k_1=k_2$ 或 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$	已知两直线为 $y=k_1x+b_1$ $y=k_2x+b_2$ 或为 $A_1x+B_1y+C_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2=0$
	垂 直 （充要条件）	$k_1\cdot k_2=-1$ 或 $A_1A_2+B_1B_2=0$	

续 表

	名 称	表 达 式	说 明
两直线间的关系	相 交	若$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$，则 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ 的解(x_0, y_0)是为交点.	
	交 角	$\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ 或 $\operatorname{tg}\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$	θ为按反时针计算的第一条直线至第二条直线的角. $k_1k_2 \neq -1$ 或 $A_1A_2+B_1B_2 \neq 0$
其他	三点共线	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$ 即 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$	$\left.\begin{matrix}(x_1, y_1)\\(x_2, y_2)\\(x_3, y_3)\end{matrix}\right\}$已知点.
	三直线共点	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$	$\left.\begin{matrix}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\\A_3x+B_3y+C_3=0\end{matrix}\right]$已知直线
	直线系方程	$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$	$\left.\begin{matrix}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{matrix}\right]$已知直线

注：(1) $y=kx+b$ 称斜截式是从几何说的，称简化式是从代数说的。

(2) 从几何条件列方程，一般说来最常用的是点斜式，其次是斜截式.但，具体问题具体选式。

二、 例 题

例 1 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A\left(-\frac{1}{4}, \frac{4}{9}\right), B(6, -4)$ $C(-2, -10)$，求：(1) 中线 AD 的方程；(2) 高 AH 的方程；(3) $\angle A$ 平分线 AT 的方程。

解 (1) 因 BC 的中点 D 的坐标为：

$$x_0 = \frac{6-2}{2} = 2,$$

$$y_0 = \frac{-4-10}{2} = -7$$

所以由两点式得 AD 的方程为

$$\frac{y+7}{\frac{9}{4}+7} = \frac{x-2}{-\frac{1}{4}-2}$$

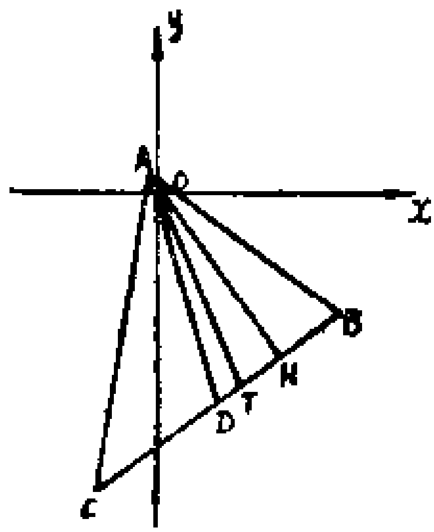


图 1—10

即 $37x + 9y - 11 = 0$

(2) 因 BC 的斜率为 $k_{BC} = \frac{-4+0}{6+2} = \frac{3}{4}$，而 $AH \perp BC$，所以 AH 的斜率 $k_{AH} = -\frac{4}{3}$，由点斜式，得 AH 的方程为：

$$y - \frac{9}{4} = -\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

即 $16x + 12y - 23 = 0$

(3) 设 AT 的方程为 $y - \frac{9}{4} = k\left(x + \frac{1}{4}\right)$

$\because \angle CAT = \angle TAB \quad \therefore \operatorname{tg}\angle CAT = \operatorname{tg}\angle TAB.$

又知 $k_{AC} = 7 \quad k_{AB} = -1$

$$\therefore \quad \frac{k-7}{1+7k}=\frac{-1-k}{1-k}$$

$\therefore \quad k=-3$，$k=\dfrac{1}{3}$（为外角平分线的斜率，舍去）

故 AT 的方程为 $6x+2y-3=0$

〔附注〕（1）直线方程中含有两个独立参数，因之确定直线的方程必须有两个条件.

（2）分析直线问题要抓住斜率，直线平行或垂直条件，常用来确定斜率.

（3）本例中的（3）也可用三角形内角平分线性质：$\dfrac{CT}{TB}=\dfrac{AC}{AB}$，求出 T 点坐标，再用两点式求出直线 AT 的方程.

例 2 一直线被两平行直线 $x+2y-1=0$，$x+2y-3=0$ 所截线段的中点在直线 $x-y-1=0$ 上，并且这直线与两平行直线的交角为 45°，求这条直线的方程.

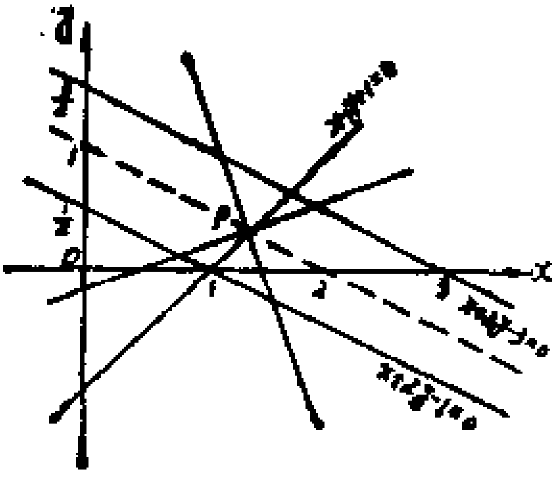


图 1—11

分析 由题设，要得到所求的直线方程，需求出其夹在两平行直线间的线段的中点坐标及斜率，该线段的中点在直线 $x-y-1=0$ 上，也在到两平行直线距离相等，且与此两直线平行的直线上，因之此点坐标易求，又已知所求的直线与两平行直线的交角为45°，所以要考虑利用交角公式求斜率.

解 设所求的直线方程为

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

其中(x_0, y_0)是此直线被两平行直线所截线段的中点P的坐标，k是斜率.

由已知条件，P点应在到两平行直线距离相等的直线l上.

$\because$ 直线l_1：$x+2y-1=0$的纵截距$b_1=\frac{1}{2}$

直线l_2：$x+2y-3=0$的纵截距$b_2=\frac{3}{2}$

由中点坐标公式可知，与两平行线等距离的直线l的纵截距是$b=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\Big/2=1$，其斜率等于两平行线的斜率$-\frac{1}{2}$，所以直线$l$的方程是：

$$y=-\frac{1}{2}x+1$$

又知点P在直线$x-y-1=0$上，解方程组

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

得P点的坐标为$\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

又因所求的直线与两平行直线成45°角，故由交角公式，有

$$\left|\frac{-\frac{1}{2}-k}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)k}\right|=\operatorname{tg}45^\circ$$

$$\therefore \qquad \frac{-\frac{1}{2}-k}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)k}=\pm 1$$

解得 $\qquad k=-3$ 或 $k=\frac{1}{3}$

故所求的直线方程为

$$y-\frac{1}{3}=-3\left(x-\frac{4}{3}\right) \quad \text{或} \quad y-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

即 $9x+3y-13=0$ 或 $3x-9y-1=0$

例 3 已知$\triangle ABC$的顶点$A(1,1)$，$B(5,3)$，$C(4,5)$求：

(1) $\triangle ABC$的面积；

(2) 分$\triangle ABC$为等积的两部分，且平行于y轴的直线方程.

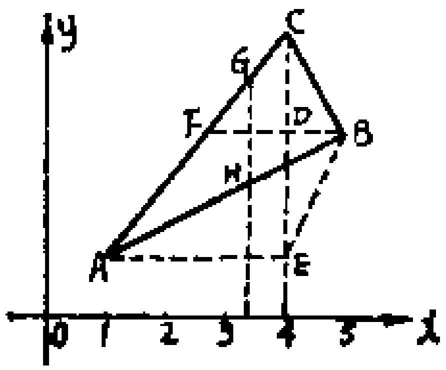


图 1—12

解 (1) ∵ A、B、C三点按逆时针方向排列，故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 1\end{vmatrix}=5$$

(2) 设直线$x=a$将$\triangle ABC$分成等积的两部分，则a必满足

$1<a<4$（∵$\triangle BCD$的面积$<\triangle BCE$的面积$=\frac{1}{2}\times 4\times 1=2$）

设H与G为直线$x=a$与AB，AC的交点.坐标分别为$H(a,y_1)$和$G(a,\ y_2)$，于是

$$\triangle AGH\text{的面积}=\frac{1}{2}(a-1)(y_2-y_1) \qquad ①$$

直线AB的方程为$2y-x-1=0$，直线AC的方程为

$3y-4x+1=0$.

∵ $H(a,y_1)$和$G(a,y_2)$分别在直线AB和AC上，故

$$2y_1-a-1=0. \qquad ②$$

$$3y_2-4a+1=0 \qquad ③$$

③$\times 2-$②$\times 3$ 得：$6(y_2-y_1)-5(a-1)=0$

$$y_2 - y_1 = \frac{5}{6}(a-1) \quad ④$$

将④代入①得

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}(a-1)\cdot\frac{5}{6}(a-1)$$

$$(a-1)^2 = 6$$

$\therefore \quad a = 1 \pm \sqrt{6} \qquad (a = 1 - \sqrt{6}$ 舍去)

故所求的直线方程为 $x = 1 + \sqrt{6}$

例4　有一束光线从点 $A(-3, 5)$ 射到直线 l: $3x - 4y + 4 = 0$ 以后，再反射到一点 $B(2, 15)$，求这束光线从 A 到 B 点所经过的路程.

分析　由平面几何知，在直线 l 上到 AB 两点距离的和为最小的点，是 A 点关于直线 l 的对称点 A_1 与 B 点的连线和直线 l 的交点 p. 根据光学性质，这个点就是自 A 发出的光线在直线 l 上的反射点，所以 A_1、B 的距离就是光线由 A 到 B 所经过的路程，求出 A 关于直线 l 的对称点 A_1，再求出 $|A_1B|$ 即得本题的解.

解　自 A 作直线 $m \perp$ 直线 l 于 C 点

$\because \quad k_l = \frac{3}{4} \qquad \therefore \quad k_m = -\frac{4}{3}$

故直线 m 的方程为

$$y - 5 = -\frac{4}{3}(x+3)$$

即 $\qquad 4x + 3y - 3 = 0$

由方程组

$$\begin{cases} 4x + 3y - 3 = 0 \\ 3x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

解得 C 点坐标为 $(0, 1)$

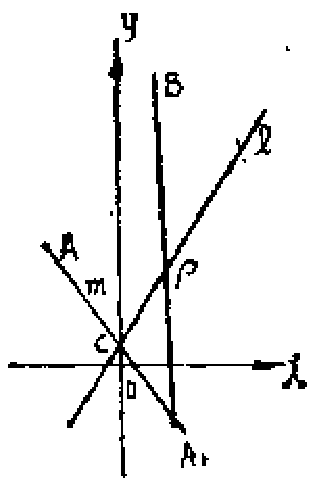


图 1—13

设 A_1 是 A 点关于直线 l 的对称点，则 C 为 AA_1 的中点，由中点坐标公式，得 A_1 的坐标为(3，-3)，如果光线在 l 上的反射点是 P 点，则光线经过的路程为

$$|AP|+|PB|=|A_1P|+|PB|=|A_1B|$$
$$=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}.$$

例 5 有二直线 l_1：$ax+by+4=0$，l_2：$(a-1)x+y+b=0$. 问：(1) 若 l_1 与 l_2 垂直相交，且 l_1 通过点$(-1,1)$，a,b 应为何值？(2) 若 l_1，l_2 同时平行于直线 $x+2y+3=0$，a,b 应为何值？

解 l_1：$ax+by+4=0$ ①

l_2：$(a-1)x+y+b=0$ ②

(1) 因直线 l_1 过点$(-1,1)$，

$\therefore\quad -a+b+4=0$ ③

若 $b=0$，则 $a=4$，直线 l_1 的方程为 $4x+4=0$，$\therefore x=-1$，即 l_1 与 y 轴平行，直线 l_2 的方程是 $3x+y=0$，不平行于 x 轴，故直线 l_1 与 l_2 不垂直，与题设矛盾，$\therefore\ b\neq0$，据此

由①，$y=-\frac{a}{b}x-\frac{4}{b}$；由②，$y=-(a-1)x-b$，因这两直线互相垂直，故有

$$\frac{a}{b}(a-1)=-1$$

即 $\qquad a^2-a+b=0$ ④

④-③得 $\quad a^2-4=0 \quad \therefore\quad a=\pm2$

由③，$a=2$ 时，$b=-2$；$a=-2$ 时 $\ b=-6$

所以直线 l_1 过点$(-1,1)$且与直线 l_2 垂直时，

$a=2$，$b=-2$ 或 $a=-2$，$b=-6$.

(2)　由 $x+2y+3=0$，有 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 此直线的斜率是 $-\frac{1}{2}$

若 $b=0$，则 l_1 平行于 y 轴或无意义，与题设矛盾.

$\therefore\ b\neq 0$

$$\therefore\quad k_{l_1}=-\frac{a}{b}\qquad k_{l_2}=-(a-1)$$

根据平行条件有

$$-\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}\qquad -(a-1)=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad a=\frac{3}{2},\ b=3.$$

例 6　已知两定点 $A(2a,0)$，$B(0,2b)$，M 为直线 $bx+ay-ab=0$ 上的动点，试求：

(1) $\triangle ABM$ 的重心 G 的轨迹

(2) 使 $AM+BM$ 为最小值的点 M 的位置；

(3) 求 (2) 中直线 AM 和 BM 的方程，及 $\triangle ABM$ 的面积.

分析　如图，设 AB 的中点为 N，则重心 G 分 $\triangle AMB$ 的中线 $MG/GN=2$，又因 G 点的位置与动点 M 有关，可由此求出 G、M 两点的坐标 (x,y) 和 (x',y') 之间的关系，从而求出 G 的轨迹方程.

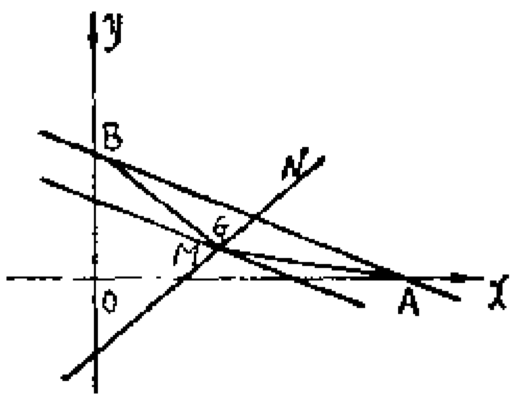


图 1—14

解　(1) AB 的中点 N 的坐标为 (a,b)，设 M 的坐标为

(x',y')，$\triangle AMB$ 的重心 G 的坐标为 (x,y)，则由 $\frac{MG}{GN}=2$ 得：

$$x=\frac{x'+2a}{1+2}=\frac{x'+2a}{3},\qquad \therefore\quad x'=3x-2a$$

$$y=\frac{y'+2b}{1+2}=\frac{y'+2b}{3},\qquad \therefore\quad y'=3y-2b$$

因 M 是直线 $bx+ay-ab=0$ 上的点，故

$$b(3x-2a)+a(3y-2b)-ab=0$$

即 $\qquad 3bx+3ay-5ab=0$

这就是 $\triangle ABM$ 的重心 G 的轨迹方程．

(2) 因过 $A(2a,0)$，$B(0,2b)$ 的直线与直线 l：$bx+ay-ab=0$ 平行，可知当 M 在直线 l 上移动时，与 A、B 所构成的三角形，都是同底等高的三角形，由平面几何知同底等高的三角形中以等腰三角形的周长为最小，因此，使 $AM+BM$ 为最小值的点 M 是 AB 的垂直平分线与直线 l 的交点，AB 的垂直平分线过 $N(a,b)$ 且斜率为 $\frac{a}{b}$，故其方程为：

$$ax-by-a^2+b^2=0$$

此直线与直线 l：$bx+ay-ab=0$ 的交点坐标为

$$x=\frac{a^3}{a^2+b^2},\qquad y=\frac{b^3}{a^2+b^2}$$

即在直线 $bx+ay-ab=0$ 上使 $AM+BM$ 为最小的点 M 的坐标为

$$\left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2}\right)$$

(3) 由两点式，得：

AM 的方程为：$b^2x+a(a^2+2b^2)y+2ab^3=0$

BM 的方程为：$b(b^2+2a^2)x+a^2y-2a^3b=0$．

由三角形的面积公式，

$$\triangle AMB\text{ 的面积 }=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{a^3}{a^2+b^2} & \frac{b^3}{a^2+b^2} & 1 \\ 2a, & 0 & 1 \\ 0 & 2b & 1 \end{vmatrix}=ab$$

〔附注〕 本例(1)中，$\triangle AMB$的重心G的位置与已知直线上的动点M的位置有关，因之，利用了它们的坐标间的关系，求出G点的轨迹方程. 一般地说，如果所求的轨迹上的点与一已知曲线上的动点有关时，大都是先求出它们坐标间的关系式，再代入已知曲线方程，即可得所求的轨迹方程. 这里已知曲线上的动点的坐标是作为中间变量使用的，这是求轨迹方程的一种常用的方法.

例 7 在xoy平面上定义两点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)间的距离为：$d=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$. 在此定义下，试求出到原点及点$A(a, b)$等距离的动点(x, y)的轨迹.

$(a>b\geqslant 0,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

解 ∵ $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$a>b\geqslant 0$，由定义知动点(x, y)到原点的距离为

$$d_1=|x-0|+|y-0|=x+y,$$

到点$A(a, b)$的距离为

$$d_2=|x-a|+|y-b|$$

因 $d_1=d_2$，故动点(x, y)应适合的方程为：

$$x+y=|x-a|+|y-b| \qquad ①$$

当$x\geqslant a$时，(1)式变为$y+a=|y-b|$，显然在规定范围内无解.

当 $x<a$时 ①式可写为

$$x+y=a-x+|y-b|$$

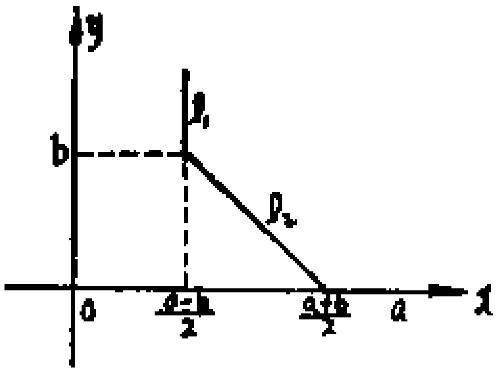


图 1—15

或 $\quad 2x+y=a+|y-b|$

(i) 当 $y\geqslant b$ 时 ②式化为

$$2x+y=a+y-b$$

故 $$2x=a-b$$

即 $x=\frac{a-b}{2}$，$y\geqslant b$

为所求的轨迹方程，其图象如图中的射线 l_1.

(ii) 当 $y<b$ 时，②式化为

$$2x+2y=a+b$$

即 $$x+y=\frac{a+b}{2}，\ x<a，\ y<b$$

为所求的轨迹方程，其图象如图中的线段 l_2.

所以动点的轨迹为 l_1，l_2.

例 8 在坐标平面内有二直线 $x+2y+2=0$，$x-y+5=0$ 和定点 $A(1,0)$、$B(3,0)$，过原点的直线与两已知直线的交点分别为 P、Q，求直线 AP，BC 的交点 R 的轨迹方程.

分析 在过原点的直线中 x 轴必须除外，否则如果取 x 轴的话，那么按题意所指的直线 AP 与 BQ 必将重合，此时 R 无法确定，因此可设过原点的直线为 $x=my$. 这样将 $x=my$ 与已知两直线方程分别组成方程组求得 P，Q 坐标后，可得 AP，BQ 的方程，就不难求得 R 的轨迹方程

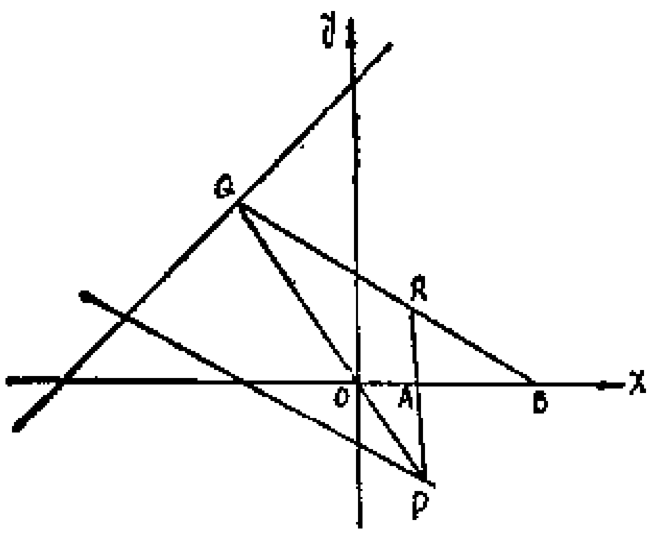


图 1—16

解 $\quad x+2y+2=0 \quad ①$

$$x-y+5=0 \qquad ②$$

x 轴与直线①、②相交，但当直线 AP、BQ 与 x 轴重合时，点 R 不存在，故设适合题意过原点的直线为 $x=my$ ③

设①和③交于 P，②和③交于 Q，则 P，Q 的坐标分别是 $P\left(\dfrac{-2m}{m+2},\ \dfrac{-2}{m+2}\right)$，$Q\left(\dfrac{-5m}{m-1},\ \dfrac{-5}{m-1}\right)$ $(m\neq-2,\ 1)$ 由此直线 AP，BQ 的方程分别是

$$(3m+2)y=2(x-1) \qquad ④$$

$$(8m-3)y=5(x-3) \qquad ⑤$$

由④，⑤得

$$3my=2(x-y-1) \qquad ④'$$

$$8my=5x+3y-15 \qquad ⑤'$$

若 $y=0$，由④'得 $x=1$，由⑤得 $x=3$，这是不合理的，因此 $y\neq0$，所以由④'，⑤'得

$$m=\frac{2(x-y-1)}{3y},\quad m=\frac{5x+3y-15}{8y}$$

$$\therefore\quad \frac{2(x-y-1)}{3y}=\frac{5x+3y-15}{8y}$$

$$\therefore\quad 16(x-y-1)=3(5x+3y-15)$$

即 $x-25y+29=0$

故 所求的轨迹方程为 $x-25y+29=0$，但点 $(-29,0)$ 除外.

例 8 已知 H 为 $\triangle ABC$ 的重心，P 是 BC 的中点，$AD\perp BC$ 于 D，又 $AD=BC$ 求证：

$$HP+HD=CP.$$

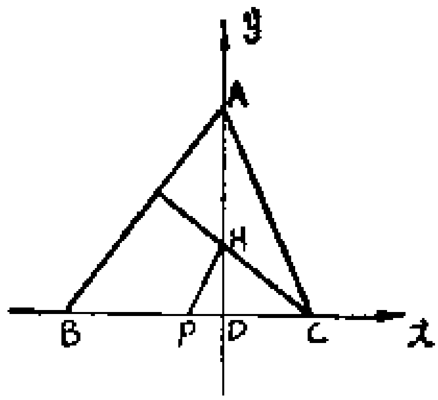


图 1—17

证 以垂足 D 为原点，底边 BC 与高 AD 所在的直线分别为 x

轴、y 轴建立坐标系(如图).

设 $B(-b,0)$，$C(a,0)$ 因 $|AD|=|BC|=a+b$，所以 A 点坐标是 $(0,a+b)$

又因 P 是 BC 的中点，所以 P 点的坐标是 $\left(\frac{a-b}{2},0\right)$

易知 $k_{AB}=\frac{a+b}{b}$ $\therefore$ $k_{CH}=-\frac{b}{a+b}$

$\therefore$ CH 所在直线的方程为

$$y=-\frac{b}{a+b}(x-a)$$

因点 H 在 y 轴上，令 $x=0$，由 CH 的方程得 H 的坐标为 $\left(0,\frac{ab}{a+b}\right)$ 从而

$$|HD|=\frac{ab}{a+b}$$

$$|HP|=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2}=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$$

$$|HP|+|HD|=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}+\frac{ab}{a+b}=\frac{a+b}{2}$$

$$|CP|=\frac{1}{2}|BC|=\frac{a+b}{2}$$

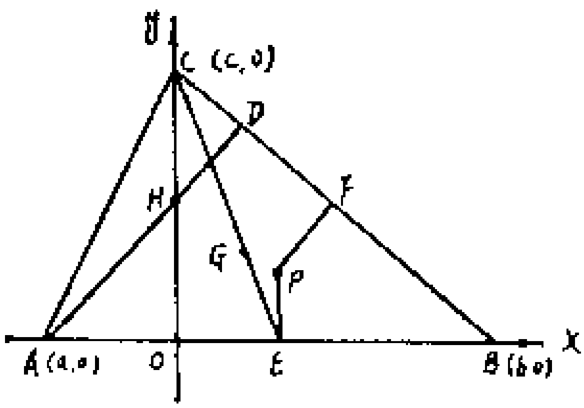


图 1—18

$\therefore$ $|HP|+|HD|=|CD|$

例 9 证明三角形的外心、重心、垂心三点共线.

分析 选取适当的坐标系，由 $\triangle ABC$ 各顶点坐标，求出 $\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心的坐标，再考

虑三点共线条件.

证 建立坐标系如图 (1—18) 设 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$. P, G, H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、重心与垂心. 且 $AD \perp BC$, D 为垂足, E、F 分别为 AB、BC 边的中点, 则 $E\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$, $F\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, CH 的方程 $x=0$, AD 的方程 $y=\frac{b}{c}(x-a)$

解方程组

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{b}{c}(x-a) \end{cases}$$

得 H 的坐标 $\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$

又由方程组

$$\begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y-\frac{c}{2}=\frac{b}{2}\left(x-\frac{b}{2}\right) \end{cases}$$

得 P 点的坐标 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$. 重心 G 的坐标 $\left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{ab+c^2}{2c} & 1 \\ \frac{a+b}{3} & \frac{c}{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{3ab+c^2}{2c} & 0 \\ \frac{a+b}{3} & \frac{3ab+c^2}{3c} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{3ab+c^2}{2c} \\ \frac{a+b}{3} & \frac{3ab+c^2}{3c} \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)\cdot\frac{3ab+c^2}{c}\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=0$$

∴ P,G,H三点共线，即三角形的外心、重心与垂心三点共线.

例10 已知$\triangle ABC$是边长为1的正三角形，O为其中心，试问过O点两端各在$\triangle ABC$边上的线段中，哪几条最长？哪几条最短？它们各为多长？证明你的结论.

分析 建立如图1—19所示之坐标系，则过$\triangle ABC$的中心O的直线的方程为$y=kx+\frac{1}{\sqrt{3}}$，由此可求出此直线与$\triangle ABC$的边的交点D、E的坐标，这样$|DE|$可表为k的函数，从而由k的值可确定$|DE|$的最大值与最小值.

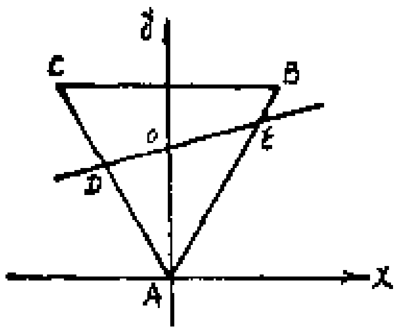


图 1—19

解 以A为原点，过OA的直线为y轴建立坐标系如图，则

直线AB的方程为：$y=\sqrt{3}x$

直线AC的方程为：$y=-\sqrt{3}x$

设过$\triangle ABC$的中心O的直线方程为$y=kx+\frac{1}{\sqrt{3}}$

不失一般性，我们只考虑$0\leqslant k\leqslant k_0$，其中$k_0$表示$OB$的斜率，于是得D、E的坐标分别为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-k)},\ \frac{1}{\sqrt{3}-k}\right),$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+k)},\ \frac{1}{\sqrt{3}+k}\right)$$

因此

$$DE^2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-k}+\frac{1}{\sqrt{3}+k}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-k}-\frac{1}{\sqrt{3}+k}\right)^2$$

$$=\frac{4(k^2+1)}{(3-k^2)^2}$$

可见，当 k 最小，即 $k=0$ 时，DE 最短，此时 $DE\parallel BC$，且 $DE=\frac{2}{3}$；当 k 最大，即 $k=k_0$ 时，DE 最大此时过顶点 B，且 $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由图形的对称性可知最长与最短的截线段都各有三条.

例11 (1)求证：直线 $(2+m)x+(1-2m)y+(4-3m)=0$ 不论 m 为何实数，恒通过一个定点；(2) 过这个定点引一条直线，使它夹在两坐标轴间的线段被这点所平分；(3) 过这个定点引一条直线，使它和两坐标轴的负方向围成的三角形的面积为最小.

解 (1) 把所给直线方程写为

$$(2x+y+4)+m(x-2y-3)=0 \qquad ①$$

解方程组

$$\begin{cases}2x+y+4=0 & ②\\ x-2y-3=0 & ③\end{cases}$$

得 $x=-1$，$y=-2$

点 $(-1,-2)$ 满足方程②和③，故满足方程①，所以不论 m 为何实数，直线 $(2+m)x+(1-2m)y+(4-3m)=0$ 恒通过定点 $P(-1,-2)$.

(2) 设过点 $P(-1,-2)$ 所引的一条直线与 x 轴 y 轴分别交于 $A(a,0)$，$B(0,b)$，则因 $\triangle AOB$ 为直角三角形，P 点为斜边 AB 的中点

故有 $|AP|=|BP|=|OP|=\sqrt{5}$

$\therefore \quad \sqrt{(a+1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$$a=-2$$

$$\sqrt{(-1)^2+(b+2)^2}=\sqrt{5}$$

$$b=-4$$

故由截距式得所求直线方程为

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-4}=1$$

即 $\quad 2x+y+4=0$

(3) 设所求的直线方程为

$$y=k(x+1)-2 \qquad (k<0)$$

则直线在 x 轴上的截距为 $a=\frac{k-2}{-k}$，在 y 轴上的截距为 $b=k-2$。

设直线与两坐标轴的负方向所围成的三角形的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{k-2}{k}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(-k)+\frac{4}{-k}+4\right]$$

$\because \quad (-k)\cdot\left(\frac{4}{-k}\right)=4$ 为定值，且 $-k>0$，$\frac{4}{-k}>0$

$\therefore$ 当 $-k=\frac{4}{-k}$，即 $k=-2$ 时，S 为最小

所以所求的直线方程为 $y=-2(x+1)-2$

即 $\quad 2x+y+4=0.$

例12 当 m 为何值时，方程

$$f(x,y)=2x^2+mxy-3y^2+5y-2=0$$

代表两条直线？求出此时适合 $f(x,y)\geqslant 0$ 的点 (x,y) 的范围

解 (1) m 的值能使 $2x^2+mxy-3y^2+5y-2$ 分解为两个

一次因式时，$f(x,y)=0$ 所表示的就是两条直线，我们把方程

$$2x^2+mxy-3y^2+5y-2=0$$

看作是关于 x 的一元二次方程，由求根公式

$$x=\frac{-my\pm\sqrt{m^2y^2+8(3y^2-5y+2)}}{4}$$

$$=\frac{-my\pm\sqrt{(m^2+24)y^2-40y+16}}{4}$$

为使根号内是完全平方，应有

$$40^2-4\times16\times(m^2+24)=0 \qquad m=\pm1$$

当 $m=1$ 时，$f(x,y)=(2x+3y-2)(x-y+1)=0$

当 $m=-1$ 时，$f(x,y)=(2x-3y+2)(x+y+1)=0$

因此，当 $m=\pm1$ 时，方程 $f(x,y)=0$ 表示两条直线.

(2) 当 $m=1$ 时

$$f(x,y)=(2x+3y-2)(x-y+1)\geqslant0.$$

等价于

$$\begin{cases}2x+3y-2\geqslant0\\x-y+1\geqslant0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}2x+3y-2\leqslant0\\x-y+1\leqslant0\end{cases}$$

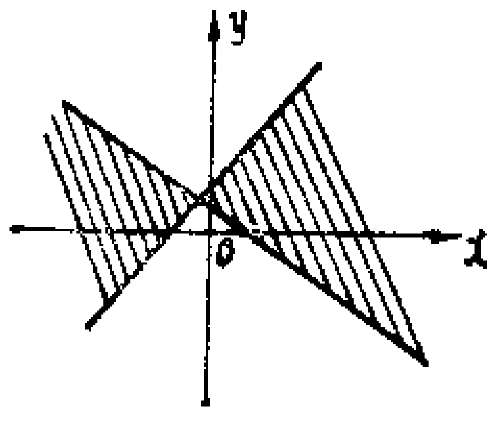


图 1—20

其解如图，即当 $m=1$ 时，满足 $f(x,y)\geqslant0$ 的点 (x,y) 为直线 AC、BD 交点左右两侧所夹的阴影部分及其边界上.

当 $m=-1$ 时，求满足 $f(x,y)\geqslant0$ 的点 (x,y) 的范围，请读者自己求解.

〔附注〕 本例(2) 用到二元一次不等式的图象解法，其理论根据是下面的定理：

定理 直线 l: $y=kx+b$, 把坐标平面上的点划分三部分，设点 $M(x,y)$ 是平面上任意一点，则

(1) 当 M 点在直线 l 上时，其坐标 (x,y) 是方程 $y=kx+b$ 的解.

(2) 当 M 点在直线 l 上方时，其坐标 (x,y) 是不等式 $y>kx+b$ 的解.

(3) 当 M 点在直线 l 下方时，其坐标 (x,y) 是不等式 $y<kx+b$ 的解.

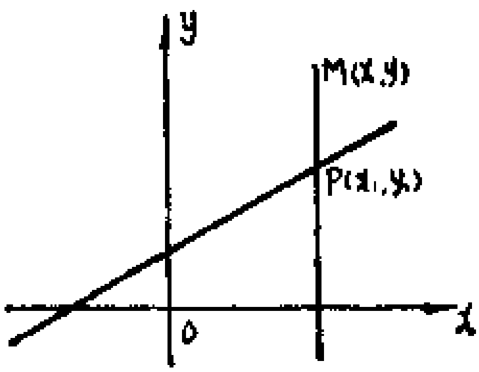


图 1—21

证 结论(1) 显然成立，我们证明结论(2).

设 $M(x,y)$ 是直线 l 上方的任意一点，过 M 作 x 轴的垂线，交 l 于 $P(x_1,y_1)$ 点，则 $x=x_1$, $y>y_1$

∵ $P(x_1,y_1)$ 在 l 上，$y_1=kx_1+b$.

∴ $y>kx_1+b$ 即 $y>kx+b$.

故 M 点的坐标 (x,y) 满足不等式 $y>kx+b$.

同法可证结论(3)

习 题 二

1. 直线 l 经过点 $A(0,5)$，且具有下列条件之一，求直线 l 的方程

(1) 与过两点 $B(3,2)$，$C(-1,0)$ 的直线平行；

(2) 与直线 $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=2$ 垂直；

(3) 倾角 α，且 $\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$ (α 为锐角)

(4) 与点 $(-4,3)$ 的距离为 $\sqrt{2}$，

(5) 与直线 $2x+y=3$ 的交角是 45°

2. 求经过点 $(2,1)$ 且倾角等于直线 $x-3y+4=0$ 的倾角的 2 倍的直线方程.

3. 一直线经过点 $A(2,4)$，且被二平行直线 l_1: $x-y+1=0$，l_2: $x-y-1=0$ 所截线段中点在直线 $x+2y-3=0$ 上，求这直线的方程.

4. 求被二直线 $x-3y+10=0$ 及 $2x+y-8=0$ 所截线段平分于 $P(0,1)$ 的直线方程.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知高 AN: $x+5y-3=0$，高 BM: $x+y-1=0$ 边 AB: $x+3y-1=0$，试确定 $\triangle ABC$ 的顶点及垂心的坐标，并写出其他两边和 AB 上的高的方程.

6. 等腰梯形的上、下底分别是 6 与 10，底角是 $\frac{\pi}{3}$，取梯形的下底与对称轴分别为 x 轴和 y 轴，写出此梯形的四条边所在的直线方程.

7. 已知等腰直角三角形的斜边所在的直线方程是 $3x-y+2=0$，直角顶点是 $C\left(2\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$，求两条直角边所在直线方程和三角形的面积.

8. 在直角坐标系中，过直线 $x-2y-3=0$ 与直线 $2x-3y-2=0$ 的交点作一条直线，使它与两坐标轴相交成三角形的面积为 5 平方单位，求这条直线的方程.

9. 已知直线 l_1: $x+2y+2=0$，l_2: $x-y+2=0$，求直线 l_3 的方程，使 l_3 过点 $P(1,1)$ 且与直线 l_1 和 l_2 构成的三角形的面积为最小(点 P 在由 l_2 与 l_1 的夹角内).

10. 当 m 为何值时，平面上三点 $A(1,2)$，$B(3,1)$，$C(2,3)$，到直线 $y=mx$ 的距离的平方和为最小.

11. 在直线 l: $2x-y=4$ 上，求一点 P，使与两定点 $A(4,

$-1)$ 及 $B(3,4)$ 的距离之差为最大.

12. 在直线 l: $x+y-8=0$ 上，求一点 M，使与两定点 $A(-4,0)$ 及 $B(4,0)$ 的距之和为最短，并求出这个距离.

13. 已知直线 l_1: $y=4x$ 和点 $P(6,4)$，在直线 l_1 上求一点 Q，使过 P、Q 的直线与直线 l_1 及 x 轴在第 I 象限内围成的三角形的面积最小.

14. 质点 $M(x,y)$ 沿一直线作等速运动，当 $t=0$ 时，它的位置是 $(1,1)$，沿 x,y 轴的速度分别为 9 与 12，求：

(1) 质点运动的轨迹方程；

(2) 质点与直线 $x-y+9=0$ 相遇的时刻及位置；

15. 两定直线交于一点 O，由点 P 作这两定直线的垂线，垂足为 A 和 B，使 $OA+OB$ 等于定值，求 P 点的轨迹.

16. 直线 l_1,l_2 与另一平行于直线 l_3 的直线 l 分别交于 M_1，M_2，过 M_1,M_2 分别作 l_1，l_2 的垂线，此两垂线交于 M，试求 M 点的轨迹.

17. 求内接于已知三角形的矩形中心的轨迹.

18. 求证：在平面上所有通过点 $(\sqrt{2},0)$ 的直线中，至少通过两个有理点的直线只有一条.

19. 设线段 AB 的中点为 M，从 AB 上另一点 C 向线段 AB 上的一侧作线段 CD，令 CD 的中点为 N，BD 的中点为 P，MN 的中点为 Q，试证：直线 PQ 平分线段 AC.

20. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$ACEF$ 与 $BCGH$ 是正方形，BF 与 AH 相交于 P，求证：$CP\perp AB$.

21. 正方形 $ABCD$ 的一个内接 $\triangle EAF$，如果 $\angle EAF=45°$，求证：正方形 $ABCD$ 的面积与 $\triangle EAF$ 的面积之比等于 AB 与 EF 之比的 2 倍.

22. 求证四边形中，每双对边中点连线及两对角线中点连

线共点.

23. 设两定点(x_1, y_1), (x_2, y_2)到动直线$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$的距离分别为$d_1, d_2$, 如果$ad_1 + bd_2 = 0$ (其中$a+b\neq 0$)则此动直线必过一定点.

24. 自一点$P(h, k)$向二直线$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$. $(b^2 - 4ac > 0)$引垂线, 若其距离为d_1, d_2, 试证: d_1, d_2为定值.

25. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$是一个三角形的顶点, $P_0(x_0, y_0)$是一定点, $x\cos w + y\sin w - p = 0$是通过$P_0$的任意直线, 证明: P_0是三角形$P_1P_2P_3$的重心的充要条件是$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$其中

$$\delta_i = x_i\cos w + y_i\sin w - p\,(i = 1, 2, 3)$$

26. 考虑与曲线: $y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$相交于四个不同点(x_i, y_i) $i = 1, 2, 3, 4$的一切直线, 证明: $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$的值与直线的位置无关, 并求它的值.

27. 若二次方程$x^2 + xy + 4x + my = 0$表示直线时(1)确定m的值. (2) 根据所求m的各值写出各条直线的方程. (3) 各条直线围成什么图形? 这个图形的面积是多少?

28. (1) 讨论方程$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$的图形.

(2) 若$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$代表两条直线, 试求此两直线的交角.

29. 四边形$OABC$的顶点坐标是$O(0, 0)$, $A(6, 2)$, $B(4, 6)$, $C(2, 6)$, 直线$y = mx\left(\dfrac{1}{3} < m < 3\right)$分四边形为两部分.

(1) 用m表示靠近x轴一侧的部分的面积;

(2) 当m为何值时, $y = mx$将此四边形分为等积的两部分.

30. 图示同时满足不等式$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2x + 5y \leqslant 10$, $2x + y \leqslant 6$的点(x, y)的存在区域.

§3 圆与二元二次方程

一、概　　述(如表)

	名　称	表　达　式　(或叙述)	说　　明
圆	几何定义	到定点等距离的轨迹．此定点称圆心，定长称半径．	圆心表明圆的位置，半径确定圆的大小．
	标准式	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $x^2+y^2=r^2$	$(a,\ b)$——圆心， r——半径， $(x,\ y)$——流动点． 圆心：$(a,\ b)=(0,\ 0)$．
	一般式	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$	圆与一特殊二元二次方程相对应．其特征是①x^2与y^2系数相等．②xy的系数为零．
	化一般式为标准式	$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$	当 $D^2+E^2-4F>0$ 时， $(a,\ b)=\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$． $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$． 否则为点圆或虚圆．
点与圆的关系	点在圆上	$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$	$(x_0,\ y_0)$——点． $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ——圆
	点在圆外	$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$	
	点在圆内	$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$	
	点到圆的距离	$d=\left\|\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}-r\right\|$	

	名 称	表 达 式 （或叙述）	说 明
直线与圆的关系	直线与圆相交（两点）	$r>\frac{b}{\sqrt{1+k^2}}$	$\begin{cases} y=kx+b——已知直线. \\ x^2+y^2=r^2——已知圆. \end{cases}$ 若$\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases}$ 则通过平移，$k=k_1$, $b=k_1x_0+b_1-y_0$ 后按左式处理.
	直线与圆相切	$r=\frac{b}{\sqrt{1+k^2}}$	
	直线与圆相离	$r<\frac{b}{\sqrt{1+k^2}}$	
	切线的斜率	$k=-\frac{x_1}{y_1}\ (-r\leqslant x_1\leqslant r)$	$x^2+y^2=r^2$——已知圆 $(x_1,\ y_1)$——切点.
	切线方程	$x_1x+y_1y=r^2$	

二、例 题

例 1 求圆心在直线 $x+y=0$ 上，且过两圆：$x^2+y^2-2x+10y-24=0$，$x^2+y^2+2x+2y-8=0$ 的交点的圆的方程.

解法一 解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+10y-24=0 \\ x^2+y^2+2x+2y-8=0 \end{cases}$$

得两圆交点坐标为$(-4,\ 0)$，$(0,\ 2)$.

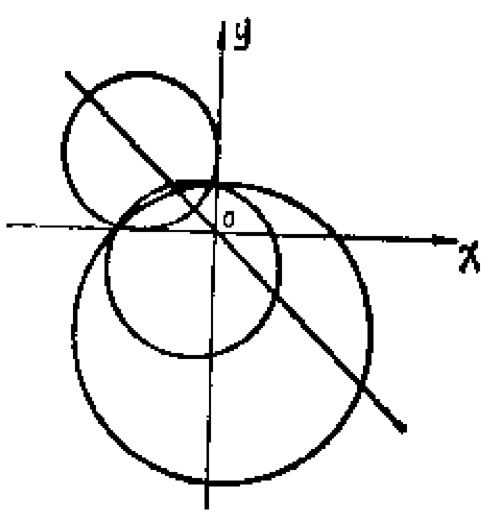


图 1—22

设所求的圆的圆心坐标为$(a,\ b)$则它到点$(4,\ 0)$和$(0,\ 2)$的距离相等，故有：

$$\sqrt{(-4-a)^2+b^2}=\sqrt{a^2+(2-b)^2} \qquad ①$$

又点$(a,\ b)$在直线 $x+y=0$ 上，故

$$a+b=0 \qquad ②$$

解由方程①，②所组成之方程组，得

$$a=-3, \qquad b=3$$

即所求圆的圆心坐标是$(-3,\ 3)$.

又 $$r=\sqrt{(-4+3)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

故所求的圆的方程是：

$$(x+3)^2+(y-3)^2=10$$

即 $$x^2+y^2+6x-6y+8=0.$$

解法二 同解法一， 求出两圆交点的坐标为 $(-4,\ 0)$，$(0,\ 2)$.

过此两点的弦，即两圆的公共弦，它的垂直平分线的方程为：

$$2x+y+3=0$$

此直线与直线 $x+y=0$ 的交点的坐标$(-3,\ 3)$即为所求的圆的圆心，又半径 $r=\sqrt{(-4+3)^2+3^2}=\sqrt{10}$，所以所求的圆的方程为：

$$(x+3)^2+(y-3)^2=10$$

即 $$x^2+y^2+6x-6y+8=0.$$

解法三 设所求的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

解方程组：

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+10y-24=0 \\ x^2+y^2+2x+2y-8=0 \end{cases}$$

得两圆交点坐标为$(-4,\ 0)$和$(0,\ 2)$，因这两点在所求的圆上，且圆心在 $x+y=0$ 上，故得方程组：

$$\begin{cases}(-4-a)^2+b^2=r^2\\ a^2+(3-b)^2=r^2\\ a+b=0\end{cases}$$

解之，得：$a=-3$，$b=3$，$r=\sqrt{10}$.

故所求的圆的方程为：

$$(x+3)^2+(y-3)^2=10$$

即 $$x^2+y^2+6x-6y+8=0$$

解法四 设所求的圆的方程为

$$x^2+y^2-2x+10y-24+\lambda(x^2+y^2+2x+2y-8)=0 \qquad (\lambda\neq-1)$$

即 $$x^2+y^2-\frac{2(1-\lambda)}{1+\lambda}x+\frac{2(5+\lambda)}{1+\lambda}y-\frac{8(3+\lambda)}{1+\lambda}=0$$

可知，圆心坐标为$\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda},\ -\frac{5+\lambda}{1+\lambda}\right)$

因圆心在直线 $x+y=0$ 上，所以

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}-\frac{5+\lambda}{1+\lambda}=0$$

$\therefore$ $\lambda=-2$

将 $\lambda=-2$ 代入所设方程并化简之，即得所求的圆的方程是：

$$x^2+y^2+6x-6y+8=0$$

例 2 证明 $A(2,\ 2)$，$B(5,\ 3)$，$C(3,\ -1)$，$D(6,\ 0)$ 四点共圆.

解 设过 A，B，C 三点的圆的方程为：

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

将 A，B，C 三点的坐标代入上式，得方程组

$$\begin{cases} 2D+2E+F+8=0 \\ 5D+3E+F+34=0 \\ 3D-E+F+10=0 \end{cases}$$

解之，得：

$$\begin{cases} D=-8 \\ E=-2 \\ F=12 \end{cases}$$

故过 A，B，C 三点的圆的方程是：

$$x^2+y^2-8x-2y+12=0$$

配方，得：

$$(x-4)^2+(y-1)^2=5$$

∴ 圆心坐标是$(4, 1)$，半径是$\sqrt{5}$.

将 D 点坐标$(6, 0)$代入上式左边，得

$$(6-4)^2+(0-1)^2=4+1=5.$$

即 D 点坐标适合圆的方程，故 D 点在圆上．由此可知 A, B, C, D 四点共圆．

〔附注〕 (1) 本例还可用以下方法解：

i) 求出线段 AB，BC 的垂直平分线方程，其交点为过 A，B，C 三点的圆的圆心．此点到 A(或 B，C)的距为圆的半径，得出圆的方程，检验 D 点坐标满足方程．

ii) 求出直线 AB 与 CD 的交点 P，计算$|PA|$、$|PB|$、$|PC|$、$|PD|$，若$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$，则 A，B，C，D 四点共圆．

(2) 由以上两例，可知求圆的方程的方法是：

i) 根据所给条件，先求圆心坐标和半径，然后代入标准式$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，就得到所求圆的方程．

ii) 待定系数法．其步骤是：

a) 根据题意设所求的圆的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

或 $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

b) 根据已知条件，建立关于 a，b，r 或 D，E，F 的方程组.

c) 解方程组，求出 a，b，r 或 D，E，F 的值，并把它代入到所设的方程中去，整理后，就得到所求的圆的方程.

一般地说，如果已知（或易于求出）圆的半径或圆心坐标时，往往设圆的方程为标准式；如果知道圆经过某些点时，往往设圆的方程为一般式，这样较方便.

例 3 求证：自点 $P(4, 2)$ 所作圆 $x^2+y^2=10$ 的两条切线互相垂直.

分析 如图，要证明 $PM_1 \perp PM_2$，只须证明 $k_{PM_1} \cdot k_{PM_2} = -1$ 即可，因此应先求出两切线的斜率.

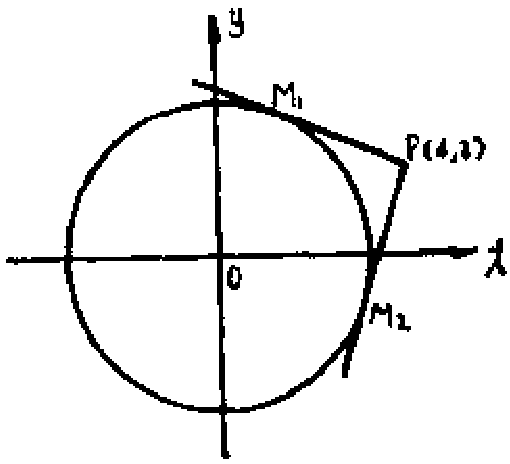


图 1—23

证法一 设切点为 $M(x_0, y_0)$，则切线方程为

$$x_0x+y_0y=10$$

因点 M 在切线上也在圆上，故有方程组

$$\begin{cases} 4x_0+2y_0=10 \\ x_0^2+y_0^2=10 \end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=3 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x_0=3 \\ y_0=-1 \end{cases}$$

所以过 P 点的两切线的切点坐标为 $M_1(1, 3)$，$M_2(3, -1)$，

两切线的斜率分别为：

$$k_{PM_1}=\frac{3-2}{1-4}=\frac{1}{3},\quad k_{PM_2}=\frac{-1-2}{7-4}=-3$$

$$\therefore\quad k_{PM_1}\cdot k_{PM_2}=-1$$

因此，自 P 点所作的圆的两条切线互相垂直.

证法二 设过 P 点的切线的斜率为 k，则切线方程为：

$$y-2=k(x-4)$$

即
$$y=kx+2-4k$$

将其代入圆的方程，得：

$$(k^2+1)x^2+(4k+8k^2)x+16k^2-16k-6=0$$

因直线与圆相切，故

$$\triangle=(4k+8k^2)^2-4(k^2+1)(16k^2-16k-6)=0$$

化简，得：

$$3k^2-8k-3=0$$

这方程的两个根 k_1 和 k_2 就是过 P 点的两条切线的斜率，由韦达定理，知：

$$k_1\cdot k_2=-1$$

故过 P 点的两条切线互相垂直.

证法三 设过 P 点的两切线的斜率分别为 k_1，k_2，则两切线方程分别为：

$$y-2=k_1(x-4)$$

$$y-2=k_2(x-4)$$

即
$$kx-y-4k_1+2=0$$

$$kx-y-4k_2+2=0$$

又因圆心 $(0,0)$ 到两切线的距离都等于半径 $\sqrt{10}$，故有：

$$\frac{|-4k_1+2|}{\sqrt{k_1^2+1}}=\sqrt{10},\quad \frac{|-4k_2+2|}{\sqrt{k_2^2+1}}=\sqrt{10}$$

由此得：

$$(-4k_1+2)^2=10(k_1^2+1) \quad ①$$

$$(-4k_2+2)^2=10(k_2^2+1) \quad ②$$

由①和②，知 k_1，k_2 是方程：

$$(-4k+2)^2=10(k^2+1)$$

即 $$3k^2-8k-3=0$$

的两个根，故有 $k_1\cdot k_2=-1$．因此过 P 点的两条切线互相垂直．

〔附注〕 本例的解法中指明了过圆外一点求圆的切线方程的方法：

(1) 如果圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，可利用本例中的证法一，先求出切点坐标，然后用两点式写出切线方程；或用证法二，三，先求出切线的斜率，然后用点斜式写出切线方程．

(2) 如果圆的方程为一般式，则用证法二或证法三，先求出切线的斜率，再用点斜式写出切线方程．

因此，本例中的证法二和证法三，是求过圆外一点的切线方程的一般方法．

例 4 求通过直线 $2x+y+4=0$ 及圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点，并且有最小面积的圆的方程．

解法一 设已知直线 $2x+y+4=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点为 A，B，则所求的圆的圆心必在弦 AB 的垂直平分线上，又因要求此圆的面积最小，显然，圆心应为 AB 的中点，半径应等于 $\frac{1}{2}|AB|$．

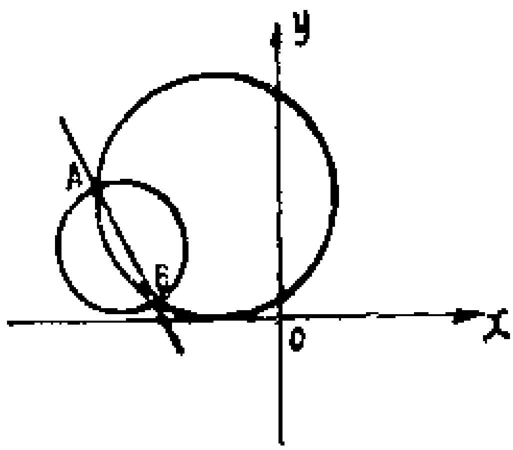


图 1—24

由方程　$2x+y+4=0$ 与方程 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 消去 y，得：

$$5x^2+26x+33=0$$

此方程的两根 x_1，x_2 即为已知直线与圆的交点 A、B 的横坐标．由韦达定理得 AB 的中点的横坐标为：

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{13}{5}$$

将 x_0 值代入已知直线方程，得 AB 中点的纵坐标

$$y_0=-2\cdot\left(-\frac{13}{5}\right)-4=\frac{6}{5}$$

所以所求的圆的圆心为 $\left(-\frac{13}{5},\ \frac{6}{5}\right)$．

$$\because\quad (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{26^2}{25}-\frac{4\times33\times5}{25}=\frac{16}{25}$$

由已知直线方程：

$$y_1-y_2=-2(x_1-x_2)$$

$$\therefore\quad (y_1-y_2)^2=4(x_1-x_2)^2=\frac{64}{25}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{64}{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

故得所求的圆的方程为：

$$\left(x+\frac{13}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$$

即　$$5x^2+5y^2+26x-12y+37=0$$

解法二　设过已知直线和已知圆的交点的圆的方程为：

$$(x^2+y^2+2x-4y+1)+\lambda(2x+y+4)=0$$

即　$$[x+(1+\lambda)]^2+\left[y+\frac{\lambda-4}{2}\right]^2=\frac{5\lambda^2-16\lambda+16}{4}$$

因圆面积 $S=\pi r^2$，故仅当

$$r^2=\frac{5\lambda^2-16\lambda+16}{4}.$$

取最小值时，圆面积最小.

$$\because \qquad \frac{5\lambda^2-16\lambda+16}{4}=\frac{5}{4}\left(\lambda-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\geqslant\frac{4}{5}$$

其中等号仅当 $\lambda=\frac{8}{5}$时成立.

故当 $\lambda=\frac{8}{5}$时，圆的面积最小，此时所求的圆的方程为：

$$5x^2+5y^2+26x-12y+37=0$$

〔附注〕 本例解法二较简便，但在解法一中没有通过求方程组的解，而是利用韦达定理求 AB 的中点，一般地说：在求一直线被一二次曲线所截得的线段的中点或求此线段的长度时，用这种方法较为便捷.

例 5 已知圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=2$. 过原点 到此圆的切线，切点为 T_1、T_2，又过原点任作一直线 l，交圆 C 于 M、N，交直线 T_1T_2 于 K，设 $|OM|=t_1$，$|ON|=t_2$，$|OK|=t_3$，求证：$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{t_3}$

分析 要证明$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{t_3}$，应考虑用 M、N、K 的坐标表出 t_1，t_2，t_3，因此需求出直线T_1T_2的方程，并设直线 l 的方程为 $y=mx$，求得 K 点的坐标. 再由直线 l 与圆 C 相交的条件，确定 t_1，t_2.

证 圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=2$ ①

设过原点的切线方程：$y=kx$ ②

由①，②消去 y，得

$(1-k^2)x^2-4(1+k)x+6=0$ ③

根据相切条件方程③的判别式

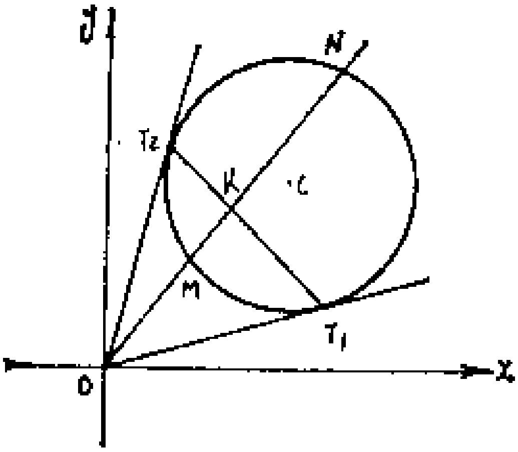


图 1—25

$$\triangle = 16(1+k)^2 - 4\times 6(1-k^2) = 0$$

$$k = 2 \pm \sqrt{3}$$

从而由方程组

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2=2 \\ y=(2\pm\sqrt{3})x \end{cases}$$

解得：$T_1\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$，$T_2\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$，因而得直线 T_1T_2 的方程为

$$x+y-3=0$$

设 l 的方程为 $y=mx$，M、N、K 的坐标分别为 (x_1, mx_1)，(x_2, mx_2)，(x_3, mx_3)。

由方程组

$$\begin{cases} y=mx \\ x+y=3 \end{cases}$$

解得

$$x_3=\frac{3}{1+m}.$$

又由方程组

$$\begin{cases} y=mx \\ (x-2)^2+(y-2)^2=2 \end{cases}$$

消去 y，得

$$(1+m)^2x^2-4(1+m)x+6=0$$

因 x_1，x_2 是上述方程的根，根据韦达定理，

$$x_1+x_2=\frac{4(1+m)}{1+m^2},\quad x_1\cdot x_2=\frac{6}{1+m^2}$$

于是

$$t_1=|OM|=\sqrt{x_1^2+(mx_1)^2}=x_1\sqrt{1+m^2}$$

$$t_2=|ON|=\sqrt{x_2^2+(mx_2)^2}=x_2\sqrt{1+m^2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{x_1\sqrt{1+m^2}}+\frac{1}{x_2\sqrt{1+m^2}}$$

$$=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2\sqrt{1+m^2}}=\frac{2(1+m)}{3\sqrt{1+m^2}}$$

$$\frac{2}{t_3}=\frac{2}{|OK|}=\frac{2}{x_3\sqrt{1+m^2}}=\frac{2(1+m)}{3\sqrt{1+m^2}}$$

因此 $$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{t_3}$$

〔**附注**〕 (1) T_1T_2 为圆的切点弦，关于求圆的切点弦方程的一般方法，参看习题三第13题.

(2) 由前例及本例可知，在解析几何中灵活地应用韦达定理，是常用的解题技巧，请读者注意掌握.

(3) 本例用直线的参数方程来解，较为简便，参看本书第四章.

例 6 如果$(x-2)^2+(y+1)^2\leqslant 100$，求 $4x-3y$ 的最大值与最小值.

分析 令$k=4x-3y$，则对于每一个确定的k，$k=4x-3y$ 表示xoy平面上的一条直线，对于不同的k，可得到斜率均为$\frac{4}{3}$的一组平行线；现在的问题是要求$k=4x-3y$的最大值与最小值．而(x,y)又要落在圆$(x-2)^2+(y+1)^2=100$内，于是问题转化为：在直线$4x-3y-k=0$与圆$(x-2)^2+(y+1)^2=100$有公共点的条件下，使直线$4x-3y-k=0$有最大或最小的截距．显然，这只要求出这一组平行线和圆的两个切

点就行了.

解 令 $k=4x-3y$，则直线 $4x-3y-k=0$ 与圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=100$ 的交点为方程组

$$\begin{cases} 4x-3y-k=0 & ① \\ (x-2)^2+(y+1)^2=100 & ② \end{cases}$$

的解.

由①、②消去 y，得：

$$25x^2-(8k+12)x+(k^2-6k-855)=0 \quad ③$$

直线与圆仅当方程③有重根时相切，因此，

$$\begin{aligned}\triangle &= (8k+12)^2-100(k^2-6k-855) \\ &= -36(k-61)(k+39) \\ &= 0\end{aligned}$$

于是得到 $k_1=61$，$k_2=-39$.

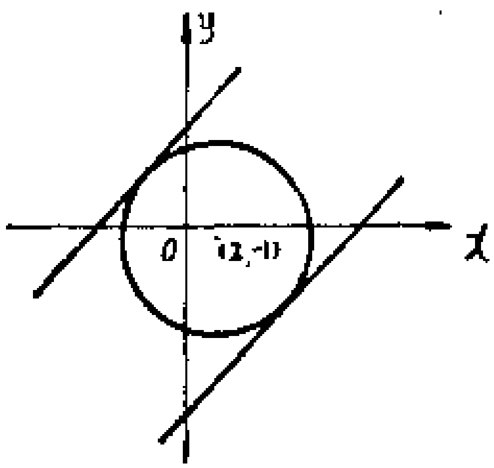


图 1—26

61，-39 分别为 $4x-3y$ 的最大值与最小值. 可以求得，取得上述极值点的坐标，分别是 (10，-7) 与 (-6，5).

〔附注〕 本例可化为下面的一般问题：当点在平面上一个区域 G（包括边界）上变动时，求一次函数 $ax+by$ 的最大值和最小值.

令 $k=ax+by$，当 k 变动时，就得到一组互相平行的直线族，与 G 有公共点的最近边缘的两条直线 l_1 和 l_2，就决定了 $ax+by$ 在 G 上的最大值和最小值，可见一次函数的极值总是在 G 的边界上达到. 因此，本例的解法也是这一类问题的一般解法.

更一般地说，若点 (x, y) 在以不等式表示的区域 G 内（包

括边界)变动时，求 $f(x, y)$ 的最大与最小值的问题，便是令 $f(x, y)=k$，求出使 $f(x, y)=k$ 与区域 G 有公共点的关于 k 的值.

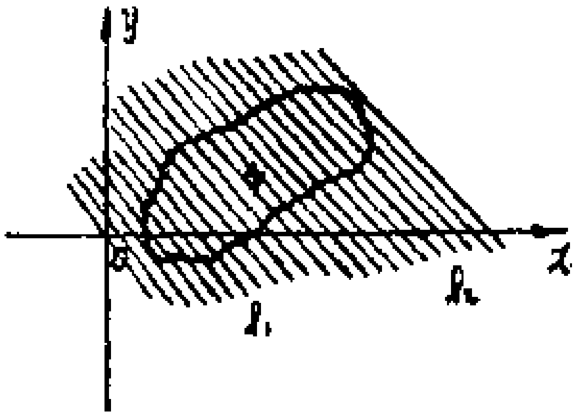


图 1—27

例 7 求过一定点且和定圆相切的动圆圆心的轨迹方程.

分析 题中未指明定点与定圆的相关位置，应分别考虑定点在圆的内部，外部和圆周上几种不同的情形.

解 设定圆的圆心为 F_1，半径为 R，定点为 F_2，动圆的圆心为 P.

(1) 定点 F_2 在定圆 F_1 内部.

取 F，F_2 所在直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的中点为原点建立坐标系如图 1—28.

设各点坐标为 $F_1(-C, 0)$，$F_2(C, 0)$，$P(x, y)$，

因动圆 P 与定圆 F_1 内切，设切点为 Q，则

$$|PF_2|+|PF_1|=|F_1Q|=R$$

即
$$\sqrt{(x+C)^2+y^2}+\sqrt{(x-C)^2+y^2}=R$$

此方程可化为：

$$4R^2x^2+4(R^2-4C^2)y^2$$
$$=R^2(R^2-4C^2)\ (R>2C)$$

这就是所求的轨迹方程，它的曲线是椭圆.

(2) 定点 F_2 在定圆 F_1 的外部.

建立如图 1—29 所示之坐标系，设各点坐标分别为 $F_1(-C,0)$，$F_2(C, 0)$，$P(x, y)$.

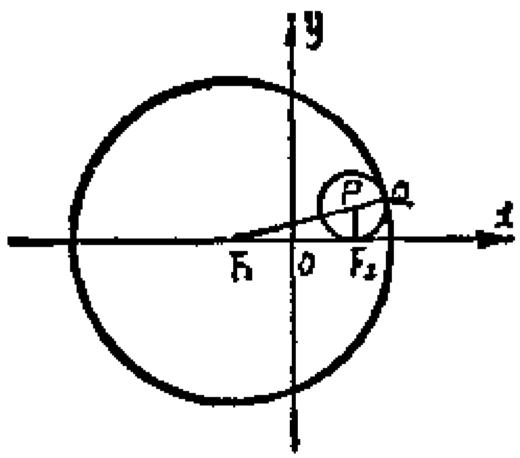


图 1—28

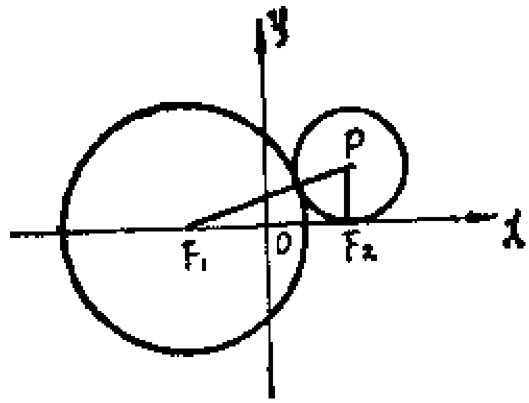


图 1—29

因动圆 P 与定圆 F_1 外切，设切点为 Q，则

$$|PF_1|-|PF_2|=|PF_1|-|PQ|=R$$

即 $$\sqrt{(x+C)^2+y^2}-\sqrt{(x-C)^2+y^2}=R\ (R<2C)$$

此方程可化为：

$$4(4C^2-R^2)x^2-4R^2y^2=R^2(4C^2-R^2)$$

这就是所求的轨迹方程，它的曲线是双曲线。

(3) 定点 F_2 在定圆 F_1 的圆周上。

建立坐标系如图 1—30，各点坐标分别为 $F_1(-R,\ 0)$，$F_2(0,\ 0)$，$P(x,\ y)$。

因动圆的圆心在定圆的圆心 F_1 和定点 F_2 的连线上，所以动圆的圆心 P 的轨迹为一条直线（即 x 轴），它的方程为：

$$y=0$$

需要指出：当动圆的圆心 P 和定点 F_2 重合时，动圆实际上是一个点圆。

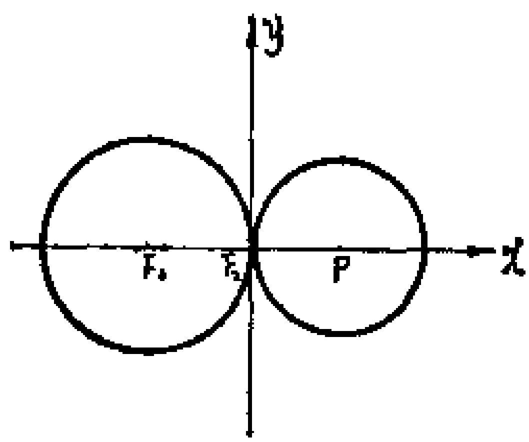


图 1—30

例 8 设 AB 是圆 $x^2+y^2=1$ 的直径. M 是圆周上的动点，点 M 的切线与 A 的切线和 B 的切线分别相交于 C 和 D，试求梯形 $ABCD$ 的对角线 AD 和 BC 的交点 P 的轨迹方程.

分析 由题设知动点 P 与动点 M 有关. 即 P 点的运动依赖于 M 点的运动. 因此求出 P 与 M 两点的坐标之间的关系，即可求出 P 点的轨迹方程.

解 因 AB 为圆 $x^2+y^2=1$ 的直径，所以 A 点的坐标为 $(-1,0)$，B 点的坐标为 $(1,0)$. (如图 1—31)，设 P 点的坐标为 (x,y)，M 点的坐标为 (x_0,y_0)，则过 M 点的切线方程为：

$$x_0x+y_0y=1 \qquad ①$$

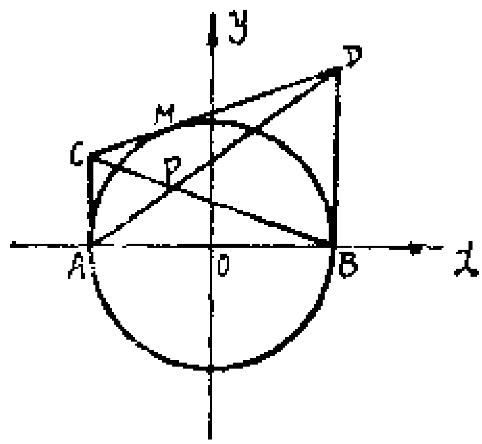


图 1—31

过 A 点、B 点的切线方程分别为 $x=-1$，$x=1$.

将 $x=-1, x=1$ 分别代入方程①，得 C 点的坐标为 $\left(-1, \dfrac{1+x_0}{y_0}\right)$，$D$ 点坐标为 $\left(1, \dfrac{1-x_0}{y_0}\right)$.

直线 AD 的方程为：

$$y=\frac{1-x_0}{y_0}(x+1) \qquad ②$$

直线 BC 的方程为：

$$y=\frac{1-x_0}{y_0}(x-1) \qquad ③$$

解方程②，③所组成之方程组，得：

$$x=x_0, \qquad y=\frac{1-x_0^2}{2y_0}$$

从而有，

$$x_0 = x, \qquad y_0 = \frac{1-x^2}{2y}$$

因点 M 的坐标应满足圆的方程 $x^2+y^2=1$，故得：

$$x^2 + \left(\frac{1-x^2}{2y}\right) = 1$$

即
$$(x^2-1)(4y^2+x^2-1)=0$$

但 $x^2-1\neq 0$，否则就是在 A，B 处的切线．因此，P 点的轨迹方程是：

$$x^2+4y^2-1=0$$

此方程的曲线是椭圆．

例 9 已知线段 AB 是圆 O 的一直径，$|AB|=2R$，C 是圆 O 上的动点，过 A，O，C 三点的圆的圆心是 D，过 B，O，C 三点的圆的圆心是 E，M 是 AD，BE 的交点，求证：

(1) 点 M 在圆 O 上；

(2) 直线 MC 有定向．

分析 求出 M 点的坐标，如果满足圆 O 的方程，就证明了(1)．因此应由 D、E 的坐标，求出 AD、BE 的方程，再求得 M 点的坐标，检验其是否适合圆 O 的方程 $x^2+y^2=R^2$．

直线有定向，即直线的斜率为定值，因此应研究直线 CM 的斜率，因 C 为动点，确定 CM 的斜率，应考虑 CM 与某已知直线的关系（平行、垂直或成某一定角）

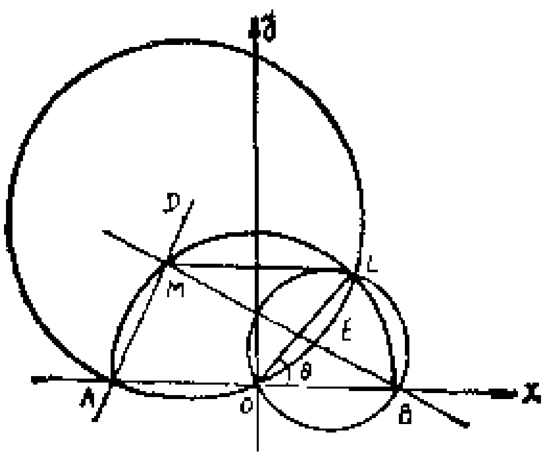


图 1—32

证 以圆 O 的圆心为原点，直径 AB 所在直线为 x 轴，建立坐标系如图，则 A，B 的坐标分别为$(-R,0)$，$(R,0)$．

因 C 为动点，设 OC 与 x 轴所成的角为 θ，则 $C(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$。

设过 A、O、C 三点的圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad ①$$

将 $A(-R,\ 0)$，$O(0,\ 0)$，$C(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$ 代入①，得

$$\begin{cases} F=0 \\ R^2-RD+F=0 \\ R^2\cos^2\theta+R^2\sin^2\theta+DR\cos\theta+ER\sin\theta+F=0 \end{cases}$$

解之，得

$$D=R,\quad E=-R\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2},\quad F=0$$

所以过 A，O，C 三点的圆的方程是

$$x^2+y^2+Rx-R\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}y=0 \qquad ②$$

圆心 O 的坐标是 $\left(-\frac{R}{2},\ \frac{R}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)$.

同理，过 B，O，C 三点的圆的方程是

$$x^2+y^2-Rx+R\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}y=0 \qquad ③$$

它的圆心 E 的坐标 $\left(\frac{R}{2},\ -\frac{R}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$

由此得直线 AD，BE 的方程分别为

$$\frac{y}{x+R}=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, \qquad ④$$

$$\frac{y}{x-R}=-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \qquad ⑤$$

解方程组④、⑤得 M 点坐标 $(-R\cos\theta,\ R\sin\theta)$

$\because\quad (-R\cos\theta)^2+(R\sin\theta)^2=R^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=R^2$，适

合圆 O 的方程 $x^2+y^2=R^2$，所以 M 点在圆 O 上.

(2) ∵ M 点和 C 点的纵坐标都等于 $R\sin\theta$，所以 $MC\parallel AB$. 而直线 AB 与 x 轴重合，故 MC 有定向.

例 10 在半径为 1 的圆内，过定点 A 引互相垂直的二弦 PQ、RS. 若点 A 到圆心 Q 的距离为 a，试用 a 表出 $PQ+RS$ 的最大值和最小值.

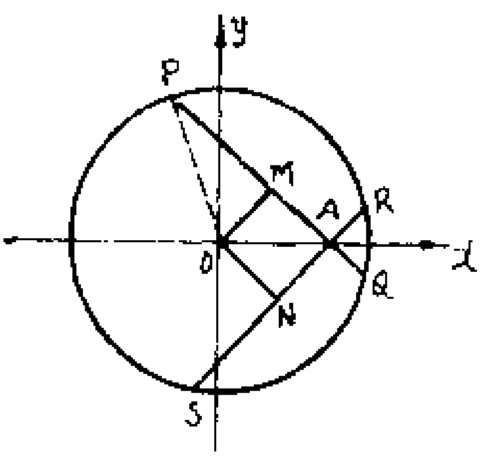


图 1—33

分析 建立如图之坐标系，写出 PQ、RS 两弦所在直线的方程. 由圆心 O 到两弦的垂线的垂足 M、N 分别为线段 PQ、RS 的中点. 由此可用 a 和 PQ 的斜率 k 表示线段 PQ、RS 的长度，从而求出 $PQ+RS$ 的最大值和最小值.

解 取圆 O 的圆心 O 为原点，过 O 和定点 A 的直线为 x 轴，建立坐标系，于是点 $O(0,\ 0)$，$A(a,\ 0)$. $(a>0)$

设 PQ 所在直线的斜率为 k，因 $PQ\perp RS$，所以 RS 的斜率为 $-\frac{1}{k}$. 由此有

直线 PQ 的方程：$y=k(x-a)$ ①

直线 RS 的方程：$y=-\frac{1}{k}(x-a)$ ②

圆心 $O(0,\ 0)$ 到直线①、②的距离分别为

$$\frac{|-ka|}{\sqrt{k^2+1}},\quad \frac{a}{\sqrt{k^2+1}}$$

设 $|PQ|=l_1$，$|RS|=l_2$，于是

$$l_1=2\sqrt{1-\frac{k^2a^2}{k^2+1}},\quad l_2=2\sqrt{1-\frac{a^2}{k^2+1}}$$

$$\therefore\quad (l_1+l_2)^2=4\left(\sqrt{1-\frac{k^2a^2}{k^2+1}}+\sqrt{1-\frac{a^2}{k^2+1}}\right)^2$$

$$=4\left[2-\frac{k^2a^2}{k^2+1}-\frac{a^2}{k^2+1}\right.$$

$$\left.+2\sqrt{\left(1-\frac{k^2a^2}{k^2+1}\right)\left(1-\frac{a^2}{k^2+1}\right)}\right]$$

$$=4\left[2-a^2+2\sqrt{1-a^2+\frac{k^2a^4}{(k^2+1)^2}}\right]$$

$$=4\left[2-a^2+2\sqrt{1-a^2+\frac{a^4}{4}-\left(\frac{a^4}{4}-\frac{k^2a^4}{(k^2+1)^2}\right)}\right]$$

$$=4\left[2-a^2+2\sqrt{1-a^2+\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{4}\cdot\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2}\right]$$

$$\because\qquad 0\leqslant\frac{(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}\leqslant 1$$

$$\therefore\qquad 4\left[2-a^2+2\sqrt{1-a^2}\right]\leqslant(l_1+l_2)^2$$

$$\leqslant 4\left[2-a^2+2\sqrt{1-a^2+\frac{a^4}{4}}\right]$$

$$2(1+\sqrt{1-a^2})\leqslant l_1+l_2\leqslant 2\sqrt{2(2-a^2)}$$

当$\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2=0$，即$k=\pm1$时，上式右边取等号，当$\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2=1$即$k=0$时，上式左边取等号，所以$PQ+RS$的最大值为$2\sqrt{2(2-a^2)}$，最小值为$2(1+\sqrt{1-a^2})$.

例 11　l为$\odot O$外一定直线，在l上任取一点A，证明：以OA为直径的圆和$\odot O$的公共弦BC必通过定点.

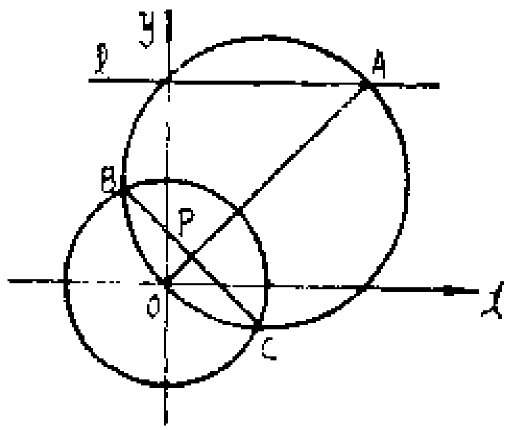


图 1—34

分析　因直线l与圆O都

是固定的，建立适当坐标系，它们的方程及以 OA 为直径的圆和公共弦 BC 的方程都不难求出.

证 以 O 为原点，取 x 轴与直线 l 平行，建立如图所示之坐标系.

设圆 O 的半径为 R，则方程为：

$$x^2+y^2=R^2 \tag{1}$$

又设原点 O 到直线 l 的距离为 M，（图中 l 在 x 轴上方）故方程为：$y=m$. 直线 l 上任一点 A 的坐标为 (a, m). 以 OA 为直径的圆的方程为：

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2$$

即
$$x^2+y^2-ax-my=0 \quad ②$$

①－②得公共弦 BC 的方程为

$$ax+my=R^2 \quad ③$$

令 $x=0$，代入方程③得 $y=\frac{R^2}{m}$、因 R，m 为常数，所以对于任意的 a，点 $P\left(0, \frac{R^2}{m}\right)$ 总满足方程③，因此 BC 过定点 P.

例 12 已知直线 $k^2x-ay-1=0$ 和直线 $k^2x+ay+k=0$，其中 $0<a<1$.

(1) 以上二直线同过点 $(1, 0)$，试求 k 的值；

(2) 求由(1)确定的二直线与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{a^2}$ 的交点；

(3) 求由(1)确定的二直线与(2)中的圆所包围的，且包含原点的那部分区域的面积.

解 (1) 若 $k^2x-ay-1=0$ 过点 $(1, 0)$ 则

$$k^2-1=0 \qquad \therefore \quad k=\pm 1$$

若 $k^2x+ay+k=0$ 过点(1, 0)，则

$$k^2+k=0 \qquad \therefore \quad k=0 \text{ 或 } k=-1$$

同时满足这两个条件的是 $k=-1$.

(2) 由(1)可知二直线方程分别是

$$x-ay-1=0 \qquad ①$$

$$x+ay-1=0 \qquad ②$$

由① $x=ay+1$ 代入圆的方程 $a^2x^2+a^2y^2=1$，得

$$a^2(ay+1)^2+a^2y^2-1=0$$

$$(a^4+a^2)y^2+2a^3y+a^2-1=0$$

$$[(a^3+a)y+(a^2-1)](ay+1)=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{1-a^2}{a^3+a}, \qquad y=-\frac{1}{a}$$

由此可得 $\quad x=\frac{2}{a^2+1}$，$x=0$

即直线①与圆的交点坐标为$\left(\frac{2}{a^2+1}, \frac{1-a^2}{a^3+a}\right)$，$\left(0, -\frac{1}{a}\right)$.

因为直线①与直线②(关于 x 轴)是对称的，所以可得直线②与圆的交点是

$\left(\frac{2}{a^2+1}, -\frac{1-a^2}{a^3+a}\right)$, $\left(0, \frac{1}{a}\right)$.

(3) 题中所指区域是图1—35中的斜线部分故其面积是

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{2}{a}\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2a^2}+\frac{1}{a}=\frac{\pi+2a}{2a^2}.$$

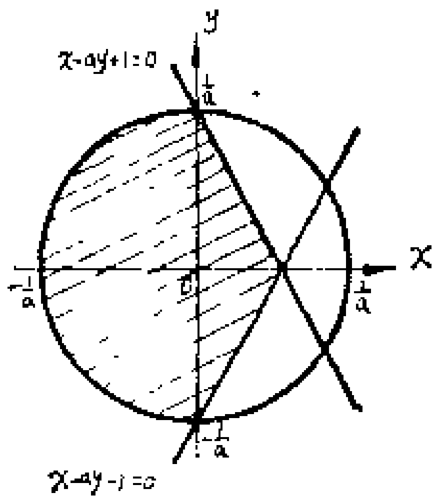


图 1—35

例 13 设有圆 C：

$$x^2-2ax+y^2-2(a-2)y+2=0,$$

其中 a 为实数．且 $a\neq1$．

(1) a 变动时，圆 C 的中心所描绘的是什么图形？

(2) 试求与所有的圆 C 相切的直线方程；

(3) 对于 $a<1$，试图示满足 $x^2-2ax+y^2-2(a-2)y+2>0$ 的所有点 (x, y) 的区域．

分析 (1) 将圆 C 的方程化为标准方程后、将圆心的坐标，消去 a，即得圆心的轨迹．在 (2) 中为求与圆相切的直线，可根据圆心到直线的距离等于半径来求，关于(3)，可作为关于 a 的不等式来考虑．

解 (1) 把圆 C 的方程化为标准方程：

$$(x-a)^2+[y+(a-2)]^2=2(a-1)^2$$

故圆心满足：$\begin{cases} x=a & (a\neq1) \\ y=-(a-2) \end{cases}$

消去 a，得 $x+y=2 \qquad (x\neq1)$

所以，圆心在直线 $x+y=2$ 上变动，但对应于 $x=1$ 的点 $(1, 1)$ 除外．

(2) 设所求的直线为 $ax+by+c=0$，因为从圆心 $(a, -(a-2))$ 向此直线所引的垂线长，等于半径 $\sqrt{2}|a-1|$．

故有：$$\frac{|aa+b(-a+2)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}|a-1| \quad (a\neq1)$$

两边平方、化简

$$(a+b)^2a^2-2[2(a^2+b^2)+(a-b)(2b+c)]a+2(a^2+b^2)-(2b+c)^2=0$$

此式关于 a 为恒等的条件是

$$\begin{cases} (a+b)^2=0 & ① \\ 2(a^2+b^2)+(a-b)(2b+c)=0 & ② \\ 2(a^2+b^2)-(2b+c)^2=0 & ③ \end{cases}$$

成立

由① $\qquad a=-b$

由② $\qquad ac=0$

由③ $\qquad 4ac-c^2=0$

于是得到 $\qquad a=-b\quad(\neq 0)$、$c=0$

故所求的直线为 $\quad y=x$

(3) 将 $x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2>0$ 变形为

$$-2a(x-y)+x^2+y^2-4y+2>0$$

$$\therefore\quad 2(1-a)(x-y)+(x-1)^2+(y-1)^2>0$$

因为 $(x,\ y)\neq(1,\ 1)$ 时，

$$(x-1)^2+(y-1)^2>0$$

为使对 $a<1$ 的一切 a 都成立，则 $y\leqslant x$

故所求的范围如图 1—36 中的斜线部分包括点 (1，1) 及边界.

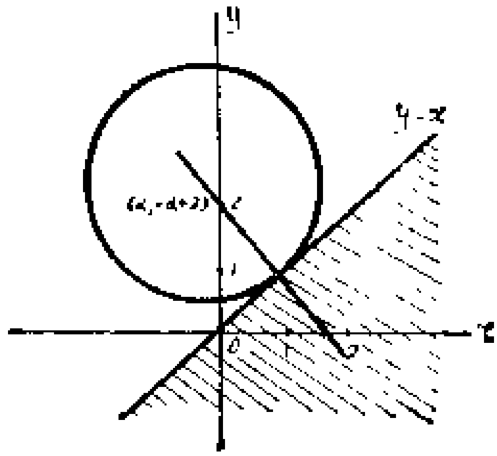


图 1—36

习 题 三

1. 在方程 $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$ 中，

(1) 若 $A=0$，而 D、E 不同时为零，它的图形是什么？

(2) 若 $A\neq 0$，则系数 A、D、E、F 成什么关系时，它的图形才是圆？并研究：

i) $F=0$ 时，圆的位置特征；

ii) $D=0$ 时，圆的位置特征；

iii) $E=0$ 时，圆的位置特征.

2. 试证：二次方程 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 是圆的方程的充要条件是：$a=b\neq 0$，$h=0$，$g^2+f^2-ac>0$

3. 已知圆 C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 试证：

(1) 圆 C 与坐标轴相切的条件是 $D^2=E^2=4F$；(2) 圆 C 在坐标轴截取相等线段的条件是 $D^2=E^2<4F$ $(D^2+E^2-4F>0)$.

4. 求下面各圆的方程：

(1) 以原点为圆心，且截直线 $3x+4y+5=0$ 所得的弦长等于 8.

(2) 经过 $(5,0)$ 和 $(-2,1)$ 两点，且圆心在直线 $x-3y-10=0$ 上.

(3) 经过点 $(6,-3)$，$(-6,15)$ 且和直线 $5x+12y-319=0$ 相切.

(4) 经过点 $(2,1)$ 和直线 $x-y-1=0$ 相切，并且圆心在直线 $y+2x=0$ 上.

(5) 经过 $(3,1)$ 点和两平行直线 $x+2y-3=0$，$x+2y-7=0$ 相切.

(6) 经过两圆 $x^2+y^2+6x-5=0$，$x^2+y^2+6y-1=0$ 的

交点，且圆心在直线 $x-y-4=0$ 上.

5. 已知正方形的一个顶点为 $A(-4,\ 0)$，它的中心为 $P(0,\ 3)$，求这正方形其它各顶点的坐标.

6. 已知正方形的四个顶点坐标分别为 $(2,\ 2)$，$(-2, 2)$，$(-2,\ 2)$，$(2,\ -2)$，试在此正方形内求一点，使到各边距离的平方和为 20，并到直线 $\sqrt{3}x+y=2+\sqrt{3}$ 的距离为最短.

7. 已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$，求过圆 C 内一点 $P(3,\ 0)$ 的最长的弦和最短的弦所在的直线方程.

8. 直线 $x+2y=3$ 与圆 $x^2+y^2+x-6y+c=0$ 相交于 P、Q 两点，O 为原点，若 $OP\perp OQ$，求 C.

9. 从圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 外一点 $P(a,\ b)$ 向圆引一条切线，切点为 Q，O 为原点.

(1) 若 $PO=PQ$，求 a 与 b 的关系式.

(2) 在(1)的条件下，求使 PQ 为最小的点 P 的坐标.

10. 已知过点 $P(0,\ 3\sqrt{2})$ 且斜率为 k 的直线与圆心在原点，半径为 3 的圆相交于 M，N 两点.

(1) 求 M、N 两点的坐标；

(2) 问当 M，N 两点重合时，k 为何值？此时过 P 点的直线和圆的位置关系如何？这样的直线有几条？它们的夹角是多大？

11. 证明直线 $y=kx+b$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切的条件是 $b^2=r^2(1+k^2)$.

12. 已知 $P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$ 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 上的两点，且 $x_1x_2+y_1y_2=0$，求证：

(1) $x_1^2+x_2^2=r^2$　(2) $y_1^2+y_2^2=r^2$　(3) $x_1y_1+x_2y_2=0$

13. 自圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_0,\ y_0)$ 到圆的切线，切点为 P_1、P_2，证明：P_1、P_2 所在的直线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$

14. 设 a、b、c 都是整数， 过圆 $x^2+y^2=(3a+1)^2$ 外一点 $P(b^3-c,\ c^3-b)$ 向圆引切线，证明过这两切点的直线上的任何点都不是整点.

15. 对于任意的 a、b，证明： 圆 O_1：$x_1^2+y_1^2-ax=0$ 和圆 O_2：$x^2+y^2-by=0$ 在交点处的切线互相垂直.

16. 平面上有三个圆，C_1、C_2、C_3 两两相交， 若 C_1、C_2 的交点为 P_1，P_2；C_2、C_3 的交点为 Q_1、Q_2； C_3、C_1 的交点为 R_1、R_2. 求证：P_1P_2、Q_1Q_2、R_1R_2 三条直线共点.

17. 已知直线在 x 轴、y 轴上的截距之比为 1∶2，并且与圆心在点(1，2)，半径为 $\sqrt{5}$ 的圆相切，求此直线的方程.

18. 求圆 $x^2+y^2+2(\sqrt{3}-1)K+2(\sqrt{3}+1)y=0$ 和圆 $x^2+y^2-4x=0$ 相交部分的面积与公共弦所在直线的方程.

19. 证明：两曲线 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$，$a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2=0$ 的交点在中心为坐标原点的圆周上. 并求此圆的半径 R. $(a>0,\ b>0)$

20. 已知通过点 $M(x,\ y)$ 的两个圆与二坐标轴相切，它们的半径分别为 r_1，r_2.

求证：$r_1\cdot r_2=x_1{}^2+y_1{}^2$

21. 已知方程 $x^4+4x^3-32x^2+2x^2y^2+4xy^2+y^4=0$

(1) 证明此方程表示的曲线是两个互相外切的圆.

(2) 求这两圆的公切线的方程.

(3) 证明以这两圆的圆心为直径的两个端点的圆也和这两圆的外公切线相切.

22. 向以原点为圆心，半径为 1 的圆 A 和另外一个圆 B 所引的切线长度相等的点都在直线 $3x+4y=5$ 上， 求圆 B 的圆心的轨迹方程.

23. 已知圆 $0'$ 的方程为 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$，过原点

0 引圆 0′ 的割线．求所有这些割线被圆 0′ 所截的弦的中点的轨迹．

24．圆 O_1 的圆心为(0，1)，半径为 1．Q 是圆 O_1 上的任意一点，在 OQ 和 OQ 的延长线(或反向延长线) 上任取一点 P，使 P 到 Q 的距离等于 P 到直线 $y=2$ 的距离．求 P 点的轨迹方程．

25．设等腰 $\triangle OAB$ 的顶角为 2θ，高为 h．

(1) 在 $\triangle OAB$ 内有一动点 P，到三边 OA，OB，AB 的距离分别为 $|PD|$，$|PF|$，$|PE|$，并且满足关系 $|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$，求 P 点的轨迹．

(2) 在上述轨迹中定出点 P 的坐标，使得 $|PD|+|PE|=|PF|$．

26．如果点 $(x、y)$ 在以原点为中心的单位圆圆周上运动时，求证：点 $(x(x+y),\ y(x+y))$ 也在某一圆周上运动，又求点 $(x+y,\ xy)$ 此时作怎样的运动．

27．以原点为中心的两个同心圆 C_1 及 C_2，它们的半径分别是 2 cm 和 6 cm．P 点在 C_1 上，Q 点在 C_2 上，分别以每秒一弧度的角速度，P 作逆时针方向旋转，Q 作顺时针方向旋转，如当时到 $t=0$ 时，P 点在 x 轴上．Q 点在 y 轴上，求：

(1) 用 t 表示 P、Q 两点的坐标；

(2) PQ 的中点 M 的轨迹方程．

28．就圆　$x^2+y^2-6x-4y+10=0$　①

直线　$y=mx$　②

直线　$3x+2y+10=0$　③

解答下列问题：

(1) 圆与直线(2)相交于两点，求 m 值的范围；

(2) 圆与直线(2)相交于两点，求连结这两点的线段中点

P 的轨迹.

(3) 设直线(2)与直线(3)的交点为 Q，坐标原点为 O. 求 $OP\cdot OQ$ 的值.

29. 在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，D 为斜边 BC 的中点，以 BD 为直径画圆交 AB 于 E，连结 C、E 交圆于 F，求证：$AF\perp CE$.

30. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，有一个圆内切于 $\triangle ARC$ 的外接圆，并且与 AB、AC 分别相切于 D、Q，求证：P、Q 连线的中点是 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心.

31. 设正方形的内切圆上任一点对两条对角线的视角为 α，β. 求证：$\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta=8$.

32. a 是非负实数，证明方程 $x^2+y^2-2ax-4ay+4\frac{1}{2}a^2=0$ 所表示的一切圆中：(1) 圆心在直线 $y=2x$ 上；(2) 求这些圆的公切线的方程.

33. 已知两集合 $M=\{(x_1y):x^2+2x+y^2\leqslant 0\}$，$N=\{(x,y):y\geqslant x+a\}$. 为使 $M\cap N=|x|$，试确定 a 的范围.

34. 求满足条件 $3x+4y=12$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 的 x^2+y^2 的最大值与最小值.

35. 已知 $f(x)=x^2-6x+5$，问满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$ 和 $f(x)+f(y)\geqslant 0$ 的点(x, y)在平面上的什么范围?

36. 求由下列二式所组成的区域的面积.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-4\leqslant 0 \\ |x-1|+|y-2|\geqslant 3 \end{cases}$$

37. 考察圆心为(a, a^2)且与 x 轴相切的圆，记此圆为 $C(a)$，当 $C(a)$ 的圆心在曲线 $y=x^2$ 上变动时$(a\neq 0)$，记 $C(a)$ 的集合为 E.

(1) 为使圆 $C(a)$ 与圆 $C(b)$ 外切，试求关于 a、b 之间应满足的条件

(2) 为使 $C(a)$ 只与 E 中唯一的圆外切，求 a 的值.

(3) 对于由(2)规定的 a 值，当 $C(a)$ 与 $C(b)$ 外切时，试用 a 表示 b.

38. 已知点 $A(-a, 0)$ 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 上的定点，B 是此圆上的动点，T 是过 A 的切线上的动点，B、T 两点都在 x 轴的上方，且 $AT=AB$，直线 TB 交 x 轴于 C，问：当 B 点沿圆周趋近于 A 时，C 的位置如何？

第二章 圆锥曲线与二元二次方程

§1 抛物线

<table>
<tr><th colspan="3">项　　目</th><th>内　　　容</th><th>说　　　明</th></tr>
<tr><td rowspan="6">从曲线到方程</td><td colspan="2">定　　义</td><td>与一定点和一定直线等距离的点的轨迹叫做抛物线.</td><td>定点——焦点；
定直线——准线；动点形成轨迹.</td></tr>
<tr><td colspan="2">几何条件方　　程</td><td>$|QF|=|QM|$
(如图2—1；2—2；2—3；2—4)</td><td>$Q(x,y)$——动点；
F——焦点；M——动点到准线的垂足</td></tr>
<tr><td rowspan="4">标准方程</td><td>(一)</td><td>$y^2=2px$ ($p>0$；图 2—1)</td><td>$F\left(\frac{p}{2},0\right)$；准线：$x=-\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td>(二)</td><td>$y^2=-2px$ ($p>0$；图2—2)</td><td>$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$；准线：$x=\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td>(三)</td><td>$x^2=2py$ ($p>0$；图 2—3)</td><td>$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$；准线：$y=-\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td>(四)</td><td>$x^2=-2py$ ($p>0$；图 2—4)</td><td>$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$；准线：$y=\frac{p}{2}$</td></tr>
</table>

续 表

	项目		内容	说明
从方程到曲线	就标准方程(一)言	范围	当$0\leqslant x<\infty$时，y才有确定的对应值.	左半平面没有图形
		对称性	若$(x,\ y)$满足方程，则$(x,\ -y)$亦满足方程	抛物线有一对称轴——焦点轴.
		增减性	若$x_1<x_2$，则 $\sqrt{2px_1}<\sqrt{2px_2}$, $-\sqrt{2px_1}>-\sqrt{2px_2}$	在第Ⅰ象限，y随着x增大而增大. 在第Ⅳ象限，y随着x增大而减小.
		宽窄特征	若$x=1$时，$y=\sqrt{2p}$.	焦参数p表征出限制在抛物线内的区域的"宽窄".
圆锥曲线	离心率		$e=\dfrac{\lvert QF\rvert}{\lvert QM\rvert}=1$	动点到焦点的距离与到准线的距离之比，叫离心率.
	圆锥曲线及其抛物线的定义		离心率e为一常量的动点的轨迹叫做圆锥曲线. 离心率$e=1$的圆锥曲线叫抛物线.	这样定义的抛物线，可看作上述定义下的充分必要条件.

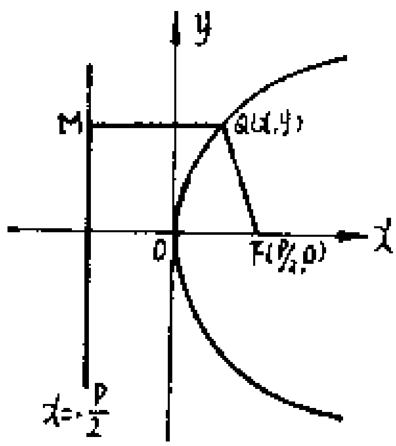


图 2—1

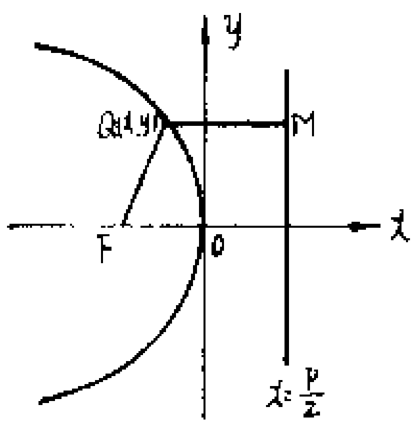


图 2—2

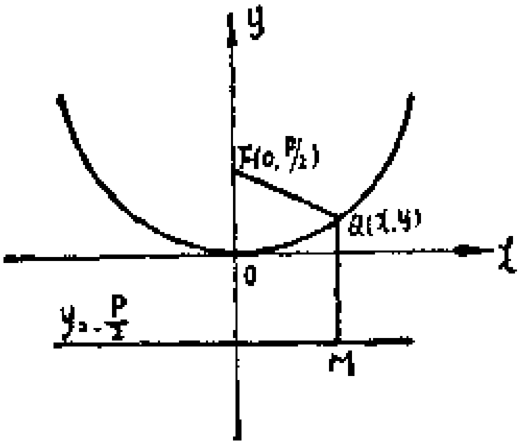


图 2—3

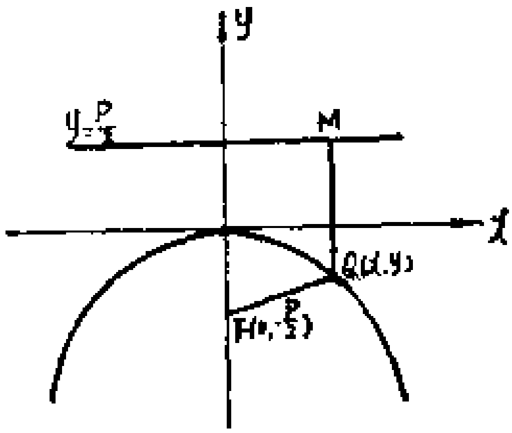


图 2—4

抛物线的切线和法线(图 2—5)

设抛物线的方程为

$$y^2=2px,\quad (p>0)$$

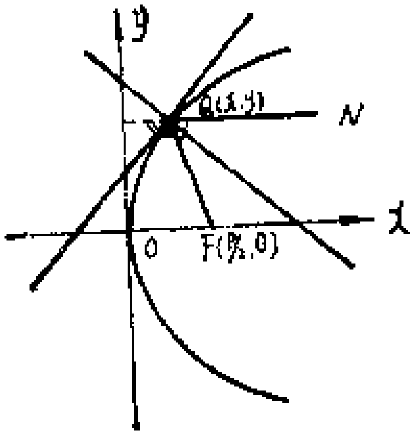


图 2—5

则过切点 $Q(x_1,\ y_1)$ 的切线方程为

$$y_1y=p(x+x_1);$$

过 Q 点的法线方程为

$$y-y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1);$$

以斜率为 k 的切线方程为

$$y=kx+\frac{p}{2k}.$$

切线和法线是焦半径 (QF) 与通过切点的直径(QN，平行于轴的射线)的夹角的平分线.

二、例　题

例 1　已知抛物线的顶点在原点，对称轴是 x 轴，抛物线上的点 $M(-3,\ m)$ 到焦点的距离等于 5，求抛物线的方程和 m 的值.

解法一　因抛物线的顶点在原点，对称轴是 x 轴，抛物线

上的点 $M(-3,\ m)$ 在二、三象限，故可设所求的抛物线方程为

$$y^2=-2px \quad (p>0).$$

则焦点是 $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$，图 2—6.

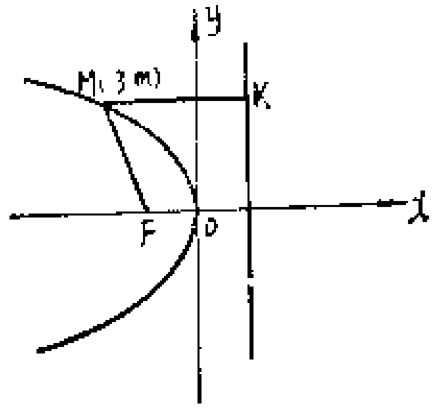


图 2—6

因点 $M(-3,m)$ 在抛物线上，且 $|MF|=5$，故

$$\begin{cases} m^2=6p, \\ \sqrt{\left(-3+\frac{p}{2}\right)^2+m^2}=5. \end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases} p=4, \\ m=2\sqrt{6}, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} p=4, \\ m=-2\sqrt{6}. \end{cases}$$

因此，抛物线方程为

$$y^2=-8x,$$

m 的值为 $2\sqrt{6}$ 或 $-2\sqrt{6}$.

解法二 设抛物线的方程为

$$y^2=-2px, \quad (p>0)$$

则准线方程是

$$x=\frac{p}{2}.$$

因为抛物线上的点 $M(-3,\ m)$ 到焦点的距离 $|MF|$ 与到准线的距离 $|MK|$ 相等(图 2—6)，故

$$|MF|=|MK|,$$

$$\because \quad |MF|=5,$$

$$|MK|=|-3|+\frac{p}{2},$$

$$\therefore \quad |-3|+\frac{p}{2}=5.$$

由此得　$p=4$.

因此，所求的抛物线方程为

$$y^2=-8x.$$

又点 $M(-3, m)$ 在此抛物线上，故

$$m^2=-8\cdot(-3).$$

$\therefore$　$m=2\sqrt{6}$ 或 $m=-2\sqrt{6}$.

〔附注〕　(1) 所设 $y^2=-2px$ 是一待定抛物线方程，而 p 是待定参数，又已知点 $M(-3, m)$ 的 m 也是待定参数，因此本题求解过程势必牵涉到包含 p 和 m 的两个方程．通过解方程组再求出 m、p.

(2) 解法二比解法一好．在解法二中运用了抛物线的重要性质："抛物线上任意一点到焦点的距离(即此点的焦半径)等于此点到准线的距离"，抛物线的这个性质在解决许多有关过焦点的弦的问题中都要用到，因此必须熟练掌握.

(3) 如果本例中抛物线的对称轴改为 y 轴，其他条件不变，则所设的抛物线方程为 $x^2=2py$ 或 $x^2=-2py\,(p>0)$，因而求出两个抛物线方程.

例 2　一条二次曲线通过原点，它的焦点在 $F(-1,1)$ 处，而对应的准线方程是 $x+y-2=0$，求此曲线的方程.

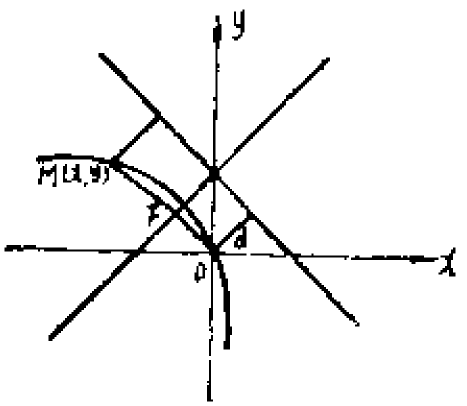


图 2—7

分析　因为二次曲线包括椭圆、双曲线、抛物线三种，而题中又未指明，故要先判定清楚，为此，必须先求出离心率 e. 而 e 又等于曲线上任意一点到焦点和准线的距离之比，即原点 $(0, 0)$ 到点 $F(-1, 1)$ 和直线 $x+y-2=0$ 的距离之比.

解 原点 O 到焦点 F 和准线的距离分别为

$$|OF|=\sqrt{(-1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2},$$

和
$$d=\left|\frac{-2}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad e=\frac{|OF|}{d}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1.$$

因此，所求的二次曲线是一条抛物线.

设 $M(x,\ y)$ 为所求二次曲线上的一点(图 2—7)，则 M 点到焦点 F 和准线的距离相等. 故

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\left|\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right|.$$

将式子两边平方，化简后得到所求的二次曲线的方程为

$$x^2-2xy+y^2+8x=0.$$

例 3 求证：以过抛物线 $y^2=4px$ 的焦点的弦为直径的圆必与此抛物线的准线相切.

分析 图 2—8. 证明以 AB 为直径的圆与准线 NN' 相切，就是证明圆心 O_1 到 NN' 的距离等于 AB 的一半.

证法一 图 2—8. 抛物线的焦点为 $F(p,\ 0)$；准线 NN' 的方程为 $x=-p$.

设 AB 弦的直线方程为

$$y=k(x-p),$$

即
$$y=kx-kp. \tag{①}$$

A，B 和 AB 中点 o_1 的坐标是

$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

$o_1(x_0,\ y_0)$.

将①式代入抛物线方程，得

$$(kx-kp)^2=4px,$$

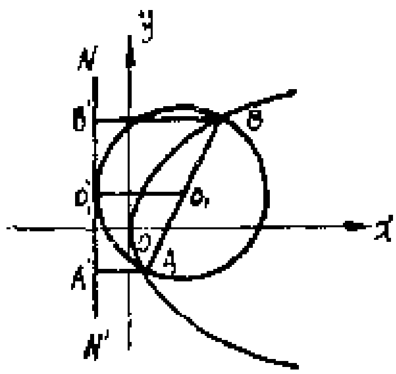


图 2—8

即

$$k^2x^2-2p(k^2+2)x+k^2p^2=0.$$

因 x_1，x_2 是此方程的两根，故

$$x_1+x_2=\frac{2p(k^2+2)}{k^2},\quad x_1x_2=p^2.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (x_1-x_2)^2&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=\left[\frac{2p(k^2+2)}{k^2}\right]^2-4p^2=\frac{16p^2(k^2+1)}{k^4}.\end{aligned}$$

又 $y_1=kx_1-kp$，$y_2=kx_2-kp$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad (y_1-y_2)^2&=[(kx_1-kp)-(kx_2-kp)]^2\\&=k^2(x_1-x_2)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad |AB|&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}\\&=\frac{4p(k^2+1)}{k^2}.\end{aligned}$$

因 o_1 是 AB 的中点，故

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{p(k^2+2)}{k^2}.$$

因此，o_1 到准线 $x=-p$ 的距离 o_1o_1' 等于

$$|o_1o_1'|=x_0+p=\frac{p(k^2+2)}{k^2}+p=\frac{2p(k^2+1)}{k^2}.$$

$$\therefore\qquad |o_1o_1'|=\frac{1}{2}|AB|.$$

所以，以 AB 为直径的圆与准线相切.

证法二 设 A，B 到准线的距离分别为 AA'，BB'，o_1 到准线的距离为 O_1O_1'，则由抛物线的性质可知：

$$|AA'|=|AF|,\quad |BB'|=|BF|.$$

又 O_1O_1' 是直角梯形 $ABB'A'$ 的中位线，故

$$|O_1O_1'|=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)$$

$$=\frac{1}{2}|AB|.$$

由此可知，以 AB 为直径的圆与准线相切.

例 4 抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形的一个顶点在原点，三边上的高通过抛物线的焦点，求此三角形外接圆的方程.

分析 图 2—9. 因为 O 点坐标已知，所以只要把 A, B 的坐标求出来，$\triangle AoB$ 的外接圆的方程也就确定了. 显然，A 与 B 是关于 x 轴的对称点. 因此，又只须求 A 点坐标. 由 A 点在抛物线上，和 $AF\perp oB$，不难求出 A 点的坐标.

解 图 2—9. 因 $\triangle AoB$ 的三条高都通过焦点 F，故 $AB\perp ox$. 因此，B 点与 A 点关于 x 轴对称.

设 A 点坐标为 (x_0, y_0). 则 B 点坐标为 $(x_0, -y_0)$. 因 A 点又在抛物线上，即 $y_0^2=2px_0$，故 A, B 的坐标分别是

$$A\left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right),\quad B\left(\frac{y_0^2}{2p}, -y_0\right).$$

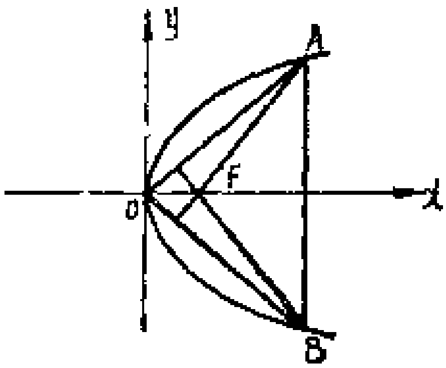


图 2—9

又抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，故 FA 和 FB 的斜率分别是

$$K_{FA}=\frac{y_0}{\frac{y_0^2}{2p}-\frac{p}{2}}=\frac{2py_0}{y_0^2-p^2},$$

$$K_{oB}=\frac{-y_0}{\frac{y_0^2}{2p}}=-\frac{2p}{y_0}.$$

$\because$ $\qquad FA\perp oB,$

$$\therefore \qquad \left(\frac{2py_0}{y_0^2-p^2}\right)\left(-\frac{2p}{y_0}\right)=-1.$$

由此得 $y_0=\pm\sqrt{5}p$.

依题意取 $y_0=\sqrt{5}p$，则

$$x_0=\frac{y_0^2}{2p}=\frac{5p}{2}.$$

因此，o，A，B 三点的坐标是

$0(0,0)$，$A\left(\frac{5p}{2},\ \sqrt{5}p\right)$，$B\left(\frac{5p}{2},\ -\sqrt{5}p\right)$.

设 $\triangle AoB$ 的外接圆的方程是

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

将 o，A，B 各点坐标分别代入圆的方程，得方程组：

$$\begin{cases} F=0, \\ \left(\frac{5p}{2}\right)^2+(\sqrt{5}p)^2+\frac{5pD}{2}+\sqrt{5}pE+F=0, \\ \left(\frac{5p}{2}\right)^2+(-\sqrt{5}p)^2+\frac{5pD}{2}-\sqrt{5}pE+F=0. \end{cases}$$

解方程组，得

$$F=0,\quad E=0,\quad D=-\frac{9}{2}p.$$

因此，$\triangle AoB$ 的外接圆方程为

$$x^2+y^2-\frac{9p}{2}x=0,$$

即

$$2x^2+2y^2-9px=0.$$

例 5 证明：由抛物线的准线上任意一点引抛物线的两条切线必互相垂直.

分析 图 2－10. 证明 $MA\perp MB$；即证 $K_{MA}\cdot K_{MB}=-1$. 于是可从确定 MA 和 MB 两切线的斜率着手.

证法一 图2—10. 设抛物线方程为

$$y^2=4px,\quad (p>0)$$

则准线为 $x=-p$.

设 M 为准线上任意一点，过 M 点所引两切线为 MA 和 MB，A、B 是切点. 又设 A，B 的坐标是

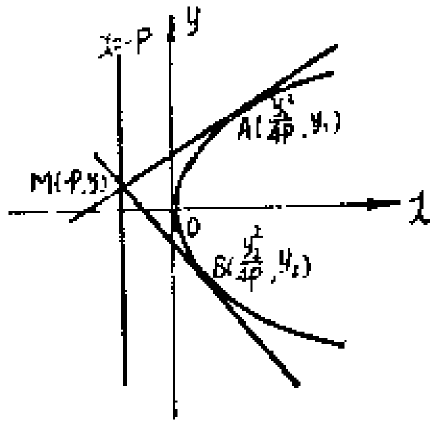


图 2—10

$$A\left(\frac{y_1^2}{4p},\ y_1\right),\quad B\left(\frac{y_2^2}{4p},\ y_2\right)$$

则切线 MA 和 MB 的方程分别是

$$MA:\ y_1y=2p\left(x+\frac{y_1^2}{4p}\right),\qquad ①$$

$$MB:\ y_2y=2p\left(x+\frac{y_2^2}{4p}\right).\qquad ②$$

联立①和②两个方程，求出两切线的交点 M 的坐标

$$M\left(\frac{y_1y_2}{4p},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

因 M 在准线 $x=-p$ 上，其横坐标等于 $-p$，故

$$\frac{y_1y_2}{4p}=-p.$$

由此得 $y_1y_2=-4p^2$.

又切线 MA 和 MB 的斜率分别为

$$K_{MA}=\frac{2p}{y_1},\quad K_{MB}=\frac{2p}{y_2}.$$

$$\therefore\quad K_{MA}\cdot K_{MB}=\frac{4p^2}{y_1y_2}=\frac{4p^2}{-4p^2}=-1.$$

由此可知 $MA\perp MB$，证毕.

证法二 设 k_1 和 k_2 分别是切线 MA 和 MB 的斜率，则 MA 和 MB 的切线方程为

$$y = k_1 x + \frac{p}{k_1} \text{ 和 } y = k_2 x + \frac{p}{k_2}.$$

设 M 为准线 $x = -p$ 上的任意一点，其坐标为 $(-p, y_0)$。因 M 在上述两条切线上，故

$$y_0 = -pk_1 + \frac{p}{k_1}, \quad y_0 = -k_2 p + \frac{p}{k_2}.$$

由此得

$$-k_1 p + \frac{p}{k_1} = -k_2 p + \frac{p}{k_2},$$

即

$$(k_1 - k_2)(k_1 k_2 + 1) = 0.$$

因 MA 和 MB 不平行，即 $k_1 \neq k_2$，故必须

$$k_1 k_2 = -1.$$

所以，$MA \perp MB$.

例 6 过抛物线上任意一点 M 作切线，再自其顶点作切线的垂线，交 M 点的焦半径 MF 或其延长线于 P，求 P 点的轨迹.

分析 如图 2—11. 这是一个与已知曲线有关的动点的轨迹问题. 由于动点 $P(x, y)$ 的规律较难寻求，而 M 点在已知的抛物线上运动，即 M 点的运动规律为已知，因此，可以先求出 M、P 两点坐标之间的关系式：$x_1 = f(x, y)$，$y_1 = g(x, y)$，再利用 M 点在抛物线上，即 $y_1^2 = 2px_1$，就可得到 P 点的轨迹.

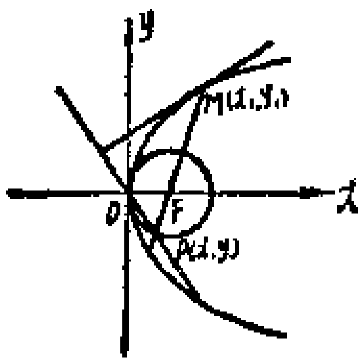


图 2—11

解 设抛物线方程为

$$y^2 = 2px, \quad (p > 0)$$

M 点的坐标为 (x_1, y_1)，则过 M 点的切线方程为

$$y_1 y = p(x + x_1).$$

过顶点 $O(0, 0)$ 而和此切线垂直的直线方程为

$$y = -\frac{y_1}{p}x. \quad ①$$

又抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，故焦半径 FM 的直线方程为

$$y = \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}}\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

即

$$y = \frac{y_1(2x - p)}{2x_1 - p}. \quad ②$$

联立方程①和②，则方程组的解就是 P 点的坐标 (x, y)，于是得到 P 点坐标与 M 点坐标的关系式

$$x_1 = \frac{p^2 - px}{2x}, \quad y_1 = -\frac{py}{x}.$$

又 $\qquad y_1^2 = 2px_1.$

故，所求点的轨迹方程为

$$\left(-\frac{py}{x}\right)^2 = 2p \cdot \frac{p^2 - px}{2x},$$

即

$$x^2 + y^2 - px = 0,$$

即

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

因此，所求点的轨迹是一个圆，圆心在抛物线的焦点处，半径等于此抛物线的焦距.

例 7 经过抛物线 $y^2 = 2px$ 内的一定点 $D(a, b)$，任意引一直线交抛物线于 A、B 两点，求弦 AB 中点的轨迹.

解 图 2—12. 设直线 AB 的斜率为 k，则其方程为 $y - b$

$=k(x-a)$，即

$$y=kx+(b-ak).$$

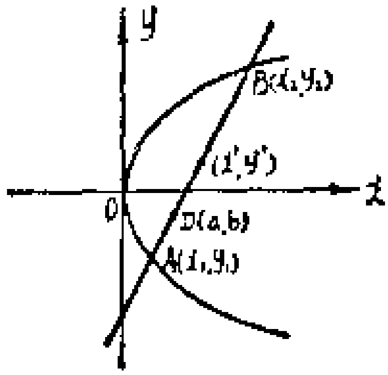


图 2—12

将此方程代入抛物线的方程，得

$$[kx+(b-ak)]^2=2px$$

即

$$k^2x^2-(2ak^2-2bk+2p)x+(b-ak)^2=0.$$

设 A，B 的坐标为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则 x_1，x_2 应是此方程的两根．由韦达定理得

$$x_1+x_2=\frac{2ak^2-2bk+2p}{k^2}.$$

又 $\quad y_1=kx_1+(b-ak)$，$y_2=kx_2+(b-ak)$，

$\therefore \quad y_1+y_2=kx_1+(b-ak)+kx_2+(b-ak)$

$$=k(x_1+x_2)+2(b-ak).$$

又设 AB 的中点坐标为 (x, y)，则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{ak^2-bk+p}{k^2}, \qquad ①$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{k(x_1+x_2)}{2}+(b-ak)$$

$$=\frac{p}{k} \qquad ②$$

由②式求出 k 值：

$$k=\frac{p}{y}.$$

将其代入①式，化简后得所求的轨迹方程

$$\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=p\left(x-\frac{4ap-b^2}{4p}\right).$$

因此，所求点的轨迹仍然是一条抛物线.

〔附注〕 设直线 $y=kx+b$ 与二次曲线

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

相交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点. 将直线方程代入二次曲线的方程，得

$$A'x^2+B'x+C'=0.$$

(其中 A'，B'，C' 是关于 k、b、A、B、C、D、E、F 的多项式)，则 x_1 和 x_2 是此方程的两根. 由韦达定理得

$$x_1+x_2=-\frac{B'}{A'}, \quad x_1x_2=\frac{C'}{A'}.$$

又 $y_1=kx_1+b$，$y_2=kx_2+b$，故

$$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b,$$

$$y_1y_2=bk(x_1+x_2)+k^2x_1x_2+b^2.$$

利用上面的这些关系式，可以直接求 AB 的中点坐标 (x_0, y_0) 和 AB 的长度：

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2};$$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]+[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}.$$

上述方法，在直线与二次曲线相交的问题中经常用到，希望读者注意.

例 8 已知圆 O_1 与抛物线 $y=\frac{3}{8}x^2$ 相切于点 $P\left(1,\frac{3}{8}\right)$ (即两曲线有唯一的公共点)，同时又与 x 轴相切，求圆 O_1 的方程.

分析 图 2—13. 设 L 为公切线，B 为圆 O_1 与 x 轴的切点. 因 $O_1P\perp L$，故 O_1 在过 P 点的抛物线的法线上. 因此，圆心 O_1 是抛物线的过 P 点的法线与 $\angle PAB$ 平分线的交点.

解法一 图 2—13. 因为两曲线在 P 点处的公切线 L 就是

抛物线的在 P 点的切线，所以公切线 L 的方程为

$$x=\frac{4}{3}\left(y+\frac{3}{8}\right),$$

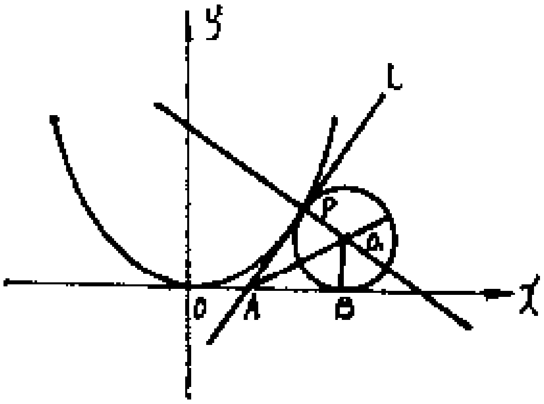


图 2—13

即

$$6x-8y-3=0. \quad ①$$

过 P 点的抛物线的法线方程为

$$y-\frac{3}{8}=-\frac{8}{6}(x-1),$$

即

$$32x+24y-41=0.$$

设 A 点是公切线与 x 轴的交点．在①式中，令 $y=0$，得 $x=\frac{1}{2}$．故 $A\left(\frac{1}{2},0\right)$.

令 $\angle PAx=\alpha$，则 $\operatorname{tg}\alpha$ 是公切线的斜率，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.

由 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$，$\dfrac{3}{4}=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$，得

$$3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+8\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-3=0.$$

解方程得

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3} \quad 或 \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-3.$$

依题意 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$，故 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

因此，$\angle PAx$ 平分线的方程为

$$y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

即

$$2x-6y-1=0. \qquad ②$$

联立①和②两个方程，求出两直线的交点坐标：

$$O_1\left(\frac{9}{8},\ \frac{5}{24}\right).$$

由上面的分析可知，此点就是所求圆的圆心，故此圆的方程是

$$\left(x-\frac{9}{8}\right)^2+\left(y-\frac{5}{24}\right)^2=\left(\frac{5}{24}\right)^2.$$

解法二 由已知条件可知所求的圆的圆心在第一象限内，于是可设所求的圆为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2 \quad (a>0,\ b>0)$$

即

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by=0. \qquad ①$$

因点 $P\left(1,\frac{3}{8}\right)$在此圆上，故

$$1^2-2a\cdot 1+a^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2-2b\cdot\frac{3}{8}=0,$$

即

$$64a^2-128a-48b+73=0. \qquad ②$$

以 $y=\frac{3}{8}x^2$ 代入①式，整理后得

$$9x^4+(64-48b)x^2-128ax+64a^2=0.$$

因为圆与抛物线相切，故此方程有两个等根 1.

因 $9x^4+(64-48b)x^2-128ax+64a^2$

$=(x-1)[9x^3+9x^2+(73-48b)x+73-48b-128a]$,

（注意 $64a^2-128a-48b+73=0$）

故 $x=1$ 是方程

$$9x^3+9x^2+(73-48b)x+73-48b-128a=0$$

的根，于是有

$$9\cdot 1^3+9\cdot 1^2+(73-48b)\cdot 1+73-48b-128a=0$$

即

$$32a+24b-41=0 \quad ③$$

联立②和③两个方程，解之得

$$\begin{cases} a=\dfrac{9}{8} \\ b=\dfrac{5}{24}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=-\dfrac{1}{8} \\ b=\dfrac{15}{8}. \end{cases} \quad (\text{舍去})$$

因此，所求的圆为

$$\left(x-\frac{9}{8}\right)^2+\left(y-\frac{5}{24}\right)^2=\left(\frac{5}{24}\right)^2$$

例 9 在抛物线 $y=x^2$ 上任取两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，求线段 P_1P_2 与抛物线围成的面积.

解法一 设 P_1 和 P_2 分别在 y 轴的异旁(图 2—14). 作 $P_1P_1'\perp ox$，$P_2P_2'\perp ox$，则所求的面积等于直角梯形 $P_1P_1'P_2'P_2$ 的面积减去曲边$\triangle P_1P_1'o$ 和 $\triangle oP_2P_2'$ 的面积.

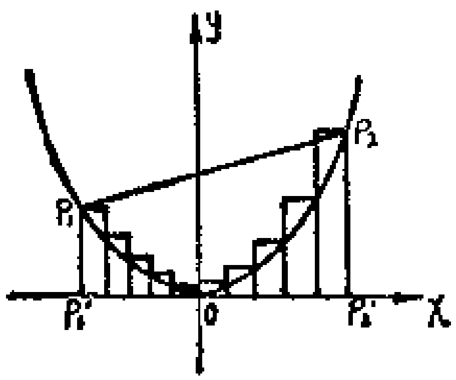


图 2—14

先求曲边$\triangle oP_2P_2'$ 的面积.

将 oP_2' 分成 n 等分，过各分点作 ox 轴的垂线和抛物线相交，又过交点作 oy 轴的垂线，于是得到 n 个矩形：

矩形的宽都等于$\dfrac{|x_2|}{n}$，

矩形的长分别是

$$y_1=\left(\frac{x_2}{n}\right)^2,\quad y_2=\left(\frac{2x_2}{n}\right)^2,$$

$$y_3=\left(\frac{3x_2}{n}\right)^2,\quad \cdots\cdots y_n=x_2^2.$$

这些矩形的面积之和为

$$S_n = \frac{|x_2|}{n}\cdot\left(\frac{x_2}{n}\right)^2 + \frac{|x_2|}{n}\left(\frac{2x_2}{n}\right)^2 + \frac{|x_2|}{n}\left(\frac{3x_2}{x}\right)^2$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{|x_2|}{n}x_2^2$$

$$= \frac{|x_2|^3}{n^3}\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{|x_2|^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{|x_2|^3}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

故曲边 $\triangle oP_2P_2'$ 的面积

$$S' = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{|x_2|^3}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{|x_2|^3}{6}\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{|x_2|^3}{6}\cdot 2$$

$$= \frac{|x_2|^3}{3}.$$

同理，曲边 $\triangle oP_1P_1'$ 的面积

$$S'' = \frac{|x_1|^3}{3}.$$

因此，所求面积

$$S = \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|)(y_1 + y_2) - \frac{|x_1|^3}{3} - \frac{|x_2|^3}{3}$$

$$= \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|)(x_1^2 + x_2^2) - \frac{|x_1|^3 + |x_2|^3}{3}$$

$$= \frac{1}{6}(|x_1| + |x_2|)^3$$

$$= \frac{1}{6}|x_1 - x_2|^3 \quad (\text{因为 } x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 异号}).$$

当 P_1 和 P_2 在 oy 轴的同旁(图 2—15)，则所求面积

$S =$ 梯形 $P_1P_1'P_2'P_2 -$ 曲边$\triangle oP_2P_2' +$ 曲边$\triangle oP_1P_1'$

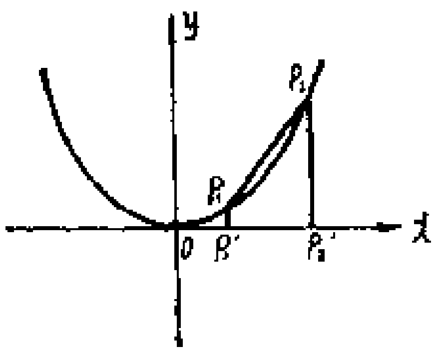


图 2—15

$$=\frac{1}{2}|x_2-x_1|(y_1+y_2)$$
$$-\frac{1}{3}|x_2|^3+\frac{1}{3}|x_1|^3$$
$$=\frac{1}{2}|x_2-x_1|(x_1^2+x_2^2)$$
$$-\frac{1}{3}(|x_2|^3-|x_1|^3)$$
$$=\frac{1}{6}|x_2-x_1|(|x_2|-|x_1|)^2$$

$=\frac{1}{6}|x_2-x_1|^3$ (因 x_1, x_2 同号，$|x_2|-|x_1|=|x_2-x_1|$)。

综上所述，线段 P_1P_2 与抛物线所围成的面积

$$S=\frac{1}{6}|x_2-x_1|^3.$$

解法二 过 P_1P_2 的中点 M 作 ox 轴的垂线，交抛物线于 P_3，记$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积为 S_1；又过 P_1P_3 和 P_3P_2 的中点分别作 ox 轴的垂线，分别交抛物线于 Q_1、Q_2，记 $\triangle P_1Q_1P_3$ 与 $\triangle P_3Q_2P_2$ 的面积之和为 S_2。仿照上述方法又可以作四个更小的三角形，这四个小三角形的面积之和记为 S_3，照这样做下去，可以作出一系列的面积 S_4，S_5，……，则所求的面积就是这一系列的面积之和(图 2—16)。

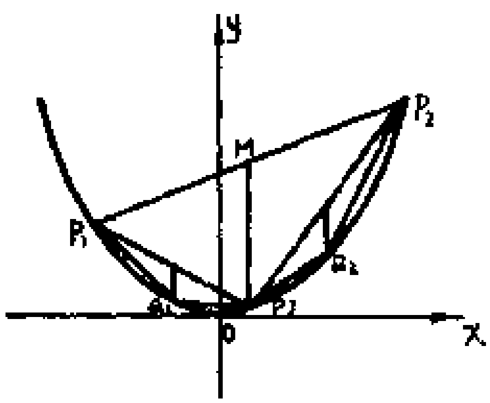


图 2—16

因 P_1，P_2，P_3 都在抛物线上，又 $P_3(x_3, y_3)$ 与 M 的横坐标相同，于是可得

$$y_1=x_1^2,\quad y_2=x_2^2,$$
$$y_3=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1+x_2)^2}{4}.$$

由图示可知$\triangle P_1P_3P_2$ 的面积

$$S_1=\frac{1}{2}\left|x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\frac{(x_1+x_2)^2}{4}-x_1^2\right|$$

$$+\frac{1}{2}\left|x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\frac{(x_1+x_2)^2}{4}-x_2^2\right|$$

$$=\frac{1}{8}|x_1-x_2|^3.$$

同理

$$S_{\triangle P_1Q_1P_3}=\frac{1}{8}|x_1-x_3|^3=\frac{1}{8}\left|x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right|^3$$

$$=\frac{1}{8\cdot 2^3}|x_1-x_2|^3$$

$$S_{\triangle P_3Q_2P_2}=\frac{1}{8\cdot 2^3}|x_1-x_2|^3,$$

$$\therefore\quad S_2=S_{\triangle P_1Q_1P_3}+S_{\triangle P_3Q_2P_2}$$

$$=\frac{1}{8\cdot 2^3}|x_1-x_2|^3+\frac{1}{8\cdot 2^3}|x_1-x_2|^3$$

$$=\frac{1}{8\cdot 2^{2\cdot 1}}|x_1-x_2|^3.$$

根据上述的递推结果，类似地有

$$S_3=\frac{1}{8\cdot 2^{2\cdot 2}}|x_1-x_2|^3,$$

$$S_4=\frac{1}{8\cdot 2^{2\cdot 3}}|x_1-x_2|^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n=\frac{1}{8\cdot 2^{2\cdot(n-1)}}|x_1-x_2|^3$$

故 $S=\lim\limits_{n\to\infty}(S_1+S_2+\cdots+S_n)$

$$=\frac{|x_1-x_2|^3}{8}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{2(n-1)}}\right)$$

$$=\frac{|x_1-x_2|^3}{8}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^n}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{|x_1-x_2|^3}{8}\cdot\frac{4}{3}$$

$$=\frac{1}{6}|x_1-x_2|^3.$$

例 10 已知抛物线 $x=-y^2+9$ 和 $y=-x^2+a$，问 a 在什么范围内这两条曲线才有四个交点，并证明这四个交点在同一圆周上（$a>0$）.

解 图 2—17. 抛物线 $x=-y^2+9$ 和 x，y 轴的交点为 $A(9,\ 0)$，$B(0,\ 3)$，$C(0,\ -3)$.

抛物线 $y=-x^2+a$ 的位置随着 a 的取值范围不同而不同，但是，它的顶点始终在 y 轴上，且开口朝下. 当它与 x 轴和 y 轴相交时，三个交点的坐标为（$a>0$）：

$D(0,a)$，$E(-\sqrt{a},0)$，$F(\sqrt{a},0)$.

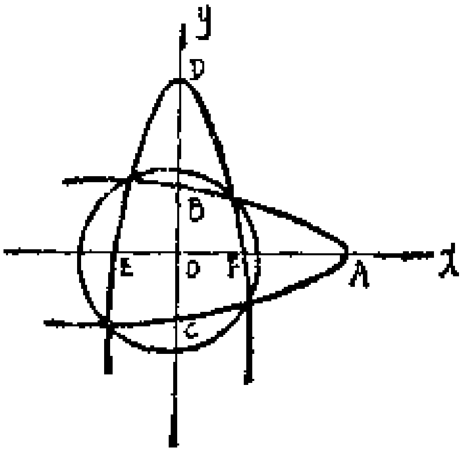


图 2—17

由图可见，当 $a>3$ 且 $\sqrt{a}<9$，即 $3<a<81$，两抛物线有四个交点.

当两抛物线有四个交点时，交点的坐标满足以下的方程组：

$$\begin{cases}x=-y^2+9, & ①\\ y=-x^2+a. \quad (3<a<81) & ②\end{cases}$$

由①+②，得

$$x^2+y^2+x+y=a+9.$$

即

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{a+\frac{19}{2}}\right)^2. \qquad ③$$

因为四个交点的坐标同时满足(1)和(2)，所以四个交点的

坐标必须满足方程(3)，而方程(3)是一个圆心为$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$半径为$\sqrt{a+\frac{19}{2}}$的圆，因此，这四点共圆.

习　题　一

1. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

　1) $y^2=10x$；

　2) $x^2=-4y$；

　3) $2y^2+5x=0$；

　4) $12x^2-7y=0$.

2. 已知下列条件，求抛物线的方程：

　1) 顶点在原点，焦点是$F(-2, 0)$；

　2) 顶点在原点，准线是$3y=2$；

　3) 顶点在原点，以x轴为对称轴，并且通过$Q(2, -4)$点；

　4) 顶点在原点，以y轴为对称轴，过焦点而和轴垂直的弦长等于8.

3. 已知抛物线的顶点在原点，以x轴为对称轴，经过焦点且倾角为$\frac{3\pi}{4}$的直线，被抛物线所截的弦长等于8，求抛物线的方程.

4. 在抛物线$y^2=12x$上，求到焦点距离等于9的点的坐标.

5. 已知抛物线$y^2=4x$：

　1) 求过点$A(1, -2)$的切线方程；

　2) 求过点$B(-1, 1)$的切线方程.

6. 已知抛物线$y^2=6x$，求出经过点$\left(\frac{11}{3}, 0\right)$的法线方程.

7. 已知抛物线 $y^2=4px$，经过焦点作与轴垂直的弦 AB，求证过 A，B 的两条切线互相垂直，并且两切线与轴相交于一点。

8. 汽车灯的反光灯面是抛物面，灯的口径是 197mm，深 69mm，求灯反光面的焦点位置.

9. 图 2—18 中梁柱结构的上下拱形都是抛物线，跨度 $AB=24$ 米，上拱的矢高 $f_1=3$ 米，下拱的矢高 $f_2=1$ 米，撑柱 A_1B_1 离对称轴 o_1o_2 2.4 米，求 A_1B_1 的长.

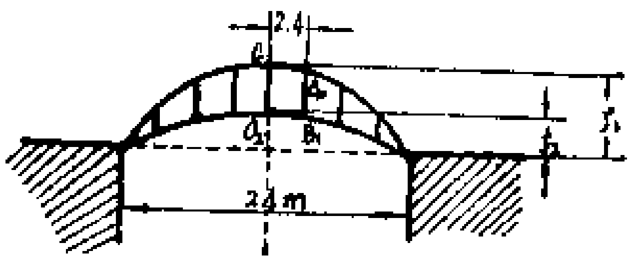


图 2—18

10. 已知抛物线的顶点在原点，以 x 轴为对称轴，并且和直线 $x-4y+2=0$ 相切，求抛物线的方程.

11. 求下列抛物线的方程：

1) 焦点在 $(3, -1)$，准线是 $3x-4y+12=0$；

2) 顶点在 $(1, 1)$，准线是 $y=-2$；

3) 顶点和焦点分别是 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$.

12. 一条抛物线通过点 $(1, 1)$，$(1, 2)$，并有准线 $x+y-1=0$，求其焦点.

13. 已知抛物线 $y^2=6x$，过点 $(4, 3)$ 引一弦，使它恰好在这点平分，求此弦所在的直线方程.

14. 已知抛物线 $y^2=2px$，AB 是过焦点的弦：

1) 求证：A、B 两点到 x 轴的距离之积等于 p^2；

2）如果直线 AB 的倾角为 θ，求 AB 弦的长.

15. 已知一个等边三角形内接于抛物线 $y^2=2px$，并且一个顶点在原点，试求此等边三角形的面积.

16. $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 都在抛物线 $y^2=32x$ 上，C 点的坐标为(2，8)，且这个三角形的重心是这条抛物线的焦点，试求过 A，B 两点的直线方程.

17. 已知直线 L 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F，且与抛物线交于 A，B 两点，使得 $\triangle BoF$ 的面积与 $\triangle AoF$ 的面积之比为 1:2，0 是原点，求直线 L 的方程.

18. 已知抛物线 $y^2=2p(x-a)\ (a>0)$，L_1 和 L_2 分别是过原点 o 且与抛物线有两个交点的直线，L_1 与抛物线交于 A、B，L_2 与抛物线交于 C、D，过 A、D 与 B、C 分别作直线 L_3 和 L_4 与 y 轴交于 P，Q，求证：$|oP|=|oQ|$.

19. 证明：抛物线上任意四点构成的四边形不可能是平行四边形.

20. P_1，P_2 为抛物线上的两点，过这两点的切线交于 R，又 F 为抛物线的焦点，求证：$RF^2=|FP_1||FP_2|$.

21. 已知 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，$P_3(x_3,\ y_3)$ 是抛物线 $y^2=4px$ 上的任意三点，过 P_1，P_2 两点的切线相交于 A，过 P_1，P_3 两点的切线相交于 B，过 P_2，P_3 两点的切线相交于 C：

1）证明：A 点的坐标是

$$x=\frac{y_1y_2}{4p},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2};$$

2）证明：$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积的两倍.

22. 抛物线 $y=x^2$ 上有一点与直线 $y=2x-4$ 的距离最短，

求这最短距离.

23. 已知抛物线 $y^2=2px$ 及 $y^2=2p(x-a)$ $(a>0)$，证明第一条抛物线的和第二条抛物线相切的弦被切点平分.

24. 求抛物线 $y^2=5x$ 和圆 $9x^2+9y^2=16$ 的公切线.

25. 设抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=bx+c$ 的交点的横坐标分别是 x_1 和 x_2，且直线与 x 轴交于点 $(x_3,\ 0)$，求证：

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}.$$

26. 抛物线弧 $x^2=12y$ 上的两个端点 A、B 的横坐标分别是 -6 和 12，在弧上求一点 P，使$\triangle PAB$ 有最大的面积，并求出这个最大面积.

27. 过抛物线 $y^2=2px$ 的顶点作互相垂直的两弦，交抛物线于两点，求这两点连线中点的轨迹方程.

28. 设抛物线 $y^2=4ax\,(a>0)$ 的两切线相交成 θ 角（θ 是常数），求角顶点的轨迹方程.

29. 设 A，F 分别是抛物线的顶点与焦点，M 是抛物线上任意一点，过点 M 作抛物线准线的垂线，垂足为 Q，直线 AM 与 FQ 相交于 R，当 M 在抛物线上运动时，求点 R 的轨迹.

30. 如果从一动点到一条给定的抛物线 $y^2=2px$ 可以作两条互相垂直的此抛物线的法线，求此动点的轨迹.

31. 长度为 $L\geqslant 1$ 的直线段，其两端在抛物线 $y=x^2$ 上移动，设这一线段的中点为 M，求 M 点到 x 轴距离最短时的M 点的坐标.

32. 当 k 为何值时，直线 $kx-y+k=0$，与曲线 $y^2=4x$ 相交、相切、不相交？相切时，求出切点坐标.

§2 椭　圆

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">项　目</th><th>内　容</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td rowspan="4">从曲线到方程</td><td colspan="2">定　义</td><td>与两定点的距离之和等于定量的点的轨迹叫做椭圆</td><td>定点——焦点；定量——2a 动点形成轨迹.</td></tr>
<tr><td colspan="2">几何条件方　程</td><td>$|MF_1|+|MF_2|=2a$</td><td>$M(x,y)$——动点；F_1、F_2——焦点.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">标准方程</td><td>(一)</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；$(a>b>0)$.
（图 2—19）</td><td>$F_1(-C,0)$；$F_2(C,0)$.
a—长半轴；b—短半轴；
$C=\sqrt{a^2-b^2}$.</td></tr>
<tr><td>(二)</td><td>$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$；$(a>b>0)$.
（图 2—20）</td><td>$F_1(0,-C)$，$F_2(0,C)$.
a—长半轴；b—短半轴；
$C=\sqrt{a^2-b^2}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">从方程到曲线</td><td rowspan="3">就标准方程(一)言</td><td>范围</td><td>当 $-a\leqslant x\leqslant a$ 时，y 有确定的对应值. 且值域为 $-b\leqslant y\leqslant b$.</td><td>顶点—$A(-a,0)$；$A'(a,0)$；$B(0,-b)$；$B(0,b)$.</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td>若 (x,y) 满足方程，则 $(x,-y)$，$(-x,y)$ 并 $(-x,-y)$ 亦满足方程</td><td>椭圆有两对称轴，X 轴与 Y 轴（其一为焦点轴），且以原点中心对称.</td></tr>
<tr><td>增减性</td><td>若 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant a$，则 $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}>\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_2^2}$；
$-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}<-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_2^2}$.</td><td>在第Ⅰ、Ⅲ象限，$y$ 随着 x 增大而减小；
在第Ⅱ，Ⅳ象限，y 随着 x 增大而增大.</td></tr>
</table>

	项 目	内 容	说 明
圆锥曲线	离心率	$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<1$	
	圆锥曲线的椭圆定义	离心率 $e<1$ 的圆锥曲线叫椭圆	就标准方程一言：左准线为 $x=-\frac{a}{e}$ 右准线为 $x=\frac{a}{e}$．椭圆上任一点到右（左）焦点的距离与到右（左）准线的距离之比等于常量e.

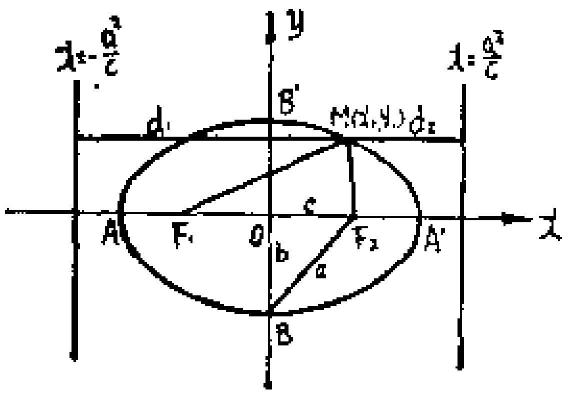


图 2—19

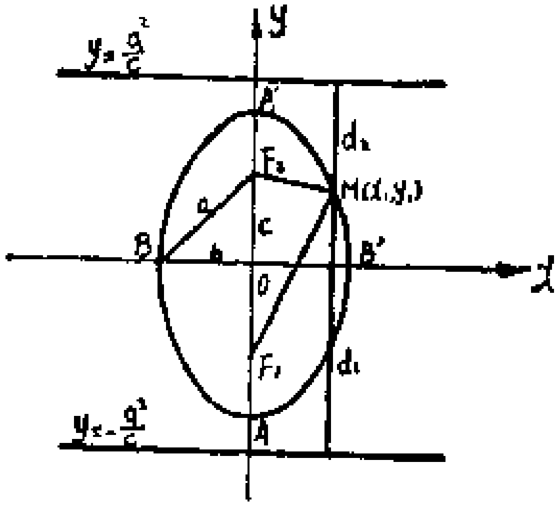


图 2—20

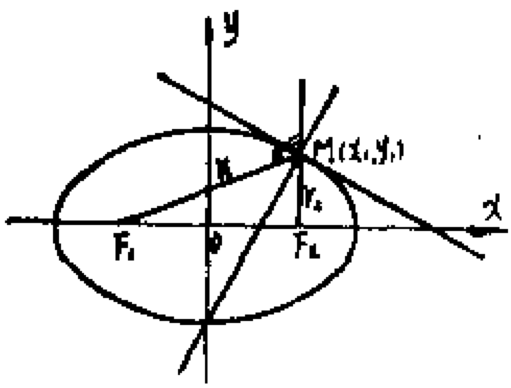


图 2—21

椭圆的切线和法线（图2—21）：

设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad (a>b>0)$$

则过切点 $M(x_1, y_1)$ 的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1;$$

过 $M(x_1, y_1)$ 点的法线方程为

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1);$$

以斜率为 k 的切线方程为

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2 + b^2} \text{ 和 } y = kx - \sqrt{a^2k^2 + b^2}.$$

椭圆的法线和切线分别为过切点处两焦点半径(即 MF_1 和 MF_2)的内角与外角的平分线.

椭圆的直径和共轭直径:

过椭圆中心的弦叫做椭圆的直径. 与椭圆的一条直径平行的各弦中点的轨迹也是一条直径，叫做该直径的共轭直径，若用 k 和 k^1 表示两共轭直径的斜率，则 $kk^1 = -\frac{b^2}{a^2}$.

二、例　　题

例 1 设椭圆的中心为坐标原点，它在 x 轴上的一个焦点与短轴两端点连成 60° 角，两准线的距离等于 $8\sqrt{3}$，求椭圆方程.

分析 由题设可知，椭圆的长，短轴分别在 x，y 轴上(图 2—22)．求 a，b 有如下两个条件:

1) ΔBAF 是等边三角形，即 $a = 2b$;

2) 两准线的距离等于 $8\sqrt{3}$，即

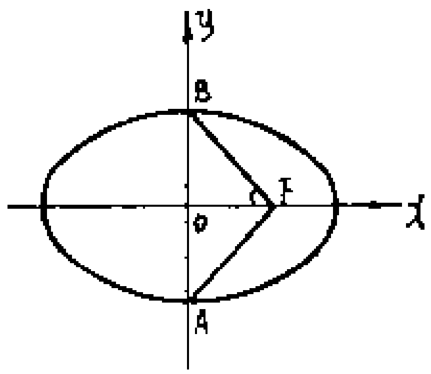


图 2—22

$$\frac{2a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = 8\sqrt{3}.$$

因此，椭圆的长半轴和短半轴可以求出.

解 因为椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，所以椭圆的

长轴和短轴分别在 x 轴和 y 轴上．于是可设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

因椭圆的右焦点 $F(c,\ 0)$ 与短轴两端点 A，B 连成 60° 角（图 2—22），即 $\angle AFB=60^\circ$、而 $AF=BF=a$，故 ΔAFB 是等边三角形．于是

$$a=2b \qquad ①$$

又两准线的距离等于 $8\sqrt{3}$，故

$$\frac{2a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=8\sqrt{3}. \qquad ②$$

联立①和②两个方程，解之得

$$a=6,\ b=3.$$

因此，所求的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1.$$

例 2　一椭圆切于直线 $x+y-5=0$ 和 $x-4y-10=0$，且以两坐标轴为对称轴，求椭圆的方程．

分析　依题意可知椭圆的方程是标准型方程，但无法判断其长轴在哪条坐标轴上，故设其方程为一般形式：$Ax^2+By^2=1$．如果已知的两切线分别与所设的椭圆相切于 $P(x_1,\ y_1)$ 和 $Q(x_2,\ y_2)$，图 2—23，则分别过 P、Q 两点的切线：

$$Ax_1x+By_1y=1 \quad 和 \ Ax_2x+By_2y=1$$

应分别与两条已知的切线重合．利用两直线重合的充要条件，即可求出 A 和 B 的值．

解　依题意设椭圆的方程为

$$Ax^2+By^2=1. \qquad (A>0,\ B>0)$$

设直线 $x+y-5=0$ 和椭圆切于点 $P(x_1, y_1)$，$x-4y-10=0$ 和椭圆切于点 $Q(x_2, y_2)$，则过 P，Q 点的切线分别是

$$Ax_1x+By_1y=1, \qquad ①$$

和

$$Ax_2x+By_2y=1. \qquad ②$$

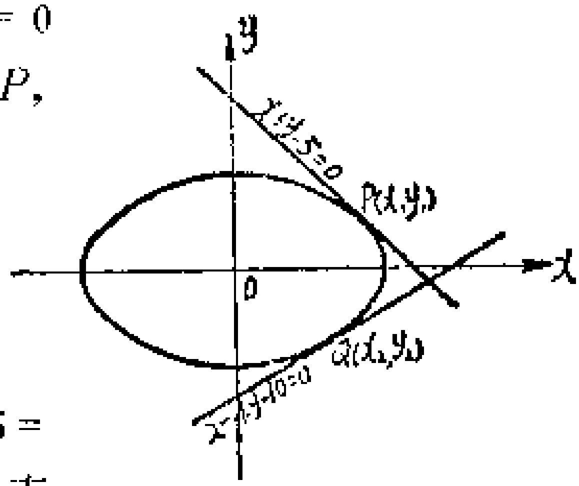


图 2—23

因为①和②分别与 $x+y-5=0$ 和 $x-4y-10=0$ 表示同一条直线，故

$$\frac{Ax_1}{1}=\frac{By_1}{1}=\frac{-1}{-5},$$

$$\frac{Ax_2}{1}=\frac{By_2}{-4}=\frac{-1}{-10}.$$

由此得

$$x_1=\frac{1}{5A}, \quad y_1=\frac{1}{5B}, \quad x_2=\frac{1}{10A}, \quad y_2=\frac{-2}{5B}$$

又 $x_1+y_1-5=0$，$x_2-4y_2-10=0$，故

$$\frac{1}{5A}+\frac{1}{5B}-5=0, \quad \frac{1}{10A}+\frac{8}{5B}-10=0.$$

即

$$\begin{cases}A+B-25AB=0, \\ 16A+B-100AB=0.\end{cases}$$

由此求得

$$A=\frac{1}{20}, \quad B=\frac{1}{5}.$$

因此，所求的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1.$$

〔附注〕 求椭圆方程一般包括如下三步：

第一步：依题意设方程（$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，或 $Ax^2+By^2=1$，或用椭圆的定义）；

第二步：利用已知条件，建立关于 a，b（或 A，B）的方程；

第三步：解上述方程，求出 a、b（或 A，B），并将所求的 a，b（或 A，B）代入所设方程．

如果椭圆的两轴与坐标轴重合，但又无法判明长轴在哪条坐标轴上，则必须设其方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ 和 } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \qquad ①$$

或设为一般形式

$$Ax^2+By^2=1. \qquad ②$$

当已知条件是椭圆的两轴之间的关系时，则用①式为好．当已知条件是椭圆上的一些点时，则用②式较为方便．

例 3 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ 上的在第一象限内的点，它与两焦点的连线互相垂直，求此点到椭圆两准线的距离．

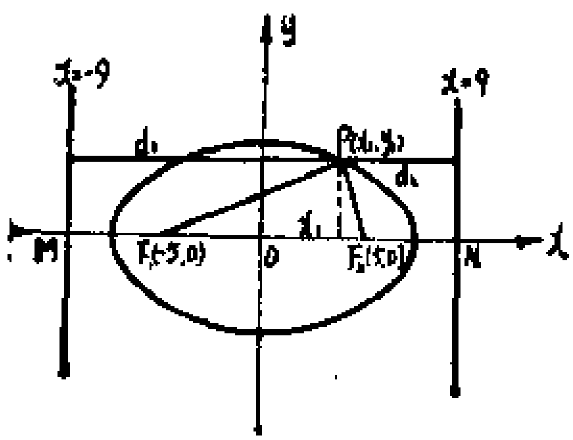


图 2—24

分析 如图 2—24．因 $|PF_1|:d_1=e$（或 $d_1=|OM|+x_1$），故求 d_1 必须先求出 P 点坐标．又 P 点在椭圆上，且有 $K_{PF_1}\cdot K_{PF_2}=-1$，故 P 点坐标可以由此求出．

解 在椭圆中，因

$a^2=45$，$b^2=20$，

$c=\sqrt{45-20}=5$，

$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{\sqrt{45}}=\frac{\sqrt{5}}{3},\quad x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{45}{5}=\pm 9,$$

故：

椭圆的左焦点和右焦点分别是

$$F_1(-5,\ 0)\quad 和\ F_2(5,\ 0)；$$

椭圆的左准线和右准线分别是

$$x=-9\quad 和\ x=9.$$

设 P 点坐标为 $(x_1,\ y_1)$. 因 $PF_1\perp PF_2$，故

$$\frac{y_1}{x_1+5}\cdot\frac{y_1}{x_1-5}=-1,$$

即

$$y_1^2=25-x_1^2. \qquad ①$$

又

$$\frac{x_1^2}{45}+\frac{y_1^2}{20}=1. \qquad ②$$

联立①和②两个方程，解之得

$$\begin{cases}x_1=3\\ y_1=4,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-3\\ y_1=-4,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-3\\ y_1=4,\end{cases}\begin{cases}x_1=3\\ y_1=-4.\end{cases}$$

因为 P 点在第一象限，故 P 点坐标为(3, 4).

$\therefore\quad |PF_1|=\sqrt{(3+5)^2+4^2}=4\sqrt{5}.$

设 P 点到左准线的距离为 d_1，到右准线的距离为 d_2.

$$\because\qquad \frac{|PF_1|}{d_1}=e,$$

$$\therefore\quad d_1=\frac{|PF_1|}{e}=4\sqrt{5}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=12.$$

(或用 $d_1=|OM|+x_1=9+3=12$)

$$\therefore\quad d_2=\frac{2a^2}{c}-d_1=18-12=6.$$

因此，P 点到左准线的距离等于 12，到右准线的距离等于 6.

例 4 经过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的一个焦点$F$，任意引两条互相垂直的弦$AB$和$ED$，求证：

$$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}+\frac{1}{FE}+\frac{1}{FD}=\text{定值}.$$

分析 因为椭圆上的点到焦点的距离与到准线的距离之比是一个定值e，因此问题转化为证明A、B、E、D各点到准线的距离的倒数之和为定值.

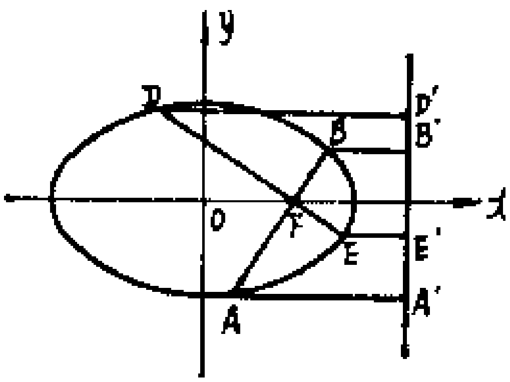


图 2—25

证明 设F为椭圆的右焦点$(C, 0)$（图 2—25）. A，B，E，D到右准线的距离分别为AA'，BB'，EE'，DD'. $\angle BFx=\beta$.

$$\because \quad \frac{BF}{BB'}=\frac{EF}{EE'}=\frac{AF}{AA'}=\frac{DF}{DD'}=\frac{c}{a}\text{（离心率）},$$

$$\therefore \quad BF=\frac{c}{a}BB',\quad EF=\frac{c}{a}EE',$$

$$AF=\frac{c}{a}AA',\quad DF=\frac{c}{a}DD'. \qquad ①$$

又椭圆的右准线是$x=\frac{a^2}{c}$，故

$$BB'+BF\cos\beta=\frac{a^2}{c}-C=\frac{b^2}{c};\quad (c^2=a^2-b^2).$$

$$DD'+DF\cos(\beta+90°)=\frac{b^2}{c};$$

$$AA'+AF\cos(\beta+180°)=\frac{b^2}{c};$$

$$EE' + EF\cos(\beta + 270°) = \frac{b^2}{c}.$$

将①式各值分别代入上式，化简后得

$$\frac{1}{BB'} = \frac{c}{b^2}\left(1 + \frac{c}{a}\cos\beta\right), \quad \frac{1}{DD'} = \frac{c}{b^2}\left(1 - \frac{c}{a}\sin\beta\right)$$

$$\frac{1}{AA'} = \frac{c}{b^2}\left(1 - \frac{c}{a}\cos\beta\right), \quad \frac{1}{EE'} = \frac{c}{b^2}\left(1 + \frac{c}{a}\sin\beta\right).$$

因此

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} + \frac{1}{FE} + \frac{1}{FD} = \frac{a}{c}$$

$$\left(\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{EE'} + \frac{1}{DD'}\right)$$

$$= \frac{a}{c}\left[\frac{c}{b^2}\left(1 - \frac{c}{a}\cos\beta\right) + \frac{c}{b^2}\left(1 + \frac{c}{a}\cos\beta\right)\right.$$

$$\left. + \frac{c}{b^2}\left(1 + \frac{c}{a}\sin\beta\right) + \frac{c}{b^2}\left(1 - \frac{c}{a}\sin\beta\right)\right]$$

$$= \frac{a}{c}\cdot\frac{4c}{b^2} = \frac{4a}{b^2}\text{（定值）}.$$

〔附注〕 本例可作如下推广：

过椭圆的一个焦点 F，引 n 条弦 A_1B_1， A_2B_2， ……A_nB_n $(n \geqslant 2)$，使相邻两条弦的夹角都等于 $\frac{\pi}{n}$，则

$$\frac{1}{A_1F} + \frac{1}{A_2F} + \cdots\cdots + \frac{1}{A_nF} + \frac{1}{B_1F}$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{1}{B_nF} = \frac{2na}{b^2}.$$

请读者自己证明.

例 5 椭圆上任一切线与长轴两端点的切线相交于 M 和 N，求证 M，N 和椭圆的两个焦点在同一圆周上.

分析 如图 2—26. 因为 F_1，F_2 在切线 MN 的同傍，故

证明 M，F_1，F_2，N 共圆，就是证明 $\angle MF_1N=\angle MF_2N$。为此，又必须从确定 MF_1，F_1N，MF_2 和 NF_2 的斜率着手。

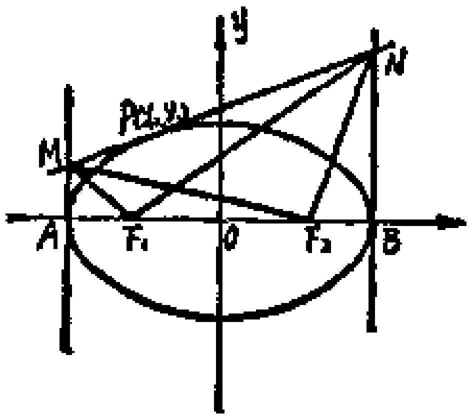


图 2—26

证明 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$P(x_1,\ y_1)$是椭圆上的任意一点(图 2—26)，则过 P 点的切线方程是

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1. \qquad ①$$

过长轴的两端 A，B 的切线分别是

$$x=-a,\quad x=a. \qquad ②$$

联立①和②，分别求出两切线的交点坐标：

$$M\left(-a,\ \frac{b^2(a+x_1)}{ay_1}\right),\quad N\left(a,\ \frac{b^2(a-x_1)}{ay_1}\right).$$

又椭圆的两焦点坐标为 $F_1(-c,\ 0)$ 和 $F_2(c,\ 0)$，故 F_1M 和 F_1N 的斜率分别是

$$K_{F_1M}=\left[\frac{b^2(a+x_1)}{ay_1}-0\right]\div(-a+c)=\frac{b^2(a+x_1)}{ay_1(c-a)},$$

$$K_{F_1N}=\left[\frac{b^2(a-x_1)}{ay_1}-0\right]\div(a+c)=\frac{b^2(a-x_1)}{ay_1(c+a)}.$$

$$\because\quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\quad c^2=a^2-b^2,$$

$$\therefore\quad K_{F_1M}\cdot K_{F_1N}=\frac{b^2(a+x)}{ay_1(c-a)}\cdot\frac{b^2(a-x_1)}{ay_1(c+a)}$$

$$=\frac{b^4(a^2-x_1^2)}{a^2y_1^2(c^2-a^2)}=\frac{b^4(a^2-x_1^2)}{-a^2b^2y_1^2}$$

$$=-\frac{b^2(a^2-x_1^2)}{a^2y_1^2}=-\frac{b^2(a^2-x_1^2)}{b^2(a^2-x_1^2)}=-1.$$

故 $\qquad F_1M\perp F_1N$.

同理　$F_1M \perp F_2N$.

因此，$\angle MF_1N = \angle MF_2N = 90°$，$F_1$ 和 F_2 在以 MN 为直径的圆周上，即 M、F_1、F_2、N 四点共圆.

例 6　设 BC 是平行于椭圆 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(a>b)$ 长轴 AA' 的弦，M 是 BC 与短轴的交点，试求 $A'B$ 和 AM 的交点 P 的轨迹方程.

分析　图 2—27. 求 $P(x', y')$ 点的轨迹就是求 x' 和 y' 所满足的方程. 显然，P 点的坐标与 B 点的坐标 x_0 和 y_0 有关，因此，可以求出 x_0 和 y_0 分别关于 x' 和 y' 的关系式：$x_0 = f(x', y')$，$y_0 = g(x', y')$，而 B 点坐标满足椭圆方程，于是将坐标 $(f(x', y'), g(x', y'))$ 代入椭圆方程，就可得 P 点的轨迹方程.

解　图 2—27. 设 B 点坐标为 (x_0, y_0)，则图中各点的坐标是

$M(0, y_0)$，$A(-a, 0)$，

$A'(a, 0)$.

AM 和 $A'B$ 的直线方程分别是

$$y = \frac{y_0}{a}(x + a) \text{ 和 } y = \frac{y_0}{x_0 - a}(x - a).$$

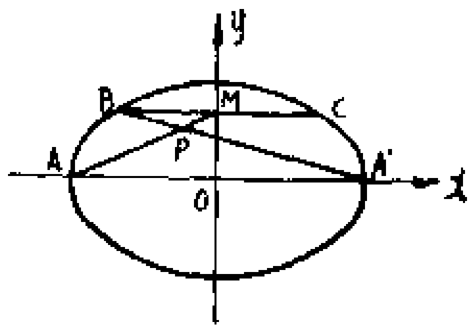


图 2—27

设这两直线交点 P 的坐标为 (x', y')，则

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y_0}{a}(x' + a), \\ y' = \dfrac{y_0}{x_0 - a}(x' - a). \end{cases}$$

由此求出交点 P 的坐标 x'，y' 与 B 点的坐标 x_0，y_0 的关

系式：

$$x_0=\frac{2ax'}{x'+a},\quad y_0=\frac{ay'}{x'+a}.$$

又 B 点在椭圆上，即

$$b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2.$$

故

$$b^2\left(\frac{2ax'}{x'+a}\right)^2+a^2\left(\frac{ay'}{x'+a}\right)^2=a^2b^2.$$

将坐标(x', y')换成一般坐标(x, y)，化简后得 P 点的轨迹方程

$$4b^2x^2+a^2y^2=b^2(x+a)^2.$$

即
$$3b^2x^2+a^2y^2-2ab^2x-a^2b^2=0.$$

例 7 设 P 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的一点，过 P 点的法线交其长轴于 G，求 PG 中点的轨迹.

解 设 P 点坐标为(x_1, y_1)（图 2—28），则过 P 点的切线方程为

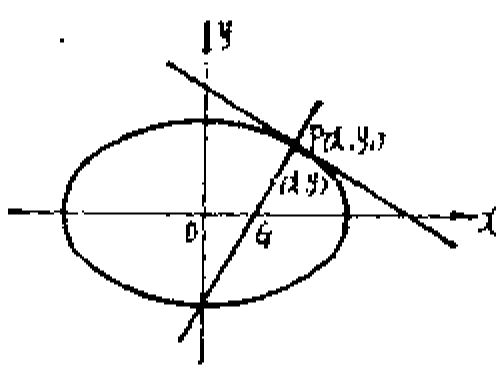


图 2—28

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

切线的斜率为$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

因 P 点处的法线与切线垂直，故法线为

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

令 $y=0$，

$$得\ x=\frac{(a^2-b^2)x_1}{a^2}.$$

因此，法线与长轴的交点坐标为

$$G\left(\frac{(a^2-b^2)x_1}{a^2},\ 0\right).$$

设 PG 的中点坐标为 (x, y)，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left[x_1+\dfrac{(a^2-b^2)x_1}{a^2}\right], \\ y=\dfrac{1}{2}y_1. \end{cases}$$

用中点坐标 x, y 表示 x_1, y_1，则由此可得

$$x_1=\frac{2a^2x}{2a^2-b^2},\quad y_1=2y.$$

又
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

故所求的轨迹方程为

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{2a^2x}{2a^2-b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}(2y)^2=1,$$

即

$$\frac{4a^2x^2}{(2a^2-b^2)^2}+\frac{4y^2}{b^2}=1.\ （椭圆）$$

例 8 从椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 外一点作椭圆的两条切线，若两切线的夹角为直角，求这点的轨迹.

解法一 用直接法求轨迹：

设 $P(x_0, y_0)$ 为所求轨迹上的一点（图 2—29），过它作椭圆的两条互相垂直的切线，切点分别为 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P(x_2, y_2)$，则

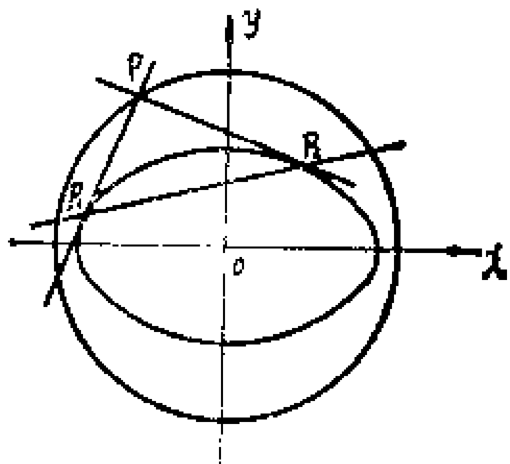


图 2—29

$$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=-1,$$

即

$$y_0^2 - y_0(y_1 + y_2) + y_1y_2 + x_0^2 - x_0(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0. \qquad ①$$

其中 x_1、x_2； y_1、y_2 分别是直线 P_1P_2 与椭圆交点的横坐标和纵坐标.

因为切线 PP_1 和 PP_2:

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1 \text{ 和 } \frac{x_2x}{a^2} + \frac{y_2y}{b^2} = 1$$

都经过 $P(x_0, y_0)$ 点，所以

$$\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} = 1, \quad \frac{x_0x_2}{a^2} + \frac{y_0y_2}{b^2} = 1.$$

由此可见，两切点的坐标满足方程

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \qquad ②$$

因此，方程②是过切点 P_1 和 P_2 的直线 P_1P_2 的方程.

由(2)和椭圆方程联立，消去 x，得

$$(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)y^2 - 2a^2b^2y_0y + b^4(a^2 - x_0^2) = 0; \qquad ③$$

消去 y，得

$$(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)x^2 - 2a^2b^2x_0x + a^4(b^2 - y_0^2) = 0. \qquad ④$$

因 y_1、y_2 和 x_1、x_2 分别是方程③和④的两根，故

$$y_1 + y_2 = \frac{2a^2b^2y_0}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}, \quad y_1y_2 = \frac{b^4(a^2 - x_0^2)}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2};$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2b^2x_0}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^4(b^2 - y_0^2)}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}.$$

代入①式，并将坐标(x_0, y_0)换成一般的坐标(x, y)，整理化简后得所求的轨迹方程

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

因此，所求点的轨迹是一个原点为圆心，半径等于 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的圆.

解法二 用间接法求轨迹：

设 $P(x_0, y_0)$ 为所求轨迹上的一点．过 P 点向椭圆所引切线的斜率为 k，则切线方程为

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

即

$$y=kx-kx_0+y_0.$$

代入椭圆方程，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx-kx_0+y_0)^2}{b^2}=1.$$

即

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2k(y_0-kx_0)a^2x+a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2=0.$$

因直线和椭圆相切，故判别式为 0，即

$$\Delta=[2k(y_0-kx_0)a^2]^2-4(b^2+a^2k^2)$$
$$[a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2]=0.$$

即

$$(a^2-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0.$$

设 k_1 和 k_2 是此方程的两根．则 k_1 和 k_2 就是过 P 点所引两切线的斜率．因 P 点处的两切线互相垂直，即 $k_1k_2=-1$，故

$$k_1k_2=\frac{b^2-y_0^2}{a^2-x_0^2}=-1.$$

由此得轨迹方程

$$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2.$$

将动点坐标 (x_0, y_0) 换成一般坐标 (x, y)，得到所求的轨迹方程

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

解法三 参数法．

设 $P(x, y)$ 为所求轨迹上的点，过此点的斜率为 k 和

$-\frac{1}{k}$，则 P 点坐标满足方程

$$y=kx+\sqrt{a^2k^2+b^2}\text{，（或 }y=kx-\sqrt{a^2k^2+b^2}\text{）}$$

和

$$y=-\frac{1}{k}x+\sqrt{\frac{a^2}{k^2}+b^2}\text{．（或 }y=-\frac{1}{k}x-\sqrt{\frac{a^2}{k^2}+b^2}\text{）}$$

即

$$y-kx=\sqrt{a^2k^2+b^2}\text{，（或 }y-kx=-\sqrt{a^2k^2+b^2}\text{）} \quad (1)$$

和 $$ky+x=\sqrt{a^2+b^2k^2}\text{，（或 }ky+x=-\sqrt{a^2+b^2k^2}\text{）．} \quad (2)$$

将①、②两式两边平方后相加，得所求的轨迹方程 $x^2+y^2=a^2+b^2$．

例 9 在直线 L：$x-y+9=0$ 上任意取一点 M，经过 M 点且以椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为焦点作椭圆，问当 M 在何处时所作的椭圆的长轴最短，并求出具有最短长轴的椭圆方程．

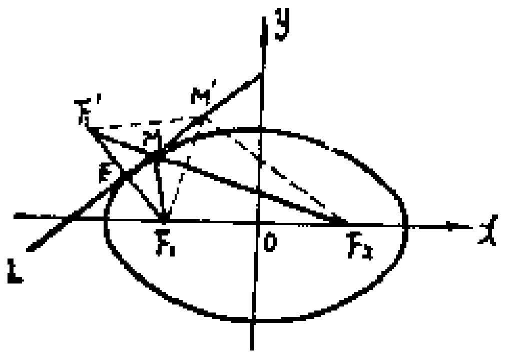


图 2—30

分析 图 2—30．因为长轴 $2a=|MF_1|+|MF_2|$，所以问题成了：在直线 L 上求一点，使它到两定点 F_1，F_2 的距离之和最短．作 F_1 关于 L 的对称点 F_1'，连 F_1' 与 F_2 交 L 于 M，则 M 为所求的点．

解 在已知椭圆中，

$$c=\sqrt{12-3}=3.$$

因此两焦点是 $F_1(-3,\ 0)$ 和 $F_2(3,\ 0)$，且 F_1 和 F_2 在直线 L 的同傍（图 2—30）．

经过焦点 F_1 且和 L 垂直的直线方程为

$$x+y+3=0.$$

此方程与 $x-y+9=0$ 联立，求出两直线的交点坐标 $E(-6,\ 3)$. 设 F_1' 是 F_1 关于 L 的对称点，则 L 是线段 F_1F_1' 的中垂线，E 是 F_1F_1' 的中点. 因此，F_1' 的坐标是 $(-9,\ 6)$.

经过 F_1' 和 F_2 的直线方程是

$$y=\frac{6-0}{-9-3}(x-3),$$

即

$$x+2y-3=0.$$

此方程与方程 $x-y+9=0$ 联立，求出交点 M 的坐标 $(-5,\ 4)$，则当椭圆经过直线 L 上的点 $(-5,\ 4)$ 时长轴最短.

事实上，如果有另一椭圆经过 L 上的另一点，M'，则此椭圆的长轴等于 $F_1M'+F_2M'$. 因为

$$\begin{aligned}F_1M'+F_2M'&=F_1'M'+M'F_2\\&>F_1'M+MF_2=F_1M+F_2M,\end{aligned}$$

所以此椭圆的长轴较过 M 点的椭圆长轴长.

因 $\quad 2a=F_1M+F_2M=\sqrt{(-5+3)^2+4^2}$
$$+\sqrt{(-5-3)^2+4^2}=6\sqrt{5},$$

故 $\qquad a^2=45.$

又 $\quad c^2=9$，故 $\quad b^2=45-9=36.$

因此，长轴最短的椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1.$$

（不难验证：L 是此椭圆的切线，$(-5,\ 4)$ 是切点）

例 10 于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一双共轭直径 AA'，BB' 的端点各作一切线成一四边形 $MNPQ$（图 2—31），设 AA' 的

方程为 $y=mx$；

1）求证：$MNPQ$ 是一个平行四边形；

2）求 $\square MNPQ$ 的面积.

分析 依题意即证 $QP \parallel MN$ 和 $MQ \parallel NP$，也就是证 QP 与 MN、MQ 与 NP 的斜率分别相等. 因此，要从确定各条切线着手. 为此，又必须先求出各切点的坐标.

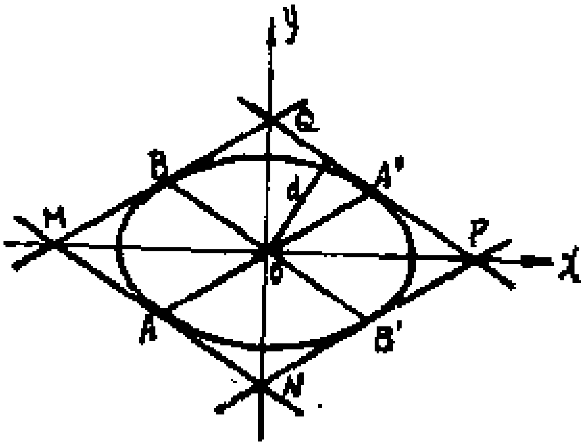


图 2—31

解 1）将 $y=mx$ 代入椭圆方程，得

$$b^2x^2+a^2(mx)^2=a^2b^2.$$

由此求得

$$x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}.$$

因此，A、A' 的坐标分别是

$$A\left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}},\ -\frac{abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right),$$

$$A'\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}},\ \frac{abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right).$$

过 A 点和 A' 点的切线方程分别是

$$MN:\quad b^2\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right)x+a^2\left(\frac{-abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right)y=a^2b^2,$$

即

$$b^2x+a^2my+ab\sqrt{b^2+a^2m^2}=0;$$

$$QP:\quad b^2\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right)x+a^2\left(\frac{abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right)y=a^2b^2,$$

即

$$b^2x+a^2my-ab\sqrt{b^2+a^2m^2}=0.$$

由此可以看出，MN 和 QP 的斜率相等，故

$$MN \parallel QP.$$

因为 BB' 是 AA' 的共轭直径，故 BB' 的斜率为 $-\frac{b^2}{a^2m}$，因此，BB' 的方程为

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

同理，求出 B，B' 的坐标：

$$B\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right),$$

$$B'\left(\frac{a^2m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}},\ \frac{-b^2}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right).$$

MQ：$mx-y+\sqrt{b^2+a^2m^2}=0$，

NP：$mx-y-\sqrt{b^2+a^2m^2}=0$.

$\therefore\quad MQ\parallel NP.$

因此，$MNPQ$ 是平行四边形.

2）由上面的各直线方程可知：

$$QP\parallel BB'\parallel MN,\ MQ\parallel AA'\parallel NP.$$

因为椭圆是中心对称图形，故 $AO=OA'=NB'=B'P$. 因此，$\square MNPQ=2\square BB'PQ$.

由原点 $O(0,0)$ 到 QP 的距离，即 BB' 与 QP 之间的距离等于 $d=\left|\frac{-ab\sqrt{b^2+a^2m^2}}{\sqrt{b^4+a^4m^2}}\right|=\frac{ab\sqrt{b^2+a^2m^2}}{\sqrt{b^4+a^4m^2}}$，

又 $|BB'|=2|OB|=2\sqrt{\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right)^2+\left(\frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right)^2}$

$$=\frac{2\sqrt{a^4m^2+b^4}}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}.$$

因 $\square BB'PQ$ 面积 $=d\cdot|BB'|$，

故 $\square MNPQ$ 的面积

$$S=2d\,|BB'|=2\cdot\frac{ab\sqrt{b^2+a^2m^2}}{\sqrt{b^4+a^4m^2}}\cdot\frac{2\sqrt{a^4m^2+b^4}}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}$$
$$=4ab.$$

习 题 二

1．求下列椭圆的长轴和短轴的长，焦距，离心率，各个顶点和焦点坐标，准线方程：

(1) $25x^2+4y^2-100=0$；

(2) $x^2+4y^2-1=0$.

2．求两轴在坐标轴上，且适合下列条件的椭圆方程：

(1) 离心率是 0.8，焦距是 16，焦点在 y 轴上；

(2) 焦点在 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，一条准线是 $x=4.5$；

(3) 长轴和短轴之和等于 20，两焦点间的距离等于 $4\sqrt{5}$；

(4) 经过 $P_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$，$P_2\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$ 两点；

(5) 长轴的长是短轴长的 5 倍，且经过 $P(7,\ 2)$ 点.

3．已知椭圆方程 $5x^2+y^2=1$，求：

(1) 过点 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ 的切线方程；

(2) 过点 $A(-2,\ -1)$ 的切线方程；

(3) 和直线 $2x+5y-3=0$ 垂直的切线方程.

4．设 $P(x_0,\ y_0)$ 为椭圆 $A^2x^2+B^2y^2=1$ 外一点，由 P 点向椭圆引两切线，切点为 M、N，求证过 M、N 两点的直线方程为

$$A^2x_0x+B^2y_0y=1.$$

5．已知椭圆的焦距等于短轴和长轴端点间的距离，求这椭圆的离心率.

6．一九七五年十一月二十六日，我国成功地发射了一颗已

按原计划返回地面的人造地球卫星，它的运行轨道是以地球中心为一个焦点的椭圆，近地点离地面 173 公里，远地点离地面 483 公里，地球平均半径 6371 公里，求轨道方程.

7. 如图 2—32，椭圆的长轴在 x 轴上，F 是椭圆的左焦点，A，B 是椭圆的两个端点，P 点在椭圆上，且 $PF\perp FA$：

(1) 若 $|PF|=\frac{1}{2}|OB|$，且 $|OA|=a$，试求椭圆的方程和离心率；

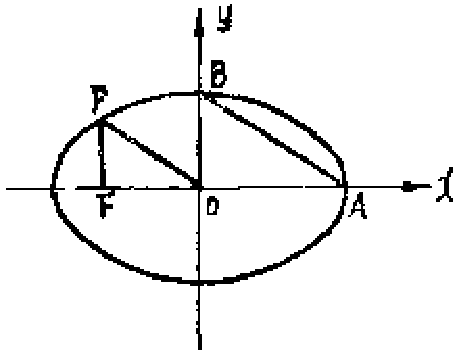


图 2—32

(2) 若 $PO\parallel BA$，求椭圆的离心率.

8. 根据下列条件，求以原点为中心，两轴都在坐标轴上的椭圆方程：

(1) 经过点 $(1,\ 1)$，并且和直线 $4x+y=5$ 相切；

(2) 两切线为 $3x-2y-20=0$ 和 $x+6y-20=0$；

(3) 焦点为 $F_1(-3,\ 0)$ 和 $F_2(3,\ 0)$，并且与直线 $x+y-5=0$ 相切.

9. 根据下列所给的条件，求椭圆方程：

(1) 焦点在点 $(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ 处，并且通过点 $(5,\ 5)$；

(2) 短轴两端的坐标分别是 $(-2,\ 3)$ 和 $(-2,\ -1)$，焦距为 $2\sqrt{5}$.

10. 一椭圆切 y 轴于点 $(0,\ 3)$，且与 x 轴交于 $A(3,\ 0)$，$B(7,\ 0)$ 两点. 如果它的轴与坐标轴平行，求椭圆的方程.

11. 过椭圆的焦点，作长轴的垂线交椭圆于两点，若两交点的距离等于 10，且短轴和焦距相等. 求中心在原点、焦点在坐标轴上的椭圆方程.

12. 已知椭圆的中心在原点，两轴都在坐标轴上，离心率 $e=0.8$，一条准线方程为 $4y+25=0$，求内接于这个椭圆的最大矩形的面积.

13. 设 r_1 和 r_2 是椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上的两条互相垂直的半径，求证：$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

14. 设椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的中心为 0，两条共轭直径与右准线相交于 M、N 两点，求证 ΔMON 的垂心必为椭圆的右焦点.

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到其左焦点的距离为 15，求 P 点到此椭圆两准线的距离.

16. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上有 n 个点（$n>1$），相邻两点与左焦点连线所成的夹角都相等，证明：这 n 个点到左准线的距离的倒数之和等于 $\frac{nc}{b^2}$、其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

17. 求椭圆 $x^2+4y^2-2x-12y+6=0$ 中，以点 P (2, 2) 为中点的弦的直线方程.

18. 设在椭圆上任意一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线与长轴的两端 A_1 和 A_2 上的切线相交于 Q_1 和 Q_2，求证：$|A_1Q_1|$ 和 $|A_2Q_2|$ 的积是一个定值.

19. 证明：如果椭圆上任意一点的法线都通过中心，则此椭圆是一个圆.

20. 从点 $P(10, 0)$ 向椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 作两切线，求以两切点和 P 点为顶点的三角形的面积.

21. 证明：自圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上任一点向椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 所引的两切线互相垂直.

22. 设 $P(x_1, y_1)$ 为椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上的一点，过 P 点的法线与 x 轴交于 G，F_1、F_2 是椭圆的左、右焦点，求证 $a^2PG^2=b^2\cdot|F_1P|\cdot|F_2P|$.

23. 在椭圆的短轴上取二点 P、Q，使 $PO=OQ=OF$. O 为椭圆的中心，F 为焦点，则自 P、Q 至椭圆的任一切线的距离的平方和为定值.

24. 在椭圆 $9x^2+4y^2=72$ 上求点，使过这点的切线与二坐标轴所围成的三角形的面积最小.

25. 有一椭圆以及以椭圆长轴为直径的圆，作垂直于长轴的直线分别交两曲线于 P、Q，通过 P、Q 分别引椭圆和圆的切线，证明它们与长轴的延长线相交于一点.

26. 自 P 点向椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 所引二切线与椭圆的长轴的倾角为 θ_1 和 θ_2，若 $\operatorname{ctg}\theta_1+\operatorname{ctg}\theta_2=m$（$m$ 是定值），求 P 点的轨迹.

27. 证明：过椭圆的一个焦点的诸弦中点的轨迹是一个椭圆，它的离心率和原椭圆的离心率相等.

28. 证明：在椭圆上取三点，若其横坐标成一等差数列，则其对应的焦点半径亦成一个等差数列.

29. 求外切于椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的正方形的边的方程.

30. 由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两焦点分别向此椭圆任一切线引垂线，垂足为 M 和 N，求证 M 和 N 必在以原点为中心 a 为半径的圆上 $(a>b)$.

31. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，求圆心在椭圆的长轴上，并和椭圆及椭圆短轴相切的圆的方程.

§3 双曲线

项目			内容	说明
从曲线到方程	定义		与两定点的距离之差等于定量的点的轨迹叫做双曲线.	定点——焦点; 定量——$2a$. 动点形成轨迹.
	几何条件方程		$\lvert MF_1\rvert-\lvert MF_2\rvert$ $=\pm 2a$	$M(x,\ y)$——动点; F_1, F_2——焦点.
	标准方程	(一)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ (图 2—33)	$F_1(-c,\ 0)$; $F_2(c,\ 0)$. a—实半轴; b—虚半轴. $c=\sqrt{a^2+b^2}$.
		(二)	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ (图 2—34)	$F_1(0,\ -c)$; $F_2(0,\ c)$ a—实半轴; b—虚半轴. $c=\sqrt{a^2+b^2}$.
从方程到曲线	就标准方程(一)言	范围	当 $-\infty<x\leqslant -a$ 及 $a\leqslant x<\infty$ 时, y 才有确定的对应值.	当 $-a<x<a$ 时, y 没有意义. 顶点—$A(-a,0)$, $A'(a,\ 0)$.
		对称性	若 $(x,\ y)$ 满足方程, 则 $(x,\ -y)$, $(-x, y)$ 和 $(-x,\ -y)$ 也满足方程.	双曲线有两对称轴, X 轴与 Y 轴 (其一为焦点轴), 且以原点为中心对称.
		增减性	若 $a\leqslant x_1<x_2<\infty$, 则 $\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}<\frac{b}{a}\sqrt{x_2^2-a^2}$, $-\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}>-\frac{b}{a}\sqrt{x_2^2-a^2}$.	在第 Ⅰ、Ⅲ 象限 y 随 x 增大而增大. 在第 Ⅱ、Ⅳ 象限, y 随 x 增大而减小.

项目			内容	说明
从方程到曲线	就标准方程(一)言	渐近性	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{b}{a}x-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right]=0.$	$y=\dfrac{b}{a}x$ 与 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 为双曲线的两渐近线.
圆锥曲线	离心率		$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}>1.$	
	圆锥曲线的双曲线定义		离心率 $e>1$ 的圆锥曲线叫双曲线.	就标准方程(一)言：左准线为 $x=-\dfrac{a}{e}$，右准线为 $x=\dfrac{a}{e}$. 双曲线上任意一点到右焦点的距离与到右准线的距离之比等于常量 e. 把"右"换成"左"可得同样的结论.

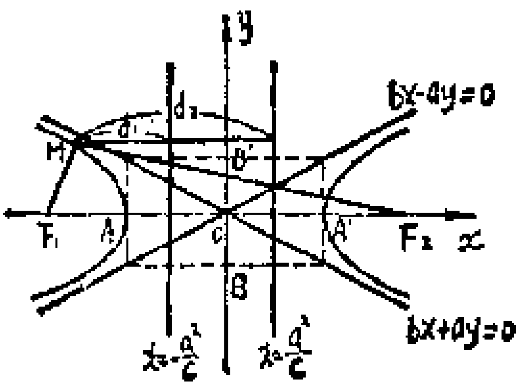


图 2—33

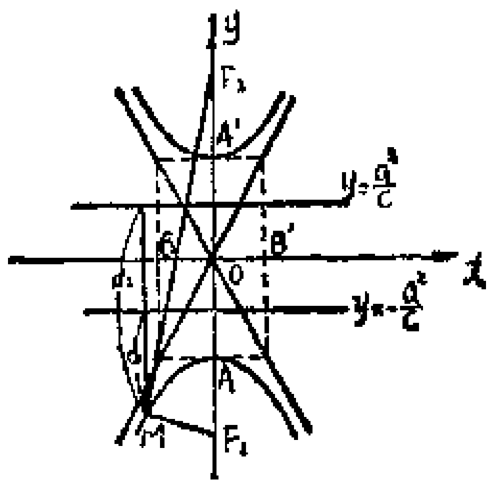


图 2—34

又 双曲线的切线和法线(图 2—35)：

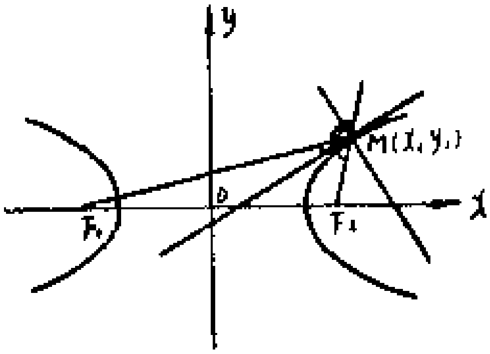


图 2—35

设双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

则过切点 $M(x_1, y_1)$ 的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

过 $M(x_1, y_1)$ 的法线方程为

$$y-y_1=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

斜率为 k $\left(|k|>\frac{b}{a}\right)$ 的切线方程为

$$y=kx+\sqrt{a^2k^2-b^2} \text{ 和 } y=kx-\sqrt{a^2k^2-b^2}.$$

双曲线的切线和法线分别为切点处两焦半径（MF_1 和 MF_2）间的内角和外角的平分线.

二、例　　题

例 1　设双曲线的渐近线是 $y=\pm\frac{1}{2}x$，它的一条切线是 $5x-6y-8=0$，求这双曲线方程.

分析　依渐近线的方程可知双曲线的方程是标准方程，又由渐近线和切线的位置关系（看本例的附注 3）可以断定双曲线的实轴在 x 轴上，于是可设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

若已知的切线与所设的双曲线相切于 $P(x_1, y_1)$ 点，则过 P 点的切线

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

应与已知的切线重合，利用两直线重合的充要条件和$a:b=1:2$，以及 P 点在已知的切线上，不难求出 a 和 b.

解 依题意可知双曲线的实轴在 x 轴上，因此所设双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

它的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

$$\therefore\quad \frac{b}{a}=\frac{1}{2}. \qquad ①$$

设已知的切线与双曲线切于点 $P(x_1,\ y_1)$，则切线方程为（如图 2—36）

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

即

$$b^2x_1x-a^2y_1y-a^2b^2=0. \qquad ②$$

因方程 $5x-6y-8=0$ 和方程②表示同一条切线，所以

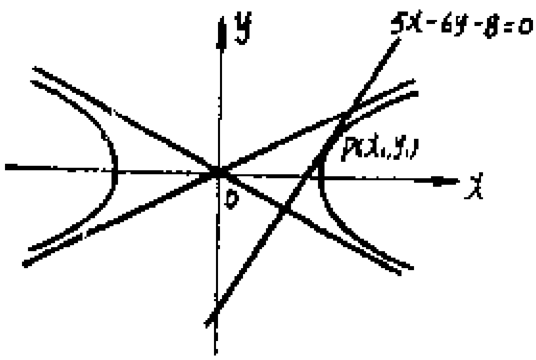


图 2—36

$$\frac{5}{b^2x_1}=\frac{-6}{-a^2y_1}=\frac{-8}{-a^2b^2}.$$

由此求得

$$x_1=\frac{5a^2}{8},\quad y_1=\frac{3b^2}{4}.$$

又 P 点在切线上，故 $5x_1-6y_1-8=0$，即

$$5\cdot\left(\frac{5a^2}{8}\right)-6\cdot\left(\frac{3b^2}{4}\right)-8=0$$

即

$$25a^2-36b^2-64=0. \qquad ③$$

联立①和③两个方程，解之得

$$a^2=4,\ b^2=1.$$

因此，所求的双曲线方程为

$$\frac{x^2}{4}-y^2=1.$$

〔附注〕 (1) 由已知的双曲线求它的渐近线，则渐近线是确定的．反之，如果已知双曲线的渐近线求双曲线，则双曲线是不确定的．例如，对于任意的正数 k，双曲线

$$\frac{x^2}{(ak)^2}-\frac{y^2}{(bk)^2}=1$$

的渐近线都是 $bx\pm ay=0$．因此，给出了渐近线方程时，还必须加上一个条件求出 k 值来，才能得到确定的双曲线方程．

(2) 由已知条件求双曲线(两轴都在坐标轴上)的方程时，首先要判明实轴的位置．如果对于给定的条件一时无法判定实轴的位置(或两种位置都可以)，则要分别考虑实轴在 x 轴和 y 轴上的两种情况，即设其方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ 或 } -\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

也可以设为一般形式 $Ax^2+By^2=1$. $(A\cdot B<0)$

(3) 设双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$；如果知道双曲线上的一点 $(x_0,\ y_0)$ 或双曲线的一条切线的斜率 k，则双曲线的实轴可以用如下的方法确定：

1) 利用两条渐近线将坐标平面分成左，右，上，下四个区域．当点 $(x_0,\ y_0)$ 在左或右的两个区域内时，实轴在 x 轴上；当点 $(x_0,\ y_0)$ 在上或下区域时，实轴在 y 轴上．

2) 当切线的斜率 k 满足条件 $k^2>\left(\frac{b}{a}\right)^2$ 时，双曲线的实轴在 x 轴上；当 $k^2<\left(\frac{b}{a}\right)^2$ 时，实轴在 y 轴上. 请读者自己证明.

例2 双曲线的两个焦点为 $F_1(-3,\ 12)$ 和 $F_2(9,\ -4)$，两条准线的距离为 0.8，求双曲线方程.

分析 由焦点坐标可知双曲线方程为非标准型. 若能求出实半轴 a，则依双曲线的定义可得其方程. 因焦距 $2C=|F_1F_2|$ 和准线间的距离都知道，故 a 可以求出.

解 因 $2C=|F_1F_2|=\sqrt{(-3-9)^2+(12+4)^2}=20$，

故 $C=10$.

又准线间的距离为 0.8，即有

$$\frac{2a^2}{10}=0.8.$$

$$\therefore\quad a=2.$$

设 $P(x,\ y)$ 为双曲线上任意一点. 依双曲线的定义，则有 $|PF_1|-|PF_2|=\pm 2a$，即

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-12)^2}-\sqrt{(x-9)^2+(y+4)^2}=\pm 4.$$

将第二个根式移到右边，两边平方，得

$$3x-4y+5=\pm\sqrt{(x-9)^2+(y+4)^2}.$$

两边再平方，整理后得双曲线方程

$$8x^2-24xy+15y^2+48x-48y-72=0.$$

例 3 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一点 P 到两焦点的距离之比为 $m:n\,(m>n)$，求 P 点到两准线和两焦点的距离.

分析 图 2—37. 利用 $|PF_1|:|PF_2|=m:n$ 和 P 点在双曲线上的两个条件，可以求出 P 点的坐标，进而可以求出

$|PM_1|$和$|PM_2|$，但甚麻烦．若用$|PM_1|:|PM_2|=|PF_1|:|PF_2|=m:n$，则可以直接求出$PM_1$和$PM_2$.

解 图2—37．由双曲线的方程得

$$C=\sqrt{a^2+b^2},\quad e=\frac{C}{a}.$$

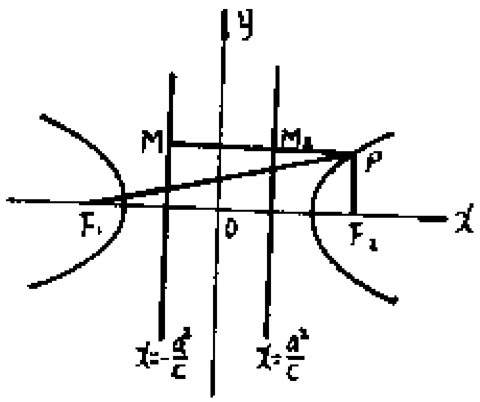


图 2—37

左准线方程为 $x=-\dfrac{a^2}{C}$；

右准线方程为 $x=\dfrac{a^2}{C}$.

过P点作x轴的平行线，交左、右准线于M_1、M_2，则PM_1和PM_2分别是P点到左、右准线的距离．又设F_1和F_2分别是左、右焦点，P点在右边一枝上，则

$$\frac{|PF_1|}{|PM_1|}=\frac{|PF_2|}{|PM_2|}=e.$$

由此得

$$\frac{|PM_1|}{|PM_2|}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{m}{n}.$$

利用分比定理，得

$$\frac{|PM_1|-|PM_2|}{|PM_2|}=\frac{m-n}{n},$$

即

$$\frac{|M_1M_2|}{|PM_2|}=\frac{m-n}{n}.$$

$$\therefore\quad |PM_2|=\frac{n}{m-n}M_1M_2.$$

又两准线间的距离 $|M_1M_2|=\dfrac{2a^2}{C}$.

所以

$$|PM_2|=\frac{n}{m-n}\cdot\frac{2a^2}{C}=\frac{2a^2n}{(m-n)\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$|PM_1|=\frac{m}{n}|PM_2|=\frac{2a^2m}{(m-n)\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$|PF_1|=e|PM_1|=\frac{C}{a}|PM_1|=\frac{2am}{m-n};$$

$$|PF_2|=e|PM_2|=\frac{C}{a}|PM_2|=\frac{2an}{m-n}.$$

当 P 点在左边一支上时，则将上面的 PM_1 与 PM_2 的值互换，PF_1 与 PF_2 的值互换.

例 4 一直线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 交于 B、C，同时与其渐近线交于 A、D（图 2—38），O 为坐标原点，求证 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 的面积相等.

分析 因 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 共顶点 O，底边在同一直线上，故两三角形等高. 因此只要证明 $AB=CD$. 为此，即证线段 BC 和 AD 有相同的中点.

证明 设直线方程为

$$y=kx+m. \qquad ①$$

各点的坐标为

$B(x_1, y_1)$，$C(x_2, y_2)$，

$A(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$.

将①式代入双曲线方程，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(kx+m)^2}{b^2}=1,$$

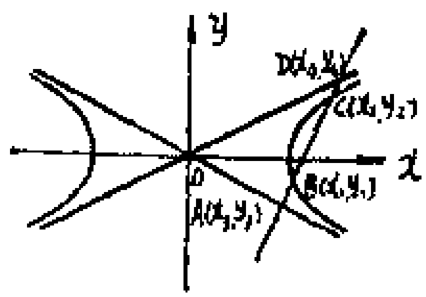


图 2—38

即

$$(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2kmx-(a^2m^2+a^2b^2)=0. \qquad ②$$

将①式代入双曲线的渐近线方程 $b^2x^2-a^2y^2=0$，得

$$b^2x^2 - a^2(kx+m)^2 = 0,$$

即

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2m^2 = 0. \qquad ③$$

因 x_1 和 x_2 是方程(2)的两根， x_3 和 x_4 是方程③的两根，故

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2km}{b^2+a^2k^2}, \quad x_3 + x_4 = \frac{2a^2km}{b^2+a^2k^2}$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

又 $y_1 + y_2 = (kx_1 + m) + (kx_2 + m) = k(x_1 + x_2) + 2m,$

$y_3 + y_4 = (kx_3 + m) + (kx_4 + m) = k(x_3 + x_4) + 2m.$

$$\therefore \quad y_1 + y_2 - y_3 + y_4.$$

$$\therefore \quad \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_3+x_4}{2}, \quad \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{y_3+y_4}{2}.$$

以上说明 BC 和 AD 的中点重合. 而 A、B、C、D 在同一直线上，故 $AB=CD$. 又$\triangle OAB$与$\triangle OCD$共顶点O，底边在同一直线上，故两三角形的高相等. 因此，$\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 等底等高，面积相等.

例 5 证明：双曲线的虚半轴是两焦点到它的任一切线的距离的比例中项.

分析 如图 2—39. 依题意即证 $b^2 = d_1 \cdot d_2$. 因此，必须从确定两焦点到切线的距离着手.

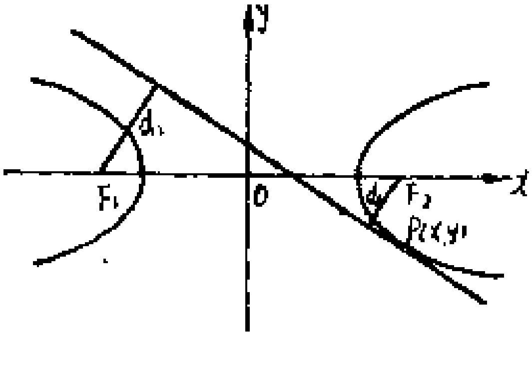


图 2—39

证明 设双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

则其虚半轴等于 b. 又设 $P(x_1, y_1)$ 为双曲线上的任意一点，则过 P 点的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

即

$$b^2x_1x-a^2y_1y-a^2b^2=0.$$

又双曲线的焦点为 $F_1(-c, o)$ 和 $F_2(c, o)$，两焦点到切线的距离分别为 d_1 和 d_2，则

$$d_1=\left|\frac{-b^2x_1c-a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}\right|,\quad d_2=\left|\frac{b^2x_1c-a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}\right|.$$

$$\therefore\quad d_1d_2=\left|\frac{b^4x_1^2c^2-a^4b^4}{b^4x_1^2+a^4y_1^2}\right|. \qquad ①$$

$$\because\quad c^2=a^2+b^2,$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\ (\text{即 } a^2y_1^2=b^2x_1^2-a^2b^2)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad b^4x_1^2+a^4y_1^2&=b^4x_1^2+a^2(b^2x_1^2-a^2b^2)\\&=b^2x_1^2(a^2+b^2)-a^4b^2\\&=b^2(c^2x_1^2-a^4).\end{aligned}$$

将其代入①式，得

$$d_1d_2=b^2.$$

因此，虚半轴是两焦点到切线的两距离的比例中项.

例 6 过等边双曲线上的任意一点引切线和法线，切线交两渐近线于 A、C，法线交两轴于 B、D，求证：四边形 $ABCD$ 是一个正方形.

分析 显然 $AC\perp BD$（图 2—40）. 因此只须证明 P 点是 AC 和 BD 的中点，且 $AC=BD$. 为此，必须先确定切线和法线的方程，然后再求出各点的坐标.

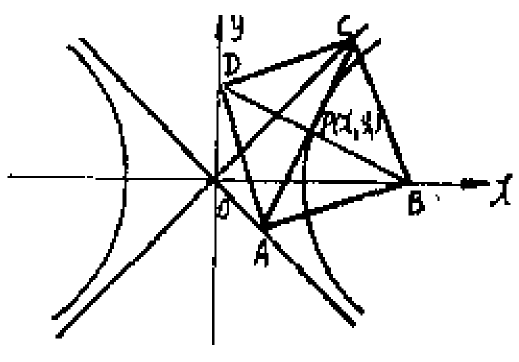


图 2—40

证明　设点 $P(x_1, y_1)$是等边双曲线

$$x^2-y^2=a^2$$

上的一点，则过 P 点的切线方程和法线方程分别是

$$x_1x-y_1y=a^2 \qquad ①$$

和

$$y-y_1=-\frac{y_1}{x_1}(x-x_1) \qquad ②$$

等边双曲线的两条渐近线是

$$x-y=0 \qquad ③$$

和

$$x+y=0 \qquad ④$$

将①式分别与③式和④式联立，解方程组得 C、A 两点的坐标

$$C\left(\frac{a^2}{x_1-y_1}, \frac{a^2}{x_1-y_1}\right), A\left(\frac{a^2}{x_1+y_1}, \frac{-a^2}{x_1+y_1}\right).$$

在②式中，令 $x=0$，得 $y=2y_1$，$D(0, 2y_1)$；令 $y=0$，得 $x=2x_1$，$B(2x_1, 0)$.

$\because\ x_1^2-y_1^2=a^2$,

$$\therefore |AC|=\sqrt{\left(\frac{a^2}{x_1-y_1}-\frac{a^2}{x_1+y_1}\right)^2+\left(\frac{a^2}{x_1-y_1}+\frac{a^2}{x_1+y_1}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2a^2y_1}{x_1^2-y_1^2}\right)^2+\left(\frac{2a^2x_1}{x_1^2-y_1^2}\right)^2}$$

$$=2\sqrt{y_1^2+x_1^2},$$

$$|BD|=\sqrt{(2x_1-0)^2+(0-2y_1)^2}$$

$$=2\sqrt{x_1^2+y_1^2},$$

$$\therefore \qquad |BD|=|AC|.$$

又 AC 和 BD 的中点坐标分别为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{x_1-y_1}+\dfrac{a^2}{x_1+y_1}\right)=\dfrac{a^2x_1}{x_1^2-y_1^2}=\dfrac{a^2x_1}{a^2}=x_1, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{x_1-y_1}+\dfrac{-a^2}{x_1+y_1}\right)=\dfrac{a^2y_1}{x_1^2-y_1^2}=\dfrac{a^2y_1}{a^2}=y_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(2x_1+0)=x_1, \\ \dfrac{1}{2}(0+2y_1)=y_1 \end{cases}$$

因此，AC 和 BD 的中点都是点 $P(x_1,\ y_1)$，即 AC 和 BD 互相平分于 P 点.

另一方面，双曲线在 P 点切线 AC 与法线 BD 又互相垂直，依平面几何知识可知 $ABCD$ 是正方形.

例 7 在双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的两条渐近线上分别取 A 点和 B 点，使 $|OA|\cdot|OB|=C^2$，其中 C 和 O 分别表示双曲线的半焦距和中心，求 AB 中点的轨迹.

解 图 2—41. 双曲线的两条渐近线为

$$y=\frac{b}{a}x \text{ 和 } y=-\frac{b}{a}x$$

设 A 点在渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$上，A 点坐标为$\left(x_1,\ \dfrac{b}{a}x_1\right)$；$B$ 点在渐近线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 上，B 点的坐标为$\left(x_2,\ -\dfrac{b}{a}x_2\right)$. 又设 AB 的中点为 $D(x,\ y)$，

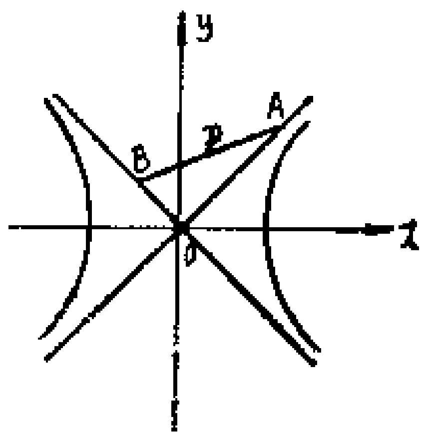


图 2—41

则

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x_1-\frac{b}{a}x_2\right).$$

由此求出

$$x_1=\frac{bx+ay}{b},\quad x_2=\frac{bx-ay}{b}.$$

因为 $c^2=a^2+b^2$，所以

$$|OA|^2=x_1^2+\left(\frac{b}{a}x_1\right)^2=\frac{(a^2+b^2)x_1^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}x_1^2,$$

$$|OB|^2=x_2^2+\left(-\frac{b}{a}x_2\right)^2=\frac{(a^2+b^2)x_2^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}x_2^2.$$

又 $|OA||OB|=C^2$，故 $C^4=|OA|^2|OB|^2$，即

$$C^4=\frac{c^4}{a^4}\left(\frac{bx+ay}{b}\right)^2\left(\frac{bx-ay}{b}\right)^2,$$

即

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2=1.$$

由此得所求的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ 和 } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

由此可见，所求的轨迹是两条共轭双曲线.

例8 证明：有公共焦点的椭圆和双曲线相交成直角.（两曲线的交角是指在交点处分别引两曲线的切线间的夹角）

分析 依题意即证两曲线在交点处的两条切线的斜率之积等于-1. 为此，必须先确定两曲线的方程. 设曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ 和 } \frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1.$$

$$\because \quad a^2-b^2=c^2,\quad a_1^2-b_1^2=c^2.$$

$$\therefore \quad b^2=a^2-c^2,\quad b_1^2=a_1^2+c^2.$$

解 设椭圆和双曲线的公共焦点为 $F_1(-c,O)$ 和 $F_2(c,O)$，则它们的方程分别是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \text{ 和 } \frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{a_1^2+c^2}=1.$$

其中 $0<a_1<c<a$.

又设 $P(x_1, y_1)$ 是两曲线的一个交点，则椭圆和双曲线在 P 点的切线分别为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{a^2-c^2}=1 \text{ 和 } \frac{x_1x}{a_1^2}-\frac{y_1y}{a_1^2+c^2}=1.$$

两切线的斜率分别为 k 和 k_1，则

$$\begin{aligned} k\cdot k_1 &= \left(\frac{-(a^2-c^2)x_1}{a^2y_1}\right)\left(\frac{(c^2-a_1^2)x_1}{a_1^2y_1}\right) \\ &= -\frac{(a^2-c^2)(c^2-a_1^2)x_1^2}{a^2a_1^2y_1^2}. \end{aligned} \qquad ①$$

因为 P 点坐标满足两曲线的方程，即

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{a^2-c^2}=1 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2}-\dfrac{y_1^2}{a_1^2+c^2}=1. \end{cases}$$

解方程组得

$$x_1^2=\frac{a^2a_1^2}{c^2}, \qquad y_1^2=\frac{(a^2-c^2)(c^2-a_1^2)}{c^2}.$$

将 x_1^2 和 y_1^2 的值代入①式，得 $k\cdot k_1=-1$. 故两曲线在交点处的切线互相垂直，即两曲线相交成直角.

例 9　求双曲线 $xy=1$ 的切线，使它被另一条双曲线 $4xy=3$ 截得的线段长最短.

解　图 2—42. 设所求的切线方程为

$$y=kx+b. \qquad ①$$

将其代入方程 $xy=1$，得

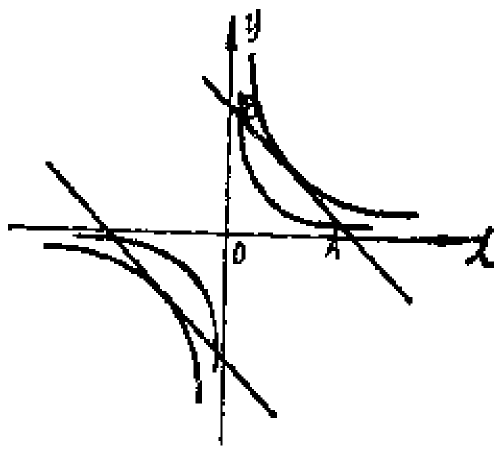


图 2—42

$$kx^2+bx-1=0.$$

因直线与双曲线相切，判别式等于0，即

$$\Delta=b^2+4k=0.$$

$$\therefore\quad k=-\frac{b^2}{4}.$$

将 k 值代入①式后再将它代入方程 $4xy=3$，则有

$$b^2x^2-4bx+3=0.$$

设切线与 $4xy=3$ 相交于 $A(x_1,\ y_1)$ 和 $B(x_2,\ y_2)$，则 x_1 和 x_2 是此方程的两根，解之得

$$x_1=\frac{1}{b},\qquad x_2=\frac{3}{b}.$$

又 $$4x_1y_1=3,\qquad 4x_2y_2=3,$$

$$\therefore\qquad y_1=\frac{3}{4x_1}=\frac{3b}{4},\quad y_2=\frac{3}{4x_2}=\frac{b}{4}.$$

所以

$$|AB|=\sqrt{\left(\frac{1}{b}-\frac{3}{b}\right)^2+\left(\frac{3b}{4}-\frac{b}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{b^2}+\frac{b^2}{4}}.$$

$$\because\qquad \frac{4}{b^2}+\frac{b^2}{4}\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{b^2}\cdot\frac{b^2}{4}}=2$$

$$\therefore\qquad |AB|\geqslant\sqrt{2}.$$

其中等号仅当

$$\frac{4}{b^2}=\frac{b^2}{4}$$

时成立．由此求得 $b=\pm 2$．进而求得 $k=-1$．

因此，所求的切线方程为

$$y=-x+2\ \text{和}\ y=-x-2.$$

例 10 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，求圆心在双曲线的虚轴上，并和双曲线及双曲线实轴相切的圆的方程．

解 图 2—43．设圆心坐标为 $O'(O, y_0)$，则圆的方程为

$$x^2+(y-y_0)^2=y_0^2.$$

由此得

$$x^2=2y_0y-y^2.$$

将其代入双曲线方程

得

$$\frac{2y_0y-y^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

即

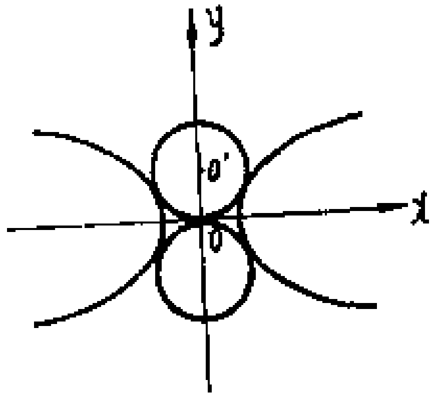


图 2—43

$$(a^2+b^2)y^2-2b^2y_0y+a^2b^2=0.$$

因为圆和双曲线相切，故必须判别式等于 0，即

$$\Delta=(-2b^2y_0)^2-4a^2b^2(a^2+b^2)=0.$$

由此求得

$$y_0=\pm\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$

因此，所求的圆的方程为

$$x^2+\left(y\pm\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)^2=\frac{a^2(a^2+b^2)}{b^2}.$$

习 题 三

1．求下列双曲线的实轴和虚轴的长、顶点坐标、焦点坐标、离心率、渐近线方程和准线方程：

(1) $7x^2-2y^2+8=0$；

(2) $25x^2-144y^2-36=0$.

2．双曲线的实半轴等于 $2\sqrt{5}$，经过 $A(2, -5)$ 点．中心在坐标原点．焦点在 y 轴上，求它的方程．

3．双曲线的中心在坐标原点，焦点在坐标轴上，两准线间

的距离是$\frac{32}{5}$，且虚轴长是6，求它的方程.

4. 双曲线的中心在坐标原点，焦点在坐标轴上，分别求满足下列各条件的双曲线方程：

(1) 一条渐近线方程是$4x-3y=0$，一个焦点是$F_1(-5, 0)$；

(2) 过点$P(-3, 2\sqrt{7})$和$Q(-6\sqrt{2}, -7)$，焦点在y轴上；

(3) 过点$P(6, 9)$，渐近线为$y=\pm\frac{5}{3}x$；

(4) 渐近线是$y=\pm 2x$，焦距为10；

(5) 两准线间的距离是$12\frac{4}{5}$，渐近线是$y=\pm\frac{3}{4}x$；

(6) 一条准线是$13y-144=0$，一条渐近线为$12x-5y=0$.

5. 已知双曲线方程$3x^2-y^2=3$：

(1) 求过$A(2, -3)$点的切线方程；

(2) 求过$B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$点的切线方程；

(3) 求过$C(8, 0)$点的法线方程.

6. 在双曲线$x^2-y^2=1$上求一点，使它与两焦点的连线互相垂直.

7. 已知双曲线$2x^2-5y^2=30$，求符合下列条件之一的切线方程：

(1) 平行于$x+y-7=0$；

(2) 垂直于$x-2y=0$.

8. 已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$上的$P$点到左焦点的距离等

于3，求P点到两准线及右焦点的距离.

9. 求证，从双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离等于虚半轴.

10. 已知双曲线的中心到其顶点的距离是中心到其焦点距离的$\frac{2}{3}$，求它的渐近线与实轴的夹角.

11. 求中心在原点，两对称轴都在坐标轴上，并且适合下列条件的双曲线方程：

(1) 两条渐近线是 $2x\pm y=0$，且与直线 $x-y+3=0$ 相切；

(2) 通过点$P(\sqrt{6}, 3)$，且与直线$9x+2y-15=0$相切.

12. 根据下列条件，求双曲线方程：

(1) 实轴长等于4，两焦点是$(2, 2)$和$(2, -4)$；

(2) 两个焦点为$F_1(-3, -4)$和$F_2(3, 4)$，两条准线间的距离为3.6.

13. 已知一椭圆和一双曲线有共同的焦点，它们的离心率之和为2.8. 椭圆的方程是$25x^2+9y^2=225$，求双曲线的方程.

14. 已知双曲线的顶点是椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的焦点，又双曲线的焦点是椭圆的顶点，求双曲线的方程.

15. 试就k的变化，讨论方程

$$(b^2-k)x^2+(a^2-k)y^2=(a^2-k)(b^2-k)\quad(a>b>0)$$

所代表的曲线，并证明当方程代表椭圆或双曲线时有共同的焦点.

16. 证明双曲线上任意一点到它的两渐近线的距离之积是常数.

17. 证明：经过双曲线上的任意一点，作两条分别平行于两条渐近线的直线，这两条直线和渐近线所围成的平行四边形

面积为定值.

18. 在双曲线中，证明下面的三条直线共点：渐近线；过焦点作此渐近线的垂线；对应此焦点的准线.

19. 已知双曲线 $5x^2-9y^2=18$ 和圆 $x^2+y^2=12$ 在一、二、三、四象限的交点分别为 A、B、C、D，连接 AD，BC，求弧 $\overset{\frown}{AB}$、线段 BC、弧 $\overset{\frown}{CD}$ 和线段 DA 所围成的面积.

20. 在等边双曲线 $xy=1$ 上任取 A，B，C 三点，求证 $\triangle ABC$ 的垂心在此双曲线上.

21. 双曲线 $xy=a^2$ 上一切线与坐标轴相交成一直角三角形，求此三角形的面积.

22. 对于双曲线 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 可否作任何方向的切线，它有什么限制？

23. PN 是双曲线上的一点 P 的纵坐标，PG 为过 P 点的法线，交其实轴于 G，延长 NP 交渐近线于 Q. 则 QG 垂直于此渐近线.

24. P 是双曲线 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 右枝上的一点，F_1 和 F_2 是它的左右两个焦点. 连 F_1P，由 F_2 向 P 点的切线作垂线交 F_1P 于G，求 $|F_1G|$.

25. 求证：椭圆 $9x^2+25y^2=225$ 和双曲线 $x^2-15y^2=15$ 在交点处的切线互相垂直.

26. 求椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 和双曲线 $7x^2-32y^2=224$ 的公切线方程.

27. 已知双曲线 $2c\operatorname{tg}\alpha\, x^2-3y^2\operatorname{tg}\alpha=48$（$\alpha$ 为锐角）和圆 $(x-m)^2+y^2=R^2$ 相切于 $A(4\sqrt{3}, 4)$，求 α，m，R 的值.

28. 自等边双曲线的中心向双曲线的切线引垂线，求垂足的轨迹方程.

29. 求双曲线互相垂直的切线的交点的轨迹方程.

30. 就 k 值的变化讨论方程

$$\frac{x^2}{4-k}+(k-2)y^2=1+k \quad (k\text{ 为实数})$$

的图象形状，并画出显示其数值特征的略图.

31. 过双曲线上任意一点引切线，它与两顶点处的切线相交于 P、Q，求证：P、Q 和两焦点在同一圆周上.

32. 设 A，B 两点是等边双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 实轴上的左、右端点，在实轴上 B 点的右边取一点 C，线段 BC 的中垂线与双曲线交于 E，F，求证：A，C，E，F 四点在同一圆周上.

33. 证明：双曲线的切线与渐近线围成的三角形的面积等于以双曲线的两半轴为边长的长方形的面积.

第三章　坐标变换与二元二次方程的化简

坐标系是一参考系，点的坐标与曲线的方程是借助于坐标系而表明的．同一的点在不同的直角坐标系具有不同的坐标，同一的曲线在不同的直角坐标系具有不同的方程．因此，坐标系的选择直接牵涉到曲线方程的复杂与简化．

设点 M 在 xoy 系中的坐标为 $(x,\ y)$，在 $x'o'y'$ 系中的坐标为 $(x',\ y')$．为方便起见常称前者为旧系、旧坐标，后者为新系、新坐标．所谓点的坐标变换，就是 x，y 分别与 x'，y' 的转化关系，或 x'，y' 分别与 x，y 的转化关系．如下表：

名　　称	变　换　关　系	说　　明
移　　轴	$\begin{cases}x=x'+h\\ y=y'+k\end{cases}$	$(h,\ k)$——新原点的旧坐标，
(如图3—1)	$\begin{cases}x'=x-h\\ y'=y-k\end{cases}$	$(x,\ y)$——点 M 的旧坐标， $(x',\ y')$——点 M 的新坐标．
转　　轴	$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$	θ——轴的旋转角，
(如图3—2)	$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$	$(x,\ y)$——点 M 的旧坐标， $(x',\ y')$——点 M 的新坐标．

注：① 移轴变换在理解的基础上较易记忆，转轴变换，通常采用下述井字记忆法——

	x'	y'
x	$\cos\widehat{xx'}=\cos\theta$	$\cos\widehat{xy'}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\widehat{yy'}\right)$ $=-\sin\theta$
y	$\cos\widehat{yx'}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{xx'}\right)$ $=\sin\theta$	$\cos\widehat{yy'}=\cos\theta$

② 利用移轴可简化二元一次方程的常数项和二元二次方程的一次项；利用转轴可简化二元二次方程的交叉项(xy).

③ 要消去二元二次方程 $Ax^2+Bxy+cy^2+Dx+Ey+F=0$ 中的 xy 项，坐标轴的旋转角 θ 依下述方法选择——

若 $A=C$，则 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

若 $A\neq C$，则 $\theta=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A-C}$.

④ 简化时一般是先移后转.

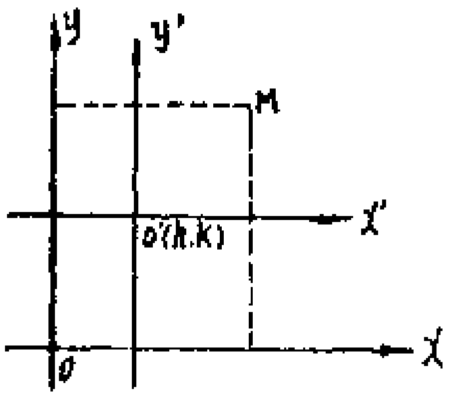


图 3—1

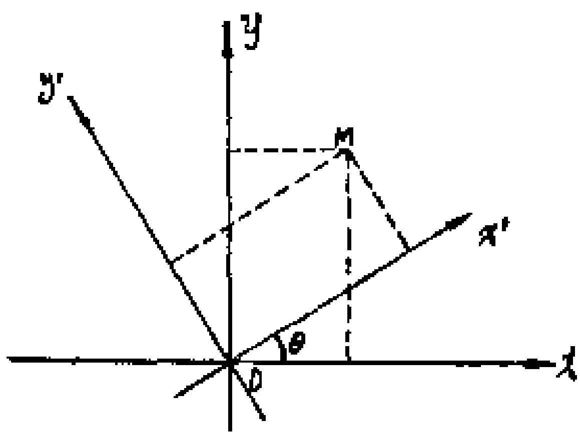


图 3—2

关于二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+cy^2+Dx+Ey+F=0$$

的讨论

(1) 缺 xy 项的方程 $Ax^2+cy^2+Dx+Ey+F=0$(A、C 不同时为零)，可利用移轴化简，讨论的结果如下表：

条　　件	类　　型	一 般 情 况	特 殊 情 况
$AC>0$	椭　圆　型	椭圆(包括圆)	一点或无轨迹
$AC<0$	双 曲 线 型	双　曲　线	两条相交直线
$A=0$ 或 $C=0$	抛 物 线 型	抛　物　线	两条平行直线，一条直线，或无轨迹

(2) 一般的二次方程，可利用移轴，转轴消去一次项及 xy 项，讨论的结果如下表：

条　　件	类　　型	一 般 情 况	特 殊 情 况
$B^2-4AC<0$	椭 圆 型	椭圆(包括圆)	一点或无轨迹
$B^2-4AC>0$	双曲线型	双 曲 线	两条相交直线
$B^2-4AC=0$	抛物线型	抛 物 线	两条平行直线，或一条直线，或无轨迹

〔附注〕 (1) 化简方程的方法：一般地说，若 $B^2-4AC\neq0$，则应先移轴消去一次项，再转轴消去 xy 项；若 $B^2-4AC=0$，则先转轴消去 xy项，再移轴消去一次项或常数项.

(2) 将二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

经过移轴和转轴后得到新方程

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0,$$

新旧方程的系数之间有如下关系：

$$A+C=A'+C',\quad B^2-4AC=B'^2-4A'C'.$$

$A+C$ 和 B^2-4AC 叫做二元二次方程的不变式.

一、例　　题

例 1 化简方程

$$4x^2-5y^2-16x-10y+31=0,$$

并画出它的图象.

分析 因 $AC=4\cdot(-5)=-20<0$，故方程代表双曲线. 又此方程缺少 xy 项，因此只要经过适当的移轴，就可以消去一次项或常数项.

求简化方程的平移公式，可以按照下面的两种方法去作.

解法一 代入公式法：

将平移公式

$$\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases} \qquad ①$$

代入原方程，得

$$4(x'+h)^2-5(y'+k)^2-16(x'+h)-10(y'+k)+31=0,$$

即

$$4x'^2-5y'^2+(8h-16)x'-(10k+10)y'$$
$$+(4h^2-5k^2-16h-10k+31)=0. \qquad ②$$

令一次项的系数等于 0，即

$$\begin{cases} 8h-16=0, \\ 10k+10=0. \end{cases}$$

解方程组得 $h=2$，$k=-1$. 将它代入①式和②式，得到移轴公式：

$$\begin{cases} x=x'+2, \\ y=y'-1. \end{cases}$$

和移轴后的简化方程

$$4x'^2-5y'^2=-20,$$

即
$$-\frac{x'^2}{5}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

解法二 配方法：

把所给的方程按 x，y 配方，得

$$4(x-2)^2-5(y+1)^2+20=0.$$

令 $x'=x-2$，$y'=y+1$，则得到平移公式

$$\begin{cases} x=x'+2, \\ y=y'-1, \end{cases}$$

和移轴后的简化方程

$$4x'^2-5y'^2=-20,$$

即 $$-\frac{x'^2}{5}+\frac{y'^2}{4}=1. \quad ③$$

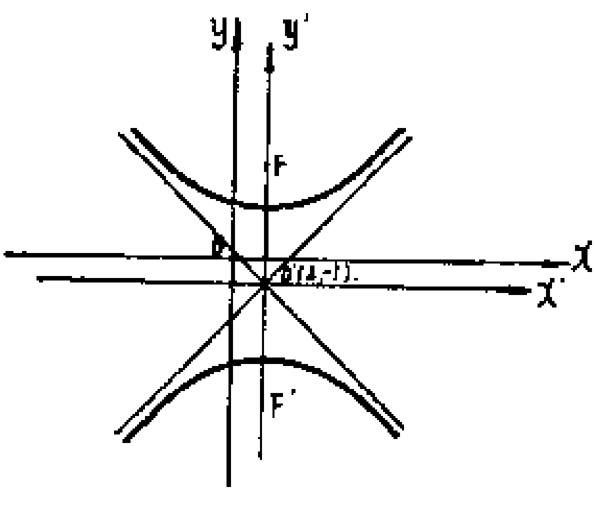


图 3—3

下面画图象：

先平行移动两坐标轴，以 $O'(2,-1)$ 为新原点建立坐标系. 在新坐标系中，按照方程③描出图象.

〔附注〕 用移轴化简

二次方程时，如果方程缺少 xy 项，那么用配方法求平移公式是最方便的．但是，如果方程含有 xy 项，则只能用代入公式法才能求出简化方程的平移公式．

例 2　化简方程

$$2x^2+4xy+5y^2-4x-22y+7=0,$$

并画出它的图象．

解　因 $B^2-4AC=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$，故曲线为椭圆型．化简方程时可先移轴后转轴．

将平移公式

$$\begin{cases} x=x'+h, \\ y=y'+k \end{cases} \qquad ①$$

代入已给方程，得

$$\begin{aligned} &2x'^2+4x'y'+5y'^2+(4h+4k-4)x' \\ &+(4h+10k-22)y'+(2h^2+4hk+5k^2-4h \\ &-22k+7)=0. \end{aligned} \qquad ②$$

令一次项系数等于 0，即

$$\begin{cases} 4h+4k-4=0, \\ 4h+10k-22=0. \end{cases}$$

解方程组得　　$h=-2$，$k=3$.

将 h，k 的值代入①式和②式，得移轴公式

$$\begin{cases} x=x'-2 \\ y=y'+3 \end{cases}$$

和移轴后的简化方程

$$2x'^2+4x'y'+5y'^2-22=0. \qquad ③$$

又　　$\operatorname{ctg}2\theta=\dfrac{A-C}{B}=\dfrac{2-5}{4}=-\dfrac{3}{4}$,

$$\cos 2\theta=\frac{\operatorname{ctg} 2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\theta}}=\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}}=-\frac{3}{5},$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{5}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\right)}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

得到转轴公式

$$\begin{cases} x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta=\dfrac{x''-2y''}{\sqrt{5}} \\ y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta=\dfrac{2x''+y''}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

将转轴公式代入③式，得原方程的最简形式

$$6x''^2+y''^2=22,$$

即
$$\frac{x''^2}{\frac{11}{3}}+\frac{y''^2}{22}=1. \qquad ④$$

下面画图象：

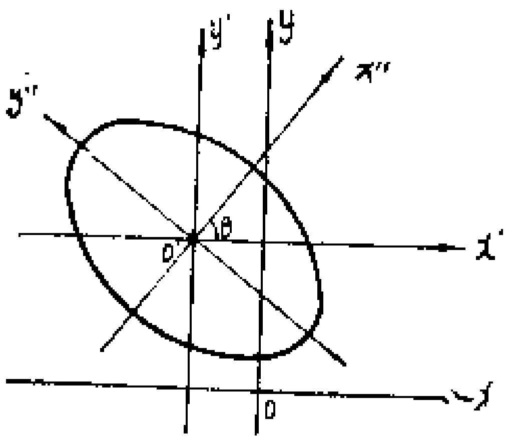


图 3—4

将坐标轴平移以$O'(-2,3)$为新原点建立坐标系 $x'o'y'$，再将坐标系 $x'o'y'$ 的轴绕 o' 点旋转 θ 角，得到新坐标系 $x''o'y''$，此时 $o'x''$ 轴对 ox 轴的倾角 θ 满足条件

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=2.$$

在新坐标系 $x''o'y''$ 中，依方程④绘出图象，如图 3—4.

例3 求二次曲线

$$x^2+2xy+y^2+3x+y=0$$

的焦点坐标和准线方程.

分析 首先要化简方程. 因$\Delta=B^2-4AC=2^2-4\cdot1\cdot1=0$，故曲线为抛物线型，化简方程时，应先转轴后移轴.

解 $\because \quad \operatorname{ctg}2\theta=\dfrac{1-1}{2}=0$. $\quad 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore \quad \theta=45°$.

得转轴公式

$$\begin{cases} x=x'\cos45°-y'\sin45°=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \\ y=x'\sin45°+y'\cos45°=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}. \end{cases} \qquad ①$$

将它代入原方程，得

$$\sqrt{2}x'^2+2x'-y'=0.$$

配方得

$$\sqrt{2}\left(x'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=y'+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

再用移轴公式

$$\begin{cases} x'=x''-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y'=y''-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad ②$$

代入，得最简方程

$$x''^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y''.$$

此抛物线的焦点坐标为 $x''=0$, $y''=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$，准线的方程为

$$y''=-\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

将 $x''=0$，$y''=\frac{\sqrt{2}}{8}$代入②式，得 $x'=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y'=-\frac{3\sqrt{2}}{8}$. 又将所求的 x'，y'值代入转轴公式①，得 $x=-\frac{1}{8}$，$y=-\frac{7}{8}$. 因此，原方程的焦点为

$$F\left(-\frac{1}{8},\ -\frac{7}{8}\right).$$

将 $y''=-\frac{\sqrt{2}}{8}$代入移轴公式②，得 $y'=-\frac{5\sqrt{2}}{8}$. 又将它代入转轴公式①，得

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'+\frac{5\sqrt{2}}{8}\right), & ③ \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'-\frac{5\sqrt{2}}{8}\right). & ④ \end{cases}$$

③－④，消去 x'，得到原方程的准线方程

$$4x-4y-5=0.$$

例 4 坐标轴旋转怎样的角度，才能使点(0，3)的两坐标相等.

解 设当坐标轴旋转 θ 角时，点(0, 3)的坐标变为$(a,\ a)$，则

$$\begin{cases} 0=a\cos\theta-a\sin\theta, & ① \\ 3=a\sin\theta+a\cos\theta. & ② \end{cases}$$

由①得 $\operatorname{tg}\theta=1$，　$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，

∴ $\theta=45°$ 或 $\theta=225°$.

因此，当坐标轴旋转 45° 或 225° 时，点(0，3)的两坐标相等.

例 5 已知椭圆长轴上的两个端点为 $A(-5,\ 1)$和 $A'(1,\ 1)$，焦距等于 $2\sqrt{5}$，求椭圆方程.

分析 ∵ $2a=|AA'|=\sqrt{(-5-1)^2+(1-1)^2}=6$

$\therefore \quad a=3.$

$\therefore \quad b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3^2-5}=2.$

若以 AA' 的中点 o' 为椭圆的中心，将坐标轴平移以 o'为原点，则椭圆方程为

$$\frac{x'^2}{3^2}+\frac{y'^2}{2^2}=1.$$

因此，可以通过移轴求出椭圆的方程．

解 因 A, A' 的坐标分别为$(-5, 1)$, $(1, 1)$，因此线段 AB 的中点坐标为 $0'(-2, 1)$．椭圆的长轴在直线 AA' 上，短轴在 AA' 的中垂线上．o' 是椭圆的中心，如图 3—5.

$\because \quad 2a=|AA'|=6, \quad 2c=2\sqrt{5},$

$\therefore \quad a=3, \quad b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3^2-5}=2.$

以直线 AA' 为 x' 轴，AA' 的中垂线为 y' 轴，且 x'，y' 轴的方向分别与 x，y 轴的方向相同，则在坐标系 $x'o'y'$ 中所求椭圆的方程是

$$\frac{x'^2}{3^2}+\frac{y'^2}{2^2}=1. \qquad ①$$

又坐标系 $x'o'y'$ 是坐标系 xoy 移轴至以 $o'(-2, 1)$ 为新原点的坐标系．利用平移公式

$$\begin{cases} x=x'-2 \\ y=y'+1 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x'=x+2, \\ y'=y-1. \end{cases}$$

将 x', y' 的值代入方程①，得到所求的椭圆方程为

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

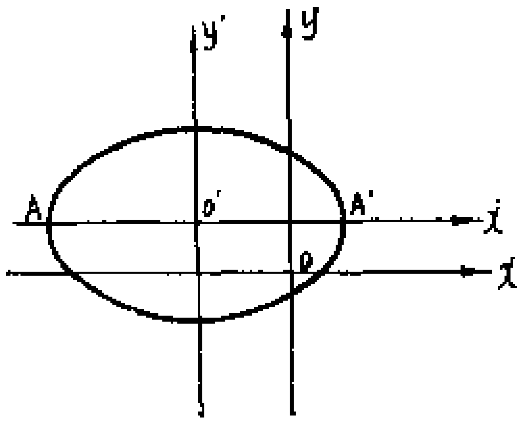


图 3—5

例 6 已知双曲线的实轴和虚轴分别在直线 $3x+2y-1=0$ 和 $2x-3y+8=0$ 上，且实轴长为 6，虚轴长为$\sqrt{3}$，求双曲线的方程.

分析 如图 3—6．若以实轴作为新坐标系的 y'轴，虚轴作为 x'轴，则双曲线的方程为

$$-\frac{x'^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{y'^2}{3^2}=1.$$

因此，可以通过先求出坐标系 $x'o'y'$与旧坐标系 xoy 的转换关系，然后求出双曲线的方程.

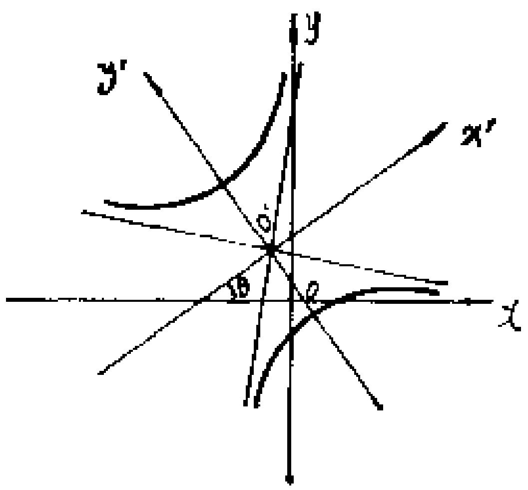


图 3—6

解 解方程组

$$\begin{cases}2x-3y+8=0,\\3x+2y-1=0.\end{cases}$$

求出 x'，y' 轴的交点坐标 $o'(-1,\ 2)$.

设 x' 轴的倾角为 θ．因 $\operatorname{tg}\theta$ 是直线 $2x-3y+8=0$ 的斜率，故

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2}{3}.$$

由此得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\theta}{2}=\frac{\cos\theta}{3}=\frac{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

因此，坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = \dfrac{3x' - 2y'}{\sqrt{13}} - 1, \\ y = \dfrac{2x' + 3y'}{\sqrt{13}} + 2, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3x + 2y - 1}{\sqrt{13}}, \\ y' = \dfrac{-2x + 3y - 8}{\sqrt{13}}. \end{cases} \qquad ①$$

在坐标系 $x'o'y'$ 中，双曲线的实轴在 y' 轴上，虚轴在 x' 轴上，且实半轴长为 3，虚半轴长为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，因此，双曲线在坐标系 $x'o'y'$ 中的方程为

$$-\frac{x'^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1.$$

将①式中的 x'，y' 值代入此式，得

$$-\frac{\left(\frac{3x + 2y - 1}{\sqrt{13}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{-2x + 3y - 8}{\sqrt{13}}\right)^2}{3^2} = 1,$$

即

$$8x^2 + 12xy + 3y^2 - 8x + 5 = 0.$$

例 7 正方形相邻的顶点是 $A(2, 3)$，$B(6, 6)$，求其余顶点的坐标.

解法一 如图 3—7，以点 $A(2, 3)$ 作为新坐标系的原点，AB 所在的直线为新坐标系的横轴. 设直线 AB 的倾角为 θ，则

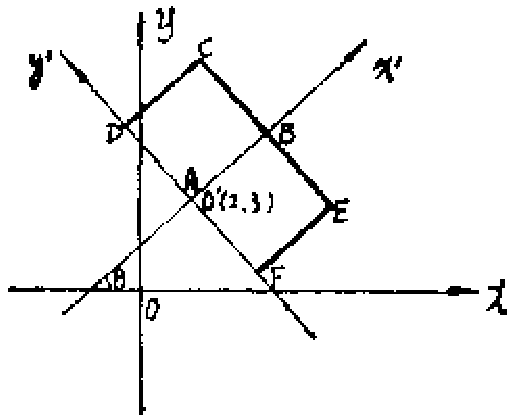


图 3—7

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{6-3}{6-2}=\frac{3}{4}.$$

由此得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}.$$

利用比例性质，得

$$\frac{\sin\theta}{3}=\frac{\cos\theta}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}.$$

故 $$\sin\theta=\frac{3}{5},\quad \cos\theta=\frac{4}{5}.$$

得到坐标变换公式

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+2=\dfrac{4x'-3y'}{5}+2, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+3=\dfrac{3x'+4y'}{5}+3. \end{cases} \qquad ①$$

将 B 点坐标 $x=6$，$y=6$ 代入此式，得

$$\begin{cases} 6=\dfrac{4x'-3y'}{5}+2 \\ 6=\dfrac{3x'+4y'}{5}+3. \end{cases}$$

解方程组，求出 B 点在新坐标系中的坐标 $x'=5$，$y'=0$. 由此求出正方形其余两顶点在新坐标系中的坐标：

$$C(5,\ 5),\ D(0,\ 5),$$

或

$$E(5,\ -5),\ F(0,\ -5).$$

将上述各点的 x'，y'值分别代入变换公式①，得正方形其余两个顶点的坐标是

$(3,\ 10)$，$(-1,\ 7)$ 或 $(9,\ 2)$，$(5,\ -1)$.

解法二 $|AB|=\sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2}=5$.

直线 AB 的方程为

$$y-3=\frac{6-3}{6-2}(x-2),$$

即

$$3x-4y+6=0. \qquad ①$$

C，D 两点所在的直线与 AB 平行，且两直线的距离等于 $|AB|$，因此，直线 CD 的方程为

$$\frac{3x-4y+6}{5}=-5,$$

即

$$3x-4y+31=0 \qquad ②$$

同理，直线 EF 的方程为

$$\frac{3x-4y+6}{5}=5,$$

即

$$3x-4y-19=0. \qquad ③$$

过 B 点而和 AB 垂直的直线方程为

$$4x+3y-42=0. \qquad ④$$

过 A 点而和 AB 垂直的直线方程为

$$4x+3y-17=0. \qquad ⑤$$

联立方程②和⑤，求出 D 点的坐标 $(-1,7)$；联立方程②和④，求出 C 点坐标 $(3,10)$；联立方程③和④，求出 E 点坐标 $(9,2)$；联立方程③和⑤，求出 F 点坐标 $(5,\ -1)$.

此题还可以用如下的方法来解：

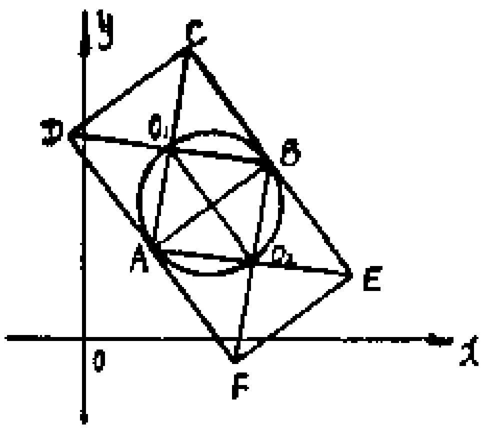


图 3—8

解法三 如图 3—8、对角线 AC 与 AB 的夹角为 45°，BD 与 AB 的夹角为 45°，于是在求出 AB 的斜率后，可求出直线 AC 和 BD 的斜率，从而可求出 AC 和 BD 的直线方程，进而求出 AC 和 BD 的交点 o_1，而 o_1 是线段 DB 和 CA 的中点，由此可求出 C，D 的坐标. 同理，可求出 E，F 的坐标.

解法四 如图 3—8，先求 AB 的中垂线方程，再求以 AB 为直径 AB 中点为圆心的圆的方程，联立中垂线方程和圆的方程，解方程组即可求出 o_1 和 o_2 的坐标，以下解法同三.

〔**附注**〕 求转轴公式中的 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 时，如果知道 x' 轴的斜率，则都可按照上两例中的方法去求.

例 8 k 为何值时，方程

$$x^2+6xy+y^2+6x+2y+k=0$$

表示两条直线.

分析 如果方程中不含有 xy 项，那么这个问题是很容易解决的. 因此，先要用转轴来化简方程，然后再作讨论.

解 $\because$ $\operatorname{ctg}2\theta=\dfrac{1-1}{6}=0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore$ $\theta=45°$.

得到转轴公式

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \\ y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

将其代入原方程，得

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2+6\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$+6\cdot\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}+2\cdot\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+k=0,$$

即

$$4x'^2-2y'^2+4\sqrt{2}x'-2\sqrt{2}y'+k=0.$$

配方得

$$4\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1-k.$$

再用平移公式

$$\begin{cases} x'=x''-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y'=y''-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

代入上式，得到最简方程

$$4x''^2-2y''^2=1-k.$$

此方程当且仅当 $k=1$ 时表示两条直线．因此，仅当 $k=1$ 时，原方程表示两条直线．

例 9　求由下列区域围成的面积：

$$\sqrt{3}x-3y+6+\sqrt{3}\geqslant 0;$$
$$\sqrt{3}x+3y-6+\sqrt{3}\geqslant 0;$$
$$x^2+y^2+2x-4y+4\geqslant 0;$$
$$x^2+y^2+2x-4y+1\leqslant 0.$$

解　由原各不等式得

$$\sqrt{3}(x+1)-3(y-2)\geqslant 0;$$
$$\sqrt{3}(x+1)+3(y-2)\geqslant 0;$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2\geqslant 1^2;$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2\leqslant 2^2.$$

作移轴变换

$$\begin{cases} x = x' - 1, \\ y = y' + 2. \end{cases}$$

得

$$\sqrt{3}x' - 3y' \geqslant 0;$$
$$\sqrt{3}x' + 3y' \geqslant 0;$$
$$x'^2 + y'^2 \geqslant 1^2;$$
$$x'^2 + y'^2 \leqslant 2^2.$$

在坐标系 $x'o'y'$ 中描出上述区域，如图 3—9，易知所求的面积是一个圆环的一部分，即图中的阴影部分.

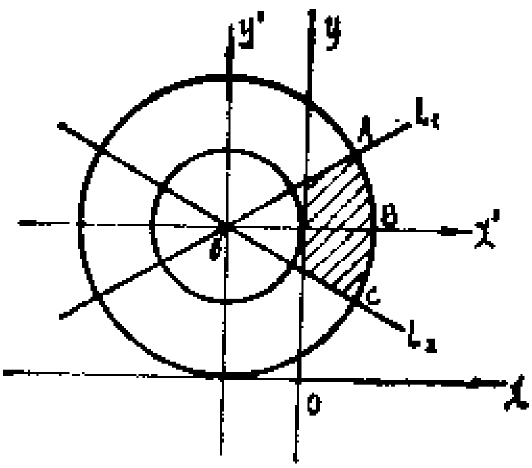


图 3—9

直线 l_1：$\sqrt{3}x' - 3y' = 0$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线 l_1 与 x' 轴的夹角 $\angle AO'B = 30°$.

直线 l_2：$\sqrt{3}x' + 3y' = 0$ 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线 l_2 与 x' 轴的夹角 $\angle BO'C = 30°$.

$$\therefore \qquad \angle AO'C = 60°.$$

阴影的面积等于两个扇形的面积之差，因此，所求的面积

$$S = \frac{1}{6}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{6}\pi \cdot 1^2 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\therefore \qquad S = \frac{1}{2}\pi.$$

例 10　已知准线 $x + y - 1 = 0$ 及其相应的焦点 $F(1, 1)$，求等边双曲线的方程.

解 设等边双曲线的实半轴长为 a，则其虚半轴长亦为 a，由此求得半焦距 $C=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$.

$$\therefore \qquad e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}.$$

设 $P(x,\ y)$ 为等边双曲线上的任意一点，则 P 点到焦点 $F(1,\ 1)$ 和准线 $x+y-1=0$ 的距离之比等于 $\sqrt{2}$，即

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{\left|\dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}}\right|}=\sqrt{2}.$$

将此式两边平方，化简得等边双曲线的方程

$$2xy-1=0.$$

例 11 已知抛物线经过点 $O(0,\ 0)$ 和 $A(-2,\ 2)$，并有准线 $x+y-2=0$，求此抛物线的方程.

解 设抛物线焦点 F 的坐标为 $(a,\ b)$，由抛物线的定义可知，0 点到焦点 F 的距离等于 0 点到准线的距离；A 点到焦点 F 的距离等于 A 点到准线的距离. 于是

$$\sqrt{a^2+b^2}=\left|\frac{-2}{\sqrt{2}}\right|,$$

$$\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}=\left|\frac{-2+2-2}{\sqrt{2}}\right|,$$

即

$$a^2+b^2=2, \qquad ①$$

$$(a+2)^2+(b-2)^2=2. \qquad ②$$

联立①和②两个方程，求得

$$\begin{cases} a=-1, \\ b=1. \end{cases}$$

因此，抛物线的焦点为 $F(-1,\ 1)$.

设 $Q(x,\ y)$ 为所求抛物线上的一点，则 Q 点到焦点 F 的

距离等于 Q 点到准线的距离，由此得

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\left|\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right|.$$

两边平方，化简后得所求抛物线的方程

$$x^2-2xy+y^2+8x=0.$$

习　　题

1. (1) 在坐标轴的平移后，点(2,4)得到了坐标(-3,0)，求新原点原来的坐标.

(2) 坐标轴旋转怎样的角度，才能使点(2，0)的两坐标相等.

2. (1) 取两条互相垂直的直线 l_1： $3x-4y+1=0$， l_2： $4x+3y-7=0$ 分别作为新的坐标系中的横轴与纵轴，写出坐标的变换公式.

(2) 正方形的顶点在点(0，0)，(2，0)，(2，2)，(0，2)处，如果取正方形的对角线为新坐标轴，而点(2，0)在 $O'x'$ 轴的正方向上，求坐标的变换公式.

3. 下列二次方程表示什么曲线：

(1) $4x^2+9y^2+4x+1=0$；

(2) $3x^2-2xy+3y^2-2x+2u+1=0$；

(3) $3x^2-10xy+7y^2+15x-7y-42=0$；

(4) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-3=0$；

(5) $x^2-2xy+y^2+2x-2y+1=0$.

4. 化简下列方程，并画出方程所代表的曲线：

(1) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$；

(2) $x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0$；

(3) $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$.

5．求下列椭圆的离心率，中心，焦点和准线：

(1) $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$；

(2) $3x^2+5y^2+18x-20y+32=0$.

6．求下列双曲线的离心率，中心，顶点，焦点，准线和渐近线：

(1) $9x^2-4y^2-54x-32y-19=0$；

(2) $3x^2-2y^2+6x+8y-11=0$.

7．求下列抛物线的顶点，焦点，轴和准线：

(1) $72x^2+48x+180y-37=0$；

(2) $y^2-5x+6y-1=0$.

8．在下列条件下，求抛物线的方程：

(1) 顶点为$(3,\ -2)$，焦点为$(5,\ -2)$；

(2) 顶点为$(-4,\ -2)$，对称轴与ox轴平行，且经过坐标原点.

9．在下列条件下，求椭圆方程：

(1) 长轴与ox轴平行，中心为$(-3,2)$，两轴长为6和2；

(2) 中心为$(2,\ 3)$，离心率等于$\frac{1}{2}$，平行于x轴的长轴长为10；

(3) 顶点为$(-2,\ 0)$和$(4,\ 0)$，其中一个焦点在坐标原点.

10．求下列各双曲线的方程：

(1) 中心在$(1,\ -2)$，实轴与x轴平行，且实轴长等于4，虚轴长等于2；

(2) 中心在$(-1,\ -2)$，离心率等于$1\frac{1}{2}$，平行于ox轴的实轴长等于4.

11．如将两坐标轴转60°角，求$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$三点的新坐标.

12. 原点不变，而将两坐标轴转 45°，求 $3x^2+3y^2-10xy+8=0$ 的新方程式.

13. 将两坐标轴旋转 45°，求 $x^3+y^3-3axy=0$ 的新方程式.

14. 求下列二次曲线对称轴所在的直线方程：

(1) $6x^2-4xy+3y^2+4x+12y+5=0$；

(2) $8x^2+12xy+3y^2-8x+5=0$；

(3) $3x^2+4xy+6y^2+42x-28y+215=0$；

(4) $4x^2-8xy+4y^2+6x-8y+1=0$.

15. 求下列二次曲线的焦点和准线方程：

(1) $x^2-2xy+y^2-6x-2y+9=0$；

(2) $3x^2-4xy-2x+4y-5=0$；

(3) $8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16=0$；

(4) $2x^2-4x-y+1=0$.

16. 利用坐标变换，判定方程

$$y=\frac{2x+3}{x+4}$$

所代表的曲线.

17. 证明方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 的图形是抛物线的一部分.

18. 证明：不论 m 为何实数，抛物线

$$y=4x^2-8mx+4m^2-m$$

的焦点都在同一直线上.

19. 已知一条二次曲线通过点 $(1,\ 1)$，$(2,\ -1)$，$(1,\ -2)$，$(-1,\ 1)$，$(3,\ 0)$，求它的方程.

20. 已知抛物线通过点 $P(0,\ 0)$ 和 $Q(0,\ 1)$，而直线 $x+y+1=0$ 是它的轴，求抛物线的方程.

21. 求以直线 $x-1=0$ 和 $y-1=0$ 为渐近线，并且通过点(2，2)的双曲线方程.

22. 已知双曲线的渐近线 $x+y-1=0$ 和 $x-y+1=0$，焦点 $F(0, 2)$，求它的方程.

23. k 为何值时，方程

$$3x^2-2xy+3y^2-2x+2y+k=0$$

表示一个点.

24. λ 为何值时，方程

$$x^2-2\lambda xy+4y^2+2x-\lambda y=0$$

表示一对直线，并求出直线方程.

25. 在方程式

$$2x^2+\lambda xy+2y^2-7x+\mu y+3=0$$

中，适当选择 λ 和 μ 的值，使得方程表示一对平行直线.

26. 若方程 $x^2+xy+4x+my=0$ 表示直线：

(1) 试确定 m 的值；

(2) 根据(1) 的 m 值，写出各直线方程，并求出这些直线所围成的图形的面积.

27. 对于给定的 A，B 和 C 及适当选择的 λ 值，下面的恒等式成立：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2,$$

这里，α 和 β 是实数或虚数，证明这样的 λ 值是方程式

$$4\lambda^2-4(A+C)\lambda+4AC-B^2=0$$

的根.

28. 证明：二次曲线

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

以原点为中心的充要条件是 $D=0$ 和 $E=0$.

29. 设 $A\neq 0$，证明方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

表示两条直线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}=0.$$

30．已知两条曲线的方程

$$2x^2+2y-1=0 \text{ 和 } 2x^2+2y^2+2x+2y-19=0,$$

求出过这两条曲线交点的抛物线方程.

31．求证经过圆锥曲线

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

上的一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程是

$$Ax_1x+\frac{1}{2}B(y_1x+x_1y)+Cy_1y+\frac{D}{2}(x+x_1)+\frac{E}{2}(y+y_1)+F=0.$$

32．已知圆锥曲线

$$8x^2-4xy+5y^2-36x+18y+9=0,$$

试求经过点 $P(1, 1)$ 的切线方程.

33．已知方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 代表两条直线：

（1）求此两直线的夹角 θ；（$B^2-4AC\geqslant 0$）

（2）证明：两直线平行的条件是 $B^2-4AC=0$，垂直的条件是 $A+C=0$.

34．证明：方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

代表一个圆的充要条件是 $A=C\neq 0$，$B=0$ 且 $D^2+E^2-4AF>0$.

35．设 A, B 是给定的二次曲线

$$ax^2+bxy+Cy^2+dx+ey+f=0\ (a\neq 0)$$

上的两个定点，过 A，B 任作一圆，设该圆与给定的二次曲线交于另外两个定点 C，D，求证直线 CD 有定向.

36. 求证下面的四个点是一个圆与一条双曲线的交点：

$$A\left(ka,\ \frac{k}{a}\right),\quad B\left(kb,\ \frac{k}{b}\right),\quad C\left(kc,\ \frac{k}{c}\right),\quad D\left(\frac{k}{abc},\ kabc\right).$$

37. 有一圆锥曲线，过 $(0, 2)$、$(-2, 0)$、$(2, -8)$ 三点，且关于原点对称，试求其方程，判别其所属的类型.

38. 求有心圆锥曲线

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$$

的焦点坐标.

39. AB 是抛物线 $y^2=2px$ 的过焦点且与轴垂直的弦，过 A 和 B 的两切线交于 O'：

(1) 证明 $O'A\perp O'B$；

(2) 以 $O'A$ 和 $O'B$ 所在的直线作为新坐标系的两轴，求此抛物线在新坐标系中的方程.

40. 就 k 的变化范围，讨论方程

$$x^2+y^2+2x+2y+k(x^2+xy-y^2)=0$$

所代表的曲线类型.

第四章　极坐标与参数方程

§1　极 坐 标

一、概　　述

1. 极坐标和极坐标方程

极坐标系中，是以一个有向距离 ρ 和一个方向角 θ 组成的一对实数作为一个点的坐标．在平面上确定了极坐标系之后，我们得到：

(1) 一对有序实数 (ρ, θ)，对应于平面上的一个点的位置；

(2) 平面上一点的位置，所对应的实数对有无穷个，它们是 $(\rho, 2n\pi+\theta)$ 及 $[-\rho, (2n+1)\pi+\theta]$ 两类，其中 n 是整数．

在极坐标系中，平面内的一条曲线 C，可以用含有 ρ, θ 这两个变量的方程 $F(\rho, \theta)=0$ 来表示，这个方程叫做曲线 C 的极坐标方程．

2. 极坐标和直角坐标的互换

把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正方向作为极轴，在两种坐标系中取相同的长度单位．设 M 点的直角坐标为 (x, y)，极坐标是 (ρ, θ)，则

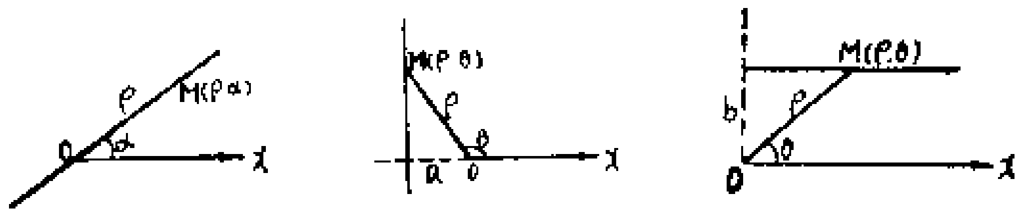
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ tg\theta = \dfrac{y}{x}. \quad (x \neq 0) \end{cases}$$

根据上面的关系式，一个极坐标方程可以转换成直角坐标方程，也可以将一个直角坐标方程转换成极坐标方程.

3. 几种常见曲线的极坐标方程

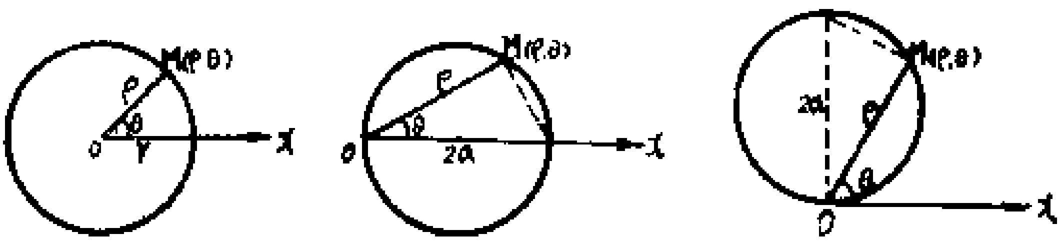
(1) 直线：如图 4—1.



直线 $\theta=\alpha$（α 为定值）　直线 $\rho\cos\theta=a$　直线 $\rho\sin\theta=b$

图 4—1

(2) 圆：如图 4—2.



$\rho=r$（r 是定值）　$\rho=2a\cos\theta$　$\rho=2a\sin\theta$

图 4—2

(3) 圆锥曲线：

以圆锥曲线的焦点 F 作为极点，焦点到准线的距离为 p，且使极轴垂直于准线（如图 4—3），则圆锥曲线在极坐标系中的统一方程是

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}.$$

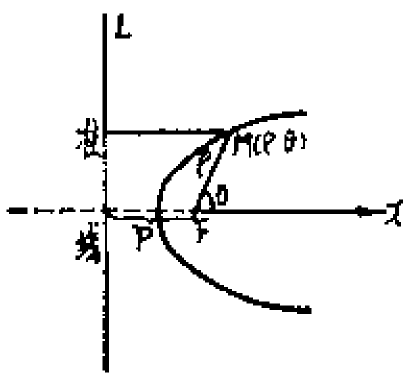


图 4—3

其中 e 是圆锥曲线的离心率. 当$e=1$时，为抛物线；当 $e>1$ 时，为双曲线；当 $0<e<1$ 时，为椭圆.

(4) 心脏线：方程

$$\rho=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$$

所表示的曲线叫做心脏线(图 4—4).

(5) 等速螺线：方程

$$\rho=\rho_0+a\theta$$

所表示的曲线，叫做等速螺线. 这里 a，ρ_0 都是常数，且 $a\neq 0$. 如果 $\rho_0=0$，方程

$$\rho=a\theta\quad(a>0)$$

所表示的曲线，叫做阿基米德螺线(图 4—5).

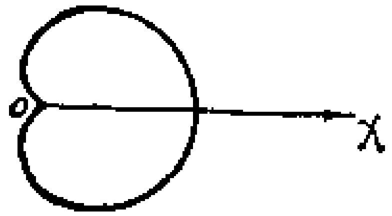


图 4—4

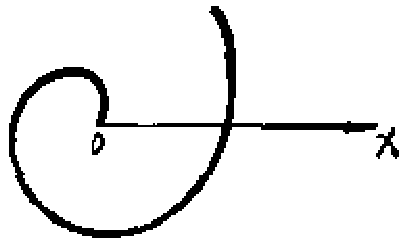


图 4—5

二、例　　题

例 1　试把极坐标方程

$$m\rho\cos^2\theta+3\rho\sin^2\theta-6\cos\theta=0 \tag{①}$$

变换成直角坐标方程，并就 m 的值的变化讨论曲线的形状.

解　因为$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$适合原方程，也就是说，由 $\rho=0$ 确定的极点在曲线上，因此，以 ρ 乘方程两边所得的新方程

$$m\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta-6\rho\cos\theta=0$$

与原方程①表示同样的曲线. 以 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 代入上式，得到曲线的直角坐标方程

$$mx^2 + 3y^2 - 6x = 0 \qquad ②$$

如果 $m=0$，那么方程②就是，

$$y^2 = 2x,$$

它的图象是抛物线，如果 $m \neq 0$，经过配方和整理，可把方程②改写成

$$\frac{\left(x - \frac{3}{m}\right)^2}{\frac{9}{m^2}} + \frac{y^2}{\frac{3}{m}} = 1,$$

从而可知，当 $m>0$ 时，方程②是椭圆；当 $m<0$ 时，方程②是双曲线．$m=3$ 时，方程②为一圆．

在图 4—6 中，我们仅就 $m=1$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$，0，$-\frac{1}{3}$，-1 画出相应的圆锥曲线．由此可以看出：当 m 取正值并向 0 变化时，椭圆的长短轴越来越伸长，终于质变成抛物线；当 m 取负值，并向 0 变化时，双曲线的左支就向左面越去越远，终于在左半平面消失，而右支质变成抛物线．

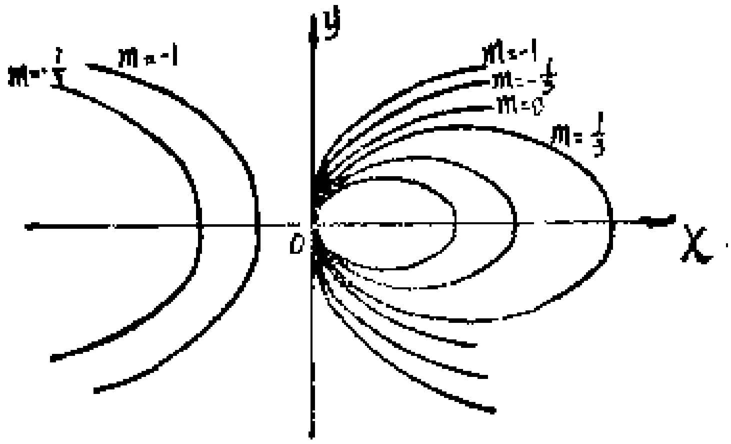


图 4—6

例 2　求下面两曲线的交点：

$$\rho = 2 + 2\cos\theta, \qquad ①$$

$$\rho-\rho\cos\theta=1. \quad ②$$

解法一 先消去 θ，得出关于 ρ 的方程.

由①得

$$\cos\theta=\frac{\rho-2}{2}. \quad ③$$

将 $\cos\theta$ 的值代入②式，得

$$\rho-\rho\cdot\frac{\rho-2}{2}=1,$$

即

$$\rho^2-4\rho+2=0.$$

此方程的两根是

$$\rho_1=2+\sqrt{2},\ \rho_2=2-\sqrt{2}.$$

将 ρ_1 和 ρ_2 分别代入③式，得

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解三角方程．分别求得

$$\theta_1=2n\pi\pm\frac{\pi}{4},\ \theta_2=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}.\ (n\text{ 为整数})$$

因此．两曲线的交点坐标为

$$\left(2+\sqrt{2},\ 2n\pi+\frac{\pi}{4}\right),\ \left(2+\sqrt{2},\ 2n\pi-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\left(2-\sqrt{2},\ 2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right),\ \left(2-\sqrt{2},\ 2n\pi-\frac{3\pi}{4}\right).$$

（n 为整数）

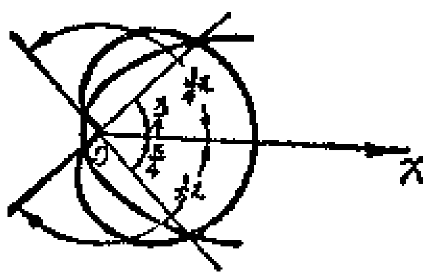


图 4—7

因为坐标 $\left(2+\sqrt{2},\ 2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ 与 $\left(2+\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$ 表示同一个点；$\left(2+\sqrt{2},\ 2n\pi-\frac{\pi}{4}\right)$与

$(2+\sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4})$代表同一个点；$(2-\sqrt{2},\ 2n\pi+\frac{3\pi}{4})$与$(2-\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$代表同一个点；$(2-\sqrt{2},\ 2n\pi-\frac{3\pi}{4})$与$(2-\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4})$代表同一个点，所以，两曲线实际上只有四个交点（如图4—7）．四个交点是$P_1(2+\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4})$，$P_2(2+\sqrt{2},-\frac{\pi}{4})$，$P_3(2-\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4})$，$P_4(2-\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4})$．

解法二　先消去ρ，得到关于θ的方程．

（略）

〔**附注**〕　在极坐标方程中，求两曲线的交点要注意如下两点．

（1）在求交点的坐标过程中，往往要解关于θ的三角方程，因此要注意θ的通解，不能只考虑θ在0到2π之间的数值；

（2）因为在极坐标系中，同一个点可有不同的坐标，所以，求出来的交点坐标必须用作图象的方法进行检验．

例 3　画出方程

$$\rho=a\cos 3\theta \quad (a>0)$$

的图象．

解　先讨论曲线的性质．

（1）因$(0,\ 30^\circ)$适合方程，故曲线通过极点．

（2）因$(a,\ 0)$适合方程，故曲线与极轴相交于点$(a,\ 0)$．

（3）设点$P(\rho_1,\ \theta_1)$适合方程．易知$P_1(\rho_1,\ -\theta_1)$，$P_2(\rho_1,\ 2\times60^\circ-\theta_1)$，$P_3(\rho_1,\ 2\times120^\circ-\theta_1)$也适合方程，所以曲线关于极轴、直线$\theta=60^\circ$、直线$\theta=120^\circ$都是对称的．

由（3）可知：只要画出曲线在极轴与直线 $\theta=60^\circ$ 间的部分，再利用对称性就可以了．而 θ 从 0° 变到 30° 时，ρ 从 a 变到 0；当 $30^\circ<\theta\leqslant60^\circ$，$\rho$ 是负值．

依计算得到下列一些对应值：

θ	0°	15°	20°	30°
ρ	0	0.710	0.50	0

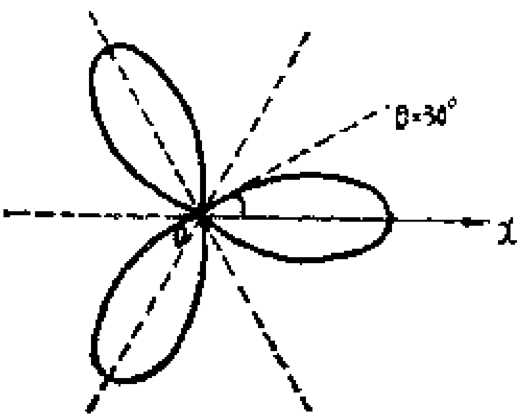


图 4—8

根据这些性质，描出图象（图4—8），称为三叶玫瑰线．

〔附注〕 在描极坐标方程 $f(\rho,\ \theta)=0$ 的图象之前，应对方程加以讨论，讨论的内容如下：

（1） 判别曲线是否经过极点：

令 $\rho=0$，得方程 $f(0,\ \theta)=0$，如果方程有实数解 θ，则曲线经过极点．

（2） 判别曲线是否与极轴相交：

令 $\theta=2n\pi$（n 为整数），得方程 $f(\rho,\ 2n\pi)=0$，如果此方程有正的实数解 ρ，则 $(\rho,\ 2n\pi)$ 是曲线与极轴的交点．

（3） 判别曲线的对称性：

在极坐标方程中，判别曲线的对称性的方法是很多的，下面只给出较常用的两种方法：

如果 $f(\rho,\ \theta)\equiv f(\rho,\ 2a-\theta)$，则曲线关于直线 $\theta=a$（a 为常数）对称．特别是当 $f(\rho,\ \theta)\equiv f(\rho,\ -\theta)$ 时，曲线关于极轴对称；当 $f(\rho,\ \theta)\equiv f(\rho,\ \pi-\theta)$ 时，曲线关于直线 $\theta=90^\circ$ 对称．

如果 $f(\rho, \theta)\equiv f(\rho, \pi+\theta)$（或 $f(\rho, \theta)\equiv f(-\rho, \theta)$），则曲线关于极点对称.

例 4 已知两定点 $A(\rho_1, \theta_1)$ 和 $B(\rho_2, \theta_2)$，求证过 A、B 两点的直线方程是

$$\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\rho}=\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_2}+\frac{\sin(\theta_2-\theta)}{\rho_1} \quad ①$$

分析 图 4—9. 依题意即证直线 AB 上的任意一点 $C(\rho, \theta)$ 的坐标满足方程①. 由方程①得

$$\begin{aligned}&\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)\\=&\rho\rho_1\sin(\theta-\theta_1)\\&+\rho\rho_2\sin(\theta_2-\theta).\end{aligned}$$

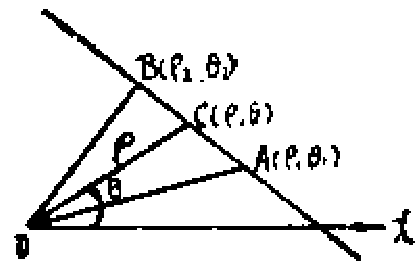


图 4—9

即

$$\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)=\frac{1}{2}\rho\rho_1\sin(\theta-\theta_1)$$

$$+\frac{1}{2}\rho\rho_2\sin(\theta_2-\theta).$$

此等式的左边和右边两项，分别是 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OAC$、$\triangle OCB$ 的面积. 由此启发我们，证明 C 点坐标满足方程①，可以从三个三角形的面积之间的关系着手.

证明 在直线 AB 上任取一点 C，设 C 点的坐标为 (ρ, θ)：

当 C 点在 A，B 两点之间时，$\triangle OAB$ 的面积等于 $\triangle OAC$ 与 $\triangle OBC$ 的面积之和.

$$\because \quad S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1),$$

$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\rho_1\rho\sin(\theta-\theta_1),$$

$$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\rho_2\rho\sin(\theta_2-\theta),$$

$$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OBC},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)=\frac{1}{2}\rho_1\rho\sin(\theta-\theta_1)$$

$$+\frac{1}{2}\rho_2\rho\sin(\theta_2-\theta).$$

将等式两边同乘$\dfrac{2}{\rho_1\rho_2\rho}$，则得到

$$\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\rho}=\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_2}+\frac{\sin(\theta_2-\theta)}{\rho_1}.$$

因此，C 点坐标满足方程①.

当 C 点在 A、B 之外时，则

$$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OCB}.$$

或

$$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBC}-S_{\triangle OAC}.$$

由此同样可以证明 C 点坐标满足方程①.

所以，直线 AB 上的任意一点的坐标都满足方程①，即方程①是过 A，B 两点的直线方程.

例 5 已知一定点 A 和定圆 O'，$AO'=2a$，圆的半径是 a，在圆上任意取一点 B，连接 AB，P 点内分 AB 成 $m:n$ 的比，求 P 点的轨迹.

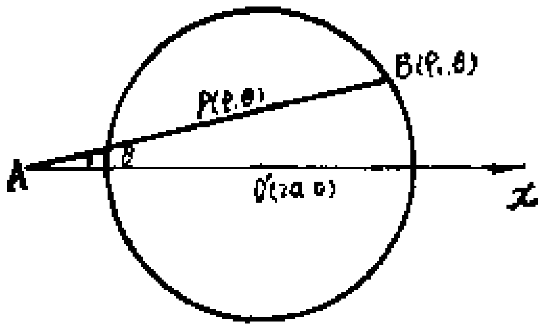


图 4—10

分析　首先要建立坐标系．显然，以 A 点作为极点，AO' 作为极轴（如图 4—10），对问题的解决是方便的．此时定圆 O'的方程为

$$\rho^2-4a\rho\cos\theta+3a^2=0.$$

设 P 点的坐标为$(\rho,\ \theta)$，B 点坐标为$(\rho_1,\ \theta)$. 由于动点 P 的规律较难寻求，可考虑 B 点，因 B 点在圆 O' 上运动，于是可将动点 P 转移到 B 来研究.

$\because$ $$\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n},$$

$\therefore$ $$\frac{AP}{AP+PB}=\frac{m}{m+n},$$

即

$$\frac{\rho}{AB}=\frac{m}{m+n}.$$

由此得

$$\rho_1=AB=\frac{(m+n)\rho}{m}.$$

因此， $$B\left(\frac{(m+n)\rho}{m},\ \theta\right).$$

又 B 点坐标满足圆 O' 的方程，故

$$\left(\frac{(m+n)\rho}{m}\right)^2-4a\left(\frac{(m+n)\rho}{m}\right)\cos\theta+3a^2=0,$$

即

$$(m+n)^2\rho^2-4am(m+n)\rho\cos\theta+3a^2m^2=0.$$

此方程就是 P 点的轨迹方程，轨迹是个圆.

解 （略）.

〔附注〕 应用极坐标求轨迹的方程，一般的步骤是：

(1) 建立极坐标系：针对具体问题，选择适当的点作为极点，再选定极轴的位置；

(2) 建立方程：按题意用等式表示轨迹上点$(\rho,\ \theta)$的性质；

(3) 化简和整理所得方程：在化简和整理过程中，必须注

意每一步是否同解变形.

例 6 O 为半径等于 R 的定圆的圆心，A 是此圆内一定点，且 $OA=\frac{R}{2}$. 作任一半径 OB，连 A 与 B，又作 AP 垂直 AB 交 OB 或 OB 的延长线于 P，求 P 点的轨迹方程.

解 以 O 为极点，OA 所在的直线为极轴（图 4—11）. 设 P 点的坐标为 $(\rho,\ \theta)$.

由余弦定理得

$$\begin{aligned}AB^2&=OB^2+OA^2-2\,|OB|\,|OA|\cos\theta\\&=R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2-2\,R\cdot\frac{R}{2}\cos\theta\\&=\frac{5\,R^2}{4}-R^2\cos\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AP^2&=OP^2+OA^2-2\,|OP|\,|OA|\cos\theta\\&=\rho^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2-2\,\rho\cdot\frac{R}{2}\cos\theta\\&=\rho^2+\frac{R^2}{4}-\rho R\cos\theta.\end{aligned}$$

又因

$$AB^2=BP^2-AP^2,\quad BP=R-\rho.$$

$$\therefore\qquad \frac{5\,R^2}{4}-R^2\cos\theta=(R-\rho)^2-\left(\rho^2+\frac{R^2}{4}-\rho R\cos\theta\right)$$

化简后，得 P 点的轨迹方程

$$\rho=\frac{R(1-2\cos\theta)}{2\,(\cos\theta-2)}.$$

例 7 有一凸轮机构如图 4—12，其边缘离轴心最近一点的距离是 R，如果凸轮的两段曲线使从动杆作往复匀速运动，

求各段曲线的极坐标方程.

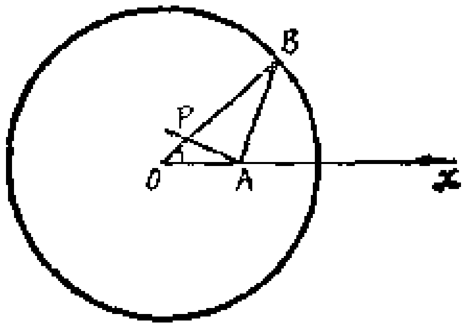


图 4—11

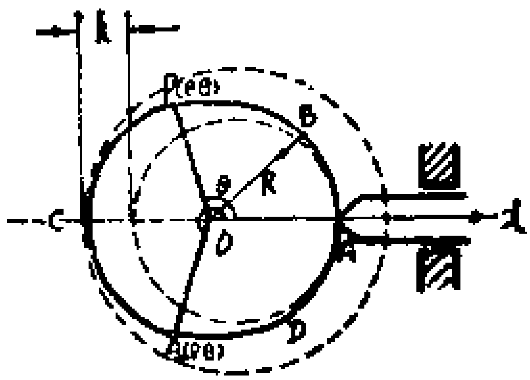


图 4—12

解 因从动杆作等速直线运动，故曲线 ABC 是等速螺线，设它的极坐标方程为

$$\rho=\rho_0+a\theta, \quad ①$$

因点 $A(R,\ O)$ 和点 $C(R+h,\ \pi)$ 都在曲线上，所以

$$\begin{cases} R=\rho_0 \\ R+h=\rho_0+a\cdot\pi \end{cases}$$

解这个方程组得

$$\rho_0=R,\ a=\frac{h}{\pi}$$

代入①得曲线 ABC 的极坐标方程为

$$\rho=R+\frac{h}{\pi}\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

又曲线 CDA 也是等速螺线，设它的极坐标方程为

$$\rho=\rho_1+a_1\theta, \quad ②$$

因点 $C(R+h,\ \pi)$ 和 $A(R,\ 2\pi)$ 都在曲线上，所以

$$\begin{cases} R+h=\rho_1+a_1\pi, \\ R=\rho_1+a_1\cdot 2\pi. \end{cases}$$

解这个方程组得

$$\rho_1 = R + 2h, \quad a_1 = -\frac{h}{\pi}.$$

代入②得曲线 CDA 的极坐标方程为

$$\rho = R + 2h - \frac{h}{\pi}\theta. \quad (\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

例 8 经过圆锥曲线的焦点任意作两条互相垂直的弦 A_1B_1 和 A_2B_2，求证：

$$\frac{1}{|A_1B_1|} + \frac{1}{|A_2B_2|} = \text{定值}.$$

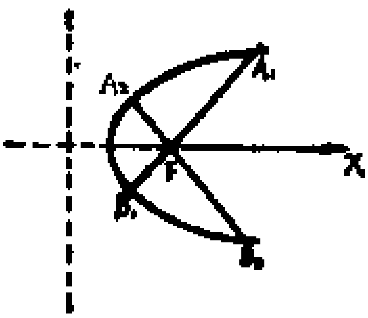


图 4—13

解 设圆锥曲线的焦点 F 到准线的距离为 p，离心率为 e. 以 F 为极点，焦点向准线所作的垂线为极轴(图 4—13)，则圆锥曲线的方程是

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta},$$

其中 e 和 p 是定值.

设 A_1 的极角为 θ，则 A_2，B_1，B_2 的极角分别是 $\theta + \frac{\pi}{2}$，$\theta + \pi$，$\theta + \frac{3\pi}{2}$. 于是有

$$A_1B_1 = A_1F + FB_1 = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} + \frac{ep}{1 - e\cos(\theta + \pi)}$$

$$= \frac{ep}{1 - e\cos\theta} + \frac{ep}{1 + e\cos\theta} = \frac{2ep}{1 - e^2\cos^2\theta},$$

$$A_2B_2 = A_2F + FB_2 = \frac{ep}{1 - e\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{ep}{1 - e\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{ep}{1 + e\sin\theta} + \frac{ep}{1 - e\sin\theta} = \frac{2ep}{1 - e^2\sin^2\theta}.$$

所以

$$\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{A_2B_2}=\frac{1-e^2\cos^2\theta}{2ep}+\frac{1-e^2\sin^2\theta}{2ep}$$

$$=\frac{2-e^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{2ep}=\frac{2-e^2}{2ep}\text{（定值）}$$

证毕.

习　题　一

1．把下列曲线的极坐标方程化为直角坐标方程，并指出它们各是什么曲线．

（1）$\rho\sin\theta=10$；

（2）$\rho=7$；

（3）$\theta=45^\circ$；

（4）$\rho(5+3\cos\theta)=16$；

（5）$\rho^2\cos 2\theta=-1$；

（6）$\rho=\dfrac{9}{4+5\cos\theta}$；

（7）$\rho=\dfrac{6}{\sin\theta+2\cos\theta}$；

（8）$\rho=-\dfrac{6\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}$；

（9）$\rho=\dfrac{6}{2-\cos\theta}$；

（10）$\rho^{\frac{1}{2}}\cos\dfrac{\theta}{2}=a^{\frac{1}{2}}$．

2．把下列曲线的直角坐标方程化为极坐标方程：

（1）$y^2=12x$；

（2）$x^2+y^2=4x$；

（3）$x^2-y^2=20$；

(4) $4x^2+y^2=4$；

(5) $x^2-2xy+y^2-x+4=0$；

(6) $xy=7$；

(7) $y^2=4(1-x)$；

(8) $x^3=y^2(2a-x)$；

(9) $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$；

(10) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$.

3. 导出已知两点$(\rho_1,\ \theta_1)$和$(\rho_2,\ \theta_2)$间的距离公式.

4. 已知$\triangle ABC$的顶点坐标是：

$$A(5,\ 90^\circ),\ B\left(8,\ \frac{5\pi}{6}\right),\ C\left(3,\ \frac{7\pi}{6}\right)$$

求证$\triangle ABC$是等边三角形.

5. 极点不动，把极轴反时针方向转过α角，设一点P的坐标原为$(\rho,\ \theta)$，经过转轴后对新极轴的坐标为$(\rho',\ \theta')$，求证：

$$\rho=\rho',\ \theta=\theta'+\alpha,$$

或

$$\rho=\rho',\ \theta'=\theta-\alpha.$$

6. 设A点的极坐标是$\left(5,\ \frac{\pi}{3}\right)$，写出该点在下列形式下的极坐标：

(1) 使$\rho<0$，$0\leqslant\theta<2\pi$；

(2) 使$\rho>0$，$-2\pi<\theta\leqslant 0$；

(3) 使$\rho<0$，$-\pi<\theta\leqslant 0$.

7. 已知两点$A(3,\ 60^\circ)$，$B(3,\ 30^\circ)$，求：

(1) $\triangle AOB$的面积；

(2) 直线AB与极轴的夹角；

(3) A，B 两点的距离；

(4) 以 A 点为圆心且经过 B 点的圆的极坐标方程.

8. 给了点的极坐标：$\rho=10$，$\theta=30°$，如果极点在点(2，3)处，而极轴平行于 ox 轴，求点的直角坐标.

9. 极点在点(3，5)处，极轴与 y 轴方向一致，求点 $M_1(9，-1)$ 和 $M_2(5，5+2\sqrt{3})$ 的极坐标.

10. 在极轴上求和点 $A\left(4\sqrt{2}，\frac{\pi}{4}\right)$ 距离等于 5 的点.

11. 讨论下列方程的曲线的性质，并作出它们的曲线：

(1) $\rho^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$；

(2) $\rho=a\cos\theta\cos 2\theta$；$(a>0)$

(3) $\rho=a\sin 2\theta$；$(a>0)$

(4) $\rho=a\cos 2\theta$；$(a>0)$

12. 求下列各条曲线的极坐标方程：

(1) 经过点 $P\left(2，\frac{\pi}{4}\right)$，垂直于极轴的直线；

(2) 经过 $Q\left(3，\frac{\pi}{3}\right)$，平行于极轴的直线；

(3) 圆心在极点，半径等于 $\sqrt{2}$ 的圆；

(4) 圆心在 $A\left(R，\frac{\pi}{2}\right)$，半径为 R 的圆；

(5) 经过点 $A\left(3，\frac{3\pi}{2}\right)$ 和 $B(3，0)$ 的直线.

13. 求下列每两曲线的交点：

(1) $\rho=4(1+\cos\theta)$ 和 $\rho(1+\cos\theta)=9$；

(2) $4\rho\cos(\theta-90°)=3a$ 和 $\rho=a\sin\theta$；$(a>0)$

(3) $\rho^2=a^2\sin\theta$ 和 $\rho^2=a^2\sin 3\theta$；$(a>0)$

(4) $\rho=a\sin 2\theta$ 和 $\rho=a(1-\cos 2\theta)$；$(a>0)$

(5) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 和 $\rho^2=\cos 2\theta$.

14. 求圆 $\rho^2-2\rho(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)-5=0$ 的圆心坐标和它的半径.

15. 通过圆锥曲线焦点 F 作这曲线的弦 $|PQ|$，求证 $\frac{1}{|FP|}+\frac{1}{|FQ|}=$ 定值.

16. 设双曲线的极坐标方程是 $\rho=\frac{ep}{-1-e\cos\theta}$，求证它的渐近线的倾角是 $\arccos\left(\pm\frac{1}{e}\right)$，渐近线的夹角是 $\arccos\frac{2-e^2}{e^2}$.

17. 证明下列问题：

(1) 方程 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 和 $\rho=\frac{ep}{-1-e\cos\theta}$ 代表同一条圆锥曲线；

(2) 方程 $\rho=\frac{a(1-2\cos\theta)}{2(\cos\theta-2)}$ 和 $\rho=\frac{a(1+2\cos\theta)}{2(\cos\theta+2)}$ 代表同一条曲线；

(3) 曲线 $\rho^2\sin 2\theta=a^2$ 关于直线 $\theta=45^\circ$ 对称.

18. 证明：直线 $\rho=\frac{1}{a\cos\theta+b\sin\theta}$ 与圆 $\rho=2c\cos\theta$ 相切的条件是 $b^2c^2+2ac=1$.

19. 设 $p(\rho_1, \alpha)$ 是圆锥曲线 $\rho=\frac{L}{1-e\cos\theta}$ 上的任意一点，求证过 p 点的切线方程是

$$\rho=\frac{L}{\cos(\theta-\alpha)-e\cos\theta}.$$

20. 两点 A, B 的距离是 $2a$，今有一动点 P，有关系：

$PA \cdot PB = a^2$，求 P 点的轨迹.

21. 从极点 O 作直线与直线 L：$a\rho\cos\theta + b\rho\sin\theta + c = 0$ 交于一点 G，P 点内分 OG 成 $m:n$ 的比，当 G 点在直线 L 上移动时，求 P 点的轨迹.

22. 取一定点 O，及一定直线 BC，自 O 引任意直线 OR 交 BC 于 D，再于 OR 自 D 向两端取 $DP = DQ = b$，求 P 和 Q 的轨迹.

23. 自一定圆周上一点 O，引任一直线交圆于 D，自 D 向直线两端取 $DP = DQ = b$，求 P，Q 两点的轨迹.

24. 在圆周上一定点 O 作直径 OA，再在 A 点作这圆的切线 LK. 从 O 作一任意直线交圆于 D，又交 LK 于 E. 在 OE 上取一点 P，使 $OP = DE$，求 P 点的轨迹.

25. P_1 和 P_2 为自定点 O 引一直线与一定圆的交点，P 为此直线上他一点使得 $OP = \dfrac{2\,OP_1 \cdot OP_2}{OP_1 + OP_2}$，求 P 点的轨迹.

26. 已知定点 O 与定直线 L，在直线 L 上任取一点 Q，连接 OQ，以线段 OQ 为一边作正三角形 PQO，当 Q 点变动时，$\triangle PQO$ 也随着变动，当这些三角形的旋转方向一定时（即为反时针方向或顺时针方向），求 P 点的轨迹方程.

27. 证明：圆锥曲线过焦点的弦的中点的轨迹仍然是圆锥曲线.

28. 凸轮机构如图 4—14，设凸轮边缘上一点 A 离轴心 O 最近，$OA = R$，点 B 离 O 最远，$OB = R + K$. 凸轮以角速度 ω 转动，使从动杆作往复等速运动，求曲线弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{BA}$ 的极坐标方程.

29. 凸轮机构如图 4—15 所示，它的轮廓线 ABC 部分和 ADC 部分是对称的，从动杆接触 ABE 段时，从动杆不动；从

动杆接触 EC 段时 ($\angle EOC=65°$)，从动杆被等速推出；求凸轮各段轮廓线的极坐标方程.

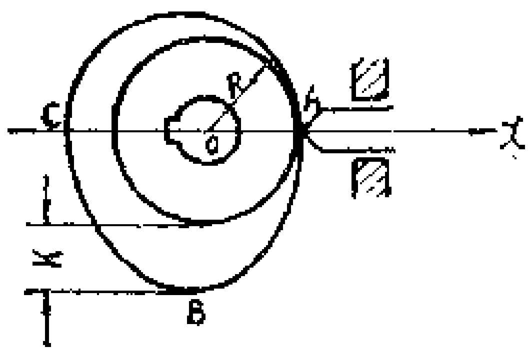


图 4—14

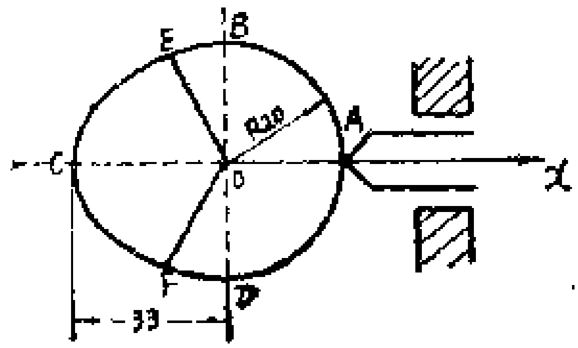


图 4—15

§2 参数方程

一、概 述

1. 曲线的普通方程和参数方程

在平面内取定直角坐标系，并且给定了曲线 C：

如果曲线 C 上任意一点的坐标 x 和 y 的关系用方程 $F(x,y)=0$ 直接表示，则方程 $F(x,y)=0$ 叫做曲线 C 的普通方程；

如果参数方程

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad a\leqslant t\leqslant b \tag{1}$$

满足下列条件：

(1) 对于每一个适合条件 $a\leqslant t_0\leqslant b$ 的 t_0，通过参数方程①所确定的点 $P_0(f(t_0), g(t_0))$ 在曲线 C 上；

(2) 对于曲线 C 上的任意一点 $P_1(x_1,y_1)$ 都至少存在一个 t_1，$a\leqslant t_1\leqslant b$，有

$$x_1=f(t_1), \quad y_1=g(t_1),$$

则方程①叫做曲线 C 的参数方程.

同一条曲线，由于参数的选择不同，参数方程往往是不同的.

2. 普通方程与参数方程的互换

(1) 将参数方程化为普通方程：

由参数方程(1)消去参数 t，就得到普通方程

$$F(x, y)=0. \tag{②}$$

(2) 将普通方程化为参数方程：

如果已给出曲线 C 的普通方程②，则可以根据图形的特点或所研究问题的性质选择一个参数 t，求得

$$x=f(t),\ (\text{或 } y=g(t)) \tag{③}$$

代入普通方程

$$F(f(t), y)=0,\ (\text{或 } F(x, g(t))=0)$$

求得

$$y=g(t),\ (\text{或 } x=f(t)). \tag{④}$$

则③、④称为曲线 C 的参数方程.

将参数方程化为普通方程，必须考虑它是否与原参数方程等价. 反之，由普通方程化为参数方程，同样要考虑两种方程的等价问题.

3. 几种常见曲线的参数方程

(1) 直线：

经过点 $M_0(x_0, y_0)$，倾角为 α 的直线的一般参数方程是

$$\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt.\end{cases}$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$. 如果参数 t 表示直线上的动点 $M(x, y)$ 与点 $M_0(x_0, y_0)$ 的距离，且当 M 点在 M_0 点的上方时，$t>0$；当

M 点在 M_0 点的下方时，$t<0$；当 M、M_0 重合时，$t=0$（图 4—16）；则直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha.\end{cases}$$

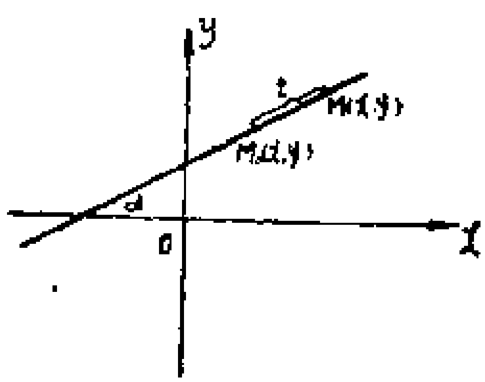


图 4—16

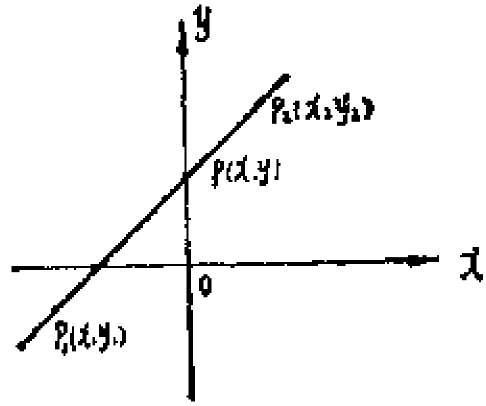


图 4—17

经过 $P_1(x_1,\ y_1)$ 和 $P_2(x_2,\ y_2)$ 两定点的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\end{cases}$$

其中参数 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$，图 4—17，当 $\lambda>0$ 时，动点 $P(x,\ y)$ 在 P_1 和 P_2 两定点之间；当 $\lambda<0$ 时，动点 P 在 P_1P_2 的延长线上。

(2) 圆：

以 $C(x_0,\ y_0)$ 为圆心，r 为半径的圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta,\\ y=y_0+r\sin\theta.\end{cases}\quad (0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$$

图 4—18．其中参数 θ 是动半径的倾角．

(3) 椭圆：

椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

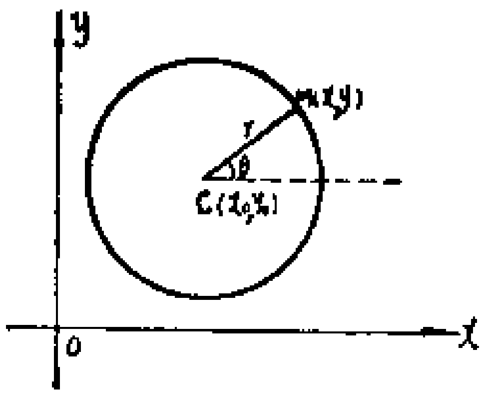


图 4—18

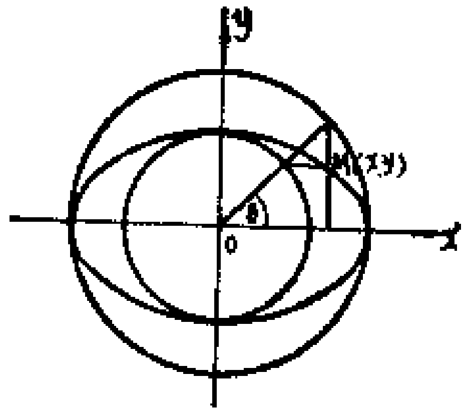


图 4—19

的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta.\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

图 4—19．其中参数 θ 是动点 $M(x,\ y)$ 的离心角．

(4) 双曲线：

双曲线方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\sec\theta,\\ y=b\operatorname{tg}\theta.\end{cases}\quad\left(\theta\neq\frac{\pi}{2},\theta\neq\frac{3\pi}{2}\right)$$

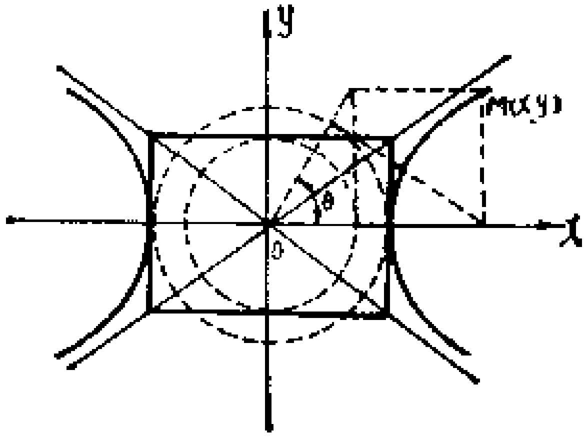


图 4—20

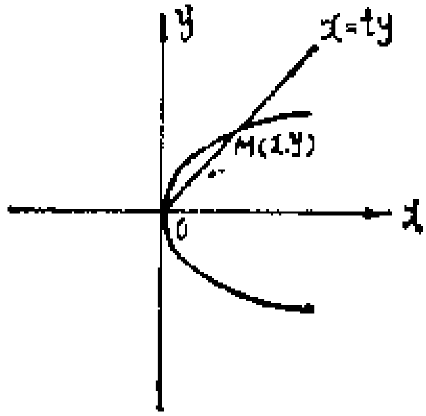


图 4—21

其中参数 θ 的几何意义如图 4—20 所示。

(5) 抛物线：

抛物线方程

$$y^2 = 2Px$$

的参数方程是

$$\begin{cases} x = 2Pt^2, \\ y = 2Pt. \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

其中参数 t 为过抛物线顶点(0, 0)的割线的斜率的倒数，图 4—21.

(6) 圆的渐开线(图 4—22)：

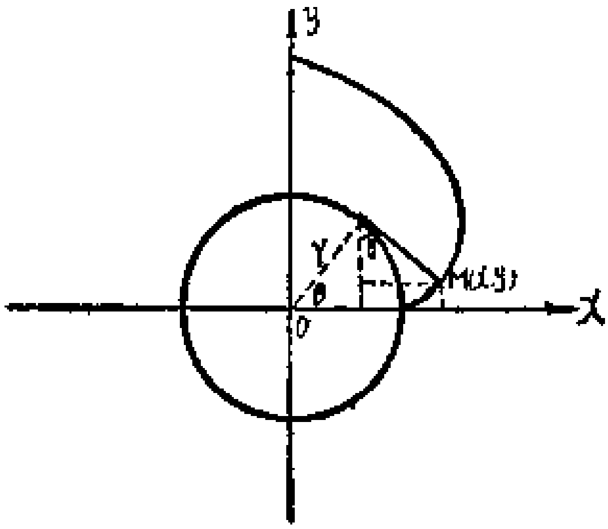


图 4—22

一条直线，紧绕在一个半径是 r 的圆上，这条直线逐渐撤开，使撤开的部分成为圆的切线，那么这条直线上任意一个固定点的轨迹，

叫做圆的渐开线．渐开线的参数方程是

$$\begin{cases} x = r(\cos\theta + \theta\sin\theta), \\ y = r(\sin\theta - \theta\cos\theta). \end{cases}$$

(7) 摆线(图 4—23)．

一个半径是 r 的圆，沿着一条定直线无滑动地滚动时，这个圆周上任意一个定点 M 的轨迹叫做摆线．摆线的参数方程为

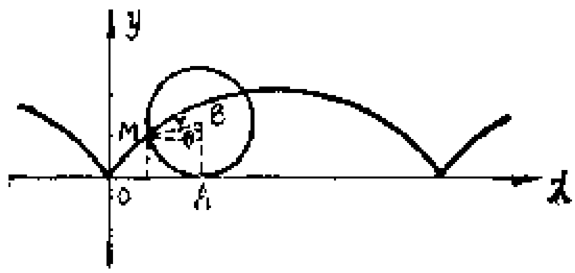


图 4—23

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta), \\ y = r(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

3．由参数方程画图象

画参数方程

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t) \end{cases}$$

的图象，一般是描点法．为使描点更具有针对性，需要根据参数方程的特征，对其图象进行讨论．一般说来，讨论包括以下几个方面：

(1) 曲线是否经过原点：

若有参数 t 的值能同时使 $f(t)=0$，$g(t)=0$，则曲线经过原点．

(2) 曲线在坐标轴上的截距：

若方程 $g(t)=0$ 有实根，以这些 t 值代入方程 $x=f(t)$ 所得的 x 值，就是曲线在 x 轴上的截距；若方程 $f(t)=0$ 有实根，以这些 t 值代入方程 $y=g(t)$ 所得的 y 值，就是曲线在 y 轴上的截距．

(3) 曲线的对称性：

若有 t_1 和 t_2 能同时使 $f(t_1)=f(t_2)$ 且 $g(t_1)=-g(t_2)$，则曲线关于 x 轴对称；若有 t_1 和 t_2 能同时使 $f(t_1)=-f(t_2)$ 且 $g(t_1)=g(t_2)$，则曲线关于 y 轴对称.

若有 t_1 和 t_2 能同时使 $f(t_1)=-f(t_2)$ 且 $g(t_1)=-g(t_2)$，则曲线关于原点对称.

若有 t_1 和 t_2 能同时使 $f(t_1)=g(t_2)$ 且 $g(t_1)=f(t_2)$ 则曲线关于直线 $y=x$ 对称；若有 t_1 和 t_2 能同时使 $f(t_1)=-g(t_2)$ 且 $g(t_1)=-f(t_2)$，则曲线关于直线 $y=-x$ 对称.

(4) 曲线的变化的大致情况：

若 $f(t)$、$g(t)$ 均为有界函数，则曲线不能伸向无穷远，否则，曲线可以伸向无穷远.

研究曲线变化的大致情况，先分别研究出 $x=f(t)$，$y=g(t)$ 的变化情况，然后以参数 t 作为桥梁，研究当 x 变化时，对应 y 的变化情况.

二、例　　题

例 1　化参数方程

$$\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\operatorname{tg}\theta+\sin\theta\end{cases}\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

为普通方程.

解　原参数方程即为

$$\begin{cases}x-1=\cos\theta & ①\\ y-\operatorname{tg}\theta=\sin\theta & ②\end{cases}$$

将②÷①，得

$$\frac{y-\operatorname{tg}\theta}{x-1}=\operatorname{tg}\theta.$$

由此得

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}.$$

将其代入②式，得

$$y-\frac{y}{x}=\sin\theta, \qquad ③$$

①^2+③^2，得

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{y}{x}\right)^2=1,$$

即

$$(x^2+y^2)(x-1)^2=x^2.$$

其中 $1<x<2$，$y>0$.

〔附注〕 消去参数的方法是多种多样的．对于一般简单的参数方程，可以用代入法消去．如果参数方程中含有三角函数式，可利用三角公式消去参数．

例 2 引进适当的参数，将椭圆方程

$$5x^2-2xy+y^2-2x+2y=0$$

化为参数方程．

解 为了确定 x 的允许值，首先解出 y.

由原方程得

$$y^2-2(x-1)y+5x^2-2x=0.$$

$$\therefore \qquad y=(x-1)\pm\sqrt{1-4x^2}. \qquad ①$$

由此可见，应有 $4x^2\leqslant 1$，即

$$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}.$$

于是可令

$$x=\frac{1}{2}\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

将 x 值代入(1)式，得

$$y=\frac{1}{2}\cos\theta-1\pm\sin\theta.\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

当 $0\leqslant\theta_1\leqslant\pi$，而 $y=\frac{1}{2}\cos\theta-1+\sin\theta$ 时，取 $\theta=\theta_1$，则有

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos\theta_1, \\ y=\frac{1}{2}\cos\theta_1-1+\sin\theta_1. \end{cases}$$

当 $0\leqslant\theta_1\leqslant\pi$，而 $y=\frac{1}{2}\cos\theta-1-\sin\theta$ 时，取 $\theta'=2\pi-\theta_1$，则有

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos\theta_1=\frac{1}{2}\cos(2\pi-\theta_1)=\frac{1}{2}\cos\theta' \\ y=\frac{1}{2}\cos\theta_1-1-\sin\theta_1 \\ \quad=\frac{1}{2}\cos(2\pi-\theta_1)-1+\sin(2\pi-\theta_1) \\ \quad=\frac{1}{2}\cos\theta'-1+\sin\theta'. \end{cases}$$

其中 $\pi\leqslant\theta'\leqslant2\pi$.

因此，椭圆的参数方程可以写成关于参数 θ 的单值函数的形式：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos\theta, \\ y=\frac{1}{2}\cos\theta+\sin\theta-1. \end{cases}$$

其中参数的变化范围是$[0,\ 2\pi]$.

附注 (1) 根据已知曲线的普通方程选定函数 $x=f(t)$ 时，必须注意使函数 $f(t)$ 的取值域与普通方程中 x 的允许值域一致. 其次还应注意所得参数方程中的两个函数 $x=f(t)$，$y=g(t)$

是关于参数 t 的单值函数.

(2) 在普通方程中，如果 x(或 y) 的允许值域不易观察，则可以就方程解出 y，然后依据 x 的允许值域选取适当的函数关系 $x=f(t)$，使函数 $f(t)$ 的取值域与 x 的允许值域一致.

例 3 描绘参数方程

$$\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$$

的图象.

解 由于 $\sin^3 t$，$\cos^3 t$ 的周期都是 $360°$，所以仅就 $0°\leqslant t\leqslant 360°$ 内进行讨论：

(1) 曲线不经过原点：因为 $\sin^3 t$，$\cos^3 t$ 不能同时为零.

(2) 曲线在坐标轴上的截距：

令 $y=\sin^3 t=0$，则 $t=0°$ 或 $t=180°$，从而 $x(0°)=\cos^3 0°=1$，$x(180°)=\cos^3 180°=-1$，所以曲线在 x 轴上的截距是 -1 和 1.

令 $x=\cos^3 t=0$，则 $t=90°$ 或 $t=270°$. 从而 $y(90°)=\sin^3 90°=1$，$y(270°)=\sin^3 270°=1$，所以曲线在 y 轴上的截距是 -1 和 1.

(3) 对称性：

存在 t 及 $-t$，使

$$\sin^3 t=-\sin^3(-t) \text{ 且 } \cos^3 t=\cos^3(-t),$$

因此曲线关于 x 轴对称.

存在 t 及 $180°-t$，使

$$\sin^3 t=\sin^3(180°-t) \text{ 且 } \cos^3 t=-\cos(180°-t),$$

因此曲线关于 y 轴对称.

存在 t 及 $90°-t$，使

$$\sin^3 t=\cos^3(90°-t) \text{ 且 } \cos^3 t=\sin^3(90°-t),$$

所以曲线关于直线 $y=x$ 对称.

由此可知，只要画出 $0\leqslant t\leqslant 45^\circ$ 时的图象. 其他部分就可依对称性作图.

(4) 曲线的大致变化情况：

由于 $x=\cos^3 t$，$y=\sin^3 t$ 在 $0^\circ\leqslant t\leqslant 45^\circ$ 的变化情况分别是

t	$0^\circ \nearrow 45^\circ$
$\cos t$	$1 \searrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
$x=\cos^3 t$	$1 \searrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$
t	$0^\circ \nearrow 45^\circ$
$\sin t$	$0 \nearrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
$y=\sin^3 t$	$0 \nearrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$

所以当 t 由 0 增到 45° 时，x 由 1 减小到$\frac{1}{2\sqrt{2}}$，而 y 由 0 增到$\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 即当 x 由$\frac{1}{2\sqrt{2}}$增到 1 时，y 由$\frac{1}{2\sqrt{2}}$减小到0，曲线是下降的.

列出如下一些数值：

t	0°	10°	20°	30°	40°	45°
$x=\cos^3 t$	1	0.95	0.83	0.65	0.44	0.35
$y=\sin^3 t$	0	0.005	0.04	0.13	0.26	0.35

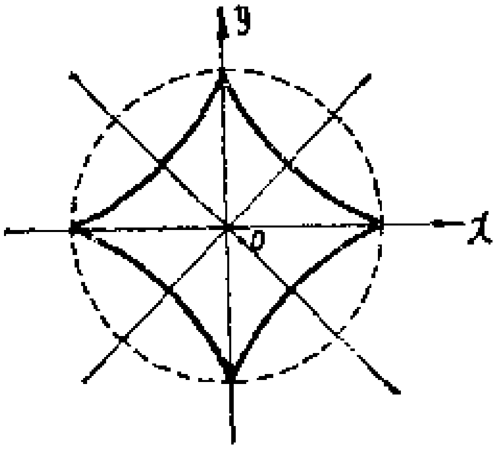


图 4—24

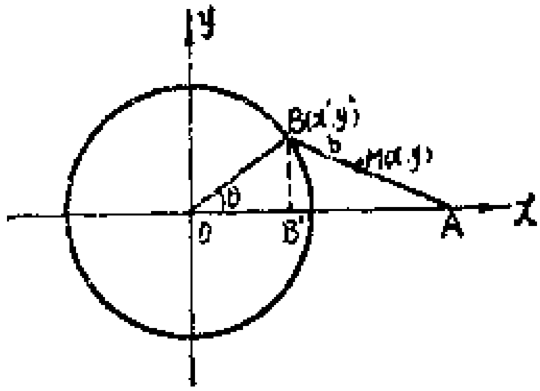


图 4—25

根据以上讨论，可知参数方程的图象如图 4—24．这是一条四岐内旋轮线．

例 4 如图 4—25．OB 是机器上的曲柄，长为 r，绕 o 点转动；AB 是连杆，A 在 ox 轴上作往返运动，M 是 AB 上一点，$AM=a$，$MB=b$．当点 B 绕 o 点作圆周运动时，求 M 点的轨迹方程．

分析 显然 M 点的坐标 x 和 y 随着 $\angle BoA$ 的变化而变化，而且是 $\angle BoA$ 的单值函数，因此，引进 $\angle BoA=\theta$ 作为 M 点坐标的参数是适宜的．又 M 点是线段 AB 内的定比分点，且 $\lambda=BM:MA=b:a$，因此，求 M 点坐标必须先求出 A，B 的坐标．

解 设 B 点坐标为 $(x',\ y')$，则

$$x'=r\cos\theta,\ \ y'=r\sin\theta$$

又 $|B'A|=\sqrt{BA^2-BB'^2}=\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta}$，

故 A 点坐标是

$$A(r\cos\theta+\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta},\ 0)$$

因 $$\lambda=\frac{BM}{MA}=\frac{b}{a},$$

所以，M 点的坐标的参数方程是

$$x=\frac{r\cos\theta+\lambda[r\cos\theta+\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta}]}{1+\lambda}$$

$$=\frac{r\cos\theta+\frac{b}{a}[r\cos\theta+\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta}]}{1+\frac{b}{a}}$$

$$=r\cos\theta+\frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta},$$

$$y=\frac{r\sin\theta}{1+\lambda}=\frac{r\sin\theta}{1+\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{ar\sin\theta}{a+b}.$$

因此，M 点的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases}x=r\cos\theta+\dfrac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta},\\ y=\dfrac{ar\sin\theta}{a+b}.\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$$

下面讨论方程所代表的曲线

(1) 当 $r<a+b$ 时，M 点轨迹为一卵形圆；

(2) 当 $r=a+b$ 时，方程为

$$\begin{cases}x=(a+b)\cos\theta+b\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\theta}{2}\right)$$

即

$$\begin{cases}x=(a+2b)\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}$$

M 点的轨迹为一椭圆的右半部分；或者

$$\begin{cases}x=(a+b)\cos\theta-b\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}\quad\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$$

即

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$$

M 点的轨迹为一椭圆的左半部分；

(3) 当 $r>a+b$ 时，M 点无轨迹(无实际意义)。

例 5 证明：过椭圆的焦点的各弦中点的轨迹还是一个椭圆.

分析 图 4—26，设椭圆为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0). ①$$

动点 $P(x, y)$ 为过椭圆的焦点 $F(c, 0)$ 的一条弦 M_1M_2 的中点，且 $M_1(x_1, y_1)$、$M(x_2, y_2)$. 直线 M_1M_2 的方程为

$$y=k(x-c).$$

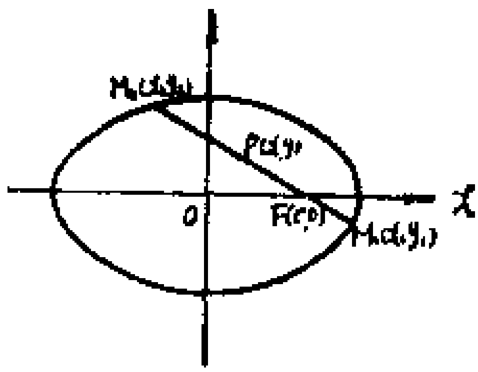


图 4—26

当过 F 的弦变动时，点 P 随斜率 k 而变动，故可选取 k 为参数. 不难知道直线 M_1M_2 与椭圆的交点 M_1、M_2 的坐标与 k 有关，故 M_1M_2 的中点 $P(x, y)$ 的坐标 x 和 y 也就与 k 有关，于是可得关于 k 的参数方程.

解 设 M_1M_2 的方程为

$$y=k(x-c). \qquad ②$$

将 y 值代入椭圆方程①，整理后得

$$(a^2k^2+b^2)x^2-2a^2k^2cx+a^2(k^2c^2-b^2)=0.$$

根据韦达定理

$$x_1+x_2=\frac{2a^2k^2c}{a^2k^2+b^2}.$$

又 $y_1=k(x_1-c)$，$y_2=k(x_2-c)$，故

$$y_1+y_2=k(x_1-c)+k(x_2-c)=k(x_1+x_2)-2kc$$
$$=\frac{2a^2k^3c}{a^2k^2+b^2}-2kc=\frac{-2b^2kc}{a^2k^2+b^2}.$$

因为 $P(x, y)$ 是 M_1M_2 的中点，故

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{a^2k^2c}{a^2k^2+b^2}, & \text{③} \\ & -\infty<k<+\infty \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=-\dfrac{b^2kc}{a^2k^2+b^2}. & \text{④} \end{cases}$$

消去参数 k，由③÷④，得

$$k=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

将 k 值代入②式，得

$$y=-\frac{b^2x}{a^2y}(x-c),$$

即
$$b^2x^2-b^2cx+a^2y^2=0.$$

通过配方，整理成

$$\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bc}{2a}\right)^2}=1.$$

它的轨迹是一个椭圆．证毕．

例 6 过抛物线的顶点任作互相垂直的两弦，交抛物线于两点，求证此两点连线的中点的轨迹仍是一条抛物线．

证法一 图 4—27．设抛物线方程为

$$y^2=2px,$$

它的参数方程为

$$\begin{cases} x=2pt^2, \\ y=2pt. \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty)$$

又设 $oA\perp oB$，A 点坐标为 $(2pt^2, 2pt)$，AB 的中点坐标

为 (x, y). 则 oA, oB 的斜率为

$$k_{oA}=\frac{2pt}{2pt^2}=\frac{1}{t},\quad k_{oB}=-\frac{1}{k_{oA}}=-t.\quad (t\neq 0)$$

故直线 oB 的方程为 $y=-tx$.

解方程组

$$\begin{cases} y^2=2px \\ y=-tx, \end{cases}$$

求出 B 点的坐标

$$B\left(\frac{2p}{t^2},\ -\frac{2p}{t}\right).$$

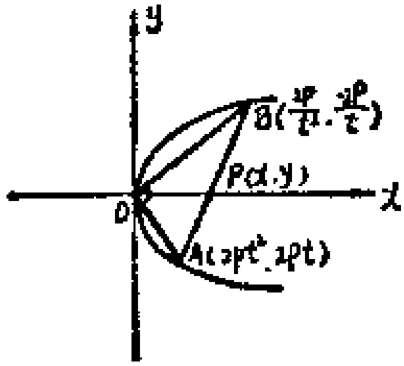


图 4—27

因此，线段 AB 的中点 $P(x, y)$ 的坐标是

$$\begin{cases} x=\dfrac{2pt^2+\dfrac{2p}{t^2}}{2}=pt^2+\dfrac{p}{t^2}, \\ y=\dfrac{2pt-\dfrac{2p}{t}}{2}=pt-\dfrac{p}{t}. \end{cases}\quad (t\neq 0)$$

即

$$\begin{cases} x=p\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right), \\ y=p\left(t-\dfrac{1}{t}\right). \end{cases}\quad (t\neq 0)$$

消去参数 t; 因

$$t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2.$$

故

$$\frac{x}{p}=\left(\frac{y}{p}\right)^2+2.$$

化简整理后，得中点 P 的轨迹方程

$$y^2=p(x-2p).$$

它是一条抛物线. 证毕.

证法二 设抛物线方程为

$$y^2=2px.$$

$oA\perp oB$, A, B 的坐标分别为(x_1, y_1), (x_2, y_2). 则

$$y_1^2=2px_1,\quad y_2^2=2px_2.$$

$\therefore\quad (y_1y_2)^2=4p^2x_1x_2,\quad y_1y_2=-2p\sqrt{x_1x_2}.$

又 $k_{oA}=\dfrac{y_1}{x_1}$, $k_{oB}=\dfrac{y_2}{x_2}k_{oA}\cdot k_{oB}=-1$,

$$\therefore\quad \frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1,$$

即

$$y_1y_2=-x_1x_2.$$

$$\therefore\quad (-x_1x_2)^2=4p^2x_1x_2$$

$\therefore\quad x_1x_2=4p^2,\quad y_1y_2=-2p\sqrt{4p^2}=-4p^2.$

设 AB 的中点为 $P(x, y)$, 则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad y^2&=\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}{4}\\&=\frac{2px_1+2px_2+2y_1y_2}{4}\\&=2p\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{-4p^2}{2}=px-2p^2\\&=p(x-2p).\end{aligned}$$

因此, AB 中点的轨迹方程为

$$y^2=p(x-2p).$$

例 7 从点 $M(2, 2)$向椭圆族

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=k\quad 0\leqslant k\leqslant 1$$

的每一个椭圆作切线，求切点的轨迹.

解 图 4—28. 设过点 $M(2,\ 2)$ 的切线的倾角为 α，则切线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + t\cos\alpha \\ y = 2 + t\sin\alpha. \end{cases}$$

将 x，y 的值分别代入椭圆方程，整理后得

$$(\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha)t^2 + 4(\cos\alpha + 2\sin\alpha)t + 12 - 12k = 0.$$

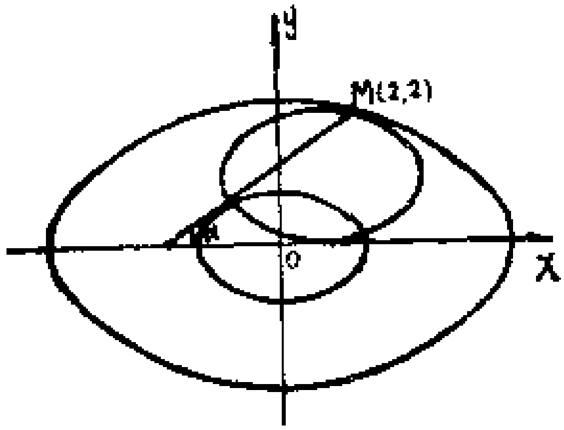


图 4—28

因为直线与椭圆相切，故此方程的两根相等，且方程的根（当 $0 \leqslant k \leqslant 1$ 时有实根）为

$$t = -\frac{2(\cos\alpha + 2\sin\alpha)}{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}.$$

因此，切点坐标为

$$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{2(\cos\alpha + 2\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha} = \dfrac{4(\operatorname{tg}\alpha - 1)\operatorname{tg}\alpha}{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha} & ① \\ y = 2 - \dfrac{2(\cos\alpha + 2\sin\alpha)\sin\alpha}{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha} = \dfrac{2(1 - \operatorname{tg}\alpha)}{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha} & ② \end{cases}$$

①÷②，得

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{x}{2y}.$$

将 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值代入②式，化简后得

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{3/2} = 1.$$

此方程即为所求的切点的轨迹方程.

例 8 在△ABC 中，顶点 A 不动，$BC = a$，a 为定值，BC 边在一直线上移动，求△ABC 外心的轨迹.

分析 如图 4—29 建立坐标系，BC 所在的直线为 x 轴，过 A 点而垂直于 BC 的直线为 y 轴.

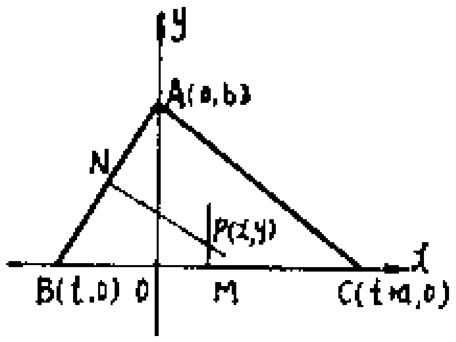


图 4—29

设$\triangle ABC$ 的高 $Ao=b$，则依题意可知 b 为定值、因为 BC 不改变长度在 x 轴上移动，可设 $B(t, 0)$，则 $C(t+a,0)$. 不难求出 BC、AB 的中垂线方程（关于 t 的直线族），再将这两个方程联立，即可求出交点 P（外心）的轨迹的参数方程.

解 如上所述，$\triangle ABC$ 的高 $Ao=b$，各顶点的坐标为

$$A(0,\ b),\ B(t,\ 0),\ C(a+t,\ 0).$$

AB 和 BC 的中点坐标分别为

$$N\left(\frac{t}{2},\ \frac{b}{2}\right), M\left(\frac{2t+a}{2}, 0\right).$$

BC 边的中垂线方程为

$$x=\frac{2t+a}{2}. \qquad ①$$

又 $$k_{AB}=-\frac{b}{t},\quad k_{NP}=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{t}{b}$$

∴ 线段 AB 的中垂线方程为

$$y-\frac{b}{2}=\frac{t}{b}\left(x-\frac{t}{2}\right),$$

即

$$y=\frac{t}{b}\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{b}{2}. \qquad ②$$

将①和②联立. 以①式代入②式. 得

$$y=\frac{t}{b}\left(\frac{2t+a}{2}-\frac{t}{2}\right)+\frac{b}{2}=\frac{t^2+at+b^2}{2b}.$$

因此，$\triangle ABC$ 的外心的轨迹方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{2t+a}{2}, & \text{③} \\ & (-\infty<t<+\infty) \\ y=\dfrac{t^2+at+b^2}{2b}. & \text{④} \end{cases}$$

消去参数：由③得

$$t=x-\frac{a}{2},$$

代入④式，得

$$y=\frac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+a\left(x-\dfrac{a}{2}\right)+b^2}{2b}$$

$$=\frac{x^2+b^2-\dfrac{a^2}{4}}{2b},$$

得到所求轨迹的普通方程

$$x^2=2b\left(y+\frac{a^2}{8b}-\frac{b}{2}\right).$$

它是一条抛物线。

〔附注〕（1）利用参数求点的轨迹的参数方程．通常引入参数 t 分别求 x，y 对于参数 t 的函数关系式，得参数方程．

（2）利用两组直线的交点求点的轨迹方程．它是引用一个参数，求出两组相交直线方程，再将这两个方程联立，求出交点的轨迹的参数方程或普通方程．

例 9 圆外一点 M 向圆作割线，与圆相交于 A 与 B 两点，M 点向圆作切线与圆相切于 P，求证：$MP^2=|MA|\cdot|MB|$.

证明 如图 4—30．设圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2,$$

M 点的坐标为 $(x_1,\ y_1)$，切点 P 的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，割线的倾角为 α，则割线方程为

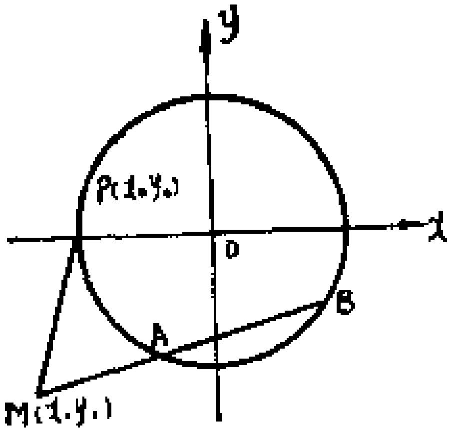


图 4—30

$$\begin{cases} x = x_1 + t\cos\alpha, \\ y = y_1 + t\sin\alpha. \end{cases}$$

其中 α 为定值，t 为参数.

将 x，y 的值代入圆的方程，得

$$(x_1 + t\cos\alpha)^2 + (y_1 + t\sin\alpha)^2 = R^2,$$

即

$$t^2 + 2(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha)t + (x_1^2 + y_1^2 - R^2) = 0 \qquad ①$$

这个方程的两个根 t_1 和 t_2（t_1 和 t_2 同号）是 M 到圆周的两线段的长（$|MA|$ 与 $|MB|$），故

$$|MA|\cdot|MB| = t_1t_2 = x_1^2 + y_1^2 - R^2.$$

又当割线 MB 成为切线 MP 时，方程①的两根相等，且

$$|t_1| = |t_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - R^2}.$$

$\therefore \qquad MP^2 = t_1^2 = t_2^2 = x_1^2 + y_1^2 - R^2.$

因此 $\qquad MP^2 = |MA||MB|.$

例 10 如图 4—31，原点 O 在圆 O_1：$(x-a)^2 + (y-a)^2 = R^2$ 外，过原点作此圆的两切线 OM 和 ON，过原点再作一割线交圆于 A、B，交直线 MN 于 C，求证

$$\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} = \frac{2}{|OC|}.$$

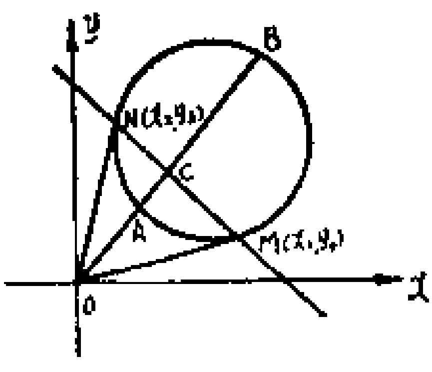


图 4—31

证法一 圆的方程为

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + 2a^2 - R^2 = 0.$$

设切点 M、N 的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则两切线的

方程为

$$OM: x_1x+y_1y-2a\left(\frac{x+x_1}{2}\right)$$
$$-2a\left(\frac{y_1+y}{2}\right)+2a^2-R^2=0,$$

$$oN: x_2x+y_2y-2a\left(\frac{x+x_2}{2}\right)-2a\left(\frac{y+y_2}{2}\right)$$
$$+2a^2-R^2=0.$$

因原点 $O(0, 0)$ 在这两切线上，将 $x=0$，$y=0$ 代入上两式，得

$$ax_1+ay_1-2a^2+R^2=0,$$
$$ax_2+ay_2-2a^2+R^2=0.$$

由此可见，点 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ 的坐标满足方程

$$ax+ay-2a^2+R^2=0, \quad ①$$

因此，方程①就是过切点 M 和 N 的直线方程.

设割线的倾角为 α，参数方程为

$$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha.\end{cases} \quad ②$$

将 x，y 的值代入圆的方程，得

$$(t\cos\alpha)^2+(t\sin\alpha)^2-2at\cos\alpha-2a\sin\alpha+2a^2-R^2=0,$$

即

$$t^2-2a(\cos\alpha+\sin\alpha)t+2a^2-R^2=0.$$

此方程的两根 t_1 和 t_2（t_1，t_2 同为正）就是 $|OA|$ 和 $|OB|$. 由韦达定理

$$t_1+t_2=2a(\cos\alpha+\sin\alpha)$$
$$t_1t_2=2a^2-R^2$$

得

$$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{|OB|+|OA|}{|OA||OB|}$$

$$=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\frac{2a(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2a^2-R^2} \quad ③$$

再将参数方程②代入①式，得

$$at\cos\alpha+at\sin\alpha+R^2-2a^2=0.$$

由此求得（t 取正号）

$$|OC|=t=\frac{2a^2-R^2}{a(\cos\alpha+\sin\alpha)}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{|OC|}=\frac{a(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2a^2-R^2}. \quad ④$$

比较③式和④式，得

$$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{2}{|OC|}.$$

证法二 因 $|OM|=|ON|$，所以 M，N 两点在以 O 为圆心 OM 为半径的圆上，直线 MN 就是此圆与定圆 o_1 的根轴（如图 4—32）.

因 $$oo_1^2=a^2+a^2=2a^2,$$

$$OM^2=oo_1^2-o_1M^2=2a^2-R^2.$$

故以 O 为圆心且经过 M，N 的圆为

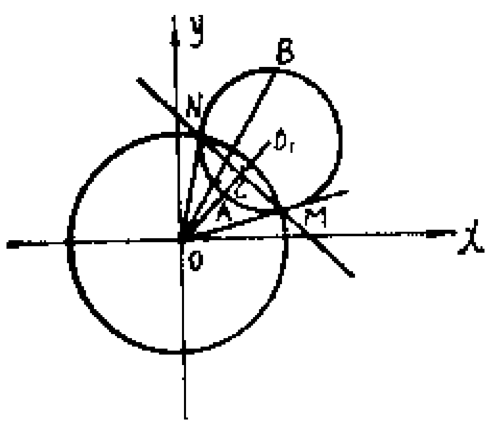


图 4—32

$$x^2+y^2=2a^2-R^2.$$

因此，直线 MN 的方程为

$$x^2+y^2-2ax-2ay+2a^2-R^2-(x^2+y^2-2a^2+R^2)=0,$$

即

$$ax+ay-2a^2+R^2=0.$$

以下解法同证法一.

〔附注〕 由圆外一定点向圆引两条切线，求过两切点的直

线方程时，都可以使用本例所给出的两种方法，而不必先求出切点的坐标.

例 11 如图4—33，在半圆 O 中，定点 A 在直径 EF 的延长线上，B 点在半圆周上运动，以 AB 为一边向外作正三角形 ABC，问 B 在何处时，O、C 两点的距离最远，并求出最远距离.

解法一 如图建立坐标系. 设定圆半径 $OB=R$，$|OA|=a$. 半圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\theta, \\ y=R\sin\theta. \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

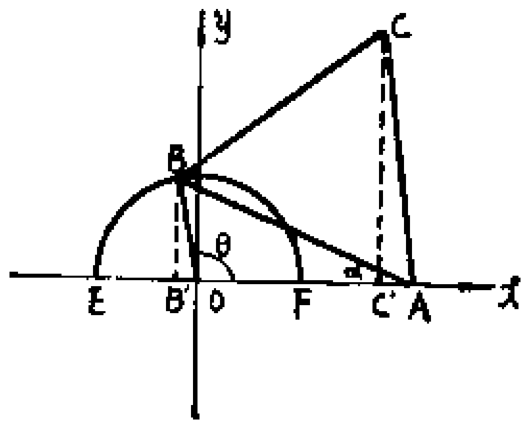


图 4—33

设 B 点坐标为 $(R\cos\theta, R\sin\theta)$，$\angle BAO=\alpha$，则

$$AB^2=OB^2+OA^2-2OB\cdot OA\cos\theta$$
$$=R^2+a^2-2aR\cos\theta.$$

$$OC^2=AC^2+OA^2-2|AC|\cdot|OA|\cos(\alpha+60^\circ)$$
$$=AC^2+a^2-2a(|AC|\cos60^\circ\cos\alpha-|AC|\sin60^\circ\sin\alpha).$$

$\because$ $$|AB|=|AC|=|BC|,$$

$$|AC|\cos\alpha=|AB|\cos\alpha=|AB'|$$
$$=a-R\cos\theta,$$
$$|AC|\sin\alpha=|AB|\sin\alpha=|BB'|$$
$$=R\sin\theta.$$

$\therefore$ $$OC^2=AB^2+a^2-2a\left[\frac{1}{2}(a-R\cos\theta)-\frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\theta\right]$$
$$=(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)+a^2-a^2$$
$$+aR\cos\theta+aR\sqrt{3}\sin\theta$$

$$= a^2 + R^2 - aR(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)$$

$$= a^2 + R^2 - 2aR\left(\frac{1}{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$

$$= a^2 + R^2 - 2aR\cos(\theta + 60^\circ)$$

∴ $$|OC| = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos(\theta + 60^\circ)}.$$

因此，当 $\cos(\theta + 60^\circ) = -1$，$\theta = 120^\circ$ 时，动点 C 到 O 点的距离最远，且最远距离为

$$|OC|_{max} = \sqrt{a^2 + R^2 + 2aR} = a + R.$$

解法二 先求出 C 点的轨迹方程．

如图 3—34．设 B，C 的坐标分别为

$$B(x_1, y_1), C(x, y),$$

则 $$a - x_1 = |B'A| = |AB|\cos\alpha,$$

$$y_1 = |BB'| = |AB|\sin\alpha.$$

∵ $$|AB| = |AC| = |BC|,$$

∴ $a - x = |AC|\cos(\alpha + 60^\circ)$

$$= |AC|\cos\alpha\cos 60^\circ - |AC|\sin\alpha\sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}|AB|\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}(a - x_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1$$

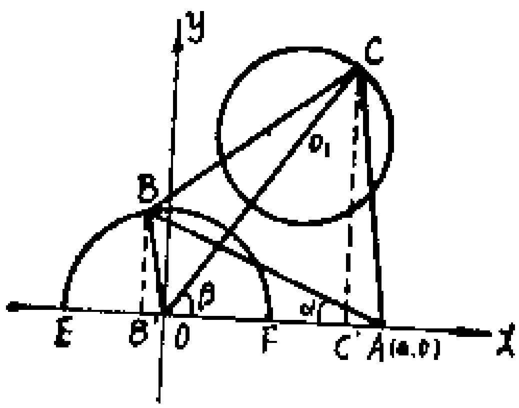


图 4—34

$y = CC' = |AC|\sin(\alpha + 60^\circ)$

$$= |AB|\sin(\alpha + 60^\circ)$$

$$= |AB|\sin\alpha\cos 60^\circ + |AB|\cos\alpha\sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x_1).$$

由此可得

$$
\begin{cases}\frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1=x-\frac{1}{2}a & ①\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}a-y & ②\end{cases}
$$

$①^2+②^2$，注意 $x_1^2+y_1^2=R^2$，得

$$
\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=R^2.\quad (y\geqslant 0)
$$

因此，C 点的轨迹是以$O_1\left(\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ 为圆心半径为 R 的圆.

当动点 C 在连心线OO_1 上时，动点 C 与 O 点的距离最远，且最远距离为

$$
\begin{aligned}|OC|_{\max}&=|OO_1|+|O_1C|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}+R\\&=a+R.\end{aligned}
$$

下面求当 C 点离 O 最远时的 B 点位置.

设 $\angle O_1OB=\beta$，则

$$
\mathrm{tg}\beta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a}=\sqrt{3},
$$

$\therefore$ $$\beta=60^\circ.$$

C 点的坐标为

$$
x=|OC|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}(a+R),
$$

$$
y=|OC|\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}(a+R).
$$

$\therefore$ $$AB^2=AC^2=\left[a-\frac{1}{2}(a+R)\right]^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(a+R)\right]^2$$

$$= a^2 + R^2 + aR.$$

$$\therefore \quad \cos\angle BOA = \frac{BO^2 + OA^2 - AB^2}{2|BO|\cdot|OA|}$$

$$= \frac{R^2 + a^2 - (a^2 + R^2 + aR)}{2aR} = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad \angle BOA = 120^\circ.$$

例 12 过椭圆上任意一点引椭圆的切线，试证：由两焦点到这条切线的距离之积为定值.

解 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

则两焦点为 $F_1(-c,\ 0)$ 和 $F_2(c,\ 0)$，$c^2 = a^2 - b^2$.

设点 P 为椭圆上任意一点，坐标为 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，则过 P 点的切线方程为

$$\frac{a\cos\theta}{a^2}x + \frac{b\sin\theta}{b^2} = 1$$

即

$$(b\cos\theta)x + (a\sin\theta)y - ab = 0.$$

焦点 $F_1(-c,\ O)$、$F_2(c,\ O)$ 到此切线的距离分别为

$$\left|\frac{(b\cos\theta)(-c) + (a\sin\theta)O - ab}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}}\right|$$

$$= \left|-\frac{bc\cos\theta + ab}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}}\right|,$$

和

$$\left|\frac{(b\cos\theta)c + (a\sin\theta)\cdot O - ab}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}}\right| = \frac{|bc\cos\theta - ab|}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}}.$$

因此，两焦点到切线的距离之积为

$$\frac{|bc\cos\theta + ab|}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}} \cdot \frac{|bc\cos\theta - ab|}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}}$$

$$=\frac{|b^2c^2\cos^2\theta-a^2b^2|}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{b^2|c^2\cos^2\theta-a^2|}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{b^2|(a^2-b^2)\cos^2\theta-a^2|}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

$$=\frac{b^2|a^2(1-\cos^2\theta)+b^2\cos^2\theta|}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

$$=\frac{b^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=b^2(\text{定值}).$$

〔附注〕 在二次曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$和$y^2=2px$上设任意点的坐标时，如果坐标用它们的参数方程来表示，则可使解题时的中间运算得到简化.

例 13 当m取不同的实数时，方程

$$4x^2+5y^2-8mx-20my+24m^2-20=0$$

表示不同的椭圆.

(1) 证明：椭圆中心在同一直线L上；

(2) 证明：任一条平行于L且与各椭圆相交的直线，被各椭圆所截的线段相等；

(3) 试求出与L平行，且被这些椭圆截得的线段等于$\frac{5}{3}\sqrt{5}$的直线方程.

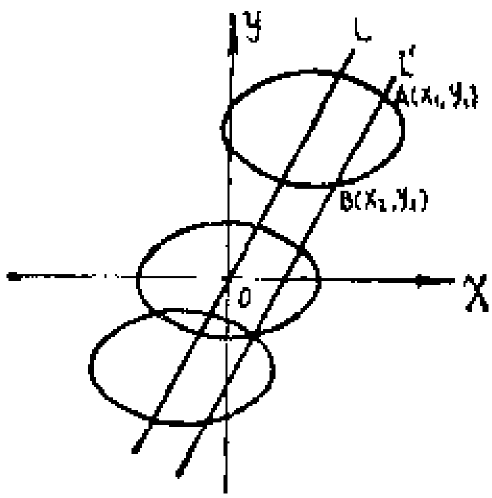


图 4—35

解 (1) 由椭圆方程得

$$\frac{(x-m)^2}{5}+\frac{(y-2m)^2}{4}=1.$$

因此椭圆中心坐标的参数

方程为

$$\begin{cases} x = m, \\ y = 2m. \end{cases}$$

消去参数 m，得椭圆中心所在的方程：

$$L:\ y = 2x.$$

由此可知，椭圆的中心在同一条直线上(如图 4—35)。

(2) 设任一条与 L 平行的直线为

$$L':\ y = 2x + b.$$

将 y 值代入椭圆方程，得

$$24x^2 + (20b - 48m)x + 5b^2 - 20bm + 24m^2 - 20 = 0.$$

又设直线 L' 与任一椭圆的交点为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，则 x_1 和 x_2 是此方程的两根，故

$$x_1 + x_2 = -\frac{20b - 48m}{24} = \frac{12m - 5b}{6},$$

$$x_1 x_2 = \frac{5b^2 - 20bm + 24m^2 - 20}{24}.$$

又 $\quad y_1 - y_2 = (2x_1 + b) - (2x_2 + b) = 2(x_1 - x_2)$

所以，直线 L' 被各椭圆所截的线段为

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{5(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]} \\ &= \sqrt{5\left[\left(\frac{12m - 5b}{6}\right)^2 - \frac{5b^2 - 20bm + 24m^2 - 20}{6}\right]} \\ &= \frac{5}{6}\sqrt{24 - b^2}. \end{aligned}$$

因为 $|AB|$ 与 m 无关，故直线 L' 被各椭圆所截得的线段相等，且都等于 $\frac{5}{6}\sqrt{24 - b^2}$。

(3) 令

$$\frac{5}{6}\sqrt{24-b^2}=\frac{5}{3}\sqrt{5},$$

得

$$b=\pm 2.$$

因此，所求的直线方程为

$$y=2x+2 \text{ 和 } y=2x-2.$$

例 14 动点 P_0 从原点出发，在 x 轴的正方向前进 a，然后向左转成直角前进 $ar(0<r<1)$，再向右转成直角前进 ar^2，如此无限前进下去……(图 4—36)。

(1) 求动点 P_0 的极限点的坐标；

(2) 以 r 为参数，求极限点的轨迹。

分析 分别对动点 P_0，P_1，P_2，……的横坐标和纵坐标求和，得极限点 P 的坐标，即可求得极限点的轨迹的参数方程。

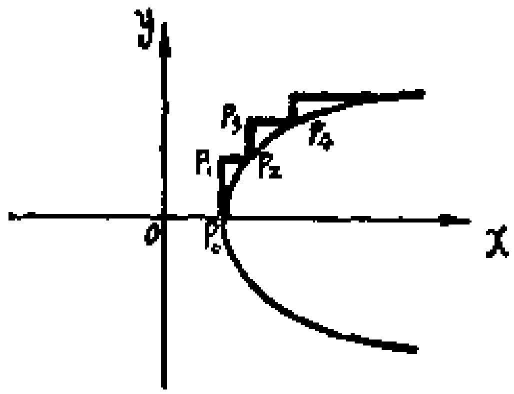


图 4—36

解 (1) 设动点 P_0，P_1，P_2……的极限点为 P，它的坐标为 (x, y)。依题意可知各点的坐标为

$$P_0(a,\ 0),\ P_1(a,\ ar),\ P_2(a+ar^2,\ ar),$$
$$P_3(a+ar^2,\ ar+ar^3),\ P_4(a+ar^2+ar^4,\ ar+ar^3)$$

…………

则

$$x=a+ar^2+ar^4+\cdots\cdots,$$
$$y=ar+ar^3+ar^5+\cdots\cdots.$$

因 $0<r<1$，上两式是无穷等比数列，故

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{1-r^2}, & ①\\ & (0<r<1)\\ y=\dfrac{ar}{1-r^2}. & ② \end{cases}$$

此参数方程，即为极点 P 的坐标的参数方程.

(2) ②÷①，得

$$r=\frac{y}{x}.$$

代入①式，得极点 P 的轨迹的普通方程

$$x=\frac{a}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2},$$

即

$$\frac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=1.$$

依题意 $x>0$，$y>0$.

因此，极点 P 的轨迹是中心在$\left(\dfrac{a}{2},0\right)$、顶点在$(a,\ 0)$的双曲线(在第一象限的那部分).

习　题　二

1. 将下列参数方程化为普通方程，并画出它们的图象：

(1) $\begin{cases} x=t^2-3t+1\\ y=t-1 \end{cases}(-\infty<t<+\infty)$

(2) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}t^3\\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}(-\infty<t<+\infty)$

(3) $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ $(t\neq -1,\ -\infty<t<+\infty)$

(4) $\begin{cases} x=\dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2at^3}{1+t^2} \end{cases}$ (t 是参数，$-\infty<t<+\infty$)

(5) $\begin{cases} x=2a\operatorname{tg}\theta \\ y=2a\cos^2\theta \end{cases}$ ($a>0$，θ 是参数)

2．求下列二次曲线的参数方程，并说明所设参数的合理性：

(1) $x^2+4y^2-6x+5=0$，设 $x=3+2\cos\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$；

(2) $x^2-xy-1=0$，设 $y=2\operatorname{tg}\theta$，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$；

(3) $x^2-xy+y^2-9=0$，设 $y=\sqrt{12}\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

3．已知

$$x=\frac{(e^t+e^{-t})\cos\theta}{2},\quad y=\frac{(e^t-e^{-t})\sin\theta}{2}.$$

$$\left(t\neq 0,\ \theta\neq n\pi,\ \theta=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\text{ 为整数}\right)$$

(1) 若 θ 为参数，它表示何种曲线？

(2) 若 t 为参数，它表示何种曲线？

(3) 证明 1) 和 2) 有共同的焦点.

4．求下面两曲线的交点：

$$\begin{cases} x=2\cos^4\theta \\ y=2\sin^4\theta \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x=-1+\sqrt{10}\cos\theta \\ y=-1+\sqrt{10}\sin\theta. \end{cases}$$

5．摆线 $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ 上相当于 $2\pi\leqslant\theta\leqslant 4\pi$ 的一段曲线弧与直线 $y=1.5$ 的交点坐标是什么？

6. 已知直线 L：$3x-4y-12=0$ 和点 $P(1, 1)$.

(1) 求经过 P 点且和 L 垂直的直线的参数方程；

(2) 利用(1)的参数方程，求 P 点到直线 L 的距离.

7. 利用直线的参数方程，证明椭圆，双曲线，抛物线的平行诸弦的中点分别在同一直线上.

8. 如果以经过抛物线 $y^2=2Px$ 顶点的直线的斜率 m 为参数：

(1) 求此抛物线的参数方程；

(2) 用(1)的参数方程，求抛物线的切线和法线方程.

9. 试用经过原点的弦与 x 轴的夹角 θ 为参数，求圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的参数方程.

10. 如果以一经过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 左端点的直线的斜率 m 为参数，求此椭圆的参数方程.

11. 设 t 为参数，求两直线族

$bx+ay=abt$ 和 $btx-aty=ab$(t 为参数)中对应直线的交点的轨迹.

12. 证明下列问题：

(1) 过双曲线的焦点的各弦中点的轨迹还是一条双曲线；

(2) 过抛物线的焦点的各弦中点的轨迹还是一条抛物线.

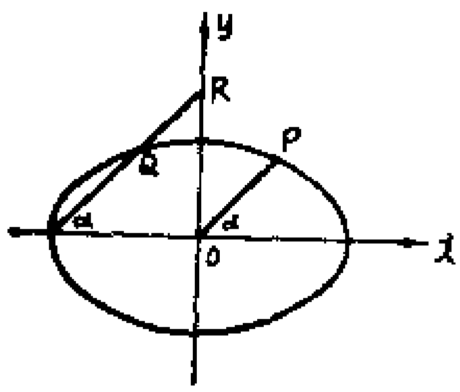


图 4—37

13. 如图 4—37，设 P 点是椭圆

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases} (a>b)$$

上的一点，联结 OP，过 A 点作直线平行于 OP 交 y 轴于 R，交椭圆于 Q，求证：

$$|AQ|\cdot|AR|=2OP^2.$$

14. 已知抛物线 $y^2=2Px$ 和它的任一切线 L. Q 点是抛物线的顶点关于 L 的对称点，求 Q 点的轨迹方程.

15. 半径为 a 的圆其中心为原点 O，A 为圆上一定点，B 为圆上一动点，如果在 A，B 处的切线相交于 C，而 P 为 BC 的中点，试以 $\angle AOB=\theta$ 为参数，OA 为 x 轴，求 P 点轨迹的参数方程.

16. $OBCD$ 为一矩形，$OB=a$，$BC=b$. 自 C 点引任一直线交 OB 于 E，又作 $PE\perp EC$，且使 $OP\perp PE$. 试以 $\angle DOP=\theta$ 为参数，OB 为 x 轴，OD 为 y 轴，求 P 点轨迹的参数方程和普通方程.

17. 由原点O任意引一射线交直线 $x+y-2=0$ 于 M，并在 OM 的延长线上取一点 P，使 $|OM|\cdot|MP|=k^2$（定值），试以 $\angle MOx=\theta$ 作为参数，求 P 点轨迹的参数方程.

18. 经过 $A(0,\ -a)$ 点任意引一直线交 x 轴于 H. 过 $B(0,\ a)$ 点引 AH 的垂线，垂足为 K. 自 K 点引一直线与 x 轴平行，自 H 点引一直线与 y 轴平行，此两直线相交于 P，试以 $\angle BAK=\theta$ 作为参数，求 P 点轨迹的参数方程和普通方程.

19. 设OA 为一定圆的直径，而 LK 为在 A 点的切线. 自O点引任一直线交圆于 B，交 LK 于 C，令 P 为 BC 的中点，试以 $\angle AOP=\theta$ 为参数，OA 为 y 轴，O为原点，求 P 点轨迹的参数方程和普通方程.

20. 设$\triangle ABC$ 为边长等于 a 的正三角形，顶点 A，B 分别在 y 轴和 x 轴上移动，求顶点 C 的轨迹方程.

21. 当一圆在一直线上作无滑动地滚动，在其半径上任意取一点 P，求 P 点的轨迹方程.

22. 过定点 $R(a,\ b)$ 作直线分别交两坐标轴于 A、B 两点，求 AB 中点 P 的轨迹方程.

23. OB 为一机器之曲柄绕 O 旋转，而 AB 为其连杆，点 A 在 Ox 轴上移动，作 $AP \perp Ox$ 交 OB 之延长线于 P，求 P 点的轨迹.

24. 已知抛物线 $y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$；

(1) 求证：不论 m 为何实数，它的顶点都在同一直线 l_1 上；

(2) 平行于 l_1 的直线中，那些与抛物线相交，那些与抛物线不相交；

(3) 求证：平行于 l_1 的并与抛物线相交的任一直线，被各抛物线所截出的线段都相等.

25. 求证：不论 m 为何实数，直线

$$(2m-1)x + (m+3)y - (m-11) = 0$$

都经过一定点.

26. 求证：不论 m 和 n 为何实数，方程

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + 4(m-n-2) = 0$$

所代表的曲线族经过一定点.

27. 当 θ 为何值时，直线 $y = (1-x)\operatorname{tg}\theta$ 与双曲线 $x^2 - y^2\cos\theta = -1$ 相切，并求出切点坐标.

28. 有一动直线 $ty - 2x + 2t + 2 = 0$（其中 t 为参数）及一抛物线 $y^2 = 4x$，问该直线与抛物线的两交点的中点轨迹是什么？求证该轨迹和直线 $x + y + 1 = 0$ 相切.

习题解答与提示

第 一 章

习 题 一

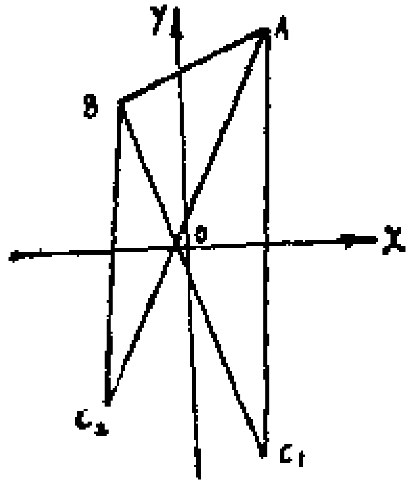
1. 设 A 点坐标为 x，则有

$$x^2+(a-x)^2+(2a-x)^2+(3a-x)^2=5a^2$$

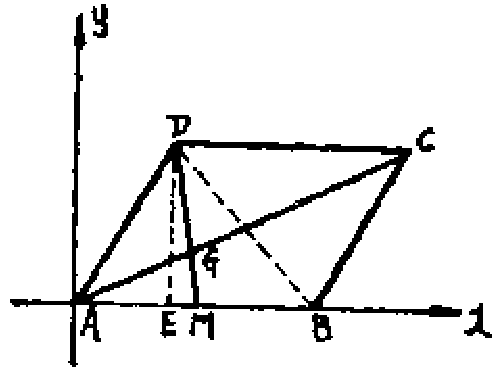
解之，得 $x=\frac{3}{2}a$，即为 A 点在数轴上的坐标.

2. 应分别就 E、D 两点在同一坐标轴上，或各在一条坐标轴上考虑. 设 C 点坐标是 $C(x, y)$，E 点坐标为 $E(p,q)$，D 点坐标为 $D(m, n)$，由 D、E 的各种可能的位置，利用中点坐标公式，可得四个方程组，解得 C 的坐标为 $(2, -7)$，或 $(-3, -5)$.

3. ⟨1⟩ A、B、C、D 四点的坐标分别为 $(0, 0)$，$(8, 0)$，$(11, 3\sqrt{3})$，$(3, 3\sqrt{3})$.



习题 1.1—2



习题 1.1—3

(2) 显然 AC 与 BD 的交点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，故 G 点的坐标为 $\left(-\frac{11}{3}, \sqrt{3}\right)$.

4. (1) 重心 $\left(1, \frac{11}{3}\right)$,

设外心为 $P(x, y)$，由 $AP=BP=CP$，得

$$(x-5)^2+(y\quad)^2=(x-1)^2+(y-7)^2$$
$$=(x+3)^2+(y-5)^2$$

解得 $x=1$，$y=2$，即外心 $(1, 2)$

(2) 面积 20.

5.
$$\begin{aligned}&|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2\\=&[(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+(x_3-x)^2]\\&+[(y_1-y)^2+(y_2-y)^2+(y_3-y)^2]\\=&[3x^2-2x(x_1+x_2+x_3)+x_1^2+x_2^2+x_3^2]\\&+[3y^2-2y(y_1+y_2+y_3)+y_1^2+y_2^2+y_3^2]\end{aligned}$$

这里第一个方括号内是关于 x 的二次函数，其值仅与 x 有关；第二个方括号内是关于 y 的二次函数，其值仅与 y 有关.因此，只要两个方括内的值最小，整个式子的值就最小.

对于第一个方括号内的函数，由二次函数的极值定理，求得 $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ 时，函数有最小值. 同理对于第二个方括号里的函数，当 $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 时，有最小值.

$$\therefore \quad M=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

6. 平行于 y 轴的夹在两曲线之间的线段长等于这线段与两曲线交点的纵坐标之差的绝对值：

$$l=|2x^4-7x^2+5-(-2x^4+2x-5)|$$

$$=|4x^4-7x^2-2x+10|$$
$$=|4(x^4-2x^2+1)+(x^2-2x+1)+5|$$
$$=|4(x^2-1)^2+(x-1)^2+5|$$

故当 $x=1$ 时，求得 l 的最小值为 5.

7. 在直角坐标系中任取 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，连 AO、BO.

若 A、O、B 三点不共线，则有 $|AB|<|AO|+|BO|$；

若 A、O、B 三点共线，且 A、B 在 O 点的同旁，则有 $|AB|<|AO|+|BO|$；

若 A、O、B 三点共线，且 A、B 在 O 点的两旁，则有 $|AB|=|AO|+|BO|$；

故不等式：$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

成立.

8. 设点 P 坐标为 (x, y)，则

$$AP^2+BP^2=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2$$
$$=2(x^2+y^2+1)=2k$$

这里设 $x^2+y^2+1=k$ ①

$$x^2+y^2-6x-8y+21=k-1-6x-8y+21$$
$$=-6x-8y+20+k=0$$

故 $8y=-6x+20+k$ ②

代入①得

$$x^2+\frac{(-6x+20+k)^2}{8}=k-1$$

即 $$100x^2-2(120+6k)x+k^2-24k+464=0$$ ③

$$\frac{\triangle}{4}=(120+6k)^2-100(k^2-24k+464)\geqslant 0$$

$\therefore\quad k^2-60k+500\leqslant 0$　解得 $10\leqslant k\leqslant 50$

$k=10$ 时，AP^2+BP^2 取得最小值 20，这时

由③　　$x=\dfrac{120+6k}{100}=\dfrac{180}{100}=\dfrac{9}{5}$

由②　　$y=\dfrac{12}{5}$

所求的点 P 的坐标是 $(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{12}{5})$

9．在 $\triangle ABO$ 中，由余弦定理，得

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]}{2ab}$$

$$=\frac{(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2}{2ab}$$

$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{ab}$$

又设 $\triangle AOB$ 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{ab}$$

因 a、b，a_1、b_1，a_2、b_2 都是有理数

所以 $\cos\theta$，$\sin\theta$ 也都是有理数.

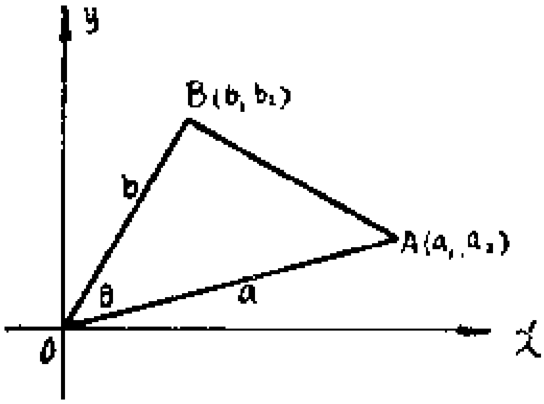
10．不失一般性，可设正 $\triangle ABC$ 的一个顶点 A 在坐标原点，B 的坐标 $(a,\ b)$，a、b 均为有理数.

则 $AB=\sqrt{a^2+b^2}$，设 AB 与 x 轴的交角为 θ，则 C 点坐标为：

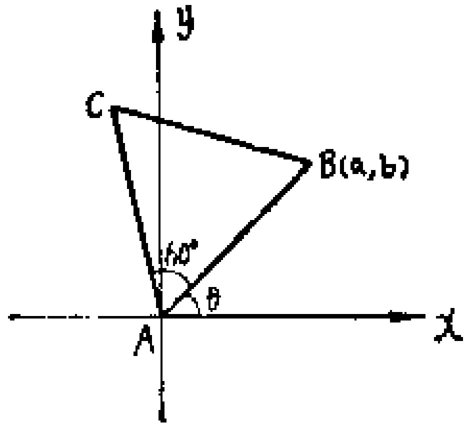
$$(\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+60^\circ),\ \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\theta+60^\circ))$$

即 $\left(\frac{a-\sqrt{3}b}{2}, \frac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)$

要它也是有理点，必须 $a=b=0$，于是 B 和 A 重合，矛盾，故不存在顶点都是有理点的正三角形.



习题 1.1—9



习题 1.1—10

11. 因任意两个奇数(或偶数)的算术平均数是整数，在五个整点的横坐标中，至少有三个奇数(或三个偶数)，不妨设为 x_1、x_2、x_3，它们中的任意两数的算术平均数为整数.

如果 x_1、x_2、x_3 的相应纵坐标为 y_1、y_2、y_3，则它们中至少有两个奇数(或两个偶数)，

不妨设为 y_1，y_2 其算术平均数为整数，

这就是说 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 的连线的中点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 也是整点.

12. 分别由 C、P 向 AB 作垂线，设垂线段长为 h、h'

∵ $S_{\triangle APM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

即 $\frac{1}{2}h\cdot|AB|=2\cdot\frac{1}{2}h'|AM|$

因 $|AM|=\frac{3}{4}|AB|$

所以 $h:h'=\frac{3}{2}$，即 $h'=\frac{2}{3}h$

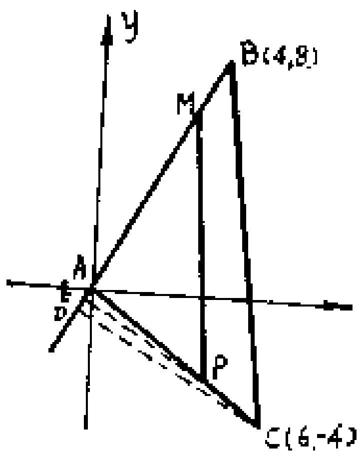
由 $R_t\triangle ACD \backsim R_t\triangle APE$

有 $AP:AC=h':h$

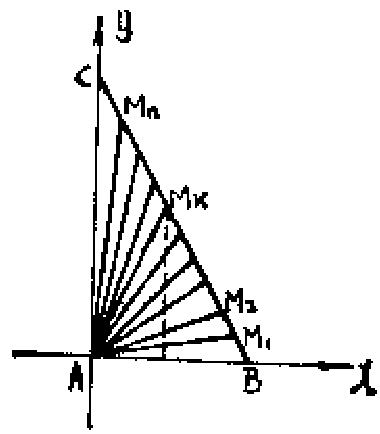
$\therefore$ $AP:PC=h':(h-h')=2:1$

故 P 点分 AC 为 $2:1$

13. 如图，取直角顶点为原点，两直角边为坐标轴，建立坐标系.



习题 1.1—12



习题 1.1—13

令 $AB=b$，$AC=C$

$BM_k:M_kC=k:[(n+1)-k]$

则 Mk 的坐标是：

$$\left(\frac{(n+1-k)b}{n+1},\ \frac{k\cdot C}{n+1}\right)$$

$\therefore$
$$AM_k^2=\left(b-\frac{kb}{n+1}\right)^2+\left(\frac{kc}{n+1}\right)^2$$

$$=\frac{b^2+c^2}{(n+1)^2}k^2-\frac{2b^2}{n+1}k+b^2$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} AM_k^2 = \frac{b^2+c^2}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{2b^2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k + nb^2$$

$$= \frac{b^2+c^2}{(n+1)^2} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$- \frac{2b^2}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} + nb^2$$

$$= \frac{(b^2+c^2)(2n^2+n)}{6(n+1)}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} AM_k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(b^2+c^2)(2n^2+n)}{6(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(b^2+c^2)(2n+1)}{6(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3}(b^2+c^2)$$

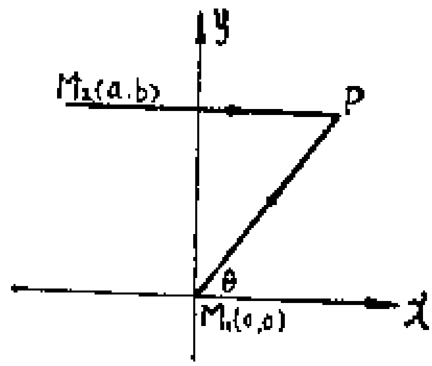
14．设质点 M_1、M_2 相碰于 $P(x, b)$，则所需的时间为

$$t = \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{u} = \frac{x-a}{v}$$

（u 为质点 M_1 的运动速度）

由此得

$$v^2(x^2+b^2) = u^2(x-a)^2$$



习题 1.1—14

即

$$(u^2-v^2)x^2 - 2au^2x + a^2u^2 - b^2v^2 = 0 \qquad ①$$

因 x 是实数，所以

$$(au^2)^2 - (u^2-v^2)(a^2u^2-b^2v^2) \geqslant 0$$

$$a^2u^2v^2 + b^2u^2v^2 - b^2v^4 \geqslant 0$$

$$\because \quad v>0, \ u>0, \ b>0$$

$$\therefore \qquad u \geqslant \frac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

（i）M_1 运动速度 u 的最小值是 $\bar{u} = \frac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$，代入①得

$$x = \frac{a\bar{u}^2}{\bar{u}^2 - v^2} = -\frac{b^2}{a}$$

运动方向与 x 轴正方向所成的角是

$$\theta = arc\ \mathrm{tg}\frac{b}{x} = arc\ \mathrm{tg}\left(-\frac{a}{b}\right)$$

(ii) 所需时间 $t = \frac{x-a}{v} = \frac{a^2+b^2}{-av}$

15.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos\theta_1 & b\sin\theta_1 & 1 \\ a\cos\theta_2 & b\sin\theta_2 & 1 \\ a\cos\theta_3 & b\sin\theta_3 & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

$$= \frac{1}{2}\Big| ab(\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2 + \cos\theta_2\cdot\sin\theta_3$$

$$+\cos\theta_3\cdot\sin\theta_1 - \cos\theta_3\cdot\sin\theta_2$$

$$-\cos\theta_1\cdot\sin\theta_3 - \cos\theta_2\cdot\sin\theta_1)\Big|$$

$$= \frac{1}{2}\Big| ab[\sin(\theta_2-\theta_1) + \sin(\theta_3-\theta_2)$$

$$+\sin(\theta_1-\theta_3)]\Big|$$

$$= \left| 2ab\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \right|$$

16. 设第三个顶点的坐标为$(x,\ 0)$，则有

$$\left| \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = 10$$

展开行列式　得

$$\left|\frac{1}{2}(12-x)\right|=10$$

解之　得 $x=-8$ 或 $x=32$

故第三个顶点为 $(-8,\ 0)$ 或 $(32,\ 0)$

17. 因任一多边形的面积都可化成顶点在多边形顶点处的三角形面积的和，所以只要能证明顶点为整点的三角形的面积的二倍是整数即可.

设三角形的三个顶点分别为 $(a_1,\ b_1)$，$(a_2,\ b_2)$，(a_3, b_3)，其中 a_i，$b_i \in J\ (i=1,\ 2,\ 3)$

又设三角形面积为 S，则有

$$2S=2\times\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$\because$　行列式中的元素都是整数，$\therefore$　$2S$ 是整数.

18. 以 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ 分别表示 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 的坐标，　并设 $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=\lambda$

求出 D、E、F 三点坐标后，　再分别求 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的重心坐标，这两个三角形的重心坐标相同.

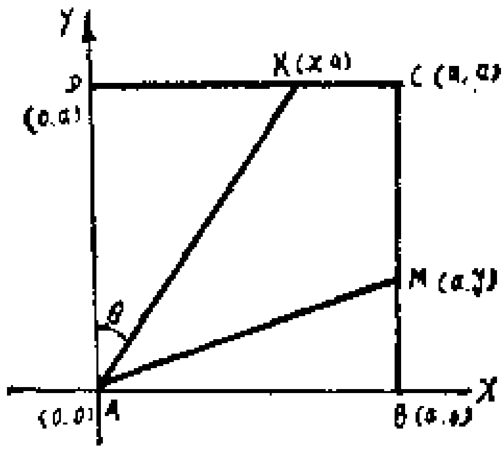
19. 取重心 G 为坐标原点，并设 A、B、C 的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ 则有

$$x_1+x_2\quad x_3=0 \qquad y_1+y_2+y_3=0$$

设 P 点坐标为 $(x,\ y)$ 于是

$$PA^2+PB^2+PC^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$
$$+y_1^2+y_2^2+y_3^2+3(x^2+y^2)$$
$$=AG^2+BG^2+CG^2+3PG^2$$

20. 选取坐标系如图，设 $A(0, 0)$，$B(a, 0)$，$C(a, a)$，$D(0, a)$，$M(a, y)$，$K(x, a)$ 并设 $\angle DAM = 2\theta$



习题 1.1—20

则

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{a}$$

$$\frac{y}{a} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{2\operatorname{tg}\theta} = \frac{a^2 - x^2}{2ax}$$

$$|DK| + |BM| = x + y = \frac{a^2 + x^2}{2x}$$

$$|AM| = \sqrt{a^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + \frac{(a^2 - x^2)^2}{4x^2}} = \frac{a^2 + x^2}{2x}$$

$\therefore\quad |AM| = |DK| + |BM|$

21. 解：设 A、B、C、D 四点的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，(x_4, y_4) $ABCD$ 组成平行四边形的充要条件是 AB 和 CD 平行且长度相等，即 AB 和 DC 两个矢量在 x 轴、y 轴上的射影分别相等，因此得：$x_2 - x_1 = x_3 - x_4$　$y_2 - y_1 = y_3 - y_4$ 这就是 $ABCD$ 是平行四边形的条件，由此可得

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2},\quad \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2}$$

即 AC 的中点和 BD 的中点相同，故平行四边形对角线互相平分.

22. 建立坐标系如图，$A(-a,\ 0)$，$B(0,\ -b)$，$C(c,0)$，$D(0,\ d)$ 及 $E(0,\ 0)$ 于是 DC 的中点 $G(\frac{c}{2},\ \frac{d}{2})$ $OF\perp AB$ 于 F，则 F 为 AB 的中点，

$$\therefore \quad F(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2})$$

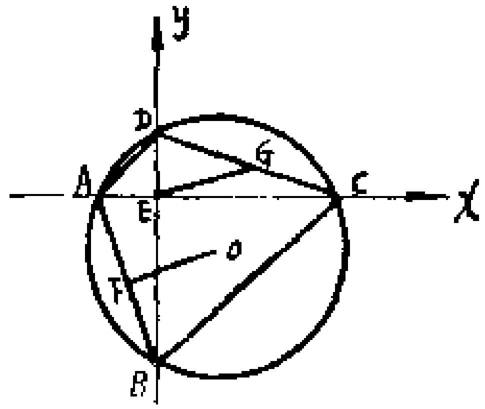
$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，由 $|AO|=|CO|$，$|BO|=|DO|$，得圆心的坐标为

$$(\frac{c-a}{2},\ \frac{d-b}{2})$$

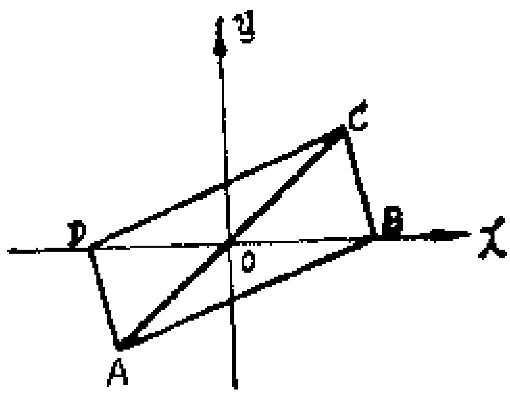
$$\therefore \quad |OF|=\sqrt{(\frac{c-a}{2}+\frac{a}{2})^2+(\frac{d-b}{2}+\frac{b}{2})^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{c}{2})^2+(\frac{d}{2})^2}=|FG|$$

23. 建立如图之坐标系，$\square ABCD$ 各顶点坐标为 $A(-m,\ -n)$，$B(b,\ 0)$，$C(m,\ n)$，$D(-b,\ 0)$ 则



习题 1.1—22



习题 1.1—23

$$AB^2+BC^2=2\ (b^2+m^2+n^2)$$
$$|AC|\cdot|BD|=4\,b\cdot\sqrt{m^2+n^2}$$

$\because\quad b^2+(m^2+n^2)\geqslant 2\sqrt{b^2(m^2+n^2)}=2b\sqrt{m^2+n^2}$

$\therefore\quad AB^2+BC^2\geqslant |AC|\cdot|BD|$

易知，当 $\square ABCD$ 为矩形时取等号.

24. 解：建立如图所示之坐标系，连结 AM，及 MC，则 $\angle AMC=90°$，又 $|BM|^2=|AB|\cdot|BC|$；

$$|BM|=|CP|$$

$\therefore\quad |CP|^2=|AB|\cdot|BC|$

$$=a\cdot|BC|\quad(\because |AB|=a)$$

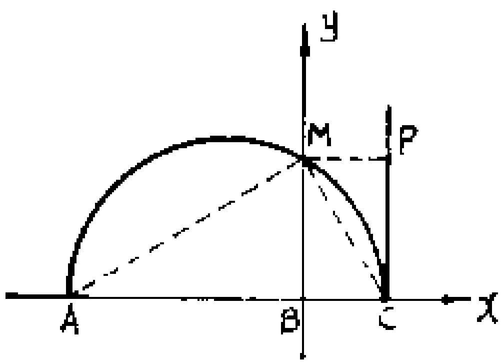
设 P 点坐标为 $(x,\ y)$

则 $\quad CP=y\quad BC=x$ 所以

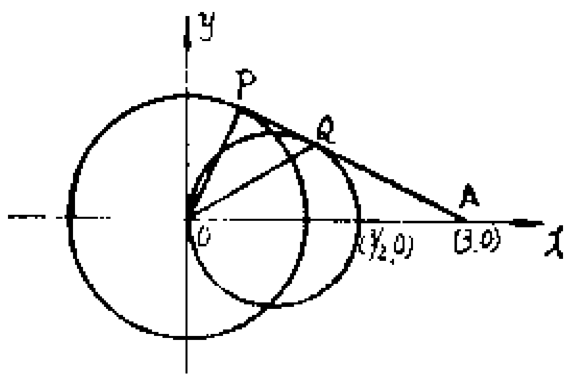
$$y^2=4x\quad(y\geqslant 0)$$

即 为所求之轨迹方程.

25. 设点 P 的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，点 Q 的坐标为 $(x,\ y)$



习题 1.1—24



习题 1.1—25

因 OQ 为 $\triangle AOP$ 的内角 $\angle AOP$ 的平分线，所以

$$\frac{AQ}{QP}=\frac{OA}{OP}=3,$$

即 Q 为分 AP 为定比 3 的内分点.

$$\therefore\quad x=\frac{3+3x_0}{1+3},\quad y=\frac{3y_0}{1+3}$$

于是　　$x_0=\frac{4}{3}x-1\quad y_0=\frac{4}{3}y$

$\because$　$P(x_0,\ y_0)$在圆$x^2+y^2=1$上，

$\therefore$　$\left(\frac{4}{3}x-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}y\right)^2=1$

即　$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$为所求的轨迹方程．

26．建立如图所示之坐标系，设$A(-a,\ 0)$，$B(a,\ 0)$，$P(x,\ y)$是轨迹上任意一点，由$|PA|=\lambda|PB|$

$\therefore$　$\sqrt{(x+a)^2+y^2}=\lambda\sqrt{(x-a)^2+y^2}$

即　　$x^2+\frac{2a(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2}x+y^2=-a^2$

$$\left[x+\frac{a(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2}\right]^2+y^2=\left(\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2$$

这是一个以$\left(-\frac{a(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2},\ 0\right)$为圆心，$\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}$为半径的圆的方程．

由AB关于定比λ的内分点$M\left(\frac{-a+a\lambda}{1+\lambda},\ 0\right)$，关于定比$\lambda$的外分点$N\left(\frac{-a-a\lambda}{1-\lambda},\ 0\right)$，知$M$、$N$的中点$S(x',\ y')$的坐标是

$$x'=\frac{1}{2}\left(\frac{-a+a\lambda}{1+\lambda}+\frac{-a-a\lambda}{1-\lambda}\right)=-\frac{a(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2}$$

$$y'=0$$

以及$MS=SN=\frac{1}{2}MN=\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}$，所以满足$\frac{|PA|}{|PB|}=\lambda$的点在这个圆上．

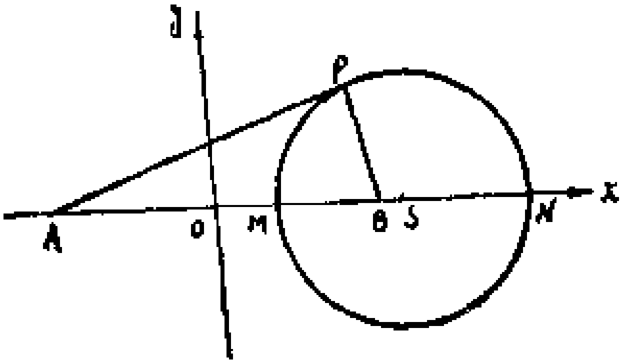
反之，设$P_0(x_0,\ y_0)$，是该圆上的一点，则有

$$x_0^2+\frac{2a(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2}x_0+y_0^2=-a^2$$

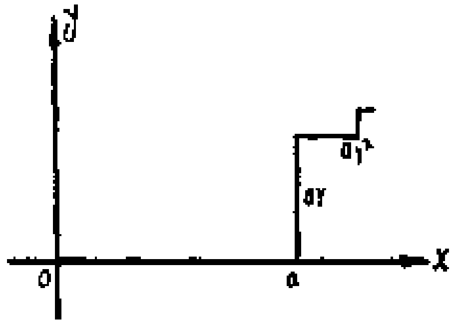
或 $$\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2}=\lambda\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}$$

这就满足条件$|P_0A|=\lambda|P_0B|$，故在圆上的点满足条件。

27. (1) 设极限点的坐标为(x, y)，那么



习题 1.1—26



习题 1.1—27

$$x=a+ar^2+ar^4+\cdots\cdots=\frac{a}{1-r^2} \quad ①$$

$$y=ar+ar^3+ar^5+\cdots\cdots=\frac{ar}{1-r^2} \quad ②$$

∴ 极限点的坐标$\left(\frac{a}{1-r^2}, \frac{ar}{1-r^2}\right)$

(2) 如果 r 是变量，

由① $1-r^2=\frac{a}{x}$ $\quad r^2=\frac{x-a}{x}$

由② $$y^2=\frac{a^2r^2}{(1-r)^2}=\frac{a^2\cdot\frac{x-a}{x}}{\frac{a^2}{x^2}}$$

$$=x^2\cdot\frac{x-a}{x}=x^2-ax$$

∴ $x^2-y^2-ax=0\,(x>0, y>0)$ 为极限点轨迹方程。

28. 由 $y=x(a-x)$，$y=x^3$，消去 y，得

$$x^3+x^2-ax=0，即\ x(x^2+x-a)=0$$

方程 $x^2+x-a=0$ 有不等于 0 的相异两实根是二曲线有三个交点的充要条件，故

$$\triangle=1^2+4a>0，且\ a\neq 0$$

$\therefore\quad a>-\frac{1}{4}(a\neq 0)$

29. 由 $y=mx+b$，$(x-1)^2+a^2y^2-a^2=1$，消去 y，并整理得：

$$(1+a^2m^2)x^2+2(a^2mb-1)x+a^2b^2-a^2+1=0 \quad ①$$

两曲线有交点的条件是方程①的判别式

$$\frac{\triangle}{4}=(a^2mb-1)^2-(1+a^2m^2)(a^2b^2-a^2+1)\geqslant 0$$

即
$$(a^2-1)m^2-2bm+(1-b^2)\geqslant 0 \quad ②$$

对于任意的 m 值，②式恒成立的条件是

$$\begin{cases} a^2-1>0 \\ b^2-(a^2-1)(1-b^2)\leqslant 0 \end{cases} 或 \begin{cases} a^2-1=0 \\ b=0 \end{cases}$$

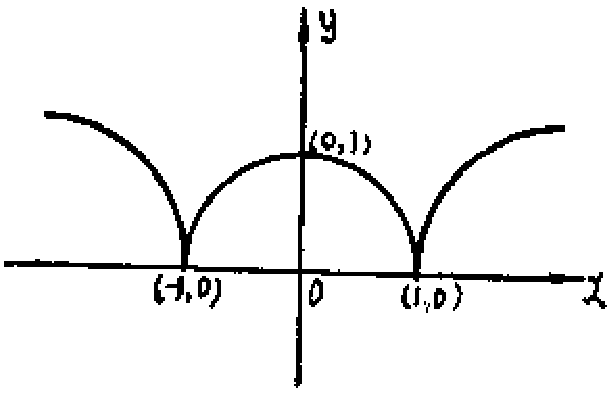
即
$$\begin{cases} |a|\geqslant 1 \\ -\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leqslant b\leqslant \frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \end{cases}$$

30. 对 x 的任何实数值都有 $y\geqslant 0$，故曲线在 x 轴的上方，又以 $-x$ 代 x 方程不变，故曲线关于 y 轴对称.

由 $1-x^2=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=1$，所以

① 当 $x<-1$ 时，原方程化为 $y=\sqrt{x^2-1}$，它所表示的图象是双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左支在 x 轴以上的部分（$x<-1$，$y>0$）

② 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，原方程化为 $y=\sqrt{1-x^2}$，它所表



习题 1.1—30

示的图象是圆 $x^2+y^2=1$ 在 x 轴以上的部分及 x 轴上的两点（$|x|\leqslant 1, y>0$）

③ 当 $x>1$ 时，原方程化为 $y=\sqrt{1-x^2}$，它所表示的图象是双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支在 x 轴上方的部分（$x>1$，$y>0$）

作图：（见上图）.

习　题　二

1．(1) $x-2y+10=0$

(2) $\sqrt{6}x-2y+10=0$

(3) 直线 l 的斜率 $k=\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\sqrt{3}$

（∵ α 为锐角，故取正值．）∴ 直线 l 的方程是

$$y-5=3(x-0)\quad 即\ 3x-y+5=0$$

(4) 设直线 l 的方程为 $y=kx+5$，因点 $(-4，3)$ 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$，

$$\therefore\quad \frac{|-4k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$$

解得 $k_1=1$，$k_2=\dfrac{1}{7}$ 所以直线 l 的方程是 $y=x+5$ 和 $y=\dfrac{1}{7}x+5$

(5) 设直线 l 的斜率为 k，因直线 $2x+y=3$ 的斜率为 -2，

$\therefore \quad \left|\dfrac{k-(-2)}{1+k(-2)}\right| = \operatorname{tg} 45^\circ$ 得 $k = -\dfrac{1}{3}$ 或 $k = 3$.

故直线 l 的方程为 $y = -\dfrac{1}{3}x + 5$ 或 $y = 3x + 5$.

2. 设已知直线的倾角为 α, 则 $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$, 从而利用三角公式可求得所求直线的斜率为 $k = \operatorname{tg} 2\alpha$, 再用点斜式可得所求直线的方程是 $3x - 4y - 10 = 0$.

3. 两已知平行直线的纵截距分别为 $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, 所以与此两直线平行且等距的直线 l 的纵截距 $b = 0$, 又斜率 $k = 1$

$\therefore \quad l$ 的方程是 $y = x$

由方程组

$$\begin{cases} y = x \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

解得交点 $B(1, 1)$

由两点式得所求直线的方程是

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{4-1}$$

即 $\qquad 3x - y - 2 = 0$

4. 设所求直线与两条已知直线的交点分别为 $R(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

$\because \quad P(0, 1)$ 是 RQ 的中点

$\therefore \quad x_2 = -x_1 \quad y_2 = 2 - y_1$

代入已知直线方程, 解得

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

故由两点式解得方程 $x + 4y - 4 = 0$

5. BC 的方程是 $5x-y-5=0$

AC 的方程是 $x-y+3=0$

AB 边上高的方程是 $3x-y-1=0$

$\triangle ABC$ 的各顶点坐标 $A(-2, 1)$，$B(1, 0)$，$C(2, 5)$，垂心坐标$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

6. 各边方程分别为：

$y=2\sqrt{3}$，$y=0$，$\sqrt{3}x-y+5\sqrt{3}=0$，

$\sqrt{3}x+y-5\sqrt{3}=0$

7. 设斜边 AB 所在直线方程为 l_1，则斜率 $k_1=3$，

又设直角边 AC 所在直线方程为 l_2，斜率为 k_2，则

$\because \quad \dfrac{3-k_2}{1+3k_2}=\operatorname{tg}45^\circ=1 \qquad \therefore \quad k_2=\dfrac{1}{2}$

又$\because$ l_2 过点 $C\left(2\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$，故 AC 的方程为 $x-2y-2=0$

设直角边 BC 所在直线方程为 l_3，斜率为 k_3，

$\because \quad l_3 \perp l_2, \qquad \therefore \quad k_3=-\dfrac{1}{k_2}=-2$

又$\because$ l_3 过也过点 $C\left(2\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$，故 BC 的方程为

$$2x+y-6=0$$

解方程组

$$\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases}$$

得 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的坐标为$\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$，于是

$$|AC|=\sqrt{\left(2\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$$

$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC|^2=10$

8．解方程组

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x-3y-2=0 \end{cases}$$

得两已知直线的交点坐标为$(-5,\ -4)$

设所求直线的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$\because$直线过点$(-5,\ -4)$，$\therefore\quad \frac{-5}{a}+\frac{-4}{b}=1$

即　$4a+5b=-ab$　①

又由题设有$\frac{1}{2}|ab|=5$

$\therefore\qquad ab=-10$　②

$\qquad\quad ab=10$　③

联立①、②，解得 $a=-\frac{5}{2}$，$b=4$；或$a=5$，$b=-2$

由①、③联立之方程组无解

故所求直线方程是

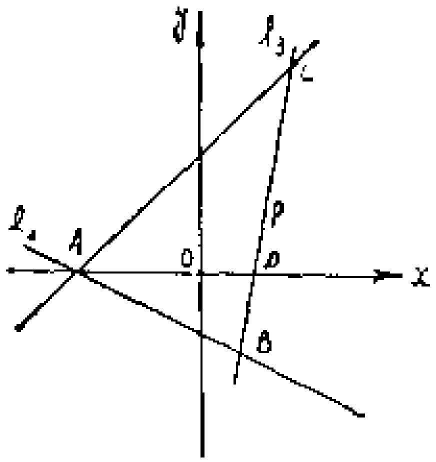
$$\frac{x}{-\frac{5}{2}}+\frac{y}{4}=1\qquad \frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$$

即　$8x-5y+20=0$ 和 $2x-5y-10=0$

9．设l_3方程为

$$y-1=k(x-1)$$

解l_3和l_1的方程组得交点B的纵坐标$y_1=\frac{-3k+1}{2k+1}$



习题 1.2—9

解 l_3 和 l_2 的方程组得交点 C 的纵坐标 $y_2=\frac{3k-1}{k-1}$

解 l_1、l_2，得交点 $A(-2,0)$

设 l_3 交 x 轴于 D，

则 $D(\frac{k-1}{k},0)$

于是 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AD||y_1-y_2|$

即 $$S=\frac{3}{2}\cdot\frac{(3k-1)^2}{(2k+1)(k-1)}$$

令 $S=\frac{3}{2}S'$，$S'=\frac{(3k-1)^2}{(2k+1)(k-1)}$， 而求 S' 的最小值

$\therefore\quad (9-2S')k^2+(S'-6)k+(S'+1)=0$

当上述方程有实数解时，必有

$$(S'-6)^2-4(9-2S')(S'+1)=0$$

$$S'(9S'-40)\geqslant 0$$

故 $S'_{最小}=\frac{40}{9}$ 即 $S_{最小}=\frac{20}{3}$

从而求得 $k=7$，故所求的直线 l_3 的方程是

$$7x-y-6=0$$

另解：实际上当 $P(1,1)$ 为 BC 中点时，$\triangle ABC$ 的面积最小，设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，有

$$\frac{x_1+x_2}{2}=1,\quad \frac{y_1+y_2}{2}=1$$

及 $x_1+2y_1+2=0\quad x_2-y_2+2=0$

由以上方程解得$x_1=\frac{2}{3}$，$y_1=-\frac{4}{3}$，$x_2=2$，$y_2=\frac{10}{3}$

由 PB(或 PC、BC)，用两点式，得 L_3：$7x-y-6=0$

10．A、B、C 三点到直线 $y=mx$ 的距离为

$$d_1=\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}};\quad d_2=\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}};$$

$$d_3=\frac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

令 $k=d_1^2+d_2^2+d_3^2$，则有

$$\frac{(m-2)^2+(3m-1)^2+(2m-3)^2}{m^2+1}=k$$

化简 $(14-k)m^2-22m+(14-k)=0$ ①

当 $k=14$ 时 $m=0$

当 $k\neq14$ 时，①看作 m 的二次方程，根据二次方程有实数根的条件，得

$$11^2-(14-k)^2\geqslant0$$

∴ $3\leqslant k\leqslant25$(这里也包含 3，$k=14$)

由于 k 的最小值为 3，故由①可得 $m=1$

11．求出 A 点关于直线 l 的对称点 A' 的坐标为 (0，1)，故 $A'B$ 所在直线的方程 L'：$y=x+1$

l' 与 l 的交点 $P(5,6)$ 即为所求的点，证明如下：

连结 PA，则 $|PA|=|PA'|$

所以 $|PA|-|PB|=|A'B|$ 在直线 l 上任取一点 P' 连结 $P'A'$，$P'A$，$P'B$，则

$$|P'A'|=|P'A|$$

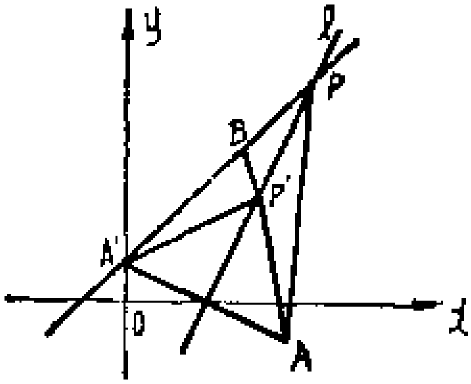
∴ $|P'A|-|P'B|=||P'A'|-|P'B||<|A'B|$

故 $||PA|-|PB||=|A'B|$ 为最大

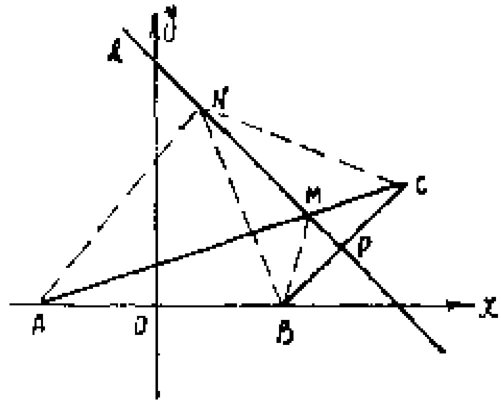
12．设 B 点关于直线 l 的对称点为 C，因 BC 过 B(4,

0）点，与直线 l 垂直，故得 BC 的方程为

$$x-y-4=0$$



习题 1.2—11



习题 1.2—12

解 l 与 BC 的方程所组成的方程组，得交点 P 的坐标为(6，2)

因 P 为 BC 的中点，故得 $C(8，4)$

由两点式得 AC 的方程为 $x-3y+4=0$

解 l 与 AC 的方程所组成的方程组，交点 $M(5，3)$，即为所求.

下面证明 M 点是符合要求的点.

在直线 l 上任取异于 M 的点 N，连 NA、NB，NC、MB，∵ B、C 关于 l 对称，∴ l 为 BC 的中垂线，于是

$$|MC|=|MB|,\ |NB|=|NC|$$

$$|AM|+|MB|=|AM|+|MC|=|AC|$$

$$|AN|+|NB|=|AN|+|NC|$$

由 $\triangle ANC$ 可知 $|AC|<|AN|+|NC|$，故 $|AM|+|MB|$ 最短.

根据两点间的距离公式

$$|AM|+|MB|=|AC|=\sqrt{(8+4)^2+(4-0)^2}$$
$$=4\sqrt{10}$$

13. 解：设 Q 点的坐标为 $(x_1,\ y_1)$，则 $y_1=4x_1$

又直线 PQ 的方程为

$$\frac{y-4}{y_1-4}=\frac{x-6}{x_1-6}$$

即 $\quad \dfrac{y-4}{4x_1-4}=\dfrac{x-6}{x_1-6} \quad (\because\ y_1=4x_1)$

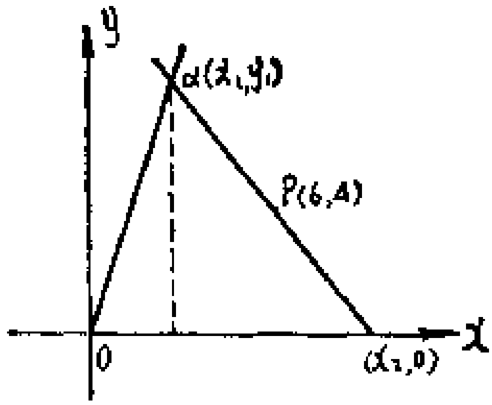
设直线 PQ 交 x 轴于 $M(x_2,\ 0)$

$\therefore \quad \dfrac{0-4}{4x_1-4}=\dfrac{x_2-6}{x_1-6}$

$$x_2=\frac{5x_1}{x_1-1}$$

则 M 点的坐标为：

$$\left(\frac{5x_1}{x_1-1},\ 0\right)$$



习题 1.2—13

从而易知 $\triangle OMQ$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}y_1\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}$$
$$(\because\ x_1>0,\ y_1>0)$$
$$=\frac{1}{2}4x_1\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}=\frac{10x_1^2}{x_1-1}$$

$\therefore \quad (x_1-1)S=10x_1^2$

即 $\quad 10x_1^2-Sx_1+S=0 \qquad ①$

要使①对于 x_1 有实数根，则须

$$(-S)^2-4\times10\cdot S\geqslant0$$

即 $$S(S-40)\geqslant0$$

$\because\ S>0 \quad \therefore\ S-40\geqslant0$ 即 $S\geqslant40$

故当 $S=40$ 时 $\triangle OMQ$ 的面积为最小

把 $S=40$ 代入①，得

$$10x_1^2-40x_1+40=0$$

即 $$x_1^2-4x_1+4=0$$

∴ $x_1=2$（二重根）

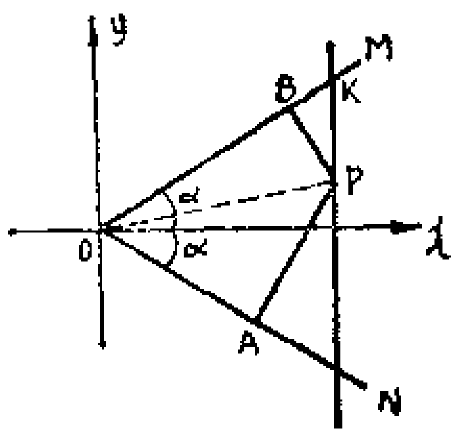
从而得 $y_1=8$

故 Q 点的坐标为(2，8)

14. 〈1〉 $4x-3y-1=0$

〈2〉 $t=3$ (28，37)

15. 建立坐标系如图.



习题 1.2—15

OM、ON 为两直线，OX 轴是定角 $\angle MON=2\alpha$ 的平分线，设 $P(x,y)$.

令 $\angle POB=\beta$,

$\angle POX=\gamma$

则 $$OB=OP\cos\beta$$

$$=\frac{x}{\cos\gamma}\cdot\cos(\alpha-\gamma)$$

$$=\frac{x}{\cos\gamma}\cdot(\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma)$$

$$=x\cos\alpha+x\,\mathrm{tg}\,\gamma\cdot\sin\alpha$$

$$=x\cos\alpha+y\sin\alpha$$

同法可求出 $OA=x\cos\alpha-y\sin\alpha$

∵ $OA+OB=m$(定值)

∴ $$x=\frac{m}{2\cos\alpha}$$

m 是定值，α 是定角的一半， 也是定值，故所求轨迹是与二定直线相交成等腰三角形的直线，

腰长 $OK=\dfrac{x}{\cos\alpha}=\dfrac{m}{2\cos^2\alpha}=\dfrac{m}{1+\cos 2\alpha}$

16．取 l_1、l_2 的交点为原点 O， 过 O 点平行于 l_3 的直线为 y 轴，建立坐标系，设 θ_1、θ_2 分别为 l_1、l_2 对 x 轴的倾角，T 为动直线 l 到 y 轴的距离，则两垂线方程为：

$$y-T\operatorname{tg}\theta_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\theta_1}(x-T)$$

$$y-T\operatorname{tg}\theta_2=-\frac{1}{\operatorname{tg}\theta_2}(x-T)$$

解得　$x=(\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\theta_2)T$

$$y=(1-\operatorname{tg}\theta_1\cdot\operatorname{tg}\theta_2)T$$

从而所求之轨迹方程为 $y=\operatorname{tg}(\theta_1+\theta_2)x$

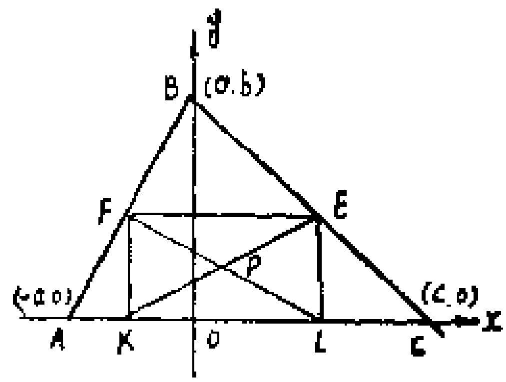
17．建立如图所示之坐标系，

得 AB、BC 的方程分别为

$$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=1 \qquad ①$$

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{c}=1 \qquad ②$$

设 EF 的方程为 $y=k$.　③



习题 1.2—17

由①、③得

$$F\left[-a\left(1-\frac{k}{b}\right),\ k\right]$$

由②、③得　$E\left[c\left(1-\dfrac{k}{b}\right),\ k\right]$

EF 的中点坐标为$\left[\dfrac{c-a}{2}\left(1-\dfrac{k}{b}\right),\ k\right]$，于是对角线交点 P 的坐标是

$$\begin{cases} x=\dfrac{c-a}{2}\left(1-\dfrac{k}{b}\right) \\ y=\dfrac{k}{2} \end{cases}$$

消去 k，得 P 点的轨迹方程 $2bx+2(c-a)y=b(c-a)$ 此直线为过 AC 中点 $\left(\frac{c-a}{2}, 0\right)$ 及高 BO 的中点 $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ 的直线.

18. 设直线通过有理点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则有 $x_1 \neq x_2$，如果不然 $x_1=x_2$，则有 $x_1=x_2=\sqrt{2}$，与假设相违.

从而可设直线方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

以 $(\sqrt{2}, 0)$ 代入，得

$$-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(\sqrt{2}-x_1)$$

因此，y_1 必须等于 y_2，否则 $\sqrt{2}=x_1-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\cdot y_1$ 为有理数，因此通过 $(\sqrt{2}, 0)$ 且至少通过两个有理点的直线只有一条 $y=0$.

19. 如图 1.2—19，以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立坐标系，则 $A(0, 0)$，设 B 点坐标为 $(b, 0)$，C 点坐标为 $(c, 0)$，D 点坐标为 (d, e) 则 $M\left(\frac{b}{2}, 0\right)$

$$N\left[\frac{1}{2}(c+d), \frac{1}{2}e\right], \quad P\left[\frac{1}{2}(b+d), \frac{1}{2}e\right]$$

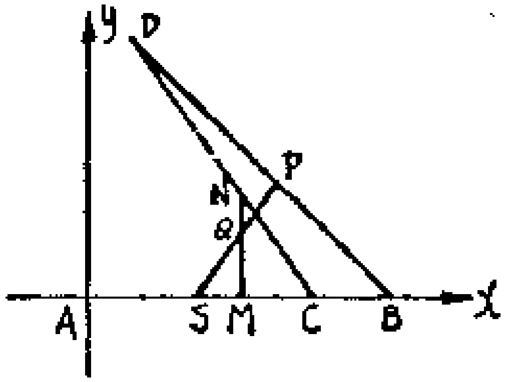
$$Q\left[\frac{1}{4}(b+c+d), \frac{1}{4}e\right]$$

取 AC 中点 S，则 $S\left(\frac{c}{2}, 0\right)$

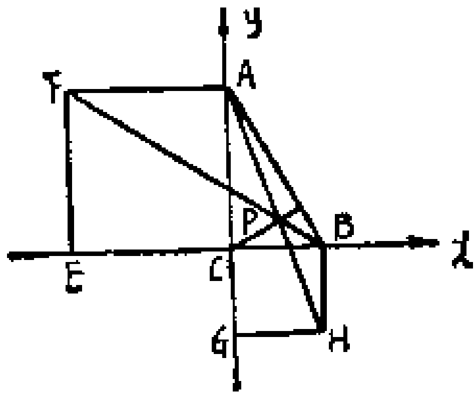
$\because \quad k_{PS}=\frac{e}{b+d-c}, \quad k_{QS}=\frac{e}{b+d-c}$

$\therefore \quad k_{PS}=k_{QS}$

即 P、Q、S 三点共线，故 PQ 平分 AC.



习题 1.2—19



习题 1.2—20

20. 建立如图1.2—20所示之坐标系，若$|CB|=a$，$|CA|=b$，则A、B、E、F、G、H 各点坐标分别为$(0,b)$、$(a,0)$、$(-b,0)$、$(-b,b)$、$(0,-a)$、$(a,-a)$ 直线 AH 的方程为 $(a+b)x+ay-ab=0$ ①

直线 BF 的方程为 $bx+(a+b)y-ab=0$ ②

解①、②所组成的方程组，得交点 P 的坐标为：

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+ab+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+ab+b^2}\right)$$

$$\because\quad k_{AB}=-\frac{b}{a},\quad k_{CP}=\frac{a}{b}$$

$$k_{AB}\cdot k_{CP}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=-1$$

故 $CP\perp AB$

21. 建立坐标系如图1.2—21，设正方形边长为a，$\angle EAB=\alpha$，则 $E(a,\ a\operatorname{tg}\alpha)$，$F\left(a\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha},\ a\right)$

直线 EF 的方程为：

$$\frac{y-a\operatorname{tg}\alpha}{x-a}=\frac{a-a\operatorname{tg}\alpha}{a\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}-a}$$

即 $\quad y - a\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}(x-a) = 0$

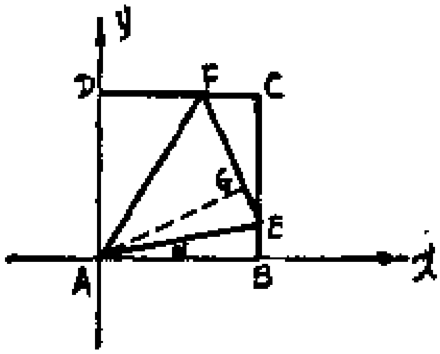
原点 A 到 EF 的距离 $d(=AG)$ 为

$$d = \frac{\left|0 - a\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}(0-a)\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)^2+1}}$$

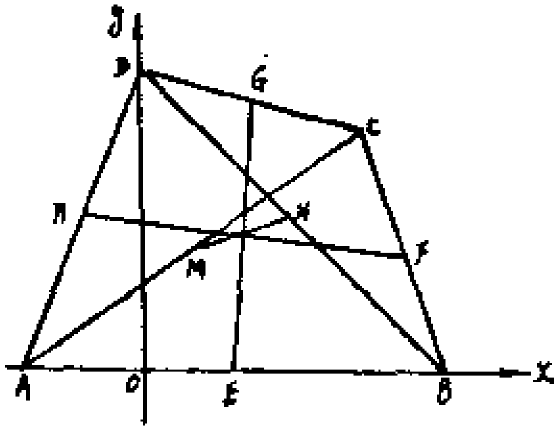
$$= a\left|\frac{-(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}}\right| = a$$

$\therefore \quad AB = AG$

$$\frac{S_{\square ABCD}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AB^2}{\frac{1}{2}EF \cdot AG} = \frac{2AB}{EF}$$



习题 1.2—21



习题 1.2—22

22. 建立坐标系如图 1.2—22，设 $A(a, 0)$，$B(b, 0)$，$C(c, d)$、$D(0, e)$，再用中点坐标公式求出 E、F、G、H、M、N 各点坐标，分别求出 EG、FH 和 MN 的方程为：

EG：$(d+e)x + (a+b-c)y = \dfrac{1}{2}(ad+bd+ae+be)$

FH：$(d-e)x + (a-b-c)y = \dfrac{1}{2}(ad-bc-ce)$

MN: $(e-d)x+(a+c-b)y=\frac{1}{2}(ae+ce-bd)$

最后证明行列式

$$\begin{vmatrix} d+e & a+b-c & \frac{1}{2}(ad+bd+ae+be) \\ d-e & a-b-c & \frac{1}{2}(ad-bc-ce) \\ e-d & a+c-b & \frac{1}{2}(ae+ce-bd) \end{vmatrix}=0$$

23. 由 $ad_1+bd_2=0$，得

$$(ax_1+bx_2)\cos\theta+(ay_1+by_2)\sin\theta-(a+b)p=0 \qquad ①$$

动直线方程：$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ ②

由①、②消去 p，并整理得

$$\left(x-\frac{ax_1+bx_2}{a+b}\right)\cos\theta+\left(y-\frac{ay_1+by_2}{a+b}\right)\sin\theta=0$$

$(a+b\neq0)$

∴ 动直线必过定点$\left(\frac{ax_1+bx_2}{a+b}, \frac{ay_1+by_2}{a+b}\right)$

24. 易知所给方程表示的直线为

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}y=0$$

和

$$x+\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}y=0$$

故由点 $P(h, k)$到它们的距离是：

$$d_1=\left|\frac{h-\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}k}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)^2}}\right|$$

$$d_2=\left|\frac{h-\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}k}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)^2}}\right|$$

$$\therefore \qquad d_1 \cdot d_2 = \frac{ah^2 + 2bhk + ck^2}{\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}$$

式中 a、b、c、h、k 皆为已知数，

故 $d_1 \cdot d_2 =$ 定值.

25. $\because$ $P_0(x_0, y_0)$在直线 $x\cos\omega + y\sin\omega - p = 0$ 上

故有

$$x_0\cos\omega + y_0\sin\omega - p = 0$$

即 $$p = x_0\cos\omega + y_0\sin\omega$$

$$\begin{aligned}\therefore \qquad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 &= (x_1 + x_2 + x_3)\cos\omega \\ &\quad + (y_1 + y_2 + y_3)\sin\omega - 3P \\ &= (x_1 + x_2 + x_3 - 3x_0)\cos\omega \\ &\quad + (y_1 + y_2 + y_3 - 3y_0)\sin\omega \qquad ①\end{aligned}$$

如果 $P_0(x_0, y_0)$是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心，则

$$x_0 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),\quad y_0 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \qquad ②$$

代入①式即得 $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$

反之，如果 $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$，则由于通过 P_0 的直线 $x\cos\omega + y\sin\omega - p = 0$ 是任意的，分别取 $\omega = 0$；$\frac{\pi}{2}$，

由①得出

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_0 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 - 3y_0 = 0 \end{cases}$$

因此等式②成立，即 P_0 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心.

26. 设与已知曲线相交于四个不同点的直线系方程为

$$y = kx + b$$

则由：

$$\begin{cases} y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5 \\ y = kx + b \end{cases}$$

有 $$2x^4+7x^3+(3-k)x-(5+b)=0 \quad ①$$

交点的横坐标 x_1、x_2、x_3、x_4 为方程①的根，由根与系数的关系，知：

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=-\frac{7}{8} \quad ②$$

式②中不含有直线方程的参数 k 和 b，故

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

与直线的位置无关，其值为 $-\frac{7}{8}$。

27. (1) 将原方程化为：

$$x^2+(y+4)x+my=0 \quad ①$$

若原方程表示直线，则 $(y+4)^2-4my$ 应为完全平方，其判别式为零

故 $4^2(2-m)^2-4\times16=0$

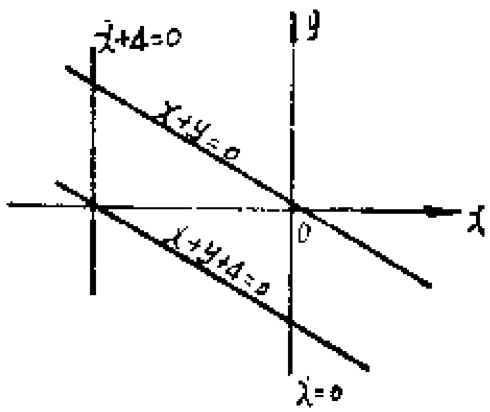
解得 $m=0$ 或 $m=4$

(2) 当 $m=0$ 时直线方程为

$x=0 \qquad x+y+4=0$

当 $m=4$ 时直线方程为

$x+y=0 \qquad x+4=0$



习题 1.2—27

(3) 易知各条直线围成平行四边形，其面积为 16。

28. (1) 若 $b=0$，则原方程为

$$x(ax+2hy)=0$$

表示两条直线

若 $b\neq0$，原方程可写成

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{h}{b}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{a}{b}=0 \quad ①$$

（i）当$\left(\frac{h}{b}\right)^2>\frac{a}{b}$，即 $h^2>ab$ 时，①有相异的两个根 $y/x=m_1$，m_2，于是 $y=m_1x$，$y=m_2x$，亦即当 $h^2>ab$ 时，原方程代表通过原点的两条直线．

（ii）当 $h^2=ab$ 时，原方程是$\left(\frac{y}{x}+\frac{h}{b}\right)^2=0$，代表一条直线 $hx+by=0$

（iii）当 $h^2<ab$ 时，关于$\frac{y}{x}$的二次式无根，只有原点适合原方程，故当 $h^2<ab$ 时，仅代表原点．

〈2〉设此两直线为 $y=m_1x$ 和 $y=m_2x$，由①知$\frac{y}{x}$的二次式①的两个根是 m_1 和 m_2，于是

$$m_1+m_2=-\frac{2h}{b},\ m_1\cdot m_2=\frac{a}{b}$$

又 $(m_1-m_2)^2=(m_1+m_2)^2-4m_1m_2=\frac{4}{b^2}(h^2-ab)$

因此，它们的交角 θ 的正切为：

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{b\left(1+\frac{a}{b}\right)}=\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

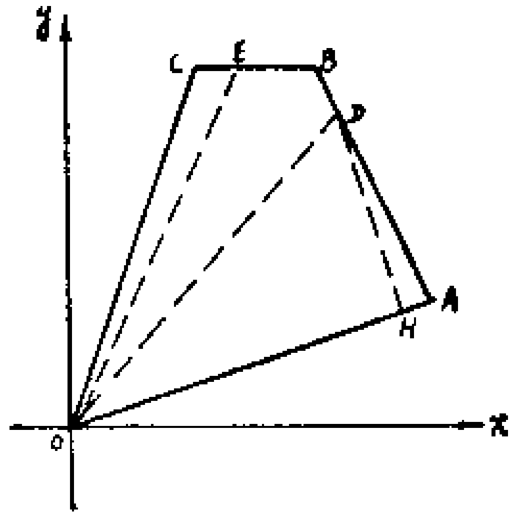
$\therefore\ \theta=arc\ \operatorname{tg}\left(\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right)$

29.（1）$\because\ k_{OA}=\frac{1}{3}$，$k_{OB}=\frac{2}{3}$，$k_{OC}=3$，

$\therefore$ 当$\frac{1}{3}<m<\frac{2}{3}$时，直线 $y=mx$ 与 OA 相交于 D，所求的面积为 $\triangle OAD$ 的面积，

当$\frac{2}{3} \leqslant m < 3$时，直线$y=mx$与$CB$相交于$E$，所求的面积为四边形$OABE$的面积.

当$\frac{1}{3} < m < \frac{2}{3}$时，直线$AB$：$y=-2x+14$与直线$y=mx$的交点$D\left(\frac{14}{m+2}, \frac{14m}{m+2}\right)$，$D$到$OA$的距离是



习题 1.2—29

$$|DH| = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}}\left|\frac{14}{m+2} - \frac{42m}{m+2}\right|$$

$$= \frac{14(3m-1)}{\sqrt{10}(m+2)}$$

$$\therefore \quad S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |DH| = \frac{14(3m-1)}{m+2} \qquad ①$$

同理　当$\frac{2}{3} \leqslant m < 3$时，求得

$$S_{\triangle OCE} = 3\left(\frac{6}{m} - 2\right)$$

$$\because \quad S_{\text{四边形}OABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = 20$$

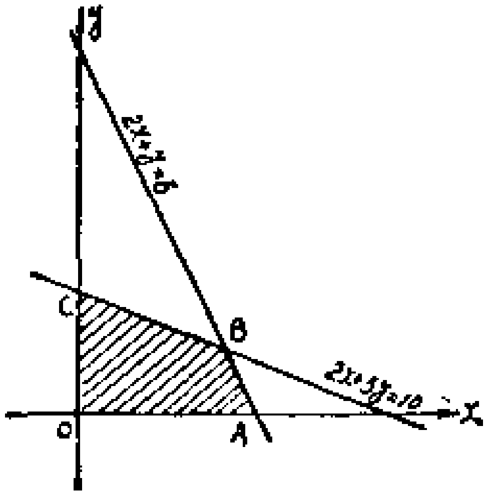
$$\therefore \quad S_{\text{四边形}OABE} = 20 - 3\left(\frac{6}{m} - 2\right) = 26 - \frac{18}{m}$$

(2) 直线$y=mx$等分四边形$OABC$的面积时，有

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}OABC}$$

即　$\frac{14(3m-1)}{m+2} = 10 \quad \therefore \quad m = \frac{17}{16}$

30. 同时满足这些不等式的(x, y)的存在区域为四边形$OABC$的内部及其边界，如下图所示



习题 1.2—30

习 题 三

1. (1) 若 $A=0$，而 D、E 不同时为零时，方程的图形是直线.

(2) $A\neq 0$ 时，原方程可化为

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$$

当且仅当 $D^2+E^2-4AF>0$ 时，方程的图形是圆. ①$F=0$ 时，此圆过原点；②$D=0$ 时，圆心在 y 轴上；③$E=0$ 时，圆心在 x 轴上.

2. 若方程 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fg'+c=0$ ① 表示圆心为 $(x_1,\ y_0)$，半径为 r 的圆，它的方程是 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$②，将②式展开与①比较，可得 $a=b\neq 0$，$b=0$，$g^2+f^2-ac=a^2r^2>0$.

反之，若 $a=b\neq 0$，$g^2+f^2-ac>0$，则方程①化为

$$x^2+y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0，\text{即}\left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2$$

$=\dfrac{g^2+f^2-ac}{a^2}$ 故方程①表示以$\left(-\dfrac{g}{a},-\dfrac{f}{a}\right)$为圆心$\dfrac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{|a|}$为半径的圆.

3. 将圆 C 的方程化成

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}\right)^2$$

(1) 若圆与坐标轴相切，必有

$$\left|\frac{D}{2}\right|=\left|\frac{E}{2}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} \quad 故 \quad D^2=E^2=4F$$

(2) 圆与坐标轴截成相等弦的条件：

$$\left|\frac{D}{2}\right|=\left|\frac{E}{2}\right|<\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}, 故\ D^2=E^2<4F.$$

4. (1) $x^2+y^2=29$

(2) $(x-1)^2+(y-3)^2=25$

(3) $(x-6)^2+(x-10)^2=13^2$

或 $\left(x+\dfrac{183}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{55}{2}\right)^2=\left(\dfrac{221}{2}\right)^2$

(4) $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

(5) $(x-4)^2+(y-1)^2=5$

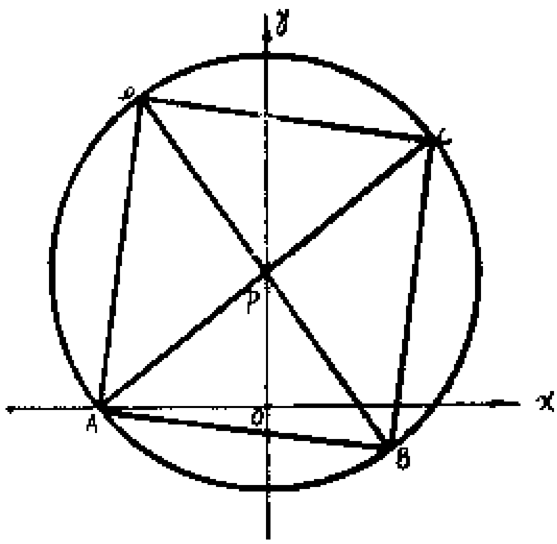
或 $\left(x-\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{5}\right)^2=5$

(6) $3x^2+3y^2-3x+21y-22=0$

5. 如图，设 C 的坐标为 (x_0,y_0)，因 P 为 AC 的中点，

$\therefore \dfrac{x_0+(-y)}{2}=0$，

$\dfrac{y_0+0}{2}=3$，得正方形顶点 C



习题1·3—5

的坐标为(4,6).

B、D 的坐标满足方程组

$$\begin{cases}x^2+(y-3)^2=25\\ y-3=-\dfrac{4}{3}x\end{cases}$$

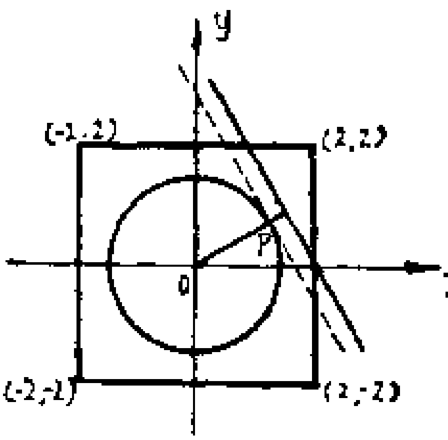
解之,得 B、D 两个顶点的坐标分别是(3,-1),(-3,7)

6. 设所求的点是 $P(x, y)$,依题意得:

$$(x-2)^2+(x+2)^2+(y+2)^2+(y-2)^2=20$$

即 $$x^2+y^2=2$$

∴ $P(x,y)$ 是在以原点 O 为圆心,半径为 $\sqrt{2}$ 的圆上,而 $P(x,y)$ 又在过原点和直线 l 垂直的直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 上.



习题 1·3—6

于是解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

故所求的 P 点坐标为

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

7. 把圆的方程化为 $(x-4)^2+(y-1)^2=5$,故圆心为 $C(4,1)$,因直径是圆的最长的弦,从而最长弦在直线 PC 上.

由 P, C 的坐标求得 PC 的方程为 $x-y-3=0$,

过点 P 的一切弦中,以垂直于 PC 的弦为最短,故得最短弦所在直线的方程为 $x+y-3=0$.

8. 解方程组

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2+y^2+x-6y+c=0 \end{cases}$$

得 P,Q 的坐标分别为

$$\left(\frac{-5-2\sqrt{40-5c}}{5},\ \frac{10+\sqrt{40-5c}}{5}\right),$$

$$\left(\frac{-5+2\sqrt{40-5c}}{5},\ \frac{10-\sqrt{40-5c}}{5}\right).$$

$\because\quad OP\perp OQ.\qquad\qquad \therefore\quad k_{OP}=-\frac{1}{k_{OQ}}$

即 $$\frac{10+\sqrt{40-5c}}{-5-2\sqrt{40-5c}}=-\frac{-5+2\sqrt{40-5c}}{10-\sqrt{40-5c}}$$

去分母，化简．得 $25c=75$，即 $c=3$.

9. (1) 圆心为 $C(2,3)$，则

$$PQ^2=CP^2-CQ^2=(a-2)^2+(b-3)^2-1$$

由 $PO=PQ$ 有 $a^2+b^2=(a-2)^2+(b-3)^2-1$.

$\therefore\quad 2a+3b=6$ ①

(2) 由①满足 $PO=PQ$ 的点必在直线

$$2x+3y=6 \qquad ②$$

上，要使 PQ 最小，即 PO 最小，因而从①到②的垂足便是 PQ 为最小的点，由于②与直线 OC：$y=\frac{3}{2}x$ ③垂直，解②，③得交点 $\left(\frac{12}{13},\ \frac{18}{13}\right)$ 即为所求.

10. (1) 解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=kx+3\sqrt{2} \end{cases}$$

得 M、N 的坐标分别为

$$\left(\frac{-3\sqrt{2}k+3\sqrt{k^2-1}}{k^2+1},\quad \frac{3\sqrt{2}+3k\sqrt{k^2-1}}{k^2-1}\right),$$

$$\left(\frac{-3\sqrt{2}k-3\sqrt{k^2-1}}{k^2+1},\ \frac{3\sqrt{2}-3k\sqrt{k^2-1}}{k^2+1}\right).$$

(2) 由①知 $k^2-1=0$，即 $k=\pm 1$ 时，方程组有两组相同的实数解，即直线与圆相切，故 M、N 重合，此时过 P 点与圆相切的直线有两条，其斜率分别为 1，−1. 故这两直线所成的角为 90°.

11. 由方程组

$$\begin{cases} y=kx+b \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

消去 y，得

$$(1+k^2)x^2+2bkx+b^2-r^2=0$$

要直线与圆相切，必须

$$b^2k^2-(1+k^2)(b^2-r^2)=0$$

故 $\quad b^2=r^2(1+k^2)$

12. 由条件 $x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2=0$，易知 $OP_1 \perp OP_2$

设 $\angle P_1ox=\theta$，则 $\angle P_2ox=\theta+90°$

又 $\quad x_1=r \cdot \cos\theta$，$x_2=r\cos(\theta+90°)=-r\sin\theta$

$y_1=r \cdot \sin\theta$，$y_2=r\sin(\theta+90°)=r\cos\theta$

因此，$x_1^2+x_2^2=(r\cos\theta)^2+(-r\sin\theta)^2=r^2$

$y_1^2+y_2^2=(r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2=r^2$

$x_1y_1+x_2y_2=r^2\cos\theta \cdot \sin\theta-r^2\sin\theta \cdot \cos\theta=0$

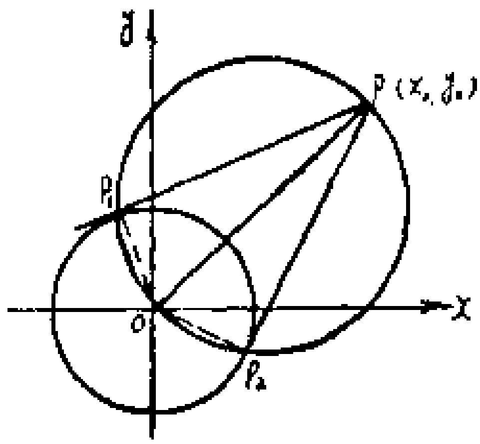
13. 如图，易知 $OP_1 \perp PP_1$，$Op_2 \perp PP_2$，∴ P_1，P_2 在以 OP 为直径的圆周上. 设 $P'(x,y)$ 为该圆上除 O、P 外的任意一点.

∵ $\quad OP' \perp PP'$.

故 $\frac{y}{x}\cdot\frac{y-y_0}{x-x_0}=-1$. 整理得以 oP 为直径的圆的方程是

$$x^2+y^2-x_0x-y_0y=0.$$

∵ P_1P_2 是圆 $x^2+y^2=r^2$①和圆 $x^2+y^2-x_0x-y_0y=0$②的根轴，故由①－②得 $x_0x+y_0y=r^2$. 即为 P_1P_2 所在直线的方程.



习题 1·3—15

14. 由上题，知过两切点的直线方程是

$$(b^3-b)x+(c^3-c)y=(3a+1)^2$$

$$(b-1)b(b+1)x+(c-1)c(c+1)y=3(3a^2+2a)+1$$

左边，x，y 的系数是 3 的倍数，右边不是 3 的倍数，故对适合方程的 x、y 不能同时都为整数，亦即直线 AB 上任何点都不是整点.

15. 先求出两圆的交点 A，B 的坐标，不难验证，在交点处两圆的切线的斜率的乘积为 -1.

16. 设 C_1，C_2，C_3 三个圆的方程分别是

C_1：$x^2+y^2+a_1x+b_1y+C_1=0$ ①

C_2：$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$ ②

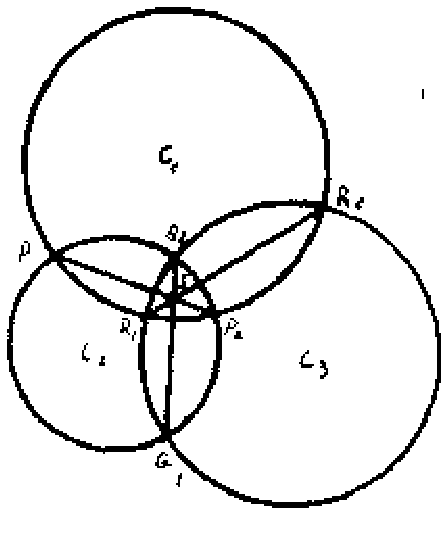
C_3：$x^2+y^2+a_3x+b_3y+c_3=0$ ③

则，①－②得 P_1P_2 的方程.

$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0 \quad ④$$

(2)－(3)，(1)－(3) 分别得 Q_1Q_2，R_1R_2 的方程.

$$(a_2-a_3)x+(b_2-b_3)y+(c_2-c_3)=0 \quad ⑤$$



习题 1·3—16

$$(a_1-a_3)x+(b_1-b_3)y+(c_1-c_3)=0 \qquad ⑥$$

设 P_1P_2 与 Q_1Q_2 的交点是 S，则 S 的坐标应满足 (4) 和 (5)，也就是应该满足 (4) + (5)，即 ⑥，故 S 也在 R_1R_2 上，所以 P_1P_2，Q_1Q_2，R_1R_2 三条直线交于一点.

17．设直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{2a}=1$

即　$y=2a-2x$　①

将已知圆的方程化为

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5 \qquad ②$$

将①代入②消去 y，得

$$5x^2-(8a-6)x+4a^2-8a=0 \qquad ③$$

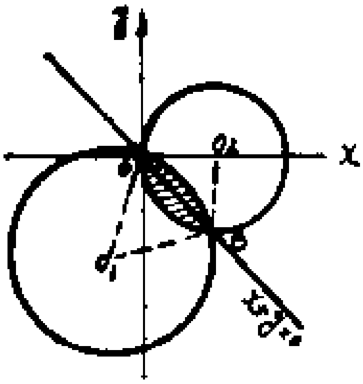
由直线与圆相切，知③的判别式

$$\Delta=[-(8a-6)]^2-4\times5\times(4a^2-8a)=0$$

即　$4a^2-16a-9=0$

解得　$a_1=\dfrac{9}{2}$，$a_2=-\dfrac{1}{2}$，代入①得所求直线方程为

$$y=-2x-9,\quad y=-2x-1.$$



习题 1·3—18

18．解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+2(\sqrt{3}-1)x+2(\sqrt{3}+1)y=0\\ x^2+y^2-4x=0\end{cases}$$

得交点坐标为 $O(0,0)$，$B(2,-2)$

∴　公共弦 OB 所在直线方程为

$$x+y=0$$

又　$|OB|=2\sqrt{2}$，从而 $|OO_1|=|O_1B|=|OB|=2\sqrt{2}$.

$\triangle OO_1B$ 是等边三角形，$\angle OO_1B=60°$

根据 $O_2(2,0)$，$B(2,-2)$ 得 $O_2B\perp OO_2$，即：$OO_2B=90°$.

设两圆公共部分面积为 S.

则 $S=(S_{扇形oo_1B}-S_{\triangle oo_1B})+(S_{扇形oo_2B}-S_{\triangle oo_2B})$

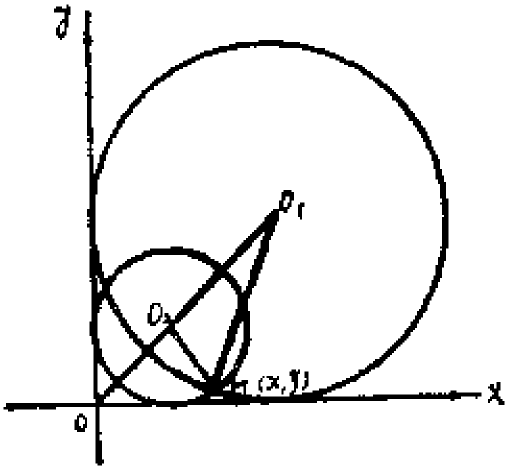
$$=\left(\frac{8}{6}\pi-2\sqrt{3}\right)+\left(\frac{4\pi}{4}-2\right)=\frac{7}{3}\pi-2(\sqrt{3}+1)$$

19. 将两曲线方程相加，得

$$(a^2+b^2)x^2+(a^2+b^2)y^2=2a^2b^2$$

即
$$x^2+y^2=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$$

此为中心在原点的圆的方程，半径 $R=\frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



习题 1·3—20

20. ∵⊙o_1，⊙o_2 与两坐标轴相切，故圆心坐标分别为 (r_1,r_1)，(r_2,r_2)

其方程分别为，

$$(x-r_1)^2+(y-r_1)^2=r_1^2$$
$$(x-r_2)^2+(y-r_2)^2=r_2^2$$

∵点 $M(x_1,y_1)$ 是⊙o_1 与⊙o_2 的交点

∴ $(x_1-r_1)^2+(y_1-r_1)^2=r_1^2$ ①

$(x_1-r_2)^2+(y_1-r_2)^2=r_2^2$ ②

由① $r_1^2-2(x_1+y_1)r_1+x_1^2+y_1^2=0$ ③

由② $r_2^2-2(x_1+y_1)r_2+x_1^2+y_1^2=0$ ④

故 r_1，r_2 是二次方程 $u^2+2(x_1+y_1)u+x_1^2+y_1^2=0$ 的两个根，由根与系数关系，得：$x_1\cdot x_2=x_1^2+y_1^2$

说明：这是假定 $M(x_1,y_1)$ 在第一象限，M 在其它象限同样可证.

若 $M(x_1,y_1)$ 在一坐轴，如在 x 轴上，则 $y_1=0$，这时过 $M(x_1,y_1)$ 且与两坐标轴相切之圆分别在一，四象限（$x_1>0$）或

在二，三象限($x_1<0$)其半径均为$r_1=r_2=|x_1|$，则$r_1\cdot r_2=x_1^2+y_1^2$显然成立.

21. (1) 由原方程，得

$$(x^2+8x+y^2)(x^2-4x+y^2)=0$$

$$\therefore\quad x^2+8x+y^2=0,\ 即(x+4)^2+y^2=16 \qquad (c_1)$$

$$x^2-4x+y^2=0,\ 即(x-2)^2+y^2=4 \qquad (c_2)$$

所以原方程表示的曲线是两个圆C_1,C_2，圆心C_1的坐标$(-4,0)$，半径$r_1=4$，圆心c_2的坐标$(2,0)$，半径$r_2=2$.

$$\because\quad |C_1C_2|=|2-(-4)|=6=r_1+r_2$$

∴此两圆外切.

(2) 显然y轴为此两圆之内公切线.

设两外公切线的交点为P，则P为分线段C_1C_2之比为$\dfrac{C_1P}{PC_2}=-\dfrac{r_1}{r_2}=-2$的外分点，据此，得$P$的坐标为$(8,0)$，所以外公切线方程为

$$x-\sqrt{8}\,y-8=0\ 和\ x+\sqrt{8}\,y-8=0$$

$$x-2\sqrt{2}\,y-8=0\ 和\ x+2\sqrt{2}\,y-8=0$$

(3) 以c_1,c_2两点为直径端点的圆心坐标为$(-1,0)$半径$=\dfrac{1}{2}\left|r_1+r_2\right|=3$. 此圆的圆心到两外公切线的距离

$$d=\frac{|-1-8|}{\sqrt{8+1}}=3.$$

因此，这个圆也和C_1，C_2的外公切线相切.

22. A: $x^2+y^2=1$

B: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$P(x_1,y_1)$为圆B的切线PT(T为切点)上一点，圆B的中心为$M(a,b)$，由此$PT\perp MT$.

$$PT^2=PM^2-MT^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2$$

同样，由 P 到圆 A 的切线长的平方为：

$$x_1^2+y_1^2-1$$

根据题设两切线长相等：

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2=x_1^2+y_1^2-1$$

$$\therefore\quad 2ax_1+2by_1=a^2+b^2-r^2+1 \qquad ①$$

故向圆 A 和圆 B 所引切线的长相等的点 (x,y) 的集合满足方程①，又已知此直线方程是

$$3x+4y=5$$

故 $\dfrac{2a}{3}=\dfrac{2b}{4}=\dfrac{a^2+b^2-r^2+1}{5}=2k.$

$a=3k$，$b=4k$. $a^2+b^2-1=r^2+10k$

$\therefore\quad r^2=9k^2+16k^2-10k+1=(5k-1)^2$

所以圆 B 的中心的轨迹方程为$\begin{cases}x=3k\\y=4k\end{cases}$，消去 k，得

$$4x=3y$$

23. 将已知圆的方程化为 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 圆心 O' 为 $(1,2)$，P_1，P_2 为割线与圆的交点.

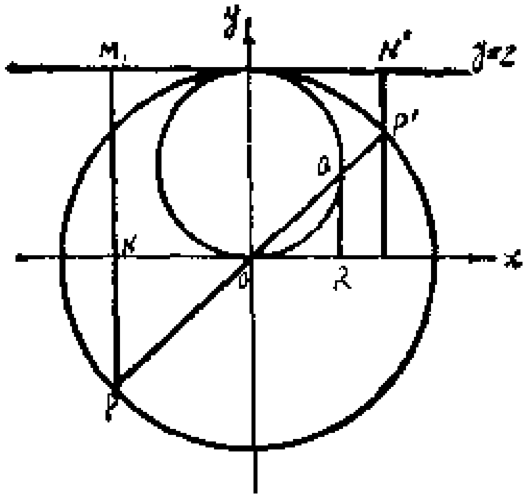
设 P_1P_2 的中点为 $P(x,y)$，则 $O'P\perp OP$，因此

$$k_{O'P}=\frac{y-2}{x-1}，\quad k_{OP}=\frac{y}{x}.$$

得 $\dfrac{y-2}{x-1}\cdot\dfrac{y}{x}=-1$

化简，得 $x^2+y^2-x-2y=0$，即 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{5}{4}$.

$\therefore P$ 点的轨迹是以 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 为圆心，以 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 为半径的圆在已知圆内的一段弧.



习题 1·3—24

24. 如图，已知圆的方程为

$$x^2+(y-1)^2=1$$

设点 P、Q 的坐标分别为 (x,y)，(x_1,y_1)

$\because$ $|PM|=|PQ|$

$\therefore$ $|2-y|$

$$=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \quad ①$$

又 Q 点在圆上，

故 $x_1^2+(y_1-1)^2=1$，即 $x_1^2+y_1^2=2y_1$ ②

将①两边平方、整理，并将②代入，得

$$x^2-2xx_1-2yy_1+2y_1+2y-4=0 \quad ③$$

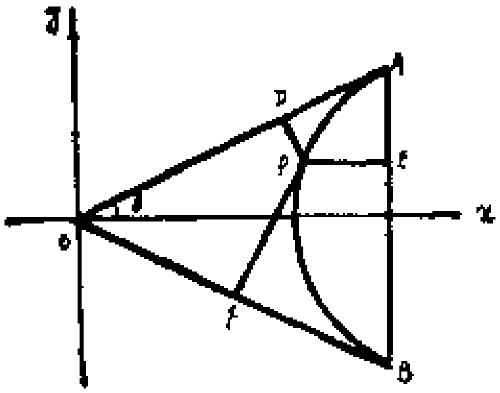
又因 $Rt\triangle OQR \backsim Rt\triangle OPN$

故 $OR:OQ=ON:PN$

即 $x_1:y_1=x:y$

由此可得 $x_1=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，$y_1=\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}$

代入③，得 $x^2(x^2+y^2-4)=0$ 但 $x^2\neq0$，否则为 y 轴，故 P 点的轨迹方程为 $x^2+y^2=4$.



习题 1·3—25

25. (1) 取坐标系如图，设点 P 的坐标为 (x, y) 由题设 $x>0$.

直线 OA 的方程为 $y=x\operatorname{tg}\theta$.

直线 OB 的方程为

$$y=-x\operatorname{tg}\theta$$

直线 AB 的方程为 $x=h$

又因为 P 点在 $\angle AOB$ 内，于是 $|PD|=\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,\theta-y}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}$

$$=x\sin\theta-y\cos\theta$$

$$|PE|=h-x$$

$$|PF|=\frac{x\,\mathrm{tg}\,\theta+y}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}=x\sin\theta+y\cos\theta$$

由条件 $|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$

得 $x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=(h-x)^2$ ①

即 $x^2\cos^2\theta-2hx+y^2\cos^2\theta+h^2=0$

除以 $\cos\theta(\neq 0)$ 得，

$$x^2-\frac{2h}{\cos^2\theta}x+y^2+\frac{h^2}{\cos^2\theta}=0$$

即 $\left(x-\dfrac{h}{\cos^2\theta}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{h\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^2$

这是以 $\left(\dfrac{h}{\cos^2\theta},0\right)$ 为圆心，以 $\dfrac{h\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 为半径的圆，所求轨迹是这个圆在所给等腰三角形内的那部分.

(2) 由条件 $|PD|+|PE|=|PF|$ 得

$$x+2y\cos\theta=h \quad ②$$

此直线通过 $(h,0)$，即 C 点及 $\left(0,\dfrac{h}{2\cos\theta}\right)$ 点.

由①②得

$$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=4y^2\cos^2\theta$$

$\therefore$ $5y^2\cos^2\theta=x^2\sin^2\theta$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{tg}\,\theta\cdot x$$

由 $|PD|+|PE|=|PF|$ 可知 $y>0$，所以右端取正号，代

入②得 $x\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta\right)=h$. ∴ $x=\frac{\sqrt{5}h}{\sqrt{5}+2\sin\theta}$，从而，

$y=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}h}{\sqrt{5}+2\sin\theta}$、$\operatorname{tg}\theta=\frac{h\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{5}+2\sin\theta}$.

故 P 点坐标 $\left(\frac{\sqrt{5}h}{\sqrt{5}+2\sin\theta},\ \frac{h\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{5}+2\sin\theta}\right)$.

26. ∵ 点 (x,y) 在单位圆上运动，可设 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$. 此时

$$X=x(x+y)=\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta \quad ①$$

$$Y=y(x+y)=\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta \quad ②$$

①+② $X+Y=1+2\sin\theta\cos\theta$

①×② $X\cdot Y=\sin\theta\cos\theta(2\sin\theta\cos\theta+1)$

∴ $X\cdot Y=\sin\theta\cos\theta(X+Y)$

消去 $\sin\theta\cos\theta$，得 $XY=\frac{X+Y-1}{2}(X+Y)$

即 $X^2+Y^2-X-Y=0$

或 $\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

所以点 $(x(x+y),\ y(x+y))$ 在以 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆上运动.

设 (X,Y) 为动点，

$$X=x+y=\sin\theta+\cos\theta$$

$$Y=x\cdot y=\sin\theta\cdot\cos\theta$$

∵ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

∴ $X^2=1+2Y$，或 $Y=\frac{X^2-1}{2}$

又 ∵ $X=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\quad -\sqrt{2}\leqslant X\leqslant\sqrt{2}$

27. 设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$

$$y_1=2\sin t,\qquad y_2=6\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=6\cos t$$

$$X_1=2\cos t,\qquad x_2=6\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=6\sin t$$

设 PQ 的中点 $M(x,y)$，则

$$x=\frac{1}{2}(2\cos t+6\sin t),\qquad y=\frac{1}{2}(2\sin t+6\cos t)$$

即 $x=3\sin t+\cos t$,

$y=\sin t+3\cos t$

于是，$\sin t=\dfrac{3x-y}{8}$,

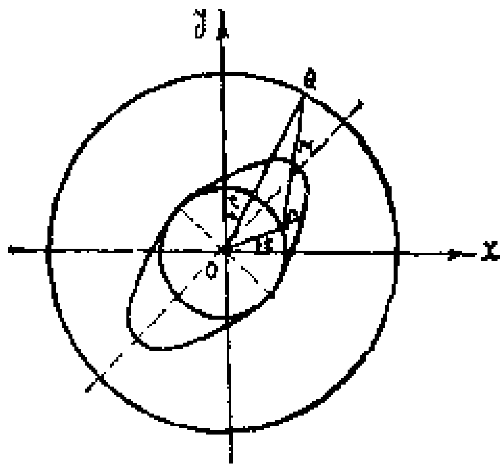
$$\cos t=\frac{3y-x}{8}$$

两式平方相加，得

$$\frac{(3x-y)^2}{64}+\frac{(3y-x)^2}{64}=1$$

即 $5x^2+5y^2-6xy=32$

是 M 点的轨迹方程.



习题 1·3—27

28. (1) 由①、②消去 y，得

$$(m^2+1)x^2-2(2m+3)x+16=0 \qquad ④$$

为使直线与圆相交，应有

$$(2m+3)^2-10(m^2+1)>0,\ 即\ 6m^2-12m+1<0$$

解之，$1-\dfrac{\sqrt{30}}{6}<m<1+\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

(2) 设方程④的实根为 x_1，x_2 则弦的中点的横坐标为

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2m+3}{m^2+1},\ 从而$$

$$x_0+m^2x_0=2m+3,\quad 于是\ x_0^2+(mx_0)^2=2(mx_0)+3x_0$$

即 $\quad x_0^2+y_0^2=3x_0+2y_0 \qquad ⑥$

故弦的中点轨迹为圆⑤含在圆①中的一段弧，

(3) 直线②上的点到原点的距离是

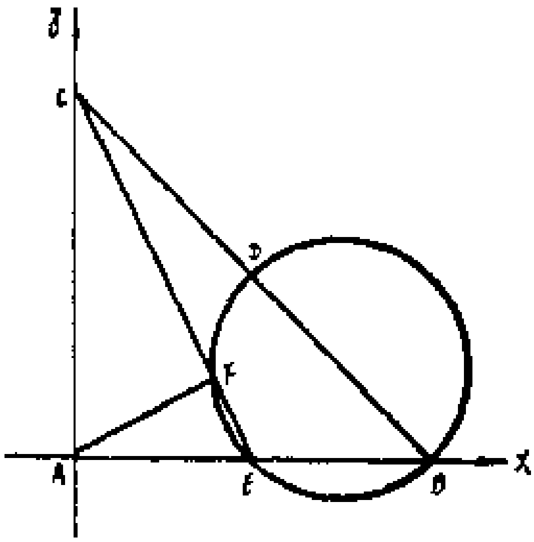
$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+m^2}\,|x|$$

$$\therefore\quad OP=\sqrt{1+m^2}\left|\frac{2m+3}{m^2+1}\right|=\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

再由 $\begin{cases}y=mx\\3x+2y+10=0\end{cases}$ 得 $\quad x=-\dfrac{10}{2m+3}$

$$\therefore\quad OQ=\sqrt{1+m^2}\cdot\left|-\frac{10}{2m+3}\right|=\frac{10\sqrt{1+m^2}}{|2m+3|}$$

从而 $\quad OP\cdot OQ=\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}\cdot\dfrac{10\sqrt{1+m^2}}{|2m+3|}=10.$



习题 1·3—29

29. 建立坐标系如图设 A、B、C 各点坐标分别为 $A(0,0)$、$B(4m,0)$，$C(0,4m)$ 于是 D 的坐标为 $(2m,\ 2m)$，以 BD 为直径的圆的方程为.

$$(x-3m)^2+(y-m)^2=2m^2 \qquad ①$$

因 E 为此圆与 x 轴的交点，故，E 的坐标为 $(2m,0)$

故 $\quad CE$ 的方程为

$$\frac{x}{2m}+\frac{y}{4m}=1 \qquad ②$$

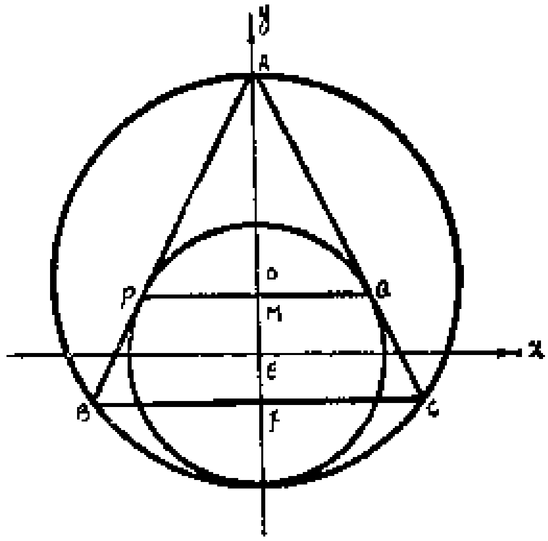
由①，②得 F 的坐标为 $(1.6m,\ 0.8m)$

$$k_{AF}=\frac{0.8m}{1.6m}=\frac{1}{2}\qquad k_{CE}=-\frac{4m}{2m}=-2.$$

$\therefore\ k_{AF}\cdot k_{CE}=-1$

即　　$AF\perp CE$

30. 设圆 E 内切于 $\triangle ABC$ 的外接圆，且与 AB、AC 相切于 P,Q，PQ 的中点为 M，显然 A,O,M,E 共线取坐标系如图，设圆 E 的方程为 $x^2+y^2=1$，O 的坐标为 (a,o)，则圆 O 的半径为 $a+1$，于是圆 O 的方程为



习题 1·3—30

$$x^2+(y-a)^2=(a+1)^2 \qquad ①$$

A 点的坐标为 $(0,2a+1)$，再设 Q 点的坐标为 (x_1,y_1) 则有

$$\begin{cases}x_1\cdot 0+y_1(2a+1)=1\\ x_1^2+y_1^2=1\end{cases}$$

解之，得 Q 点的坐标

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}\\[2ex] y_1=\dfrac{1}{2a+1}\end{cases}$$

于是 M 的坐标为：$x=0$，$y=\dfrac{1}{2a+1}$

AC 的方程为

$$\frac{2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}x+\frac{1}{2a+1}y-1=0 \qquad ②$$

此式为法线式方程，因此，M 到 AC 的距离

$$d=\left|\frac{2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}\cdot 0+\frac{1}{2a+1}\cdot\frac{1}{2a+1}-1\right|=\frac{4a^2+4a}{(2a+1)^2}$$

又 解方程(1)，(2)之方程组得

$$\begin{cases}x=0\\ y=2a+1\end{cases}\quad \text{为 } A \text{ 点的坐标}$$

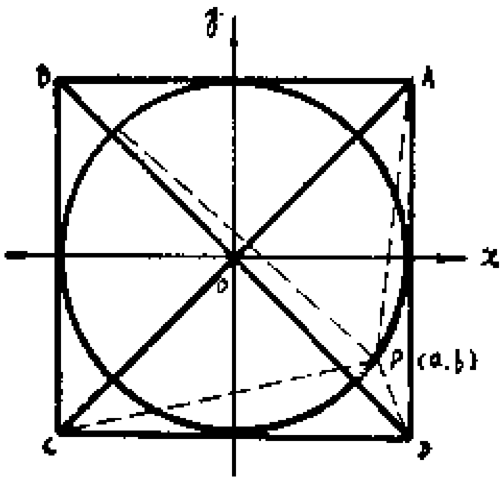
设 OE 交 BC 于 F，则 M 到 BC 的距离

$$|MF|=\frac{1}{2a+1}-\frac{-4a^2-2a+1}{(2a+1)^2}=\frac{4a^2+4a}{(2a+1)^2}$$

故 $|MF|=d$ 即 M 为 $\triangle ABC$ 的内心.

31. 建立坐标系如图，并设正方形边长等于 2，其内切圆上任一点 P 的坐标为 $(a,\ b)$ 则

$$a^2+b^2=1$$



习题 1·3—31

令 $\angle APC=\alpha$,

$\angle BPD=\beta$

$\because$ 直线 PA,PB,PC,PD 的斜率分别为

$$k_1=\frac{b-1}{a-1},\quad k_2=\frac{b-1}{a+1}$$

$$k_3=\frac{b+1}{a+1},\quad k_4=\frac{b+1}{a-1}$$

$$\therefore\quad \text{tg}^2\alpha=\left(\frac{k_1-k_3}{1+k_1\cdot k_3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\dfrac{b-1}{a-1}-\dfrac{b+1}{a+1}}{1+\dfrac{b-1}{a+1}\cdot\dfrac{b+1}{a-1}}\right)^2$$

$$=4(a-b)^2$$

同理 $\text{tg}\beta=4(a+b)^2$

$$\therefore\quad \text{tg}^2\alpha+\text{tg}^2\beta=4(a-b)^2+4(a+b)^2=8(a^2+b^2)=8$$

32. (1) 将圆的方程化为标准方程：

$$(x-a)^2+(y-2a)^2=\frac{a^2}{2}$$

圆心坐标$(a,\ 2a)$满足方程 $y=2x$，所以圆心在此直线上.

(2) 设直线 $y=kx+b$ 是这些圆的公切线，必须且只须对一切非零实数 a 恒有

$$\frac{(ka-2a+b)}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

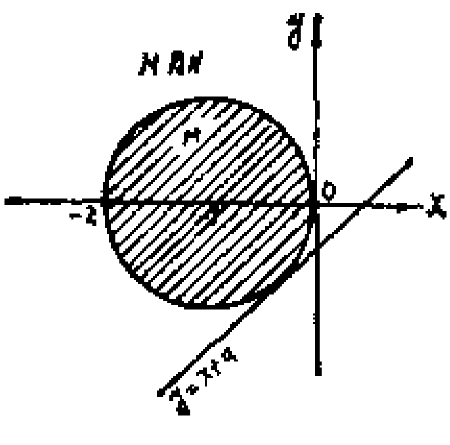
由上式求得 $k=7$，$b=0$ 和 $k=1$，$b=0$

∴ 这些圆有两条公切线 $y=7x$ 和 $y=x$.

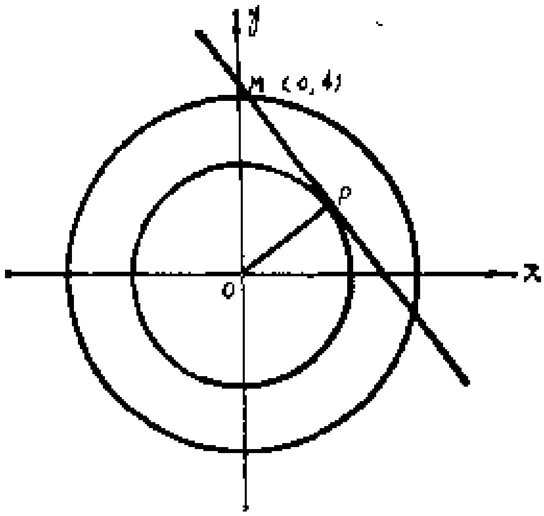
33. 当且仅当 $M\subset N$ 时，$M\cap N=N$. 使圆：

$(x+1)^2+y^2=1$ 与直线 $y=x+a$ 相切的 a 的值为 $1\pm\sqrt{2}$. 因此从图上看出使 $M\subset N$，即使 $M\cap N=N$的 a 值的范围是

$$a\leqslant 1-\sqrt{2}$$



习题 1·3—33



习题 1·3—34

34. 令 $R^2=x^2+y^2$，则此方程表示一圆系，确定圆系中满足条件的半径最大值和最小值，也就找到了函数 x^2+y^2 的最大值与最小值.

直线 $4x+3y=12$ 的纵截距为 4，设直线与圆的交点为 M，则 M 的坐标为 $(0,4)$.

$\therefore \quad R_{\max}=|OM|=4$

又设点 o 到已知直线的距离为 $|OP|$ 则

$$R_{\min}=|OP|=\frac{12}{5}$$

由方程组

$$\begin{cases}4x+3y=12\\ x^2+y^2=\dfrac{144}{25}.\end{cases}$$

解得 P 点坐标为 $\left(\frac{48}{25},\ \frac{36}{25}\right)$

因此：$x=0$，$y=4$ 时 $\quad R^2{}_{\max}=16$

$$x=\frac{48}{25},\ y=\frac{36}{25}\text{时}\ R^2{}_{\min}=\frac{144}{25}$$

即 x^2+y^2 的最大值为 16，最小值为 $\frac{144}{25}$.

35. $\because$

$$\begin{aligned} f(x)+f(y)&=x^2+y^2-6x-6y+10\\ &=(x-3)^2+(y-3)^2-8\\ f(x)-f(y)&=x^2-y^2-6x+6y\\ &=(x-y)(x+y-6)\end{aligned}$$

满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$ 的点 (x,y) 在圆 $(x-3)^2+(y-3)^2=8$ 的内部及圆周上.

而 $\quad f(x)-f(y)\geqslant 0$ 等价于

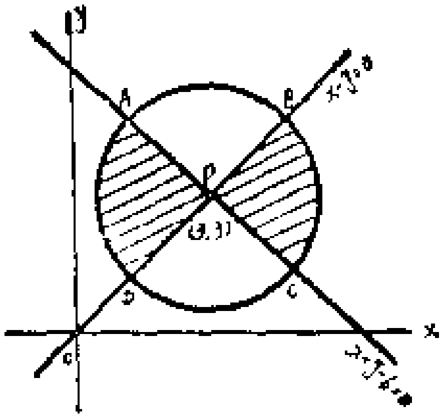
$$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y-6\geqslant 0\end{cases}\quad \text{或} \quad \begin{cases}x-y\leqslant 0\\ x+y-6\leqslant 0\end{cases}$$

满足 $x-y\geqslant 0$ 的点在直线 $x-y=0$ 上及其右下方.

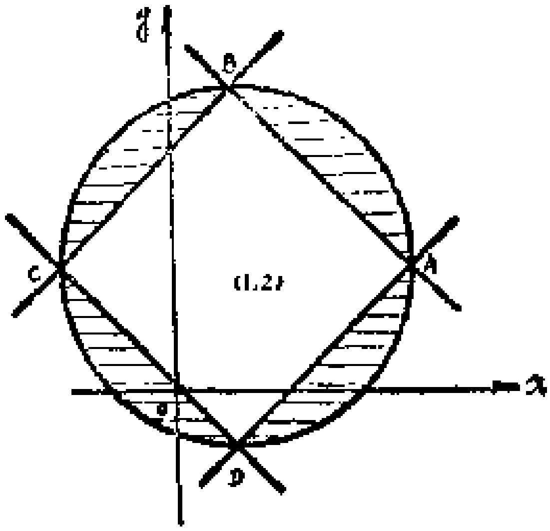
满足 $x+y-6\geqslant 0$ 的点在直线 $x+y-6=0$ 上及其右上方.

$\begin{cases}\text{满足 } x-y\leqslant 0 \text{ 的点在直线 } x-y=0 \text{ 上及其左上方}\\ \text{满足 } x+y-6\leqslant 0 \text{ 的点在直线 } x+y-6=0 \text{ 上及其左下方}\end{cases}$

所以满足$\begin{cases} f(x)+f(y)\leqslant 0 \\ f(x)-f(y)\geqslant 0 \end{cases}$



习题 1·3—35



习题 1·3—36

的点在扇形 PAB 与 扇 形 PCD 及其边界上(图中阴影部分)

36. 如图,不等式①表示的区域为圆心为(1,2)半径为 3 的圆的内部,不等式②表示区域为四条直线围成的上述圆的内接正方形的外部,因此,方程①②所组成的区域的面积是四个弓形(图中阴影部分),其面积为 $\pi\cdot 3^2-6.3=9(\pi-2)$ (平方单位)

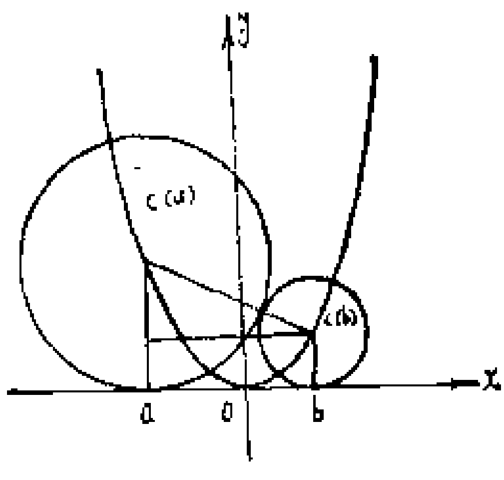
37. (1) $c(a)$的半径为 a^2,所以两圆$c(a)$与$c(b)$外切的条件是

$$\sqrt{(a-b)^2+(a^2-b^2)^2}=a^2+b^2$$

即 $(a-b)^2=4a^2b^2$ ①

(2) 由①关于 b 整理得

$$(4a^2-1)b^2+2ab-a^2=0$$



习题 1·3—37

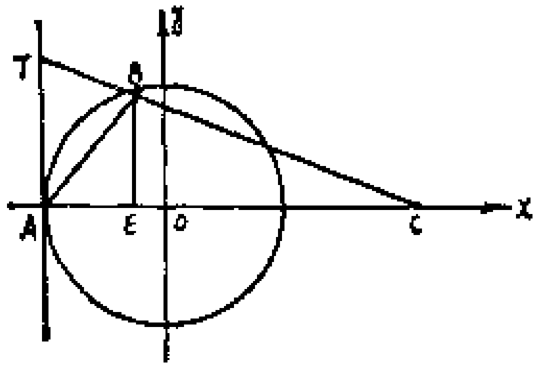
当 $4a^2-1\neq 0$ 时,②是关于 b 的二次方程. 因其判别式 $\Delta=4a^2+4a^2(4a^2-1)=16a^4>0$,总

有两个实数解，故所求的 a 值须满足 $4a^2-1=0$，从而 $a=\pm\frac{1}{2}$.

(3) 对于 $4a^2-1\neq0$，由②解得

$$b=\frac{-a\pm\sqrt{4a^4}}{4a^2-1}=\frac{a\mp2a^2}{1-4a^2}=\frac{a(1\mp2a)}{(1\pm2a)(1-2a)}$$

$$=\frac{a}{1\pm2a} \qquad ③$$



题习 1·3—38

38. 设 B 点坐标为 $B(x_0, y_0)$，T 点坐标为 $T(-a, y_1)$，作 $BE\perp x$ 轴，垂足为 E.

由 $|AE|=|x_0+a|$，可得

$$y_1=|AT|=|AB|$$

$$=\sqrt{2a^2+2ax_0}$$

∴ T 点坐标为

$$[-a,\ \sqrt{2a(a+x_0)}].$$

由两点式可得直线 TB 的方程为

$$y-\sqrt{2a(a+x_0)}=\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{2a(a+x_0)}}{a+x_0}(x+a)$$

在上式中令 $y=0$，求得C 点的横坐标 $x=a+\sqrt{2a(a-x_0)}$. 当 B 点沿圆周趋近于 A 时，$x_0\to-a$,

$$\therefore\ \lim_{x_0\to-a}x=\lim_{x_0\to-a}2[a+\sqrt{2a(a-x_0)}]=3a.$$

故动点 B 沿圆周趋近于 A 点时，C 点的横坐标趋近于 $3a$.

第 二 章

习 题 一

1. (1) $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $x=-\frac{5}{2}$;

(2) $F(0, -1)$, $y=1$;

(3) $F\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$, $x=\frac{5}{8}$;

(4) $F\left(0, \frac{7}{48}\right)$, $y=-\frac{7}{48}$.

2. (1) $y^2=-8x$;

(2) $3x^2=-8y$;

(3) $y^2=8x$;

(4) $x^2=8y$, $x^2=-8y$.

3. 设抛物线的方程为

$$y^2=2px \quad (p>0).$$

则已知直线的方程为

$$y=-x+\frac{p}{2}.$$

联立上述两个方程，消去 y，求得直线与抛物线的两交点的横坐标.

$$x_1=\frac{3}{2}P+\sqrt{2}P, \quad x_2=\frac{3}{2}P-\sqrt{2}P.$$

由抛物线的性质和已知条件，得

$$\left[\left(\frac{3}{2}P+\sqrt{2}P\right)+\frac{P}{2}\right]+\left[\left(\frac{3}{2}P-\sqrt{2}P\right)+\frac{P}{2}\right]=8.$$

$\therefore \quad P=2.$

因此，抛物线方程为

$$y^2=4x.$$

同理，当 $P<0$ 时，求得抛物线方程为

$$y^2=-4x.$$

4．$(6,\ 6\sqrt{2})$，$(6,\ -6\sqrt{2})$.

5．(1) $x+y+1=0$;

(2) 设过 B 点的切线与抛物线切于 $(x_1,\ y_1)$，则切线方程为

$$y_1y=2(x+x_1).$$

因切线经过点 $B(-1,\ 1)$，且 $(x_1,\ y_1)$ 在抛物线上，故

$$\begin{cases} y_1=2(-1+x_1), \\ y_1^2=4x_1, \end{cases}$$

$\therefore \quad x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore \quad y_1=1+\sqrt{5}$ 或 $y_1=1-\sqrt{5}$.

因此，所求的切线方程为

$2x-(1+\sqrt{5})y+3+\sqrt{5}=0$ 和

$2x-(1-\sqrt{5})y+3-\sqrt{5}=0$.

6．设 $P(x_1,\ y_1)$ 为抛物线上的点，则过 P 点的切线方程为 $y_1y=3(x+x_1)$，过 P 点的法线方程为

$$y-y_1=-\frac{y_1}{3}(x-x_1).$$

因法线过点 $\left(\frac{11}{3},\ 0\right)$，故

$$-y_1=-\frac{y_1}{3}\left(\frac{11}{3}-x_1\right).$$

由此求得 $x_1=\frac{2}{3}$.

进而求得 $y_1=2$ 或 $y_1=-2$.

因此，所求的法线方程为

$$6x+9y-22=0 \quad 和\ 6x-9y-22=0.$$

8. 距顶点 35mm.

9. 以 AB 为 x 轴，AB 的中点为原点建立坐标系，则上、下拱的抛物线方程为

$$y=-\frac{3}{144}x^2+3\ 和\ y=-\frac{1}{144}x^2+1.$$

A_1，B_1 的横坐标为 2.4 米，故其纵坐标分别为 2.88 米和 0.96 米，因此

$$A_1B_1=2.88-0.96=1.92\ 米.$$

10. 设抛物线方程为

$$y^2=2px,$$

直线和抛物线切于点 $(x_1,\ y_1)$，则切线方程为

$$y_1y=p(x+x_1)$$

即

$$px-y_1y+px_1=0.$$

此直线与已知切线重合，故

$$\frac{p}{1}=\frac{-y_1}{-4}=\frac{px_1}{2}.$$

$\therefore\quad x_1=2,\ y_1=4p.$

又切点 $(x_1,\ y_1)$ 在直线 $x-4y+2=0$ 上，故

$$2-16p+2=0.$$

$\therefore\quad p=\frac{1}{4}.$

因此，所求的抛物线方程为.

$$y^2=\frac{1}{2}x.$$

11. (1) 利用抛物线的性质：抛物线上任意一点到焦点与准线的距离相等. 得抛物线方程

$$25[(x-3)^2+(y+1)^2]=(3x-4y+12)^2.$$

(2) 抛物线的对称轴，是经过顶点 $A(1,\ 1)$ 并且和准线 $y=-2$ 垂直的直线，其方程为

$$x=1,$$

准线与对称轴的交点为 $B(1,\ -2)$.

因焦点 F 在对称轴上，且顶点 $A(1,\ 1)$ 是线段 FB 的中点，因此焦点坐标为 $F(1,\ 4)$.

设 $M(x,\ y)$ 为抛物线上的一点，它到准线的距离为 $y+2$，它到焦点的距离为 $\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$，

由

$$y+2=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2},$$

得抛物线方程

$$x^2-2x-12y+13=0.$$

(3) 过顶点和焦点的直线 (即抛物线的轴) 是 $y=x$. 准线是一条经过点 $(-1,\ -1)$ 并且与 $y=x$ 垂直的直线，其方程是

$$x+y+2=0.$$

因此，抛物线方程是

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}.$$

即
$$x^2-2xy+y^2-8x-8y=0.$$

12. 设焦点坐标为 $(x_0,\ y_0)$，则

$$\begin{cases}\sqrt{(1-x_0)^2+(1-y_0)^2}=\left|\dfrac{1+1-1}{\sqrt{2}}\right|\\ \sqrt{(1-x_0)^2+(2-y_0)^2}=\left|\dfrac{1+2-1}{\sqrt{2}}\right|\end{cases}$$

由此求得

$$x_0=1+\frac{\sqrt{7}}{4},\quad y_0=\frac{3}{4}.$$

13. **解法一** 设以点(4, 3)为中点的弦的直线方程为

$$y-3=k(x-4).$$

将它与抛物线 $y^2=6x$ 联立，消去 y，得

$$k^2x^2-2(4k^2-3k+3)x+(3-4k)^2=0.$$

此方程的两根 x_1 和 x_2 就是弦的两端点的横坐标，

$$\therefore\quad \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2-3k-3}{k^2}=4.$$

$$\therefore\quad k=1.$$

因此，所求的弦的方程是

$$x-y-1=0.$$

解法二 设所求弦的两端点为(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，则

$$y_1^2=6x_1,\quad y_2^2=6x_2.$$

$$\therefore\quad y_1^2-y_2^2=6(x_1-x_2).$$

由此得

$$\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{x_1-x_2}=6.$$

$$\because\quad \frac{y_1+y_2}{2}=3,$$

$$\therefore\quad \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1.$$

于是所求弦的斜率为 1，因此弦的方程为

$$x-y-1=0.$$

14. (1) 如图，设 AB 的方程为

$$y=k\left(x-\frac{P}{2}\right),$$

即
$$x=\frac{y}{k}+\frac{P}{2}.$$

将 x 值代入抛物线方程，得

$$y^2-\frac{2P}{k}y-P^2=0.$$

y_1 和 y_2 是此方程的两根，故

$$y_1y_2=-P^2.$$

$|y_1|$ 和 $|y_2|$ 就是 A 和 B 点到 x 轴的距离，故

$$|y_1||y_2|=p^2.$$

(2) 在上式中，令 $\operatorname{tg}\theta=k$，则

$$y^2-(2P\operatorname{ctg}\theta)y-P^2=0.$$

$\therefore\quad y_1+y_2=2P\operatorname{ctg}\theta,$

$y_1y_2=-P^2.$

又 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{y_1^2}{2P}-\frac{y_2^2}{2P}\right)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{(y_1+y_2)^2}{4P^2}+1\right][(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]},$$

将 y_1+y_2 和 y_1y_2 的值代入上式，化简后得

$$|AB|=\frac{2P}{\sin^2\theta}.$$

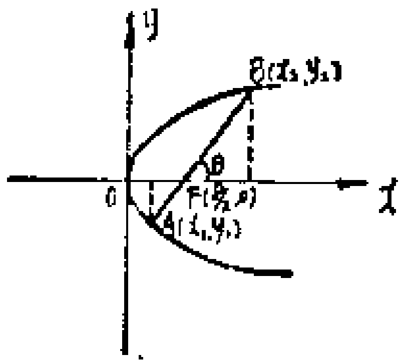
15. 如图，由 $|OA|=|OB|$，得

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2.$$

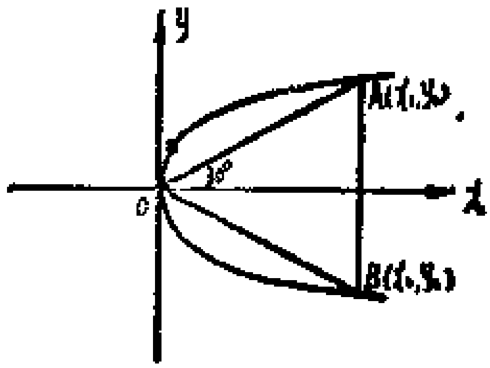
又由 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，得

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2p)=0.$$

$\therefore\quad x_1=x_2.$



习题 2·1－14



习题 2·1－15

由此可得 $y_1^2=y_2^2$，故

$$y_1=-y_2.$$

因此，A、B 的坐标为 (x_1, y_1)、$(x_1, -y_1)$，即 A，B 关于 x 轴对称.

$$\because\quad \operatorname{tg}30^\circ=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_1^2}{y_1x_1}=\frac{2px_1}{y_1x_1}=\frac{2p}{y_1},$$

$$\therefore\quad y_1=2\sqrt{3}p,\ x_1=6p.$$

所以，三角形 OAB 的面积

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}|OA|^2=12\sqrt{3}p^2.$$

16．抛物线的焦点 $F(8,0)$．设 A，B 的坐标为 (x_1,y_1) 和 (x_2, y_2)，则

$$\frac{2+x_1+x_2}{3}=8,\quad \frac{8+y_1+y_2}{3}=0.$$

即

$$x_1+x_2=22,$$

$$y_1+y_2=-8.$$

又　$y_1^2=32x_1$，$y_2^2=32x_2$，得方程组.

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = 704, \\ y_1 + y_2 = -8. \end{cases}$$

解之得　$y_1 = -4 + 4\sqrt{21}$，$y_2 = -4 - 4\sqrt{21}$.

进而求得　$x_1 = 11 - \sqrt{21}$，$x_2 = 11 + \sqrt{21}$.

因此，过 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 两点的直线方程为

$$4x + y - 40 = 0.$$

解法二　设过 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 的直线方程为

$$y = kx + b.$$

将方程代入抛物线方程 $y^2 = 32x$，得

$$k^2x^2 + (2bk - 32)x + b^2 = 0.$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = -\frac{2bk - 32}{k^2}.$$

$$y_1 + y_2 = (kx_1 + b) + (kx_2 + b) = k(x_1 + x_2) + 2b$$

$$= \frac{-2bk + 32}{k} + 2b$$

$$= \frac{32}{k}.$$

$$\because \quad \frac{y_1 + y_2 + 8}{3} = 0,$$

$$\therefore \quad k = -4.$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = \frac{b + 4}{2}.$$

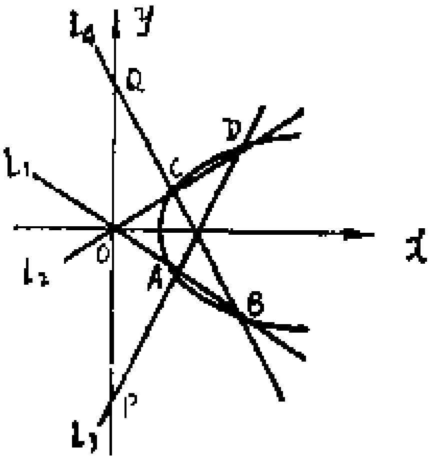
又　$$\frac{x_1 + x_2 + 2}{3} = 8,$$

$$\therefore \quad b = 40.$$

因此，所求的直线方程为 $y = -4x + 40$.

17．$y = \pm 2\sqrt{2}(x - 1)$.

18. 如图，设两直线为 L_1: $y=k_1x$，L_2: $y=k_2x$，各点的坐标为



习题 2·1—18

$A(x_1,\ k_1x_1)$，$B(x_2,\ k_1x_2)$，

$C(x_3,\ k_2x_3)$，$D(x_4,\ k_2x_4)$.

将 $y_1=k_1x$，$y=k_2x$ 分别代入抛物线方程，得

$k_1^2x^2-2px+2ap=0$，

$k_2^2x^2-2px+2ap=0$.

由此可得 $(x_1+x_2)x_3x_4=(x_3+x_4)x_1x_2$.

$$\therefore\quad \frac{x_2x_3}{x_2-x_3}=\frac{x_1x_4}{x_1-x_4}. \qquad ①$$

又直线 AD 和 BC 的方程为

$$L_3:\ y-k_1x_1=\frac{k_2x_4-k_1x_1}{x_4-x_1}(x-x_1),$$

$$L_4:\ y-k_2x_3=\frac{k_1x_2-k_2x_3}{x_2-x_3}(x-x_3).$$

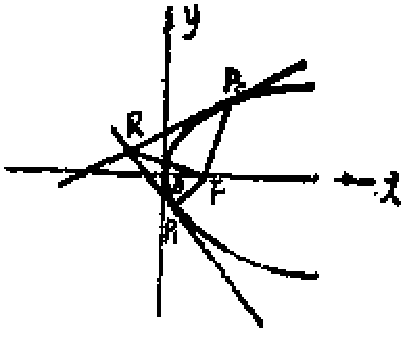
L_3 和 L_4 在 y 轴上的截距分别为

$$OP=\frac{(k_1-k_2)x_1x_4}{x_4-x_1},\quad OQ=\frac{(k_2-k_1)x_2x_3}{x_2-x_3}.$$

利用①式，即得 $|OP|=|OQ|$.

19. 用反证法，证明两组对边不可能同时平行.

20. 如图，设抛物线方程为 $y^2=4px$，各点坐标为 $p_1(x_1,\ y_1)$，$p_2(x_2,\ y_2)$，$R(a,\ b)$. 则 (x_1,y_1)，$(x_2,\ y_2)$满足方程组



习题 2·1—20

$$\begin{cases} by = 2p(x+a), \\ y^2 = 4px. \end{cases}$$

消去 y，得

$$px^2 + (2pa - b^2)x + pa^2 = 0.$$

x_1 和 x_2 是此方程的两根.

又 $|Fp_1| = |p + x_1|$，$|Fp_2| = |p + x_2|$，$RF^2 = (a-p)^2 + b^2$，故

$$|Fp_1|\ |pF_2| = |(p+x_1)(p+x_2)| = |p^2 + (x_1+x_2)p + x_1x_2|.$$

$\because$ $x_1 + x_2 = -\dfrac{2pa - b^2}{p}$，$x_1x_2 = a^2$.

所以

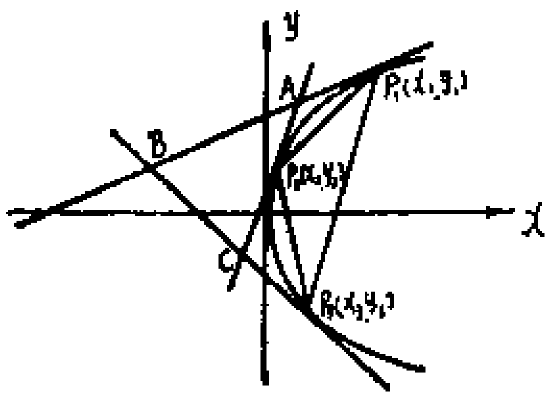
$$|Fp_1|\ |pF_2| = RF^2.$$

21. 如图，过 p_1，p_2，p_3 各点的切线分别为：

$$y_1y = 2p(x + x_1), \quad ①$$

$$y_2y = 2p(x + x_2), \quad ②$$

$$y_3y = 2p(x + x_3). \quad ③$$



习题 2.1—21

联立①和②两个方程，并将 $x_1 = \dfrac{y_1^2}{4p}$，$x_2 = \dfrac{y_2^2}{4p}$ 代入，得 A 点的坐标：

$$x = \frac{y_1y_2}{4p},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

(2) 同理，求得 B，C 的坐标为

$$B\left(\frac{y_1y_3}{4p},\ \frac{y_1+y_3}{2}\right),\quad C\left(\frac{y_2y_3}{4p},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

因此，ΔABC 的面积 S_1 为

$$S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{y_1y_2}{4p} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1\\ \frac{y_1y_3}{4p} & \frac{y_1+y_3}{2} & 1\\ \frac{y_2y_3}{4p} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1\end{vmatrix}\text{（绝对值）}$$

$$=\frac{1}{16p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$$

又 $\Delta p_1p_2p_3$ 的面积 S_2 为

$$S_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\text{（绝对值）}$$

$$=\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3)|.$$

将 $x_1=\frac{y_1^2}{4p}$，$x_2=\frac{y_2^2}{4p}$，代入上式，化简后得

$$S_2=\frac{1}{8p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|.$$

$\therefore\quad S_2=2S_1.$

22．求出与抛物线相切且和已知直线平行的直线方程为

$$2x-y-1=0.$$

此直线与直线

$$y=2x-4$$

的距离即为最短距离．因此，所求的最短距离为

$$d=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

23．设抛物线 $y^2=2px$ 的弦 AB 与 $y^2=2p(x-a)$ 相切于点 $C(x_0,\ y_0)$，且直线 AB 的方程为

$$y=kx+m \qquad ①$$

A，B 的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2).

将(1)式代入抛物线 $y^2=2px$，得

$$k^2x^2+(2km-2p)x+m^2=0.$$

$$\therefore \quad x_1+x_2=\frac{-(2km-2p)}{k^2},$$

$$y_1+y_2=(kx_1+m)+(kx_2+m)=k(x_1+x_2)+2m$$

$$=\frac{-(2km-2p)}{k^2}+2m=\frac{2p}{k}.$$

又将①式代入 $y^2=2p(x-a)$，得

$$k^2x^2+(2km-2p)x+m^2+2ap=0.$$

因①是切线，且 $C(x_0, y_0)$ 为切点，故

$$x_0=\frac{-(2km-2p)}{2k^2}=\frac{x_1+x_2}{2},$$

$$y_0=kx_0+m=k\cdot\left(\frac{-(2km-2p)}{2k^2}\right)$$

$$+m=\frac{p}{k}=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

因此，C 点是 AB 的中点.

24. 设公切线的斜率为 k. 因其与抛物线相切，故切线方程为

$$y=kx+\frac{5}{4k}. \qquad ①$$

又公切线与圆相切，故其方程为

$$y=kx\pm\frac{4}{3}\sqrt{k^2+1}. \qquad ②$$

①和②表示同一条切线，故

$$\frac{5}{4k}=\pm\frac{4}{3}\sqrt{k^2+1}.$$

由此求得 $\quad k=\pm\frac{3}{4}$.

因此，公切线方程为

$$9x \pm 12y \pm 20 = 0.$$

25. 因 x_1 和 x_2 满足方程 $bx+c=ax^2$，故

$$x_1+x_2=\frac{b}{a},\quad x_1x_2=-\frac{c}{a},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}.$$

又 $(x_3,\ 0)$ 是直线 $y=bx+c$ 上的点.

$$\therefore\quad bx_3+c=0.$$

$$\therefore\quad x_3=-\frac{c}{b}.$$

所以

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}.$$

26. 求出 A，B 两点的坐标为

$$A(-6,\ 3),\ B(12,\ 12).$$

设 p 点坐标为 $\left(x,\ \frac{x^2}{12}\right)$，则 ΔPAB 的面积

$$S_\triangle=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{x^2}{12}, & x. & 1\\ 12 & 12 & 1\\ -6 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x+54.$$

当 $x=3$ 时，面积最大， 最大面积为 $\frac{243}{4}$，且 p 点坐标为 $\left(3,\ \frac{3}{4}\right)$.

27. 设两弦为 OA 和 OB，A，B 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$. 由 $OA\perp OB$，得

$$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1.$$

$\therefore\quad y_1y_2=-x_1x_2.$

又 $\quad x_1=\frac{y_1^2}{2p},\ x_2=\frac{y_2^2}{2p}$，故

$$y_1y_2=-4p^2.$$

设弦 AB 的中点坐标为 $(x,\ y)$，则

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{4p}(y_1^2+y_2^2)$$

$$=\frac{1}{p}\left[\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}y_1y_2\right]$$

$$=\frac{1}{p}[y^2+2p^2]$$

因此，所求的轨迹方程为

$$y^2=p(x-2p).$$

28. 设 $p(x_0,\ y_0)$ 为轨迹上的点， k 为过 p 点的切线的斜率，则 x_0 和 y_0 满足方程

$$y_0=kx_0+\frac{a}{k},$$

即

$$x_0k^2-y_0k+a=0.$$

设 k_1 和 k_2 为此方程的两根，则 k_1 和 k_2 为过 p 点两切线的斜率，由已知条件得

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|,\quad(\theta\neq 90^\circ)$$

即

$$(1+k_1k_2)^2\operatorname{tg}^2\theta=(k_1-k_2)^2.$$

又　$k_1+k_2=\frac{y_0}{x_0}$，　$k_1k_2=\frac{a}{x_0}$.

故当 $\theta\neq 90°$ 时，所求的轨迹方程为

$$\left(1+\frac{a}{x_0}\right)^2\operatorname{tg}^2\theta=\frac{y_0^2}{x_0^2}-\frac{4a}{x_0}$$

将$(x_0,\ y_0)$换成一般坐标$(x,\ y)$，整理后得

$$(x+a)^2\operatorname{tg}^2\theta=y^2-4ax.\quad(\theta\neq 90°)$$

当 $\theta=90°$ 时，$k_1k_2=-1$，得轨迹方程

$$x=-a.$$

此直线是抛物线的准线.

29．设抛物线方程为 $y^2=2px$，M 点的坐标(x_1,y_1)，则各点的坐标和各直线的方程为

$$Q\left(-\frac{p}{2},\ y_1\right),\quad F\left(\frac{p}{2},\ 0\right),\quad A(o,\ o)$$

$$AM:\ y=\frac{y_1}{x_1}x,$$

$$QF:\ y=-\frac{y_1}{p}\left(x-\frac{p}{2}\right).$$

联立①和②两个方程，求出

$$x_1=-\frac{2px}{2x-p},\quad y_1=-\frac{2py}{2x-p}.$$

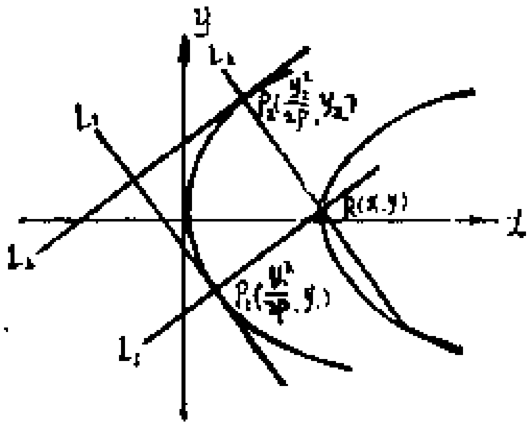
又 $y_1^2=2px_1$，因此，所求的轨迹方程为

$$y^2+2x^2-px=0.$$

30．如图，设 R 是分别过 p_1 和 p_2 两点的法线 L_1' 和 L_2' 的交点，且 $L_1'\perp L_2'$. P_1、P_2 的坐标是

$$p_1\left(\frac{y_1^2}{2p},\ y_1\right),\quad p_2\left(\frac{y_2^2}{2p},\ y_2\right).$$

又设过 p_1，p_2 两点的切线分别是 L_1 和 L_2，则 $L_1 \perp L_2$.



习题 2·1—30

因此，各直线的方程分别是

$$L_1:\ y_1y = p\left(x + \frac{y_1^2}{2p}\right),$$

$$L_2:\ y_2y = p\left(x + \frac{y_2^2}{2p}\right);$$

$$L_1':\ y - y_1 = \frac{p}{y_2}\left(x - \frac{y_1^2}{2p}\right); \quad ①$$

$$L_2':\ y - y_2 = \frac{p}{y_1}\left(x - \frac{y_2^2}{2p}\right). \quad ②$$

$\because \quad \dfrac{p}{y_1} \cdot \dfrac{p}{y_2} = -1,$

$\therefore \quad y_1y_2 = -p^2.$

联立①和②两个方程，求出动点 R 的坐标

$$x = \frac{3p^2 + (y_1 + y_2)^2}{2p}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

消 $y_1 + y_2$，得到所求的轨迹方程

$$y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{3}{2}p\right).$$

31．设长为 L 的直线段的两端 A，B 在抛物线 $y = x^2$ 上的坐标为 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则有

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2^2 \qquad ①$$

于是，AB 的中点 M 到 x 轴的距离为

$$d = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad ②$$

又有条件

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = L^2. \qquad ③$$

由①，②，③，并置 $y_1y_2 = x_1^2x_2^2 = z^2$，则有

$$4z^2 + 2z + L^2 - 4d^2 - 2d = 0.$$

由 z 必为实数，故判别式非负，即

$$\Delta = 4 - 16(L^2 - 4d^2 - 2d) \geqslant 0.$$

解之得

$$d \geqslant \frac{2L-1}{4}, \text{ 或 } d \leqslant \frac{-(2L+1)}{4}.$$

因 $d > 0$，故

$$d \geqslant \frac{2L-1}{4}.$$

由此不等式可知，d 的极小值，亦即 M 点到 x 轴的最短距离为 $\frac{2L-1}{4}$. 这时 $z = -\frac{1}{4}$，即 $x_1x_2 = -\frac{1}{4}$，于是

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &= y_1 + y_2 + 2z = \frac{2L-1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= L - 1.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = \pm\sqrt{L-1} \ (L \geqslant 1).$$

或 $$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pm\sqrt{L-1}}{2}.$$

因此，中点 M 的坐标为

$$M\left(\frac{\pm\sqrt{L-1}}{2}, \ \frac{2L-1}{4}\right).$$

32. 当 $-1<k<1$ 时，相交；当 $k=\pm1$ 时，相切，切点坐标分别为(1, 2)和(1, -2)；当 $k>1$ 或 $k<-1$ 时，不相交.

习　题　二

1. (1) $2a=10$；$2b=4$；$2c=2\sqrt{21}$；$e=\frac{\sqrt{21}}{5}$；焦点$(0, \pm\sqrt{21})$；顶点$(0, \pm5)$，$(\pm2, 0)$；准线 $y=\pm\frac{25}{\sqrt{21}}$.

(2) $2a=2$；$2b=1$；$2c=\sqrt{3}$；$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$；焦点$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$；顶点$(\pm1, 0)$；$\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$；准线 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

2. (1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$；

(2) $5x^2+9y^2-45=0$；

(3) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ 或 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$；

(4) $5x^2+4y^2=1$；

(5) $x^2+25y^2=149$ 或 $25x^2+y^2=1229$.

3. (1) 易知点$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$是椭圆上的点，因此，过此点的切线方程为

$$5x+2y=3.$$

(2) **解法一**　设过 A 点的切线方程为

$$y+1=k(x+2).$$

解方程组

$$\begin{cases} y+1=k(x+2), \\ 5x^2+y^2=1. \end{cases}$$

消去 y，得方程

$$(5+k^2)x^2+2k(2k-1)x+4k^2-4k=0.$$

因直线和椭圆相切，故判别式为零，即

$$\Delta=4k^2(2k-1)^2-4(5+k^2)(4k^2-4k)=0.$$

由此得 $k=0$，$k=\frac{20}{19}$.

因此，两切线方程为

$$y=-1,\ 20x-19y+21=0.$$

解法二 设过 A 点的两条切线与椭圆分别切于点 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$，则两切线分别为

$$5x_1x+y_1y=1,$$

和

$$5x_2x+y_2y=1.$$

因两切线都经过点 $(-2,\ -1)$，故

$$-10x_1-y_1=1, \quad ①$$

$$-10x_2-y_2=1. \quad ②$$

又

$$5x_1^2+y_1^2=1, \quad ③$$

$$5x_2^2+y_2^2=1. \quad ④$$

联立①和③两个方程，得 $x_1=0$，$y_1=-1$；联立②和④两个方程，得 $x_2=-\frac{4}{21}$，$y_2=\frac{19}{21}$. 将切点坐标分别代入切线，得过 A 点的两切线方程为

$$y=-1 \text{ 和 } 20x-19y+21=0.$$

(3) 已知直线的斜率为 $-\frac{2}{5}$，故所求切线的斜率为 $\frac{5}{2}$，直接利用求切线的公式，得切线方程

$$y=\frac{5}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+1},$$

即 $$y=\frac{5}{2}x\pm\frac{3}{2}$$

解法二 设所求切线的切点为(x_1, y_1)，切线方程为$5x_1x+y_1y=1$，此切线与已知直线垂直，故

$$-\frac{5x_1}{y_1}=\frac{5}{2}.$$

$$\therefore\quad y_1=-2x_1. \qquad ①$$

又 $$5x_1^2+y_1^2=1. \qquad ②$$

解①和②的联立方程，得切点坐标

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{3}\\ y_1=\dfrac{2}{3}\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x_1=\dfrac{1}{3},\\ y_1=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

因此，所求的切线方程为

$$5\left(-\frac{1}{3}\right)x+\frac{2}{3}y=1 \text{ 或 } 5\left(\frac{1}{3}\right)x-\frac{2}{3}y=1$$

即 $$5x-2y+3=0 \text{ 或 } 5x-2y-3=0.$$

4. 设切点M、N的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)则过切点$M(x_1, y_1)$和$N(x_2, y_2)$的切线分别为

$$A^2x_1x+B^2y_1y=1,$$

$$A^2x_2x+B^2y_2y=1.$$

因两切线都经过点$P(x_0, y_0)$，故

$$A^2x_0x_1+B^2y_0y_1=1,$$

$$A^2x_0x_2+B^2y_0y_2=1.$$

由此可见，切点$M(x_1, y_1)$和$N(x_2, y_2)$的坐标满足方程

$$A^2x_0x+B^2y_0y=1. \qquad ①$$

因为过两点只能作一条直线，因此，方程①就是经过切点 M、N 的直线方程.

5. $e=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

6. $\frac{x^2}{6699^2}+\frac{y^2}{6697^2}=1$.

7. (1) $x^2+4y^2=a^2$，$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. (1) 设椭圆方程为

$$Ax^2+By^2=1、(A>0,\ B>0)$$

直线和椭圆切于点 $(x_1,\ y_1)$，则切线方程为

$$Ax_1x+By_1y=1.$$

此切线与直线 $4x+y=5$ 重合，故

$$\frac{Ax_1}{4}=\frac{By_1}{1}=\frac{1}{5}.$$

由此求得

$\therefore\quad x_1=\frac{4}{5A}$，$y_1=\frac{1}{5B}$.

因切点 $(x_1,\ y_1)$ 在直线 $4x+y=5$ 上，(1，1) 在椭圆上，

$$\therefore\quad \begin{cases}\frac{16}{5A}+\frac{1}{5B}=5,\\ A+B=1.\end{cases}$$

解方程组得

$$A=\frac{4}{5},\quad B=\frac{1}{5}.$$

因此，所求的椭圆方程为

$$4x^2+y^2=5.$$

(2) 设椭圆方程为

$$Ax^2+By^2=1.\ (A>0,\ B>0)$$

又设直线 $3x-2y-20=0$ 和 $x+6y-20=0$ 分别切此椭圆于 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$，则切线

$$Ax_1x+By_1y-1=0$$

和
$$Ax_2x+By_2y-1=0$$

分别与上述两切线重合，于是得

$$\frac{Ax_1}{3}=\frac{By_1}{-2}=\frac{-1}{-20},\quad \frac{Ax_2}{1}=\frac{By_2}{6}=\frac{-1}{-20}.$$

求出 $x_1=\dfrac{3}{20A}$，$y_1=\dfrac{-1}{10B}$，$x_2=\dfrac{1}{20A}$，$y_2=\dfrac{3}{10B}$.

又 $3x_1-2y_1-20=0$，$x_2+6y_2-20=0$.

故

$$\begin{cases}\dfrac{9}{20A}+\dfrac{1}{5B}-20=0,\\[2mm] \dfrac{1}{20A}+\dfrac{9}{5B}-20=0.\end{cases}$$

由此求得 $A=\dfrac{1}{40}$，$B=\dfrac{1}{10}$.

因此，所求方程为

$$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1.$$

(3) 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

则
$$a^2-b^2=3^2=9. \qquad ①$$

又设直线 $x+y-5=0$ 与椭圆切于 $(x_1,\ y_1)$ 点，则切线

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

和直线 $x+y-5=0$ 重合．于是

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{1}=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{1}=\frac{-1}{-5}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{a^2}{5},\ y_1=\frac{b^2}{5},$$

又 $x_1+y_1-5=0$，故

$$\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{5}-5=0. \qquad ②$$

联立①和②两个方程，得 $a^2=17$，$b^2=8$.

因此，所求的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1.$$

9．(1) 因为椭圆上的点 $P(5,\ 5)$ 到两焦点 $F_1(1,\ 2)$，$F_2(2,\ 1)$ 的距离之和等于长轴的长，故

$$|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}+\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}$$
$$=2a.$$

$$\therefore\quad 2a=10.$$

设 $M(x,\ y)$ 为椭圆上的点，则

$$|MF_1|+|MF_2|=10.$$

即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=10.$$

将左边的一个根式移到右边，两边平方，再移项，再平方，化简后得所求方程

$$99x^2+2xy+99y^2-100x-300y-1700=0;$$

(2) 椭圆短轴上的两端点为 $B(-2,\ -1)$，$B'(-2,\ 3)$，因中心是 BB' 的中点，故椭圆的中心为 $(-2,\ 1)$.

$$\because\quad 2b=|BB'|=\sqrt{(-2+2)^2+(-1-3)^2}=4.$$

$$\therefore\quad b=2.$$

又　$2c=2\sqrt{5}$，∴　$c=\sqrt{5}$。

∴　$a=\sqrt{b^2+c^2}=3$.

因此，所求的椭圆方程为

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

10. 依题设可知，椭圆的中心就是 AB 的中垂线 $x=5$ 和直线 $y=3$ 的交点，因此，椭圆的中心坐标为 (5, 3)，于是可设椭圆方程为

$$\frac{(x-5)^2}{a^2}+\frac{(y-3)^2}{b^2}=1.$$

将点 $A(3, 0)$ 和 $(0, 3)$ 的坐标代入，得

$$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1,\\ \dfrac{25}{a^2}+\dfrac{0}{b^2}=1\end{cases}$$

∴　$a^2=25$，$b^2=\dfrac{75}{7}$.

因此，椭圆方程为

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{7(y-3)^2}{75}=1,$$

11. 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

令 $x=c$，得 $(c^2=a^2-b^2)$

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)}=\pm\frac{b^2}{a}.$$

∵　$2\dfrac{b^2}{a}=10$，$b=c$，

∴　$b^2=5a$，$b^2=a^2-b^2$.

$\therefore\quad a^2=100,\ b^2=50.$

设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

同理求得 $b^2=50$，$a^2=100$.

因此，椭圆方程为

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{50}=1 \text{ 或 } \frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{100}=1.$$

12. 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\,(a>b>0)$$

则

$$\frac{c}{a}=0.8,\quad \frac{a^2}{c}=\frac{25}{4},$$

$\therefore\quad a=5,\ c=4,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=3.$

因此，椭圆方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

设 $A(x_1,\ y_1)$ 为椭圆内接矩形的一个顶点，则内接矩形的面积 $S=4|x_1||g_1|$.

$\because\quad S^2=16x_1^2y_1^2$

$$\therefore\quad S^2=16\cdot25\cdot9\frac{x_1^2}{9}\cdot\frac{y_1^2}{25}\leqslant16\cdot25\cdot9\cdot\left(\frac{\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{25}}{2}\right)^2$$

$$=16\cdot25\cdot9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=900.$$

$\therefore\quad S_{max}=\sqrt{900}=30.$

因此，内接于这个椭圆的最大矩形的面积等于30.

13. 设 r_1 与 ox 轴的夹角为 α，r_1 的端点坐标为 $(x_1,\ y_1)$.

则

$$x_1 = r_1\cos\alpha,\quad y_1 = r_1\sin\alpha.$$

$$\because\quad \frac{(r_1\cos\alpha)^2}{a^2} + \frac{(r_1\sin\alpha)^2}{b^2} = 1,$$

$$\therefore\quad r_1^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

因 $r_1 \perp r_2$，则 r_2 与 x 轴的夹角为 $\alpha+90°$，同理

$$r_2^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2(\alpha+90°) + b^2\cos^2(\alpha+90°)}.$$

$$\therefore\quad r_2^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}.$$

由此可得

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

14. 设椭圆的直径和它的共轭直径为：

$$y = kx,$$

$$y = -\frac{b^2}{a^2k}x.$$

这两条直线与右准线 $x = \frac{a^2}{c}$ 相交于 M、N，则 ΔMON 的各顶点坐标是

$$O(0,0),\ M\left(\frac{a^2}{c},\ \frac{ka^2}{c}\right),\ N\left(\frac{a^2}{c},\ -\frac{b^2}{ck}\right).$$

因此 ΔOMN 各边上的高为

$$y = 0,$$

$$y + \frac{b^2}{kc} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{a^2}{c}\right),$$

$$y - \frac{ka^2}{c} = \frac{a^2k}{b^2}\left(x - \frac{a^2}{c}\right).$$

这三条高的交点为 $F(c,\ 0)$。

15. 设 P 点到左准线 $x=-\frac{25}{2}$ 的距离为 d_1，到右准线 $x=\frac{25}{2}$ 的距离为 d_1，则

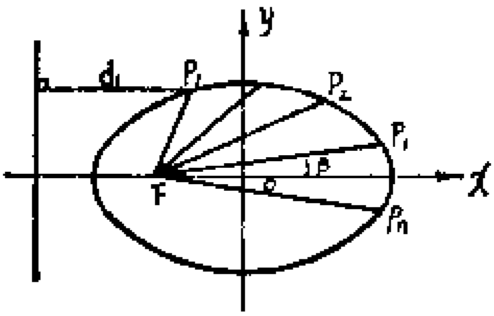
$$\frac{15}{d_1}=e,\quad e=\frac{4}{5},$$

$$\therefore\quad d_1=\frac{75}{4}.$$

又 $d_1+d_2=\frac{25}{2}+\frac{25}{2}=25$，故 $d_2=25-\frac{75}{4}=\frac{25}{4}$.

因此，P 点到两准线的距离分别是 $\frac{75}{4}$ 和 $\frac{25}{4}$.

16. 如图，设点 P_i 到左准线的距离为 d_i，$\angle P_1Fx=\beta$，$\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\cdots\cdots=\angle P_nFP_1=\frac{2\pi}{n}=\alpha$，则



习题 2·2—16

$$d_i+P_iF\cos\left[(i-1)\alpha+\beta\right]$$

$$=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c},$$

$$P_iF=\frac{c}{a}d_i.$$

$$\therefore\frac{1}{d_i}=\frac{c}{b^2}\left\{1-\frac{c}{a}\cos[(i-1)\alpha+\beta]\right\}.$$

$$(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots n)$$

$$\therefore\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}=\frac{c}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{c}{a}\cos[(i-1)\alpha+\beta]\right\}$$

$$=\frac{nc}{b^2}-\frac{c^2}{ab^2}\sum_{i=1}^{n}\cos[(i-1)\alpha+\beta]$$

$$=\frac{nc}{b^2}.$$

17. 设过 $p(2, 2)$ 点的弦的方程为

$$y=kx+2-2k.$$

将此方程代入椭圆方程，得

$$(1+4k^2)x^2-(2-4k+16k^2)x+(16k^2-8k-2)=0.$$

设 x_1 和 x_2 是此方程的两根，又 $p(2, 2)$ 是弦的中点，则

$$2=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2-4k+16k^2}{2(1+4k^2)}.$$

$\therefore\quad k=-\dfrac{1}{2}.$

因此，所求的弦的方程为

$$x+2y-6=0.$$

解法二 设以 $P(2, 2)$ 为中点的弦与椭圆的交点为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，弦 AB 的斜率为 k，则

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2,\quad \frac{y_1+y_2}{2}=2,$$

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

又 A, B 在椭圆上，故

$$x_1^2+4y_1^2-2x_1-12y_1+6=0, \qquad ①$$

$$x_2^2+4y_2^2-2x_2-12y_2+6=0. \qquad ②$$

①—②，得

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(y_1-y_2)(y_1+y_2)$$
$$-2(x_1-x_2)-12(y_1-y_2)=0.$$

因 $x_1\neq x_2$，两边同除 x_1-x_2，得

$$(x_1+x_2)+4(y_1+y_2)\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-2-12\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0.$$

将 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=4$，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ 代入，得

$$k=-\frac{1}{2}.$$

因此，所求的直线方程为

$$x+2y-6=0.$$

19．设 $p(x_1, y_1)$ 为椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上的任意一点，则过 p 点的法线方程为

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

因法线经过原点（0，0），将原点坐标代入此式，得 $a=b$．故椭圆是一个圆．

20．设两切点的坐标为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，则两切线的方程是

$$16x_1x+25y_1y=400,$$

$$16x_2x+25y_2y=400.$$

因两切线都经过点 $P(10, 0)$，将 P 点坐标代入上式，得

$$x_1=\frac{5}{2},$$

$$x_2=\frac{5}{2}.$$

由此可见，过两切点的直线方程为

$$x=\frac{5}{2}.$$

此直线与椭圆的两个交点，即两切点的坐标为

$$\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3}\right)\text{和}\left(\frac{5}{2}, -2\sqrt{3}\right).$$

两切点与 P 点为顶点的三角形面积

$$S=15\sqrt{3}.$$

21．在圆上任取一点 $P(x_1,y_1)$，由 P 点向椭圆引斜率为 k 的切线，则切线方程为

$$y=kx+\sqrt{a^2k^2+b^2}\ (\text{或}\ y=kx-\sqrt{a^2k^2+b^2})$$

因 P 点在此切线上，故

$$y_1=kx_1+\sqrt{a^2k^2+b^2}\ (\text{或}\ y_1=kx_1-\sqrt{a^2k^2+b^2})$$

由此得

$$(x_1^2-a^2)k^2-2x_1y_1k+y_1^2-b^2=0.$$

过 p 点的两切线的斜率 k_1 和 k_2 就是此方程的两根. 因 $x_1^2+y_1^2=a^2+b^2$,

$$\therefore\quad k_1k_2=\frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}=-1.$$

因此，由 p 点所引的两切线互相垂直.

24. 设所求点的坐标为 (x_1, y_1)，则过此点的切线方程为

$$9x_1x+4y_1y=72,$$

即

$$\frac{x}{\frac{8}{x_1}}+\frac{y}{\frac{18}{y_1}}=1.$$

故切与坐标轴所围成的面积为

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{8}{x_1}\right|\left|\frac{18}{y_1}\right|=\frac{72}{|x_1||y_1|}.$$

$\because\quad 9x_1^2+4y_1^2=72,$

$\therefore\quad 2|3x_1||2y_1|\leqslant(3x_1)^2+(2y_1)^2=72.$

$\therefore\quad |x_1||y_1|\leqslant 6.$

其中等号仅当 $|3x_1|=|2y_1|$ 时成立.

由 $\quad (3x_1)^2+(2y_1)^2=(2y_1)^2+(2y_1)^2=72,$

得 $\quad y_1=\pm 3.$

因此，所求的切点为

$$(\pm 2,\ 3),\ (\pm 2,\ -3).$$

26. 设自 $P(x, y)$ 点向椭圆所引切线的斜率为 k，则切线

方程为

$$y=kx+\sqrt{a^2k^2+b^2}\ (\text{或}\ y=kx-\sqrt{a^2k^2+b^2}).$$

因此得关于 k 的二次方程

$$(x^2-a^2)k^2-2xyk+(y^2-b^2)=0.$$

设此方程的两根为 k_1 和 k_2，则 k_1 和 k_2 就是过 P 点所引两切线的斜率．故

$$k_1=\operatorname{tg}\theta_1,\quad k_2=\operatorname{tg}\theta_2,$$

$$k_1+k_2=\frac{2xy}{x^2-a^2},\quad k_1k_2=\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2};$$

又 $\operatorname{ctg}\theta_1+\operatorname{ctg}\theta_2=m,$

$$\operatorname{ctg}\theta_1+\operatorname{ctg}\theta_2=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta_2}$$

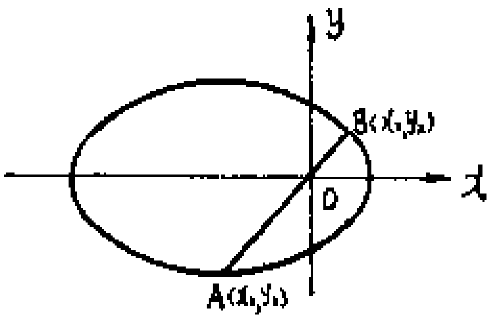
$$=\frac{\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\theta_2}{\operatorname{tg}\theta_1\cdot\operatorname{tg}\theta_2}=\frac{k_1+k_2}{k_1k_2},$$

$$\therefore\quad \frac{\dfrac{2xy}{x^2-a^2}}{\dfrac{y^2-b^2}{x^2-a^2}}=m.$$

化简，得 P 点的轨迹方程．

$$my^2-2xy-mb^2=0$$

27．如图建立坐标系．设椭圆的长轴为 $2a$，短轴为 $2b$，焦距为 $2c$．以焦点为原点，长轴所在直线为 x 轴，则椭圆方程是



习题 2·2—27

$$\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$$

设过椭圆焦点的任意一弦 AB 的直线方程为

$$y=kx.$$

将此方程代入椭圆方程，得

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2b^2cx+b^2c^2-a^2b^2=0.$$

设 A，B 的坐标为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，AB 的中点坐标为 (x, y). 则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b^2c}{b^2+a^2k^2}, \qquad ①$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{kx_1+kx_2}{2}=-\frac{b^2ck}{b^2+a^2k^2}. \qquad ②$$

①÷②，得

$$k=\frac{y}{x}.$$

将 k 值代入①式，得轨迹方程

$$\frac{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bc}{2a}\right)^2}=1.$$

因此，诸弦中点的轨迹是一个椭圆.

$$\because\quad a>b,\quad \therefore\quad \frac{b}{a}<1.$$

$$\therefore\quad \frac{c}{2}>\frac{c}{2}\cdot\frac{b}{a}=\frac{bc}{2a}.$$

故所求椭圆的离心率

$$e=\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{bc}{2a}\right)^2}\Big/\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{c}{a}.$$

这与原椭圆的离心率相等.

28. 设三点的横坐标为 x_1-d，x_1，x_1+d，则其焦半径为 $a\pm e(x_1-d)$，$a\pm ex$，$a\pm e(x_1+d)$. 而 e，a 为常数， 故焦半径亦成等差数列.

29. 不难证明：所求外切正方形是圆 $x^2+y^2=9$ 的内接正

方形．圆心到各边的距离等于$\frac{3\sqrt{2}}{2}$．设切点为(x_1, y_1)，则切线方程为

$$\frac{x_1x}{6}+\frac{y_1y}{3}=1.$$

即

$$x_1x+2y_1y-6=0.$$

原点到此直线的距离等于$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故

$$\left|\frac{-6}{\sqrt{x_1^2+4y_1^2}}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

即

$$x_1^2+4y_1^2=8. \quad ①$$

又
$$\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1. \quad ②$$

联立①和②，得

$$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-2\\y_1=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-2\\y_1=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=2\\y_1=-1.\end{cases}$$

因此，外切正方形各边的方程是

$x-y+3=0$，$x+y+3=0$，$x-y+3=0$，$x+y-3=0$．

30．设$P(x_1, y_1)$为椭圆上的任意一点，则过P点的切线方程为

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2 \quad ①$$

由左焦点$F(-c, 0)$向此切线作垂线，垂足为M，则垂线的方程为

$$y=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x+c),$$

即
$$a^2y_1x-b^2x_1y=-a^2cy_1. \quad ②$$

由$①^2+②^2$，得

$$x^2+y^2=\frac{a^4(b^4+c^2y_1^2)}{b^4x_1^2+a^4y_1^2}.$$

$\because\quad c^2=a^2-b^2,\ b^2x_1^2=a^2b^2-a^2y_1^2.$

$\therefore\quad b^4x_1^2+a^4y_1^2=b^2(a^2b^2-a^2y_1^2)+a^4y_1^2$

$$=a^2(b^4+c^2y_1^2)$$

$\therefore\quad x^2+y^2=a^2.$ (3)

因为 M 点的坐标满足方程①和②，因此 M 点的坐标满足方程③，即 M 点在以原点为圆心半径为 a 的圆上．同理，N 点亦在此圆上．

31．设圆心坐标为 $(r,\ 0)$，则圆的方程为

$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

由此得 $y^2=2rx-x^2$．将其代入椭圆方程，得

$$(a^2-b^2)x^2-2ra^2x+a^2b^2=0.$$

由于圆和椭圆相切，故其判别式为 0，即

$$\Delta=(2ra^2)^2-4(a^2-b^2)a^2b^2=0.$$

由此求出

$$r=\pm\frac{bc}{a}.\ (c=\sqrt{a^2-b^2})$$

故圆的方程为

$$\left(x\pm\frac{bc}{a}\right)^2+y^2=\frac{b^2c^2}{a^2}.$$

习 题 三

1．(1) $2a=4$．$2b=\frac{4}{7}\sqrt{14}$；顶点 $(0,-2)$．$(0,2)$；焦点 $\left(0,-\frac{6}{7}\sqrt{7}\right)$，$\left(0,\frac{6}{7}\sqrt{7}\right)$；$e=\frac{3}{7}\sqrt{7}$；渐近线方程 $y=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}x$；准线方程 $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{7}$．

(2) $2a=\frac{12}{5}$，$2b=1$；顶点$(-\frac{6}{5}, 0)$，$(\frac{6}{5}, 0)$；焦点$(-\frac{13}{10},0)$，$(\frac{13}{10},0)$；$e=\frac{13}{12}$；渐近线$y=\pm\frac{5}{12}x$；准线方程为 $x=\pm\frac{72}{65}$.

2. $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$.

3. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，　$-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

4. (1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；

(2) $-\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{25}=1$；

(3) $25x^2-9y^2=171$；

(4) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$，　$-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1$；

(5) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$，　$-\frac{81x^2}{(128)^2}+\frac{9y^2}{32^2}=1$；

(6) $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{144}=1$.

5. (1) $2x+y-1=0$；

(2) 设切点为(x_1, y_1)，则切线为

$$3x_1x-y_1y=3.$$

因切线过点$B(-\frac{1}{2},0)$，且切点在双曲线上，故

$$\begin{cases}-\frac{3}{2}x_1=3,\\ 3x_1^2-y_1^2=3.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x_1=-2\\ y_1=3,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1=-2\\ y_1=-3.\end{cases}$$

因此，所求的两切线为

$$2x+y+1=0 \text{ 和 } 2x-y+1=0.$$

(3) 设 (x_1, y_1) 为双曲线上的一点，则过此点的法线方程为

$$y-y_1=-\frac{y_1}{3x_1}(x-x_1).$$

因法线经过点 $C(8, 0)$，且 (x_1, y_1) 在双曲线上，故

$$\begin{cases}-3x_1y_1=-y_1(8-x_1),\\3x_1^2-y_1^2=3.\end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases}x_1=2,\\y_1=3,\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}x_1=2,\\y_1=-3.\end{cases}$$

因此，过 C 点的法线方程为

$$x+2y-8=0 \text{ 和 } x-2y-8=0.$$

6. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. (1) $x+y\pm 3=0$;

(2) $2x+y\pm\sqrt{54}=0$.

8. 不难证明 P 点必在双曲线的左边一枝上，设 P 点到左准线的距离为 d_1，到右准线的距离为 d_2，到右焦点的距离为 d_3，则

$$\frac{3}{d_1}=e, \quad \frac{d_3}{d_2}=e.$$

$$\because \quad a=2, \quad c=3, \quad e=\frac{3}{2},$$

$$\therefore \quad d_1=2, \quad d_2=d_1+\frac{2a^2}{c}=\frac{14}{3},$$

$$d_3=ed_2=7.$$

因此，P 点到左准线的距离为 2，到右准线的距离为 $\frac{14}{3}$，到右焦点的距离为 7.

10. $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$， $\alpha_2 = \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

11. (1) 依题意可知双曲线的实轴在 y 轴上，因此可设双曲线的方程是

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

其渐近线方程是

$$ax \pm by = 0.$$

$\therefore \quad \frac{a}{b} = 2$，$a = 2b$.

又设切点为$(x_1,\ y_1)$，则切线为

$$-\frac{x_1 x}{b^2} + \frac{y_1 y}{a^2} = 1.$$

因为此切线与直线 $x - y + 3 = 0$ 重合，故

$$\frac{-\frac{x_1}{b^2}}{1} = \frac{\frac{y_1}{a^2}}{-1} = \frac{-1}{3}.$$

$\therefore \quad x_1 = \frac{b^2}{3}$， $y_1 = \frac{a^2}{3} = \frac{4}{3}b^2$.

又 $x_1 - y_1 + 3 = 0$，故

$$\frac{b^2}{3} - \frac{4}{3}b^2 + 3 = 0.$$

$\therefore \qquad b^2 = 3.$

$\therefore \qquad a^2 = 12.$

因此，所求的双曲线方程为

$$-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

(2) 设双曲线方程为

$$Ax^2-By^2=1.$$

已知的直线和此双曲线切于点 $Q(x_1,\ y_1)$，则过点 Q 的切线为

$$Ax_1x-By_1y=1.$$

此切线应和直线 $9x+2y-15=0$ 重合，于是

$$\frac{Ax_1}{9}=\frac{-By_1}{2}=\frac{-1}{-15}.$$

由此求得

$$x_1=\frac{3}{5A},\quad y_1=-\frac{2}{15B}.$$

又 $9x_1+2y_1-15=0$，点 $P(\sqrt{6},\ 3)$ 在双曲线上，故

$$\begin{cases}\dfrac{27}{5A}-\dfrac{4}{15B}-15=0,\\ 6A-9B=1.\end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases}A=\dfrac{1}{5}\\ B=\dfrac{1}{45},\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}A=\dfrac{3}{10},\\ B=\dfrac{4}{45}.\end{cases}$$

因此，所求的双曲线方程为

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{45}=1\ 或\ \frac{3x^2}{10}-\frac{4y^2}{45}=1.$$

12．(1) $2a=4$．设 $P(x,\ y)$ 为双曲线上的任意一点，由双曲线的定义得

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=\pm 4.$$

将左边的第二个根式移到右边，两边平方，化简后得

$$-3y-7=\pm 2\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}.$$

两边再平方，化简后得所求的双曲线方程

$$4x^2-5y^2-16x-10y+31=0.$$

(2) $C=\frac{1}{2}|F_1F_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3-3)^2+(-4-4)^2}=5.$

$$\frac{2a^2}{C}=3.6$$

$\therefore$ $$a=3$$

设 $P(x, y)$ 为双曲线上的任意一点，则

$\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\pm 6.$

化简后得双曲线方程

$$7y^2+24xy-144=0.$$

13. 由椭圆方程知椭圆的焦点在 y 轴上. 因双曲线和椭圆有公共焦点，所以它的方程是

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

又 $$e_{双}+e_{椭}=2.8,$$

椭圆的半焦距

$$c=\sqrt{25-9}=4,$$

$\therefore$ $e_{椭}=\frac{4}{5}=0.8.$

$\therefore$ $$e_{双}=2.8-0.8=2.$$

由此得

$$a=\frac{c}{e_{双}}=2,$$

$$b^2=c^2-a^2=12.$$

故得双曲线的方程为

$$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1.$$

14. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$

15. (1) 当 $k=a^2$ 时，方程代表直线 $x=0$；当 $k=b^2$ 时，方程代表直线 $y=0$.

(2) 当 $k\neq a^2$，$k\neq b^2$ 时，方程化为

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=1.\quad (a>b>0).$$

若 $k>a^2$，则 $k>b^2$，方程无轨迹；

若 $b^2<k<a^2$，则 $a^2-k>0$，$b^2-k<0$，方程代表双曲线，焦点在 x 轴上，$c=\sqrt{(a^2-k)+(k-b^2)}=\sqrt{a^2-b^2}$，故焦点为

$$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)\text{和}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0).$$

若 $k<b^2$，则 $b^2-k>0$，$a^2-k>0$，方程代表椭圆．因 $a^2-k>b^2-k$，故椭圆的焦点在 x 轴上．又

$$c=\sqrt{(a^2-k)-(b^2-k)}=\sqrt{a^2-b^2},$$

故椭圆的焦点为

$$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)\text{和}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0).$$

因此，当方程代表椭圆或双曲线时有相同的焦点．

16．设点 $P(x_1,\ y_1)$ 是双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上的任意一点．双曲线的两条渐近线为

$$bx-ay=0\ \text{和}\ bx+ay=0.$$

因此，P 点到两渐近线的距离 d_1 和 d_2 之积

$$d_1d_2=\left|\frac{bx_1-ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\cdot\left|\frac{bx_1+ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$=\frac{|b^2x_1^2-a^2y_1^2|}{a^2+b^2}.$$

$\because\quad \dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,$

即　$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2.$

$\therefore\quad d_1d_2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$（定值）．

17. 如图，设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

则两渐近线为

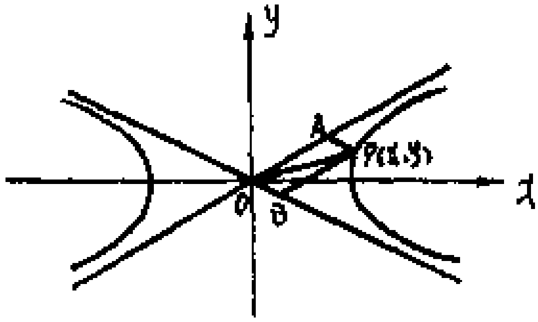
$$bx-ay=0 \text{ 和 } bx+ay=0.$$

$P(x_1,\ y_1)$ 为双曲线上的一点，四边形$OAPB$ 为平行四边 形，AP 的直线方程为

$$bx+ay-bx_1-ay_1=0.$$

解方程组

$$\begin{cases}bx-ay=0,\\bx+ay-bx_1-ay_1=0.\end{cases}$$



习题 2.3—17

得 A 点坐标 $A\left(\frac{bx_1+ay_1}{2b},\ \frac{bx_1+ay_1}{2a}\right)$.

$\square OAPB$ 的面积等于$\triangle OAP$ 的面积的 2 倍，故

$$S_{\square}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{bx_1+ay_1}{2b} & \frac{bx_1+ay_1}{2a} & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2ab}(b^2x_1^2-a^2y_1^2)$$

$$=\frac{1}{2ab}a^2b^2=\frac{ab}{2}.$$

因此，$\square OAPB$ 的面积等于定值.

19. 解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=12\\5x^2-9y^2=18.\end{cases}$$

求出 A, B, C, D 各点的坐标：

$A(3, \sqrt{3})$，$B(-3, \sqrt{3})$，$C(-3, -\sqrt{3})$，$D(3, -\sqrt{3})$.

$\because \quad OA = AD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$，

$\therefore \quad \angle AOD = \angle DOC = 60°$.

因此，$\triangle AOD$ 和 $\triangle DOC$ 是等边三角形.

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle DOC} = \frac{\sqrt{3}}{4}OA^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 12 = 3\sqrt{3}.$$

$$S_{扇形COD} = S_{扇形BOA} = \frac{1}{3}\pi OA^2 = \frac{1}{3}\pi\cdot 12 = 4\pi.$$

因此，所求的曲边形面积

$$S = 6\sqrt{3} + 8\pi.$$

20. 设 A，B，C 三点的坐标为

$$A\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right), \quad B\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right), \quad C\left(x_3, \frac{1}{x_3}\right)$$

则 AB 边和 BC 边上的高分别为

$$y - \frac{1}{x_3} = x_1x_2(x - x_3)$$

和

$$y - \frac{1}{x_2} = x_1x_3(x - x_2).$$

这两条高的交点(即$\triangle ABC$ 的垂心)为

$$\left(-\frac{1}{x_1x_2x_3}, \ -x_1x_2x_3\right).$$

$$\because \quad \left(-\frac{1}{x_1x_2x_3}\right)(-x_1x_2x_3) = 1.$$

故$\triangle ABC$ 的垂心在双曲线 $xy = 1$ 上.

21. 设过双曲线 $xy = a^2$ 上一点 $P(x_1, y_1)$的切线方程为 $y - y_1 = k(x - x_1)$，即

$$y = kx - kx_1 + y_1.$$

代入 $xy=a^2$，得

$$kx^2+(y_1-kx_1)x-a^2=0.$$

$$\because \quad \begin{aligned}\triangle &= (y_1-kx_1)^2+4ka^2\\ &= y_1^2-2kx_1y_1+k^2x_1^2+4ka^2\\ &= y_1^2-2ka^2+k^2x_1^2+4ka^2 \quad (x_1y_1=a^2)\\ &= (y_1+kx_1)^2=0.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad k=-\frac{y_1}{x_1}.$$

因此，切线方程为

$$y-y_1=-\frac{y_1}{x_1}(x-x_1).$$

此切线与 x 轴和 y 轴的交点坐标为

$$A(0,\ 2y_1),\ B(2x_1,\ 0)$$

故切线与坐标轴围成的三角形面积

$$S=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}|2x_1||2y_1|=2|x_1y_1|=2a^2.$$

22．设切线方程为 $y=kx+m$．将其代入双曲线方程得

$$(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2kmx-(a^2m^2+a^2b^2)=0.$$

因必须 $\triangle=(-2a^2km)^2+4(b^2-a^2k^2)(a^2m^2+a^2b^2)=0$，

$$\therefore \quad m^2=a^2k^2-b^2\geqslant 0.$$

由此得

$$|k|\geqslant\frac{b}{a}.\quad（但不能取等号）$$

24．连接 P 和 F_2，则过 P 点的切线是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线．由此可得 $PF_2=PG$．于是

$$F_1G=2a.$$

25．设两曲线的交点坐标为 $(x_1,\ y_1)$，则

$$\frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{9}=\frac{x_1^2}{15}-y_1^2=1.$$

由此求得

$$\frac{x_1^2}{y_1^2}=\frac{125}{3}.$$

过$(x_1,\ y_1)$点的椭圆的切线方程为

$$9x_1x+25y_1y=144.$$

过$(x_1,\ y_1)$点的双曲线的切线为

$$x_1x-15y_1y=15.$$

两曲线在点$(x_1,\ y_1)$处的切线的斜率之积为

$$\left(-\frac{9x_1}{25y_1}\right)\left(\frac{x_1}{15y_1}\right)=-\frac{3}{125}\ \frac{x_1^2}{y_1^2}=-1.$$

因此，两曲线在交点处的切线互相垂直.

26. 设公切线的斜率为k，则椭圆和双曲线的切线方程分别是

$$y=kx\pm\sqrt{16k^2+9}\ 和\ y=kx\pm\sqrt{32k^2-7}.$$

因为这两方程表示同一条直线，故

$$\pm\sqrt{16k^2+9}=\pm\sqrt{32k^2-7}.$$

由此得　$k=\pm1.$

因此，公切线方程是

$$x-y\pm5=0\ 和\ x+y\pm5=0.$$

27. 将A点坐标代入双曲线方程，得

$$\alpha=45^\circ.$$

双曲线在A点处的切线方程为

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{3}x-4. \qquad ①$$

圆在A点处的切线方程为

$$(4\sqrt{3}-m)(x-m)+4y=R^2,$$

即

$$y=\frac{1}{4}(m-4\sqrt{3})\,x+\frac{R^2+4\sqrt{3}\,m-m^2}{4} \qquad ②$$

方程①和②表示同一条切线，故

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}(m-4\sqrt{3})=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\\[2mm] \dfrac{R^2+4\sqrt{3}\,m-m^2}{4}=-4\end{cases}$$

解方程组，得

$$m=\frac{20\sqrt{3}}{3},\quad R=\frac{4\sqrt{21}}{3}.$$

28．设等边双曲线为

$$x^2-y^2=a^2,$$

$P(x_1,\ y_1)$为双曲线上的一点，则过 P 点的切线为

$$x_1x-y_1y=a^2. \qquad ①$$

过原点而和此切线垂直的直线方程为

$$y=-\frac{y_1}{x_1}x. \qquad ②$$

联立①和②两个方程，求得

$$x_1=\frac{a^2x}{x^2+y^2},\quad y_1=\frac{-a^2y}{x^2+y^2}$$

又 $\qquad x_1^2-y_1^2=a^2.$

故所求的轨迹方程为

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

29．设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

由动点 $P(x,\ y)$所引两切线的斜率为 k 和 $-\frac{1}{k}$，则动点坐标满足方程

$$y=kx+\sqrt{a^2k^2-b^2}\quad(\text{或 } y=kx-\sqrt{a^2k^2-b^2})$$

和
$$y=-\frac{1}{k}x-\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2a^2-b^2}\ .$$

$$\left(\text{或 } y=-\frac{1}{k}x+\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2a^2-b^2}\right)$$

由此两式得

$$(y-kx)^2=a^2k^2-b^2 \qquad ①$$

$$(ky+x)^2=a^2-k^2b^2 \qquad ②$$

由①+②，得动点 P 的轨迹方程

$$x^2+y^2=a^2-b^2.$$

因此，当 $a>b$ 时，轨迹是一个圆；当 $a<b$ 时，无轨迹；当 $a=b$，即双曲线为等边双曲线，轨迹是一个点.

30. 当 $k>4$ 时，图象是实轴在 y 轴上的双曲线；当 $k=4$ 时，无轨迹；当 $2<k<4$ 时，图象是一个椭圆；当 $k=3$ 时，图象是一个圆；当 $k=2$ 时，图象是两条平行于 y 轴的直线；当 $-1<k<2$ 时，图象是实轴在 x 轴上的双曲线；当 $k=-1$ 时，图象是过原点的两条直线；当 $k<-1$ 时，图象是实轴在 y 轴上的双曲线.

31. 设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

左端点 $A(-a,\ 0)$，右端点 $A'(a,\ 0)$，左焦点 $F_1(-c,\ 0)$，右焦点 $F_2(c,\ 0)$. 过 $P(x_1,\ y_1)$ 点的切线为

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

此切线与过左，右两端点的切线 $x=-a$，$x=a$ 分别交于 P，Q，则

$$P\left(-a,\frac{b^2(-x_1-a)}{ay_1}\right),\quad Q\left(a,\frac{b^2(x_1-a)}{ay_1}\right)$$

直线 F_1Q 和 F_1P 的斜率分别为

$$k_{F_1Q}=\frac{b^2(x_1-a)}{ay_1(a+c)},\quad k_{F_1P}=\frac{b^2(-x_1-a)}{ay_1(-a+c)}.$$

$$\therefore\quad k_{F_1Q}\cdot k_{F_1P}=\frac{b^4(x_1^2-a^2)}{a^2y_1^2(a^2-c^2)}=\frac{-b^2(x_1^2-a^2)}{a^2y_1^2}$$

$$=-\frac{b^2}{y_1^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}-1\right)=-\frac{b^2}{y_1^2}\cdot\frac{y_1^2}{b^2}$$

$$=-1.$$

$\therefore$ $F_1Q\perp F_1P$.

同理 $F_2Q\perp F_2P$.

因此，F_1，F_2，P，Q 四点，在以 PQ 为直径的圆周上.

32. 因 $EB=EC$，故 $\angle EBC=\angle ECB$. 设 $\angle EAC=\alpha$，$\angle EBC=\beta$，E 点坐标为 (x, y)，则

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x+a},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{y}{x-a}.$$

从而求得 $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=0$.

$\therefore$ $\alpha+\beta=90^\circ$.

故 $AE\perp CE$.

同理 $AF\perp CF$.

因此，A，C，E，F 四点在以 AC 为直径的圆周上.

33. 设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$P(x_1, y_1)$ 为双曲线上的任意一点. 则过 P 点的切线

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

与渐近线 $bx-ay=0$ 和 $bx+ay=0$ 的交点分别为

$$A\left(\frac{a^2b}{bx_1-ay_1},\ \frac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right),$$

$$B\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1},\ \frac{-ab^2}{bx_1+ay_1}\right)$$

$$\therefore\quad S_{\triangle OBA}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{a^2b}{bx_1+ay_1} & \dfrac{-ab^2}{bx_1+ay_1} & 1 \\ \dfrac{a^2b}{bx_1-ay_1} & \dfrac{ab^2}{bx_1-ay_1} & 1 \end{vmatrix}=ab.$$

因此，切线与两渐近线所围成的三角形的面积等于以双曲线的两半轴为边长的长方形的面积.

第 三 章

习 题

1．(1) (5，4)；　(2) 135° 或 315°.

2．(1) $\begin{cases} x=\dfrac{4x'-3y'}{5}+1, \\ y=\dfrac{3x'+4y'}{5}+1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}+1, \\ y=\dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}}+1. \end{cases}$

3．(1) 点$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$；

(2) 无轨迹；

(3) 两条相交直线：$3x-7y+21=0$，和 $x-y-2=0$；

(4) 两条平行直线：$x+y-1=0$ 和 $x+y+3=0$；

(5) 两条重合直线：$x-y+1=0$.

4. (1) 椭圆：$4x''^2+9y''^2=36$；

(2) 双曲线：$x''^2-9y''^2=9$；

(3) 抛物线：$y''^2=2x''$.

5. (1) $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$；中心$(-1, 2)$；焦点$(-1\pm\sqrt{5}, 2)$；准线 $5x+5\pm 9\sqrt{5}=0$；

(2) $e=\frac{\sqrt{10}}{5}$；中心$(-3, 2)$；焦点$(-3\pm\sqrt{2}, 2)$；准线 $2x+6\pm 5\sqrt{2}=0$.

6. (1) $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$；中心$(3, -4)$；顶点$(5, -4)$，$(1, -4)$；焦点$(3\pm\sqrt{13}, -4)$；准线 $13x-39\pm 4\sqrt{13}=0$；渐近线 $3x-2y-17=0$，$3x+2y-1=0$.

(2) $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$；中心$(-1, 2)$；顶点$(-1\pm\sqrt{2}, 2)$；焦点 $(-1\pm\sqrt{5}, 2)$；准线 $5x+5\pm 2\sqrt{5}=0$；渐近线 $\sqrt{3}(x+1)\pm\sqrt{2}(y-2)=0$.

7. (1) 顶点$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$；焦点$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{8}\right)$；轴 $3x+1=0$；准线 $8y-7=0$；

(2) 顶点$(-2, -3)$；焦点$\left(-\frac{3}{4}, -3\right)$；轴 $y+3=0$；准线 $4x+13=0$.

8. (1) $y^2+4y-8x+28=0$；

(2) $y^2+4y-x=0$.

9. (1) $x^2+9y^2+6x-36y+36=0$；

(2) $3x^2+4y^2-12x-24y-27=0$.

(3) $8x^2+9y^2-16x-74=0$.

10. (1) $9x^2-4y^2-2x-16y-19=0$；

(2) $5x^2-4y^2+10x-16y-31=0$.

11. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

12. $x'^2-4y'^2-4=0$.

13. $y'^2=\frac{x'^2(3a\sqrt{2}-2x')}{3\sqrt{2}a+6x'}$.

14. (1) $7x+14y+29=0$; $14x-7y+8=0$;

(2) $2x-3y+8=0$; $3x+2y-1=0$;

(3) $2x-y+28=0$; $x+2y-1=0$;

(4) $8x-8y+7=0$.

15. (1) 焦点 $F(2, 1)$，准线 $x+y=1$;

(2) 焦点 $F_1(-1, 2)$，$F_2(3, 0)$，准线 $y=2x$，$y=2x-2$;

(3) 焦点 $F_1(-2, 4)$，$F_2(0, 0)$，准线 $x-2y+14=0$; $x-2y-4=0$.

(4) 焦点 $F\left(1, -\frac{7}{8}\right)$，准线 $y=-\frac{9}{8}$.

16. 原方程可写成 $(x+4)y=2x+3$，利用平移公式

$$\begin{cases} x=x'-4 \\ y=y'+2 \end{cases}$$

方程化为

$$x'y'=-5.$$

这个方程的图象是以 $x'=0$，$y'=0$ 作为渐近线的等边双曲线，所以原方程表示以 $x=-4$，$y=2$ 为渐近线的等边双曲线.

17. 两次平方原方程，得

$$x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0.$$

易知此曲线是抛物线，且和 x 轴，y 轴相切于 $(a, 0)$ 和 $(0,a)$.

但由原方程知 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，故原方程表示抛物线中 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$ 的一段.

18. 设焦点坐标为 (x, y)，则

$$\begin{cases} x = m, \\ y = \dfrac{1}{16} - m. \end{cases}$$

消去参数 m. 得到方程 $16x+16y-1=0$. 因此，焦点都在同一条直线 $16x+16y-1=0$ 上.

19. 设二次曲线的方程是

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

把已知的五个点的坐标分别代入，得到方程组

$$\begin{cases} A+B+C+D+E+F=0, \\ 4A-2B+C+2D-E+F=0, \\ A-2B+4C+D-2E+F=0, \\ A-B+C-D+E+F=0, \\ 9A+3D+F=0. \end{cases}$$

解之得 $(B\neq 0)$

$$A=0,\ C=-B,\ D=-B,\ E=-2B,\ F=3B.$$

因此，所求的二次方程为

$$xy-y^2-x-2y+3=0.$$

20. $P(0, 0)$ 和 $Q(0, 1)$ 关于轴 $x+y+1=0$ 的对称点分别为 $P'(-1, -1)$ 和 $Q'(-2, -1)$.

设抛物线方程为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

则 $$B^2-4AC=0. \qquad ①$$

将 P，Q，P'，Q' 各点的坐标分别代入所设的抛物线方程，得

$$F=0,$$
$$C+E+F=0,$$
$$A+B+C-D-E+F=0,$$
$$4A+2B+C-2D-E+F=0.$$

将以上4个方程与方程①联立，求得

$$A=\frac{B}{2},\quad C=\frac{B}{2},\quad D=\frac{B}{2},\quad E=-\frac{B}{2},$$

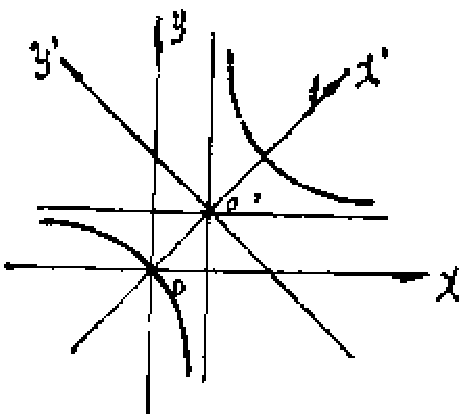
$F=0.\quad (B\neq 0)$

因此，抛物线方程为

$$x^2+2xy+y^2+x-y=0.$$

21. 如图，以两渐近线的交点$O'(1,\ 1)$作为新坐标系$x'o'y'$的原点，两渐近线交角的平分线$y=x$和$y=-x+2$分别作为$o'x'$轴和$o'y'$轴，即新坐标系的$o'x'$轴与ox轴的倾角为45°，由此得变换公式

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}+1, \\ y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}+1. \end{cases} \quad ①$$



习题 3.0—21

在坐标系$x'o'y'$中，点$(2,\ 2)$的坐标为$x'=\sqrt{2}$，$y'=0$，两渐近线为$y'=\pm x'$。由此可知双曲线的实轴和虚轴的长相等，且实轴在x'轴上，因此，双曲线的方程为

$$x'^2-y'^2=a^2.$$

将$x'=\sqrt{2}$，$y'=0$代入方程，得$a^2=2$，因此双曲线方程为

$$x'^2-y'^2=2. \quad ②$$

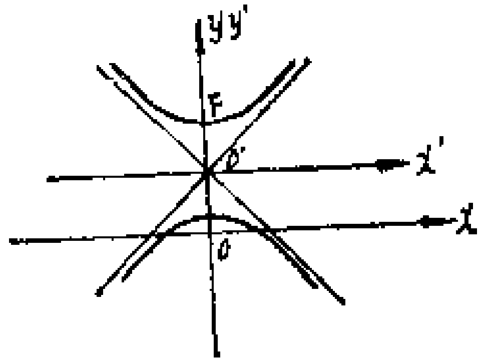
由公式①求出

$$x' = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

将其代入方程②，化简后得所求的双曲线方程

$$xy - x - y = 0.$$

22. 如图，以两渐近线的交点(0, 1)作为新坐标系的原点 o'，直线 $y=1$ 作 $o'x'$ 轴，y 轴作为 $o'y'$ 轴，得平移公式



习题 3.0—22

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y' + 1. \end{cases}$$

在新坐标系 $x'o'y'$ 中，焦点坐标为 $x'=0$，$y'=1$；两渐近线的方程为 $y' = \pm x'$. 故双曲线的方程为

$$-x'^2 + y'^2 = a^2.$$

$\because \qquad c = |o'F| = 1, \quad 2a^2 = c^2,$

$\therefore \qquad a^2 = \frac{1}{2}.$

$\therefore \qquad -x'^2 + y'^2 = \frac{1}{2}.$

利用平移公式，将 x'，y' 换成 x，y，化简后得双曲线方程

$$2x^2 - 2y^2 + 4y - 1 = 0.$$

23. 先用转轴化简方程，再用配方的办法把方程化成最简形式，得当 $k=\frac{1}{2}$时，方程表示一个点.

24. 由题意可设

$$x^2 - 2\lambda xy + 4y^2 + 2x - \lambda y$$

$$=(x+ay)\left(x+by-\frac{\lambda}{a}\right).$$

将右边展开，比较等式两边的系数，得

$$\begin{cases}a+b=-2\lambda,\\ ab=4,\\ -\dfrac{\lambda}{a}=2.\end{cases}$$

解方程组得

$$\lambda=\pm\frac{4}{\sqrt{3}},\quad a=\mp\frac{2}{\sqrt{3}},\quad b=\mp2\sqrt{3}.$$

故相应的两对直线是

$$\sqrt{3}x\mp2y=0,\quad x\mp2\sqrt{3}y+2=0.$$

25. $\lambda=\pm4$，$\mu=\mp7$，

$$x\pm y-3=0,\quad 2x\pm2y-1=0.$$

26. 方程 $x^2+xy+4x+my=0$ 表示直线时，它必定可以分解为两个一次式，把它看作关于 x 的一元二次方程 $x^2+(y+4)x+my=0$，则判别式

$$\Delta=(y+4)^2-4my$$

一定要是完全平方数，即

$$y^2+4(2-m)y+16=0$$

必为完全平方数．

$\therefore\qquad \Delta=[4(2-m)]^2-4\cdot16=0.$

$\therefore\qquad m=0$ 或 $m=4.$

(2) 当 $m=0$，方程为

$$x(x+y+4)=0.$$

二直线方程为 $x=0$ 与 $x+y+4=0$.

当 $m=4$，方程为

$$x^2+xy+4x+4y=0$$

即 $$(x+y)(x+4)=0.$$

二直线的方程为 $x+y=0$ 和 $x+4=0$.

(3) 以上四条直线所围成的图形是平行四边形，平行四边形的面积为 16.

解法二 原式可写成

$$x(x+y)+4x+my=0.$$

依题意可设

$$(x+a)(x+y+b)=x^2+xy+4x+my$$

左边展开，比较等式两边的系数，得

$$\begin{cases}a+b=4,\\ ab=0,\\ m=a.\end{cases}$$

若 $a=0$，则 $b=4$，$m=0$，二直线的方程为

$$x=0,\quad x+y+4=0.$$

若 $b=0$，则 $a=4$，于是 $m=4$，二直线方程为

$$x+4=0,\quad x+y=0.$$

下面解法同解法一.

27. 由 $Ax^2+Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2$，得

$(A-\lambda)x^2+Bxy+(C-\lambda)y^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2$.

比较系数，得

$$A-\lambda=\alpha^2,$$
$$B=2\alpha\beta,$$
$$C-\lambda=\beta^2.$$

由 $B^2=4\alpha^2\beta^2$，得到关于 λ 的二次方程

$$B^2=4(A-\lambda)(C-\lambda),$$

即

$$4\lambda^2-4(A+C)\lambda+4AC-B^2=0.$$

28. 充分性　如果 $D=0$，$E=0$，那么方程变为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+F=0.$$

设 $P(x, y)$ 为曲线上的一点，则 $P'(-x, -y)$ 亦为曲线上的点，但 P 和 P' 是关于原点的两个对称点，故曲线以原点为对称中心.

必要性　假设曲线以原点为中心．令 $y=kx$ 为通过原点的任意一条直线(k 为任意值)，这条直线与曲线有两个交点．解方程组

$$\begin{cases}Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,\\ y=kx.\end{cases}$$

得

$$(A+kB+k^2C)x^2+(D+kE)x+F=0.$$

此方程的两根就是两交点的横坐标，但原点是曲线的中心，故两交点关于原点对称，即两交点的横坐标是互为相反的数．故

$$D+kE=0.$$

但 k 为任意值，所以 $D=0$，$E=0$.

29. 因 $A\neq 0$，则原方程可看作关于 x 的二次方程，得

$$x=\frac{-(By+D)\pm\sqrt{(B^2-4AC)y^2+2(BD-2AE)y+D^2-4AF}}{2A}.$$

故方程表示二直线的充要条件是根号下关于 y 二次式为完全平方式．而根号下为完全平方式的充要条件是

$$\Delta=4(BD-2AE)^2-4(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0.$$

即

$$AE^2+B^2F+CD^2-BDE-4ACF=0.$$

而题中的行列式展开后就是这个式子.

30. 经过两已知曲线交点的曲线方程为

$$2x^2+2y^2+2x+2y-19+\lambda(2x^2+2y-1)=0,$$

即

$$(2+2\lambda)x^2+2y^2+2x+(2+2\lambda)y-19-\lambda=0.$$

因为方程代表抛物线，故必须

$$B^2-4AC=-4(2+2\lambda)\cdot 2=0.$$

$\therefore$ $$\lambda=-1.$$

因此，所求的方程为

$$y^2+x-9=0.$$

这是一条抛物线，因此它就是所求的抛物线的方程.

31．设 $P'(x', y')$ 是曲线上与 $P_1(x_1, y_1)$ 相邻的点，则

$$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0, \quad ①$$

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0, \quad ②$$

①－②，得

$$A(x_1^2-x'^2)+B(x_1y_1-x'y')+C(y_1^2-y'^2)$$
$$+D(x_1-x')+E(y_1-y')=0.$$

即

$$(x_1-x')(Ax_1+Ax'+D)+(y_1-y')(Cy_1+Cy'+E)$$
$$+B(x_1y_1-x'y')=0.$$

又 $$x_1y_1-x'y'=\frac{(x_1+x')(y_1-y')}{2}+\frac{(x_1-x')(y_1+y')}{2}.$$

所以

$$(x_1-x')\left[Ax_1+Ax'+\frac{B(y_1+y')}{2}+D\right]$$
$$+(y_1-y')\left[Cy_1+Cy'+\frac{B(x_1+x')}{2}+E\right]=0.$$

由此得

$$\frac{y_1-y'}{x_1-x'}=\frac{-\left[Ax_1+Ax'+\frac{B(y_1+y')}{2}+D\right]}{\left[Cy_1+Cy'+\frac{B(x_1+x')}{2}+E\right]}.$$

所求切线的斜率

$$k=\lim_{P'\to P_1}\frac{y_1-y'}{x_1-x'}=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{2Cy_1+Bx_1+E}.$$

代入切线方程 $y-y_1=k(x-x_1)$，整理后得

$$Ax_1x+\frac{1}{2}B(x_1y+y_1x)+Cy_1y+\frac{1}{2}D(x+x_1)$$

$$+\frac{1}{2}E(y_1+y)+F=0.$$

32. 易知点(1，1)在曲线上，利用上题的切线公式，得切线方程

$$y=x.$$

33. (1) 设方程代表的两直线为

$$ax+by=0 \text{ 和 } a_1x+b_1y=0$$

即

$$(ax+by)(a_1x+b_1y)\equiv Ax^2+Bxy+Cy^2.$$

左边展开，比较同次项的系数，得

$$aa_1=A,\ ab_1+a_1b=B,\ bb_1=C.$$

又 $k_1=-\dfrac{a}{b}$，$k_2=-\dfrac{a_1}{b_1}$，

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{a_1}{b_1}}{1+\dfrac{aa_1}{bb_1}}=\frac{ab_1-a_1b}{aa_1+bb_1}$$

∵ $(ab_1-a_1b)^2=(ab_1+a_1b)^2-4a_1ab_1b$

$=B^2-4AC,$

∴ $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\sqrt{B^2-4AC}}{A+C}.$ ①

∴ $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{B^2-4AC}}{A+C}$

(2) 当 $B^2-4AC=0$ 时，由①式可知 $\theta=0$，即两直线平行，同理，当 $A+C=0$ 时，$\theta=90°$，两直线垂直.

34. 充分性：当 $A=C\neq 0$、$B=0$ 时，方程可化为

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0,$$

配方得

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{1}{4A^2}(D^2+E^2-4AF).$$

又 $$D^2+E^2-4AF>0,$$

故上方程代表一个圆心在$\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2A}\right)$，半径为

$$r=\sqrt{\frac{1}{4A^2}(D^2+E^2-4AF)}$$

的圆.

必要性：任何一个圆心为 $C(a,\ b)$，半径为 r 的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

即

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

与方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 相对比，得

$$A=C=1\neq 0,\ B=0.$$

$$D^2+E^2-4AF=(-2a)^2+(-2b)^2-4\times 1\times(a^2+b^2-r^2)=4r^2>0$$

故二元二次方程为一圆的充要条件确如题所云.

35. 作新坐标系：以 A 为原点，AB 为 x' 轴. 设 B 点的新坐标为 $(l,\ 0)$，在此坐标系中，因为二次曲线与 x' 轴交于 A，B 两点，所以二次曲线方程可以化为

$$x'^2+b'x'y'+c'y'^2-lx'+f'y'=0. \qquad ①$$

因圆的方程是

$$x'^2+y'^2+hx'+ky'+m=0,$$

故过 A, B 的圆的方程为

$$x'^2+y'^2-lx'+ky'=0. \qquad ②$$

①－②，得

$$y'[b'x'+(c'-1)y'+(f'-k)]=0. \qquad ③$$

这是另两个交点 C, D 的坐标必须满足的条件.

因 C, D 不在直线 AB 上，所以它们的纵坐标 y_1 不等于 0，从而直线 CD 的方程是

$$b'x'+(c'-1)y'+(f'-k)=0.$$

因为 b', c' 都是定值，故直线 CD 有定向.

36. 因为 A, B, C, D 四点的横坐标与纵坐标的乘积都等于 k^2，所以 A, B, C, D 四个点的坐标满足等边双曲线方程 $xy=k^2$.

设 AC, BC, AD, BD 的斜率为 k_1, k_2, k_3, k_4 则

$$k_1=\frac{\frac{k}{c}-\frac{k}{a}}{kc-ka}=-\frac{1}{ac},\quad k_2=\frac{\frac{k}{c}-\frac{k}{b}}{kc-kb}=-\frac{1}{bc},$$

同理，$k_3=-bc$, $k_4=-ac$.

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\angle ADB=\frac{-ac+bc}{1+abc^2}=\frac{-(a-b)c}{1+abc^2}.$$

$$\operatorname{tg}\angle ACB=\frac{-\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}{1+\frac{1}{abc^2}}=\frac{(a-b)c}{1+abc^2}.$$

$$\therefore \qquad \angle ACB=180^\circ-\angle ADB,$$

即

$$\angle ACB+\angle ADB=180^\circ.$$

故 A, B, C, D 四点共圆.

37. 因圆锥曲线关于原点对称，故可设其方程为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=D.$$

将(0, 2)，(−2, 0)，(2, −8)各点坐标分别代入方程，得

$$\begin{cases}4C=D,\\4A=D,\\4A-16B+64C=D.\end{cases}$$

$$\therefore\quad A=\frac{D}{4},\ B=D,\ C=\frac{D}{4}\quad(D\neq0)$$

因此，所求的方程为

$$x^2+4xy+y^2=4.$$

方程代表双曲线.

38. 利用移轴公式

$$\begin{cases}x=x'+\dfrac{p}{1-e^2},\\y=y'.\end{cases}$$

将方程化为

$$\frac{x'^2}{\dfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y'^2}{\dfrac{p^2e^2}{1-e^2}}=1.$$

当$e<1$时，方程代表椭圆，两焦点是

$$\left(\frac{p(e^2+1)}{1-e^2},0\right),\ (p,\ 0)$$

当$e>1$时，方程代表双曲线，两焦点是

$$\left(\frac{p(e^2+1)}{1-e^2},0\right),\ (p,\ 0).$$

39. (1) 两切线的方程为

$$y=x+\frac{p}{2}\ \text{和}\ y=-x-\frac{p}{2}.$$

因此，两切线互相垂直．

(2) 两切线的交点是$O'\left(-\frac{p}{2},0\right)$．

将坐标的原点移至o'，再转轴$135°$，得到新坐标系，新坐标系的两轴就是两切线，此时抛物线的方程为

$$x'^{\frac{1}{2}}+y'^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{2}\,p)^{\frac{1}{2}}.$$

40. 由原方程得

$$(1+k)x^2+kxy+(1-k)y^2+2x+2y=0.$$

当$\Delta=k^2-4(1+k)(1-k)=5k^2-4>0$，即$|k|>\sqrt{\frac{4}{5}}$，方程代表双曲线型．当$k=2$时，是两条相交直线．

当$\Delta=k^2-4(1+k)(1-k)=0$，即$|k|=\sqrt{\frac{4}{5}}$，方程代表抛物线型．

当$\Delta=k^2-4(1+k)(1-k)<0$，即$|k|<\sqrt{\frac{4}{5}}$，方程代表椭圆型．

第 四 章

习 题 一

1. (1) $y=10$，直线；

(2) $x^2+y^2=49$，圆；

(3) $y=x$，直线；

(4) $16x^2+25y^2+96x-256=0$，椭圆；

(5) $x^2-y^2+1=0$，双曲线；

(6) $9x^2-16y^2-90x+81=0$，双曲线；

(7) $y+2x-6=0$，直线；

(8) $y^2+6x=0$，抛物线；

(9) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，椭圆；

(10) $y^2+4ax-4a^2=0$，抛物线.

2. (1) $\rho=12\operatorname{ctg}\theta\operatorname{cosec}\theta$；

(2) $\rho=4\cos\theta$；

(3) $\rho^2\cos 2\theta=20$；

(4) $\rho^2(1+3\cos^2\theta)=4$；

(5) $\rho^2(1-\sin 2\theta)-\rho\cos\theta+4=0$；

(6) $\rho^2\sin 2\theta=14$；

(7) $\rho^2\sin^2\theta+4\rho\cos\theta=4$；

(8) $\rho=2a(\sec\theta-\cos\theta)$；

(9) $\rho^2=4\cos 2\theta$；

(10) $\rho\cos(\theta-\alpha)=p$.

3. $d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$.

4. 利用$|AB|=|BC|=|AC|$.

6. (1) $\left(-5,\frac{4\pi}{3}\right)$;

(2) $\left(5,-\frac{5\pi}{3}\right)$;

(3) $\left(-5,-\frac{2\pi}{3}\right)$.

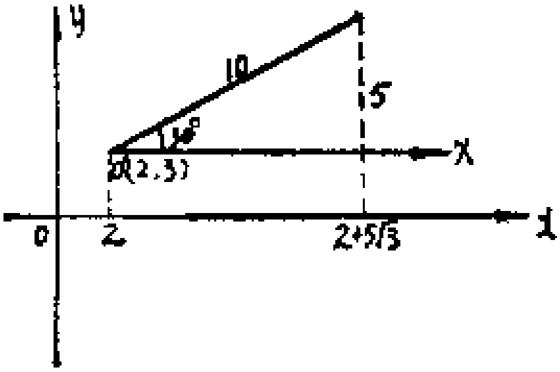
7. (1) $S=\frac{9}{4}$;

(2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$;

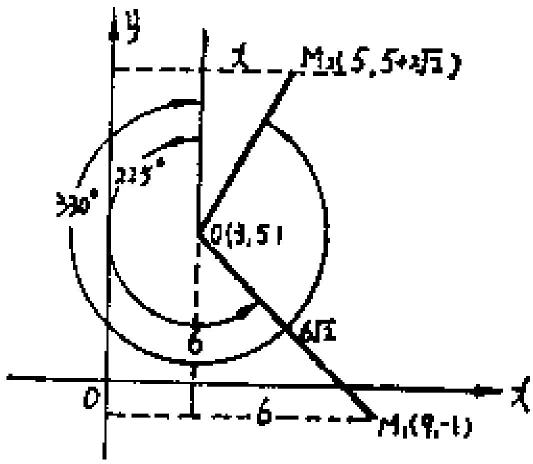
(3) $d=\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$;

(4) $\rho^2-6\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+9(\sqrt{3}-1)=0$.

8. 如图，由图可知点的直角坐标是$(2+5\sqrt{3},\ 8)$.



习题 4.1—8



习题 4.1—9

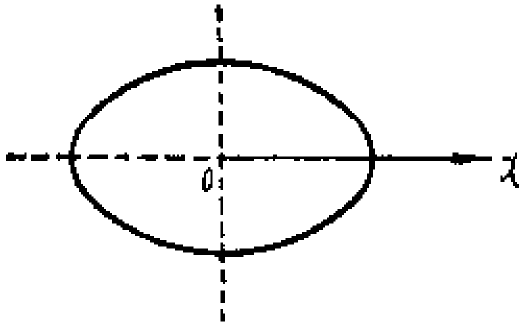
9. 如图 4.1—9，$M_1(6\sqrt{2},\ 225°)$，$M_2(4,\ 330°)$

10. (7,0)，(1,0).

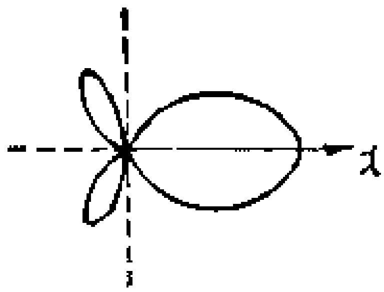
11. (1) 不经过极点；与极轴的交点为$(1,0)$及$(1,\pi)$；关

于极轴，直线$\theta=\frac{\pi}{2}$，中心对称；$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$-2\leqslant\rho\leqslant2$，如图 4.1—11A.

(2) 经过极点；与极轴相交于$(a,0)$；关于极轴对称，如图4.1—11B.



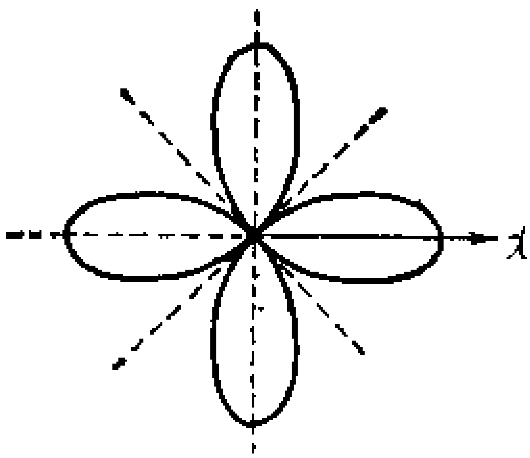
习题 4.1—11A



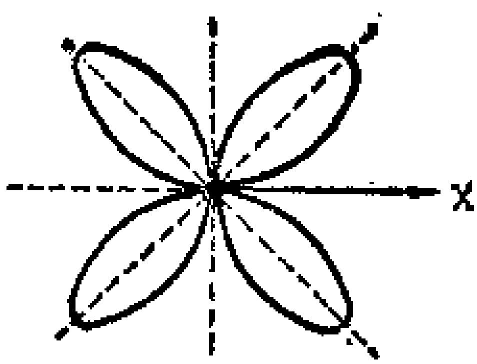
习题 4.1—11B

(3) 经过极点；关于极轴、直线$\theta=\frac{\pi}{2}$、直线$\theta=\frac{\pi}{4}$、直线$\theta=\frac{3}{4}\pi$对称. 如图 4.1—11C.

(4) 经过极点；与极轴相交于$(a,0)$；关于极轴、直线$\theta=\frac{\pi}{2}$对称，如图 4.1—11D.



习题 4.1—11C



习题 4.1—11D

12. (1) $\rho\cos\theta=\sqrt{2}$; (2) $\rho\sin\theta=\frac{3}{2}\sqrt{3}$;

(3) $\rho=\sqrt{2}$; (4) $\rho=2R\sin\theta$;

(5) $\rho=\dfrac{3}{\cos\theta-\sin\theta}$.

13. (1) $\left(6, \pm\frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$;

(3) $(0, 0)$, $\left(\pm\frac{a}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\pm\frac{a}{\sqrt[4]{2}}, \frac{3\pi}{4}\right)$;

(4) $(0,0)$, $\left(a, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(a, -\frac{3\pi}{4}\right)$;

(5) $\rho=0$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

14. $(2, 60°)$, $R=3$.

16. 将双曲线$(e>1)$的极坐标方程化为直角坐标方程：

$$\frac{\left(x+\frac{e^2p}{e^2-1}\right)^2}{\frac{e^2p^2}{(e^2-1)^2}}-\frac{y^2}{\frac{e^2p^2}{e^2-1}}=1$$

$$a^2=\frac{e^2p^2}{(e^2-1)^2}, \quad a=\frac{ep}{e^2-1},$$

$$b^2=\frac{e^2p^2}{e^2-1},$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{e^2p}{e^2-1}.$$

设一条渐近线的倾角为α，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则

$$\cos\alpha=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}.$$

另一条渐近线的倾角为$\pi-\alpha$，故两渐近线的倾角分别是arc

$\cos\frac{1}{e}$和$\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$.

两渐近线的夹角为2α，故

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$= \frac{2}{e^2} - 1 = \frac{2-e^2}{e^2},$$

$\therefore\quad 2\alpha = \arccos\left(\frac{2-e^2}{e^2}\right)$.

17. (1)和(2)：注意(ρ,θ)和$(-\rho,\ \pi+\theta)$表示同一个点；

(3) 设$M(\rho',\ \theta')$是曲线上的点，则

$$\rho'^2\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right) = \rho'^2\sin(\pi - 2\theta')$$
$$= \rho'^2\sin 2\theta' = a^2.$$

即点$M'\left(p',\ \frac{\pi}{2}-\theta'\right)$也是曲线上的点，而点$M(\rho',\theta')$和点$M'\left(p',\ \frac{\pi}{2}-\theta'\right)$关于直线$\theta=\frac{\pi}{4}$对称.

18. 先将两曲线的极坐标方程化为直角坐标方程.

19. 在圆锥曲线上另取一点$Q(\rho_2,\ \beta)$，则

$$\rho_1 = \frac{L}{1-e\cos\alpha}, \qquad ①$$

$$\rho_2 = \frac{L}{1-e\cos\beta}. \qquad ②$$

由第四章例题4可知，过p，Q两点的直线方程为

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\rho} = \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\rho_2} + \frac{\sin(\beta-\theta)}{\rho_1}$$

将①式和②式代入上式，得

$\frac{L}{\rho}\sin(\beta-\alpha) = \sin(\theta-\alpha)(1-e\cos\beta) + \sin(\beta-\theta)$

$(1-e\cos\alpha) = \{\sin(\theta-\alpha) + \sin(\beta-\theta)\} - e$

$\{\sin(\theta-\alpha)\cos\beta+\sin(\beta-\theta)\cos\alpha\}$

$$=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{2\theta-\alpha-\beta}{2}-e\{(\sin\theta\cos\alpha$$

$$-\cos\theta\sin\alpha)\cos\beta+(\sin\beta\cos\theta-\cos\beta\sin\theta)\cos\alpha\}$$

$$=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-e\cos\theta\sin(\beta-\alpha).$$

即

$$\rho=\frac{L}{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}}\cos\left(\theta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-e\cos\theta}$$

为了得到在 p 点的切线，可把 Q 无限接近 p，即置 $\alpha=\beta$，于是此方程为

$$\rho=\frac{L}{\cos(\theta-\alpha)-e\cos\theta}.$$

20. 取 AB 的中点为极点，以 OB 为极轴，如图，设 p 点坐标为 (ρ,θ)，则

$$PB^2=\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta,$$

$$PA^2=\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\pi-\theta)$$

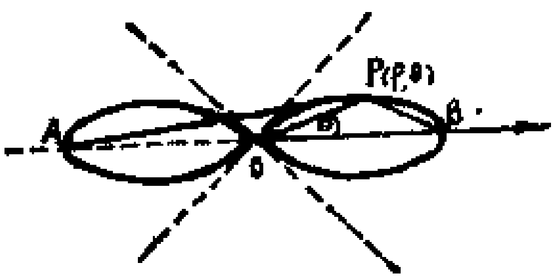
$$=\rho^2+a^2+2a\rho\cos\theta.$$

又 $PA\cdot PB=a^2$，故

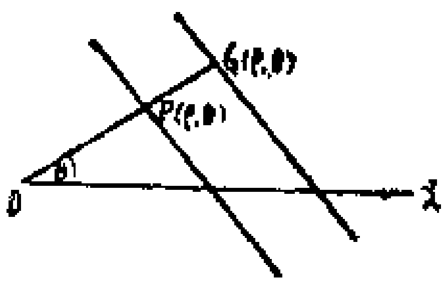
$$a^4=(\rho^2+a^2)^2-4a^2\rho^2\cos^2\theta.$$

化简后得轨迹方程

$$\rho^2=2a^2\cos 2\theta.$$



习题 4.1—20



习题 4.1—21

21. 如图，设 p 点坐标为 (ρ,θ). G 点坐标为 (ρ_1,θ)，由 $OP:PG=m:n$，得

$$\frac{OP}{OG}=\frac{m}{m+n},\quad 即\frac{\rho}{p_1}=\frac{m}{m+n},$$

$$\therefore\quad \rho_1=\frac{\rho(m+n)}{m}.$$

又 $\quad a\rho_1\cos\theta+b\rho_1\sin\theta+c=0,$

将 ρ_1 代入此式，得轨迹方程

$$a(m+n)\rho\cos\theta+b(m+n)\rho\sin\theta+cm=0.$$

此方程代表一条直线，它与直线 L 平行.

22. 以 O 为极点，极轴与 BC 垂直. 设 O 点与 BC 的距离为 a，则 p，Q 的轨迹方程是

$$\rho=a\sec\theta\pm b$$

23. 以 O 为极点，过 O 点的直径为极轴. 设定圆的直径为 a，则 p，Q 的轨迹方程是

$$\rho=a\cos\theta\pm b.$$

24. 以 O 为极点，OA 为极轴，$OA=a$，如图. 则圆和切线 LK 的方程分别为

$$\rho=a\cos\theta \text{ 和 } \rho=\frac{a}{\cos\theta}.$$

因 $OP=DE=OE-OD$，故轨迹方程为

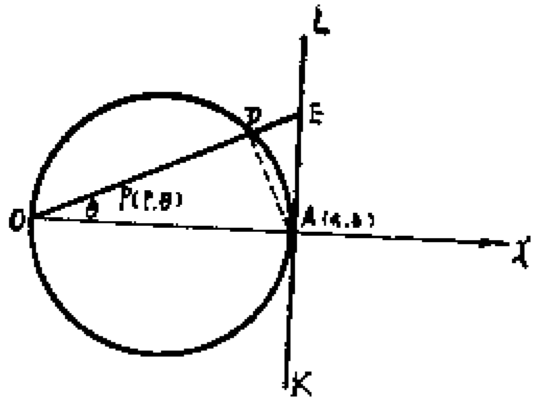
$$\rho=\frac{a}{\cos\theta}-a\cos\theta.$$

即 $\qquad \rho=a\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta.$

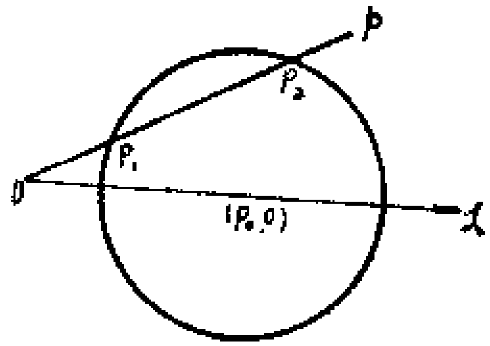
25. 设定圆的半径为 r，圆心 $O_1(p_0,O)$，如图则定圆的方程为

$$\rho^2-2r\,\rho\rho_0\cos\theta+\rho_0^2-r^2=0.$$

所引的任一直线为 $\theta=\theta'$，则 op_1 和 op_2 是方程



习题 4.1—24



习题 4.1—25

$$\rho^2-2r\rho\cos\theta'+\rho_0^2-r^2=0$$

的两根．由韦达定理得

$$op_1+op_2=2r\cos\theta',$$

$$op_1\cdot op_2=p_0^2-r^2.$$

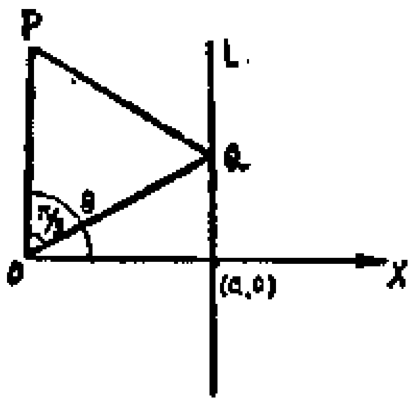
动点 p 的坐标为$(p',\ \theta')$，则

$$\rho'=\frac{2(p_0^2-r^2)}{2r\cos\theta'}.$$

因此，所求的轨迹方程为

$$\rho=\frac{p_0^2-r^2}{r\cos\theta}.$$

轨迹是一条直线．



习题 4.1—26

26．以 O 点为极点，极轴与 L 垂直，L 与 p 点的距离为 a，如图，p为(ρ,θ)、得轨迹方程

$$a=\rho\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right),$$

其中 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

27．设圆锥曲线的方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$

过焦点(即极点)的直线方程为 $\theta=\theta'$. 此直线与圆锥曲线两交点的坐标是

$$\left(\frac{ep}{1-e\cos\theta'},\ \theta'\right),\ \left(\frac{ep}{1+e\cos\theta'},\theta'+\pi\right).$$

故中点轨迹为

$$\rho=\frac{1}{2}\left[\frac{ep}{1-e\cos\theta'}-\frac{ep}{1+e\cos\theta'}\right]$$
$$=\frac{e^2p\cos\theta'}{1-e^2\cos^2\theta'}.$$

易知此方程是圆锥曲线.

28. $\overset{\frown}{ACB}$ 的方程是: $\rho=R+\frac{2k}{3\pi}\theta.\quad \left(0\leqslant\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$

$\overset{\frown}{BA}$ 的方程是: $\rho=R+4k-\frac{2k}{\pi}\theta.\ \left(\frac{3\pi}{2}\leqslant\theta<2\pi\right)$

29. $\overset{\frown}{ABE}$ 的方程是: $\rho=20,\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{23}{36}\pi\right)$

$\overset{\frown}{EC}$ 的方程是: $\rho=-3+\frac{36}{\pi}\theta,\ \left(\frac{23\pi}{36}<\theta\leqslant\pi\right)$

$\overset{\frown}{CF}$ 的方程是: $\rho=69-\frac{36}{\pi}\theta,\ \left(\pi<\theta\leqslant\frac{49}{36}\pi\right)$

$\overset{\frown}{FDA}$ 的方程是: $\rho=20.\ \left(\frac{49}{36}\pi<\theta<2\pi\right)$

习 题 二

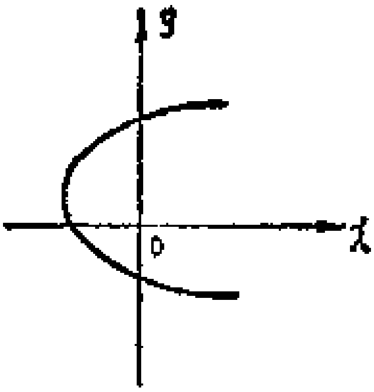
1. (1) $x=y^2-y-1$, 抛物线, 图 A;

(2) $x=2y^3$, 图 B;

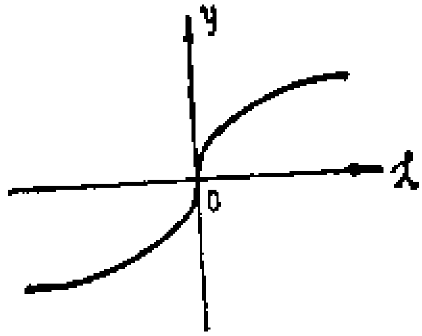
(3) $x^3+y^3-3xy=0$, 柳叶线, 图 C;

(4) $y^2(2a-x)=x^3$, 蔓叶线, 图 D;

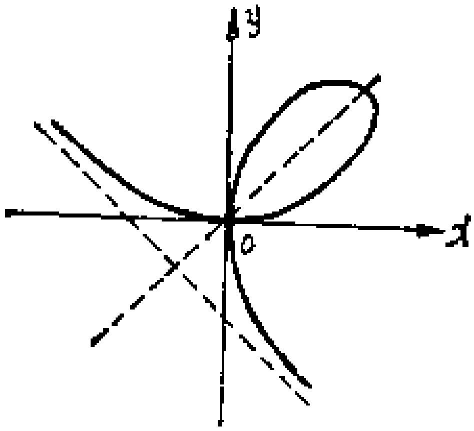
(5) $y(x^2+4a^2)=8a^3$, 箕舌线, 图E.



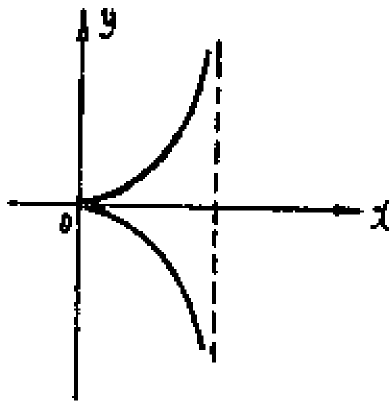
习题 4.2—1A



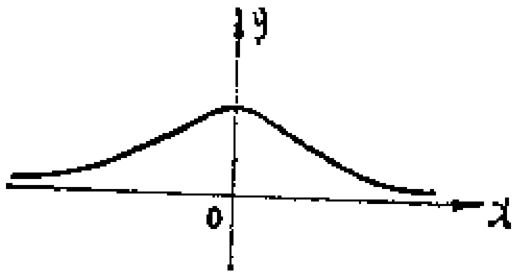
习题 4.2—1B



习题 4.2—1C



习题 4.2—1D



习题 4.2—1E

2. (1) $\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta, \\ y = \sin\theta; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \operatorname{tg}\theta + \sec\theta, \\ y = 2\operatorname{tg}\theta; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta, \\ y=2\sqrt{3}\sin\theta. \end{cases}$

3. (1) 消去参数 θ，得普通方程

$$\frac{x^2}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}=1.$$

因此方程代表椭圆.

(2) 消去参数 t，得普通方程

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=1.$$

因此方程代表双曲线.

(3) 椭圆和双曲线的焦点都在 x 轴上，且半焦距 $C=1$，因此两种曲线的焦点都是

$$F_1(-1,\ 0) \text{和} F_2(1,0).$$

4. 将两参数方程化为普通方程，得

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2} \qquad ①$$

和
$$(x+1)^2+(y+1)^2=10. \qquad ②$$

联立①和②两个方程，解方程组，得两曲线的交点坐标 $(0,2)$ 和 $(2,0)$.

5. 交点的坐标是

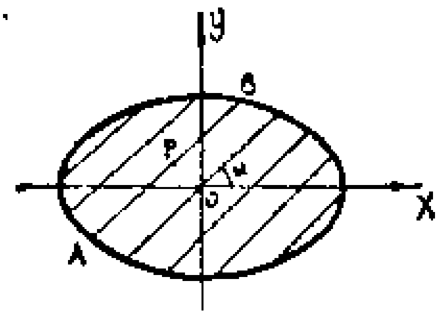
$$\begin{cases} x=\dfrac{16\pi-3\sqrt{3}}{6}, \\ y=\dfrac{3}{2}, \end{cases} \text{和} \begin{cases} x=\dfrac{20\pi+3\sqrt{3}}{6}, \\ y=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

6. (1) $\begin{cases} x=1-\dfrac{3}{5}t, \\ y=1+\dfrac{4}{5}t; \end{cases}$

(2) $\frac{13}{5}$.

7. 以椭圆为例. 如图，设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$



习题 4.2—7

它的平行弦的倾角是定值 α，又设平行弦中的任一弦 AB 的中点为 (x', y')，则弦 AB 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x'+t\cos\alpha,\\ y=y'+t\sin\alpha.\end{cases}$$

将它代入椭圆方程，整理之后得

$$(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)t^2+2(b^2x'\cos\alpha+a^2y'\sin\alpha)t+(b^2x'^2+a^2y'^2-a^2b^2)=0$$

此方程的两根为 t_1 和 t_2. 因为 p 是 AB 的中点，$|t_1|$ 和 $|t_2|$ 分别等于 $|AP|$ 和 $|PB|$，又 A，B 在 P 点的异旁，因此，$t_1=-t_2$，$t_1+t_2=0$. 依韦达定理得

$$t_1+t_2=\frac{-2(b^2x'\cos\alpha+a^2y'\sin\alpha)}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}=0,$$

即 $$b^2x'\cos\alpha+a^2y'\sin\alpha=0.$$

因此，诸平行弦的中点都在直线 $b^2x\cos\alpha+a^2y\sin\alpha=0$ 上. 对于双曲线和抛物线，可依照上述方法论证.

8. (1) $x=\frac{2p}{m^2}$，$y\frac{2p}{m}$；

(2) 切线：$m^2x-2my+2p=0$，

法线：$2m^2x+m^3y-2m^2p-4p=0$.

9. $x=2a\cos^2\theta$，$y=a\sin2\theta$，$\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

10. $x=\dfrac{a(b^2-a^2m^2)}{b^2+a^2m^2}$, $y=\dfrac{2ab^2m}{b^2+a^2m^2}$.

11. 直接消去参数 t，得交点的轨迹方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

13. **证法一** 椭圆的普通方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

直线 AR 的参数方程为

$$\begin{cases}x=-a+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha.\end{cases}$$

代入椭圆方程，得

$$t\{t[b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha]-2ab^2\cos\alpha\}=0.$$

此方程的非 o 根就是 $|AQ|$，故

$$|AQ|=\frac{2ab^2\cos\alpha}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}.$$

又 $OP\parallel AR$，OP 的参数方程为

$$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha.\end{cases}$$

代入椭圆方程，得

$$(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)t^2=a^2b^2.$$

$$t_{1,2}=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}.$$

$$\therefore\quad op^2=t_1^2=\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}\right)^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}.$$

又 $\quad |AR|=\dfrac{|AO|}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{\cos\alpha}$,

$\therefore\quad |AQ||AR|=2op^2.$

证法二 设 p 点坐标为(x_0, y_0)，则

$$op^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad k_{op} = \frac{y_0}{x_0}.$$

AR 的直线方程为

$$y = \frac{y_0}{x_0}(x + a).$$

于是可求得 R，Q 的坐标

$$R\left(0, \frac{ay_0}{x_0}\right), \quad Q\left(\frac{2x_0^2 - a^2}{a}, \frac{2x_0y_0}{a}\right).$$

故 $$|AR| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{ay_0}{x_0}\right)^2} = \frac{a}{x_0}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

$$|AQ| = \sqrt{\left(\frac{2x_0y_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{2x_0^2 - a^2}{a} + a\right)^2}$$

$$= \frac{2x_0}{a}\sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

$\therefore$ $|AR| \cdot |AQ| = 2op^2$.

14．抛物线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

过点 $p(2pt^2, 2pt)$ 的切线 L 的方程是

$$x - 2ty + 2pt^2 = 0.$$

OQ 直线的方程为

$$2tx + y = 0.$$

此直线与切线的交点为

$$M\left(\frac{-2pt^2}{1 + 4t^2}, \frac{4pt^3}{1 + 4t^2}\right).$$

因 M 是 OQ 的中点，故 Q 点坐标的参数方程是

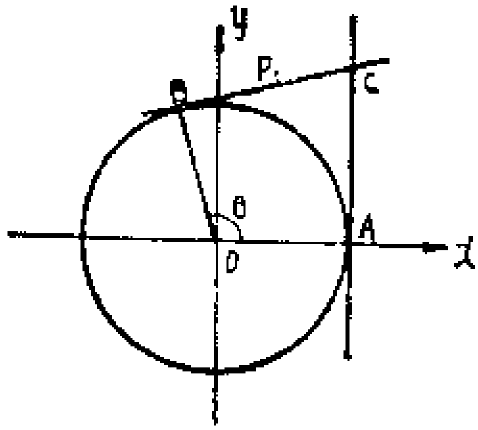
$$\begin{cases} x = \dfrac{-4pt^2}{1+4t^2}, \\ y = \dfrac{8pt^3}{1+4t^2}. \end{cases}$$

消去参数 t，得 Q 点的轨迹方程

$$x^3 + xy^2 + py^2 = 0.$$

15．如图，圆的半径为 a，A 点坐标为 $(a, 0)$，则 B 点坐标为 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$，过 B 点的切线方程为

$$x\cos\theta + y\sin\theta = a.$$



习题 4.2—15

又过 A 点的切线方程为 $x = a$.

因此 c 点坐标为

$$c\left(a, \frac{a(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right).$$

又 p 点是 BC 的中点，所以 p 点的坐标是

$$x = \frac{a + a\cos\theta}{2} = a\cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$y = \frac{1}{2}\left[a\sin\theta + \frac{a(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right]$$

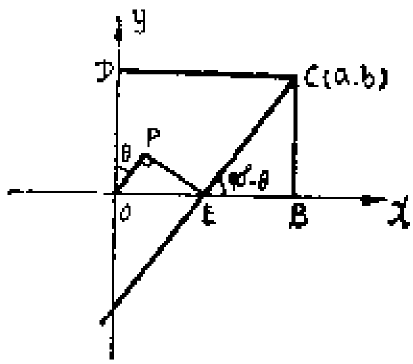
$$= \frac{a}{2}\left(\sin\theta + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right).$$

因此 p 点的轨迹方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^2\dfrac{\theta}{2}, \\ y = \dfrac{a}{2}\left(\sin\theta + \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right). \end{cases}$$

16．如图，直线 CE 的方程是

$$y - b = (x - a)\operatorname{ctg}\theta.$$



习题 4.2—16

由此求出 E 点的坐标

$$E(a-b\text{tg}\theta,\ 0).$$

又 op 的直线方程是

$$y=x\text{ctg}\,\theta.$$

求出 p 点轨迹的参数方程

$$\begin{cases}x=(a-b\text{tg}\theta)\sin^2\theta, & ①\\ y=(a\cos\theta-b\sin\theta)\sin\theta. & ②\end{cases}$$

消去参数：由②得

$$y=(a-b\text{tg}\,\theta)\cos\theta\sin\theta. \quad ③$$

①÷③，得

$$\frac{x}{y}=\text{tg}\theta,\qquad \frac{x^2}{y^2}=\text{tg}^2\,\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta},$$

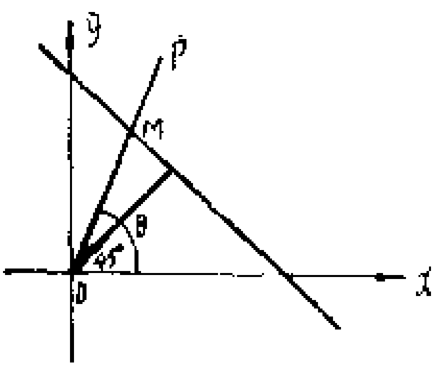
$$\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\sin^2\theta.$$

将以上各值代入①式，得普通方程

$$y(x^2+y^2)=x(ay-bx).$$

17．如图，已知直线的法式方程为

$$x\cos 45^\circ+y\sin 45^\circ-\sqrt{2}=0.$$



习题 4.2—17

故 $|OM|=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos(\theta-45^\circ)}$.

又 $|OM|\cdot|PM|=k^2$，故

$$|PM|=\frac{k^2}{|OM|}=\frac{k^2\cos(\theta-45^\circ)}{\sqrt{2}}.$$

所以 p 点轨迹的参数方程是

$$x=(|OM|+|PM|)\cos\theta$$

$$=\left[\frac{\sqrt{2}}{\cos(\theta-45^\circ)}+\frac{k^2\cos(\theta-45^\circ)}{\sqrt{2}}\right]\cos\theta$$

$$=\frac{[2+k^2\cos^2(\theta-45^\circ)]\cos\theta}{\sqrt{2}\cos(\theta-45^\circ)},$$

$$y=\frac{[2+k^2\cos^2(\theta-45°)]\sin\theta}{\sqrt{2}\cos(\theta-45°)}.$$

18．如图，直线 AH 的方程为

$y+a=x\operatorname{ctg}\theta$.

由此可以求出 H 的坐标

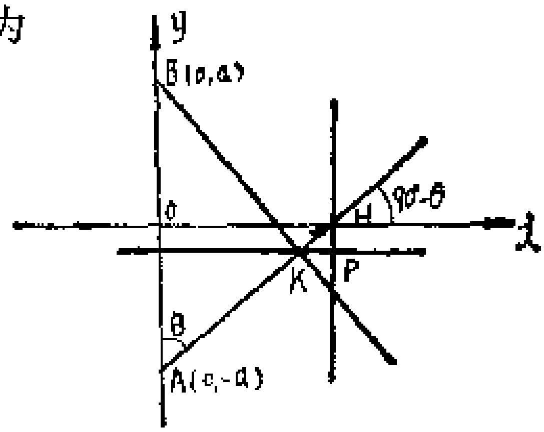
$H(a\operatorname{tg}\theta,\ 0)$.

又 BK 的直线方程是

$y-a=-x\operatorname{tg}\theta$.

因此 K 点的坐标是

$K(a\sin 2\theta,\ a\cos 2\theta)$.



习题 4.2—18

所以，p 点轨迹的参数方程是

$$\begin{cases}x=a\operatorname{tg}\theta\\ y=a\cos 2\theta\end{cases}$$

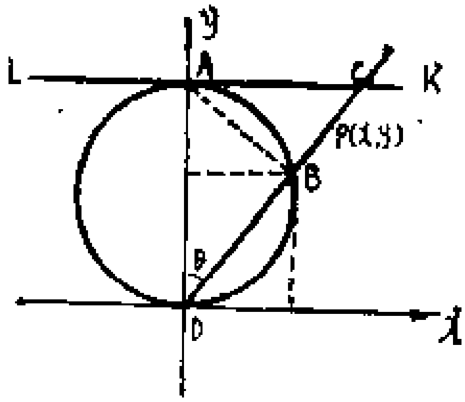
消去参数 θ，得普通方程

$$y=\frac{a(a^2-x^2)}{a^2+x^2}.$$

19．如图．设 $OA=2a$，则 $|OB|=2a\cos\theta$，$AC=2a\operatorname{tg}\theta$．因此 B,C 的坐标是

$B(2a\sin\theta\cos\theta,\ 2a\cos^2\theta)$,

$C(2a\operatorname{tg}\theta,\ 2a)$.



习题 4.2—19

BC 的中点 P 的坐标是

$$\begin{cases}x=a\sin\theta(\cos\theta+\sec\theta),\\ y=a\cos\theta(\cos\theta+\sec\theta).\end{cases}$$

消去参数：将参数方程写成

$$\begin{cases}x=a\sin\theta\cos\theta(2+\operatorname{tg}^2\theta), & ①\\ y=a\cos^2\theta(2+\operatorname{tg}^2\theta). & ②\end{cases}$$

①÷②，得

$$\frac{x}{y}=\operatorname{tg}\theta,\quad \frac{x^2}{y^2}=\operatorname{tg}^2\theta,$$

$$\frac{x^2+y^2}{y^2}=\frac{1}{\cos^2\theta},$$

$$\cos^2\theta=\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

将 $\operatorname{tg}\theta$，$\cos^2\theta$ 的值代入(2)式，得普通方程

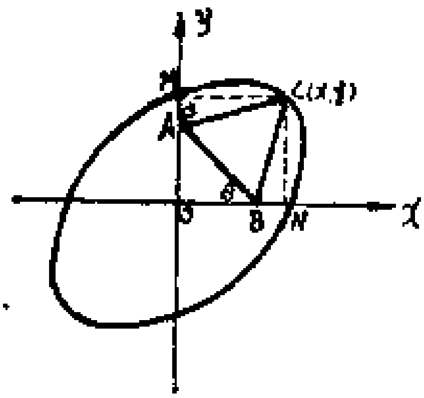
$$y(x^2+y^2)=a(x^2+2y^2)$$

20．如图，$CN\perp ox$，$CM\perp oy$，C 点的坐标是

$$x=CM=|AC|\sin\alpha=a\sin[180^\circ-60^\circ-(90^\circ-\theta)]$$
$$=a\sin(30^\circ+\theta),$$
$$y=NC=|BC|\sin(120^\circ-\theta)=a\cos(30^\circ-\theta).$$

因此，C 点的轨迹的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\sin(30^\circ+\theta)\\ y=a\cos(30^\circ-\theta)\end{cases}$$



习题 4.2—20

或

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta) & ①\\ y=\dfrac{a}{2}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta). & ②\end{cases}$$

消去参数．由①、②组成的方程组解得

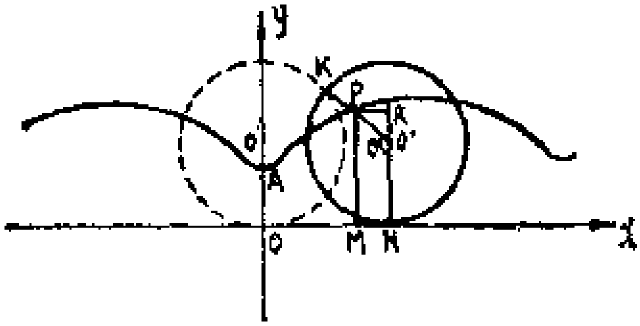
$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}x-y}{a},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}y-x}{a}.$$

利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，得 c 点轨迹的普通方程

$$4x^2-4\sqrt{3}xy+4y^2-a^2=0.$$

21．如图．设动圆的半径为 a，$o'p=h$．p 点的初始位置在 A 处，取 $\angle NO'P=\theta$ 为参数，θ 以弧度计．因圆 o' 在 ox 轴

上作无滑动地滚动，故 $ON=\overset{\frown}{KN}$.



习题 4.2—21

$$x=OM=ON-MN=\overset{\frown}{NK}-PR=a\theta-h\sin\theta,$$
$$y=MP=No'+Ro'=a+h\cos(\pi-\theta)=a-h\cos\theta.$$

因此，P 点轨迹的参数方程是

$$\begin{cases}x=a\theta-h\sin\theta,\\ y=a-h\cos\theta.\end{cases}$$

22．设过 $R(a,\ b)$ 点的直线方程为

$$y-b=k(x-a),$$

其中 k 是参数，再分别令 $x=0$，$y=0$，求得 A, B 两点的截距．设 p 点的坐标是 $(x,\ y)$，则

$$x=\frac{1}{2}(OA),\quad y=\frac{1}{2}(OB).$$

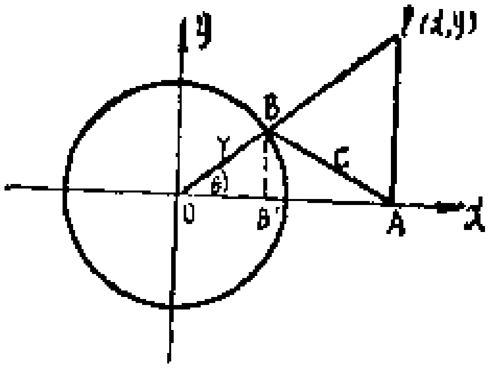
由此求得 p 点轨迹的参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{ak^2-bk}{k^2+1},\\[2ex] y=\dfrac{b-ak}{k^2+1}.\end{cases}$$

消去参数，得 p 点轨迹的普通方程

$$(2x-a)(2y-b)=ab.$$

23. 如图，设 $OB=r$，$AB=C$，r、c 是定长. 又设 p 点的坐标为 (x, y). 以 $\angle BOA=\theta$ 作为参数，则 B 点坐标为 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.



习题 4.2—23

$$|AB'|=\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta}.$$

A 点的横坐标与 P 点的横坐标相同，故

$$x=r\cos\theta+\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta}.$$

又 $\quad \dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}\theta$，故

$$y=x\operatorname{tg}\theta=(r\cos\theta+\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta})\operatorname{tg}\theta$$

因此，所求点的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases}x=r\cos\theta+\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta},\\ y=(r\cos\theta+\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta})\operatorname{tg}\theta.\end{cases}$$

24. (1) 抛物线的顶点坐标是

$$x=-\frac{2m+1}{2},\quad y=-\frac{4m+5}{4}.$$

消去参数 m，得顶点所在的直线方程

$$l_1:\ y=x-\frac{3}{4}.$$

(2) 设平行于 l_1 的直线为

$$l:\ y=x+a.$$

代入抛物线方程，得

$$x+m=\pm\sqrt{a+1}.$$

因此，当 $a\geqslant -1$ 时，l 和抛物线相交.

(3) l 和抛物线的交点的横坐标是

$$-m-\sqrt{a+1} \text{ 和 } -m+\sqrt{a+1}.$$

又 l 的倾角为 45°，故 l 被抛物线截出的线段长为

$$[(-m-\sqrt{a+1})-(-m-\sqrt{a+1})]\sqrt{2}=2\sqrt{2(a+1)},$$

而这长度与 m 无关，因此直线 l 被抛物线截出的线段都相等.

25. 由原式得

$$-x+3y+11+m(2x+y-1)=0.$$

因此原方程表示过直线 $-x+3y+11=0$ 和 $2x+y-1=0$ 交点的直线族.

26. 令 $m=n=0$，得

$$x^2+y^2-8=0. \quad ①$$

再令 $m=2$，$n=0$，得

$$x^2+y^2-4x=0. \quad ②$$

联立①和②两个方程，得两曲线的交点坐标

$$\begin{cases}x_1=2\\y=-2\end{cases} \text{和} \begin{cases}x_2=2\\y_2=2.\end{cases}$$

将点 $(2,-2)$ 的坐标代入原方程，则等式

$$2^2+(-2)^2-2m\cdot 2-2n\cdot(-2)+4(m-n-2)=0$$

对于任意的实数 m 和 n 都是成立的．因此，原方程代表的曲线族经过定点 $(2,-2)$.

27. 原直线方程为

$$x\,\mathrm{tg}\,\theta+y-\mathrm{tg}\,\theta=0, \quad ①$$

设切点为 $p(x_1,y_1)$，则切线方程是

$$x_1x-y_1y\cos^2\theta=-1. \quad ②$$

①和②代表同一条直线，故

$$\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{x_1}=\frac{1}{-y_1\cos^2\theta}=\frac{-\mathrm{tg}\,\theta}{1}.$$

由此求得

$$x_1=-1,\ \ y_1=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}.$$

又 $$x_1\operatorname{tg}\theta+y_1-\operatorname{tg}\theta=0,$$

故 $$-\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\operatorname{tg}\theta=0.$$

即 $$\sin^2\theta=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

由此可以求出切点的坐标

$$(-1,\ 2)\text{和}(-1,\ -2).$$

28. 由方程组

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ y=\dfrac{2}{t}(x-t-1). \end{cases}$$

消去 x，得

$$y^2-2ty-4t-4=0.$$

中点坐标为

$$\begin{cases} y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2t}{2}=t, \\ x=\dfrac{t^2}{2}+t+1. \end{cases}$$

消去参数 t，得中点的轨迹方程

$$(y+1)^2=2x-1.$$

由方程组

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ (y+1)^2=2x-1 \end{cases}$$

得 $$(x-1)^2=0.$$

于是方程组只有一组解，故直线和抛物线相切。

后　　记

为了帮助中学生和知识青年掌握《平面解析几何》的基础知识、基本方法和提高解题能力；同时，给有关教师提供教学上的参考资料，在广泛地参阅了各种有关资料的基础上，我们编写了《解析几何解题引导》一书.

全书依据现行中学数学教材中有关解析几何的内容编写，并作了适当的充实和提高.书中各章节均包括概述、例题和习题三个部分.概述部分意在小结归纳各章节的基础知识；选择例题时注意了它们的代表性、典型性和综合性，重在引导、启发读者掌握解题方法和技巧；习题经过精选，遵循由易到难的原则，尽量避免与现行教材重复或雷同.为了方便读者，书后附有习题的解答和提示.

本书第一章由张硕才编写；第二章至第四章由刘佛清编写，全书由华中师范学院陈森林副教授审阅.杨辉同志为本书编写做了许多组织工作并绘制了各章节概述中的表格，在此表示感谢.

限于水平，疏忽、不当之处，敬请读者批评指正.

编　　者

[General Information]
书名=解析几何解题引导
作者=刘佛清　　张硕才编
页数=357
SS号=11020462
出版日期=1981年10月第1版

前言
目录
目　　　　录