第二十四章　时间序列模型

时间序列是按时间顺序排列的、随时间变化且相互关联的数据序列。分析时间序列的方法构成数据分析的一个重要领域，即时间序列分析。

时间序列根据所研究的依据不同，可有不同的分类。

1．按所研究的对象的多少分，有一元时间序列和多元时间序列。

2．按时间的连续性可将时间序列分为离散时间序列和连续时间序列两种。

3．按序列的统计特性分，有平稳时间序列和非平稳时间序列。如果一个时间序列的概率分布与时间t无关，则称该序列为严格的（狭义的）平稳时间序列。如果序列的一、二阶矩存在，而且对任意时刻t满足：

（1）均值为常数

（2）协方差为时间间隔τ的函数。

则称该序列为宽平稳时间序列，也叫广义平稳时间序列。我们以后所研究的时间序列主要是宽平稳时间序列。

4．按时间序列的分布规律来分，有高斯型时间序列和非高斯型时间序列。

§1　确定性时间序列分析方法概述

时间序列预测技术就是通过对预测目标自身时间序列的处理，来研究其变化趋势的。一个时间序列往往是以下几类变化形式的叠加或耦合。

（1）长期趋势变动。它是指时间序列朝着一定的方向持续上升或下降，或停留在某一水平上的倾向，它反映了客观事物的主要变化趋势。

（2）季节变动。

（3）循环变动。通常是指周期为一年以上，由非季节因素引起的涨落起伏波形相似的波动。

（4）不规则变动。通常它分为突然变动和随机变动。

通常用T_t表示长期趋势项，S_t表示季节变动趋势项，C_t表示循环变动趋势项，R_t表示随机干扰项。常见的确定性时间序列模型有以下几种类型：

（1）加法模型

$$y_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

（2）乘法模型

$$y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot R_t$$

（3）混合模型

$$y_t = T_t \cdot S_t + R_t$$

$$y_t = S_t + T_t \cdot C_t \cdot R_t$$

其中y_t是观测目标的观测记录，$E(R_t)=0$，$E(R_t^2)=\sigma^2$。

如果在预测时间范围以内，无突然变动且随机变动的方差σ^2较小，并且有理由认为过去和现在的演变趋势将继续发展到未来时，可用一些经验方法进行预测。

§2　移动平均法

移动平均法是根据时间序列资料逐渐推移，依次计算包含一定项数的时序平均数，以反映长期趋势的方法。当时间序列的数值由于受周期变动和不规则变动的影响，起伏较大，不易显示出发展趋势时，可用移动平均法，消除这些因素的影响，分析、预测序

列的长期趋势。

移动平均法有简单移动平均法，加权移动平均法，趋势移动平均法等。

2.1 简单移动平均法

设观测序列为 $y_1,\cdots,y_T$，取移动平均的项数 $N<T$。一次简单移动平均值计算公式为：

$$M_t^{(1)}=\frac{1}{N}(y_t+y_{t-1}+\cdots+y_{t-N+1})$$
$$=\frac{1}{N}(y_{t-1}+\cdots+y_{t-N})+\frac{1}{N}(y_t-y_{t-N})=M_{t-1}^{(1)}+\frac{1}{N}(y_t-y_{t-N}) \qquad (1)$$

当预测目标的基本趋势是在某一水平上下波动时，可用一次简单移动平均方法建立预测模型：

$$\hat{y}_{t+1}=M_t^{(1)}=\frac{1}{N}(\hat{y}_t+\cdots+\hat{y}_{t-N+1}),\ t=N,N+1,\cdots, \qquad (2)$$

其预测标准误差为：

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{t=N+1}^{T}(\hat{y}_t-y_t)^2}{T-N}}, \qquad (3)$$

最近 N 期序列值的平均值作为未来各期的预测结果。一般 N 取值范围：$5\le N\le 200$。当历史序列的基本趋势变化不大且序列中随机变动成分较多时，N 的取值应较大一些。否则 N 的取值应小一些。在有确定的季节变动周期的资料中，移动平均的项数应取周期长度。选择最佳 N 值的一个有效方法是，比较若干模型的预测误差。预测标准误差最小者为好。

例 1 某企业 1 月～11 月份的销售收入时间序列如表 1 示。试用一次简单滑动平均法预测第 12 月份的销售收入。

表 1 企业销售收入

月份 t	1	2	3	4	5	6
销售收入 y_t	533.8	574.6	606.9	649.8	705.1	772.0
月份 t	7	8	9	10	11	
销售收入 y_t	816.4	892.7	963.9	1015.1	1102.7	

解： 分别取 $N=4, N=5$ 的预测公式

$$\hat{y}_{t+1}^{(1)}=\frac{y_t+y_{t-1}+y_{t-2}+y_{t-3}}{4},\quad t=4,5,\cdots,11$$

$$\hat{y}_{t+1}^{(2)}=\frac{y_t+y_{t-1}+y_{t-2}+y_{t-3}+y_{t-4}}{5},\quad t=5,\cdots,11$$

当 $N=4$ 时，预测值 $\hat{y}_{12}^{(1)}=993.6$，预测的标准误差为

$$S_1=\sqrt{\frac{\sum_{t=5}^{11}(\hat{y}_t^{(1)}-y_t)^2}{11-4}}=150.5$$

当 $N=5$ 时，预测值 $\hat{y}_{12}^{(2)}=182.4$，预测的标准误差为

$$S_2=\sqrt{\frac{\sum_{t=6}^{11}(\hat{y}_t^{(2)}-y_t)^2}{11-5}}=958.2$$

计算结果表明，$N=4$ 时，预测的标准误差较小，所以选取 $N=4$。预测第 12 月份的销售收入为 993.6。

计算的 Matlab 程序如下：

```
clc,clear
y=[533.8   574.6   606.9   649.8    705.1   772.0   816.4   892.7   963.9   1015.1
1102.7];
m=length(y);
n=[4,5];     %n 为移动平均的项数
for i=1:length(n)
     %由于 n 的取值不同，yhat 的长度不一致，下面使用了细胞数组
     for j=1:m-n(i)+1
          yhat{i}(j)=sum(y(j:j+n(i)-1))/n(i);
     end
     y12(i)=yhat{i}(end);
     s(i)=sqrt(mean((y(n(i)+1:m)-yhat{i}(1:end-1)).^2));
end
y12,s
```

简单移动平均法只适合做近期预测，而且是预测目标的发展趋势变化不大的情况。如果目标的发展趋势存在其它的变化，采用简单移动平均法就会产生较大的预测偏差和滞后。

2.2 加权移动平均法

在简单移动平均公式中，每期数据在求平均时的作用是等同的。但是，每期数据所包含的信息量不一样，近期数据包含着更多关于未来情况的信心。因此，把各期数据等同看待是不尽合理的，应考虑各期数据的重要性，对近期数据给予较大的权重，这就是加权移动平均法的基本思想。

设时间序列为 $y_1,y_2,\cdots,y_t,\cdots$；加权移动平均公式为

$$M_{tw}=\frac{w_1y_t+w_2y_2+\cdots+w_Ny_{t-N+1}}{w_1+w_2+\cdots+w_N},\quad t\ge N \tag{4}$$

式中 M_{tw} 为 t 期加权移动平均数；w_i 为 y_{t-i+1} 的权数，它体现了相应的 y_t 在加权平均数中的重要性。

利用加权移动平均数来做预测，其预测公式为

$$\hat{y}_{t+1}=M_{tw} \tag{5}$$

即以第 t 期加权移动平均数作为第 $t+1$ 期的预测值。

例 2　我国 1979～1988 年原煤产量如表 2 所示，试用加权移动平均法预测 1989 年的产量。

表 2　我国原煤产量统计数据及加权移动平均预测值表

年份	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
原煤产量 y_t	6.35	6.20	6.22	6.66	7.15	7.89	8.72	8.94	9.28	9.8
三年加权移动平均预测值				6.235	6.4367	6.8317	7.4383	8.1817	8.6917	9.0733

相对误差（%）				6.38	9.98	13.41	14.7	8.48	6.34	7.41

解　取 $w_1 = 3, w_2 = 2, w_3 = 1$，按预测公式

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{3y_t + 2y_{t-1} + y_{t-2}}{3+2+1}$$

计算三年加权移动平均预测值，其结果列于表 2 中。1989 年我国原煤产量的预测值为（亿吨）

$$\hat{y}_{1989} = \frac{3\times 9.8 + 2\times 9.28 + 8.94}{6} = 9.48$$

这个预测值偏低，可以修正。其方法是：先计算各年预测值与实际值的相对误差，例如 1982 年为

$$\frac{6.66 - 6.235}{6.66} = 6.38\%$$

将相对误差列于表 2 中，再计算总的平均相对误差。

$$\left(1 - \frac{\sum \hat{y}_t}{\sum y_t}\right)\times 100\% = (1 - \frac{52.89}{58.44})\times 100\% = 9.5\%$$

由于总预测值的平均值比实际值低9.5%，所以可将 1989 年的预测值修正为

$$\frac{9.48}{1-9.5\%} = 10.4788$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
y=[6.35 6.20   6.22   6.66   7.15   7.89   8.72   8.94   9.28
9.8];
w=[1/6;2/6;3/6];
m=length(y);n=3;
for i=1:m-n+1
   yhat(i)=y(i:i+n-1)*w;
end
yhat
err=abs(y(n+1:m)-yhat(1:end-1))./y(n+1:m)
T_err=1-sum(yhat(1:end-1))/sum(y(n+1:m))
y1989=yhat(end)/(1-T_err)
```

在加权移动平均法中，w_t 的选择，同样具有一定的经验性。一般的原则是：近期数据的权数大，远期数据的权数小。至于大到什么程度和小到什么程度，则需要按照预测者对序列的了解和分析来确定。

2.3　趋势移动平均法

简单移动平均法和加权移动平均法，在时间序列没有明显的趋势变动时，能够准确反映实际情况。但当时间序列出现直线增加或减少的变动趋势时，用简单移动平均法和加权移动平均法来预测就会出现滞后偏差。因此，需要进行修正，修正的方法是作二次移动平均，利用移动平均滞后偏差的规律来建立直线趋势的预测模型。这就是趋势移动平均法。

一次移动的平均数为

$$M_t^{(1)}=\frac{1}{N}(y_t+y_{t-1}+\cdots+y_{t-N+1})$$

在一次移动平均的基础上再进行一次移动平均就是二次移动平均，其计算公式为

$$M_t^{(2)}=\frac{1}{N}(M_t^{(1)}+\cdots+M_{t-N+1}^{(1)})=M_{t-1}^{(2)}+\frac{1}{N}(M_t^{(1)}-M_{t-N}^{(1)}) \tag{6}$$

下面讨论如何利用移动平均的滞后偏差建立直线趋势预测模型。

设时间序列$\{y_t\}$从某时期开始具有直线趋势，且认为未来时期也按此直线趋势变化，则可设此直线趋势预测模型为

$$\hat{y}_{t+T}=a_t+b_tT\ ，\ T=1,2,\cdots \tag{7}$$

其中t为当前时期数；T为由t至预测期的时期数；a_t为截距；b_t为斜率。两者又称为平滑系数。

现在，我们根据移动平均值来确定平滑系数。由模型（7）可知

$$a_t=y_t$$

$$y_{t-1}=y_t-b_t$$

$$y_{t-2}=y_t-2b_t$$

$$\cdots$$

$$y_{t-N+1}=y_t-(N-1)b_t$$

所以

$$M_t^{(1)}=\frac{y_t+y_{t-1}+\cdots+y_{t-N+1}}{N}=\frac{y_t+(y_t-b_t)+\cdots+[y_t-(N-1)b_t]}{N}$$

$$=\frac{Ny_t-[1+2+\cdots+(N-1)]b_t}{N}=y_t-\frac{N-1}{2}b_t$$

因此

$$y_t-M_t^{(1)}=\frac{N-1}{2}b_t \tag{8}$$

由式（7），类似式（8）的推导，可得

$$y_{t-1}-M_{t-1}^{(1)}=\frac{N-1}{2}b_t \tag{9}$$

所以

$$y_t-y_{t-1}=M_t^{(1)}-M_{t-1}^{(1)}=b_t \tag{10}$$

类似式（8）的推导，可得

$$M_t^{(1)}-M_t^{(2)}=\frac{N-1}{2}b_t \tag{11}$$

于是，由式（8）和式（11）可得平滑系数的计算公式为

$$\begin{cases} a_t=2M_t^{(1)}-M_t^{(2)} \\ b_t=\dfrac{2}{N-1}(M_t^{(1)}-M_t^{(2)}) \end{cases} \tag{12}$$

例 3　我国 1965～1985 年的发电总量如表 3 所示，试预测 1986 年和 1987 年的发电总量。

表 3　我国发电量及一、二次移动平均值计算表

年份	t	发电总量 y_t	一次移动平均，$N=6$	二次移动平均，$N=6$
1965	1	676		
1966	2	825		
1967	3	774		
1968	4	716		
1969	5	940		
1970	6	1159	848.3	
1971	7	1384	966.3	
1972	8	1524	1082.8	
1973	9	1668	1231.8	
1974	10	1688	1393.8	
1975	11	1958	1563.5	1181.1
1976	12	2031	1708.8	1324.5
1977	13	2234	1850.5	1471.9
1978	14	2566	2024.2	1628.8
1979	15	2820	2216.2	1792.8
1980	16	3006	2435.8	1966.5
1981	17	3093	2625	2143.4
1982	18	3277	2832.7	2330.7
1983	19	3514	3046	2530
1984	20	3770	3246.7	2733.7
1985	21	4107	3461.2	2941.2

解　由散点图 1 可以看出，发电总量基本呈直线上升趋势，可用趋势移动平均法来预测。

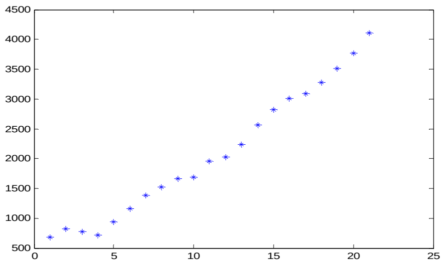

图 1　原始数据散点图

取 $N=6$，分别计算一次和二次移动平均值并列于表 3 中。

$$M_{21}^{(1)}=3461.2\,,\quad M_{21}^{(2)}=2941.2$$

再由公式（12），得

$$a_{21}=2M_{21}^{(1)}-M_{21}^{(2)}=3981.1$$

$$b_{21}=\frac{2}{6-1}(M_{21}^{(1)}-M_{21}^{(2)})=208$$

于是，得 $t=21$ 时直线趋势预测模型为

$$\hat{y}_{21+T}=3981.1+208T$$

预测 1986 年和 1987 年的发电总量为

$$\hat{y}_{1986}=\hat{y}_{22}=\hat{y}_{21+1}=4192.1$$

$$\hat{y}_{1987}=\hat{y}_{23}=\hat{y}_{21+2}=4397.1$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load y.txt    %把原始数据保存在纯文本文件 y.txt 中
m1=length(y);
n=6;    %n 为移动平均的项数
for i=1:m1-n+1
    yhat1(i)=sum(y(i:i+n-1))/n;
end
yhat1
m2=length(yhat1);
for i=1:m2-n+1
    yhat2(i)=sum(yhat1(i:i+n-1))/n;
end
yhat2
plot(1:21,y,'*')
a21=2*yhat1(end)-yhat2(end)
b21=2*(yhat1(end)-yhat2(end))/(n-1)
y1986=a21+b21
y1987=a21+2*b21
```

趋势移动平均法对于同时存在直线趋势与周期波动的序列，是一种既能反映趋势变化，又可以有效地分离出来周期变动的方法。

§3 指数平滑法

一次移动平均实际上认为最近 N 期数据对未来值影响相同，都加权 $\frac{1}{N}$；而 N 期以前的数据对未来值没有影响，加权为 0。但是，二次及更高次移动平均数的权数却不是 $\frac{1}{N}$，且次数越高，权数的结构越复杂，但永远保持对称的权数，即两端项权数小，中间项权数大，不符合一般系统的动态性。一般说来历史数据对未来值的影响是随时间间隔的增长而递减的。所以，更切合实际的方法应是对各期观测值依时间顺序进行加权平均作为预测值。指数平滑法可满足这一要求，而且具有简单的递推形式。

指数平滑法根据平滑次数的不同，又分为一次指数平滑法、二次指数平滑法和三次指数平滑法等，分别介绍如下。

3.1 一次指数平滑法

1．预测模型

设时间序列为 $y_1, y_2, \cdots, y_t, \cdots$，$\alpha$ 为加权系数，$0<\alpha<1$，一次指数平滑公式为：

$$S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}^{(1)} = S_{t-1}^{(1)} + \alpha(y_t - S_{t-1}^{(1)}) \tag{13}$$

式（13）是由移动平均公式改进而来的。由式（1）知，移动平均数的递推公式为

$$M_t^{(1)} = M_{t-1}^{(1)} + \frac{y_t - y_{t-N}}{N}$$

以 $M_{t-1}^{(1)}$ 作为 y_{t-N} 的最佳估计，则有

$$M_t^{(1)} = M_{t-1}^{(1)} + \frac{y_t - M_{t-1}^{(1)}}{N} = \frac{y_t}{N} + \left(1-\frac{1}{N}\right)M_{t-1}^{(1)}$$

令$\alpha = \dfrac{1}{N}$，以S_t代替$M_t^{(1)}$，即得式（13）

$$S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(1)}$$

为进一步理解指数平滑的实质，把式（13）依次展开，有

$$S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1-\alpha)[\alpha y_{t-1} + (1-\alpha) S_{t-2}^{(1)}] = \cdots = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j y_{t-j} \qquad (14)$$

（14）式表明$S_t^{(1)}$是全部历史数据的加权平均，加权系数分别为$\alpha, \alpha(1-\alpha), \alpha(1-\alpha)^2, \cdots$；显然有

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha (1-\alpha)^j = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1$$

由于加权系数符合指数规律，又具有平滑数据的功能，故称为指数平滑。

以这种平滑值进行预测，就是一次指数平滑法。预测模型为

$$\hat{y}_{t+1} = S_t^{(1)}$$

即

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t \qquad (15)$$

也就是以第t期指数平滑值作为$t+1$期预测值。

2．加权系数的选择

在进行指数平滑时，加权系数的选择是很重要的。由式（15）可以看出，α的大小规定了在新预测值中新数据和原预测值所占的比重。α值越大，新数据所占的比重就愈大，原预测值所占的比重就愈小，反之亦然。若把式（15）改写为

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t) \qquad (16)$$

则从上式可看出，新预测值是根据预测误差对原预测值进行修正而得到的。α的大小则体现了修正的幅度，α值愈大，修正幅度愈大；α值愈小，修正幅度也愈小。

若选取$\alpha = 0$，则$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t$，即下期预测值就等于本期预测值，在预测过程中不考虑任何新信息；若选取$\alpha = 1$，则$\hat{y}_{t+1} = y_t$，即下期预测值就等于本期观测值，完全不相信过去的信息。这两种极端情况很难做出正确的预测。因此，α值应根据时间序列的具体性质在 0～1 之间选择。具体如何选择一般可遵循下列原则：①如果时间序列波动不大，比较平稳，则α应取小一点，如（0.1～0.5）。以减少修正幅度，使预测模型能包含较长时间序列的信息；②如果时间序列具有迅速且明显的变动倾向，则α应取大一点，如（0.6～0.8）。使预测模型灵敏度高一些，以便迅速跟上数据的变化。

在实用上，类似移动平均法，多取几个α值进行试算，看哪个预测误差小，就采用哪个。

3．初始值的确定

用一次指数平滑法进行预测，除了选择合适的α外，还要确定初始值$s_0^{(1)}$。初始值是由预测者估计或指定的。当时间序列的数据较多，比如在 20 个以上时，初始值对以后的预测值影响很少，可选用第一期数据为初始值。如果时间序列的数据较少，在 20 个以下时，初始值对以后的预测值影响很大，这时，就必须认真研究如何正确确定初始值。一般以最初几期实际值的平均值作为初始值。

例 4　某市 1976～1987 年某种电器销售额如表 4 所示。试预测 1988 年该电器销售额。

解　采用指数平滑法，并分别取$\alpha = 0.2, 0.5$和0.8进行计算，初始值

$$S_0^{(1)} = \frac{y_1 + y_2}{2} = 51$$

即

$$\hat{y}_1 = S_0^{(1)} = 51$$

按预测模型

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t$$

计算各期预测值，列于表 4 中。

表 4　某种电器销售额及指数平滑预测值计算表　（单位：万元）

年份	t	实际销售额 y_t	预测值 $\hat{y}_t$ $\alpha = 0.2$	预测值 $\hat{y}_t$ $\alpha = 0.5$	预测值 $\hat{y}_t$ $\alpha = 0.8$
1976	1	50	51	51	51
1977	2	52	50.8	50.5	50.2
1978	3	47	51.04	51.25	51.64
1979	4	51	50.23	49.13	47.93
1980	5	49	50.39	50.06	50.39
1981	6	48	50.11	49.53	49.28
1982	7	51	49.69	48.77	48.26
1983	8	40	49.95	49.88	50.45
1984	9	48	47.96	44.94	42.09
1985	10	52	47.97	46.47	46.82
1986	11	51	48.77	49.24	50.96
1987	12	59	49.22	50.12	50.99

从表 4 可以看出，$\alpha = 0.2, 0.5$和0.8时，预测值是很不相同的。究竟α取何值为好，可通过计算它们的预测标准误差S，选取使S较小的那个α值。预测的标准误差见表 5。

表 5　预测的标准误差

α	0.2	0.5	0.8
S	4.5029	4.5908	4.8426

计算结果表明：$\alpha = 0.2$时，S较小，故选取$\alpha = 0.2$，预测 1988 年该电器销售额为$\hat{y}_{1988} = 51.1754$。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load dianqi.txt      %原始数据以列向量的方式存放在纯文本文件中
yt=dianqi; n=length(yt);
alpha=[0.2 0.5 0.8];m=length(alpha);
yhat(1,1:m)=(yt(1)+yt(2))/2;
for i=2:n
    yhat(i,:)=alpha*yt(i-1)+(1-alpha).*yhat(i-1,:);
end
yhat
err=sqrt(mean((repmat(yt,1,m)-yhat).^2))
xlswrite('dianqi.xls',yhat)
yhat1988=alpha*yt(n)+(1-alpha).*yhat(n,:)
```

3.2　二次指数平滑法

一次指数平滑法虽然克服了移动平均法的缺点。但当时间序列的变动出现直线趋势时，用一次指数平滑法进行预测，仍存在明显的滞后偏差。因此，也必须加以修正。修正的方法与趋势移动平均法相同，即再作二次指数平滑，利用滞后偏差的规律建立直线趋势模型。这就是二次指数平滑法。其计算公式为

$$\begin{aligned} S_t^{(1)} &= \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(1)} \\ S_t^{(2)} &= \alpha S_t^{(1)} + (1-\alpha) S_{t-1}^{(2)} \end{aligned} \tag{17}$$

式中 $S_t^{(1)}$ 为一次指数的平滑值；$S_t^{(2)}$ 为二次指数的平滑值。当时间序列 $\{y_t\}$，从某时期开始具有直线趋势时，类似趋势移动平均法，可用直线趋势模型

$$\hat{y}_{t+T} = a_t + b_t T\text{，}T = 1,2,\cdots \tag{18}$$

$$\begin{cases} a_t = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)} \\ b_t = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) \end{cases} \tag{19}$$

进行预测。

例 5　仍以例 3 我国 1965～1985 年的发电总量资料为例，试用二次指数平滑法预测 1986 年和 1987 年的发电总量。

表 6　我国发电总量及一、二次指数平滑值计算表　　　　（单位：亿度）

年份	t	发电总量 y_t	一次平滑值	二次平滑值	y_{t+1} 的估计值
1965	1	676	676	676	
1966	2	825	720.7	689.4	676
1967	3	774	736.7	703.6	765.4
1968	4	716	730.5	711.7	784.0
1969	5	940	793.3	736.2	757.4
1970	6	1159	903.0	786.2	875.0
1971	7	1384	1047.3	864.6	1069.9
1972	8	1524	1190.3	962.3	1308.4
1973	9	1668	1333.6	1073.7	1516.1
1974	10	1688	1439.9	1183.6	1705.0
1975	11	1958	1595.4	1307.1	1806.1
1976	12	2031	1726.1	1432.8	2007.2
1977	13	2234	1878.4	1566.5	2145.0
1978	14	2566	2084.7	1722.0	2324.1
1979	15	2820	2305.3	1897.0	2602.9
1980	16	3006	2515.5	2082.5	2888.6
1981	17	3093	2688.8	2264.4	3134.1
1982	18	3277	2865.2	2444.6	3295.0
1983	19	3514	3059.9	2629.2	3466.1
1984	20	3770	3272.9	2822.3	3675.1
1985	21	4107	3523.1	3032.6	3916.6

解　取 $\alpha = 0.3$，初始值 $S_0^{(1)}$ 和 $S_0^{(2)}$ 都取序列的首项数值，即 $S_0^{(1)} = S_0^{(0)} = 676$。计算 $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}$，列于表 6。得到

$$S_{21}^{(1)} = 3523.1\text{，}\quad S_{21}^{(2)} = 3032.6$$

由公式（19），可得 $t = 21$ 时

$$a_{21} = 2S_{21}^{(1)} - S_{21}^{(2)} = 4013.7,$$

$$b_{21} = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_{21}^{(1)} - S_{21}^{(2)}) = 210.24$$

于是，得$t = 21$时直线趋势方程为

$$\hat{y}_{21+T} = 4013.7 + 210.24T$$

预测 1986 年和 1987 年的发电总量为（单位：亿度）

$$\hat{y}_{1986} = \hat{y}_{22} = \hat{y}_{21+1} = 4223.95$$

$$\hat{y}_{1987} = \hat{y}_{23} = \hat{y}_{21+2} = 4434.19$$

为了求各期的模拟值。可将式（19）代入直线趋势模型（18），并令$T = 1$，则得

$$\hat{y}_{t+1} = (2S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) + \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(1)} - S_t^{(2)})$$

即

$$\hat{y}_{t+1} = \left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right)S_t^{(1)} - \frac{1}{1-\alpha}S_t^{(2)} \tag{20}$$

令$t = 1,2,\cdots,21$，由公式（20）可求出各期的模拟值。计算结果见表 6。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load fadian.txt      %原始数据以列向量的方式存放在纯文本文件中
yt=fadian; n=length(yt);
alpha=0.3; st1(1)=yt(1); st2(1)=yt(1);
for i=2:n
    st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha)*st1(i-1);
    st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha)*st2(i-1);
end
xlswrite('fadian.xls',[st1',st2'])
a=2*st1-st2
b=alpha/(1-alpha)*(st1-st2)
yhat=a+b;
xlswrite('fadian.xls',yhat','Sheet1','C2')
str=char(['C',int2str(n+2)]);
xlswrite('fadian.xls',a(n)+2*b(n),'Sheet1',str)
```

3.3 三次指数平滑法

当时间序列的变动表现为二次曲线趋势时，则需要用三次指数平滑法。三次指数平滑是在二次指数平滑的基础上，再进行一次平滑，其计算公式为

$$\begin{cases} S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}^{(1)} \\ S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(2)} \\ S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(3)} \end{cases} \tag{21}$$

式中$S_t^{(3)}$为三次指数平滑值。

三次指数平滑法的预测模型为

$$\hat{y}_{t+T} = a_t + b_tT + C_tT^2,\ T = 1,2,\cdots \tag{22}$$

其中

$$\begin{cases} a_t = 3S_t^{(1)} - 3S_t^{(2)} + S_t^{(3)} \\ b_t = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}[(6-5\alpha)S_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)}] \\ c_t = \dfrac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}[S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)}] \end{cases} \tag{23}$$

例 6　某省 1978～1988 年全民所有制单位固定资产投资总额如表 7 所示，试预测 1989 年和 1990 年固定资产投资总额。

表 7　某省全民所有制单位固定资产投资总额及一、二、三次指数平滑值计算表（单位：亿元）

年份	t	投资总额 y_t	一次平滑值	二次平滑值	三次平滑值	y_{t+1} 的估计值
1978	1	20.04	21.37	21.77	21.89	21.94
1979	2	20.06	20.98	21.53	21.78	20.23
1980	3	25.72	22.40	21.79	21.78	19.56
1981	4	34.61	26.06	23.07	22.17	24.49
1982	5	51.77	33.78	26.28	23.40	34.59
1983	6	55.92	40.42	30.52	25.54	53.89
1984	7	80.65	52.49	37.11	29.01	64.58
1985	8	131.11	76.07	48.80	34.95	89.30
1986	9	148.58	97.83	63.51	43.52	142.42
1987	10	162.67	117.28	79.64	54.35	176.09
1988	11	232.26	151.77	101.28	68.43	196.26

解　从图 2 可以看出，投资总额呈二次曲线上升，可用三次指数平滑法进行预测。

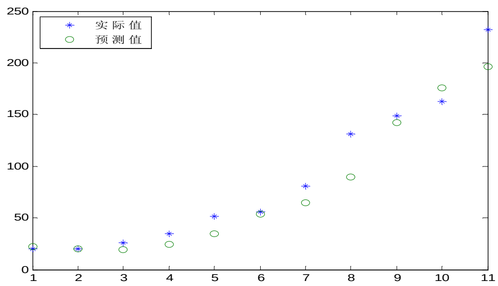

图 2　某省固定资产投资总额趋势图

取 $\alpha = 0.3$，初始值 $S_1^{(0)} = S_2^{(0)} = S_3^{(0)} = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 21.94$。计算 $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, S_t^{(3)}$ 列于表 7 中。得到

$S_{11}^{(1)} = 151.77$，$S_{11}^{(2)} = 101.28$，$S_{11}^{(3)} = 68.43$

由公式（23），可得到当 $t = 11$ 时

$a_{11} = 219.91$，$b_{11} = 38.38$，$c_{11} = 1.62$

于是，得 $t = 11$ 时预测模型为

$$\hat{y}_{11+T} = 219.91 + 38.38T + 1.62T^2$$

预测 1989 年和 1990 年的固定资产投资总额为（单位：亿元）

$$\hat{y}_{1989}=\hat{y}_{12}=\hat{y}_{11+1}=a_{11}+b_{11}+c_{11}=259.91$$

$$\hat{y}_{1990}=\hat{y}_{13}=\hat{y}_{11+2}=a_{11}+2b_{11}+2^2c_{11}=303.16$$

因为国家从 1989 年开始对固定资产投资采取压缩政策，这些预测值显然偏高，应作适当的修正，以消除政策因素的影响。

与二次指数平滑法一样，为了计算各期的模拟值，可将式（23）代入预测模型（22），并令$T=1$，则得

$$\hat{y}_{t+1}=\frac{3-3\alpha+\alpha^2}{(1-\alpha)^2}S_t^{(1)}-\frac{3-\alpha}{(1-\alpha)^2}S_t^{(2)}+\frac{1}{(1-\alpha)^2}S_t^{(3)} \tag{24}$$

令$t=0,1,2,\cdots,11$，公式（24）可求出各期的模拟值，见表 7。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load touzi.txt     %原始数据以列向量的方式存放在纯文本文件中
yt=touzi; n=length(yt);
alpha=0.3; st1_0=mean(yt(1:3)); st2_0=st1_0;st3_0=st1_0;
st1(1)=alpha*yt(1)+(1-alpha)*st1_0;
st2(1)=alpha*st1(1)+(1-alpha)*st2_0;
st3(1)=alpha*st2(1)+(1-alpha)*st3_0;
for i=2:n
    st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha)*st1(i-1);
    st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha)*st2(i-1);
    st3(i)=alpha*st2(i)+(1-alpha)*st3(i-1);
end
xlswrite('touzi.xls',[st1',st2',st3'])
st1=[st1_0,st1];st2=[st2_0,st2];st3=[st3_0,st3];
a=3*st1-3*st2+st3;
b=0.5*alpha/(1-alpha)^2*((6-5*alpha)*st1-2*(5-4*alpha)*st2+(4-3*alpha)*st3);
c=0.5*alpha^2/(1-alpha)^2*(st1-2*st2+st3);
yhat=a+b+c;
xlswrite('touzi.xls',yhat','Sheet1','D1')
plot(1:n,yt,'*',1:n,yhat(1:n),'O')
legend('实际值','预测值',2)
xishu=[c(n+1),b(n+1),a(n+1)];
yhat1990=polyval(xishu,2)
```

指数平滑预测模型是以时刻t为起点，综合历史序列的信息，对未来进行预测的。选择合适的加权系数α是提高预测精度的关键环节。根据实践经验，α的取值范围一般以 0.1～0.3 为宜。α值愈大，加权系数序列衰减速度愈快，所以实际上α取值大小起着控制参加平均的历史数据的个数的作用。α值愈大意味着采用的数据愈少。因此，可以得到选择α值的一些基本准则。

（1）如果序列的基本趋势比较稳，预测偏差由随机因素造成，则α值应取小一些，以减少修正幅度，使预测模型能包含更多历史数据的信息。

（2）如果预测目标的基本趋势已发生系统地变化，则α值应取得大一些。这样，可以偏重新数据的信息对原模型进行大幅度修正，以使预测模型适应预测目标的新变化。

另外，由于指数平滑公式是递推计算公式，所以必须确定初始值$S_0^{(1)},S_0^{(2)},S_0^{(3)}$。可以取前 3～5 个数据的算术平均值作为初始值。

§4　差分指数平滑法

在上节我们已经讲过，当时间序列的变动具有直线趋势时，用一次指数平滑法会出现滞后偏差，其原因在于数据不满足模型要求。因此，我们也可以从数据变换的角度来考虑改进措施，即在运用指数平滑法以前先对数据作一些技术上的处理，使之能适合于一次指数平滑模型，以后再对输出结果作技术上的返回处理，使之恢复为原变量的形态。差分方法是改变数据变动趋势的简易方法。下面我们讨论如何用差分方法来改进指数平滑法。

4.1　一阶差分指数平滑法

当时间序列呈直线增加时，可运用一阶差分指数平滑模型来预测。其公式如下：

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1} \tag{25}$$

$$\nabla \hat{y}_{t+1} = \alpha \nabla y_t + (1-\alpha)\nabla \hat{y}_t \tag{26}$$

$$\hat{y}_{t+1} = \nabla \hat{y}_{t+1} + y_t \tag{27}$$

其中的∇为差分记号。式（25）表示对呈现直线增加的序列作一阶差分，构成一个平稳的新序列；式（26）表示把经过一阶差分后的新序列的指数平滑预测值与变量当前的实际值迭加，作为变量下一期的预测值。对于这个公式的数学意义可作如下的解释。

因为

$$y_{t+1} = y_{t+1} - y_t + y_t = \nabla y_{t+1} + y_t \tag{28}$$

当我们采用按式（26）计算的预测值去估计式（28）中的y_{t+1}，从而式（28）等号左边的y_{t+1}也要改为预测值，亦即成为式（27）。

在前面我们已分析过，指数平滑值实际上是一种加权平均数。因此把序列中逐期增量的加权平均数（指数平滑值）加上当前值的实际数进行预测，比一次指数平滑法只用变量以往取值的加权平均数作为下一期的预测更合理。从而使预测值始终围绕实际值上下波动，从根本上解决了在有直线增长趋势的情况下，用一次指数平滑法所得出的结果始终落后于实际值的问题。

例 7　某工业企业 1977～1986 年锅炉燃料消耗量资料如表 8 所示，试预测 1987 年的燃料消耗量。

表 8　某企业锅炉燃料消耗量的差分指数平滑法计算表（$\alpha = 0.4$）（单位：百吨）

年份	t	燃料消耗量 y_t	差分	差分指数平滑值	预测值
1977	1	24			
1978	2	26	2		
1979	3	27	1	2	28
1980	4	30	3	1.6	28.6
1981	5	32	2	2.16	32.16
1982	6	33	1	2.10	34.10
1983	7	36	3	1.66	34.66
1984	8	40	4	2.19	38.19
1985	9	41	1	2.92	42.92
1986	10	44	3	2.15	43.15
1987	11			2.49	46.49

解　由资料可以看出，燃料消耗量，除个别年份外，逐期增长量大体在 200 吨左

右，即呈直线增长，因此可用一阶差分指数平滑模型来预测。我们取$\alpha = 0.4$，初始值为新序列首项值，计算结果列于表 8 中。预测 1987 年燃料消耗量为

$$\hat{y}_{1987} = 2.49 + 44 = 46.49 \text{（百吨）。}$$

4.2 二阶差分指数平滑模型

当时间序列呈现二次曲线增长时，可用二阶差分指数平滑模型来预测，计算公式如下：

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1} \tag{29}$$

$$\nabla^2 y_t = \nabla y_t - \nabla y_{t-1} \tag{30}$$

$$\nabla^2 \hat{y}_{t+1} = \alpha \nabla^2 y_t + (1-\alpha)\nabla^2 \hat{y}_t \tag{31}$$

$$\hat{y}_{t+1} = \nabla^2 \hat{y}_{t+1} + \nabla y_t + y_t \tag{32}$$

其中∇^2表示二阶差分。

因为

$$y_{t+1} = y_{t+1} - y_t + y_t = \nabla y_{t+1} + y_t = (\nabla y_{t+1} - \nabla y_t) + \nabla y_t + y_t = \nabla^2 y_{t+1} + \nabla y_t + y_t$$

同样，用$\nabla^2 y_{t+1}$的估计值代替$\nabla^2 y_{t+1}$得到式（32）。

差分方法和指数平滑法的联合运用，除了能克服一次指数平滑法的滞后偏差之外，对初始值的问题也有显著的改进。因为数据经过差分处理后，所产生的新序列基本上是平稳的。这时，初始值取新序列的第一期数据对于未来预测值不会有多大影响。其次，它拓展了指数平滑法的适用范围，使一些原来需要运用配合直线趋势模型处理的情况可用这种组合模型来取代。但是，对于指数平滑法存在的加权系数α的选择问题，以及只能逐期预测问题，差分指数平滑模型也没有改进。

§5 自适应滤波法

5.1 自适应滤波法的基本过程

自适应滤波法与移动平均法、指数平滑法一样，也是以时间序列的历史观测值进行某种加权平均来预测的，它要寻找一组“最佳”的权数，其办法是先用一组给定的权数来计算一个预测值，然后计算预测误差，再根据预测误差调整权数以减少误差。这样反复进行，直至找出一组“最佳”权数，使误差减少到最低限度。由于这种调整权数的过程与通讯工程中的传输噪声过滤过程极为接近，故称为自适应滤波法。

自适应滤波法的基本预测公式为

$$\hat{y}_{t+1} = w_1 y_t + w_2 y_{t-1} + \cdots + w_N y_{t-N+1} = \sum_{i=1}^{N} w_i y_{t-i+1} \tag{33}$$

式（33）中，$\hat{y}_{t+1}$为第$t+1$期的预测值，w_i为第$t-i+1$期的观测值权数，y_{t-i+1}为第$t-i+1$期的观测值，N为权数的个数。其调整权数的公式为

$$w_i^{'} = w_i + 2k \cdot e_{i+1} y_{t-i+1} \tag{34}$$

式中，$i = 1,2,\cdots,N$，$t = N, N+1,\cdots,n$，n为序列数据的个数，w_i为调整前的第i个权数，$w_i^{'}$为调整后的第i个权数，k为学习常数，e_{i+1}为第$t+1$期的预测误差。式（34）表明：调整后的一组权数应等于旧的一组权数加上误差调整项，这个调整项包括预测误差、原观测值和学习常数等三个因素。学习常数k的大小决定权数调整的速度。

下面举一个简单的例子来说明此法的全过程。设有一个时间序列包括 10 个观测值，如表 9 所示。试用自适应滤波法，以两个权数来求第 11 期的预测值。

表 9　某时间序列数据表

时期 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
观测值 y_t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0

本例中 $N=2$。取初始权数 $w_1=0.5$，$w_2=0.5$，并设 $k=0.9$。t 的取值由 $N=2$ 开始，当 $t=2$ 时：

（1）按预测公式（33），求第 $t+1=3$ 期的预测值。

$$\hat{y}_{t+1}=\hat{y}_3=w_1y_2+w_2y_1=0.15$$

（2）计算预测误差。

$$e_{t+1}=e_3=y_3-\hat{y}_3=0.3-0.15=0.15$$

（3）根据式（34），

$$w_i^{'}=w_i+2k\cdot e_{i+1}y_{t-i+1}$$

调整权数为

$$w_1^{'}=w_1+2ke_3y_2=0.554$$

$$w_2^{'}=w_2+2ke_3y_1=0.527$$

（1）～（3）结束，即完成了一次权数调整，然后 t 进 1 再重复以前步骤。当 $t=3$ 时：

（1）利用所得到的权数，计算第 $t+1=4$ 期的预测值。方法是，舍去最前面的一个观测值 y_1，增加一个新的观测值 y_3。即

$$\hat{y}_{t+1}=\hat{y}_4=w_1^{'}y_3+w_2^{'}y_2=0.2716$$

（2）计算预测误差

$$e_{t+1}=e_4=y_4-\hat{y}_4=0.13$$

（3）调整权数

$$w_1^{'}=0.554+2\times0.9\times0.13\times0.3=0.624$$

$$w_2^{'}=0.527+2\times0.9\times0.13\times0.2=0.564$$

这样进行到 $t=10$ 时

$$\hat{y}_{t+1}=\hat{y}_{11}=w_1^{'}y_{10}+w_2^{'}y_9$$

但由于没有 $t=11$ 的观测值 y_{11}，因此

$$e_{t+1}=e_{11}=y_{11}-\hat{y}_{11}$$

无法计算。这时，第一轮的调整就此结束。把现有的新权数作为初始权数，重新开始 $t=2$ 的过程。这样反复进行下去，到预测误差（指新一轮的预测总误差）没有明显改进时，就认为获得了一组“最佳”权数，能实际用来预测第 11 期的数值。本例在调整过程中，可使得误差降为零，而权数达到稳定不变，最后得到的“最佳”权数为

$$w_1^{'}=2.0，\quad w_2^{'}=-1.0$$

用“最佳”权数预测第 11 期的取值

$$\hat{y}_{11}=w_1^{'}y_{10}+w_2^{'}y_9=1.1$$

在实际应用中，权数调整计算工作量可能很大，必须借助于计算机才能实现。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
yt=0.1:0.1:1;
```

```
m=length(yt); k=0.9;
N=2; Terr=10000;
w=ones(1,N)/N;
while abs(Terr)>0.00001
    Terr=[];
    for j=N+1:m-1
        yhat(j)=w*yt(j-1:-1:j-N)';
        err=yt(j)-yhat(j);
        Terr=[Terr,abs(err)];
        w=w+2*k*err*yt(j-1:-1:j-N);
    end
    Terr=max(Terr);
end
w, yhat
```

5.2　N,k 值和初始权数的确定

在开始调整权数时，首先要确定权数个数 N 和学习常数 k 。一般说来，当时间序列的观测值呈季节变动时， N 应取季节性长度值。如序列以一年为周期进行季节变动时，若数据是月度的，则取 $N=12$ ，若季节是季度的，则取 $N=4$ 。如果时间序列无明显的周期变动，则可用自相关系数法来确定，即取 N 为最高自相关系数的滞后时期。

k 的取值一般可定为 $1/N$ ，也可以用不同的 k 值来进行计算，以确定一个能使 S 最小的 k 值。

初始权数的确定也很重要，如无其它依据，也可用 $1/N$ 作为初始权系数用，即

$$w_i=\frac{1}{N}(i=1,2,\cdots,N)$$

自适应滤波法有两个明显的优点：一是技术比较简单，可根据预测意图来选择权数的个数和学习常数，以控制预测。也可以由计算机自动选定。二是它使用了全部历史数据来寻求最佳权系数，并随数据轨迹的变化而不断更新权数，从而不断改进预测。

由于自适应滤波法的预测模型简单，又可以在计算机上对数据进行处理，所以这种预测方法应用较为广泛。

§6　趋势外推预测方法

趋势外推法是根据事物的历史和现时资料，寻求事物发展规律，从而推测出事物未来状况的一种比较常用的预测方法。利用趋势外推法进行预测，主要包括六个阶段：（a）选择应预测的参数；（b）收集必要的数据；（c）利用数据拟合曲线；（d）趋势外推；（e）预测说明；（f）研究预测结果在进行决策中应用的可能性。

趋势外推法常用的典型数学模型有：指数曲线、修正指数曲线、生长曲线、包络曲线等。

6.1　指数曲线法

一般来说，技术的进步和生产的增长，在其未达饱和之前的新生时期是遵循指数曲线增长规律的，因此可以用指数曲线对发展中的事物进行预测。

指数曲线的数学模型为

$$y=y_0e^{Kt} \tag{35}$$

其中系数 y_0 和 K 值由历史数据利用回归方法求得。对式（35）取对数可得

$$\ln y=\ln y_0+Kt \tag{36}$$

令

$$Y = \ln y\text{，}\quad A = \ln y_0$$

则

$$Y = A + Kt$$

其中 A, K 可以用最小二乘法求得。

6.2 修正指数曲线法

利用指数曲线外推来进行预测时，存在着预测值随着时间的推移会无限增大的情况。这是不符合客观规律的。因为任何事物的发展都是有一定限度的。例如某种畅销产品，在其占有市场的初期是呈指数曲线增长的，但随着产品销售量的增加，产品总量接近于社会饱和量时。这时的预测模型应改用修正指数曲线。

$$\hat{y}_t = K + ab^t \tag{37}$$

在此数学模型中有三个参数 K, a 和 b 要用历史数据来确定。

修正指数曲线用于描述这样一类现象。

（1）初期增长迅速，随后增长率逐渐降低。

（2）当 $K > 0$，$a < 0$，$0 < b < 1$时，$t \to \infty$，$ab^t \to 0$，即 $\hat{y}_t \to K$。

当 K 值可预先确定时，采用最小二乘法确定模型中的参数。而当 K 值不能预先确定时，应采用三和法。

把时间序列的 n 个观察值等分为三部分，每部分有 m 期，即 $n = 3m$。

第一部分：$y_1, y_2, \cdots, y_m$；

第二部分：$y_{m+1}, y_{m+2}, \cdots, y_{2m}$；

第三部分：$y_{2m+1}, y_{2m+2}, \cdots, y_{3m}$

令每部分的趋势值之和等于相应的观察值之和，由此给出参数估计值。三和法步骤如下：

记观察值的各部分之和

$$S_1 = \sum_{t=1}^{m} y_t\ , S_2 = \sum_{t=m+1}^{2m} y_t\ , S_3 = \sum_{t=2m+1}^{3m} y_t \tag{38}$$

且

$$\begin{cases} S_1 = \sum\limits_{t=1}^{m} \hat{y}_t = \sum\limits_{t=1}^{m} (K + ab^t) = mK + ab(1 + b + b^2 + \cdots b^{m-1}) \\ S_2 = \sum\limits_{t=m+1}^{2m} \hat{y}_t = \sum\limits_{t=m+1}^{2m} (K + ab^t) = mK + ab^{m+1}(1 + b + b^2 + \cdots b^{m-1}) \\ S_3 = \sum\limits_{t=2m+1}^{3m} \hat{y}_t = \sum\limits_{t=2m+1}^{3m} (K + ab^t) = mK + ab^{2m+1}(1 + b + b^2 + \cdots b^{m-1}) \end{cases} \tag{39}$$

由于

$$(1 + b + b^2 + \cdots b^{m-1})(b - 1) = b^m - 1 \tag{40}$$

则根据(11.35) 式，得

$$\begin{cases} S_1 = mK + ab\dfrac{b^{m-1}}{b-1} \\ S_2 = mK + ab^{m+1}\dfrac{b^{m-1}}{b-1} \\ S_3 = mK + ab^{2m+1}\dfrac{b^{m-1}}{b-1} \end{cases} \tag{41}$$

由（41）式，解得

$$\begin{cases} b = \left(\dfrac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}\right)^{\frac{1}{m}} \\ a = (S_2 - S_1)\dfrac{b-1}{b(b^m-1)^2} \\ K = \dfrac{1}{m}\left[S_1 - \dfrac{ab(b^m-1)}{b-1}\right] \end{cases} \tag{42}$$

至此三个参数全部确定了，于是就可以用式（37）进行预测。

值得注意的是，并不是任何一组数据都可以用修正指数曲线拟合。采用前应对数据进行检验，检验方法是看给定数据的逐期增长量的比率是否接近某一常数 b 。即

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t - y_{t-1}} \approx b \tag{43}$$

例 8　根据统计资料，某厂收音机连续 15 年的销售量如表 10。

表 11　某厂收音机销售量

时间(年)	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
销售量(万部)	42.1	47.5	52.7	57.7	62.5	67.1	71.5	75.7
时间(年)	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	
销售量(万部)	79.8	83.7	87.5	91.1	94.6	97.9	101.1	

试用修正指数曲线预测 1986 年的销售量。

解　经计算可知

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t - y_{t-1}} \in [0.9429,\ 0.9762]$$

可以认定这组数据可以采用修正指数曲线拟合。现将以上 15 个数据分为三部分，每部分 5 个数据，即 $n = 15$ ， $m = 5$ ，并以 1969 年作为开始年份 $t = 1$ 。

根据式（38），得

$S_1 = 262.5$ ， $S_2 = 377.8$ ， $S_3 = 472.2$

再由（42）式，得

$b = 0.9608$ ， $a = -143.2063$ ， $K = 179.7162$

故修正指数曲线的数学模型为

$$y = 179.7162 - 143.2063 \times 0.9608^t \tag{44}$$

预测 1986 年的产量时， $t = 1986 - 1969 + 1 = 18$ 。所以

$$y_{1986} = 179.7162 - 143.2063 \times 0.9608^{18} = 110 \text{（万部）}$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
function chanliang
clc,clear
global a b k
load xsh.txt %原始数据存放在纯文本文件 xsh.txt 中
yt=xsh; n=length(yt);m=n/3
cf=diff(yt);
for i=1:n-2
    bzh(i)=cf(i+1)/cf(i);
end
range=minmax(bzh)
s1=sum(yt(1:m)), s2=sum(yt(m+1:2*m)), s3=sum(yt(2*m+1:end))
b=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/m)
a=(s2-s1)*(b-1)/(b*(b^m-1)^2)
k=(s1-a*b*(b^m-1)/(b-1))/m
y=yuce(1:18)
%************************************
%定义预测函数
%************************************
function y=yuce(t)
global a b k
y=k+a*b.^t;
```

6.3　Compertz 曲线

曲线的一般形式

$$\hat{y}_t = Ka^{b^t}\text{，} K > 0, 0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1 \tag{45}$$

采用 Compertz 曲线前应对数据进行检验，检验方法是看给定数据的对数逐期增长量的比率是否接近某一常数 b。即

$$\frac{\ln y_{t+1} - \ln y_t}{\ln y_t - \ln y_{t-1}} \approx b \tag{46}$$

Compertz 曲线用于描述这样一类现象：初期增长缓慢，以后逐渐加快。当达到一定程度后，增长率又逐渐下降。

参数估计方法如下：

式（46）两边取对数，得

$$\log \hat{y}_t = \log K + (\log a) b^t \tag{47}$$

记

$$\hat{y}'_t = \ln \hat{y}_t, K' = \ln K, a' = \ln a$$

得

$$\hat{y}'_t = K' + a' b^t$$

仿照修正指数曲线的三和法估计参数，令

$$S_1 = \sum_{t=1}^{m} y'_t, S_2 = \sum_{t=m+1}^{2m} y'_t, S_3 = \sum_{t=2m+1}^{3m} y'_t \tag{48}$$

其中 $y'_t = \ln y_t$。则类似式（42），得

$$\begin{cases} b=\left(\dfrac{S_3-S_2}{S_2-S_1}\right)^{\frac{1}{m}} \\ a'=(S_2-S_1)\dfrac{b-1}{b(b^m-1)^2} \\ K'=\dfrac{1}{m}\left[S_1-\dfrac{a'b(b^m-1)}{b-1}\right] \end{cases} \tag{49}$$

例 9（续例 8）　根据表 10 的数据，试确定收音机销售量的 Gompertz 曲线方程，求出各年收音机销售量的趋势值，并预测 1986 年的销售量。

解：已知 $n=15$，$m=5$，根据式（48），得

$S_1=19.7558$，$S_2=21.6094$，$S_3=22.7333$

再由式（49），得

$b=0.9048$

$a'=-1.2588$，$a=0.284$

$K'=4.8929$，$K=133.3341$

从而收音机销售量的 Compertz 曲线方程为

$\hat{y}_t=133.3341\times 0.284^{0.9048^t}$

将 $t=18$ 代入方程，得 1986 年收音机销售量的预测值为

$\hat{y}_{1986}=108.3143$（万部）

计算的 MATLAB 程序如下：

```
function chanliang2
clc,clear
global a b k
load xsh.txt %原始数据存放在纯文本文件 xsh.txt 中
yt=log(xsh); n=length(yt);m=n/3;
s1=sum(yt(1:m)), s2=sum(yt(m+1:2*m)), s3=sum(yt(2*m+1:end))
b=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/m)
a=(s2-s1)*(b-1)/(b*(b^m-1)^2)
k=(s1-a*b*(b^m-1)/(b-1))/m
a=exp(a)
k=exp(k)
y=yuce(1:18)
%*************************************
%定义预测函数
%*************************************
function y=yuce(t);
global a b k
y=k*a.^(b.^t);
```

6.4　Logistic 曲线（生长曲线）

生物的生长过程经历发生、发展到成熟三个阶段，在三个阶段生物的生长速度是不一样的，例如南瓜的重量增长速度，在第一阶段增长的较慢，在发展时期则突然加快，而到了成熟期又趋减慢，形成一条 S 形曲线，这就是有名的 Logistic 曲线（生长曲线），

很多事物，如技术和产品发展进程都有类似的发展过程，因此 Logistic 曲线在预测中有相当广泛的应用。

Logistic 曲线的一般数学模型是

$$\frac{dy}{dt}=ry(1-\frac{y}{L}) \tag{50}$$

式中 y 为预测值，L 为 y 的极限值，r 为增长率常数，$r>0$。解此微分方程得

$$y=\frac{L}{1+ce^{-rt}} \tag{51}$$

式中 c 为常数。

下面我们记 Logistic 曲线的一般形式为

$$y_t=\frac{1}{K+ab^t}，\quad K>0，\quad a>0，\quad 0<b\neq 1 \tag{52}$$

检验能否使用 Logistic 曲线的方法，是看给定数据倒数的逐期增长量的比率是否接近某一常数 b。即

$$\frac{1/y_{t+1}-1/y_t}{1/y_t-1/y_{t-1}}\approx b \tag{53}$$

Logistic 曲线中参数估计方法如下：

作变换

$$y'_t=\frac{1}{y_t}$$

得

$$y'_t=K+ab^t$$

仿照修正指数曲线的三和法估计参数，令

$$S_1=\sum_{t=1}^{m}y'_t\,,S_2=\sum_{t=m+1}^{2m}y'_t\,,S_3=\sum_{t=2m+1}^{3m}y'_t \tag{54}$$

则类似式（42），得

$$\begin{cases} b=\left(\dfrac{S_3-S_2}{S_2-S_1}\right)^{\frac{1}{m}} \\ a=(S_2-S_1)\dfrac{b-1}{b(b^m-1)^2} \\ K=\dfrac{1}{m}\left[S_1-\dfrac{ab(b^m-1)}{b-1}\right] \end{cases} \tag{55}$$

例 10（续例 8）　根据表 10 的数据，试确定收音机销售量的 Logistic 曲线方程，求出各年收音机销售量的趋势值，并预测 1986 年的销售量。

解：已知 $n=15$，$m=5$，根据式（54），得

$$S_1=0.0971，\quad S_2=0.0666，\quad S_3=0.0531$$

再由式（55），得

$$b=0.8493，\quad a=0.0174，\quad K=0.0085$$

从而收音机销售量的 Logistic 曲线方程为

$$\hat{y}_t = \frac{1}{0.0085 + 0.0174 \times 0.8493^t}$$

将 $t = 18$ 代入方程，得 1986 年收音机销售量的预测值为

$$\hat{y}_{1986} = 106.3981$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
function chanliang3
clc,clear
global a b k
load xsh.txt %原始数据存放在纯文本文件 xsh.txt 中
yt=1./xsh; n=length(yt);m=n/3;
s1=sum(yt(1:m)), s2=sum(yt(m+1:2*m)), s3=sum(yt(2*m+1:end))
b=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/m)
a=(s2-s1)*(b-1)/(b*(b^m-1)^2)
k=(s1-a*b*(b^m-1)/(b-1))/m
y=yuce(1:18)
%*************************************
%定义预测函数
%*************************************
function y=yuce(t);
global a b k
y=1./(k+a*b.^t);
```

6.5　趋势线的选择

趋势线的选择有以下几种方式。

1．由散点图选择趋势线。

2．由数据本身的取值规律选择趋势线。

3．比较预测标准误差大小

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2} \tag{56}$$

当有几种趋势线可供选择时，应选择 S 最小的趋势线。

§7　平稳时间序列模型

这里的平稳是指宽平稳，其特性是序列的统计特性不随时间的平移而变化，即均值和协方差不随时间的平移而变化。

下面自回归模型（Auto Regressive Model）简称 AR 模型，移动平均模型（Moving Average Model）简称 MA 模型，自回归移动平均模型（Auto Regressive Moving Average Model）简称 ARMA 模型。下面的 X_t 为零均值（即中心化处理的）平稳序列。

（1）一般自回归模型 AR(n)

假设时间序列 X_t 仅与 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$ 有线性关系，而在 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$ 已知条件下，X_t 与 $X_{t-j}(j = n+1, n+2, \cdots)$ 无关，a_t 是一个独立于 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$ 的白噪声序列，$a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$。

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_n X_{t-n} + a_t$$

上式还可以表示为

$$a_t = X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} - \cdots - \varphi_n X_{t-n}$$

可见，$\mathrm{AR}(n)$ 系统的响应 X_t 具有 n 阶动态性。$\mathrm{AR}(n)$ 模型通过把 X_t 中的依赖于 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$ 的部分消除掉之后，使得具有 n 阶动态性的序列 X_t 转化为独立的序列 a_t。因此，拟合 $\mathrm{AR}(n)$ 模型的过程也就是使相关序列独立化的过程。

（2）移动平均模型 $\mathrm{MA}(m)$

$\mathrm{AR}(n)$ 系统的特征是系统在 t 时刻的响应 X_t 仅与其以前时刻的响应 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$ 有关，而与其以前时刻进入系统的扰动无关。如果一个系统在 t 时刻的响应 X_t，与其以前时刻 $t-1, t-2, \cdots$ 的响应 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots$ 无关，而与其以前时刻 $t-1, t-2, \cdots, t-m$ 进入系统的扰动 $a_{t-1}, a_{t-2}, \cdots, a_{t-m}$ 存在着一定的相关关系，那么，这一类系统为 $\mathrm{MA}(m)$ 系统。

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_m a_{t-m}$$

（3）自回归移动平均模型

一个系统，如果它在时刻 t 的响应 X_t，不仅与其以前时刻的自身值有关，而且还与其以前时刻进入系统的扰动存在一定的依存关系，那么，这个系统就是自回归移动平均系统。

$\mathrm{ARMA}(n,m)$ 模型为

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_n X_{t-n} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_m a_{t-m}$$

对于平稳系统来说，由于 AR、MA、$\mathrm{ARMA}(n,m)$ 模型都是 $\mathrm{ARMA}(n,n-1)$ 模型的特例，我们以 $\mathrm{ARMA}(n,n-1)$ 模型为一般形式来建立时序模型。

§8 ARMA 模型的特性

在时间序列的时域分析中，线性差分方程是极为有效的工具。事实上，任何一个 ARMA 模型都是一个线性差分方程。

8.1 AR(1)系统的格林函数

格林函数就是描述系统记忆扰动程度的函数。

AR(1)模型为

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} = a_t$$

设 $X_{t-1} = y(t)$，则有

$$y(t+1) - \varphi_1 y(t) = a_t \tag{57}$$

显然是一个一阶非齐次差分方程。

由于

$$\begin{aligned} X_t &= \varphi_1 X_{t-1} + a_t = \varphi_1(\varphi_1 X_{t-2} + a_{t-1}) + a_t \\ &= \varphi_1^2 X_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t \\ &= \varphi_1^3 X_{t-3} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t = \cdots \end{aligned}$$

依次递推下去，可得到

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j a_{t-j} \tag{58}$$

显然（58）式是差分方程（57）的解。

方程解的系数函数φ_1^j客观地描述了该系统的动态性，故这个系统函数就叫做记忆函数，也叫格林函数。若用G_j表示，则 AR(1)模型的格林函数可以表示为

$$G_j = \varphi_1^j$$

这样（58）式可等价地写成：

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} \qquad (59)$$

上式也可写成

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{t} G_{t-k} a_k$$

这里$G_0 = \varphi_1^0 = 1$。

定义后移算子B，$BX_t = X_{t-1}, B^2 X_t = X_{t-2}, \cdots$，这样，AR(1)可写成

$$(1-\varphi_1 B) X_t = a_t$$

它的解为

$$X_t = \frac{1}{1-\varphi_1 B} a_t = (1+\varphi_1 B + \varphi_1^2 B^2 + \cdots) a_t$$

$$= a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}$$

由于格林函数就是差分方程解的系数函数，格林函数的意义可概括如下：

（1）G_j是前j个时间单位以前进入系统的扰动a_{t-j}对系统现在行为（响应）影响的权数。

（2）G_j客观地刻画了系统动态响应衰减的快慢程度。

（3）对于一个平稳系统来说，在某一时刻由于受到进入系统的扰动a_t的作用，离开其平衡位置（即平均数－零），G_j描述系统回到平衡位置的速度，φ_1的值较小，速度较快；φ_1的值较大，回复的速度就较慢。

8.2 ARMA(2,1) 系统的格林函数

（1）ARMA(2,1) 系统的格林函数的隐式

ARMA(2,1) 模型是一个二阶非齐次差分方程

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

设该二阶非齐次差分方程的解为

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} \qquad (60)$$

为方便起见，可用B算子：

$$(1-\varphi_1 B - \varphi_2 B^2) X_t = (1-\theta_1 B) a_t \qquad (61)$$

$$X_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \right) a_t \qquad (62)$$

把（62）式代入（61），比较两边 B 的同次幂的系数得

$$G_0=1，G_1=\varphi_1-\theta_1，G_j=\varphi_1 G_{j-1}+\varphi_2 G_{j-2}, j=3,4,\cdots$$

（2）ARMA(2,1) 系统的格林函数的显式

ARMA(2,1) 模型实质上是一个二阶非齐次差分方程：

$$X_t-\varphi_1 X_{t-1}-\varphi_2 X_{t-2}=a_t-\theta_1 a_{t-1}$$

欲求其解，必须先求出其相应的齐次差分方程的通解。

齐次方程对应的特征方程为

$$\lambda^2-\varphi_1\lambda-\varphi_2=0，$$

特征根为

$$\lambda_1=\frac{\varphi_1+\sqrt{\varphi_1^2+4\varphi_2}}{2}，\quad \lambda_2=\frac{\varphi_1-\sqrt{\varphi_1^2+4\varphi_2}}{2}$$

齐次差分方程的通解为

$$G_j=c_1\lambda_1^j+c_2\lambda_2^j$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数，其值由初始条件唯一地确定。这里的初始条件为：

$$\begin{cases}G_0=1\\ G_1-\varphi_1=-\theta_1\Rightarrow G_1=\varphi_1-\theta_1\end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases}G_0=c_1+c_2=1\\ G_1=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=\varphi_1-\theta_1\end{cases}$$

而 $\lambda_1+\lambda_2=\varphi_1$，即

$$\begin{cases}c_1+c_2=1\\ c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=\lambda_1+\lambda_2-\theta_1\end{cases}$$

解之，得

$$c_1=\frac{\lambda_1-\theta_1}{\lambda_1-\lambda_2}，\quad c_2=\frac{\lambda_2-\theta_1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

则 ARMA(2,1) 系统的格林函数为：

$$G_j=\frac{\lambda_1-\theta_1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^j+\frac{\lambda_2-\theta_1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2^j$$

8.3　逆函数和可逆性

前面的格林函数，把 X_t 表示为过去 a_t 对 X_t 的影响，或者说系统对过去 a_t 的记忆性，也就是用一个 MA 模型来逼近 X_t 的行为。平稳序列 X_t 的这种表达形式称为 X_t 的“传递形式”。同样我们也可以用过去的 X_t 的一个线性组合来逼近系统现在时刻的行为。即

$$X_t=I_1X_{t-1}+I_2X_{t-2}+\cdots+a_t=\sum_{j=1}^{\infty}I_jX_{t-j}+a_t$$

我们把这种表达形式称为 X_t 的“逆转形式”。其中的系数函数 $I_j\,(I_0=1)$ 称为逆函

数。可见它是一个无穷阶的自回归模型。一个过程是否具有逆转形式，也就是说逆函数是否存在的性质，通常称为过程是否具有可逆性，如果一个过程可以用一个无限阶的自回归模型逼近，即逆函数存在，我们就称该过程具有可逆性，否则，就是不可逆的。

对于 AR（2）模型

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + a_t$$

有

$$I_1 = \varphi_1, \quad I_2 = \varphi_2, \quad I_j = 0, j = 3,4,\cdots$$

可见，所谓可逆性，是指移动平均模型可以用 AR 模型表示。

MA(1)模型：

$$X_t = (1-\theta_1 B)a_t$$

那么

$$a_t = \frac{X_t}{1-\theta_1 B} = (1+\theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \cdots)X_t = X_t + \sum_{j=1}^{\infty}\theta_1^j X_{t-j}$$

即

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty}(-\theta_1^j X_{t-j}) + a_t$$

可见，$I_j = -\theta_1^j$，显然，只有$|\theta_1|<1$时，才有 $j \to \infty$，$I_j \to 0$，故 MA（1）的可逆性条件为

$$|\theta_1|<1$$

§9 时间序列建模的基本步骤

上面我们介绍了时间序列的一些基本概念，下面我们初步给出时间序列建模的基本步骤，有兴趣的读者可以去查阅相关的参考资料。

时间序列建模的基本步骤如下：

1．数据的预处理：数据的剔取及提取趋势项。

2．取 $n=1$，拟合 $\mathrm{ARMA}(2n,2n-1)$（即 ARMA(2,1)）模型

（1） $p=3$，拟和 $\mathrm{AR}(p)$模型。

设所要拟合的模型为 $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varphi_3 X_{t-3} + a_t$，用最小二乘法拟合出系数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$。

注意到对于 AR(p)模型，$\varphi_j = I_j$，这里 I_j 是模型的逆函数，于是可得到 I_1, I_2, I_3 的值。

（2）估计 ARMA(2,1)模型 $X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$ 参数的初始值。

对于 ARMA(2,1)模型，我们有：

$$I_j - \theta_1 I_{j-1} = 0, \quad j > 2,$$

于是

$$I_3 - \theta_1 I_2 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{I_3}{I_2}。$$

注意：以 AR(3)中的 I_1, I_2, I_3 替代 ARMA(2,1) 中的 I_1, I_2, I_3 是一种近似代替。通

过这种方法求得的θ_1的绝对值若大于 1，则取其倒数作为初始值，以满足可逆性条件。

知道了I_1, I_2, I_3及θ_1，再用下式来确定 ARMA(2,1)模型中的φ_1, φ_2：

$$\varphi_1 = I_1 + \theta_1；\ \varphi_2 = \theta_2 - \theta_1 I_1 + I_2。$$

（3）以（2）中得到的$\varphi_1, \varphi_2, \theta_1$为初始值，利用非线性最小二乘法得到$\varphi_1, \varphi_2, \theta_1$的终值及置信区间，并且求出残差平方和(RSS)。

3．$n = n + 1$，拟合 ARMA$(2n, 2n-1)$模型

其基本步骤与 2 类似。

4．用 F 准则检验模型的适用性。若F检验显著，则转入第 2 步。若F检验不显著，转入第 5 步。

对于 ARMA 模型的适用性检验的实际就是对a_t的独立性检验。检验a_t的独立性的一个简便而有效的办法是拟合更高阶的模型。若更高阶模型的残差平方和有明显减少，就意味着现有模型的a_t不是独立的，因而模型不适用；若更高阶模型的残差平方和没有明显减少，同时更高阶模型中的附加参数的值也很小（其置信区间包含 0），则可认为该模型是适用的。具体的检验准则如下。

设有模型$\mathrm{ARMA}(n_1, m_1)$和$\mathrm{ARMA}(n_2, m_2)$，$n_2 > n_1, m_2 > m_1$。假设$A_0 = \mathrm{ARMA}(n_1, m_1)$模型的残差$a_t$之平方和，$A_1 = \mathrm{ARMA}(n_2, m_2)$模型的残差$a_t$之平方和，$N$是采集数据的数目，则检验准则为：

$$F = \frac{A_1 - A_0}{s} \Big/ \frac{A_0}{N - \gamma} \sim F(s, N - \gamma),$$

其中$\gamma = n_2 + m_2$，$s = n_2 + m_2 - (n_1 + m_1)$。

若这样得到的F值超过由F分布查表所得的在 5%置信水平上的$F(s, N-\gamma)$值，那么由$\mathrm{ARMA}(n_1, m_1)$模型改变为$\mathrm{ARMA}(n_2, m_2)$时，残差平方和的改善是显著的，因而拒绝关于模型$\mathrm{ARMA}(n_1, m_1)$的适用性假设；F值低于查表所得之值，就可以认为在该置信水平上这个模型是适用的。

5．检查$\varphi_{2n}, \theta_{2n-1}$的值是否很小，其置信区间是否包含零。若不是，则适用的模型就是$\mathrm{ARMA}(2n, 2n-1)$。

若$\varphi_{2n}, \theta_{2n-1}$很小，且其置信区间包含零，则拟合$\mathrm{ARMA}(2n-1, 2n-2)$。

6．利用 F 准则检验模型$\mathrm{ARMA}(2n, 2n-1)$和$\mathrm{ARMA}(2n-1, 2n-2)$，若 F 值不显著，转入第 7 步；若 F 值显著，转入第 8 步。

7．舍弃小的 MA 参数，拟合$m < 2n-2$的模型$\mathrm{ARMA}(2n-1, m)$，并用 F 准则进行检验。重复这一过程，直到得出具有最小参数的适用模型为止。

8．舍弃小的 MA 参数，拟合$m < 2n-1$的模型$\mathrm{ARMA}(2n, m)$，并用 F 准则进行检验。重复这一过程，直到得出具有最小参数的适用模型为止。

习题二十四

1．我国 1974～1981 年布的产量如表 11 所示。

表 11　1974～1981 年布的产量

年份	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
产量(亿米)	80.8	94.0	88.4	101.5	110.3	121.5	134.7	142.7

（1）试用趋势移动平均法（取 $N=3$），建立布的年产量预测模型。

（2）分别取 $\alpha=0.3$，$\alpha=0.6$，$S_0^{(1)}=S_0^{(2)}=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=87.7$，建立布的直线指数平滑预测模型。

（3）计算模型拟合误差，比较 3 个模型的优劣。

（4）用最优的模型预测 1982 年和 1985 年布的产量。

2．1960～1982 年全国社会商品零售额如表 12 所示（单位：亿元）。

表 12 全国社会商品零售额数据

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
零售总额	696.9	607.7	604	604.5	638.2	670.3	732.8	770.5
年份	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
零售总额	737.3	801.5	858	929.2	1023.3	1106.7	1163.6	1271.1
年份	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	
零售总额	1339.4	1432.8	1558.6	1800	2140	2350	2570	

试用三次指数平滑法预测 1983 年和 1985 年全国社会商品零售额。

3．某地区粮食产量（亿千克），从 1969～1983 年顺次为：3.78，4.19，4.83，5.46，6.71，7.99，8.60，9.24，9.67，9.87，10.49，10.92，10.93，12.39，12.59，试选用 2～3 种适当的曲线预测模型，预测 1985 年和 1990 年的粮食产量。