中学数学奥林匹克系列专题

图论基本知识100例

张宁生　田利英　编著

新华出版社

中学数学奥林匹克系列专题
图论基本知识100例
张宁生　田利英　编著
•
新华出版社出版发行
新华书店经销
北京燕山印刷厂印刷
•
787×1092毫米　32开本　2.75印张　51,000字
1990年12月第一版　1990年12月北京第一次印刷
印数：1—15,000册
ISBN 7-5011-0936-2/G·290　定价：1.80元

引　言

物质结构，如晶体可看作是一个图。

电气网络可看作一个图。

此外，城市规划，交通图，工作调配图，均可视为图。

图是由点和线连接起来的。

图论是研究图的概念、性质及其应用的一门数学分支。图论有着广泛应用，如电子科学技术领域里的网络分析和综合；通讯网络与开关网络的设计；印刷电路的走线与集成电路的布局；计算机结构设计、编译技术及计算机应用等。

近年来国内外数学竞赛出现了许多与图论有关的试题，下面对图论，略作入门介绍。

编写本书之前，作者曾在北京实验中学高一联合小组开过选修课，依照校长王本中的意见是愈通俗愈好，这也是编写本书的基本格调——旨在入门(本书是该选修课的部分内容)。之后作者又在北京市奥林匹克数学学校高一组、北京市东城区奥林匹克数学学校等处讲过，本书就是在此基础上整理、修改而成，感谢上述学校师生们的支持。

目　　录

§1 基本概念

1 定义

由V、E组成的二元组称作图，并用符号G（V，E）表示图，此处

（1）V是一个p元集合$\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，$p>0$

（2）E是一个q元集合$\{e_1, e_2\cdots, e_q\}$，$e_i=\{v_i, v_j\}$表示由顶点v_i，v_j连接而成。其中 v_i（$i=1, 2, \cdots, p$）称作G中的顶点，e_j（$j=1, 2, \cdots, q$）称作G中的边。

例1 若在图G（V，E）中

（1）$V=\{A, B, C, D\}$

（2）$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$=\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{A, C\}, \{B, D\}\}$

试画其图。

解：如图1

说明：可以作一种直观解释，比如有A、B、C、D四名乒乓球选手。

A与B、C赛过

B与A、C、D赛过

C与A、B、D赛过

D与B、C赛过

对已经进行过的比赛，画出的图1即为其赛程图。

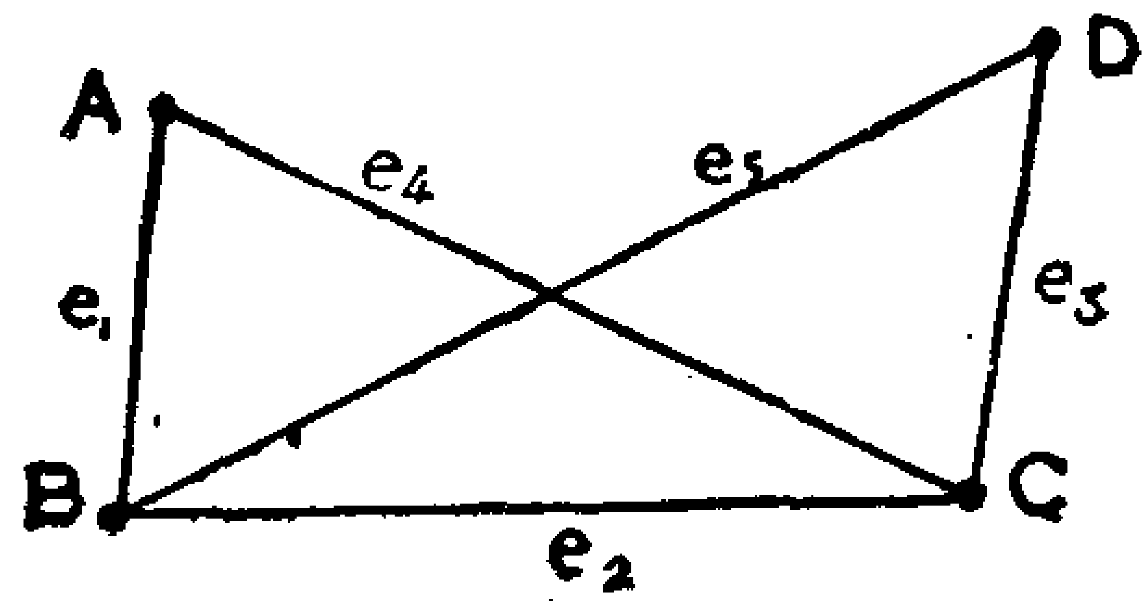

图1

还有一点值得注意，图中两边的交点不见得是图的顶点。如e_4、e_5“相交处”不是顶点也可画为图2。

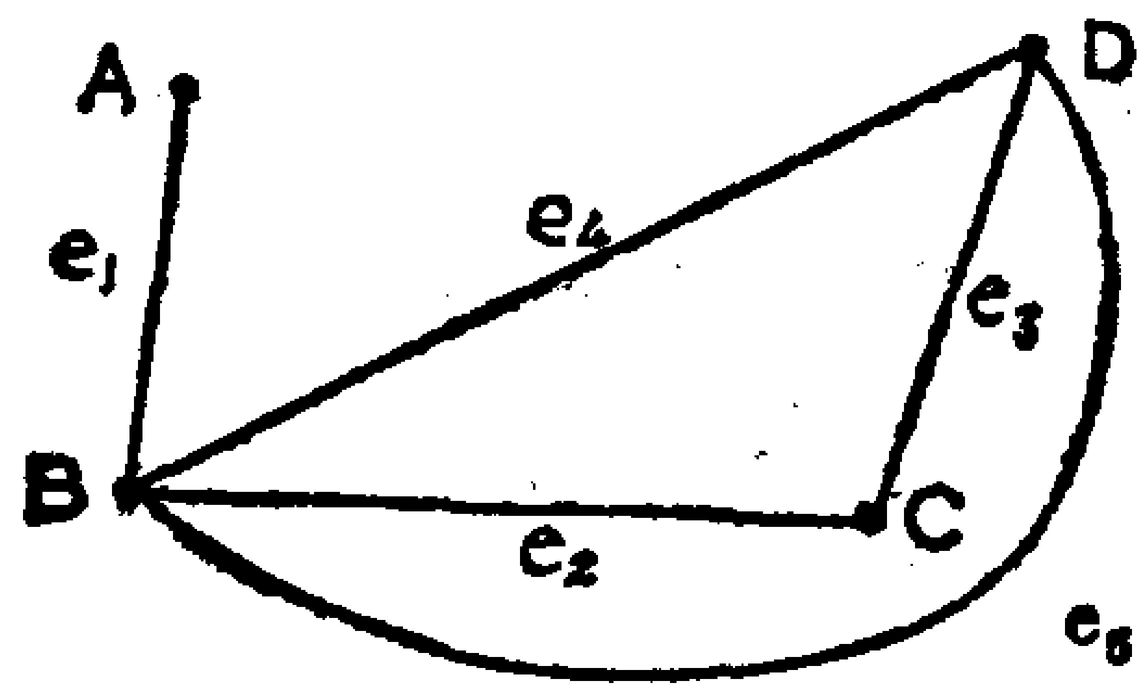

图2

练习1 设$V=\{a, b, c, d\}$，$E=\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{c, c\}, \{c, d\}\}$，试画出图$G(V, E)$

例2 在图1中，哪些点是相邻的。

答 (1) 因为A、B之间有关联边e_1，所以A、B相邻

(2) $\because e_4=\{A, C\}$, $\therefore A$、C相邻

(3) $\because e_2=\{B, C\}$, $\therefore B$、C相邻

(4) $\because e_5=\{B, D\}$, $\therefore B$、D相邻

(5) $\because e_3=\{C, D\}$, $\therefore C$、D相邻

2 多重图与简单图

(1) 若两个点之间多于一条边，则称为多重边

(2) 含多重边的图为多重图.

(3) 若边的两个端点相同，则称此边为环

(4) 无环、无多重边的图称为简单图

(5) 一个具有p个顶点的简单图，每两点之 间均有关联边，则称此图为完全图，记作K_p

以后提到图，如无特殊声明，均指简单图

例3 在图3中，e_1与e_2都是连接A、B两点的边，故为多重边

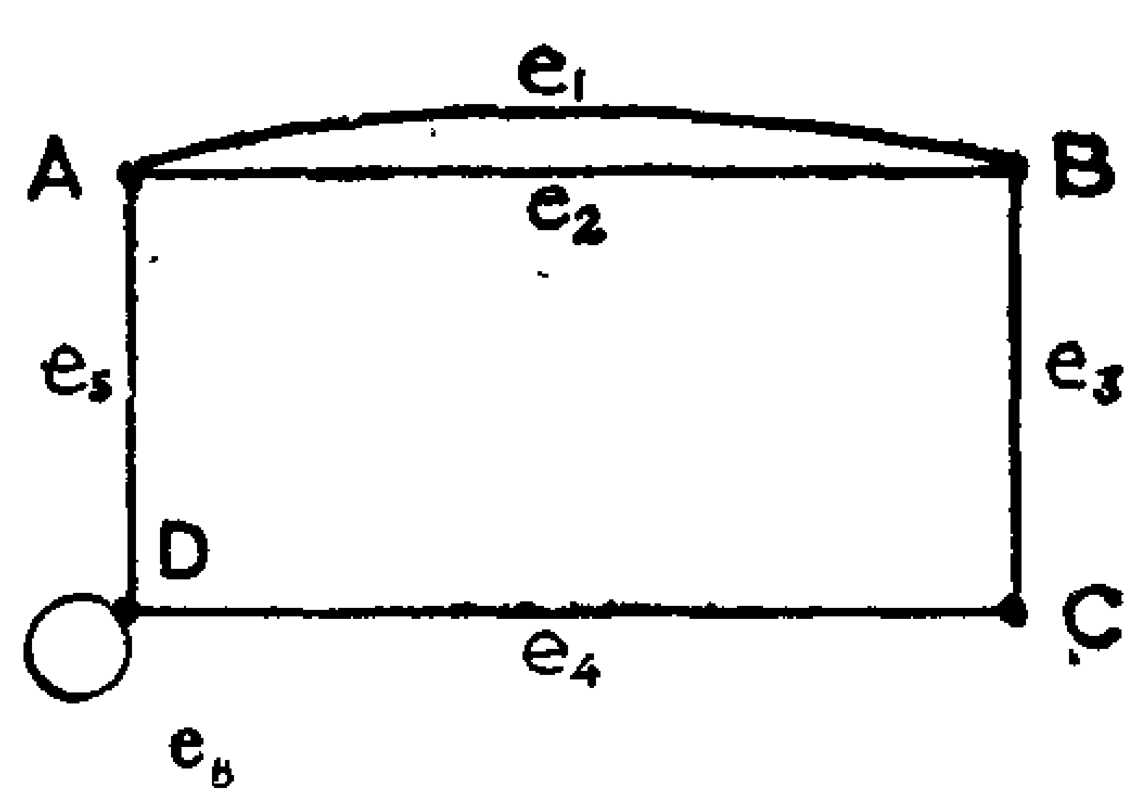

图3

e_6是一个环

例4 完全图K_6有15条边

一般地有

完全图K_p有$\frac{1}{2}p(p-1)$条边

例5　七桥问题

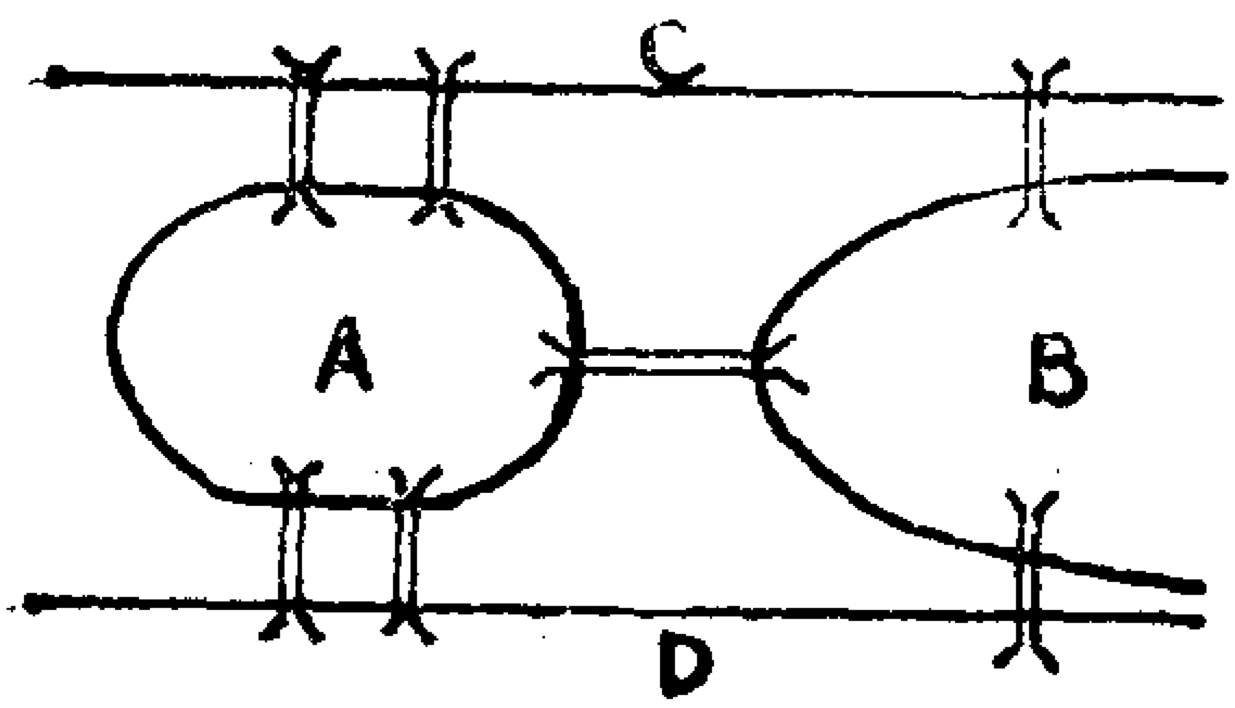

图4

哥尼斯堡（今加里宁格勒）有一条河，河中有一个岛，共建七座桥，连接起被隔开的四块陆地。如图4。有人希望作一次散步，从某块陆地出发，经过每座桥一次且仅一次，然后再回到原出发点是否可能？试将此问题转化为图论问题。

分析：图论中的图是由点集V与边集E组成的：今四块陆地相当于四个点，而联系各陆地之间的桥相当于边。因此是不难转化为图论问题的。

解：设四块陆地分别用点A、B、C、D表示，由于岛A与陆地C有两座桥可以画出关联A、C的两条边

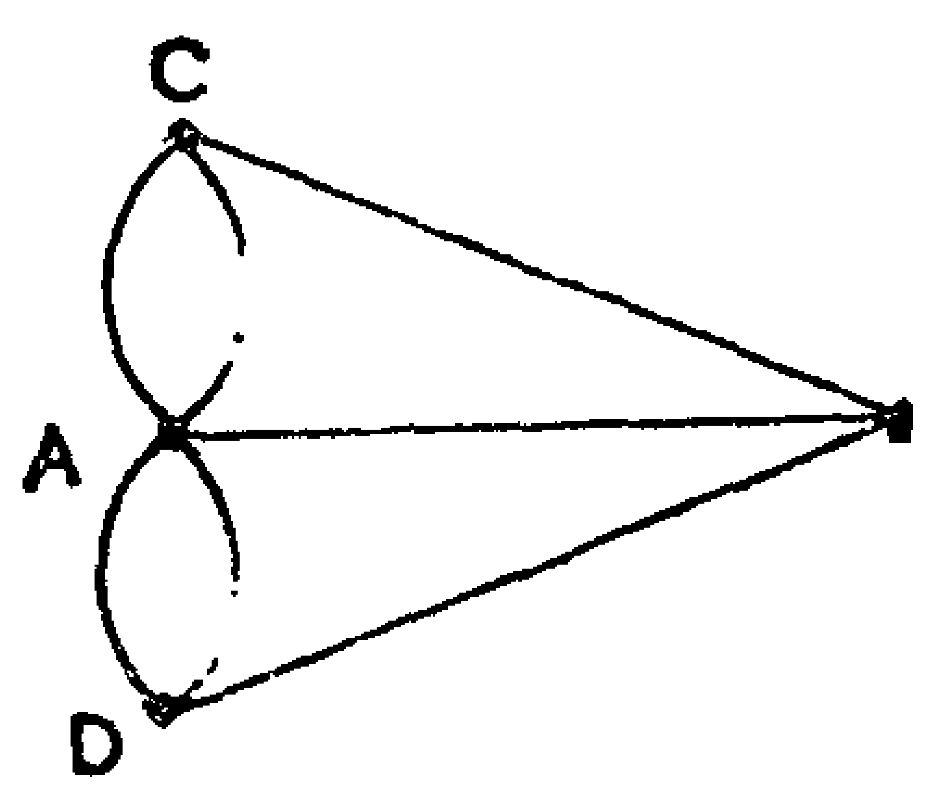

图5

同理还可以画出关联A、B的一条边；关联A、D的二条边；关联B、D的一条边；关联B、C的一条边，这样就得到如图5的图G。

于是问题转化为一个"一笔画问题"即能否从任何一点开始，一笔画出这个图形，最后回到原来的点，而不重复。

以后将证明此题无解。

说明：在客观世界里的事物，一般视为图G中的点，例如陆地；事物与事物之间的某种特定的联系视为G中的边，例如桥。这样就可以将实际问题抽象转化为图论问题

核：事物$\xrightarrow{\text{转化}}$点；

联系$\xrightarrow{\text{转化}}$边

$\Longrightarrow$问题$\xrightarrow{\text{转化}}$图

3　点的次数

点v的关联边个数称为点v的次数，简称为点v的次，记作$d(v)$

(1) 若$d(v)=1$，则称点v为悬挂点，与悬挂点关联的边称为悬挂边。

(2) 若$d(v)=0$，则称点v为孤立点

(3) 若$d(v)$为奇数，则称点v为奇点；若$d(v)$为偶数，则称点v为偶点

例6　在图5中，求各点的次

解　$d(A)=5$，$d(B)=3$，$d(C)=3$，$d(D)=3$

A、B、C、D它们都是奇点

例7　求证：如下序列不可能是某个简单图顶点的次的

序列

(1) 7, 6, 5, 4, 3, 3, 2;

(2) 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1

分析：只要证明它们各不满足简单图的性质即可。

什么叫简单图？简单图有何性质？

证：(1) 简单图G的每个顶点的次$d(v_i)$小于G的顶点个数p。即

$$d(v_i) \leqslant p-1$$

今$p=7$，$d(v_1)=7>7-1=p-1$，矛盾

(2) 由于$d(v_1)=d(v_2)=6$且G为简单图，所以v_1，v_2分别与v_3、v_4、v_5、v_6、v_7有关联边。

因此

$d(v_i) \geqslant 2$ ($i=3, 4, 5, 6, 7$)

与有一点的次为1矛盾。

练习2 求证：序列6，6，6，4，4，3，2不可能是某个简单图的顶点的次的序列

§ 2 基 本 性 质

1 定理1

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q$$

分析：从一条边产生点的次数着手

证：对于每一条边$\{v_i、v_j\}$，由于关联着两个点v_i，v_j，因此产生点的次数为2

于是

$$\frac{q}{\sum_{v \in V} d(v)} = \frac{1}{2}$$

故 $2q = \sum_{v \in V} d(v)$

说明：定理1不仅适用于简单图，也适用于多重图。不过要注意

（1）点v每关联一条普通边$\{v_i，v_j\}$时v的次数增加1；

（2）点v每关联一个环时，v的次数增加2。

例8 求证：在空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，而它们的每个面又都有奇数条边

（1956年北京市数学竞赛试题）

证　（利用反证法）

如果这种多面体存在，则将多面体的面看作图G中的点，有公共边的两个面之连以线各作图G中的边。

于是多面体问题转化为一个图论问题．其中点集为$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，边集为$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$

已知$|V|=p$为奇数，每个面有奇数条边，即G中每个点的次$d(v)$为奇数。

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) \text{为奇数}$$

又由定理1知$\sum\limits_{i=1}^{p} d(v_i)=2q$为偶数，矛盾

故这种多面体不存在。

2　定理2

任一个图中，奇点的个数为偶数

分析：由于奇点的次为奇数，今欲证奇点的个数为偶数，只要证所有奇点的次数和为偶数即可。

证：图G的顶点不外乎奇点和偶点两类。设V_1和V_2分别表示奇点集合与偶点集合，则

$$\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v)=\sum_{v\in V} d(v)=2q$$

因为$\sum\limits_{v\in V}d(v)$、$\sum\limits_{v\in V_2}d(v)$均为偶数，所以$\sum\limits_{v\in V_1}d(v)$也为偶数

故V_1中的顶点数为偶数。

练习3 证明任何一群人中，认识这群人中奇数个人的人有偶数个

（匈牙利数学竞赛试题）

例9 若简单图G有n个顶点，$n+1$条边，则G中至少存在一个顶点v，$d(v)\geqslant 3$

证（利用反证法）

若对G中任一顶点v_i，都有$d(v_i)\leqslant 2$，则由定理1知

$$2(n+1)=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}2=2n$$

于是$n+1\leqslant n$，矛盾

故存在一点v，$d(v)\geqslant 3$

练习4 求证：若G是简单图，则$q\leqslant\frac{1}{2}p(p-1)$

练习5 若一个简单图G中有n个顶点，$3n+1$条边，则G中至少存在一个顶点v，$d(v)\geqslant 7$

例10 画一个点的次分别是3，3，4，5，5，6的图

分析：（1）此图的顶点个数$p=6$

（2）此图的边数$q=?$

$\because$ $$2q=\sum_{v\in V}d(v)=3+3+4+5+5+6=26$$

$\therefore q=13$

(3) 由于有一点的次为6，它与其余五个点相连，次数只到5，故此图非简单图，要画此图或者加添多重边或者添环。

(4) 尝试画图

作法1：(对称均匀增次法)

(1) 首先画出v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6各点

(2) 连v_1、v_2，v_3、v_4，v_5、v_6于是各点的次均为1

(3) 连v_1、v_3，v_2、v_4，v_3、v_5，v_4、v_6，v_5、v_1，v_6、v_2于是各点的次再增2，次均为3

不失一般性，可设v_1、v_2是满足次为3的点，以后v_1、v_2不再添关联边。

(4) 连v_3、v_6，v_4、v_5于是v_3、v_4、v_5、v_6各点的次均为4

不失一般性，可设v_3是满足次为4的点，以后v_3不再添关联边。

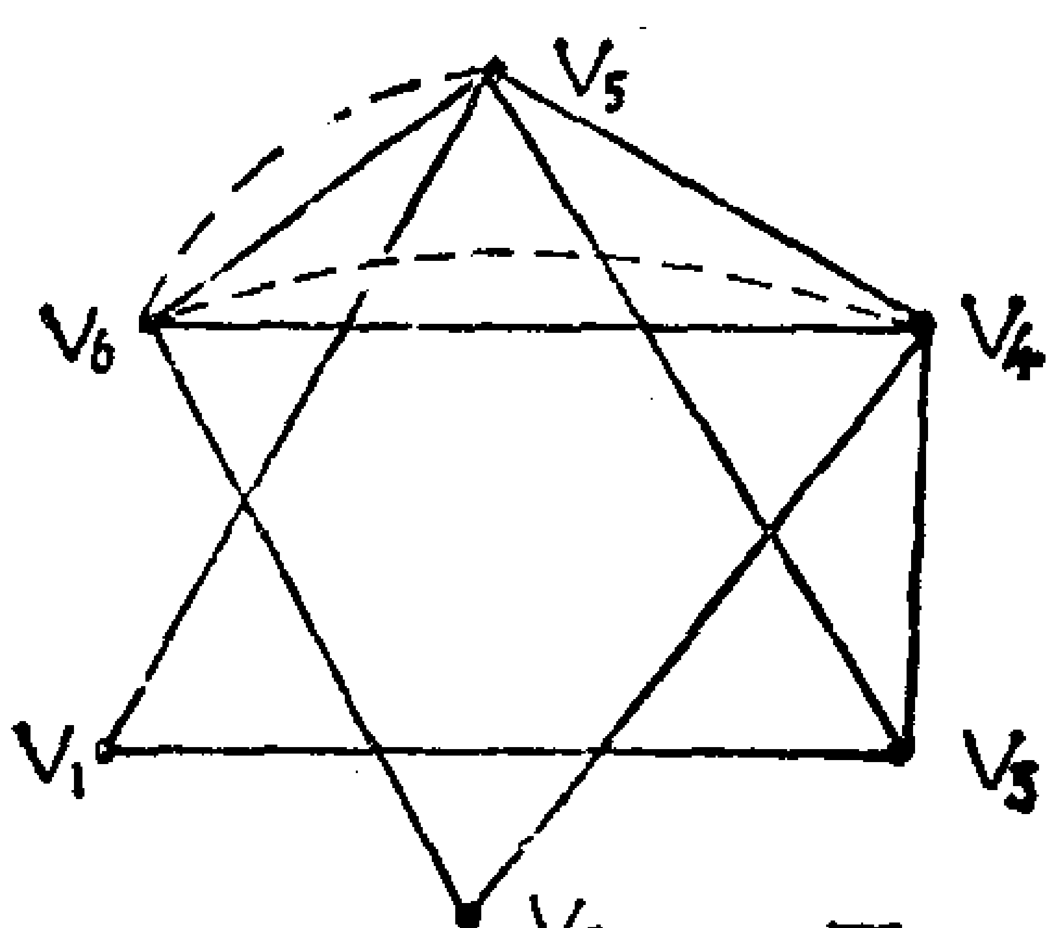

图6

(5) 连v_4、v_6，v_5、v_6于是$d(v_4)=5$，$d(v_5)=5$，$d(v_6)=6$，如图6，则图6即为所求。

作法2：

(1) 画出v_1，v_2，v_3、v_4，v_5，v_6各点

(2) 为了满足d

$(v_1)=3$，可以连 v_1、v_2，v_1、v_3，v_1、v_4，以后v_1 不再添关联边

(3) 为了满足$d(v_2)=3$，可以连v_2、v_3，v_2、v_4，以后v_2不再添关联边

(4) 为了满足$d(v_3)=4$，可以连v_3、v_4，v_3、v_5，以后v_3不再添关联边

(5) 为了满足$d(v_4)=5$，可以连v_4、v_5，v_4、v_6，以后v_4不再添关联边

(6) 为了满足$d(v_5)=5$，可以连v_5、v_6，此时v_5的次为3还少2次，可以加两个多重边$\{v_5, v_6\}$

(7) 为了满足$d(v_6)=6$，可以对v_6加一个环，注意一个环的次为2

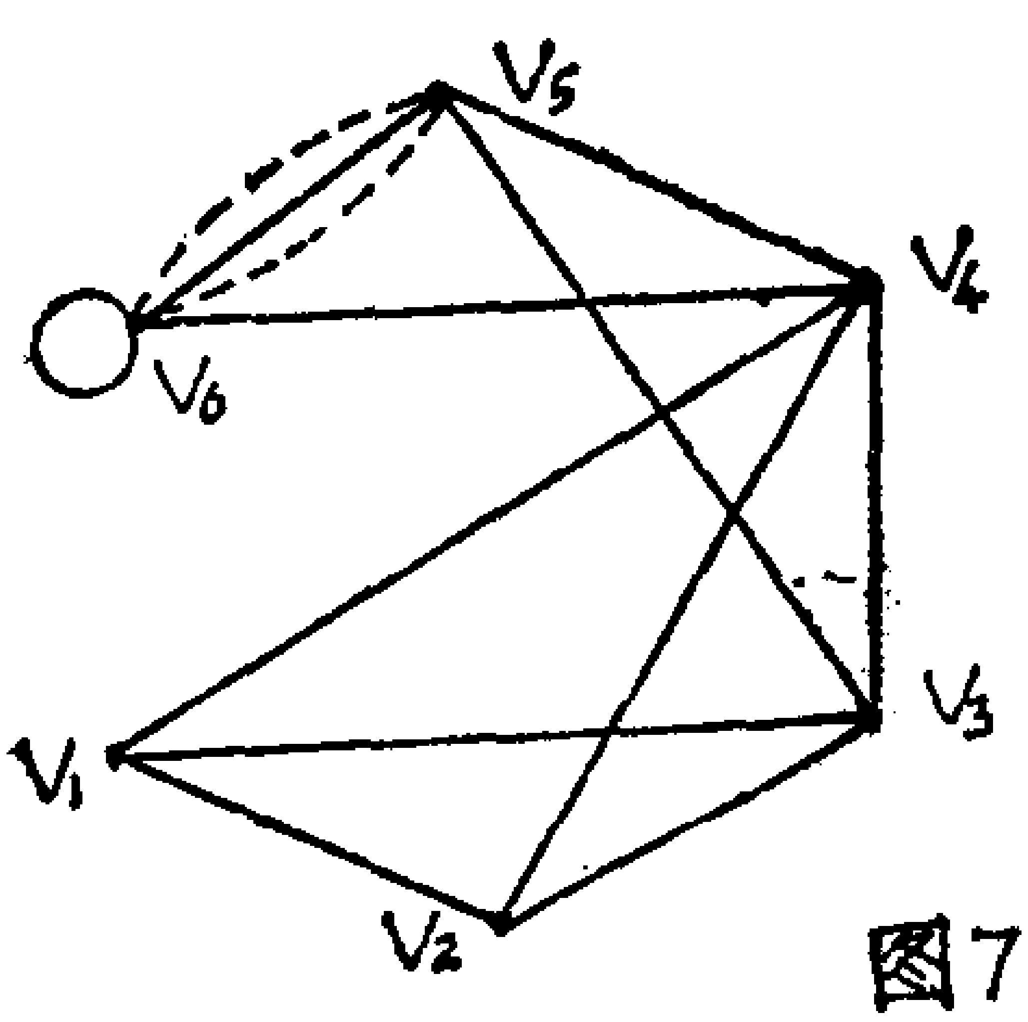

图7

如图7，则图 7 即为所求

作法3：

(1) 画出v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6各点

(2) 为了满足$d(v_6)=6$，可以连v_1、v_6，v_2、v_6，v_3、v_6，v_4、v_6，v_5、v_6此时v_6的次为5还少1次，不妨加一条多重边$\{v_5, v_6\}$，以后v_6不再添关联边

(3) 为了满足$d(v_5)=5$，可以连v_4、v_5，v_3、v_5，v_2、v_5，以后v_5不再添关联边

(4) 为了满足$d(v_4)=5$，可以连v_3、v_4，v_2、v_4，v_1、v_4，以后v_4不再添关联边

（5）连v_1、v_3，则$d(v_3)=4$，$d(v_1)=3$

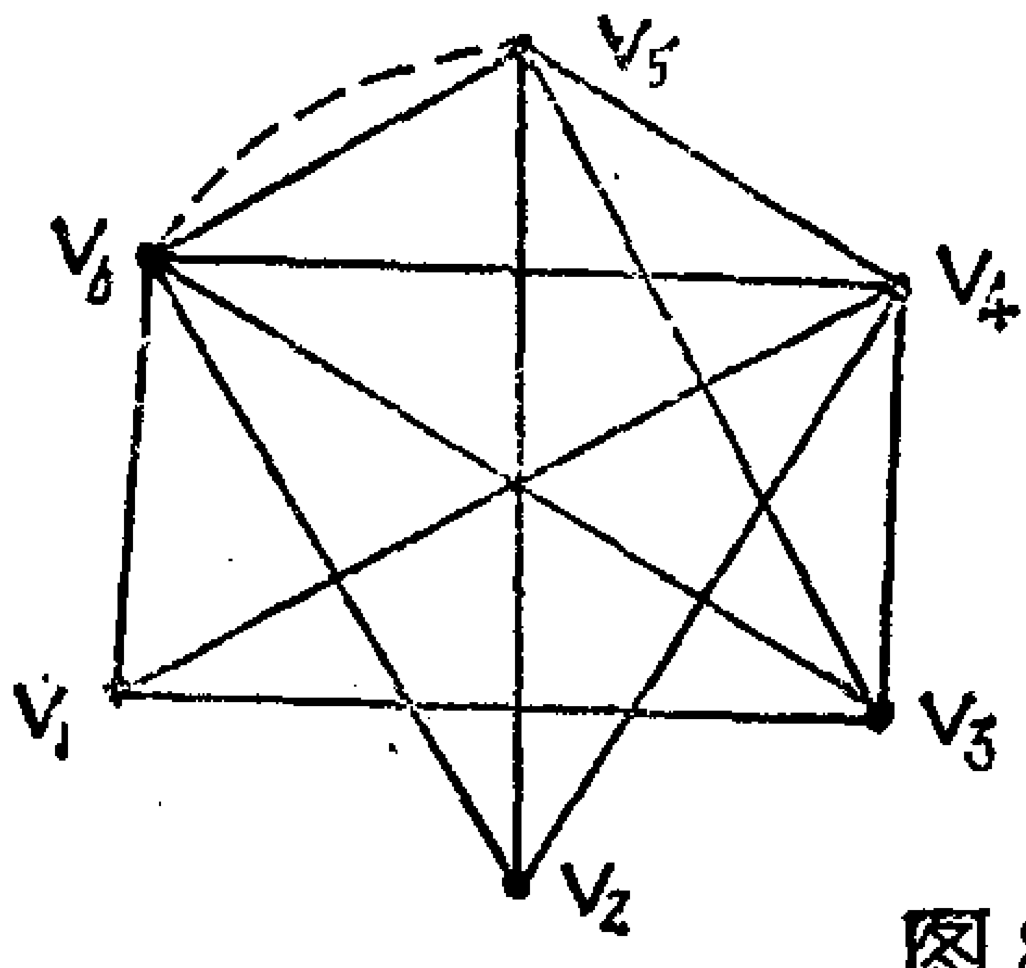

图8

如图8，则图8即为所求

说明：从作法1、2、3 所作的图不同知道，满足题设条件的图很多，读者不妨画几张不同的图。

练习6 画一个有7个顶点的次为4的简单图

例11 有八种药品A，B，C，D，P，R，S，T要放进贮藏室保管，出于安全原因，下列各组药品不能贮藏在同一室内：

$\{A, R\}$，$\{A, C\}$，$\{A, T\}$，$\{R, P\}$，$\{P, S\}$

$\{S, T\}$，$\{T, B\}$，$\{B, D\}$，$\{D, C\}$ $\{R, S\}$，

$\{R, B\}$，$\{P, D\}$，$\{S, C\}$，$\{S, D\}$

问贮藏这八种药品至少需要多少个房间？

分析：（1）八种药品放到八个房间，肯定安全，因此这个问题的解是存在的。

（2）现在的问题是要减少房间，求满足要求的最少房间数。

今将问题错综、复杂的关系转化为图，将不难看清脉

络。

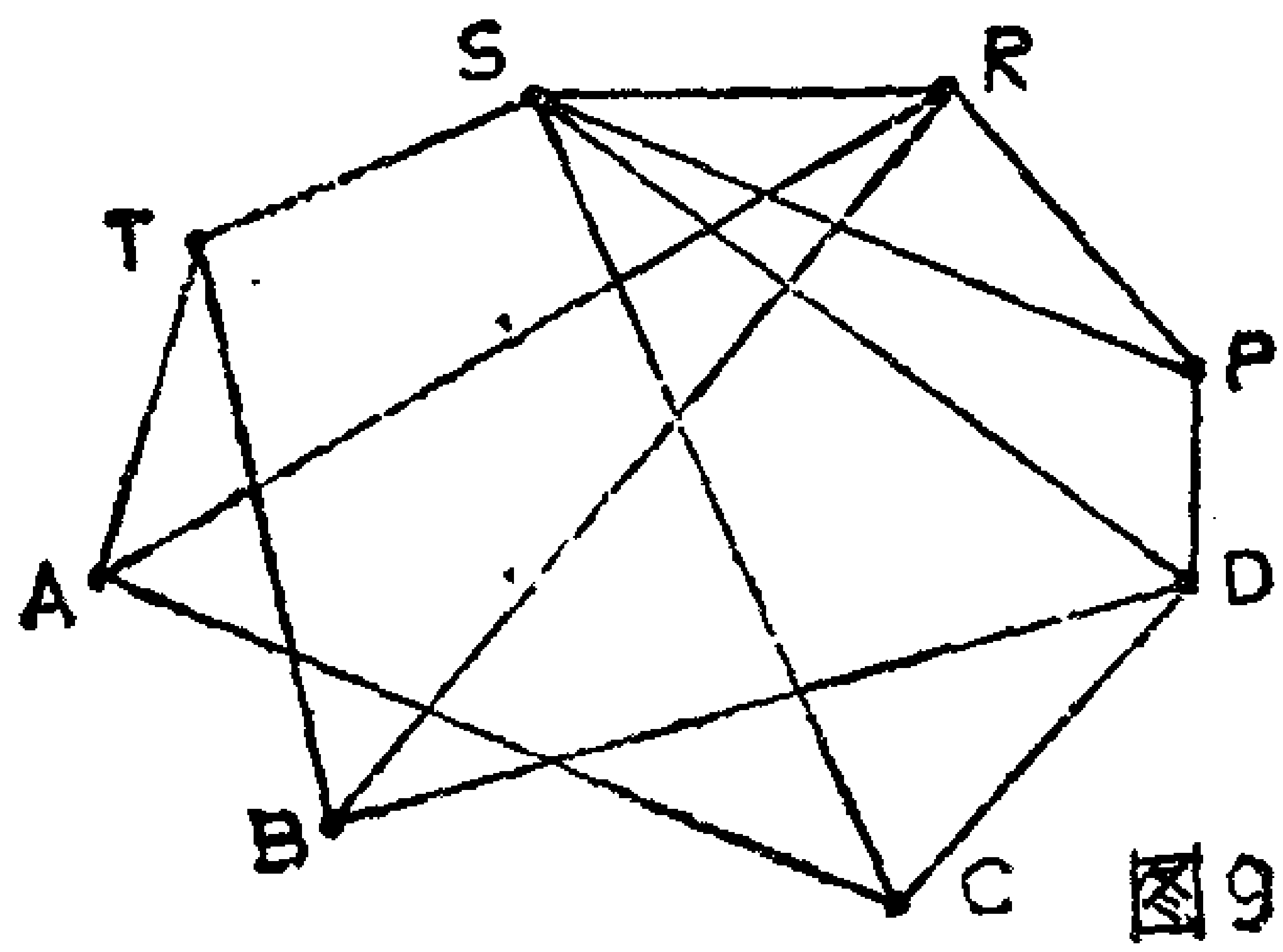

图9

解：设A、B、C、D、P、R、S、T是图G (V, E)中的八个顶点。它们之间有不能放在同一室内的关系，用边表示，共14条边。画出图9

统计各点的次，并按次的大小排队

$d(S)=5 \quad d(R)=d(D)=4$

$d(A)=d(B)=d(C)=d(P)=d(T)=3$

由于次愈大的点愈不好安置，故优先考虑它。

观察不相邻的点组为

$S, A, B; R, D, T; C, P$

故至少需要三个房间

S, A, B放入房间Ⅰ

R, D, T放入房间Ⅱ

C, P放入房间Ⅲ

说明：当然还有其它方案，如

(1) 如果把房间Ⅰ中的B调入房间Ⅲ，遂得方案二

$S, A \longrightarrow$ Ⅰ

$R, D, T \longrightarrow$ Ⅱ

$C, P, B \longrightarrow$ Ⅲ

（2）如果把房间Ⅱ中的T调入房间Ⅲ，遂得方案三

S，A，$B \longrightarrow$ Ⅰ

R，　$D \longrightarrow$ Ⅱ

C，P，$T \longrightarrow$ Ⅲ

例12　已知九个人v_1，v_2，…，v_9，其中v_1和两个人握过手，v_2、v_3、v_4、v_5和三个人握过手，v_6和四个人握过手，v_7、v_8各和五个人握过手，v_9和六个人握过手，求证：这九个人中一定可以找出三个人，他们互相握过手。

分析：(1) 显然要找出的三个人，v_9最有份，其次是v_7、v_8和v_6

(2) 事物——人——点

关系——握过手——边

证：设v_1，v_2，…，v_9为图G中的九个点，如v_i和v_j握过手，就连一条边$\{v_i, v_j\}$

则$d(v_1)=2$，$d(v_2)=d(v_3)=d(v_4)=d(v_5)=3$，

$d(v_6)=4$，$d(v_7)=d(v_8)=5$，$d(v_9)=6$

(1) 由于$d(v_9)=6$，即使v_9与v_1、v_2、v_3、v_4、v_5都相邻，也只有5条关联边，因此至少有一条关联边是v_9和v_6、v_7、v_8之一相邻而构成的

故存在一点v_k不但与v_9相邻且$d(v_k)\geqslant 4$（k为6，7，8之一）

(2) 设与v_9相邻的另外5点为v_{i1}，v_{i2}，v_{i3}，v_{i4}，v_{i5}即使v_k与其它2点相邻也只有3条关联边，因此至少有一条关联边是v_k与v_{i1}，v_{i2}，…，v_{i5}之一相邻而构成的，设此点为v_h

因此，v_3，v_h，v_k两两相邻，故v_3、v_h，v_k三个人互相握过手。

练习7 已知在图$G(V, E)$中，$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ $d(v_i)\geqslant 2(i=1, 2, 3, 4)$，求证：存在两条端点不同的边

例13 某工厂有六种颜色的纱，要生产双色布，在生产过程中，每种颜色的纱至少和其它三种颜色的纱搭配，求证可以选出三种不同的双色布，它们包含所有六种颜色

（匈牙利数学竞赛试题）

分析：事物—— 颜色 ——点

关系——双色布——边

于是转化为图论问题

设点v_1、v_2、v_3、v_4、v_5、v_6分别表示六种颜色的纱。生产出双色布的两种颜色的纱v_i，v_j，用$\{v_i, v_j\}$边连接，于是问题转化为：

已知在图$G(V, E)$中，$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$，$d(v_i)\geqslant 3$ $(i=1, 2, \cdots, 6)$

求证：存在三条端点不同的边

证：$\because d(v_1)\geqslant 3$，不失一般性，设存在$\{v_1, v_2\}\in E$

$\because d(v_3)\geqslant 3$，不失一般性，设存在$\{v_3, v_4\}\in E$

最后剩下v_5，v_6两点

若$\{v_5, v_6\}\in E$，则$\{v_1, v_2\}$，$\{v_3, v_4\}$，$\{v_5, v_6\}$，即为所求；

若$\{v_5, v_6\}\notin E$。

由于$d(v_5)\geqslant 3$，则$\{v_i, v_5\}\in E$（i为1，2，3，4中至少三个） ①

由于$d(v_6)\geqslant 3$，则$\{v_j, v_6\}\in E$（j为1，2，3，4中至少三个） ②

由①、②知i，j中至少有两个相重

（1）若$i=j=1$，2，即

$$\{v_1, v_5\},\ \{v_2, v_5\}\in E$$

$$\{v_1, v_6\},\ \{v_2, v_6\}\in E$$

则$\{v_1, v_5\}$，$\{v_2, v_6\}$，$\{v_3, v_4\}$或$\{v_1, v_6\}$，$\{v_2, v_5\}$，$\{v_3, v_4\}$即为所求。

（2）若$i=j=3$，4同（1）论证

（3）若$i=j=1$，3 即

$$\{v_1, v_5\},\ \{v_3, v_5\}\in E$$

$$\{v_1, v_6\},\ \{v_3, v_6\}\in E$$

此时

1）若$\{v_2, v_5\}\in E$，$\{v_4, v_6\}\in E$

则$\{v_1, v_6\}$，$\{v_2, v_5\}$，$\{v_3, v_4\}$或$\{v_3, v_5\}$，$\{v_4, v_6\}$，$\{v_1, v_2\}$即为所求

2）若$\{v_4, v_5\}\in E$，$\{v_2, v_6\}\in E$

则$\{v_1, v_5\}$，$\{v_2, v_6\}$，$\{v_3, v_4\}$或$\{v_3, v_6\}$，$\{v_4, v_5\}$，$\{v_1, v_2\}$即为所有

其它情形同（3）论证。

例14　有一参观团，它的任意四名成员中必有一成员原

先见过其他三名成员，试证明任意四名成员中，总有一成员，他原先见过参观团的所有成员

（匈牙利数学竞赛试题）

分析：

事物——成员——顶点

关系——曾见过面——边

于是问题转化为

已知在图$G(V, E)$中，任意四个顶点中必有一顶点和其它三个顶点相邻

求证：G中的任意四个顶点中，必有一顶点和G的其它所有顶点相邻。

证：（利用反证法）

若G中有四个顶点x，y，z，w其中每个顶点和G的其它顶点不全相邻

设x'与x不相邻，y'与y不相邻，z'与z不相邻。

由已知可设x与y，z，w相邻，从而推出：

$$\begin{cases} x' \neq y, \ z \\ y' \neq x \ (\text{否则，} y\text{与}x\text{不相邻}) \end{cases}$$

（1）当$x' \neq y'$时，则x，y，x'，y'中没有一个顶点和其它三个顶点都相邻，与已知条件矛盾。

（2）当$x' = y' \neq z'$时，则y，z，y'，z'中没有一个顶点和其它三个顶点都相邻，与已知条件矛盾。

(3) 当$x' = y' = z'$时，则x，y，z，x' 中没有一个顶点和其它三个顶点都相邻，与已知条件矛盾。

故G中的任意四个顶点中必有一顶点和G的其它顶点都相邻。

§3 图的连通性

1 通路

若μ是图G的一个"点和边的交替序列"

$$\mu = (v_{i1},\ e_{i1},\ v_{i2},\ e_{i2}\cdots,\ e_{ik-1},\ v_{ik})$$

且满足

$$e_{it} = (v_{it},\ v_{it+1})\ (i = 1, 2,\ \cdots,\ k-1)$$

则称μ是一条从v_{i1}到v_{ik}的通路，简记为

$$\mu = (v_{i1}, v_{i2},\ \cdots,\ v_{ik})$$

通路中边的个数称为通路的长度。

例15 在图10中

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

其中$e_1 = \{v_1, v_2\}$，$e_2 = \{v_2,\ v_3\}$，$e_3 = \{v_3,\ v_4\}$，$e_4 = \{v_1,\ v_3\}$

则(v_1, v_2, v_3, v_4)或(e_1, e_2, e_3)就是一条通路

2 回路

在一条通路$\mu=(v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{ik})$中，如果$v_{i1}=v_{ik}$则称$\mu$是一条回路。

例16 在图11中

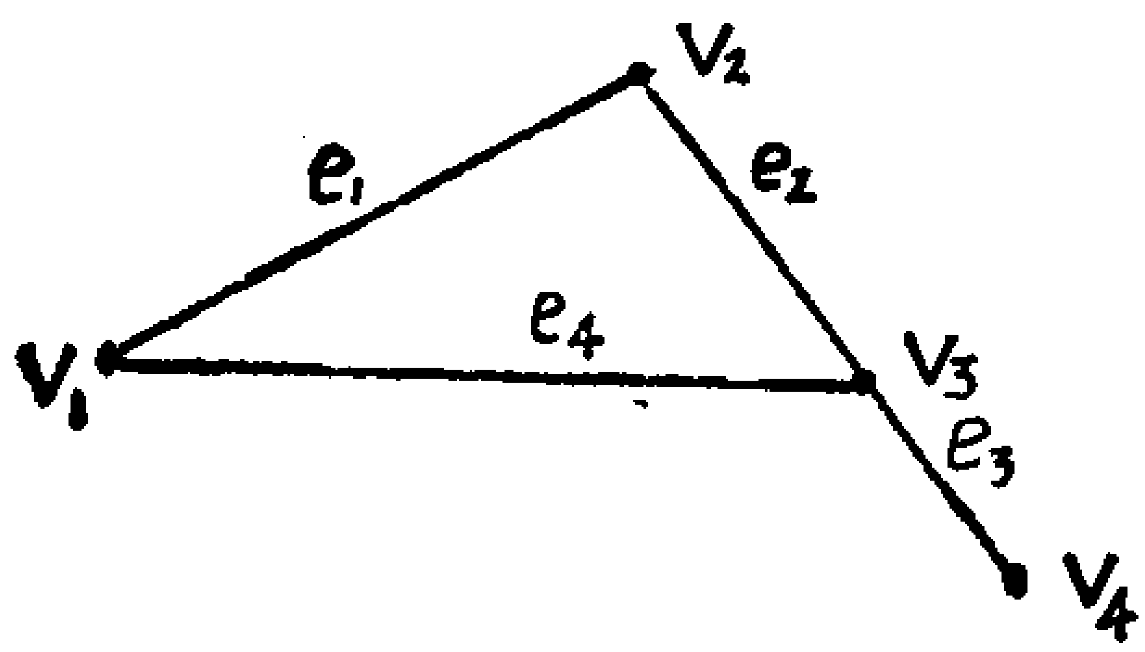

图10

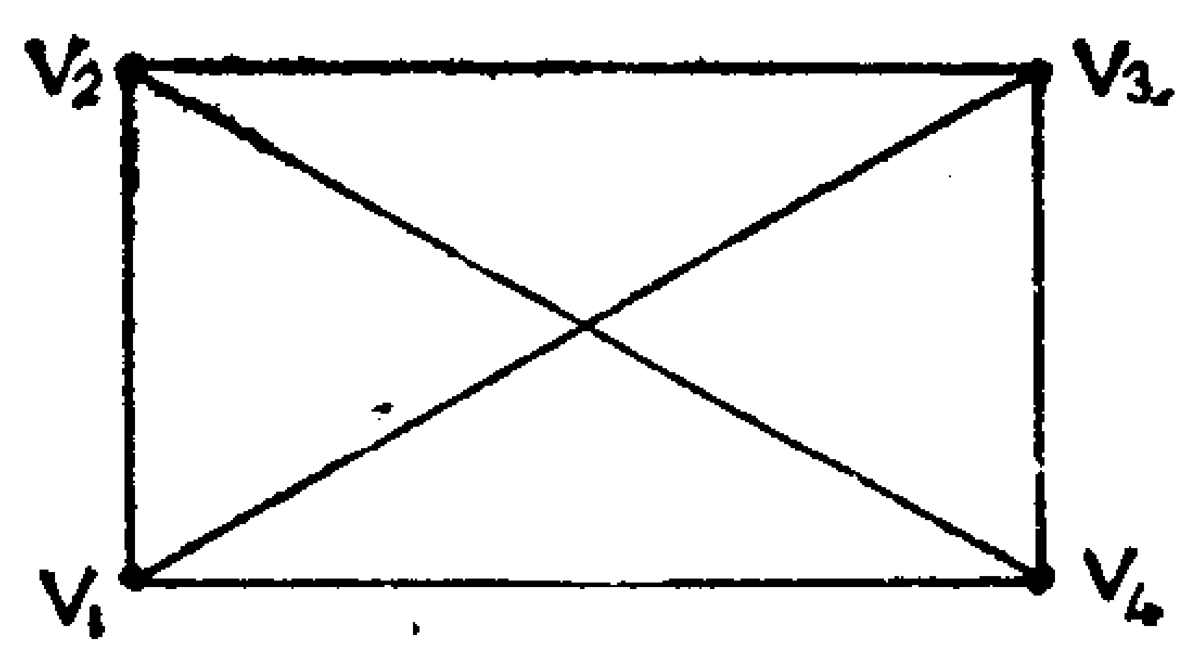

图11

$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$是一条回路

(v_1, v_2, v_4, v_1)也是一条回路

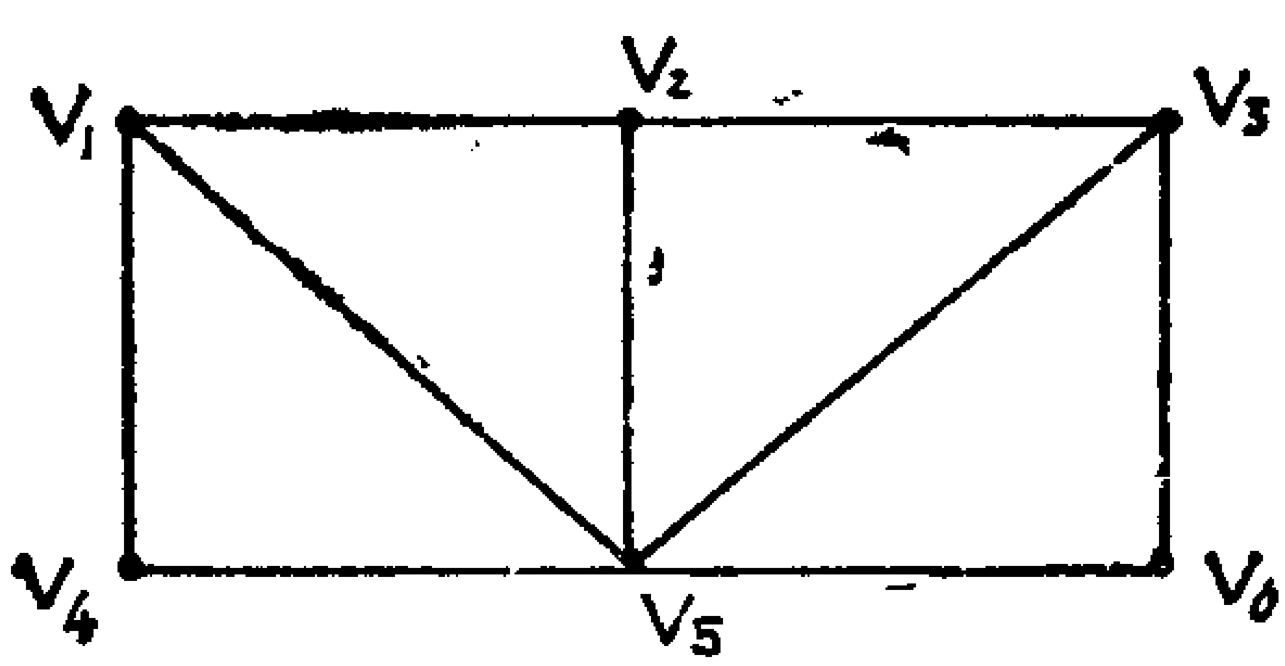

图12

$(v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_2, v_1)$还是一条回路

3 简单通路

若通路中所含的边均不相同，则称为简单通路

例17 在图12中

(1) $(v_4, v_1, v_2, v_5, v_1, v_2, v_3, v_6)$是从$v_4$到$v_6$的一条通路，但它不是简单通路，因为$(v_1, v_2)$走过两次。

(2) $(v_4, v_1, v_5, v_2, v_3, v_5, v_6)$是一条简单通路，因为所经过的边均不同。

例18　在图13中，求一条包含图中所有边的简单通路

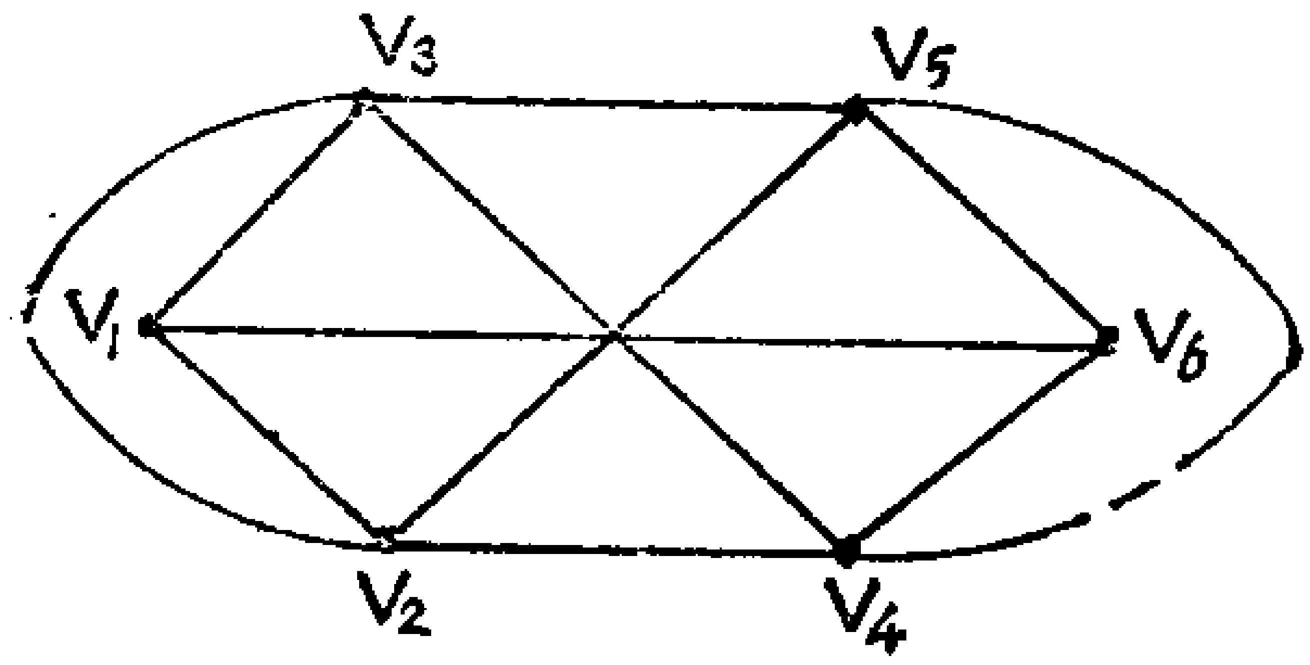

图13

分析：奇点有奇数条关联边，对某点来说，一入一出需偶数个关联边，所以奇点可作为通路的始点或终点，偶点可作为通路的中间过渡点。

解：由于v_1，v_6是奇点，所以v_1，v_6可作为通路的始点或终点，今作一通路

$$\mu=(v_1, v_2, v_3, v_1, v_6, v_4, v_3, v_5, v_2, v_4, v_5, v_6)$$

则u即为所求的简单通路

说明：满足要求的简单通路不只一条，但关键要抓住两点

(1) 奇点作为始点或终点

(2) 图G中的其它点均为次数$\geqslant 2$的偶点

4　基本通路

若通路中所含的点均不相同，则称为基本通路。

特别地

在一条长度大于2的回路中，除始点和终点外，每一顶点仅经过一次，则称此回路为圈。

例19　求证：一个基本通路一定是简单通路

分析：只要证明任一条顶点不同的通路，其边也不同即可

证：设 $\mu=(v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{ik})$ 是一条基本通路，则由基本通路的定义知

$$v_{is} \neq v_{it} \ (s, t=1, 2, \cdots, k, s \neq t)$$

因而 $(v_{is}, v_{is+1}) \neq (v_{it}, v_{it+1}) \quad (s \neq t)$

故 μ 也是一条简单通路

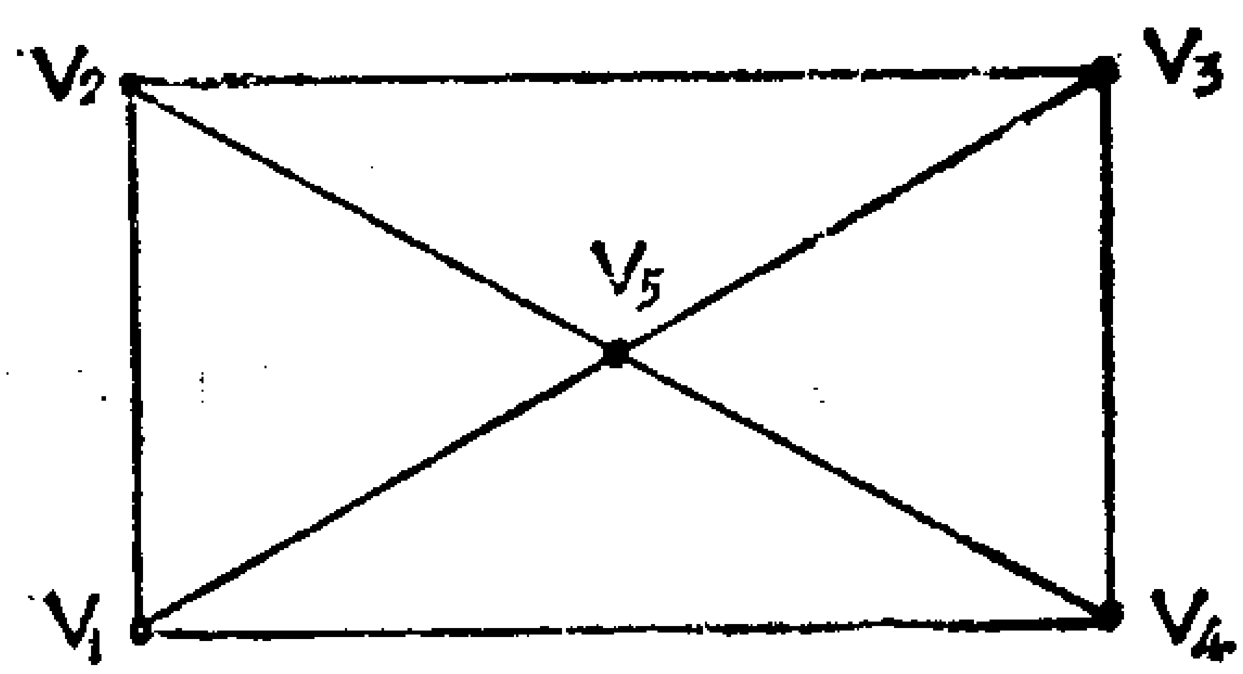

图14

说明：基本通路一定是简单通路，但简单通路并不一定是基本通路。例如在图14中

$\mu=(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_5)$ 是一条简单通路，但不是基本通路

5　连通图的定义

在一个图 G 中，若任何两点之间至少有一条通路，则称 G 为连通图，否则称为非连通图。

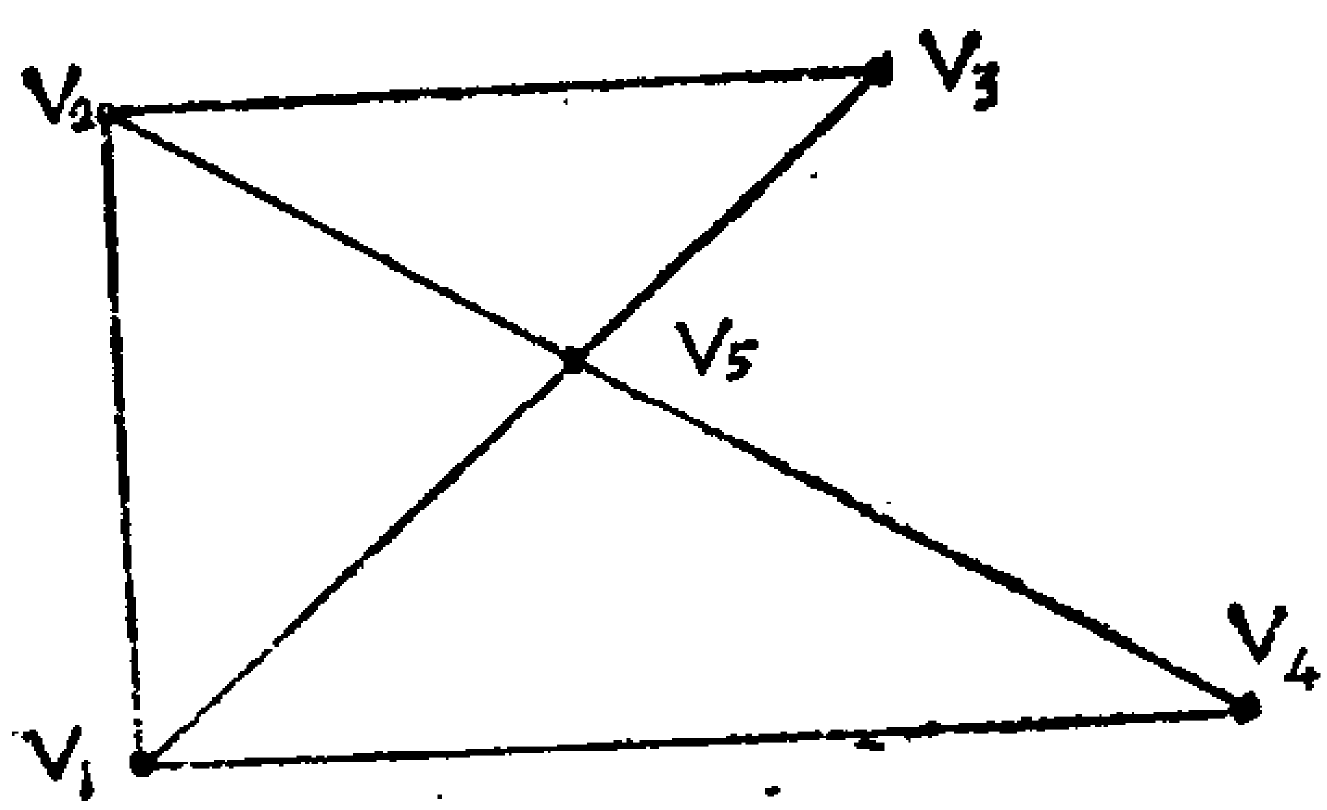

图15

例20　图15就是一个连通图

对于v_3，v_4两点来说，也存在通路。例如（v_3，v_5，v_4），（v_3，v_2，v_1，v_4）等

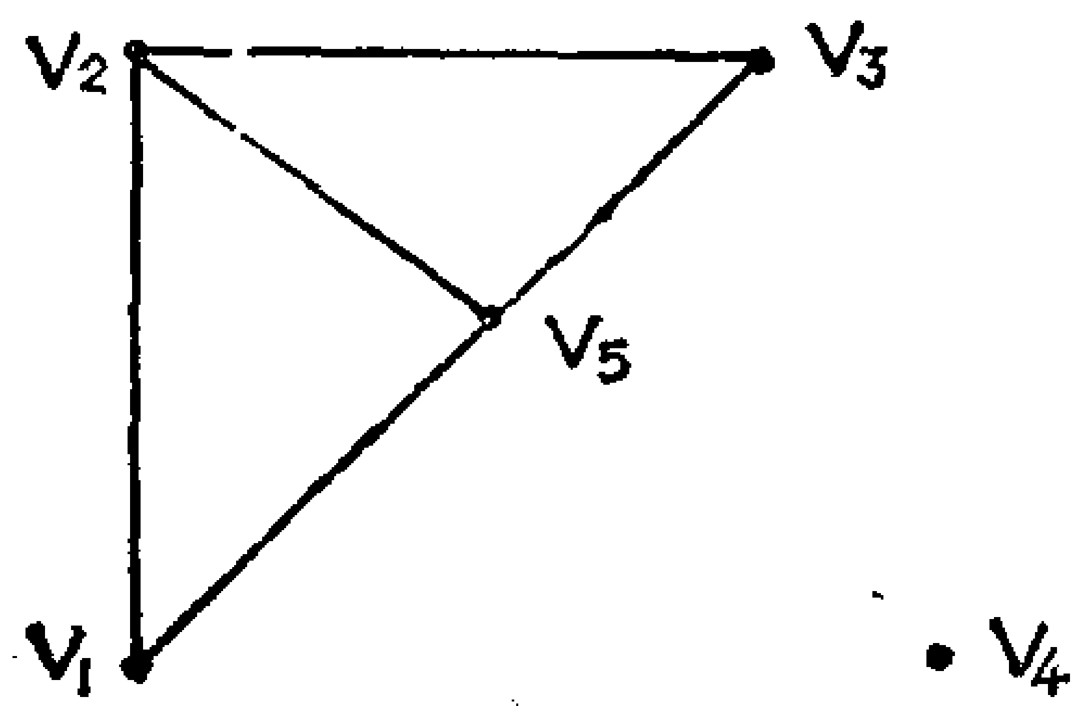

图16

图16就不是连通图。

例21　设连通图G有p个顶点和q条边，且$p\geqslant 2$，$p>q$，则G中至少有一个顶点的次数为1

证：（利用反证法）

若G中的所有顶点的次均大于1，即

$$d(v_i)\geqslant 2\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

则

$$2q=\sum_{i=1}^{p} d(v_i)\geqslant\sum_{i=1}^{p}2=2p$$

从而推出$q\geqslant p$与已知$q<p$矛盾

故至少存在一顶点v，$d(v)=1$

例22　求证：若在图G中存在一条从u到v的通路，则在G中也存在一条从u到v的基本通路。

分析：设法删去从u到v的通路μ中的重复顶点。

证：设μ是一条从u到v的通路．如果μ中没有重复顶点，则μ是基本通路．

如果μ中有重复顶点v_i，设

$$\mu=(u,\ v_1,v_2,\ \cdots,\ v_i,\ v_{i+1},\ \cdots,\ v_i,\ v_k,\ v_{k+1},\ \cdots,\ v)$$

删去（$v_{i+1}, \cdots, v_i$）这一段通路，则得

$$\mu_1=(u, v_1, v_2, \cdots, v_i, v_k, v_{k+1}, \cdots, v)$$

仍为一条从u到v的通路

如果μ_1中没有重复顶点，则μ_1是基本通路；

如果μ_1中有重复顶点N_j，接着删去$(v_{j+1}, \cdots, v_j)$这一段通路，则得

$$\mu_2=(u, v_1, v_2, \cdots, v_j, \cdots, v)$$

仍为一条通路

如上讨论下去

由于通路的顶点个数有限，重复顶点的个数更有限，故可经上述有限步求得一条从u到v的基本通路。

说明：体会证明过程，不难发现如何找一条从u到v的基本通路的方法。

练习8 下面两图是否连通图？

练习9 在图18中

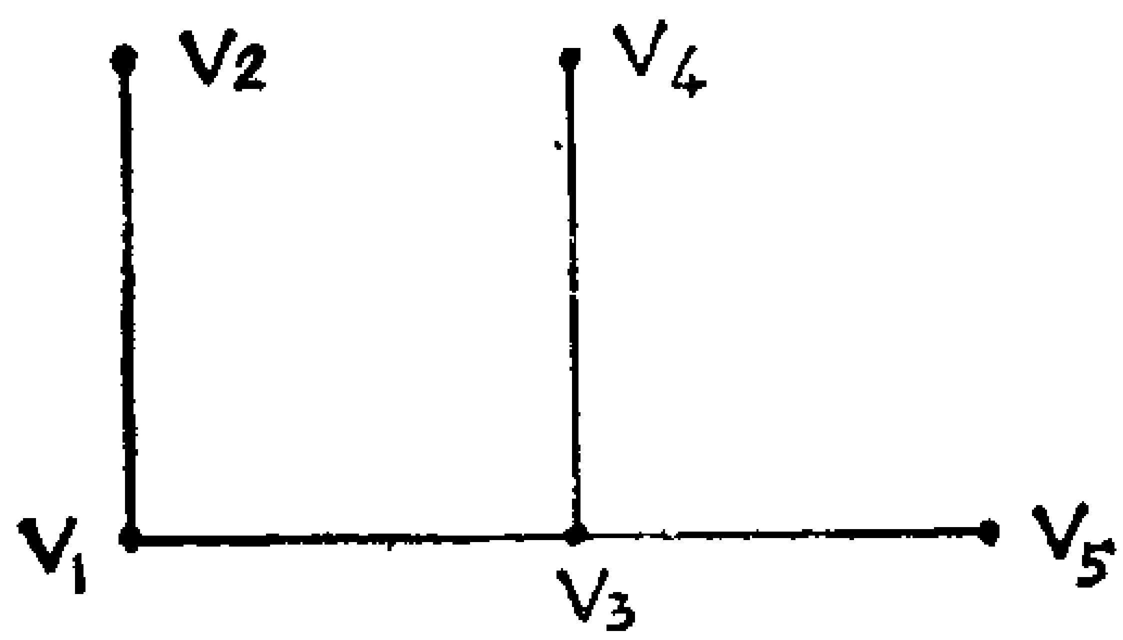

图17

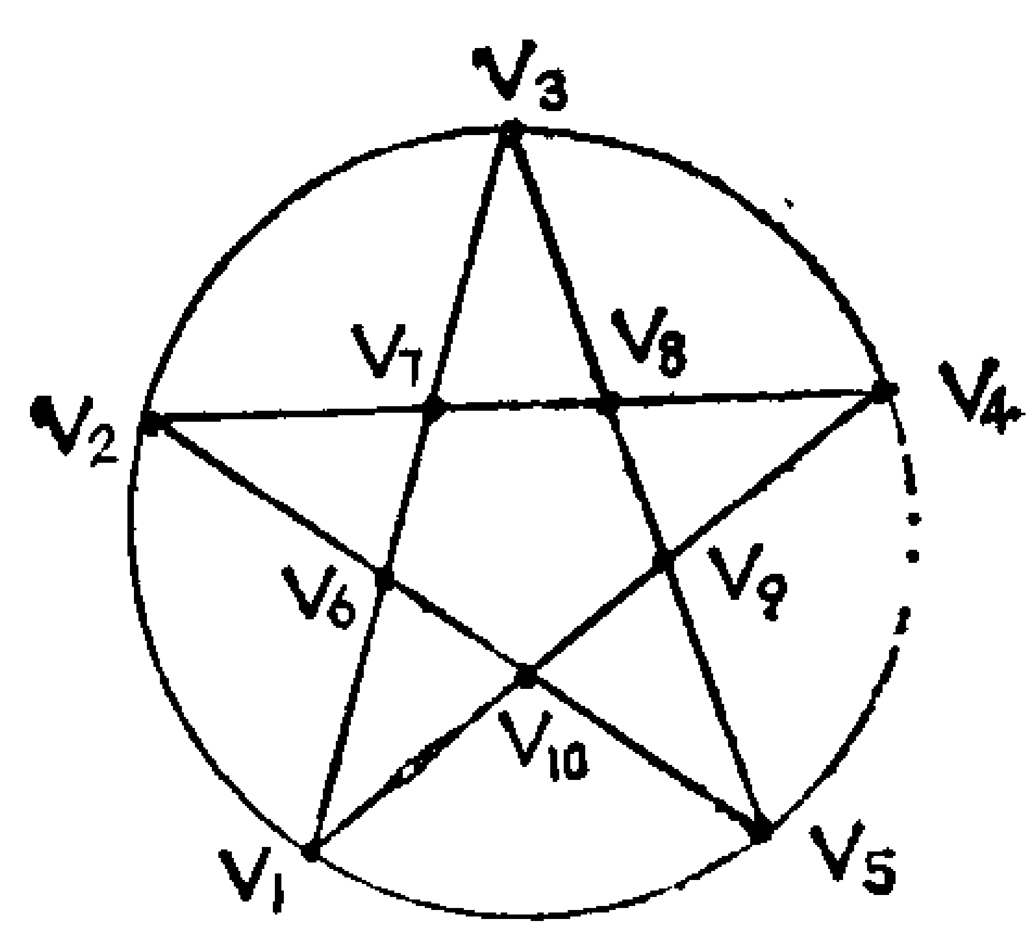

图18

$\mu=(v_1,\ v_6,\ v_7,\ v_4,\ v_8,\ v_9,\ v_5,\ v_{10},\ v_6,\ v_2,\ v_7,\ v_8,$
$v_4,\ v_9,\ v_{10},\ v_1)$

是一条回路，求一个圈

练习10 在图19中，求

（1）由顶点A到顶点F的所有基本通路

（2）由顶点A到顶点F的所有简单通路

练习11 在图20中，画出一条只经过各点一次的圈。

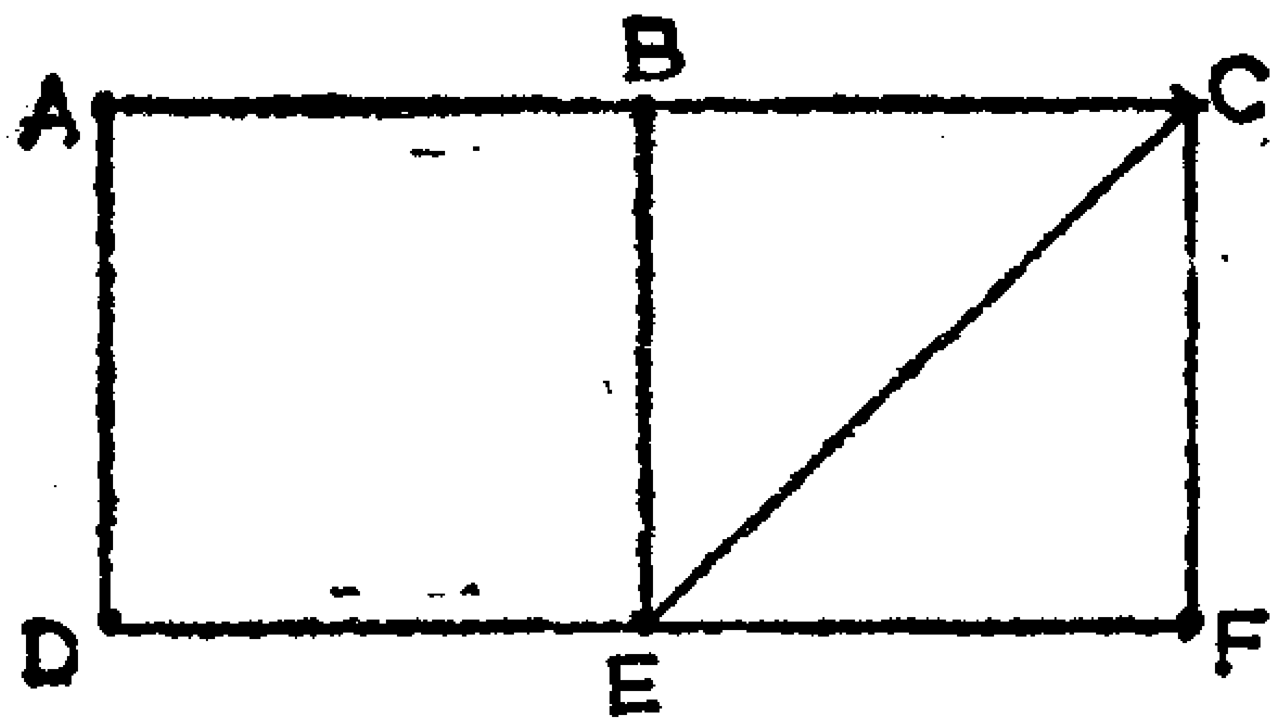

图19

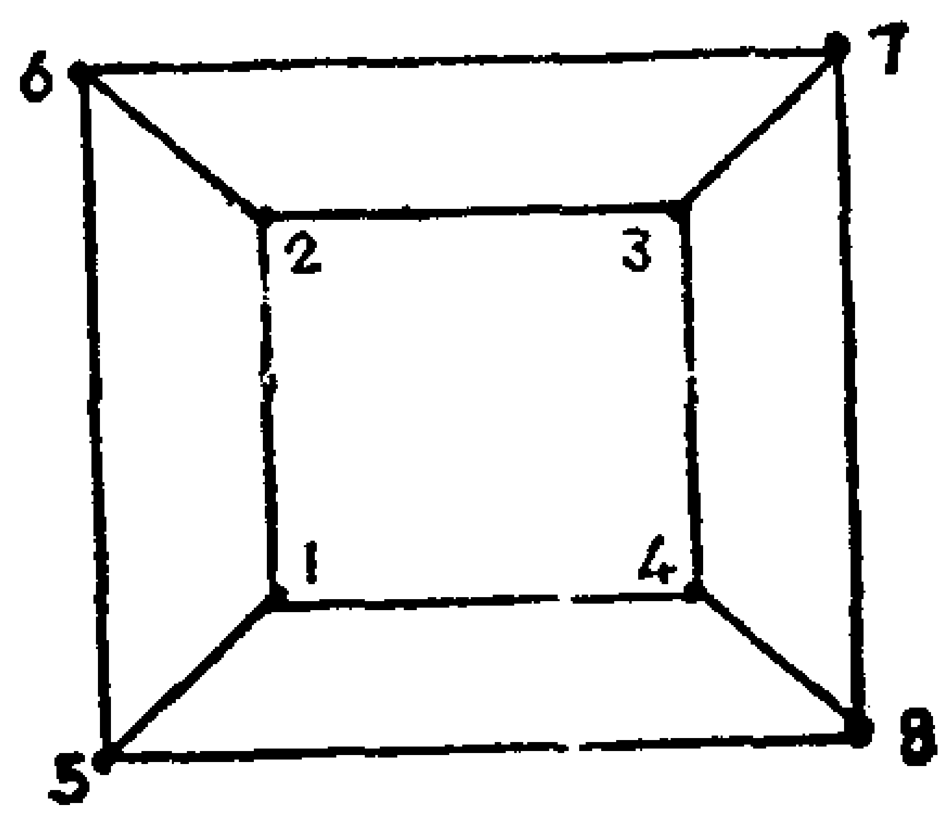

图20

练习12 求证：若边 e 在G的某个回路中，则e也在G的某个圈中

练习13 求证：在具有n个顶点 $n-1$条边的连通图G中，至少有一个奇点。

练习14 求证：若图G的任一顶点v_i的次$d(v_i)\geqslant 2$，则G包含一个圈。

§4 子　　图

1　定义

设　$G_1=(V_1, E_1)$，$G_2=(V_2, E_2)$

（1）子图

若　$V_1 \subset V_2$，$E_1 \subset E_2$，则称G_1是G_2的子图记作 $G_1 \subset G_2$

（2）支撑子图

若　$G_1 \subset G_2$且$V_1=V_2$，则称G_1是G_2的一个支撑子图（或部分图）.

（3）生成子图

若　$G_1 \subset G_2$且$E_1=\{\{u, v\} \mid u \in V_1, v \in V_1, \{u, v\} \in E_2\}$则称$G_1$是$G_2$中由$V_1$生成的子图，记作$G(V_1)$

例23　在图21中，画出它的

（1）二个不同的支撑子图

（2）由$V_1=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$生成的子图

（3）由$V'=\{v_1, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9\}$生成的子图

（4）二个异于上面(1)、(2)、(3)的普通子图.

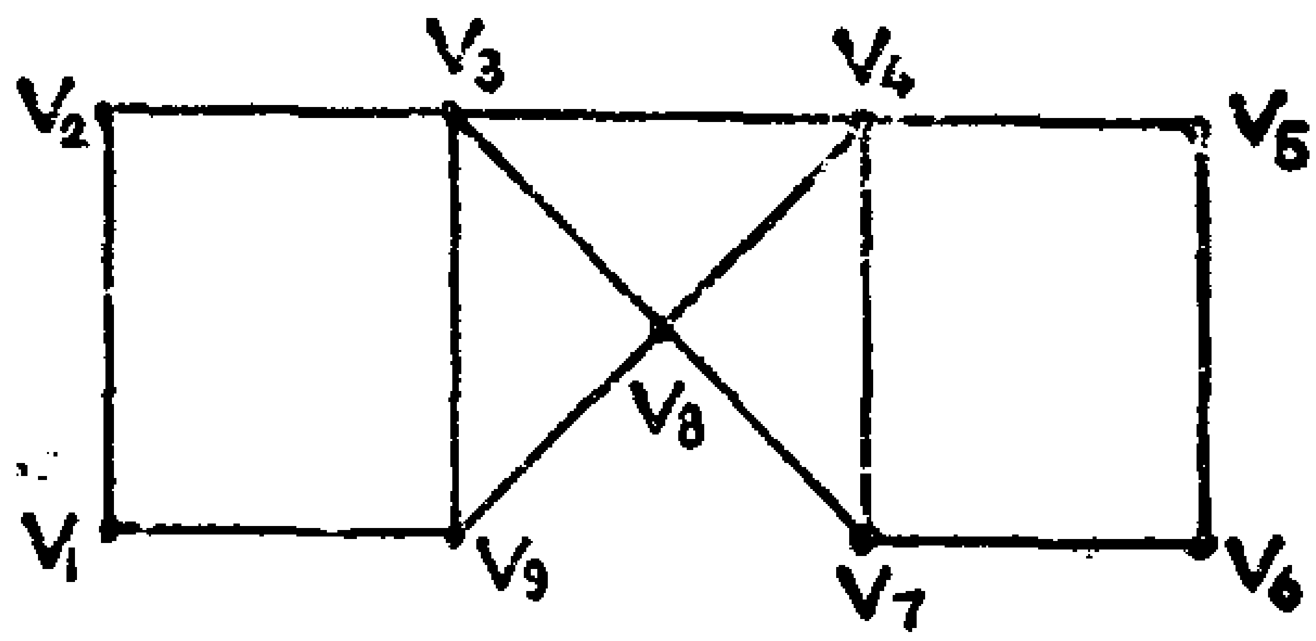

图21

分析：反复熟悉、理解子图、支撑子图、生成子图的定义，特别是它们的异同点，不难画出所要求的图。

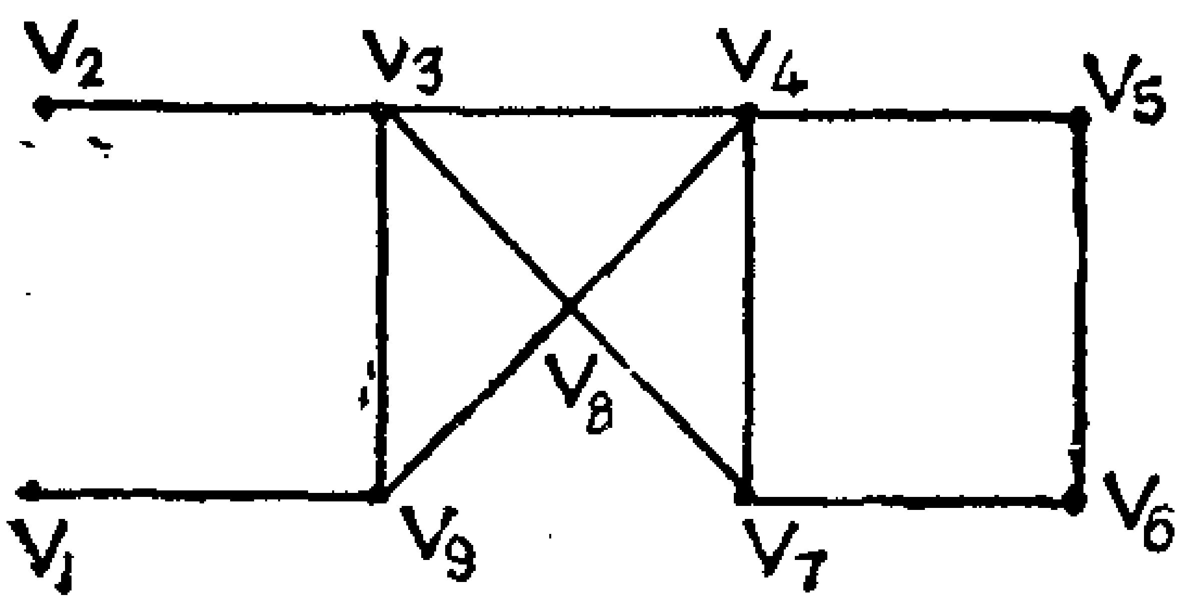

图22

解：（1）首先，支撑子图要包含G的所有顶点；其次，删去一些边时，边不同就构成不同的支撑子图。例如删去$\{v_1, v_2\}$，即得一个支撑子图。如图22

删去$\{v_2, v_3\}$即得另一个支撑子图。如图23

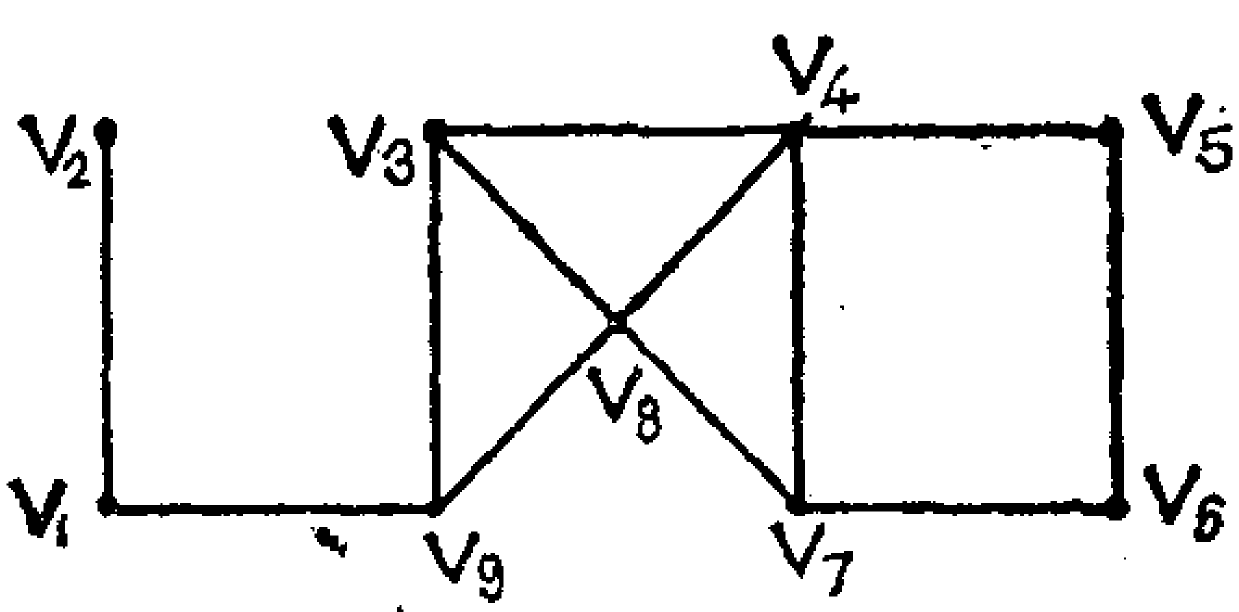

图23

（2）首先，知顶点集为V_1；其次知它的边可由生成子图的定义确定

因为$v_1, v_2 \in V_1$，$\{v_1, v_2\} \in E$，所以$\{v_1, v_2\} \in E_1$

同理$\{v_2, v_3\} \in E_1$，$\{v_3, v_4\} \in E_1$，$\{v_4, v_7\} \in E_1$，共

有四条边，则图24即为由V_1生成的子图。

(3) 图25即为V'生成的子图

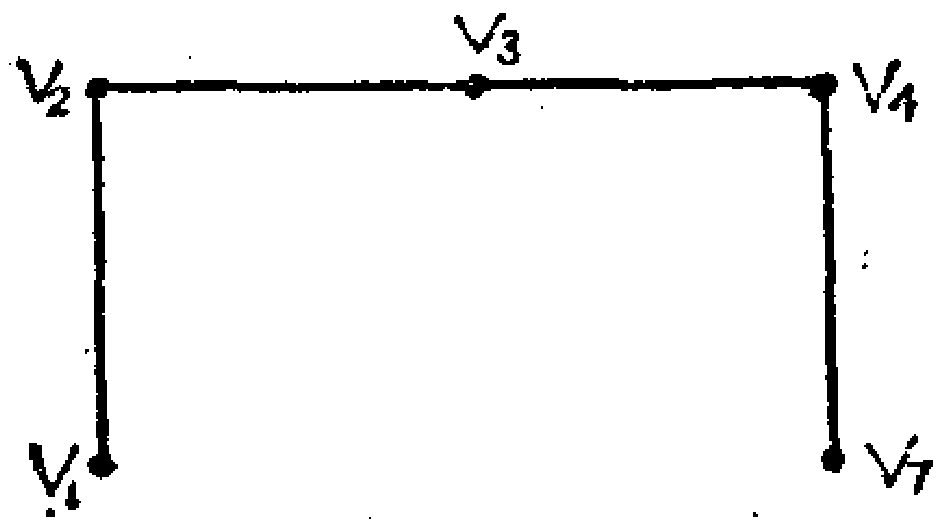

图24

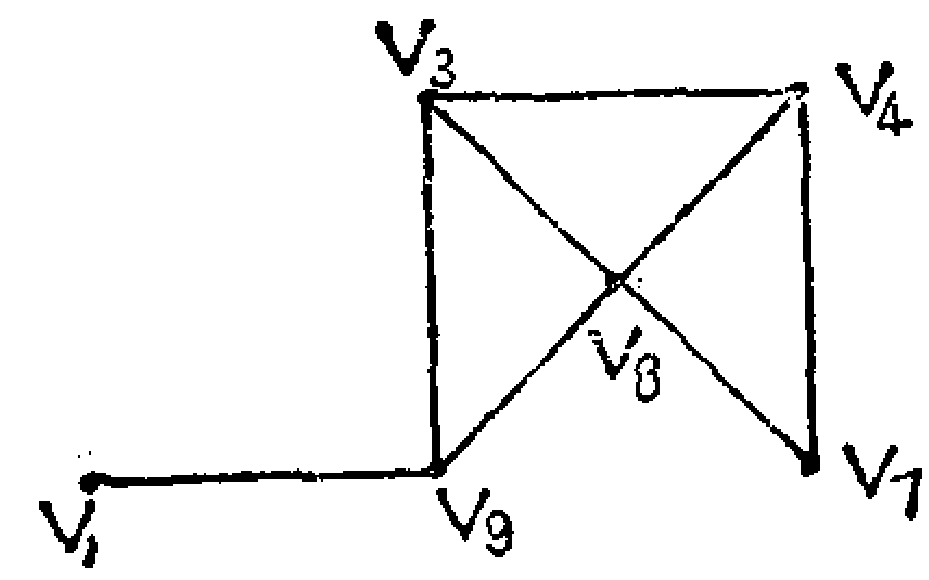

图25

(4) 图26、图27即为所求的两个子图

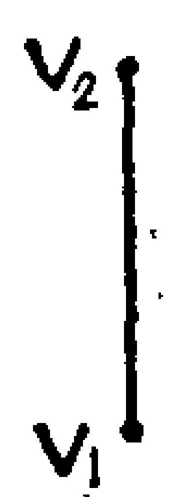

图26

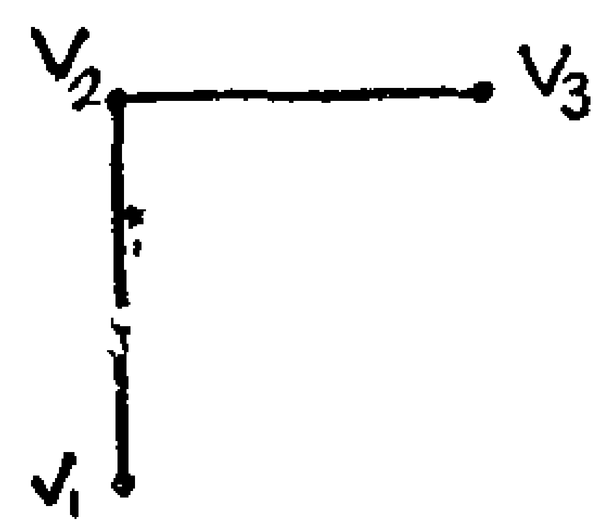

图27

说明：G中由V_1生成的子图实际上是G中以V_1为顶点集的子图中的最大者

例24　求证：完全图的每个生成子图是完全图

分析：只要证明生成子图中任二点之间均有边相连即可

证：设$G_1=(V_1, E_1)$是$G=(V, E)$的由V_1生成的子图，其中G是完全图

对V_1中的任意两点V_i，V_j，由完全图的定义知$\{v_i, v_j\}\in E$。再由生成子图的定义知$\{v_i, v_j\}\in E_1$，即V_1中任两点

均有边相连。

故G_1是完全图

2　G-v

在图$G=(V, E)$中，将$G(V-\{v\})$记作$G-v$这个由$V-\{v\}$生成的子图，实际上就是在G中去掉点v及点v的所有关联边所成的子图。

例25　在图28中v_5是悬挂点，则生成子图$G-v_5$为图29

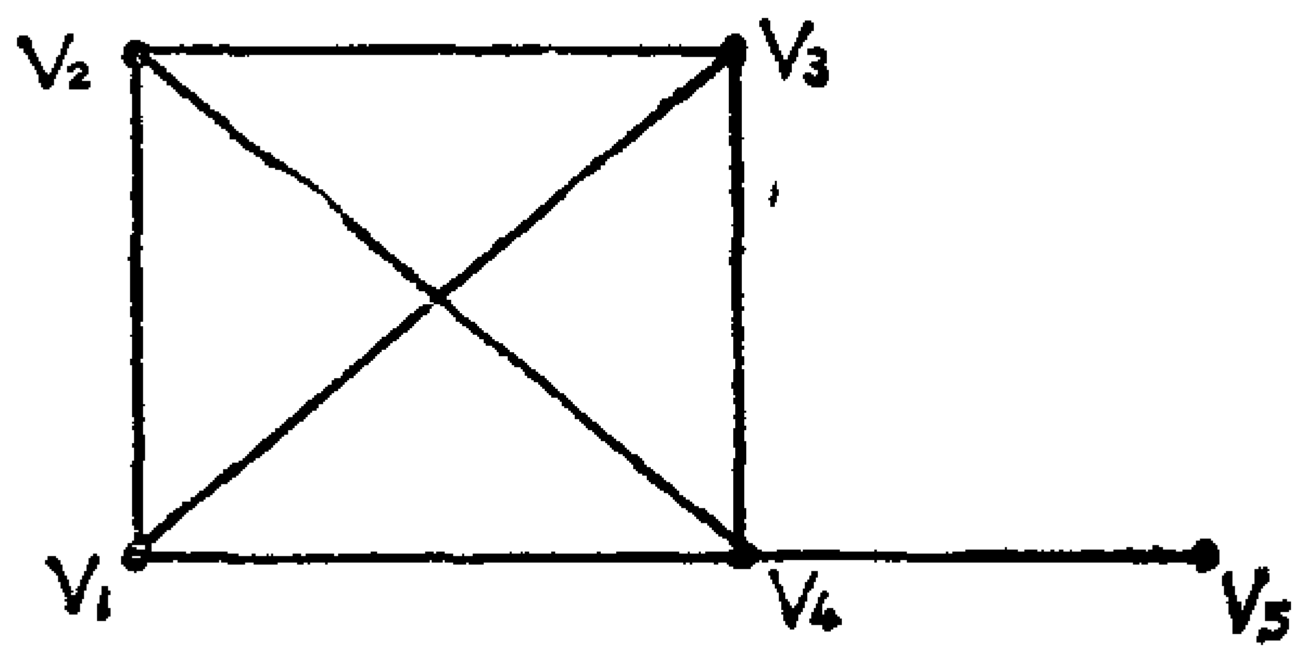

图28

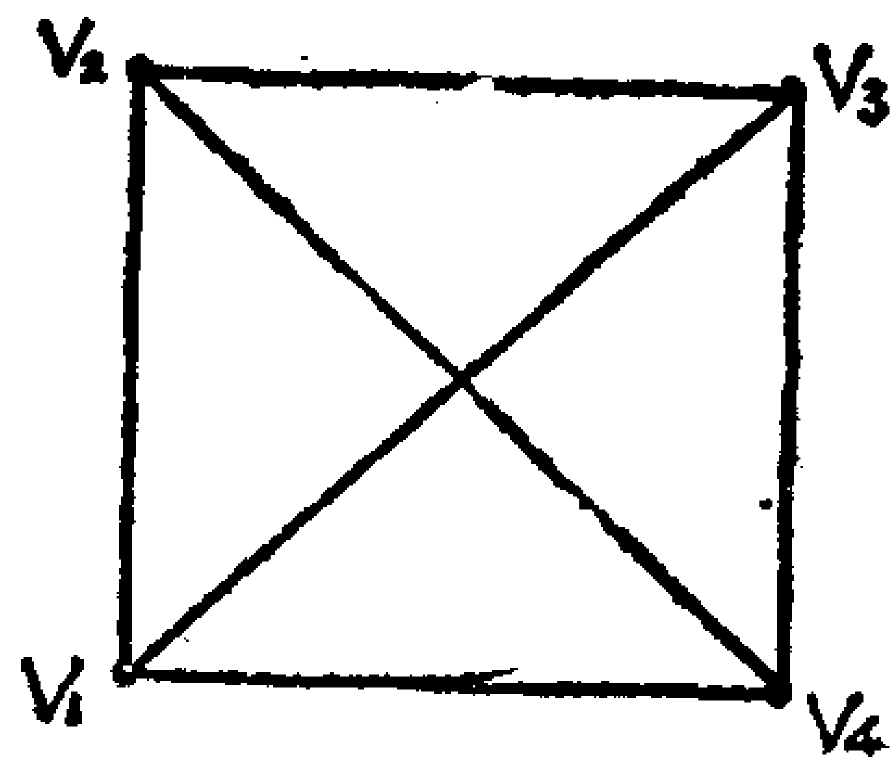

图29

例26　求证：各点的次分别为6，5，5，4，3，2，1的简单图不存在

分析：注意其中有一个悬挂点，删去悬挂点及其相应的悬挂边可降低问题的复杂程度

证：设$d(v_1)=6$，$d(v_7)=1$，则必有一边为$\{v_1, v_7\}$去掉悬挂点v_7与悬挂边$\{v_1, v_7\}$，则生成子图$G-v_7$的顶点为v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6且其次数分别为5，5，5，4，3，2

因为$d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=5$且$G-v_7$为简单图。所以v_1，v_2，v_3分别与v_4，v_5，v_6有边，因此$d(v_i)\geqslant 3$（$i=4, 5, 6$）与有一点的次数为2矛盾。

说明：当有悬挂点v时，可利用图$G-v$简化论证。

3 连通分支

图G的任意一个最大连通子图称为G的一个连通分支，简称分支

G的分支个数，记作$k(G)$，简记为k（$k\geqslant 1$）

（1）当$k=1$时，G为连通图

（2）当$k>1$时，G为非连通图

例27　图30中，$k(G)=3$，它是一个非连通图，由三个连通分支组成

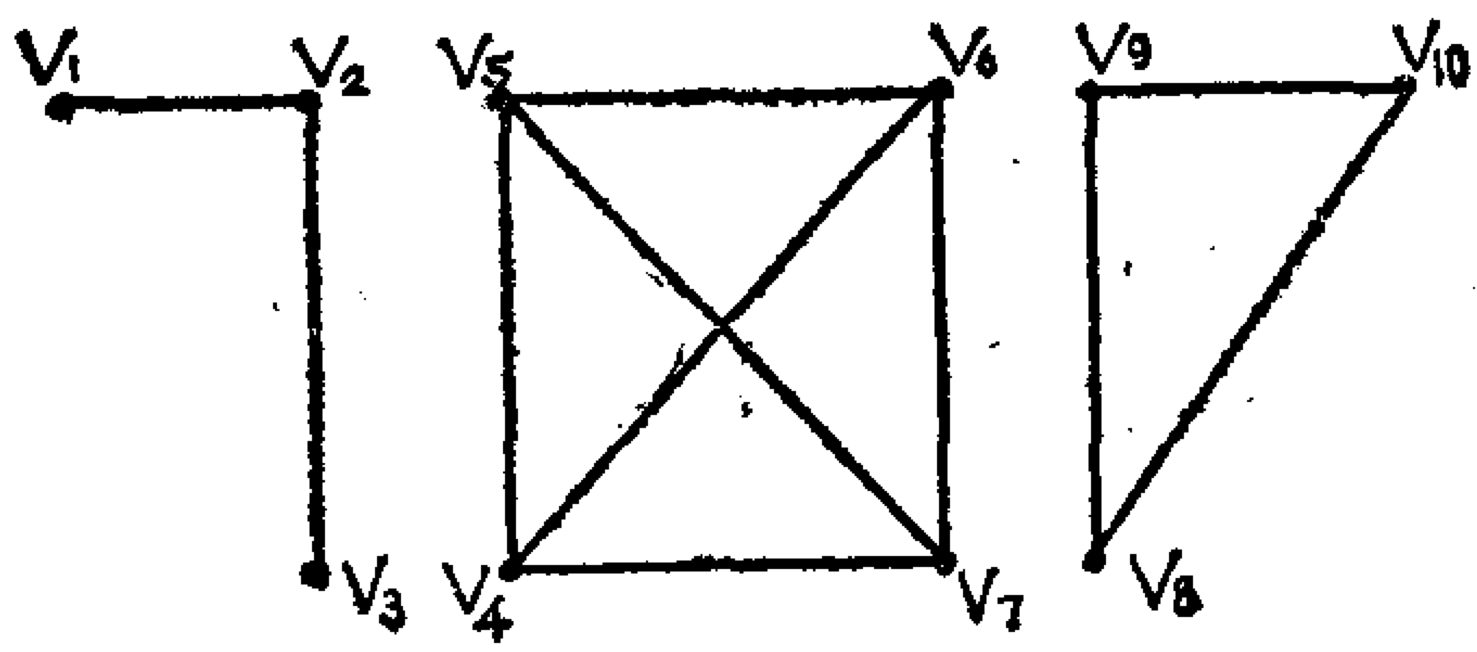

图30

例28　求证：若有一个具有p个顶点的简单图G对任意两点v_i，v_j有$d(v_i)+d(v_j)\geqslant p-1$，则$G$是连通图

证　（利用反证法）

若G不是连通图，则G由k个连通分支组成，其中$k\geqslant 2$

那么一定存在两个点，使它们在两个不同的分支里，不失一般性，设$v_1\in$分支G_1，$v_2\in$分支G_2其中G_1有p_1个点，G_2有p_2个点。

则　$d(v_1)\leqslant p_1-1$，$d(v_2)\leqslant p_2-1$

于是$d(v_1)+d(v_2)\leqslant p_1+p_2-2\leqslant p-2<p-1$与$d(v_i)+d(v_j)\geqslant p-1$矛盾。

因此G是连通图

例29　求证：若图G是有p个顶点q条边的简单图，且边数$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$．则G是连通图。

证：如果G不是连通图，则G可以分成k个分支，其中$k\geqslant 2$

设第i个分支有p_i个顶点（$i=1, 2, \cdots, k$）

注意　$p_i\geqslant 1$，$\sum_{i=1}^{k}p_i=p$

由于p_i阶简单图的边数$q_i\leqslant\frac{1}{2}p_i(p_i-1)$，

于是

$$q=\sum_{i=1}^{k}q_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}p_i(p_i-1)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(p_i^2-p_i)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}p_i^2-\frac{1}{2}p$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{k}p_i\right)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}p_ip_j\right\}-\frac{1}{2}p$$

$$=\frac{1}{2}(p^2-p)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}p_ip_j$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$$

这最后一步是因为

欲证$\frac{1}{2}(p^2-p)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k} p_ip_j\leqslant\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$

只要证 $p^2-p-2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k} p_ip_j\leqslant p^2-3p+2$

只要证 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k} p_ip_j-\sum\limits_{i=1}^{k}p_i+1\geqslant 0$

但这是显然的

练习15 画出图21中的

(1) 三个不同的支撑子图

(2) 由$V_1=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$的生成子图

(3) 五个普通的子图

练习16 求证：完全图$K_p(p\geqslant 2)$是连通图

练习17 画一个具有二个分支的图G

练习18 试举一个边数$q=\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$的p个顶点q条边的简单图，且不连通

练习19 求证：若一个p个顶点的简单图 G 中，对每一个点v_i有$d(v_i)>\left[\frac{p}{2}\right]-1$，则$G$是连通图

练习20 求证：若G是p个顶点的连通图，则G至少有$p-1$条边。

练习21 求证：若G是p阶连通图，且边数大于$p-1$，则G至少有一个圈。

§ 5　树

1　同构

在两个图$G(V, E)$与$G^*(V^*, E^*)$中，如果存在V到V^*的一个双射f，使得

$$\{v_i, v_j\} \in E \Longleftrightarrow \{f(v_i), f(v_j)\} \in E^*$$

则称G与G^*同构，记作$G \cong G^*$

显然当$G \cong G^*$时，它们一定有相同的顶点数、边数且对应顶点的次数也相同。

例30　图31中的两个图是同构的

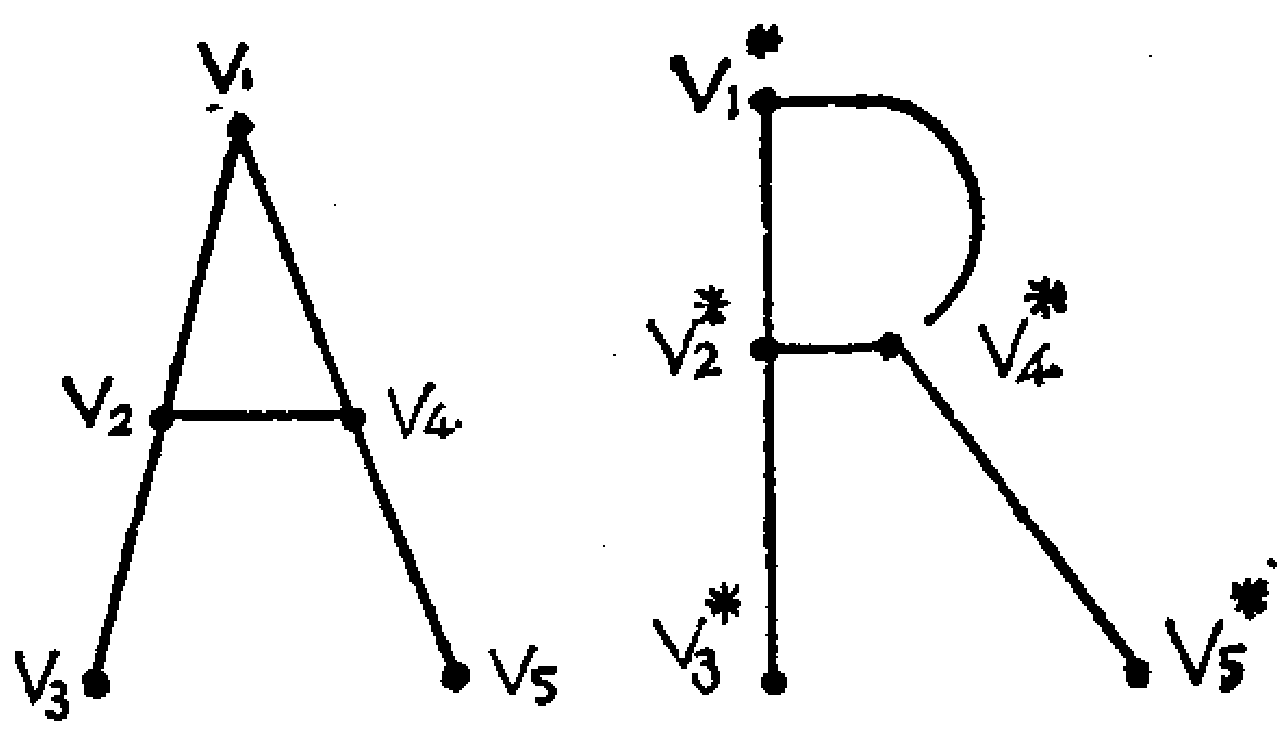

图31

例31　图32中的各图是同构的

例32　画出具有四个顶点的所有连通图

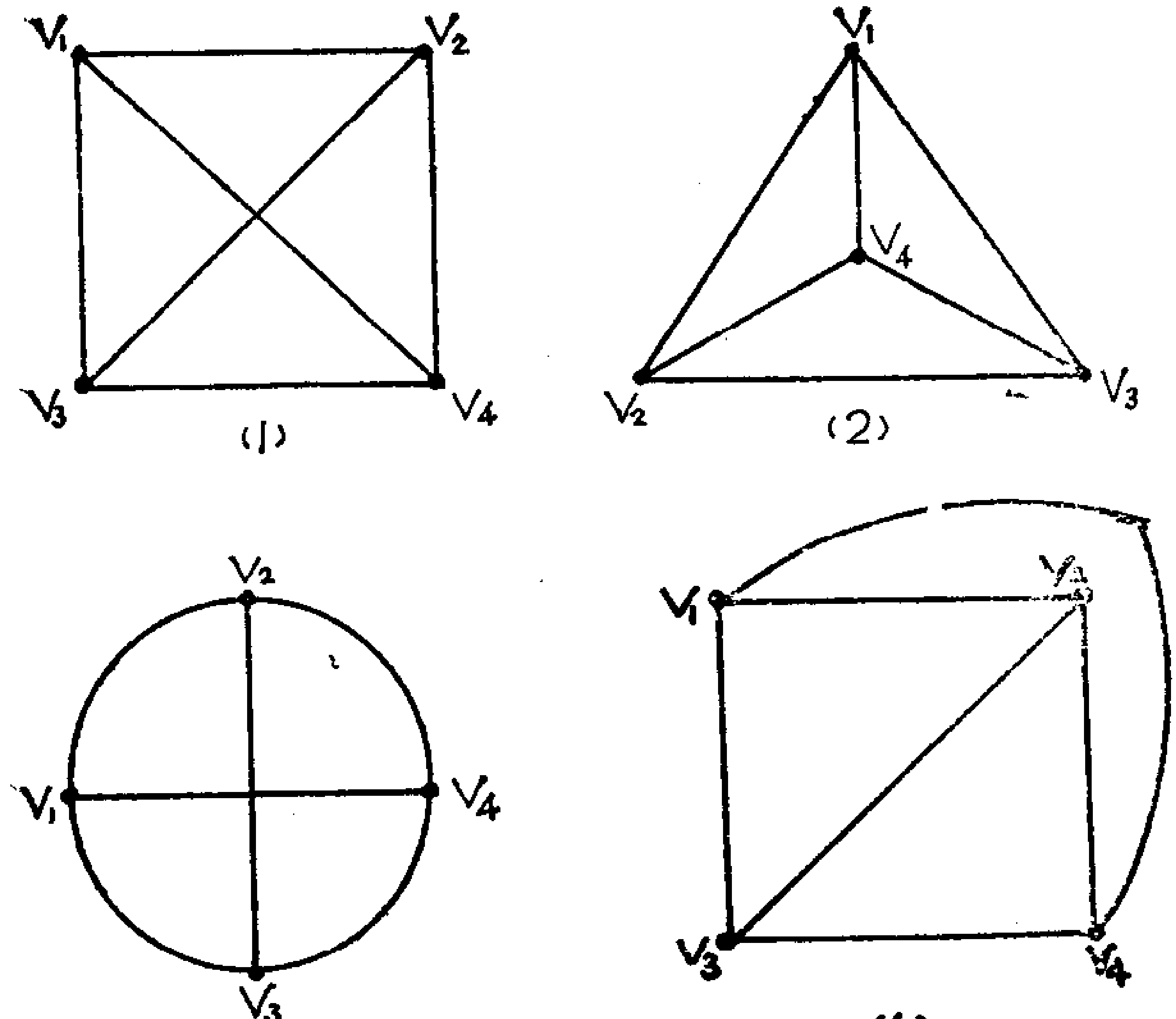

图32

解：由图33，共6种

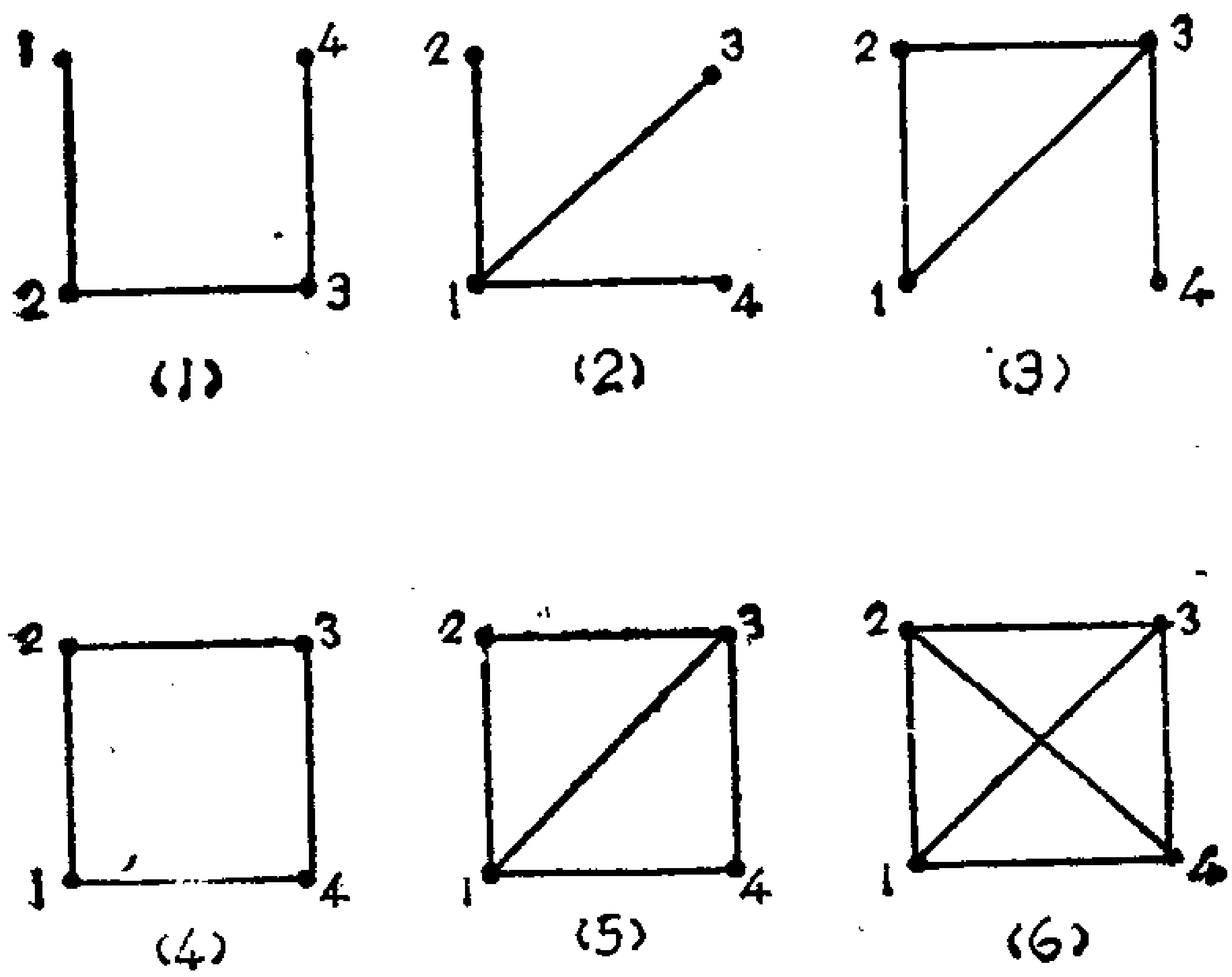

图33

2　树的定义

一个无圈的连通图称为树

例33　试判断图34中各图是否为树

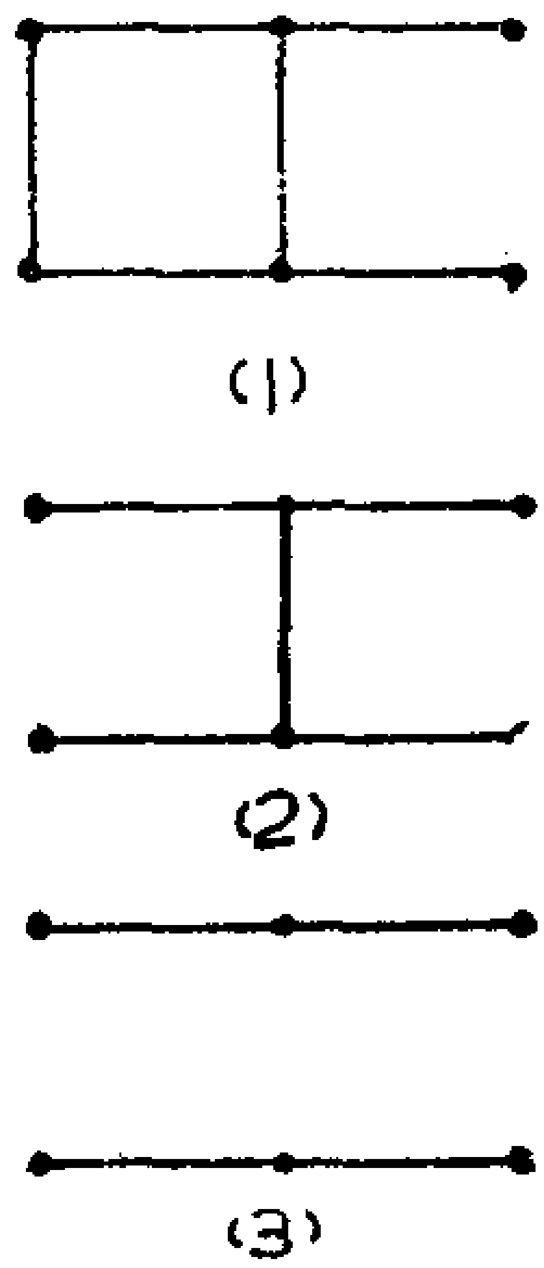

图34

答　(1) 不是树，因为它有圈

(2) 是树，因为它是无圈的连通图

(3) 不是树，因为它不是连通图

例34　列举出有3个顶点的全部的树

解：注意图35中各图是同构的，只能看作是一种图

故只有一种

例35　列举出有4个顶点的全部的树

答：有二种，如图36

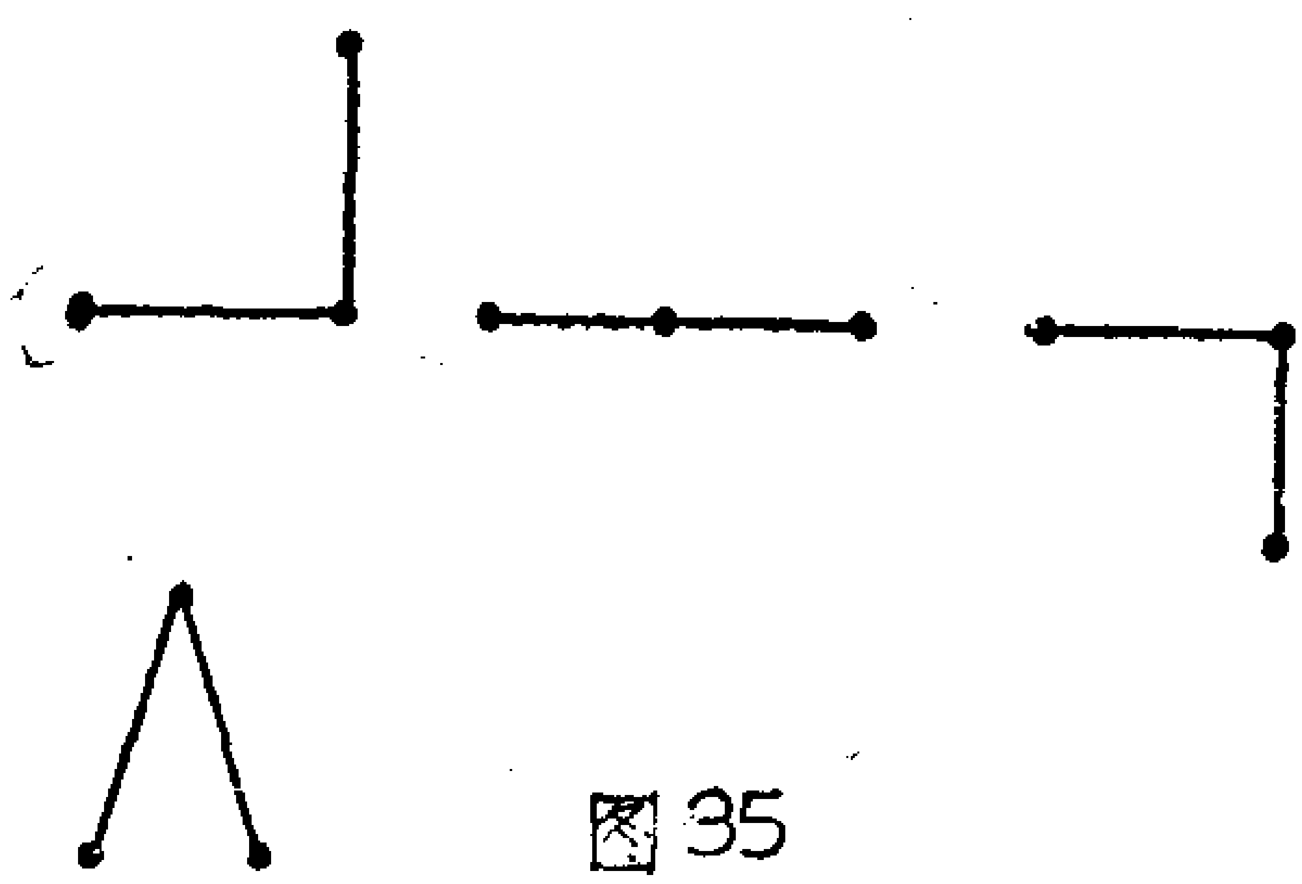

图35

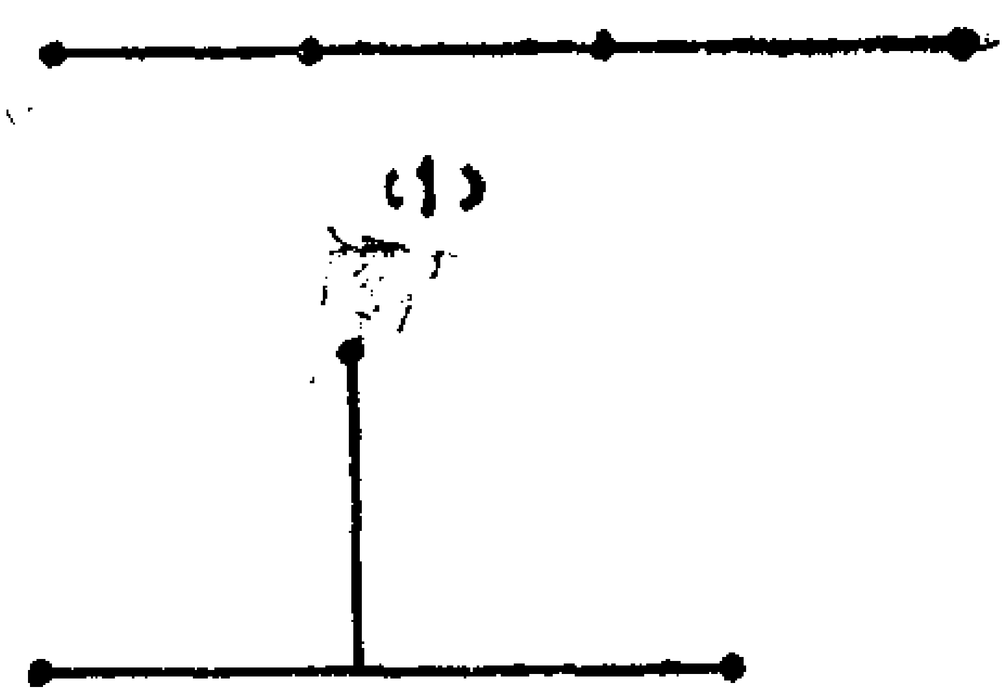

图36

3　树的性质

如果图T是一颗树且为(p, q)图，则

(1) T的任意两顶点间有唯一的一条通路

(2) 任意去掉T的一条边e，则$T-e$不连通

(3) 不相邻的两顶点添上一条边e，则$T+e$含唯一的一个圈

(4) $q=p-1$

证 (1) 存在性

因为树是连通的，所以树中任意两点之间必有通路

唯一性

如果两顶点之间出现两条通路，则此树必将出现圈与树的定义矛盾

(2) 设$e=\{v_1, v_2\}$是树T的一条边，则e是v_1，v_2间的一条通路，由(1)知v_1，v_2间的通路是唯一的，今去掉e自然$T-e$就不连通了

(3) 设u，v之间存在唯一的一条通路$(u, \cdots, v)$，今添上$\{u, v\}$，因此便得到唯一的一个圈$(u, \cdots, v, u)$

(4) 当$p=2$时成立

假定当$p=k$时成立，即k个顶点的树，其边数为$k-1$

那么当$p=k+1$时，则此时树T为$(k+1, q)$图

由于T无圈，若把T中的一条边$e=\{v_i, v_j\}$去掉，并去掉顶点v_j，则此时新树$T'=T-e$的顶点数$p'=(k+1)-1=k$，边数$q'=k-1$

由归纳假定知T'的边数$q'=k-1$

故$q=q'+1=(k-1)+1=k$ 命题成立

从而原命题成立

例36　若T是p个顶点的树，则T的顶点次数之和为$2p-2$

证：由于T是树，故T的边数为$q=p-1$

因此 $\sum_{i=1}^{p} d(v_i)=2q=2(p-1)=2p-2$

例37　若T是一颗树，且$d(v_1)=d(v_2)=2$，$d(v_3)=3$，$d(v_4)=d(v_5)=d(v_6)=4$，求有多少个悬挂点

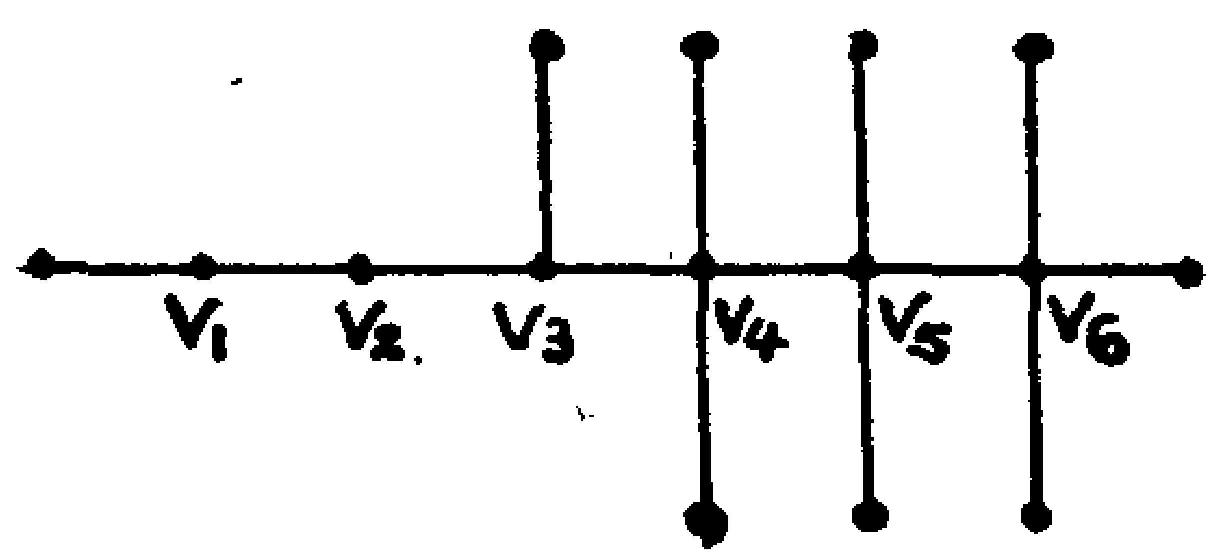

图37

分析：悬挂点的个数受条件

$$\begin{cases} q=p-1 \\ 2q=\sum_{i=1}^{p} d(v_i) \end{cases}$$

所制约

解：设T为$(p,\ q)$图，悬挂点为x个，则

$$2q=\sum_{i=1}^{p} d(v_i)=2\times 2+3\times 1+4\times 3+x\times 1=19+x$$

但　$q=p-1=2+1+3+x-1=5+x$

故　$10+2x=19+x$

∴　$x=9$(个)

此树如图37

4　图的部分树

若图$T=(V,\ E')$是树且为图$G=(V,\ E)$的子图，则

称T为G的一个部分树。其中G中属于T的边称为T内的边，其余的边称为T外的边

例38 若图G是(p, q)图，G连通且 $q=p-1$，则 G是树

证：取图G的部分树T，由部分树的定义知，T与G的顶点相同，树T的边数$q'=p-1$。

今G的边数$q=p-1=q'$，故$G=T$

5 部分树的求法

(1) 破圈法

破圈原则：取一个圈，从圈中去掉任一边，对余下的图重复这个步骤，直到无圈为止，即可得到一颗部分树。

(2) 避圈法

避圈原则：每步选取与已选取不构成圈的边，直到不能进行为止

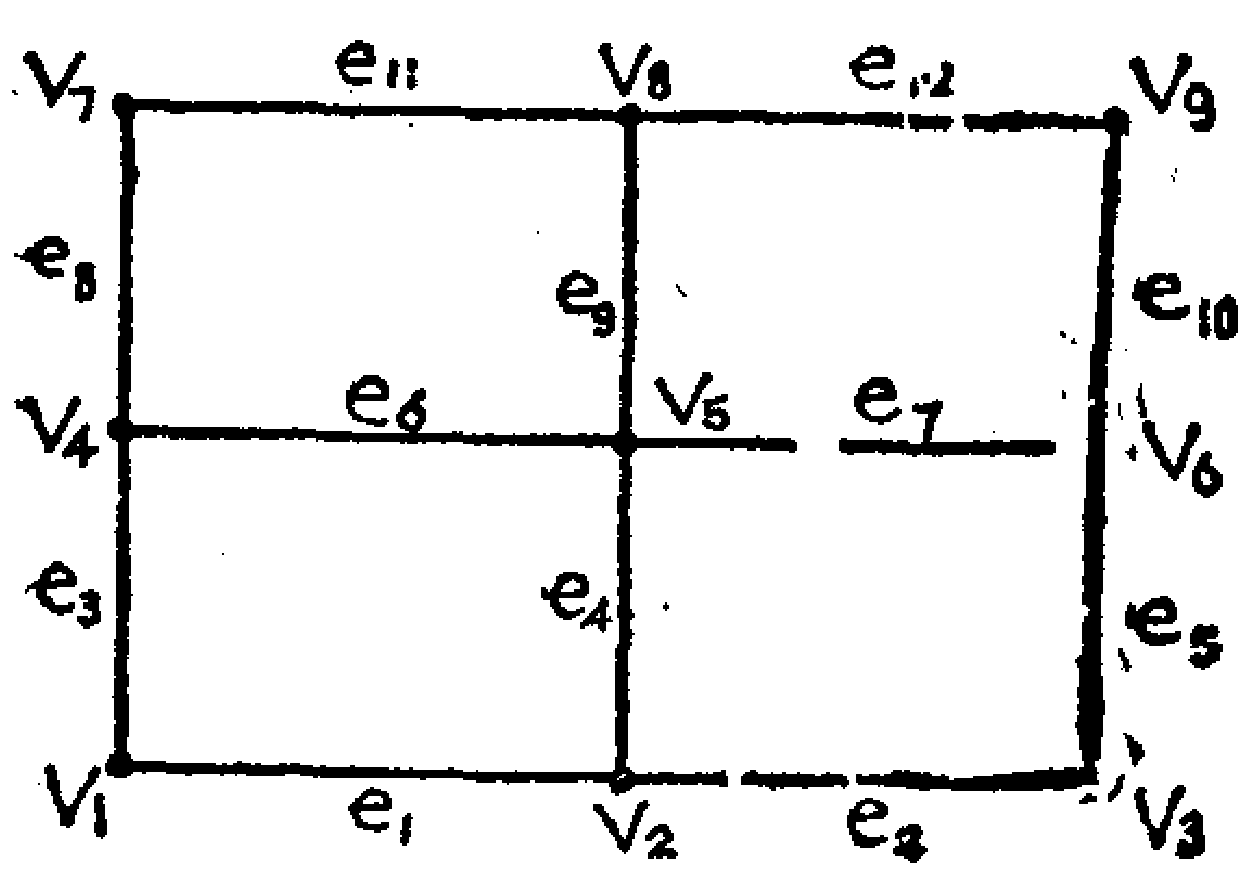

图38

例39 求图38的一棵部分树

解法 1 （利用破圈法）

取一圈$(v_1, v_2, v_5, v_4, v_1)$然后去掉一边$e_1$；

取一圈$(v_2, v_3, v_6, v_5, v_2)$去掉一边$e_2$；

取一圈$(v_4, v_5, v_8, v_7, v_4)$去掉一边$e_8$；

取一圈(v_5, v_6, v_9, v_8, v_5)去掉一边e_8

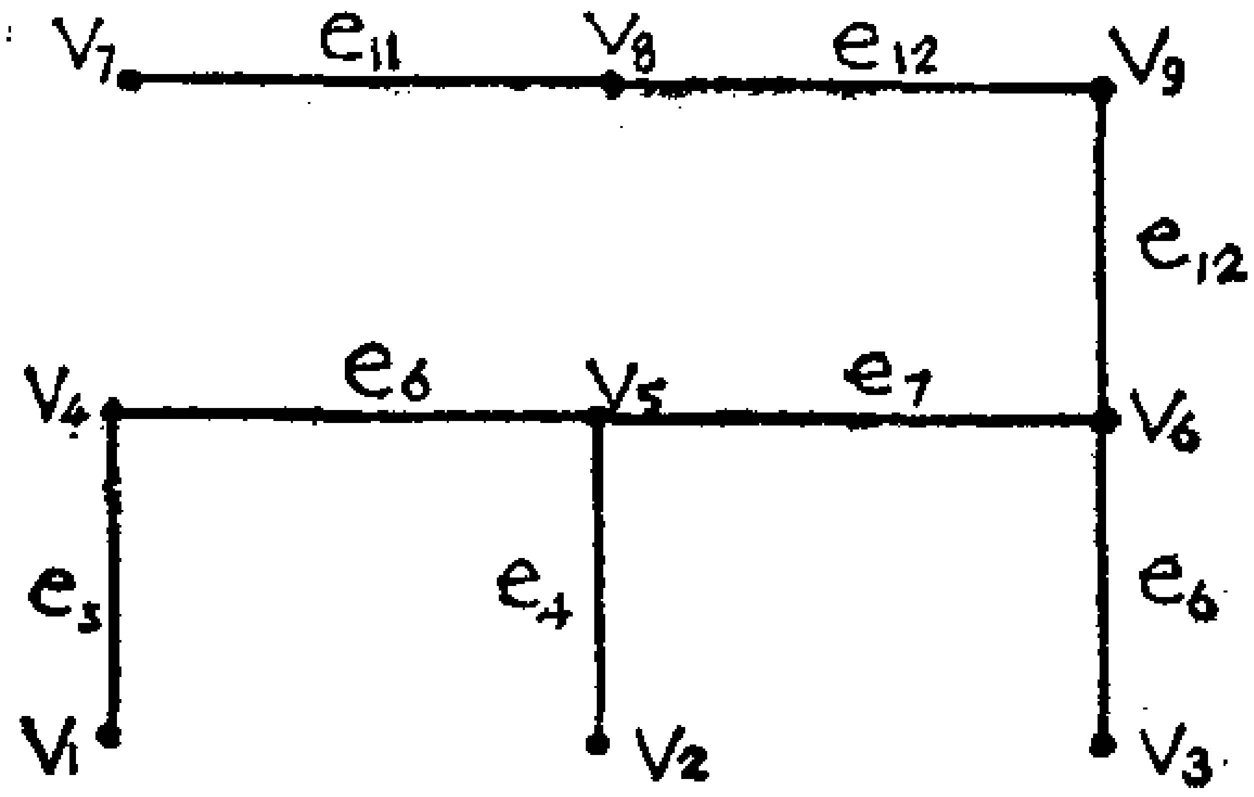

图39

如图39，则图39即为所求

解法 2 （利 用 避圈法）

任取一边e_1;

找一条不与e_1构成圈的边e_2;

找一条不与{e_1, e_2}构成圈的边e_3;

找一条不与{e_1, e_2, e_3}构成圈的边e_4;

找一条不与{e_1, e_2, e_3, e_4}构成圈的边e_5;

找一条不与{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}构成圈的边e_8;

找一条不与{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_8}构成圈的边e_9;

找一条不与{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_8, e_9} 构 成 圈 的边e_{10}。

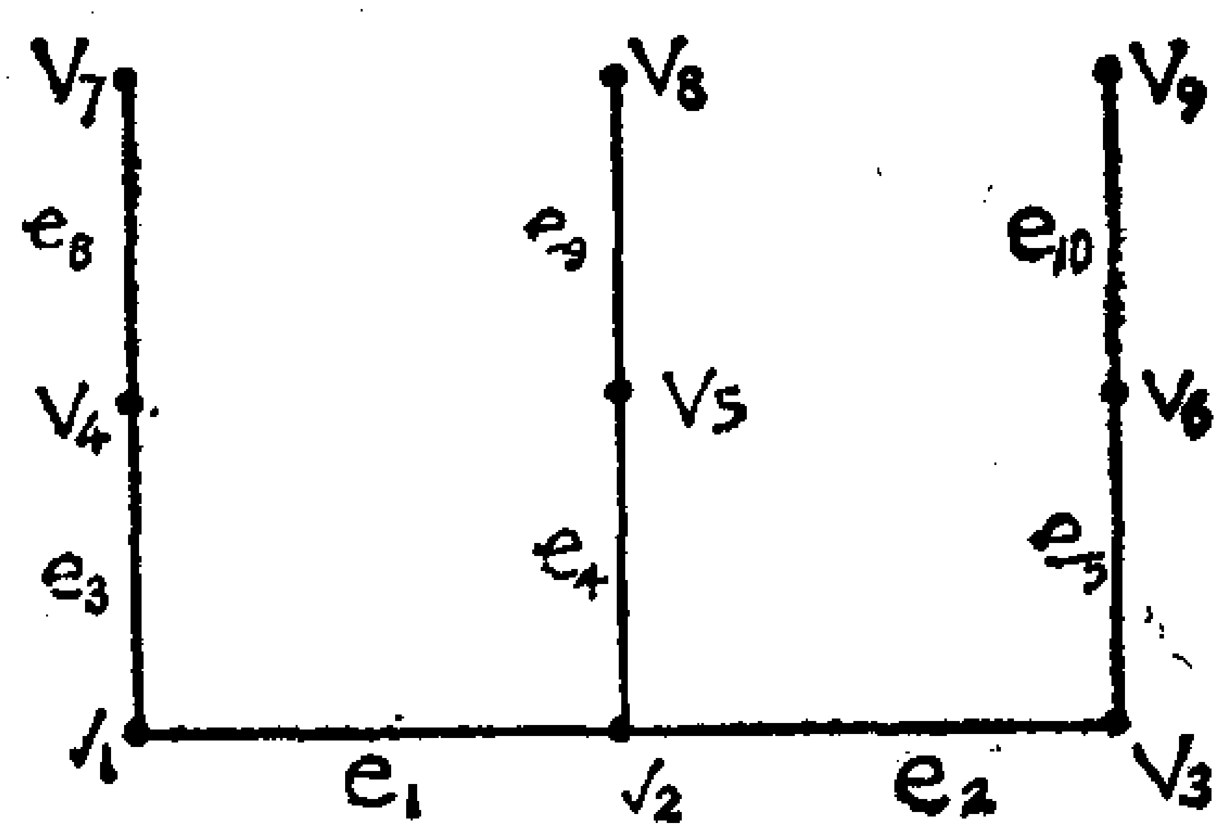

图40

如图40，则图40即为所求

说明：由破圈法或避圈法作图，不难发现，图G的部分树很多，解答不是唯一的

练习22 列 举 出有5个顶点的全部的树

练习23 列举出有6个顶点的全部的树

练习24 若树T至少有两个顶点，则T至少有两个悬挂点

练习25 有一棵树，它的次为2的顶点有n_2个，次为3的顶点有n_3个，……，次为k的顶点有n_k个，那么这棵树中有多少个悬挂点？

练习26 若T是一棵树，且存在两个悬挂点，T的顶点数$p \geqslant 3$，则T的其它顶点次数均为2

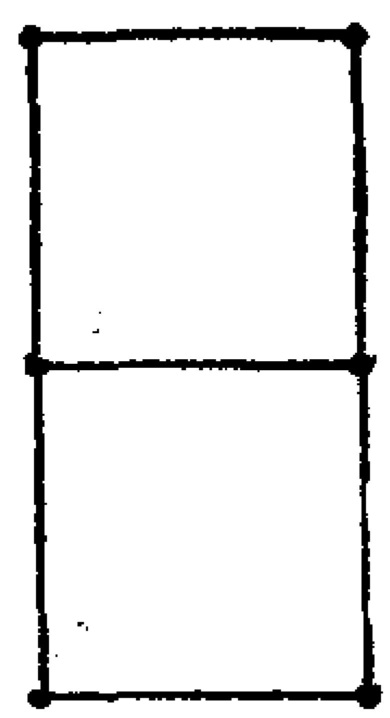

图41

练习27 如果连通图G是p阶图，则G至少有$p-1$条边

练习28 列举出有7个顶点的全部的树

练习29 若图G是(p, q)图，G无圈且$q=p-1$，则G是树

练习30 试寻求图41中的所有部分树

§6 E图与H图

1 欧拉图

若图G存在一条恰通过各边一次的回路，则称G为欧拉

图($Euler$)，简称E图，此回路称为欧拉回路

若图G存在一条恰通过各边一次的通路，则称此通路为欧拉通路

例40　在图42中，(v_1，v_2，v_3，v_1，v_4，v_3，v_5，v_2，v_5，v_4)是一条从v_1到v_4的欧拉通路

例41　在图43中，由于

(1，2，3，4，5，6，7，8，2，9，3，5，10，6，8，1，9，4，10，7，1)为欧拉回路，故图43为欧拉图

2　欧拉定理

非空连通图G有欧拉通路的充分必要条件是G的奇点个数为0或2。当且仅当奇点个数为0时G为欧拉图

例42　七桥问题中的图5为非欧拉图，因为此图有4个奇点

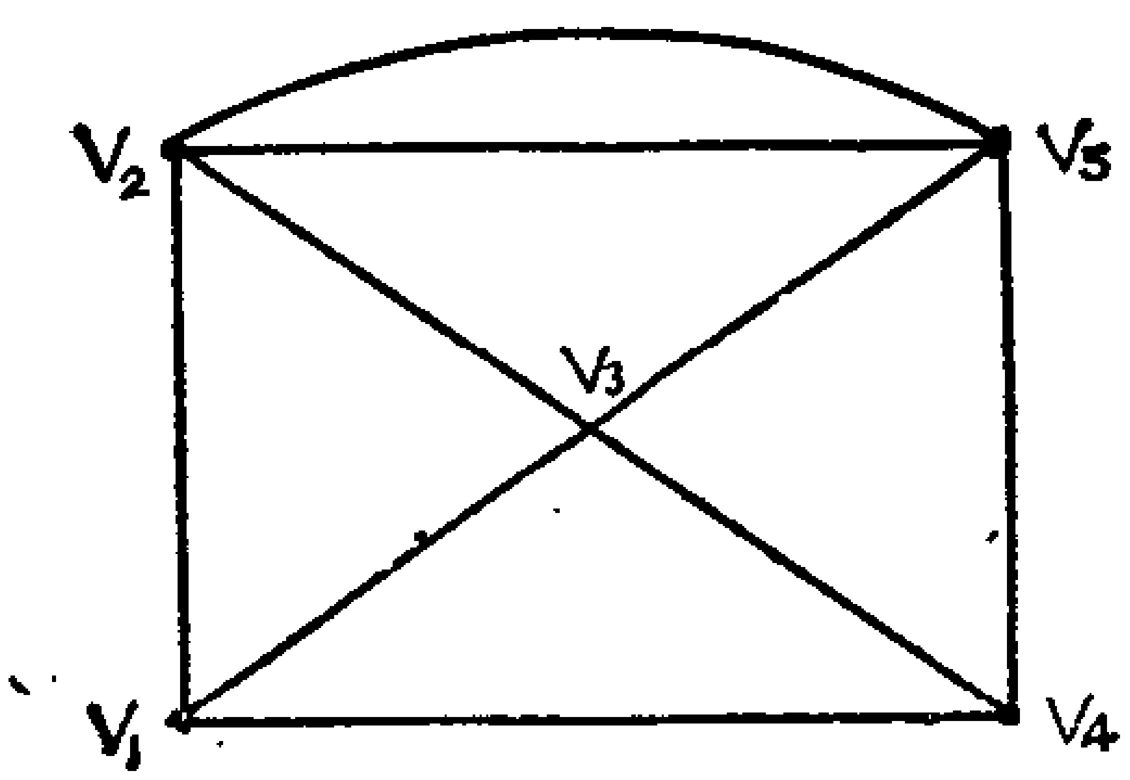

图42

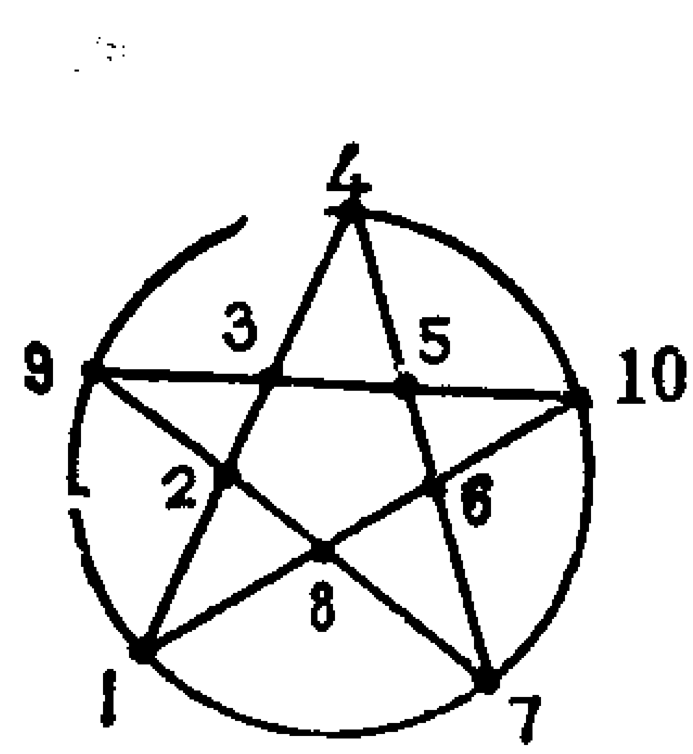

图43

例43　在图44中，找一条欧拉通路

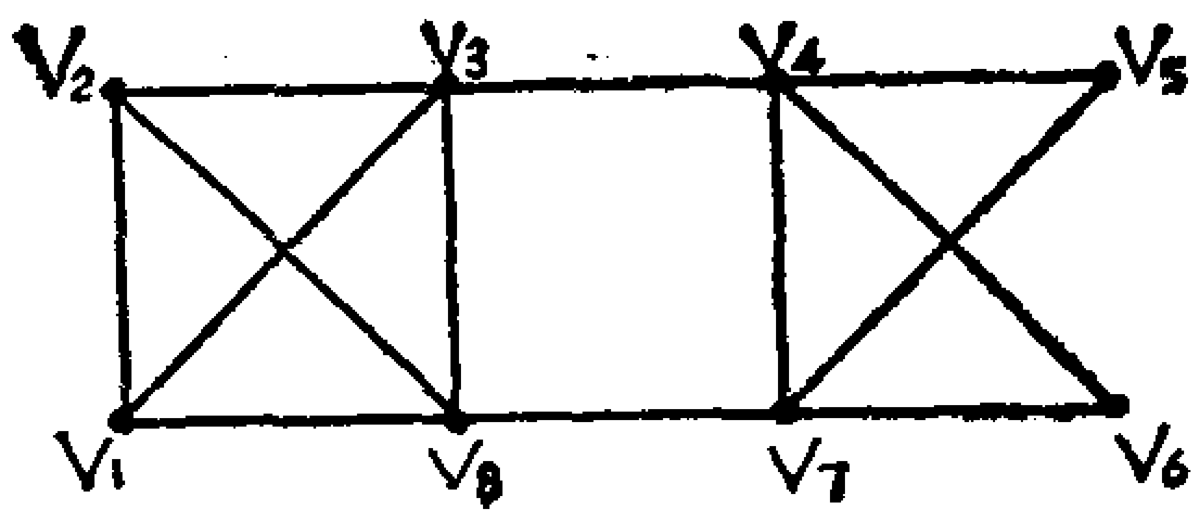

图44

解 (1) ∵ $d(v_1)=d(v_2)=3$，$d(v_5)=d(v_6)=2$，$d(v_3)=d(v_4)=d(v_7)=d(v_8)=4$

有两个奇点v_1，v_2，故可作为欧拉通路的始点和终点

(2) $\mu=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_4, v_6, v_8, v_1, v_3, v_8, v_2)$为一条欧拉通路

说明：注意从v_1到v_2的欧拉通路并不是唯一的，试画之，不难发现条条道路均通向成功。

例44 十五座桥问题

是否有一条通路，它恰能经过图45中的每座桥一次？

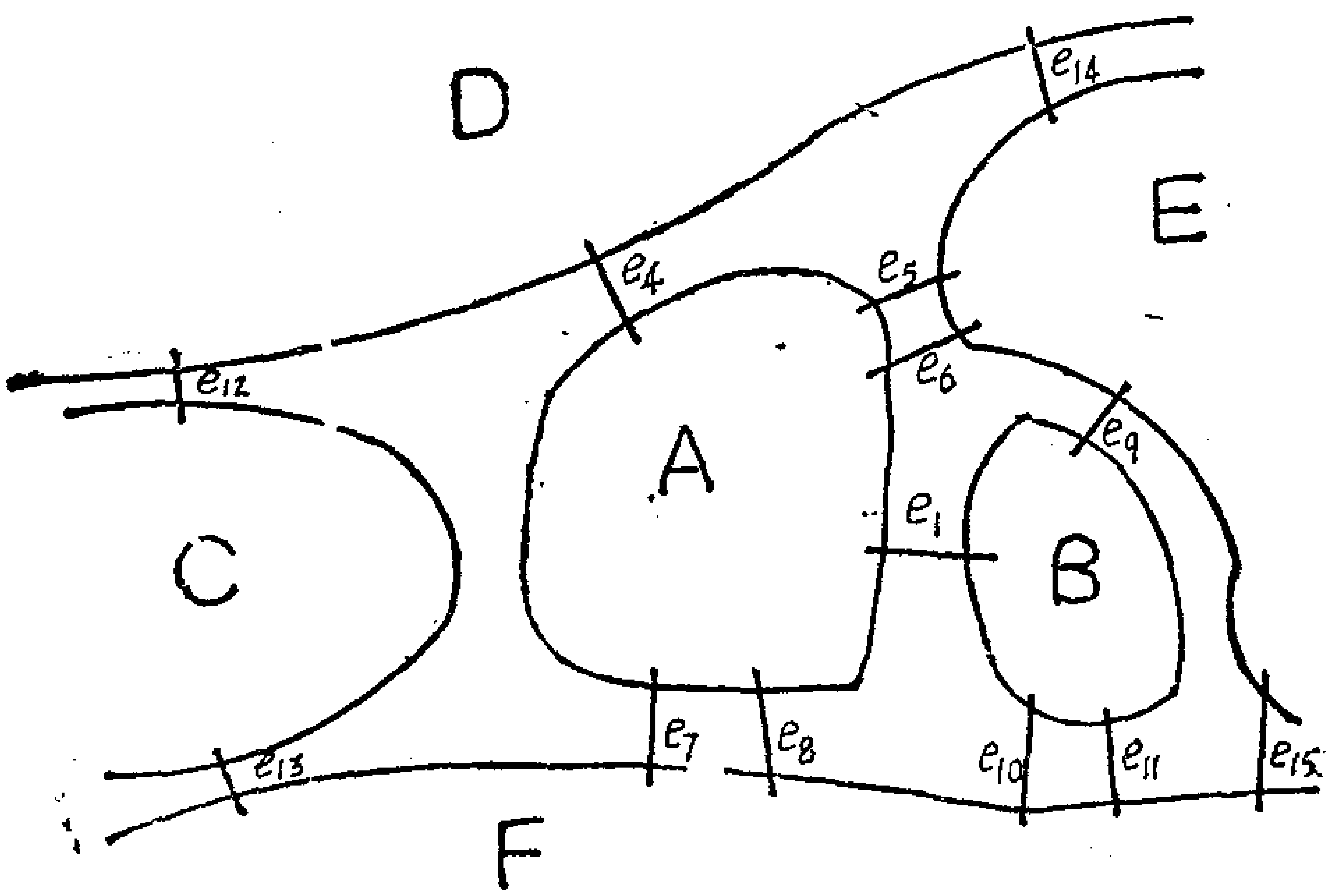

图45

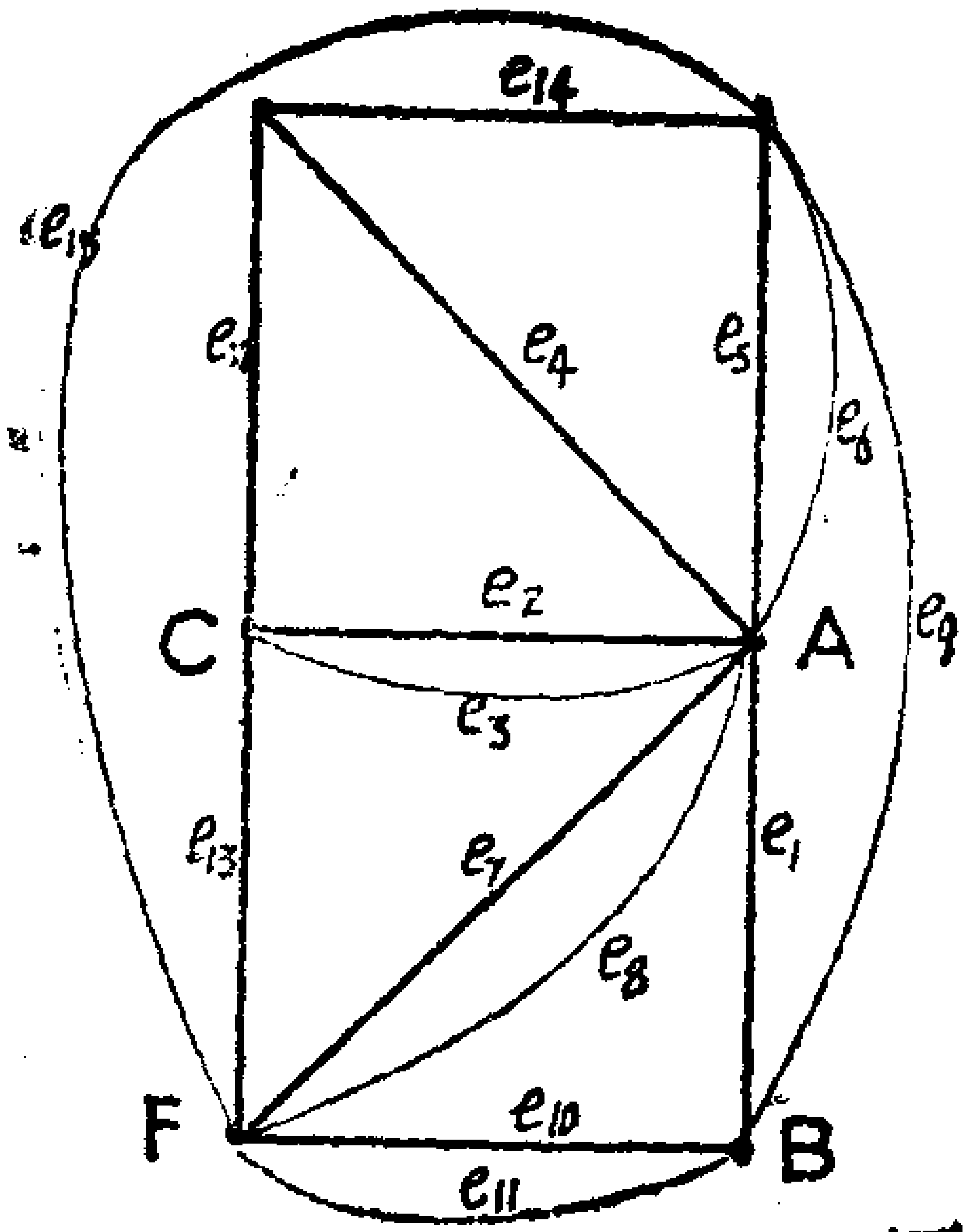

图46

解 (1) 将实际问题转化为图论问题，如图46

(2) 统计各点的次

$d(A)=8$ $d(B)=4$

$d(C)=4$ $d(D)=3$

$d(E)=5$

$d(F)=6$

知存在一条以D、E为始点、终点的欧拉通路

$\mu=(D, C, A, C, F, A, F, B, F, E, D, A, E, A, B, E)$即为所求

注意：能回到原出发点的欧拉回路并不存在

3 哈密顿图

若图G存在一条恰通过各顶点一次的回路，则称G为哈密顿图（*Hamilton*）简称H图。此回路称为哈密顿回路（或哈密顿圈）

若图G存在一条恰通过各顶点一次的通路，则称此通路为哈密顿通路

例45 1857年英国数学家哈密顿提出在地球上有20个城市，如图47。

每个顶点代表一个城市，每条边代表两个城市间的一条道路，找一条经过所有城市但只能经过一次的一条旅行路

线。

(1, 2, 3, 4, 5, …19, 20, 1)即为一条满足要求的旅行路线

例46　求图48中的一条哈密顿回路

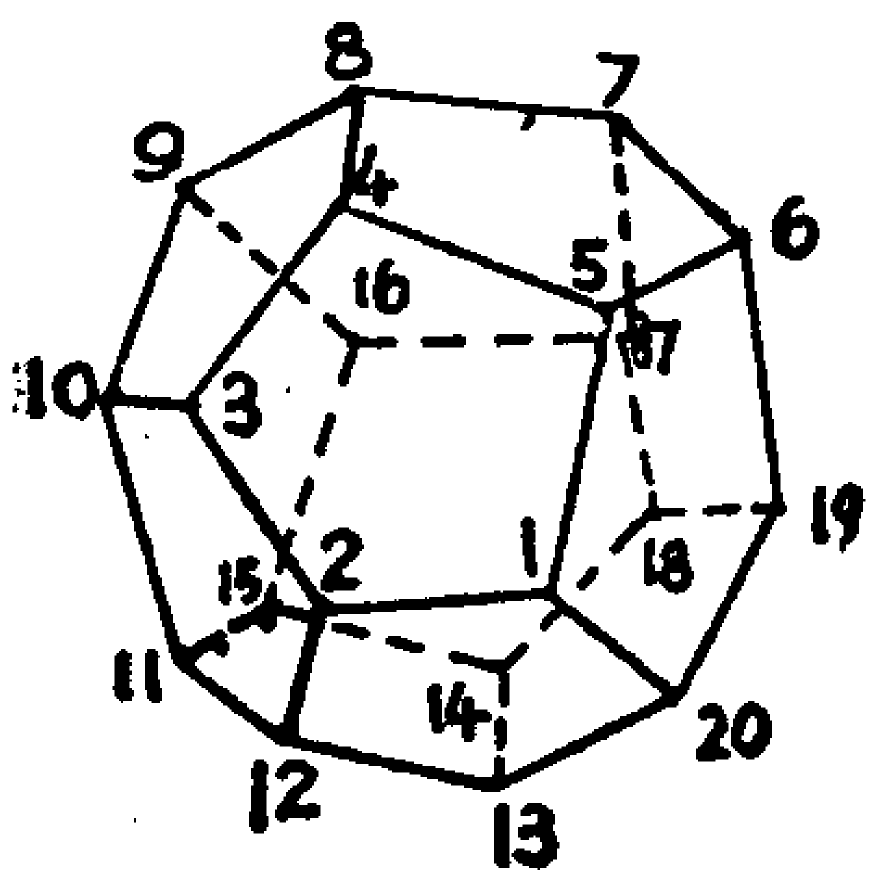

图47

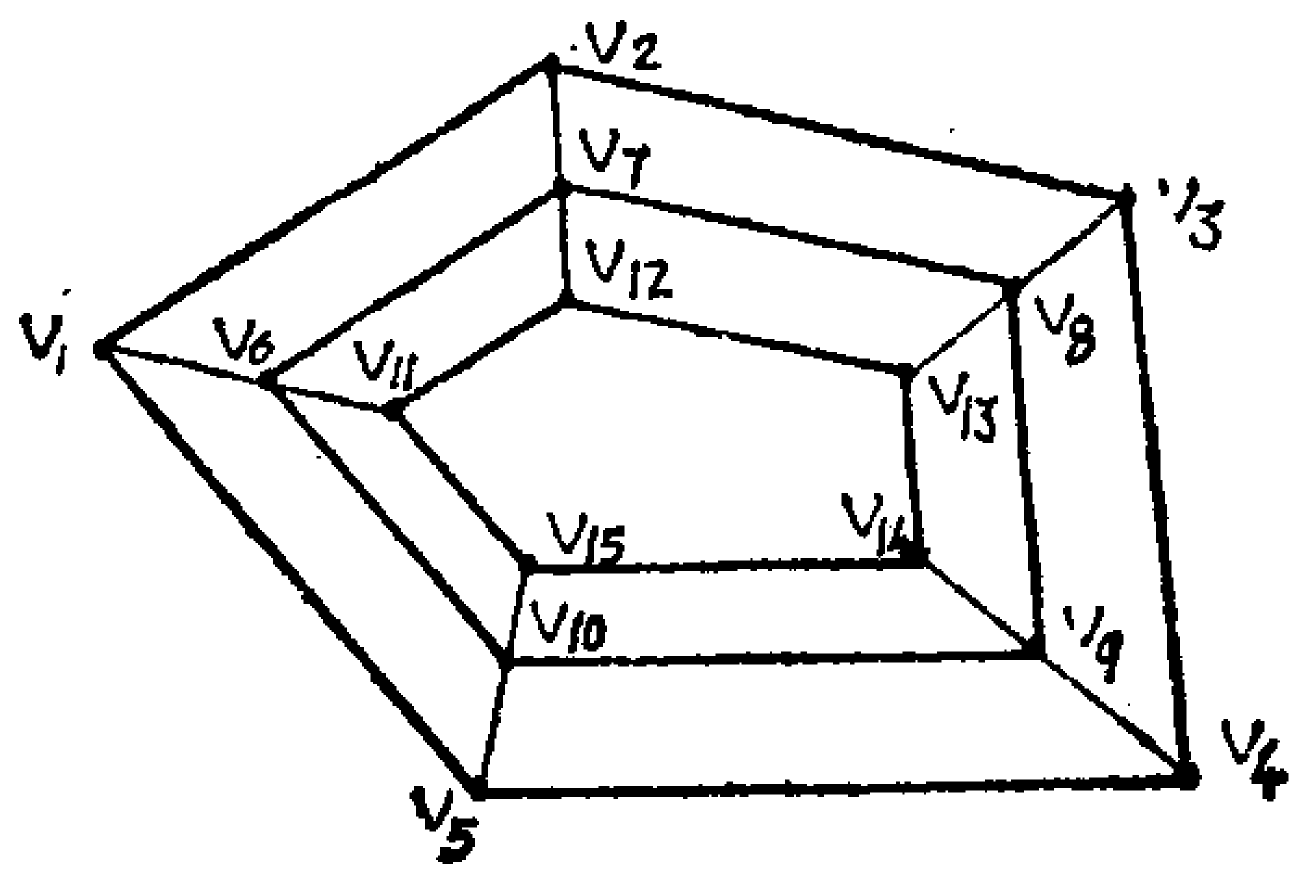

图48

解：(v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_8, v_7, v_6, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{10}, v_5, v_1)即为一条哈密顿回路

例47　求证：图49非哈密顿图

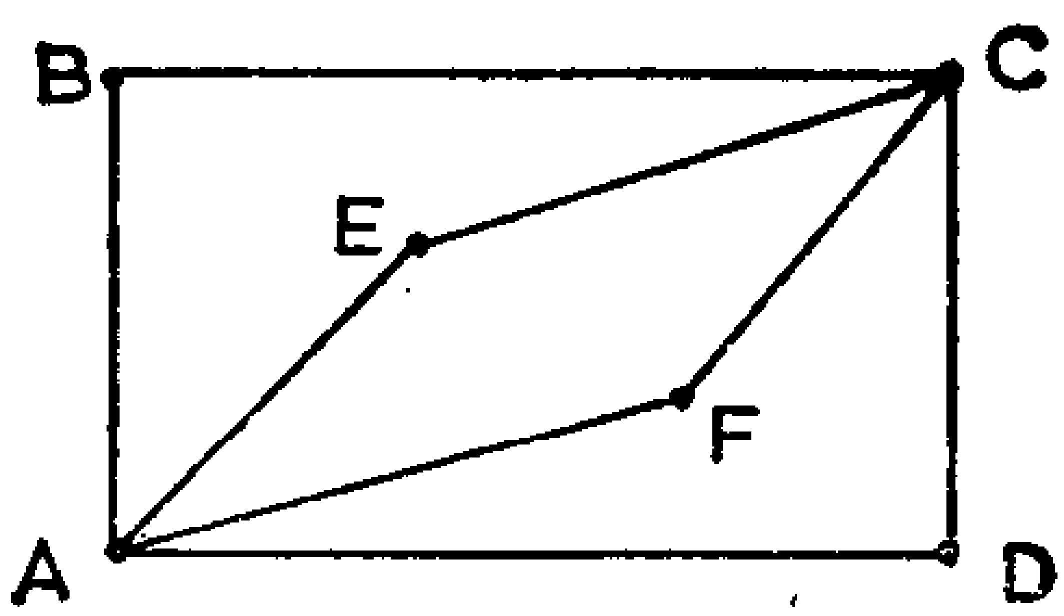

图49

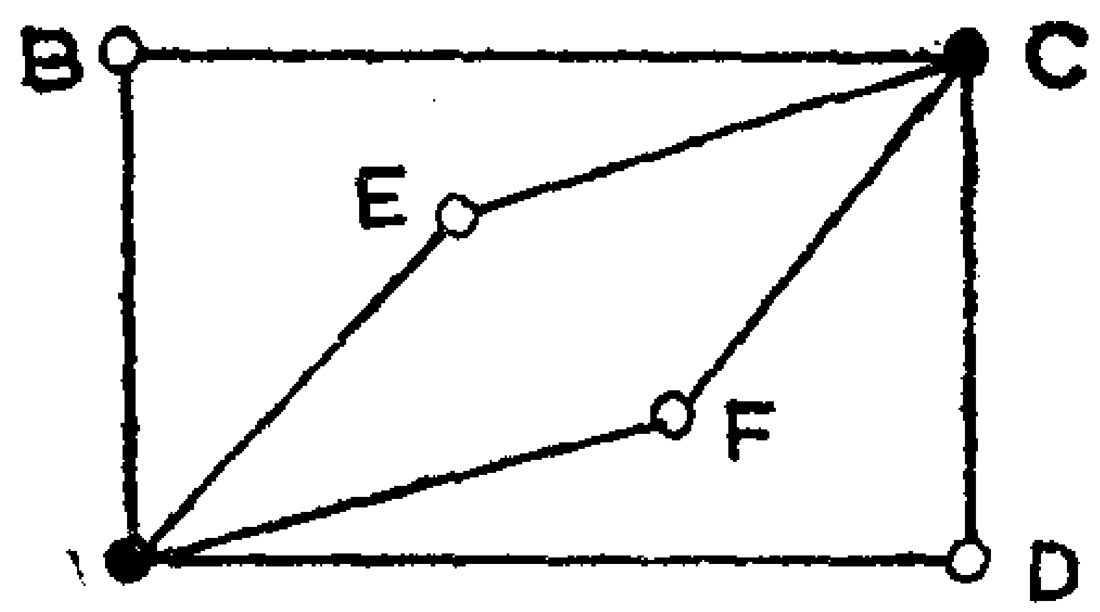

图 50

证：将A涂成黑点"●"，将与A相邻的顶点B、E、F、D打上圈"○"，将与B(或E或F或D)相邻的顶点C涂成黑点"●"。如图50

如果图G中有一条哈密顿回路，则这条回路包含了G的全部顶点且顶点交替为"●○●○…"

今G有2个"●"顶，4个"○"顶。矛盾

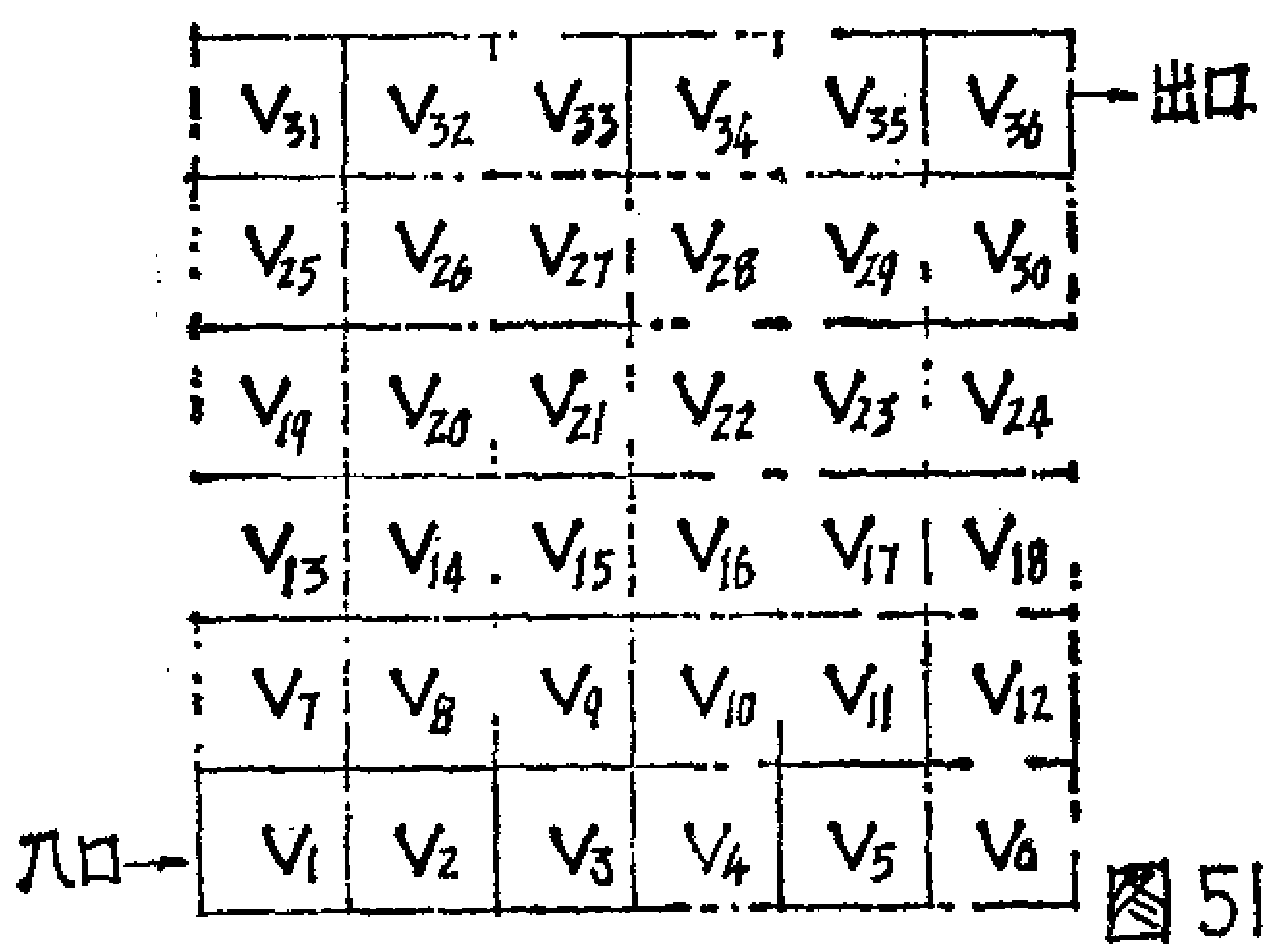

图 51

例48　一展览会有36个展览室，布成6×6的方阵，如图51

其中每一个展览室均与相邻的展览室有门相通，今欲从入口进入，把每个展览室参观一次且仅一次后由出口离开，此想法能实现吗？为什么？

分析：将每个展览室看作一个点，相邻两室的门看作边，于是得一连通图G

要想实现上述要求，即要求有一条从v_1到v_{36}且恰过各点一次的通路.

解：将v_1涂成黑点"●"，将与v_1相邻的顶点v_2、v_7画成圈"○"，将v_2、v_7相邻的顶点v_3、v_8、v_{13}涂成黑点"●"，

…，如图52

如果图G有一条哈密顿通路，则这个通路既包含了G的全部顶点且顶点交替为“●○●○…●”

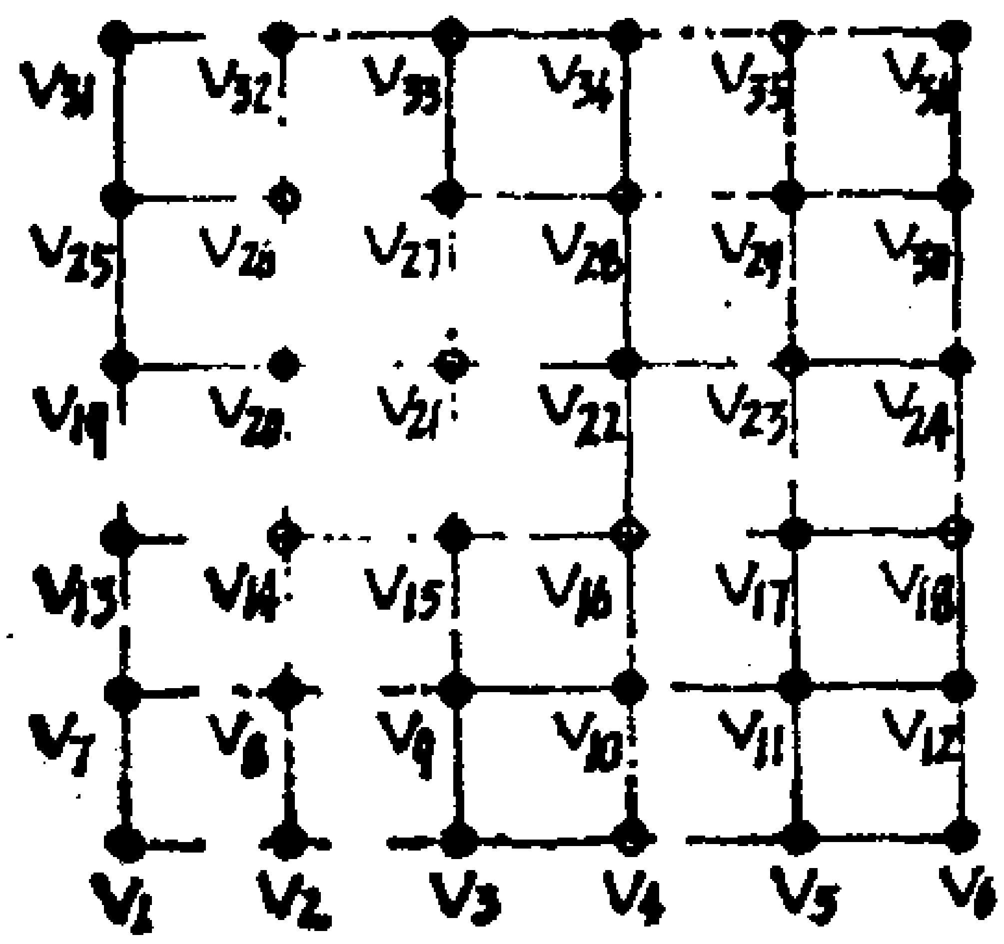

图52

今G有18个“●”，18个“○”　矛盾

故此想法不能实现

说明：$6\times7=42$个展览室能实现吗？

练习31　判断图53中各图是否欧拉图

练习32　求图54中的一条欧拉通路

练习33　在图55中，求一条欧拉回路

练习34　求证：图56中存在一条哈密顿通路

练习35　找出图57、图58、图59各图的一条哈密顿回路

练习36　求证：完全图K_n是哈密顿图

练习37　画一个图，使其满足

（1）既是欧拉图又是哈密顿图

（2）是欧拉图但不是哈密顿图

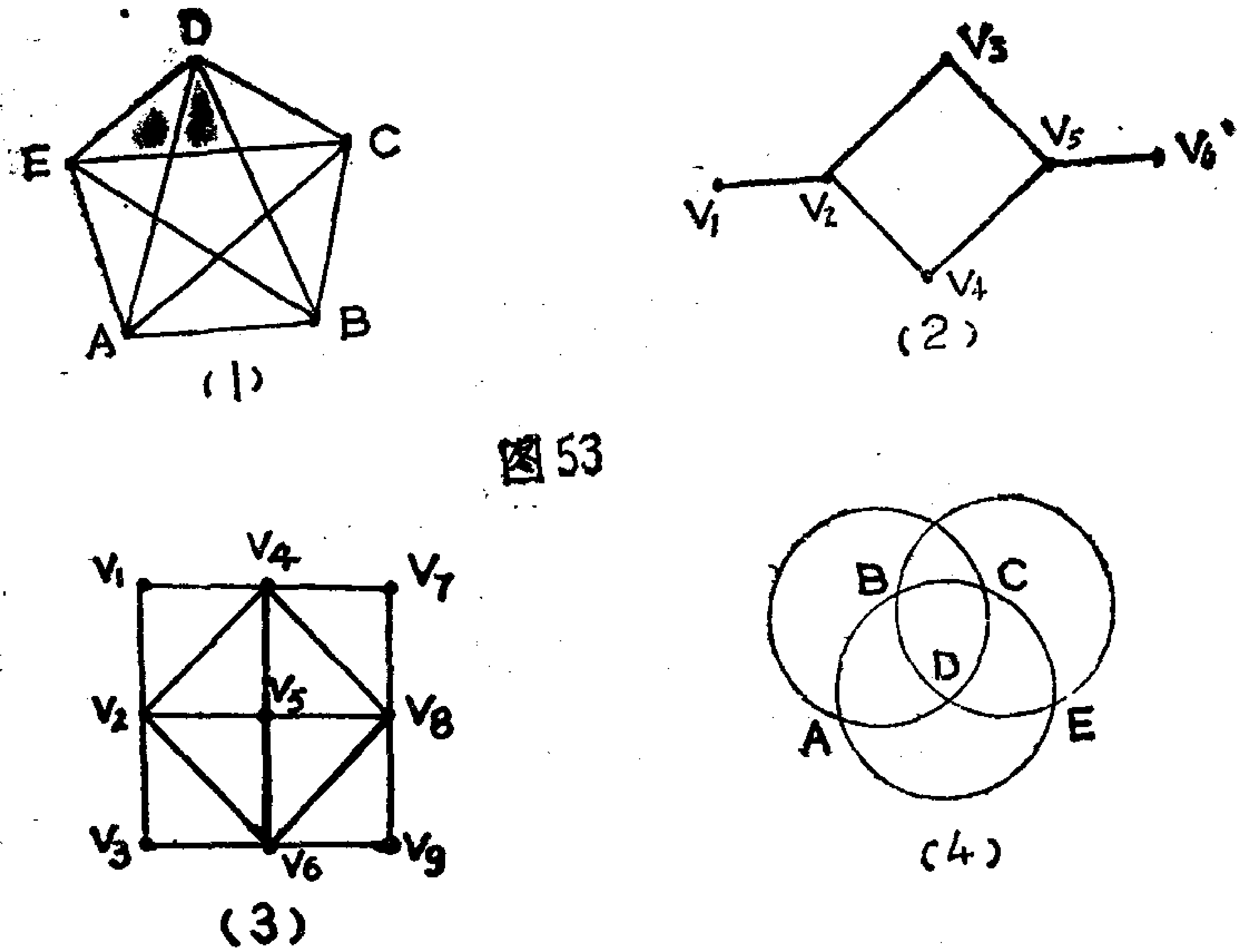

图53

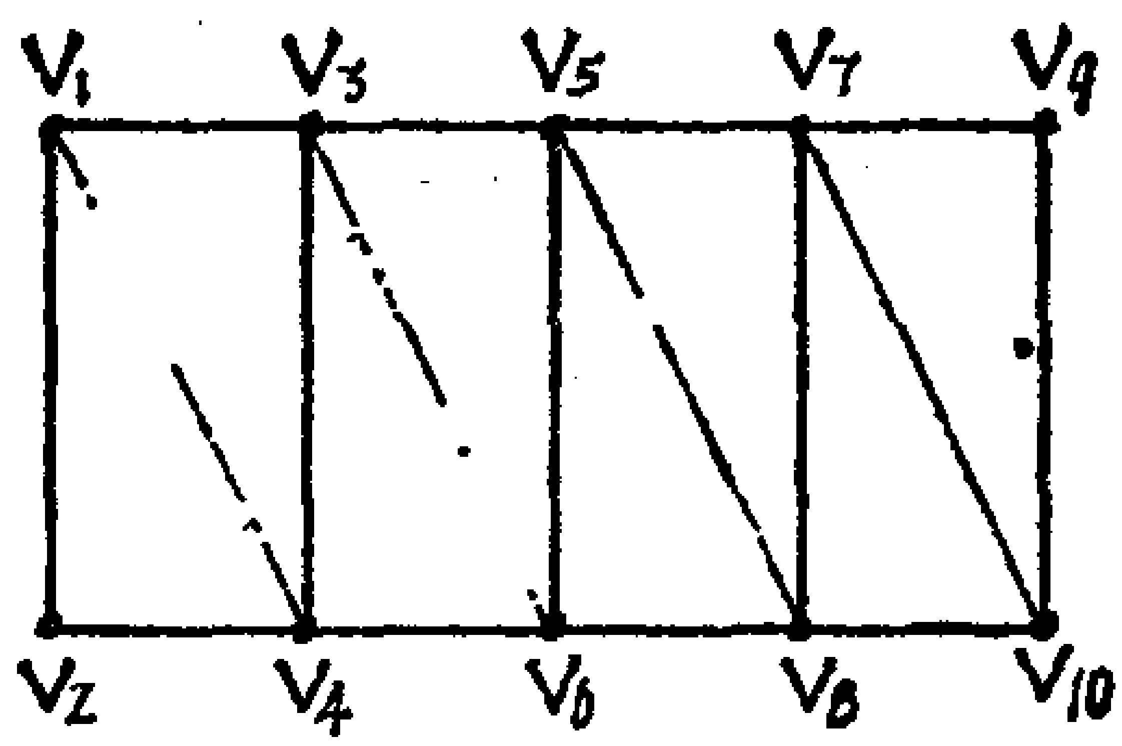

图54

(3) 不是欧拉图但是哈密顿图

(4) 既不是欧拉图又不是哈密顿图

练习38 设(p, q)图G为欧拉图，则$q > p - 1$

练习39 找出图60、图61、图62、图63各图的一条哈密顿回路

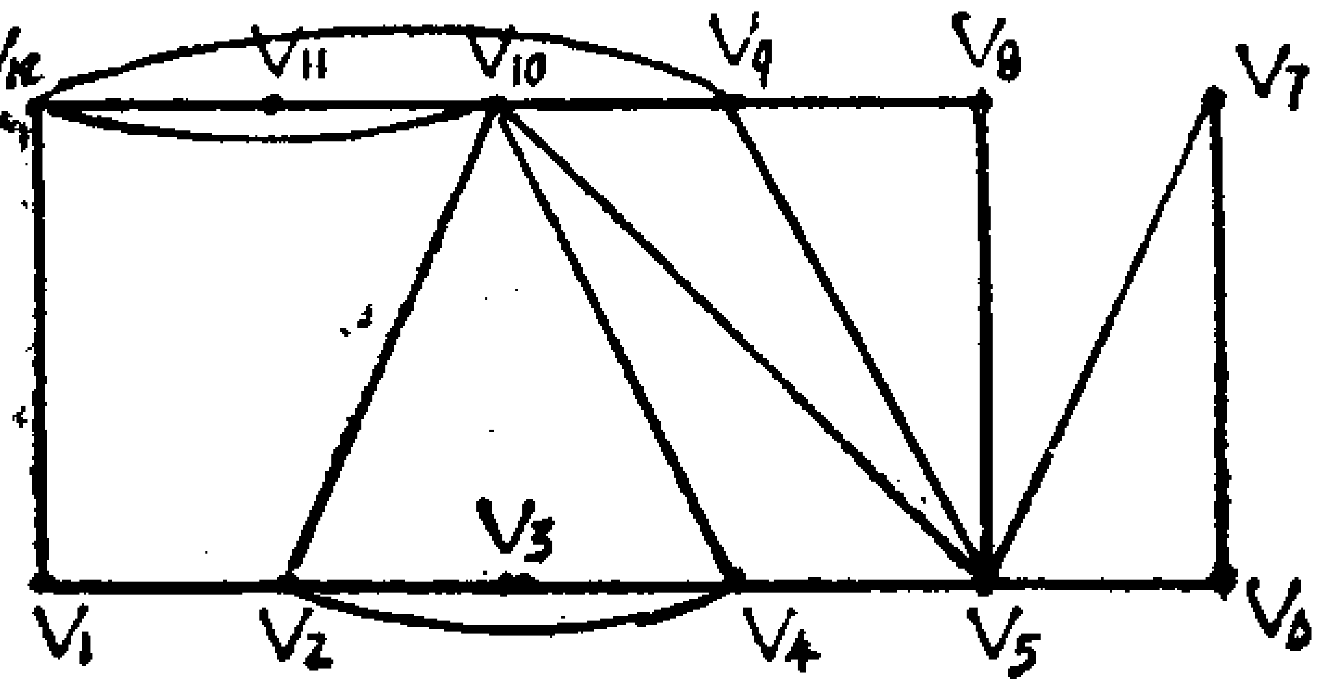

图 55

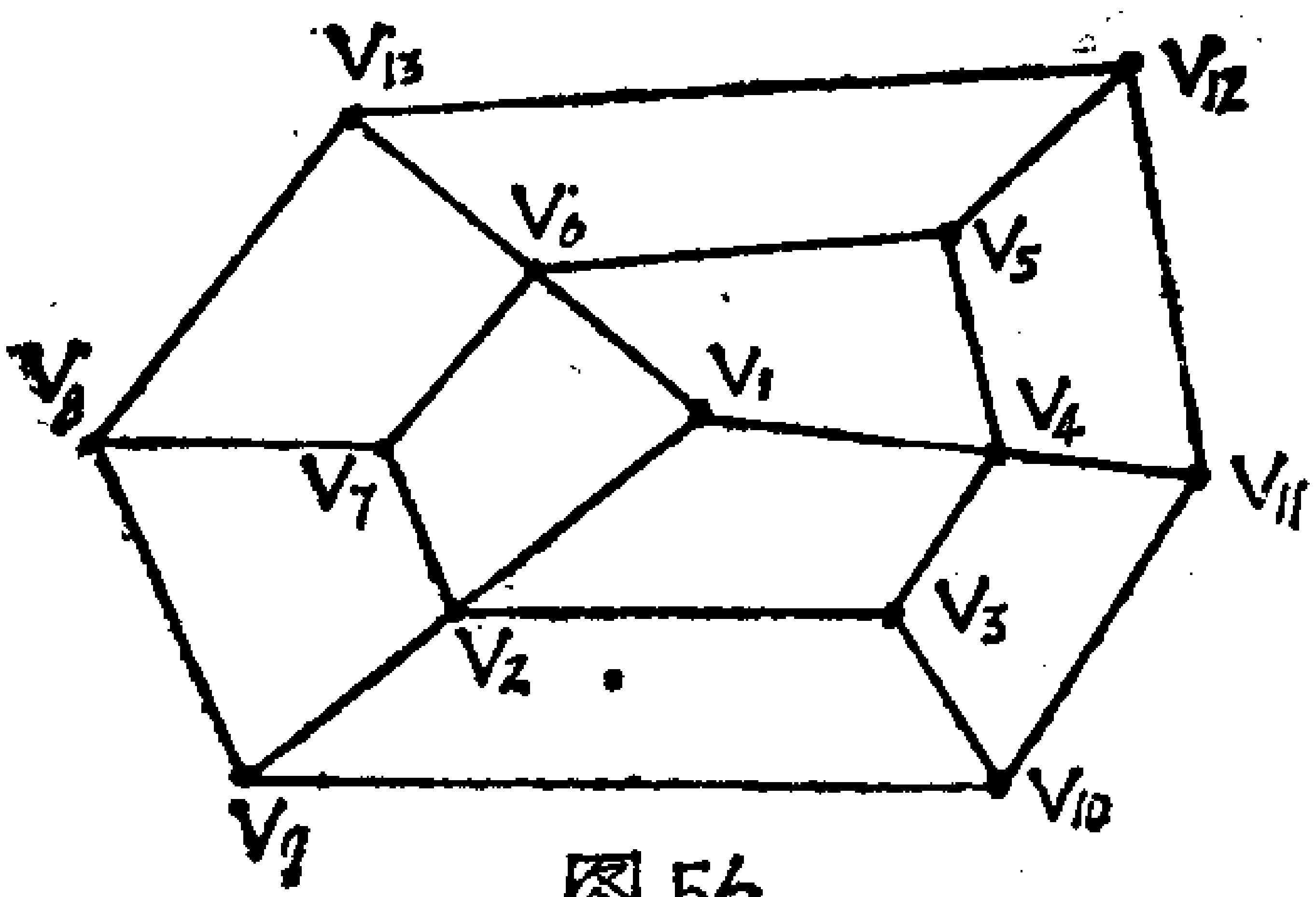

图 56

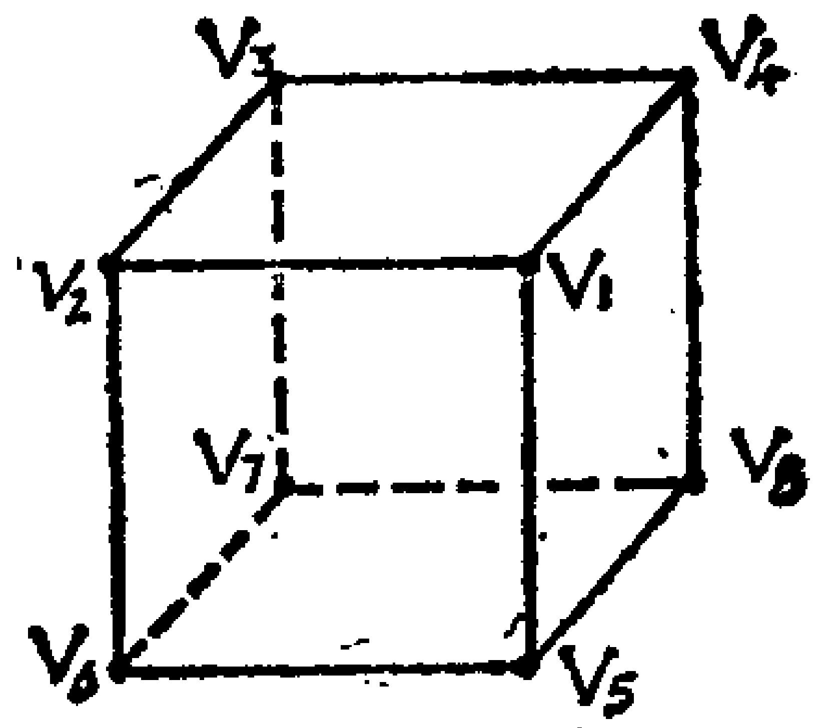

图 57

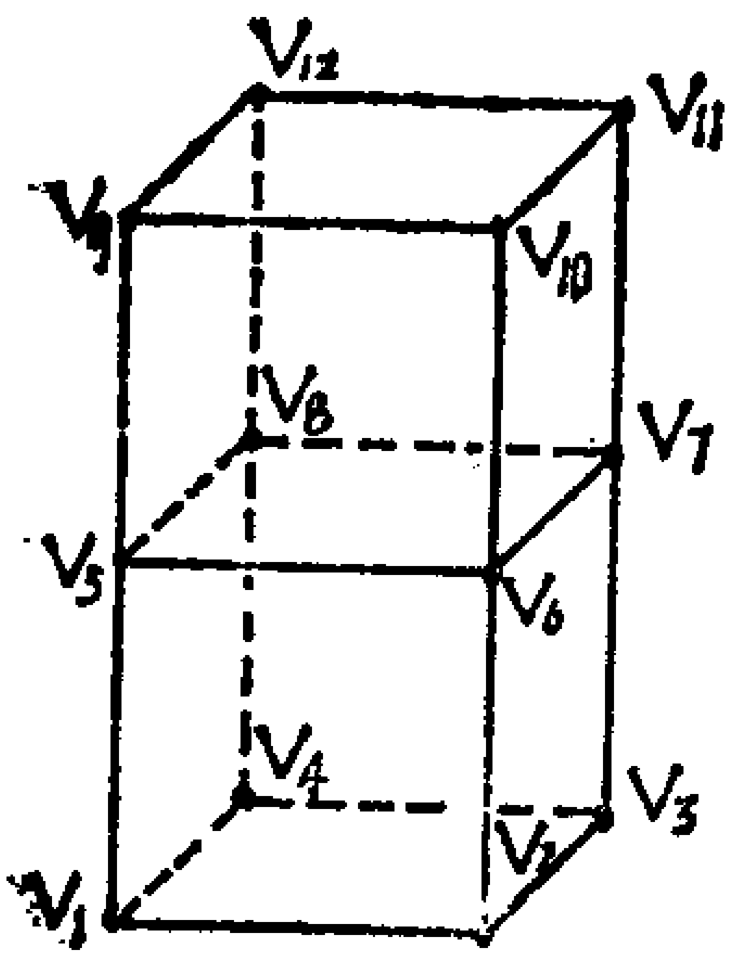

图 58

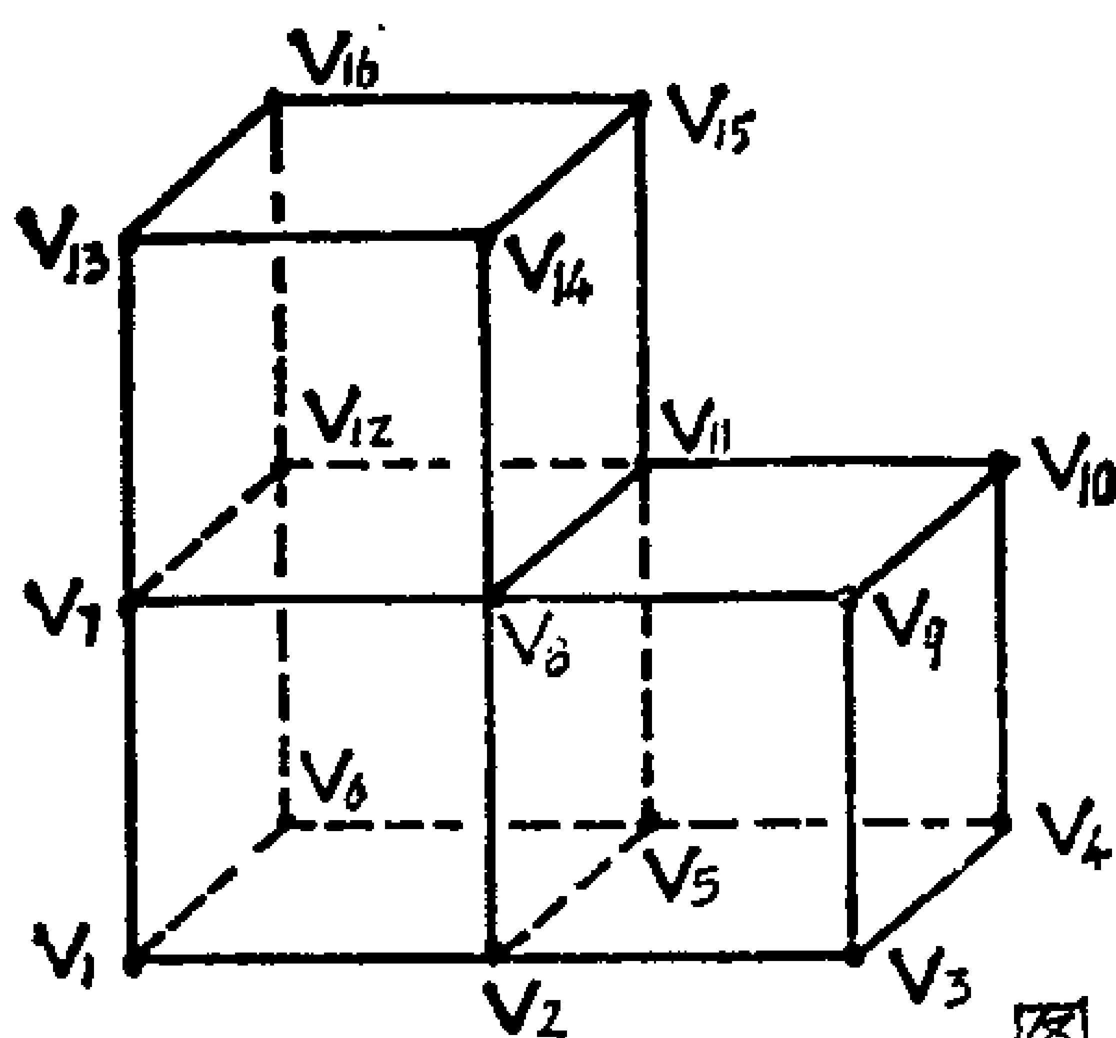

图 59

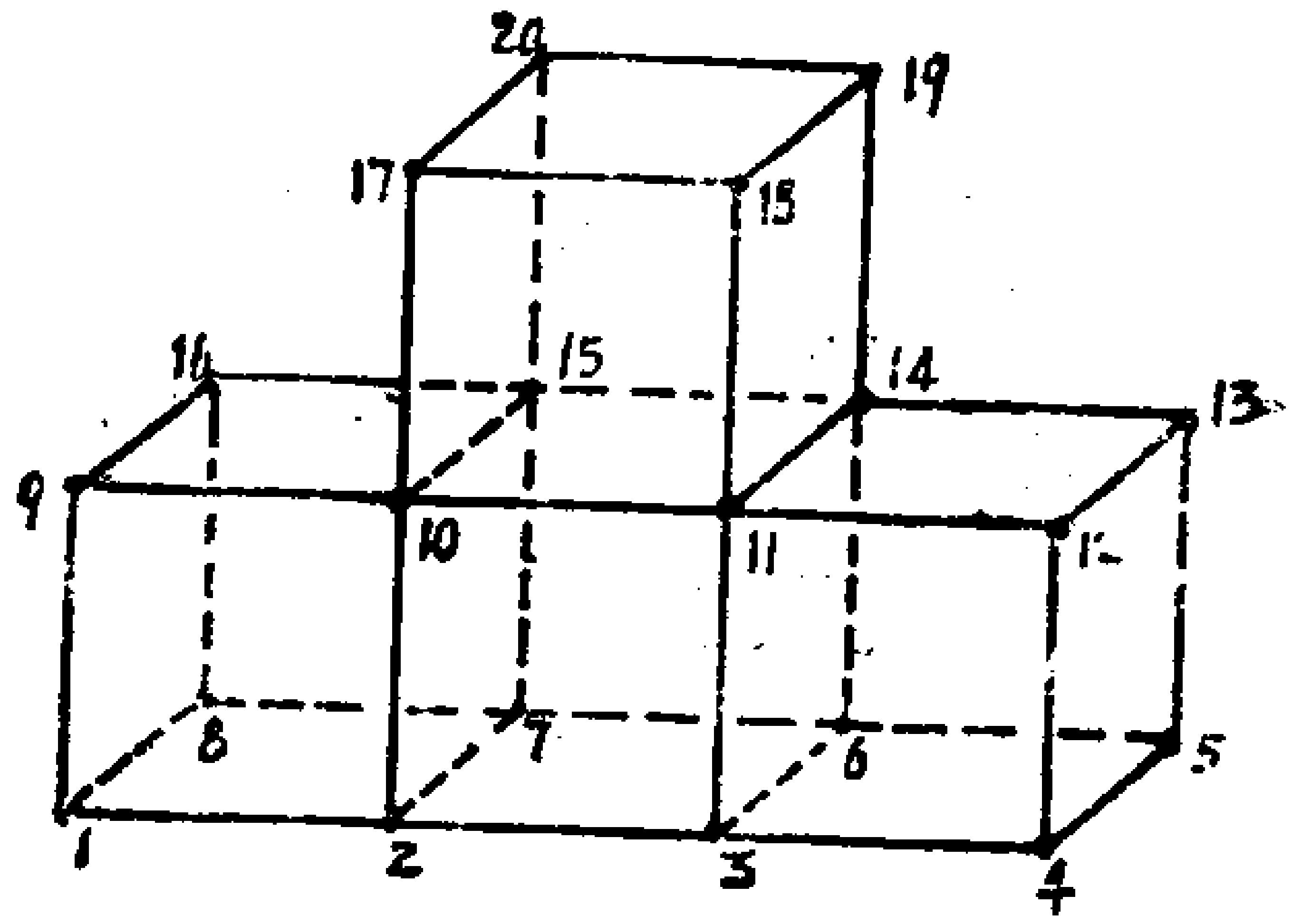
20
19
17
18
16
15
14
13
9
10
11
12
8
7
6
5
1
2
3
4

图 60

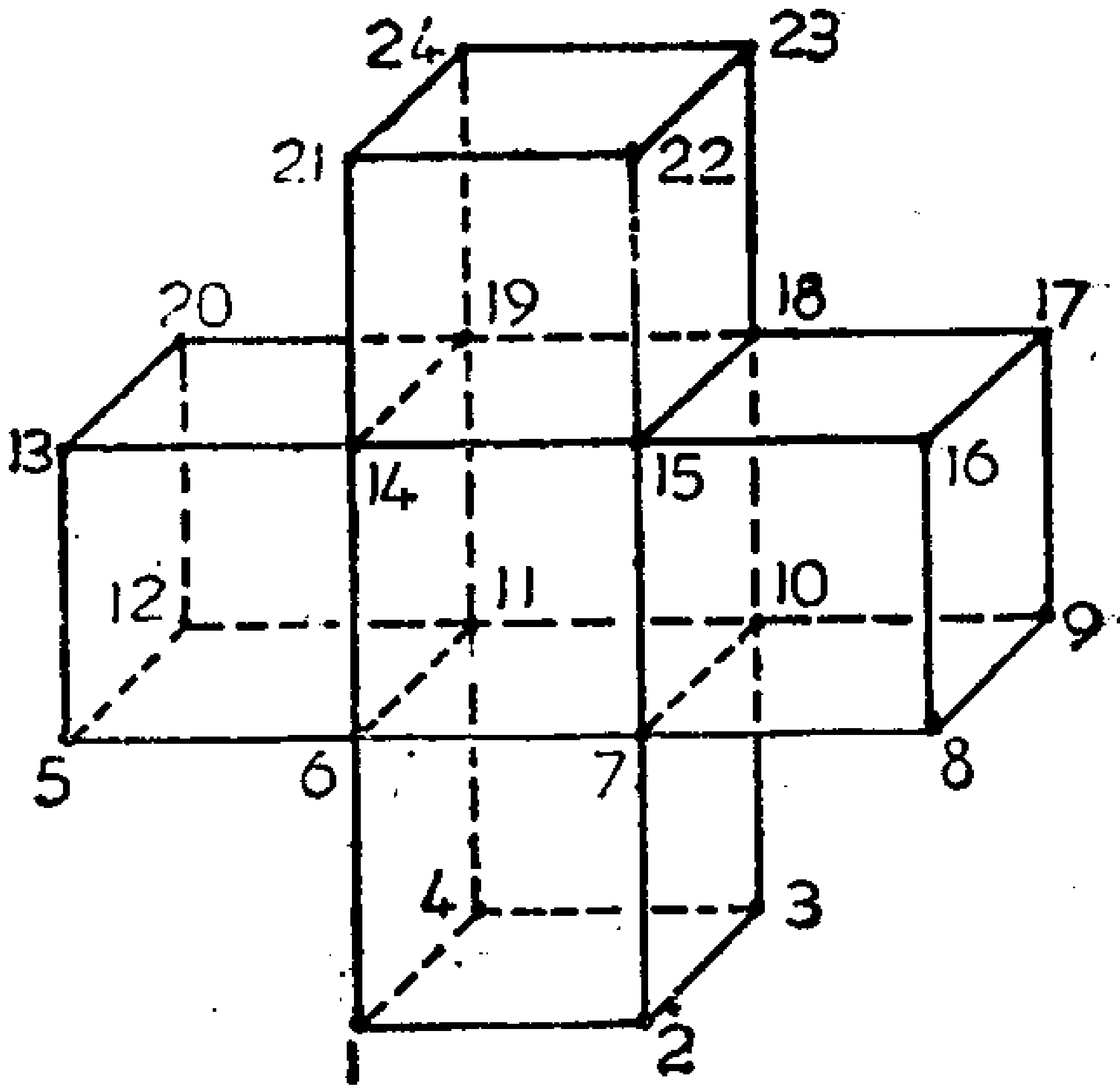
24
23
21
22
20
19
18
17
13
14
15
16
12
11
10
9
5
6
7
8
4
3
1
2

图 61

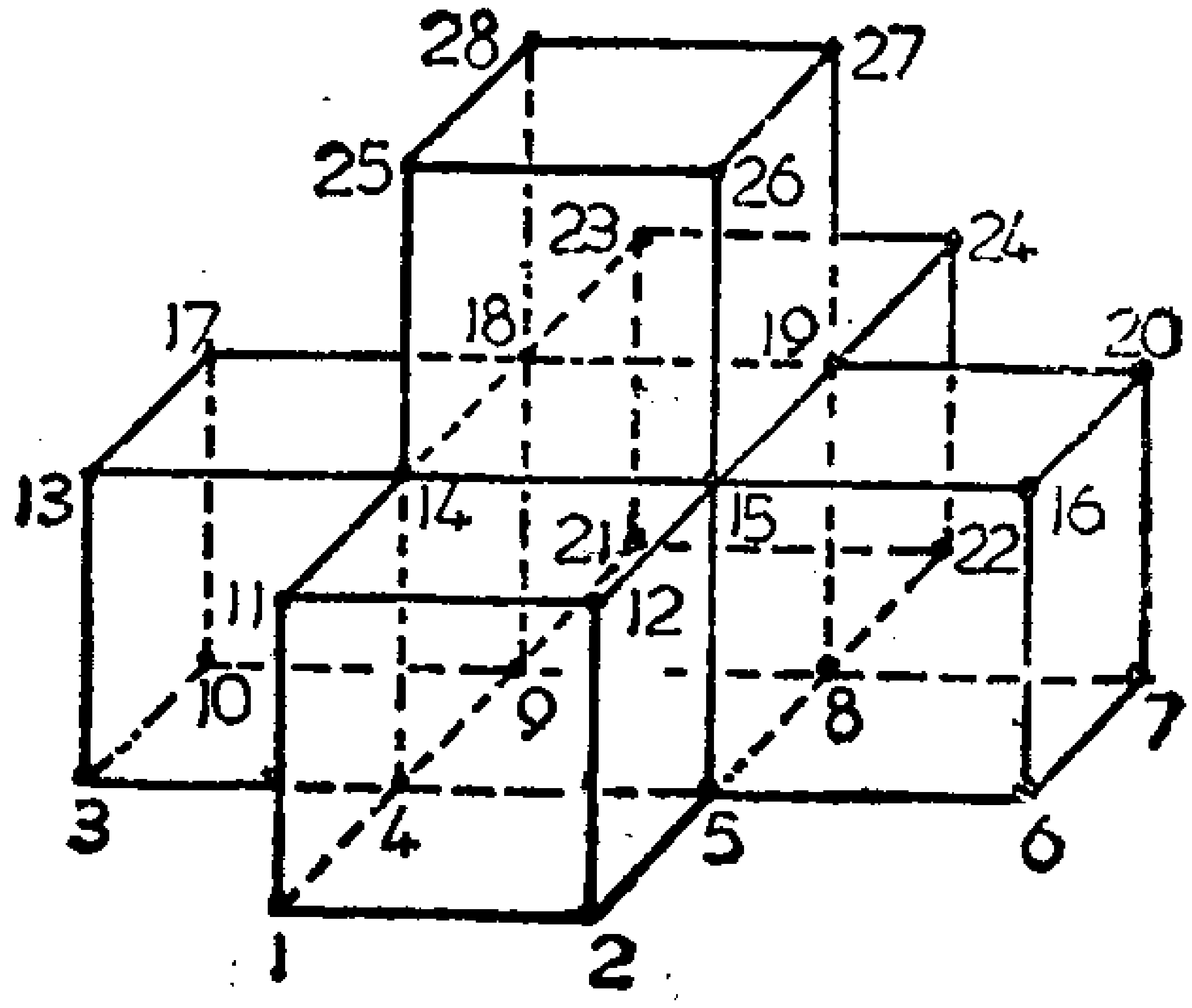
28
27
25
26
23
24
17
18
19
20
13
14
21
15
22
16
11
12
10
9
8
7
3
4
5
6
1
2

图 62

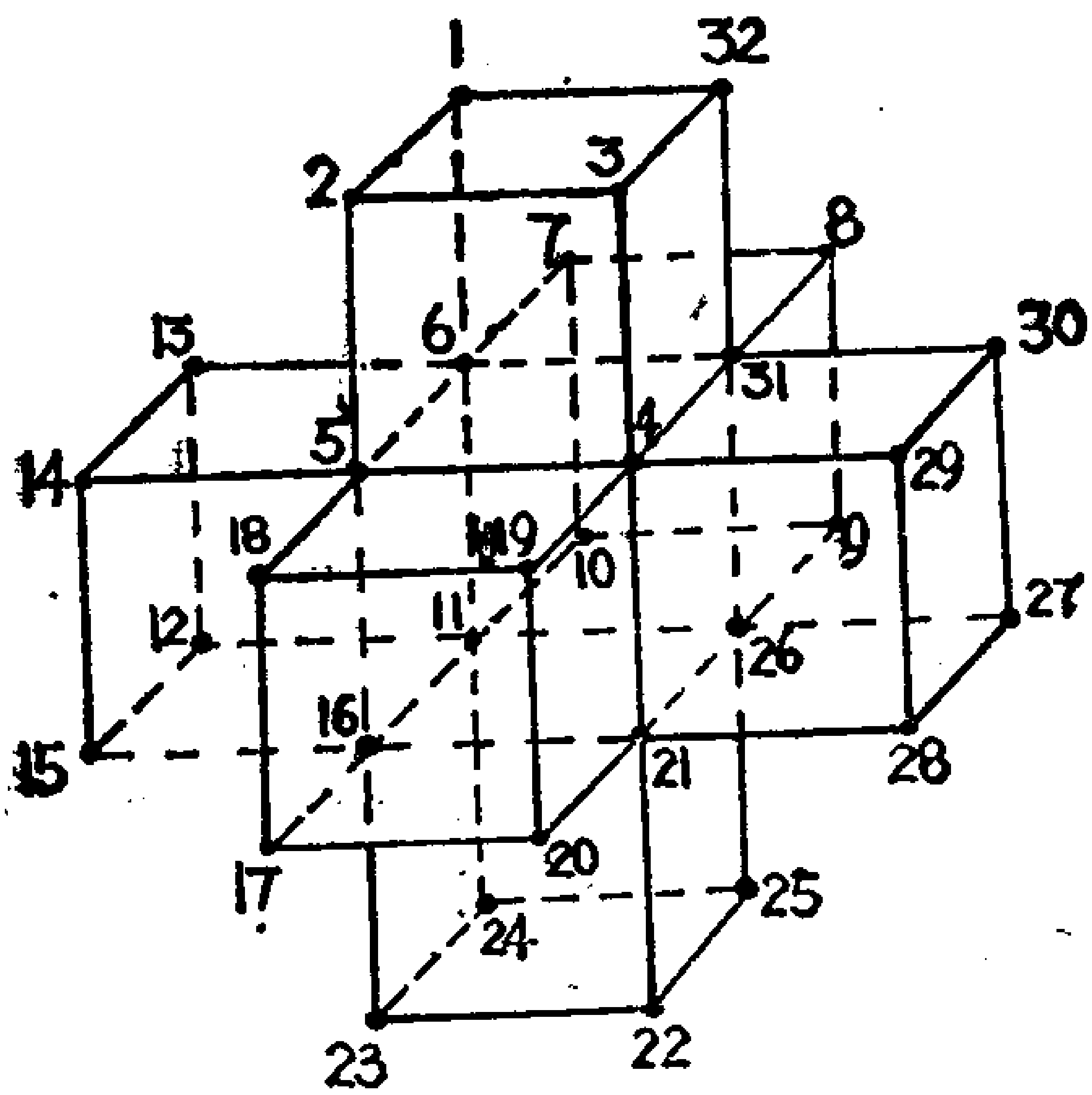
1
32
2
3
7
8
13
6
30
31
5
4
14
29
18
19
10
9
12
11
26
27
16
15
21
28
17
20
24
25
23
22

图 63

§7　最小树问题

1　赋权图

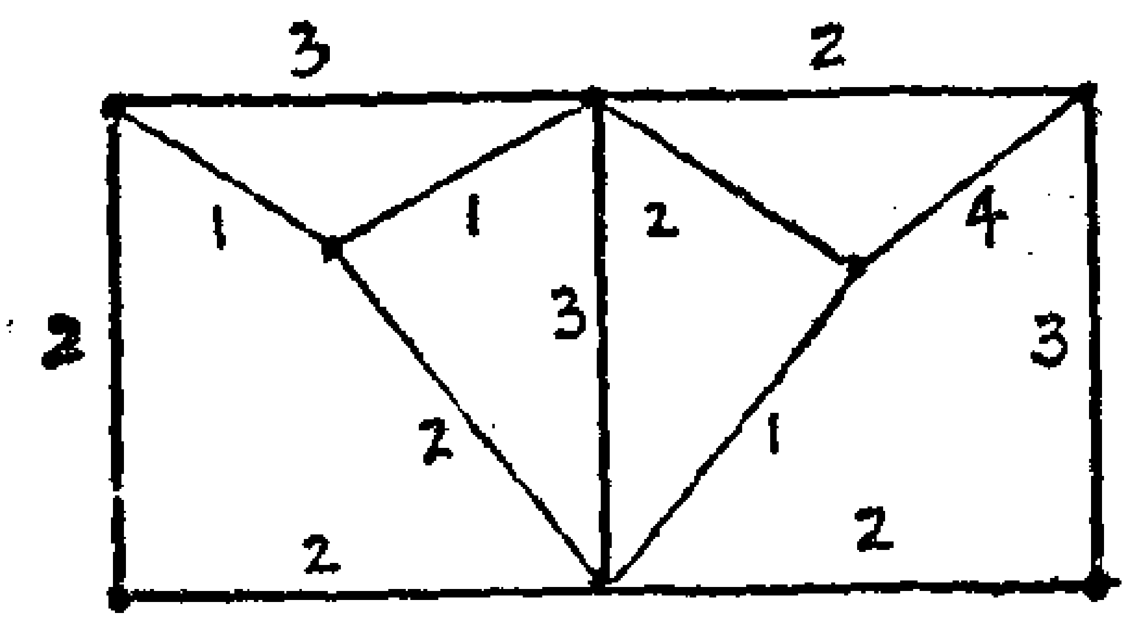

图 64

设图$G=(V, E)$，对G中的每一条边$\{v_i, v_j\}$，相应地有一个数w_{ij}称为边$\{v_i, v_j\}$上的权。G连同在它的边上的权称为赋权图

边上赋予了权的连通图称为网络

例49　图64即为赋权图

2　最小部分树

设连通图$G=(V, E)$，$w_{ij}\geqslant 0$为边$e=\{v_i, v_j\}$上的权，则在赋权图G的所有部分树中，其边的权数总和最小的那一个叫做G的最小部分树，简称最小树。即求G的部分树T^*，使得

$$W(T^*) = \sum_{\{v_i,v_j\}\in T^*} W_{ij}$$

取得极小值

例50　图65中的最小树T^*为图66

图66中边的权数总和为8，它不超过其它部分树的权数总和

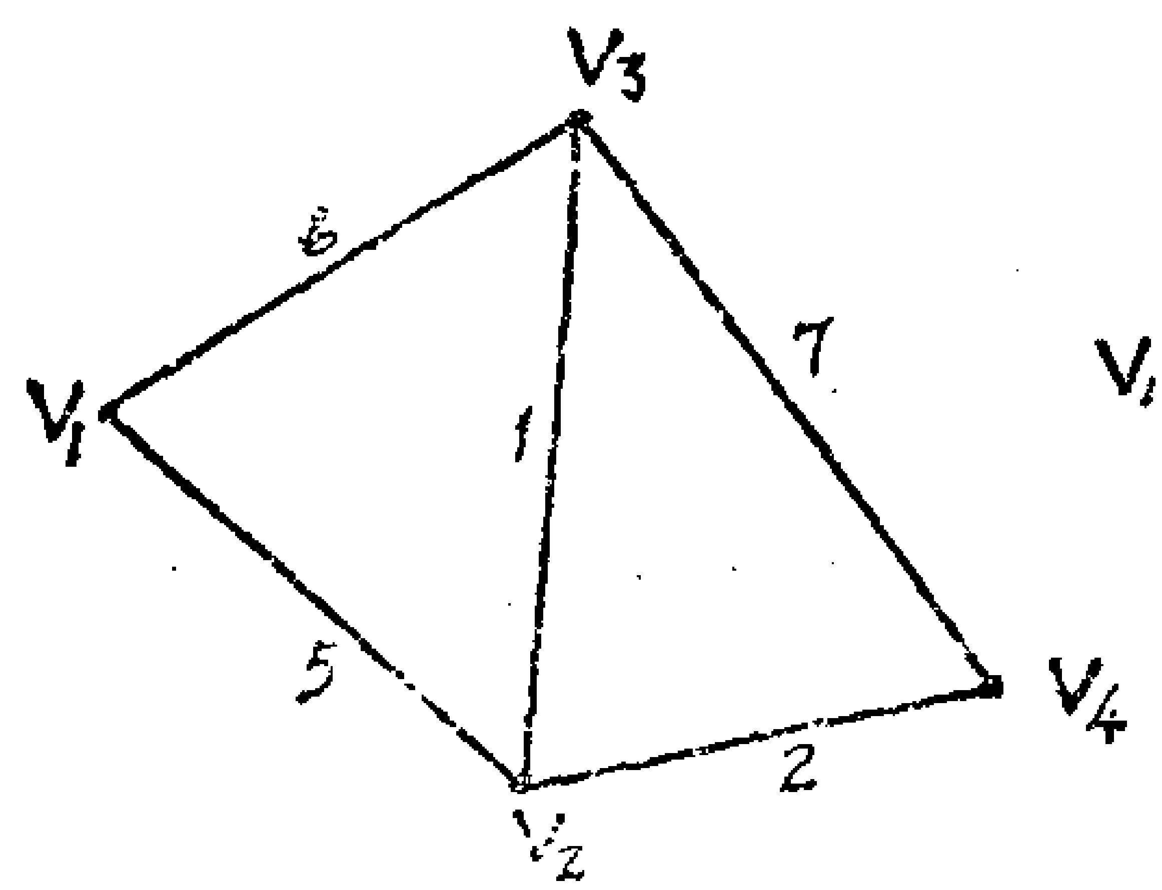

图65

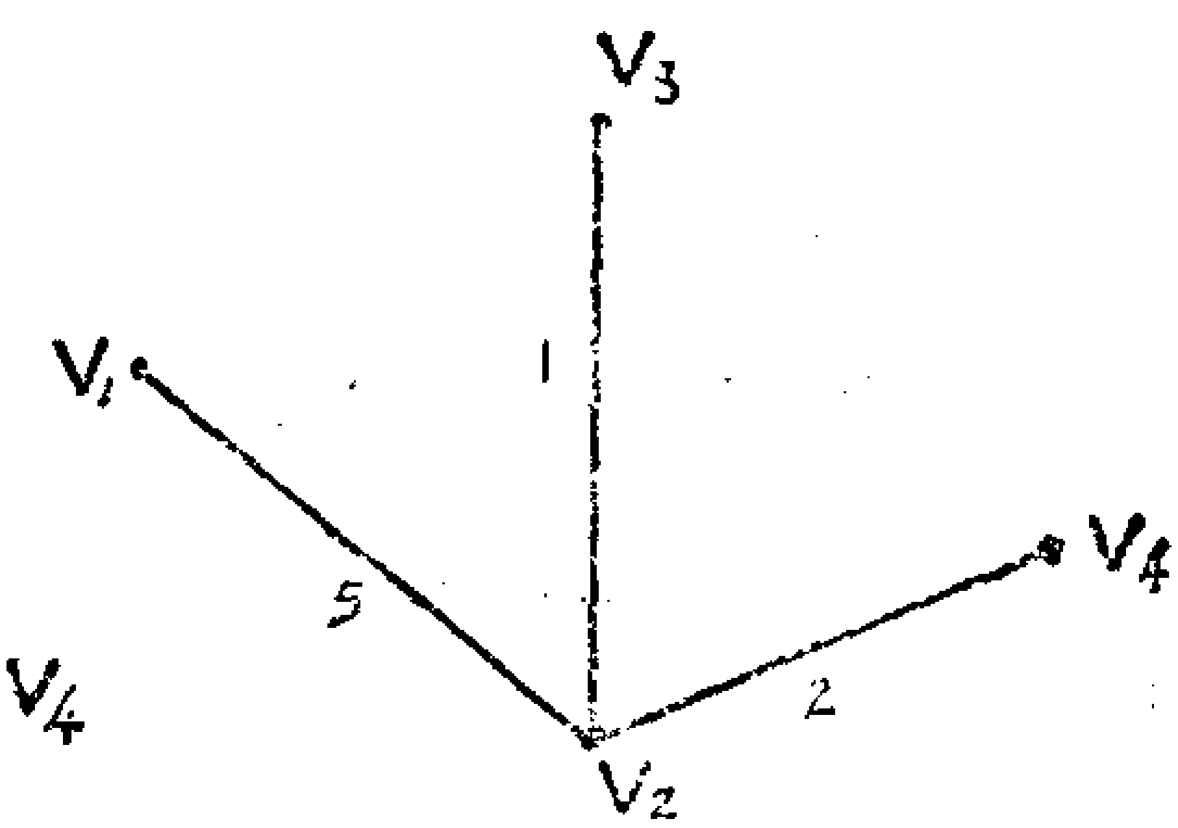

图66

3　最小树定理

若T^*是图G的一颗树，则它是最小树当且仅当对T^*外的每条边$\{v_i,v_j\}$有

$$w_{ij}\geqslant max\{w_{ii_1},\ w_{i_1i_2},\ \cdots,\ w_{i_{k-1}j}\}$$

其中$(v_i,\ v_{i_1},\ v_{i_2},\ \cdots,\ v_{i_{k-1}},v_j)$是树$T^*$内连接点$v_i$和$v_j$的唯一的一条通路

证：由树的第三条性质知$T^*+\{v_i;\ v_j\}$有唯一的一个圈

(1) 若T^*是最小树，则

$$w_{ij} \geq max\{w_{ii_1}, w_{i_1i_2}, \cdots, w_{i_{k-1}j}\}$$

(2) 若$\forall \{v_i, v_j\} \notin T^*$，则

$$w_{ij} \geq max\{w_{ii_1}, w_{i_1i_2}, \cdots, w_{i_{k-1}j}\}$$

则显然T^*是最小树

例51　设最小树T^*如图66所示，T^*外的边有$\{v_1, v_5\}$，$\{v_4, v_5\}$，则

$$max\{w_{12}, w_{23}\} = max\{5, 1\} = 5 < 6 = w_{15}$$

$$max\{w_{42}, w_{25}\} = max\{2, 1\} = 2 < 7 = w_{45}$$

4　克鲁斯卡尔(Kruskal)算法

每步从未选的边中，选一条最小权的边，使与已选的边不构成圈

例52　求图67的最小树

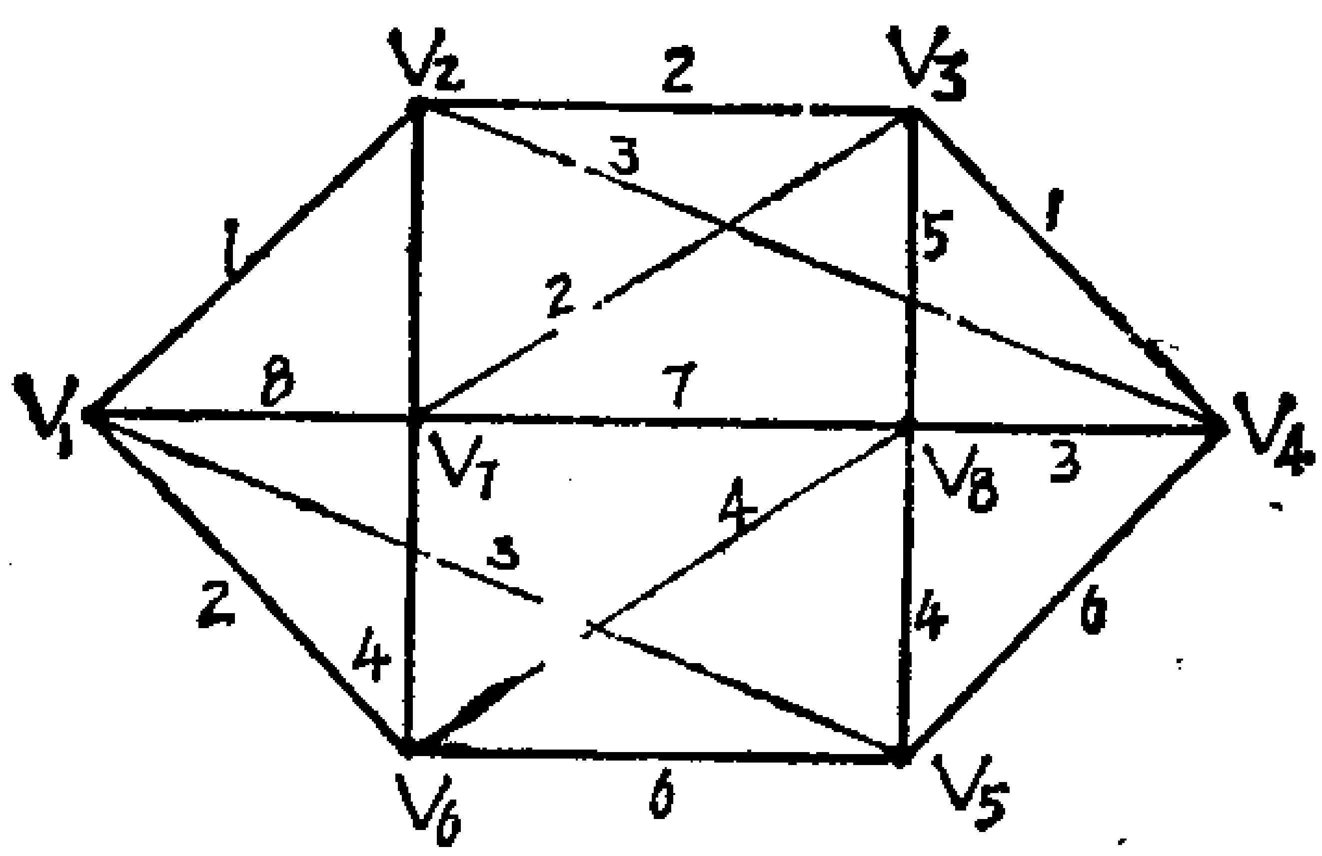

图67

解：第一步，画出v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6，v_7，v_8各点

第二步，将权由小到大依次排列如下：

$$w_{27} = 1, \quad w_{34} = 1, \quad w_{23} = 2, \quad w_{16} = 2,$$

$w_{37}=2$, $w_{48}=3$, $w_{15}=3$, $w_{24}=3$,

$w_{58}=4$, $w_{67}=4$, $w_{68}=4$, …

第三步，按权的大小依次增边如下：

$\{v_2,\ v_7\}$，$\{v_3,\ v_4\}$，$\{v_2, v_3\}$，$\{v_1,\ v_6\}$，$\{v_4, v_8\}$，

$\{v_1,\ v_5\}$，$\{v_5,\ v_8\}$

如图68，则图68即为所求

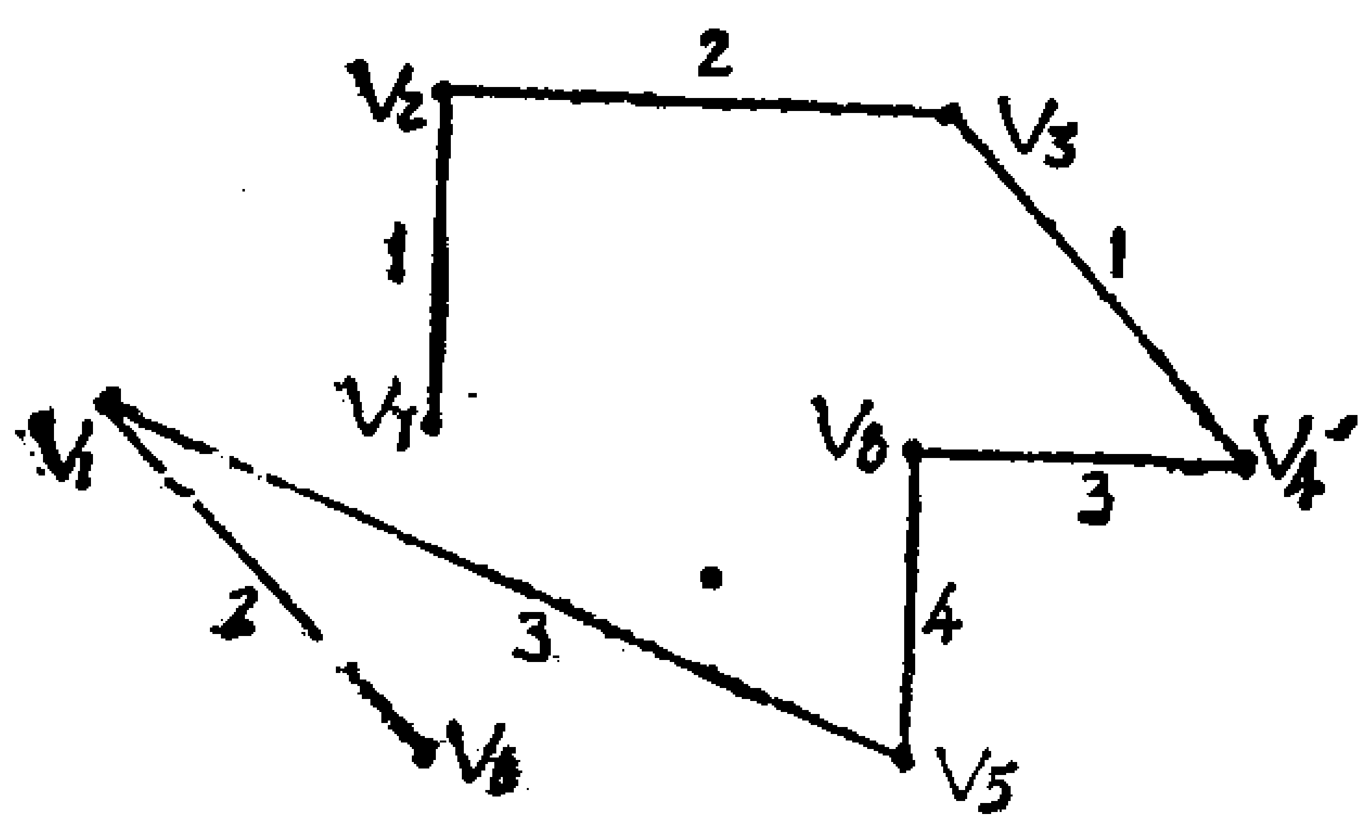

图68

5 破圈法

任取一圈，从圈上去掉一条最大权的边，在余下的图中，重复这个步骤，直到无圈为止。

例53 求图69的最小树

分析：图G的最小树边数为$10-1=9$条，今G有16条边

用克鲁斯卡尔算法，要添上9条边；

用破圈法，要去掉$16-9=7$条边

故可用破圈法，注意恰去掉7条边

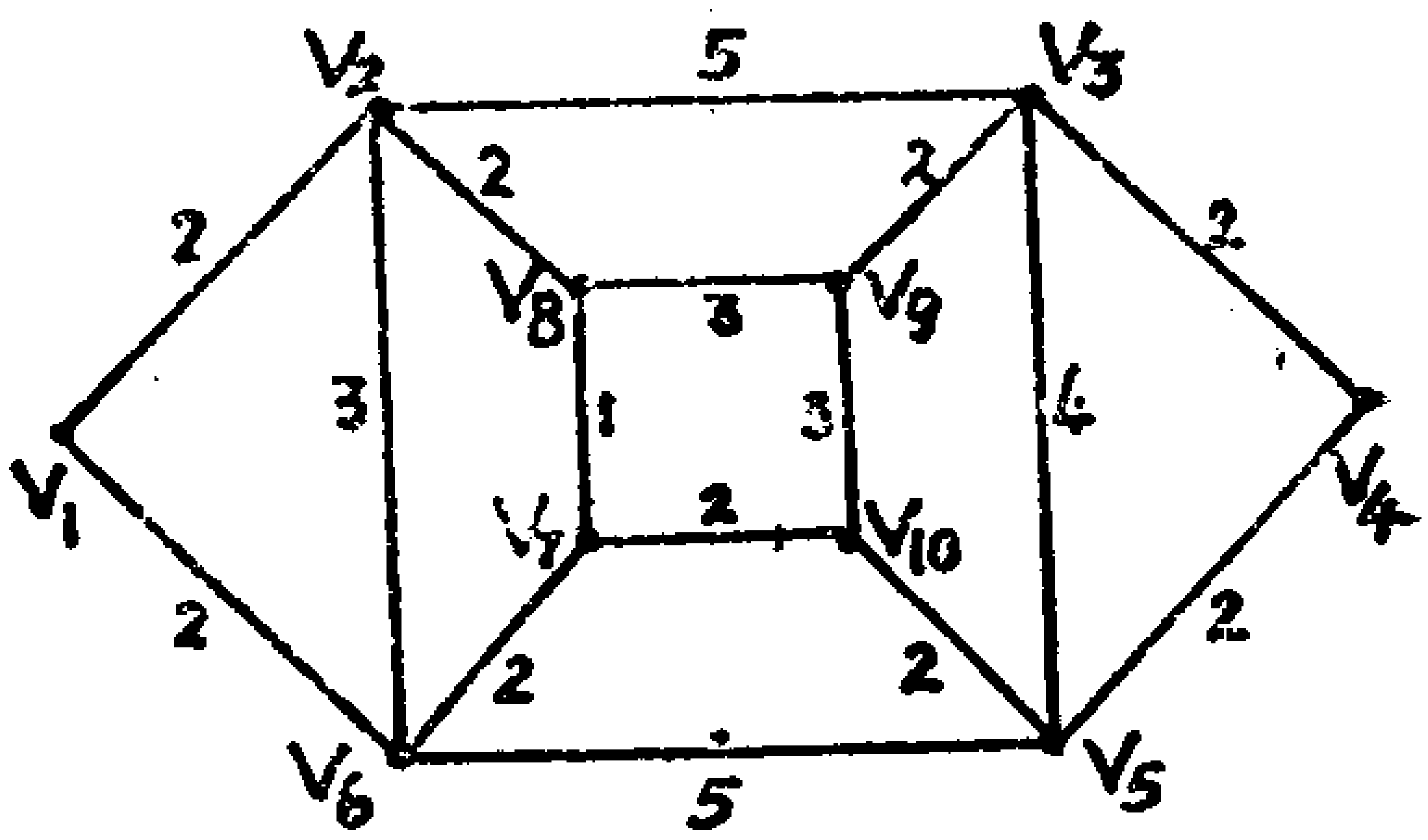

图69

解：(1) 取圈(v_1，v_2，v_6，v_1)，去掉边{v_2，v_6}；

(2) 取圈(v_2，v_8，v_9，v_3,v_2)，去掉边{v_2，v_3}；

(3) 取圈(v_6，v_7，v_{10}，v_5，v_6)，去掉边{v_5，v_6}；

(4) 取圈(v_7，v_8，v_9，v_{10}，v_7)，去掉边{v_8，v_9}；

(5) 取圈(v_1，v_2，v_8，v_7，v_6,v_1)，去掉边{v_1，v_2}；

(6) 取圈(v_9，v_3，v_5，v_{10}，v_9，)，去掉边{v_3，v_5}；

(7) 取圈(v_9,v_3，v_4，v_5，v_{10}，v_9)，去掉边{v_3，v_4}

如图70，则图70即为所求

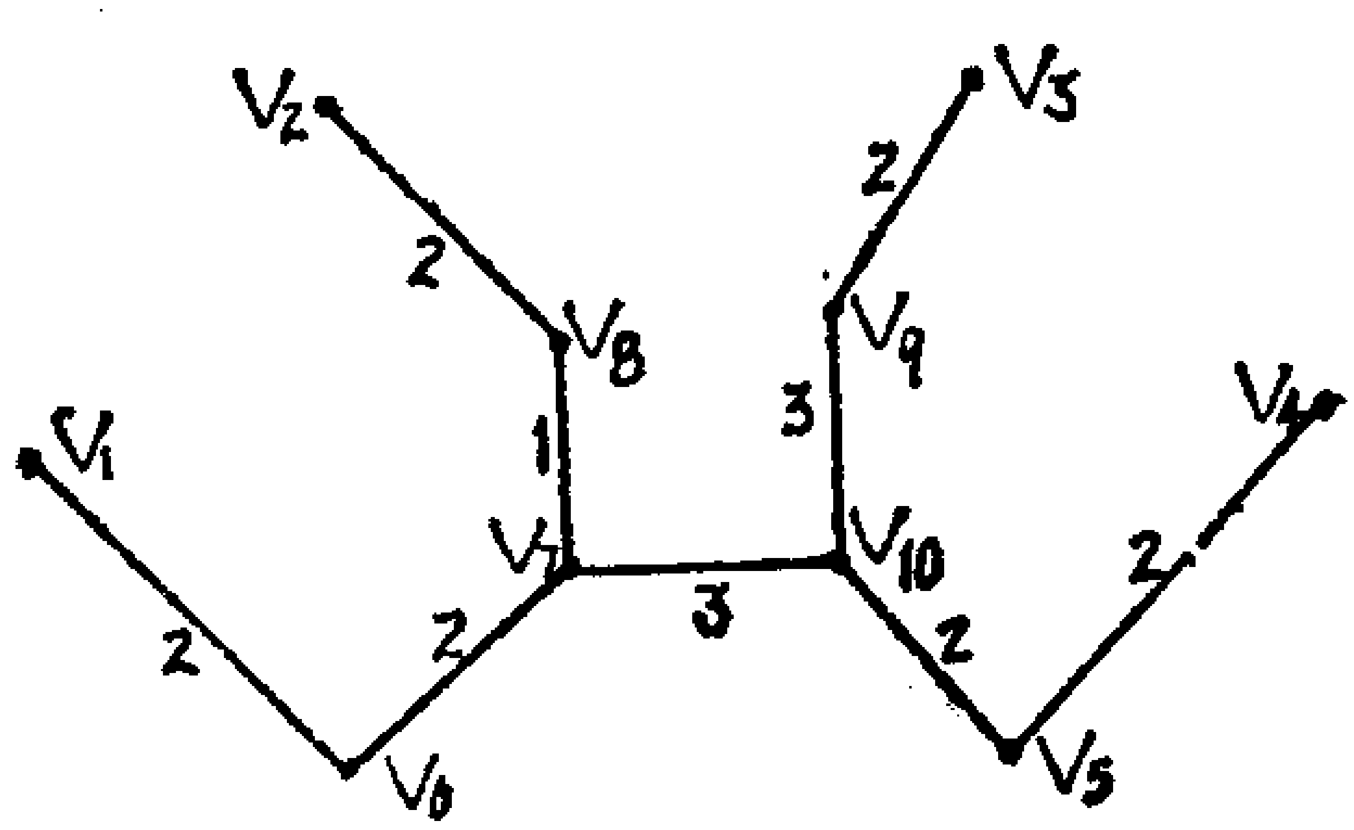

图70

说明：读者从本例中看到，利用破圈法常遇到几个最大

权相同的边，此时可从中任意去掉一条最大权的边即可

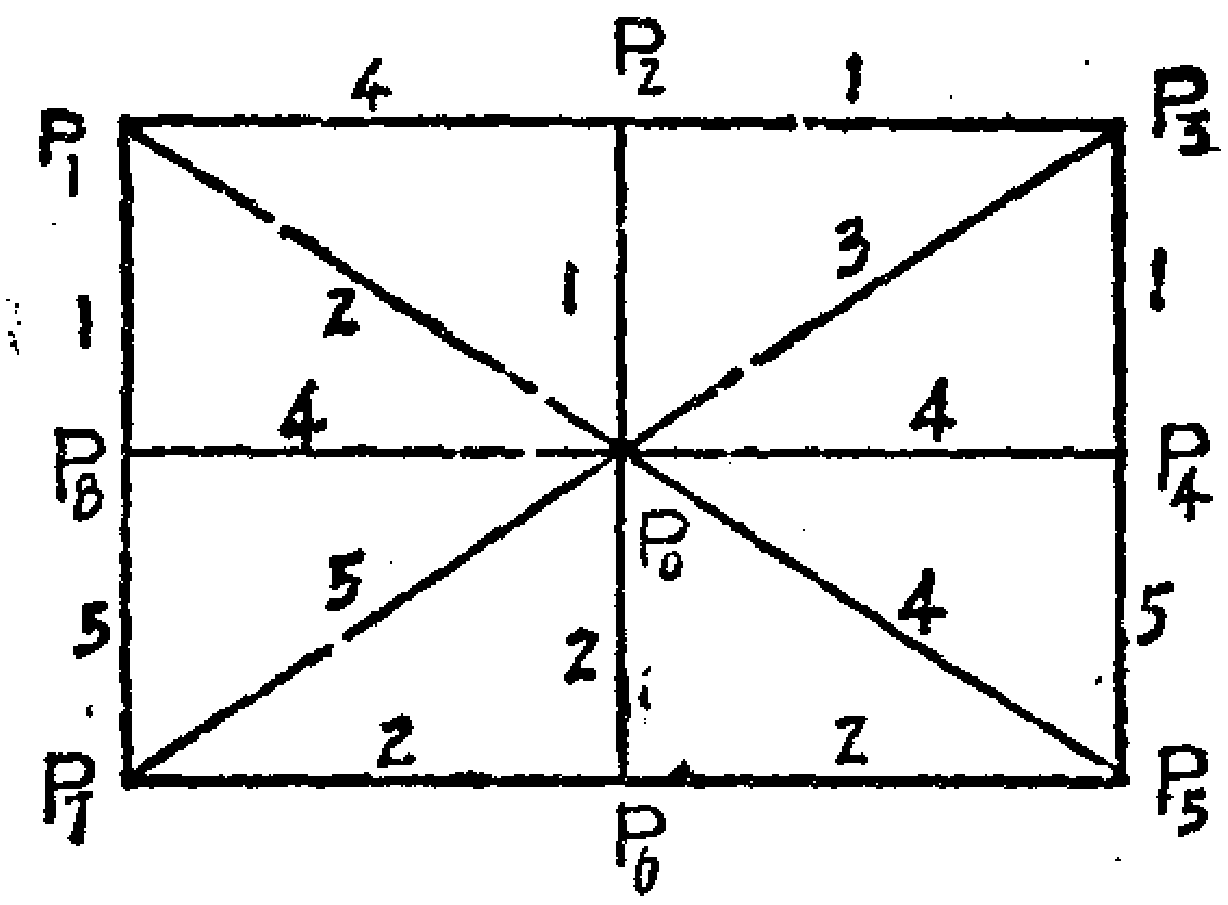

图71

同样，利用克鲁斯卡尔算法，也会遇到几个最小权相同的边，此时可以从中任意去掉一条最小权的边即可。

例54 如图71 所示的八处：P_1，P_2，…，P_8，架设由中心P_0发出的有线广播网，问应如何架设才使得用线最省？

分析：为了使得用线最省，可求此图的最小树T，最小树T包含了图G的全部顶点，因此用不着担心P_0的中心地位。

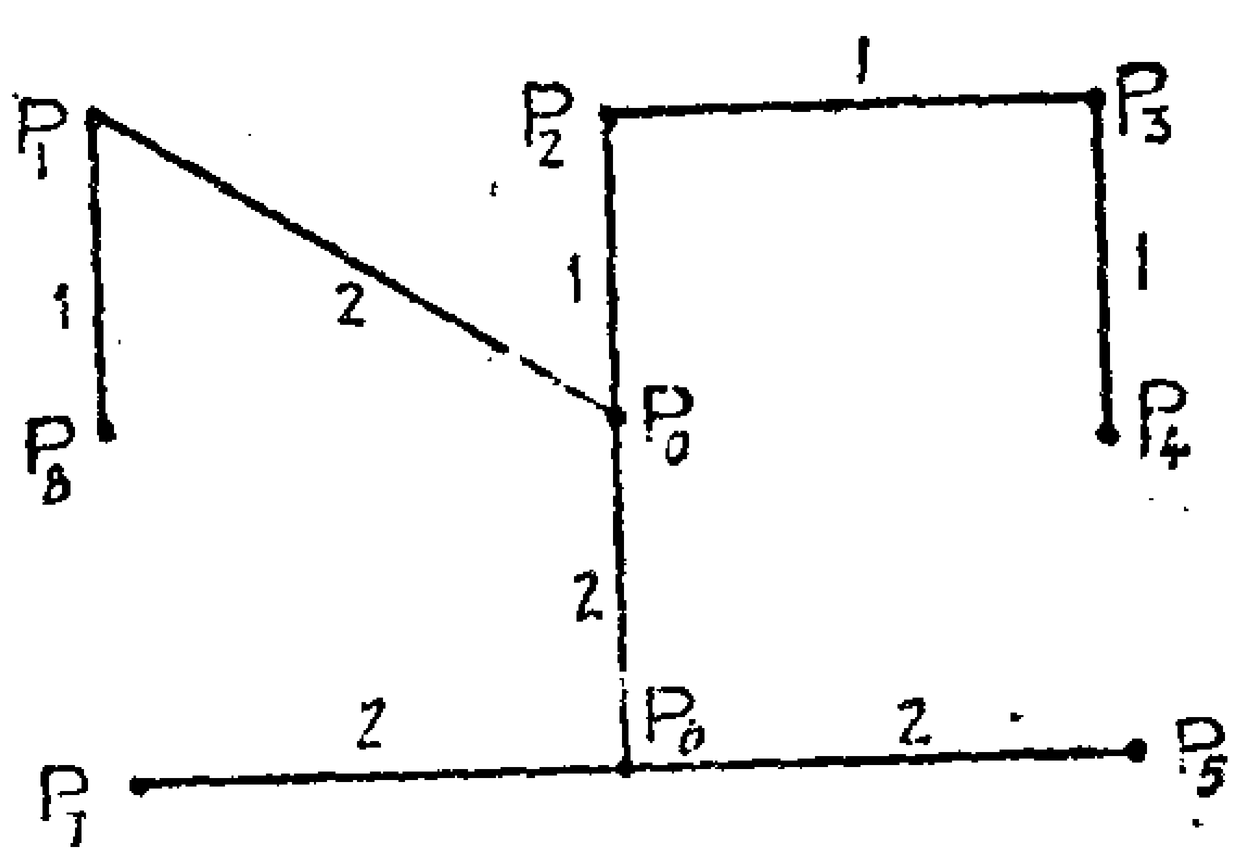

图72

解：按权的大小，依次增边如下：

$\{P_0, P_2\}$，$\{P_1, P_8\}$，$\{P_2, P_3\}$，$\{P_3, P_4\}$，

$\{P_0, P_1\}$，$\{P_7, P_6\}$，$\{P_0, P_6\}$，$\{P_6, P_5\}$

如图72，则图72即为所求

例55 已知世界六大城市

北京v_1，纽约v_2，巴黎v_3，伦敦v_4，东京v_5，墨西哥v_6

	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	13	51	77	68	50
V_2		60	70	67	59
V_3			57	36	2
V_4				20	55
V_5					34

表 1

试在表 1 确定的交通网络中求最小树。

解 (1) 标出六个城市

(2) 将权按由小到大的次序排列如下：

$w_{36}=2$，$w_{12}=13$，$w_{45}=20$，$w_{56}=34$，

$w_{35}=36$，$w_{16}=50$，

$w_{13}=51$，$w_{46}=55$

…

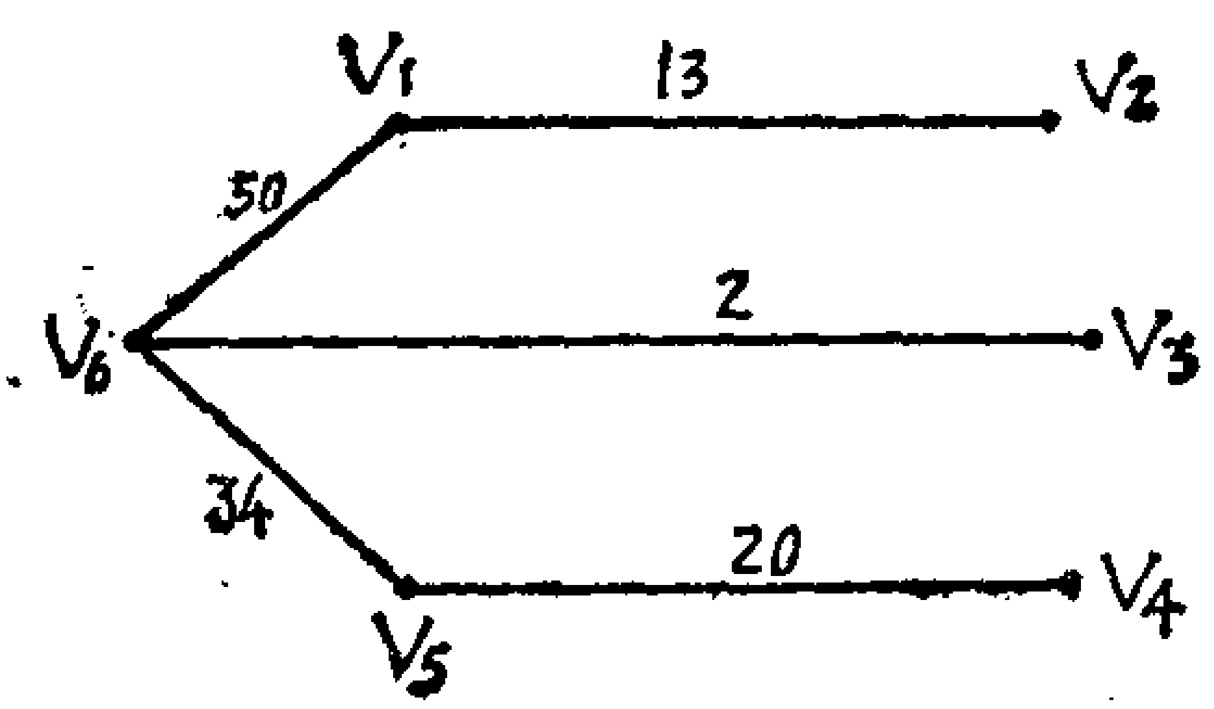

图73

(3) 按权的大小依次增边如下：

$\{v_3, v_6\}$，$\{v_1, v_2\}$，$\{v_4, v_5\}$，$\{v_5, v_6\}$，$\{v_1, v_6\}$

如图73，则图73即为所求

说明：从网络图中找边的权与从表格中找边的权，本质上是相同的。当顶点太多时，从表格中找边的权更有层次、更方便一些

练习40 在例52中，用克鲁斯卡尔算法共要添多少条

边？用破圈法共要去掉多少条边？

练习41 求图74的最小树

练习42 求图75的最小树

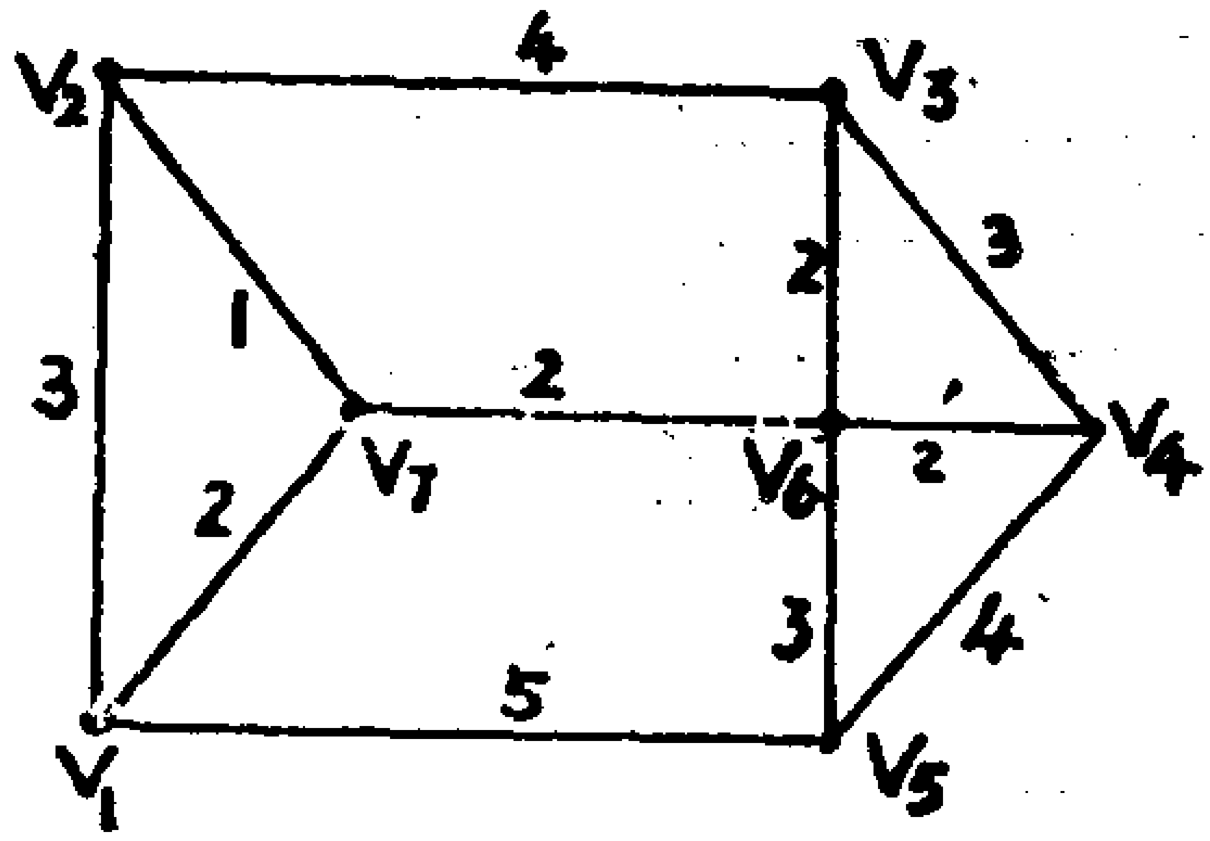

图74

练习43 已知八口海上油井，相互间距离如表 2 所示，已知1号井离海岸最近，为5浬。问从海岸经1号井铺设油管将各油井连接起来，应如何铺设使输油管长度为最短（为便于计量和检修，油管只准在各井位处分叉）

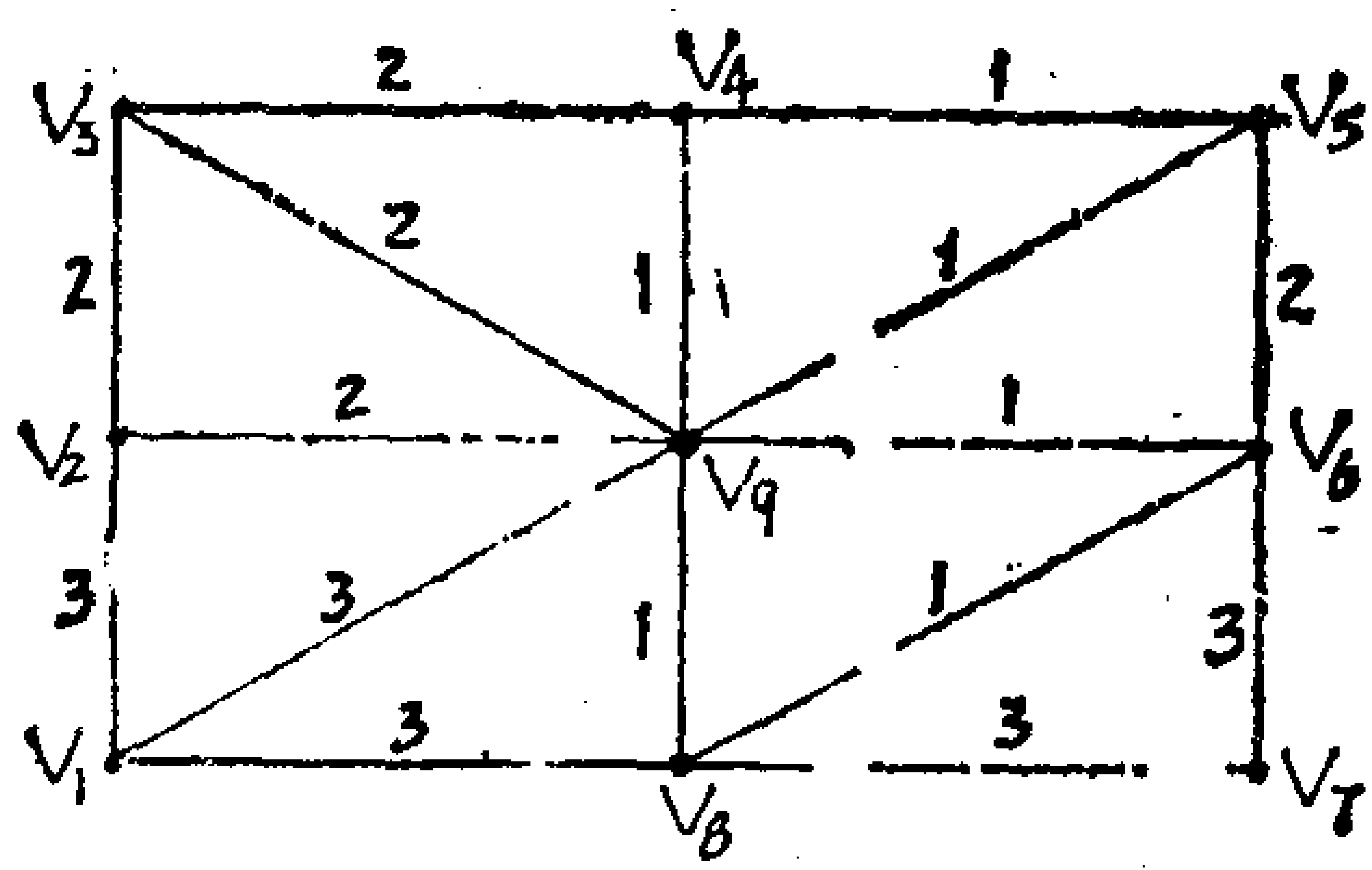

图75

练习44 有一项工程，要埋设电缆，将中央控制室与15个控制点连通。图76中的各线段标出了允许挖电缆沟的地点和

从＼到	2	3	4	5	6	7	8
1	1.3	2.1	0.9	0.7	1.8	2.0	1.5
2		0.9	1.8	1.2	2.6	2.3	1.1
3			2.6	1.7	2.5	1.9	1.0
4				0.7	1.6	1.5	0.9
5					0.9	1.1	0.8
6						0.6	1.0
7							0.5

表 2

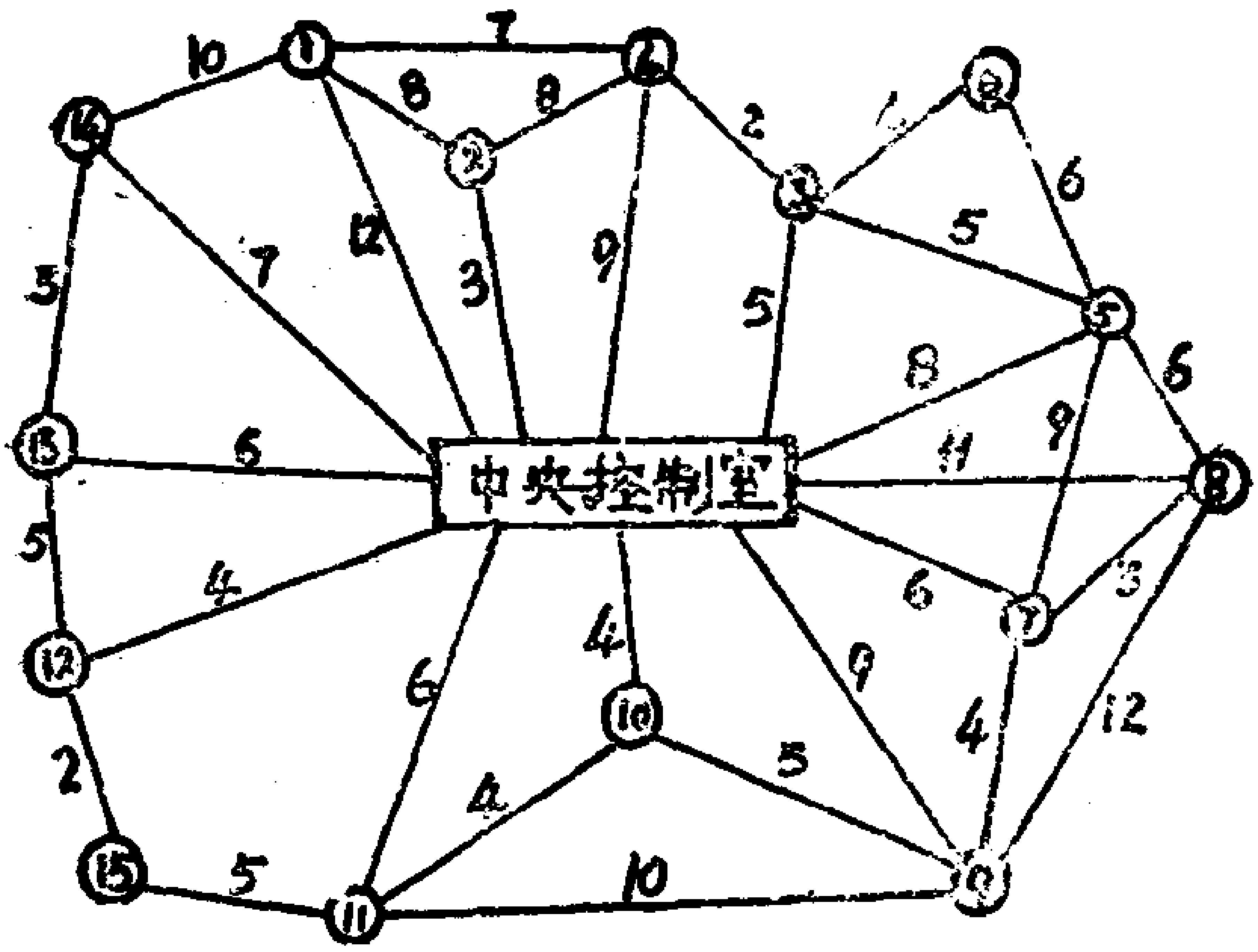

图76

距离(单位：百米)若电缆线每米10 元，挖电缆沟（深1米，宽0.6米）土方每立方米3元，其它材料和施工费用每米5元，请作该项工程预算回答最少需多少元？

§8　中国邮递员问题

1　问题

一个邮递员，每次送信，要走遍他所负责投递范围内的每条街道，完成送信任务后回到邮局，如何选择投递路线，使所走总路程最短，这个问题是由我国管梅谷同志在1962年首先提出的，因此称为中国邮递员问题。抽象成一般，即

在非负赋权连通图$G=(V, E)$中，求每边至少通过一次的圈μ，使得μ的总和$\sum\limits_{e\in u} w(e)$最小，此问题称为中国邮递员问题。

2　奇偶点图上作业法

第一步，找出图G中的所有奇点，两两配对，连一条链，使成欧拉图G^*

第二步，删去偶数个重边，使之最多为二重边。

第三步，检查每个圈，使每个圈的重边总长不超过该圈总长之半。

如以上均得到满足，则表明已作到最优化。

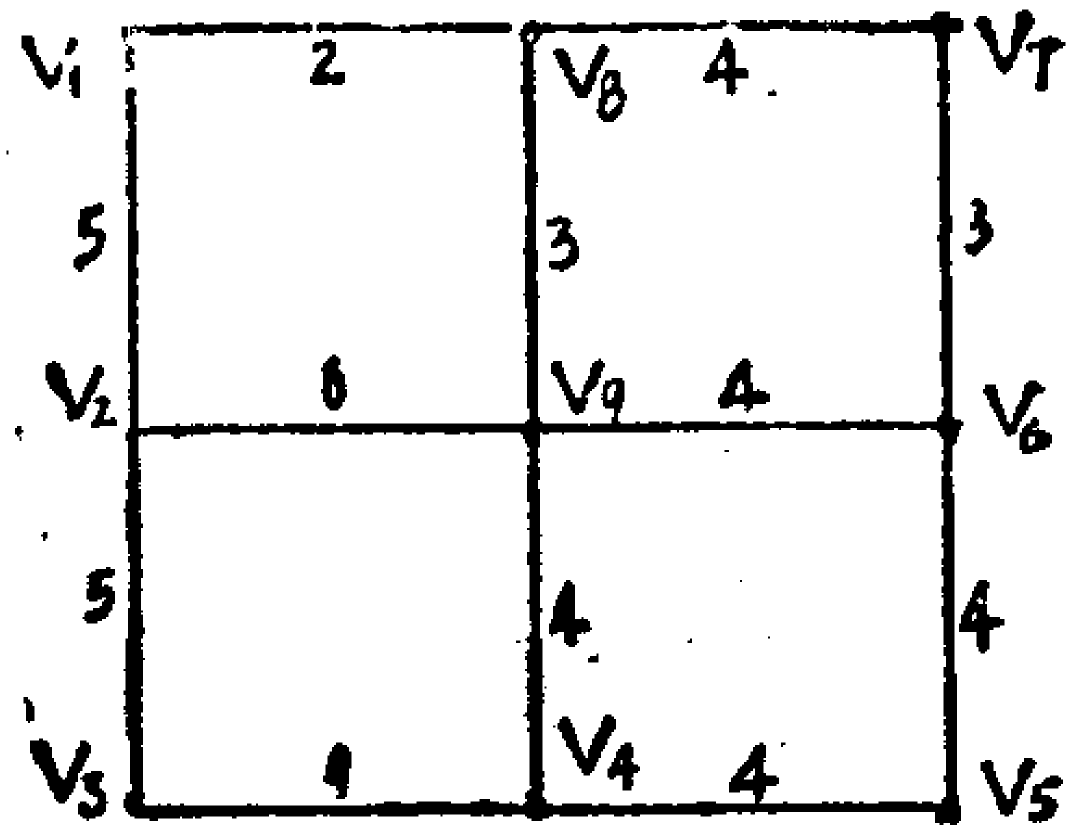

图77

例56　在图77中，求一条最佳投递路线

分析：$\because d(v_2)=d(v_4)=d(v_6)=d(v_8)=3$

$\therefore v_2$，v_4，v_6，v_8是奇点，图77不是欧拉图，因此这是一个中国邮递员问题，可按奇偶点作业法求解

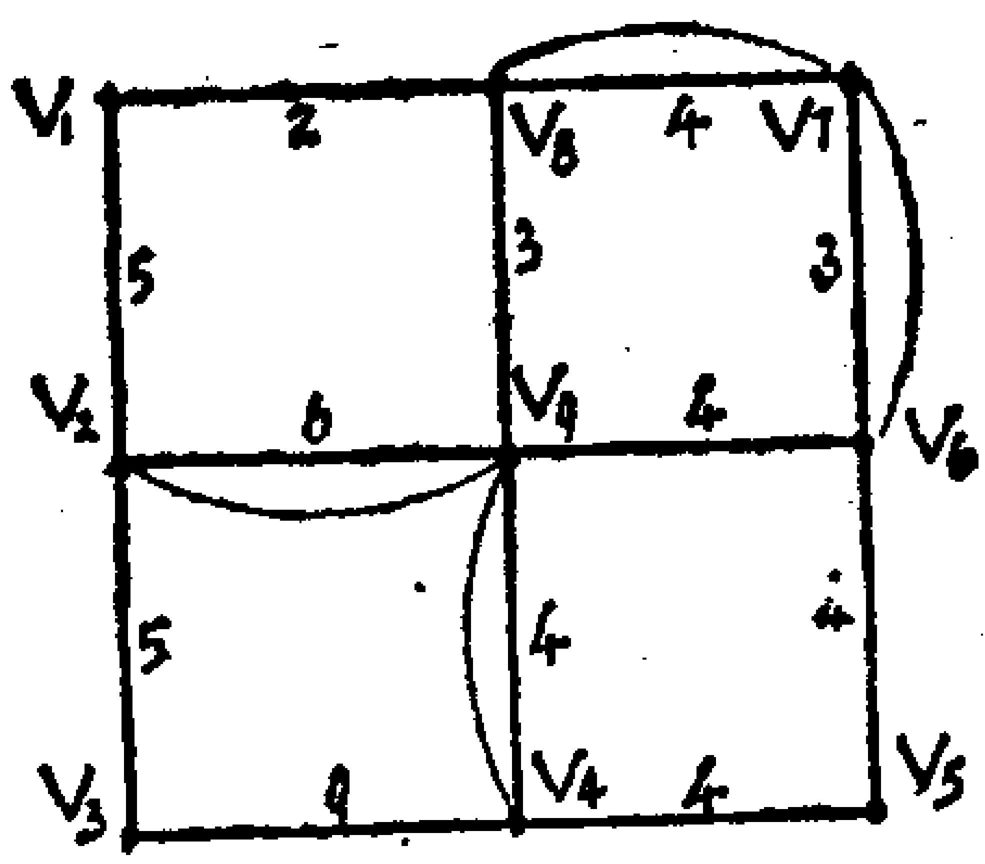

图78

解：(1) 将奇点两两配对

v_2，v_4一组；v_6，v_8一组，作链$\{v_2, v_9, v_4\}$，$\{v_6, v_7, v_8\}$。如图78

(2) 删去成对重边，使之最多为二重边，图78已满足要求

(3) 检查每个圈，使

重边总长≤该圈总长之半

今圈$\{v_1, v_2, v_9, v_6, v_7, v_8, v_1\}$中

重边总长13＞该圈总长之半12故需调整：

删去重边$\{v_2, v_9\}$，$\{v_6, v_7\}$，$\{v_7, v_8\}$代之以边$\{v_1,$

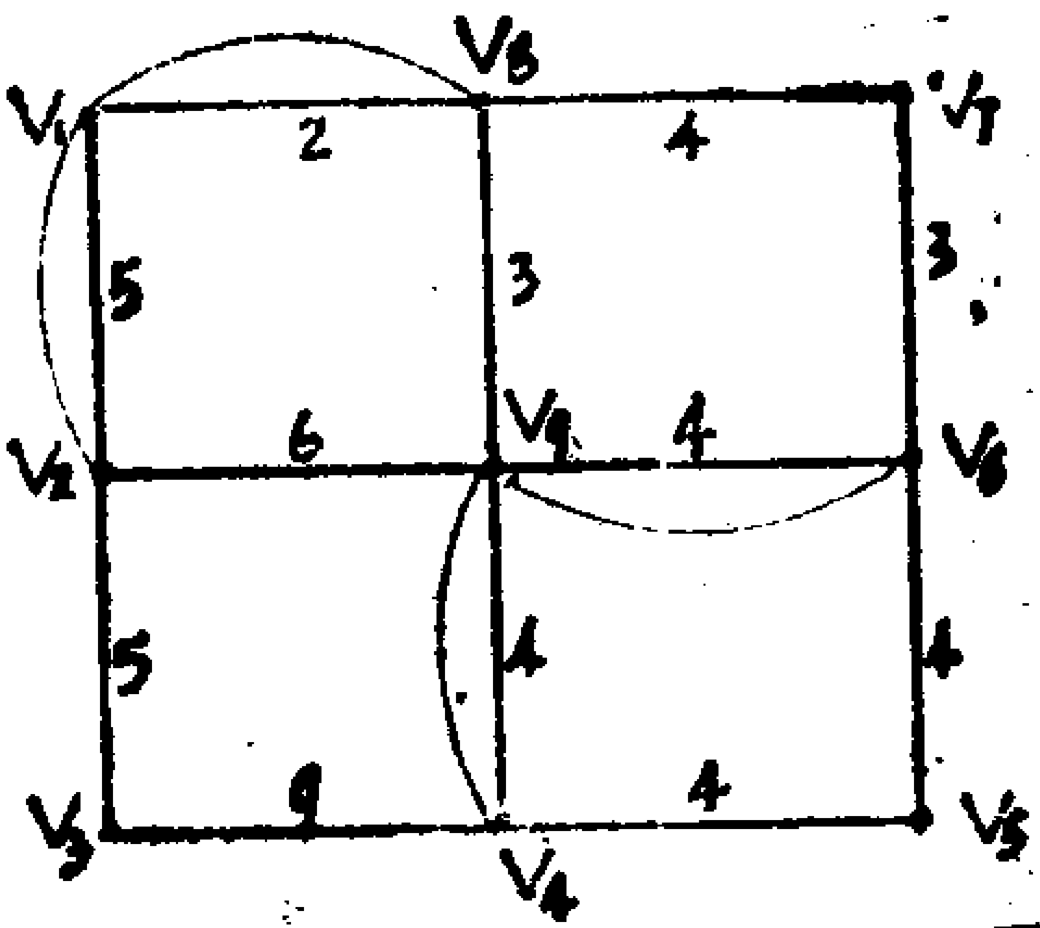

图79

v_2, }, {v_9, v_6}, {v_8, v_1}。如图79

则图79已满足最优化条件，不难求出最佳投递路线μ={v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1, v_2, v_9, v_4, v_9, v_6, v_9, v_8, v_1}

说明：两奇点对连时，尽量作到使链长最短，这样作，一般常能大大提高作业进度，以后的例题都有意识地注意了此点。

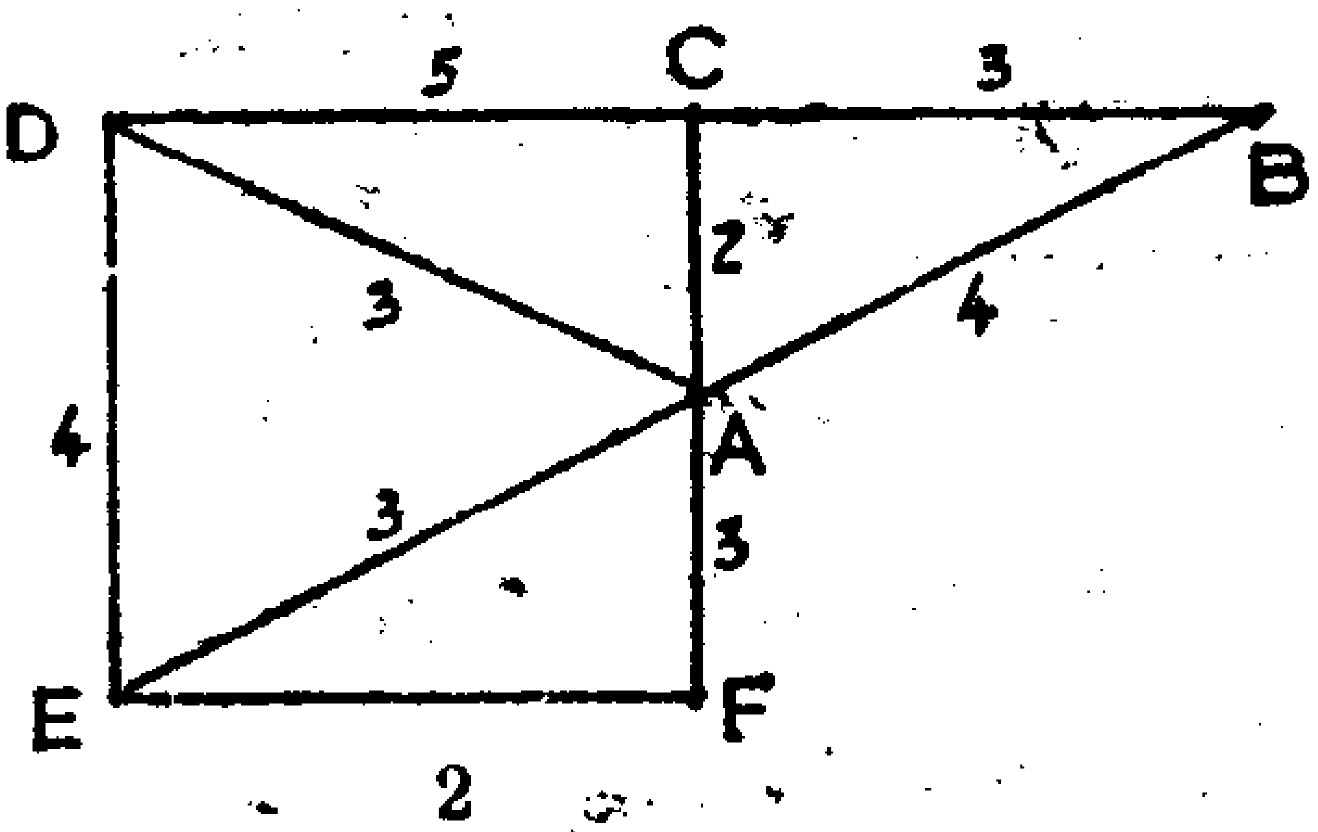

图80

例57　设有邮路图80，问邮递员应按怎样的路线行走才可使所行路程最少(设邮局为A)？

分析：$d(A)=5$，$d(C)=d(D)=d(E)=3$

有四个奇点，可按奇偶点作业法求解

解：(1) 将奇点两两配对，比如

A，C一组；D，E一组作链{A, C}，{D, E}。如图81

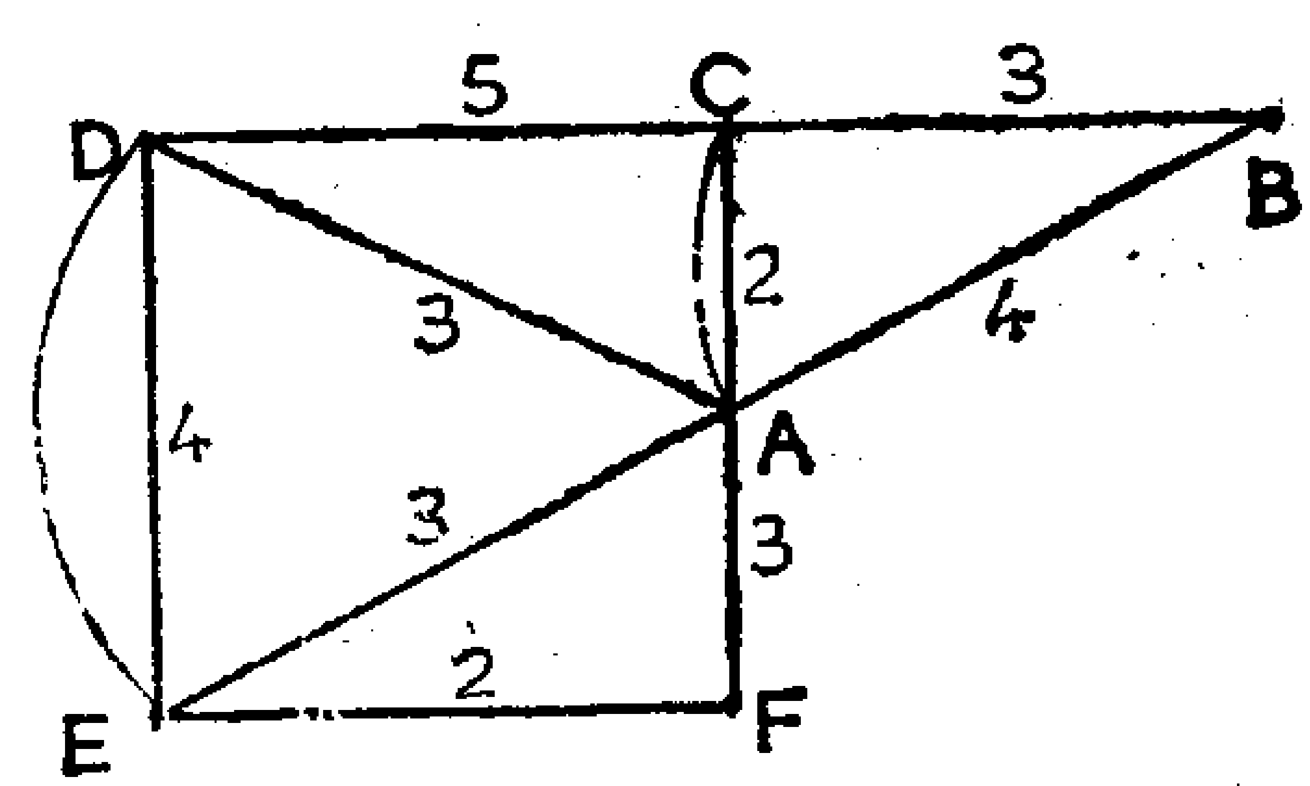

图81

(2) 则图81满足最优化的两个条件。不难求出一条最佳投递路线

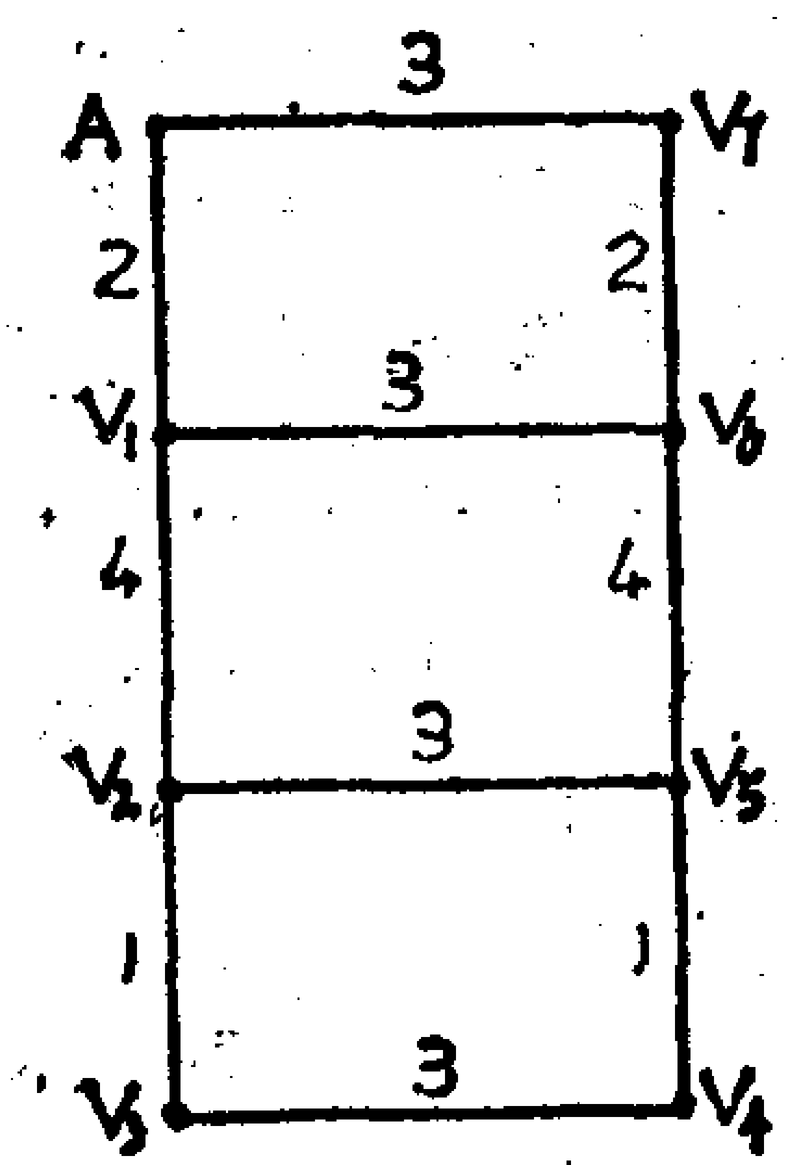

图 82

$\mu=\{A, C, B, A, C, D, A, F, E, D, E, A\}$

说明：读者试找另外的最佳投递路线。

例58 设有邮路图82，求一条最佳投递路线

分析：v_1，v_2，v_5，v_6是奇点，可按奇偶点作业法求解

解 将v_1，v_6一组；v_2，v_5一组作边$\{v_1, v_6\}\{v_2, v_5\}$。如图83

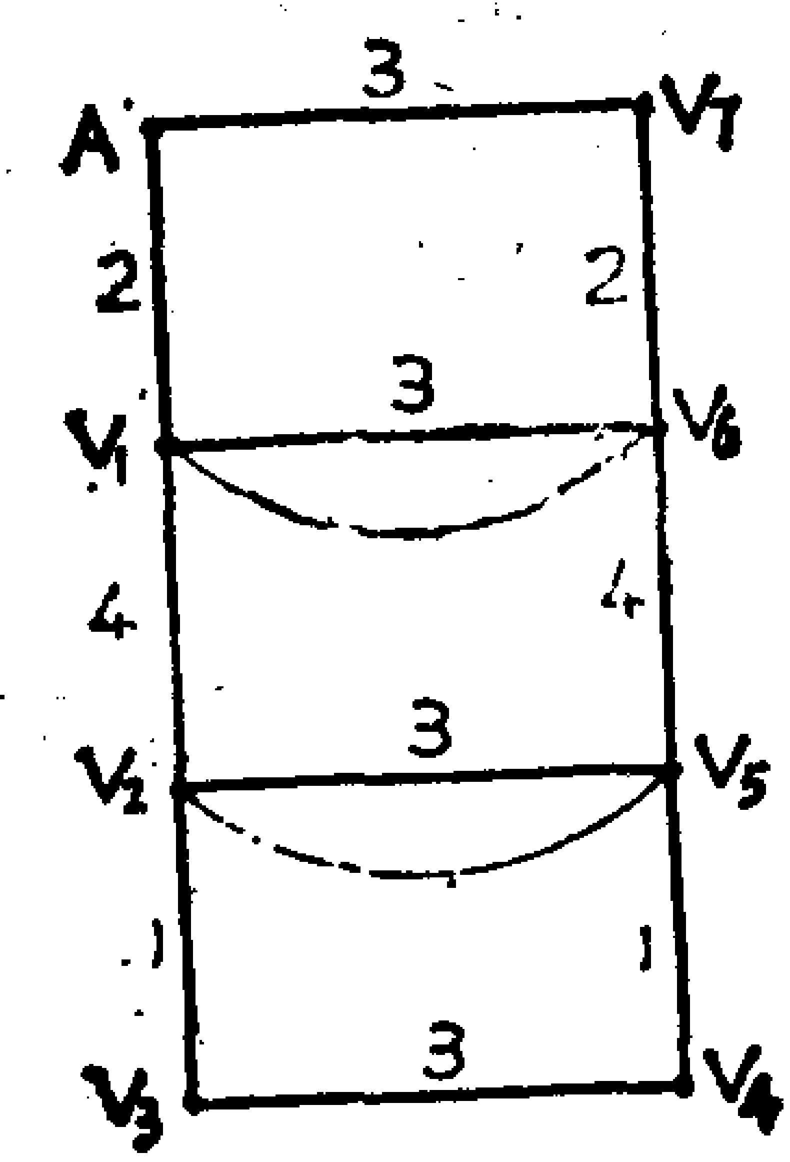

图 83

则图83满足最优化条件，重边总长6为最小。不难求出一条最佳投递路线

$\mu=\{A, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_5, v_6, v_1, v_6, v_7, A\}$

说明：满足最优化的两个条件是：

(1) 最多为二重边

(2) 每圈的重边总长≤该圈总长之半

例59 如图84所示，求一条最佳投递路线

解：作链$\{A, F, E, C\}$。如图85

逐项检查

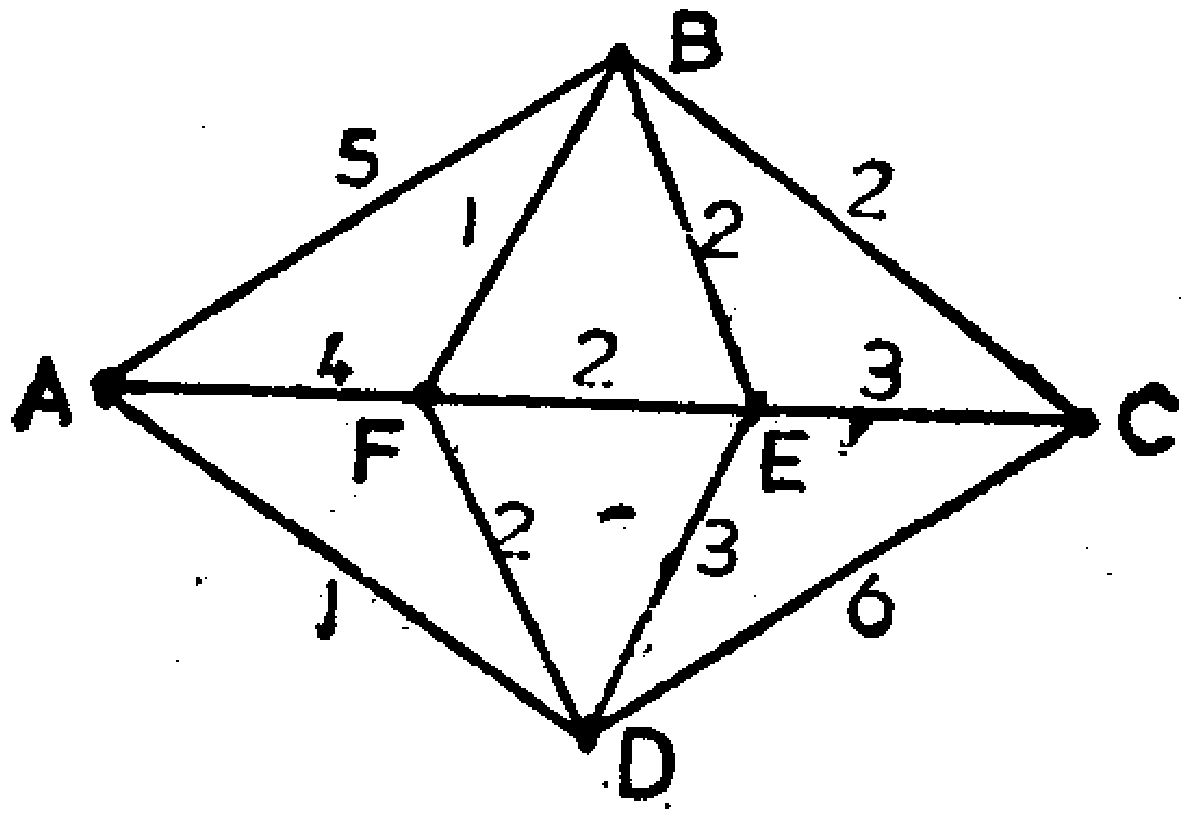

图84

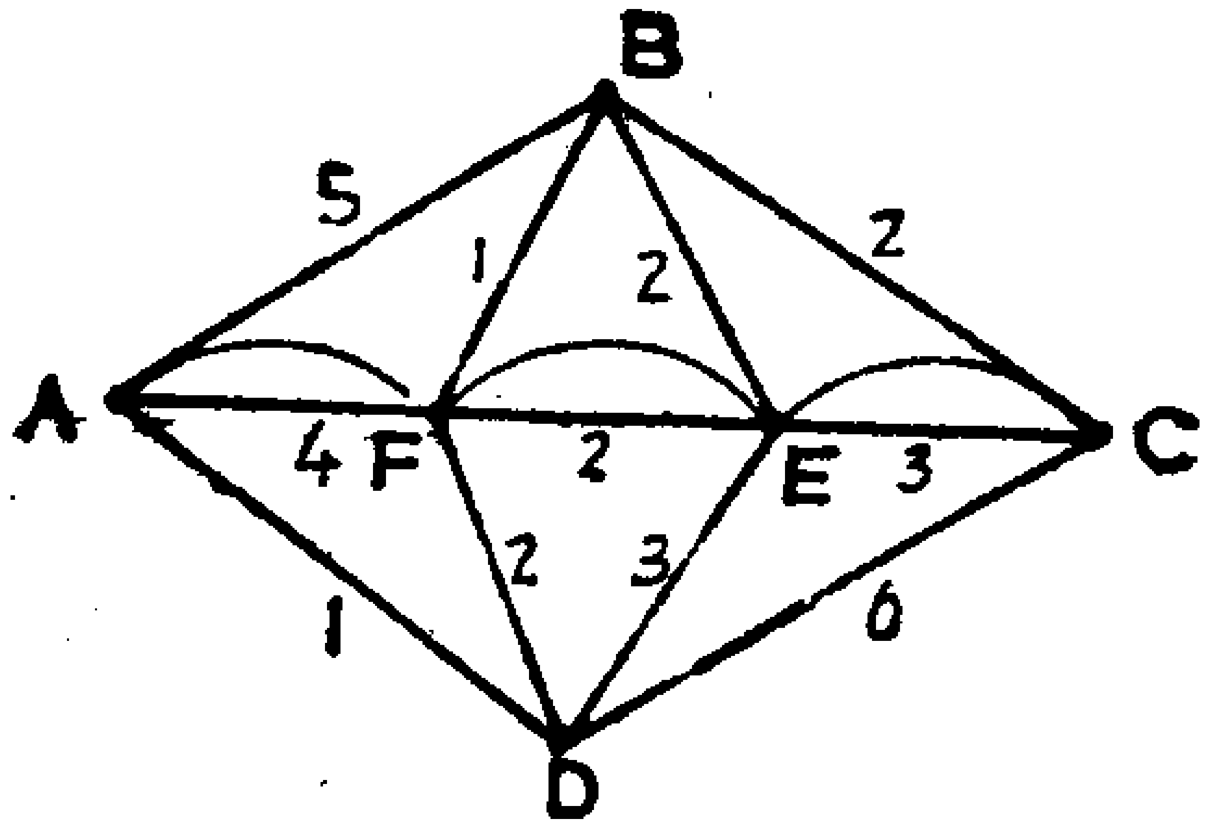

图85

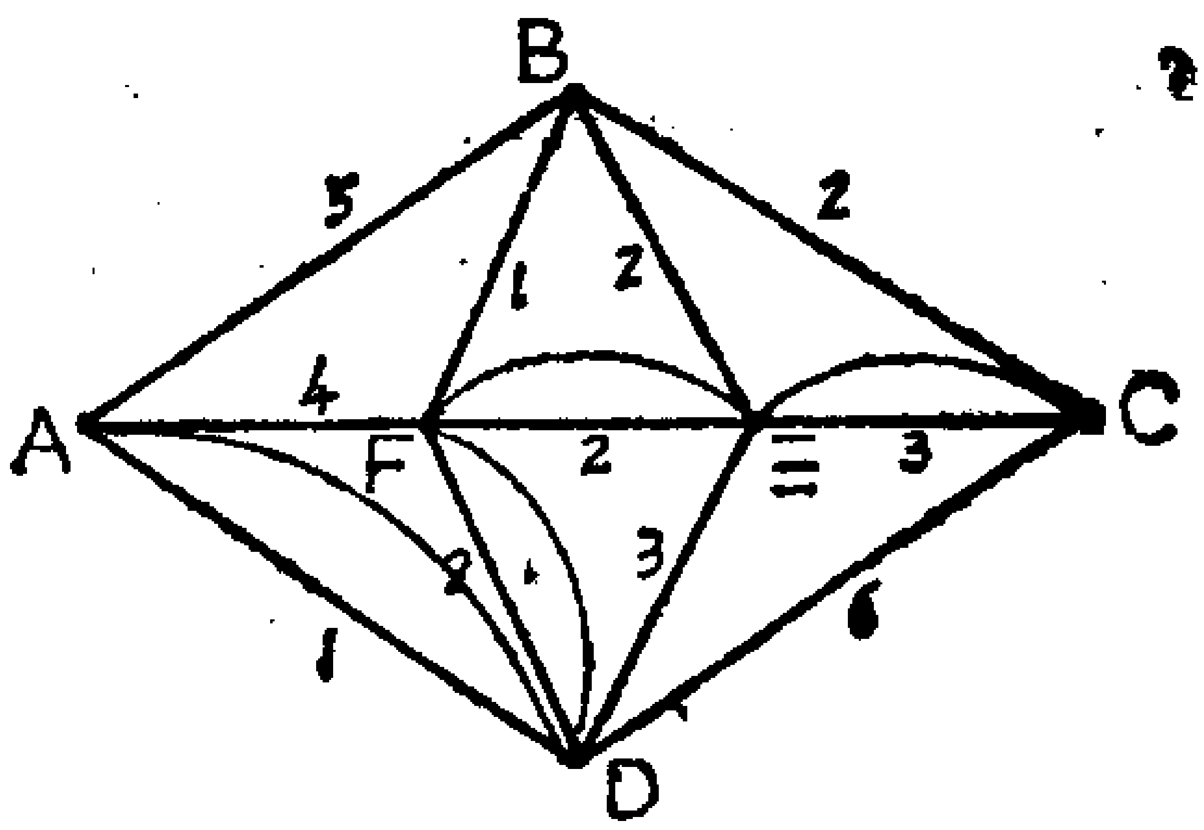

图86

在圈$\{A, D, F, A\}$中重边总长4>该圈总长之半3.5

将链$\{A, F\}$改为$\{A, D, F\}$。如图86。

这样圈$\{F, D, E, F\}$中又出现重边总长4>该圈总长之半3.5

将边$\{F, D\}$，$\{F, E\}$改为$\{D, E\}$。如图87

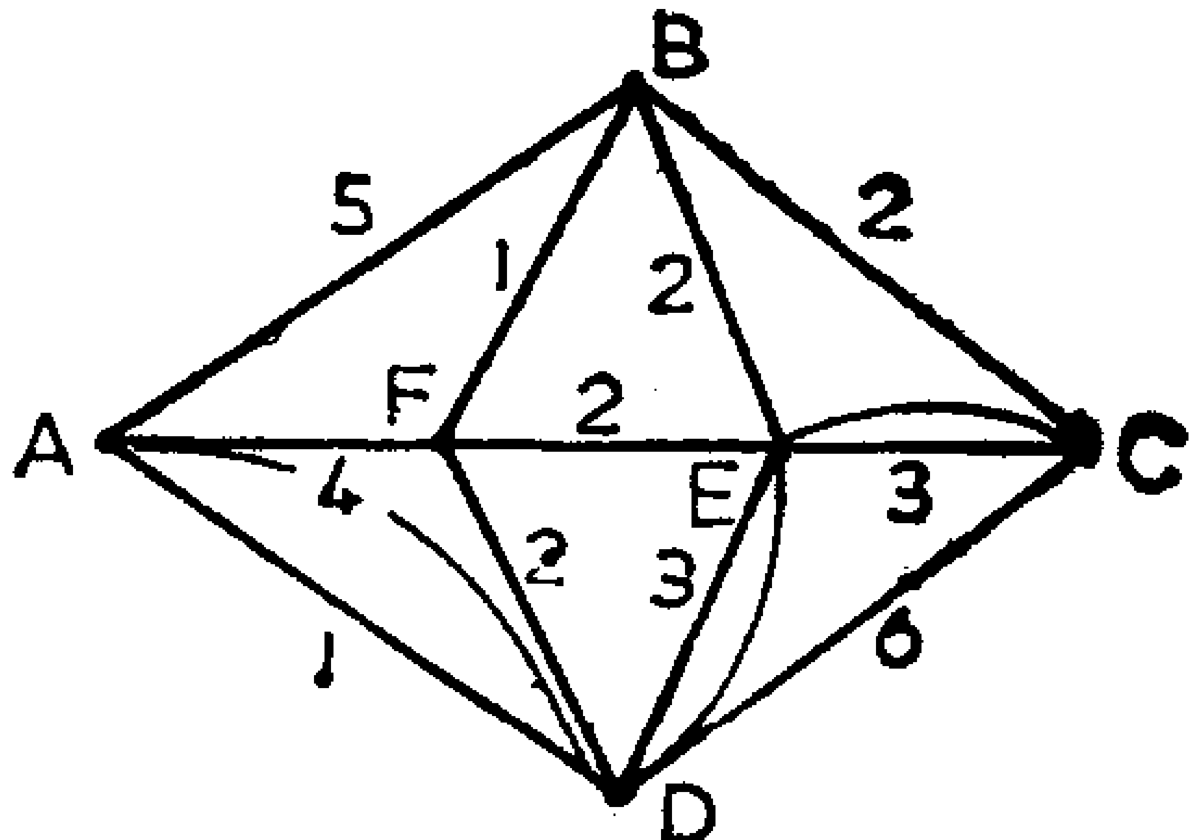

图87

则图87满足最优化条件。不难[illegible]出最

佳投递路线

$\mu=\{D, A, B, C, D, A, F, B, E, C, E, D, E, F, D\}$

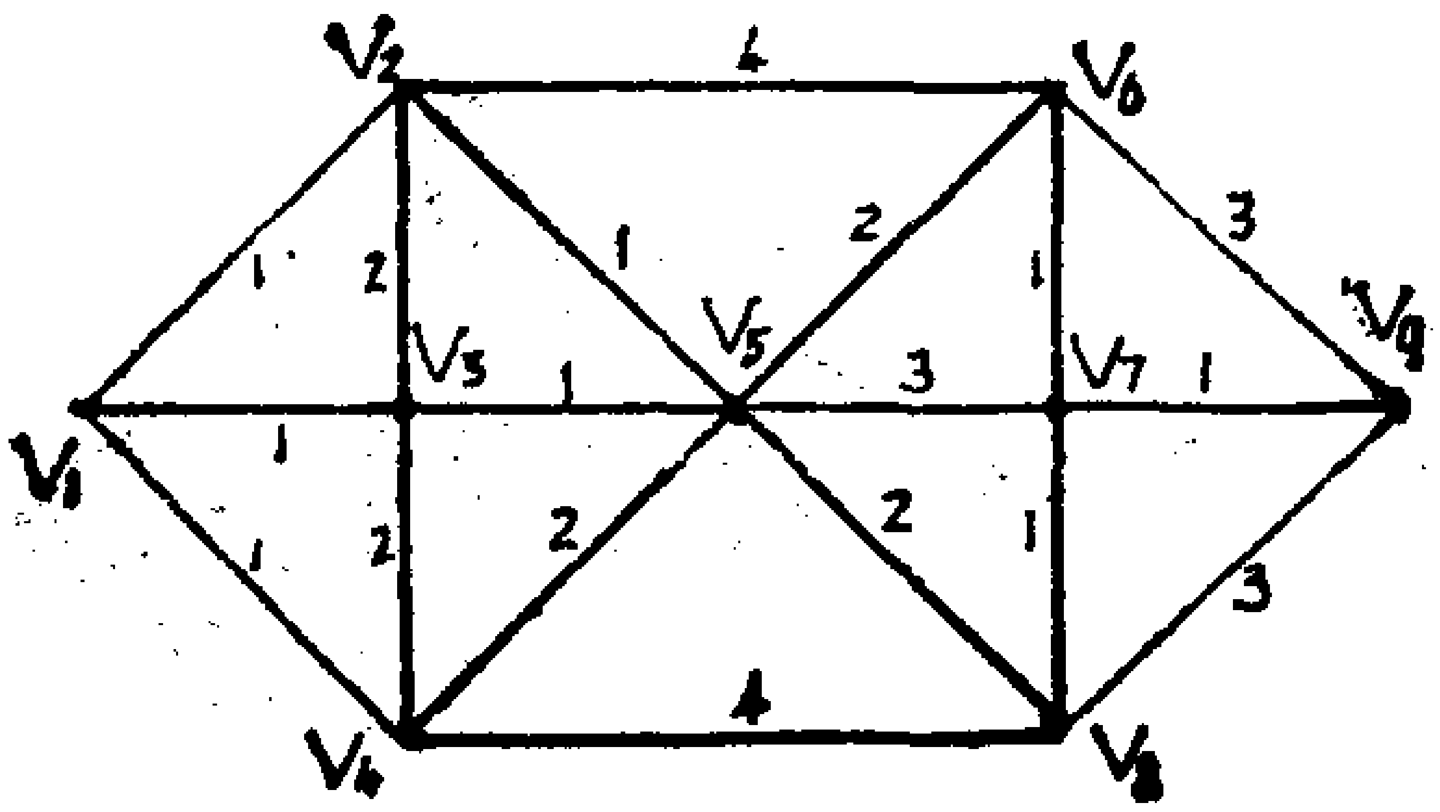

图88

说明：其实，在连结奇点A，C时，找出最简链$\{A, D, E, C\}$即可，这将大大提高作业进度。

例60　求图88中的一条最佳投递路线

解：尽量找v_1到v_9的最简链$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_9\}$如图89则图89已满足最优化条件。不难求出一条最佳投递路线

$\mu=\{v_1, v_2, v_1, v_3, v_2, v_5, v_9, v_6, v_2, v_7, v_6, v_5, v_7, v_8, v_9, v_7, v_5, v_8, v_4, v_5, v_3, v_4, v_1\}$

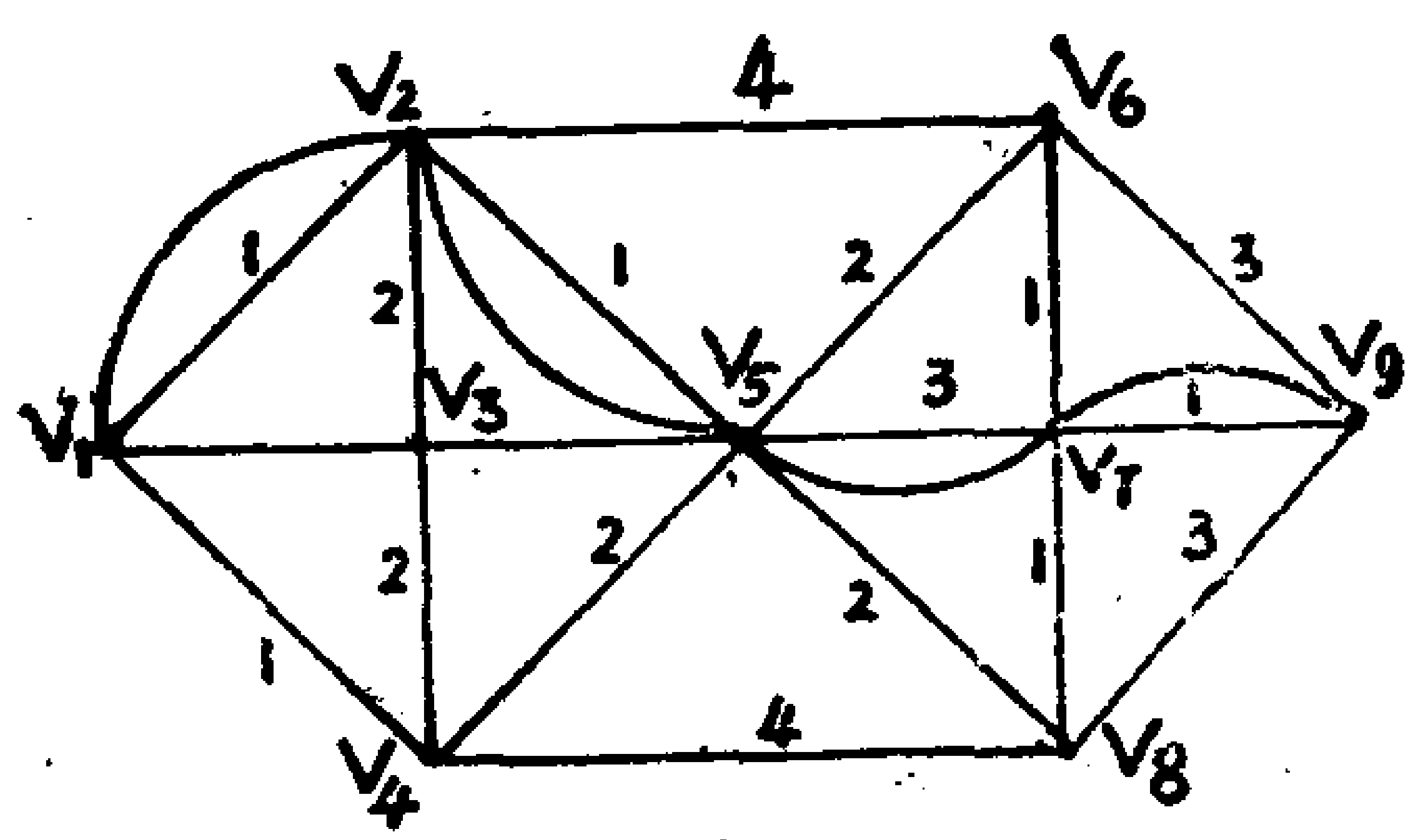

图89

说明：我们作一条从v_1到v_9的链时，就考虑了链长最短问题，所以运算过程大大简化了。

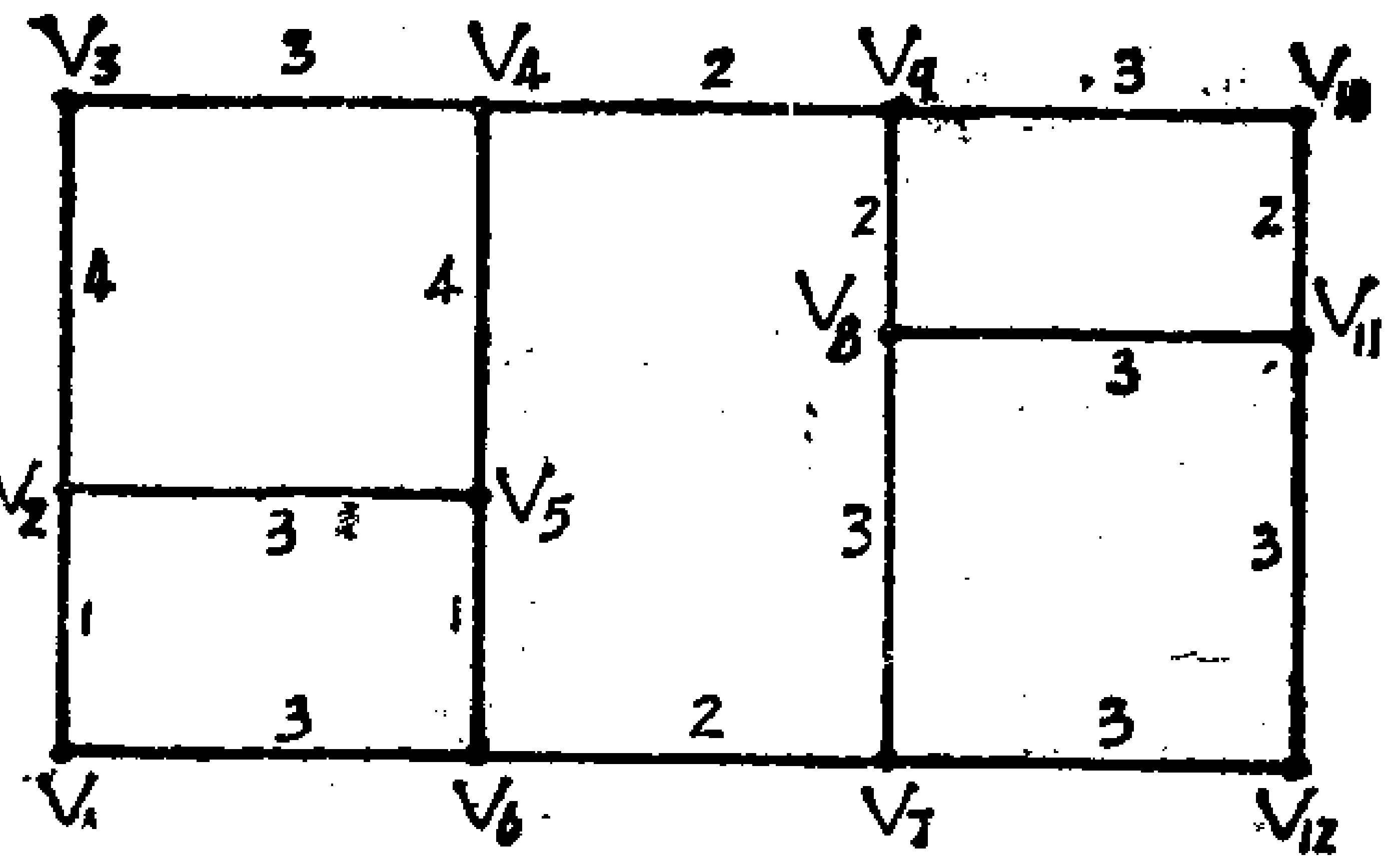

图90

一般地，对于只有两个奇点的连通图，只要找出一条连此两点的最简链即得最优化图。（参看例59、例60）

例61　求图90中的一条最佳投递路线

分析：$d(v_2)=d(v_4)=d(v_5)=d(v_6)=d(v_7)=d(v_8)=d(v_9)=d(v_{11})=3$，有8个奇点，可按奇偶点作业法求解。

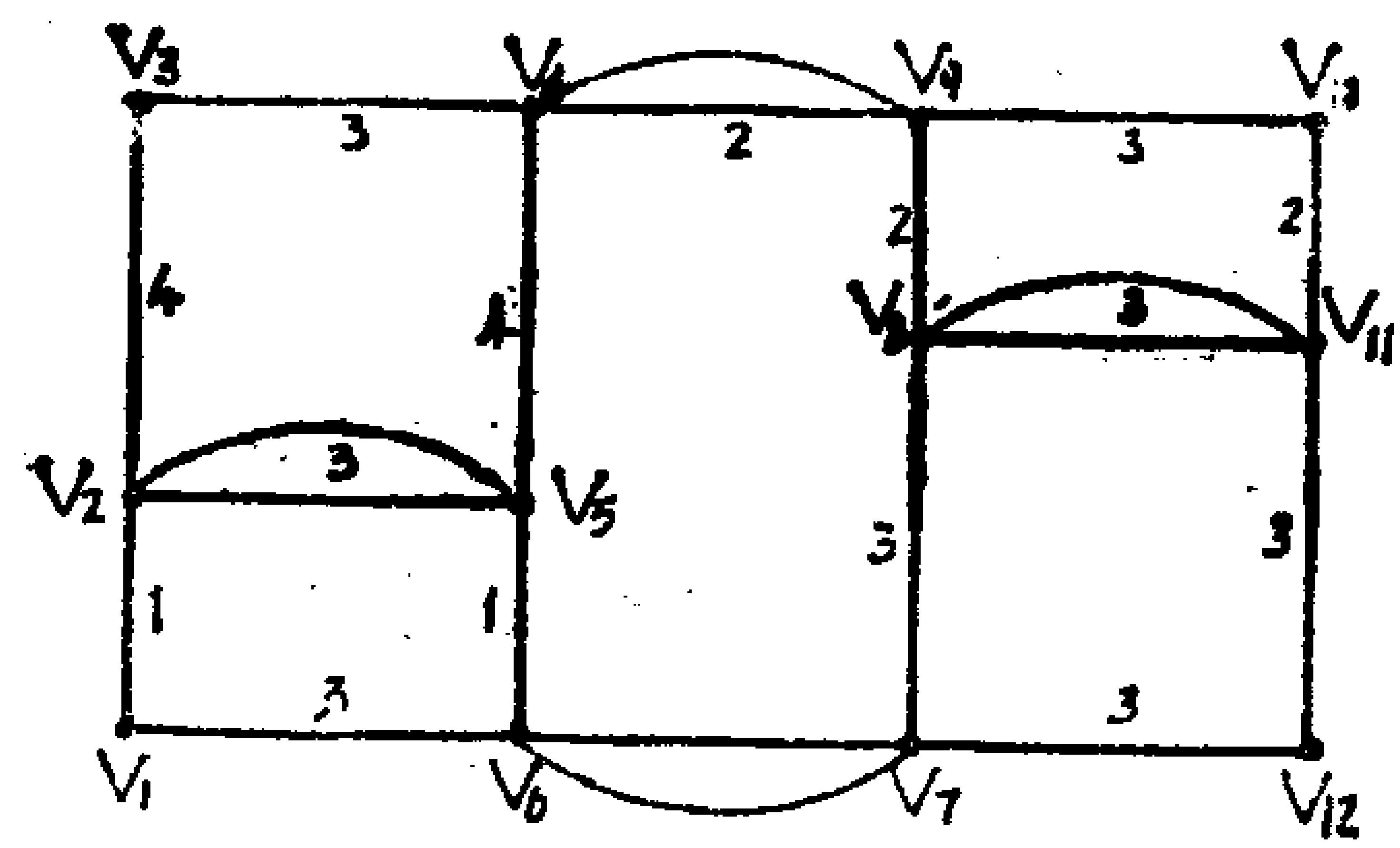

图91

解：将奇点两两配对作边：$\{v_2, v_5\}$，$\{v_4, v_9\}$，$\{v_6, v_7\}$，$\{v_8, v_{11}\}$。如图91

则图91已最优化，重边总长最小为10。不难求出一条最佳投递路线

$\mu=\{v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_5, v_6, v_7, v_{12}, v_{11}, v_{10}, v_9, v_8, v_{11}, v_8, v_7, v_6\}$

说明：奇点甚多时，两两配对很关键，配的好，则大大提高作业进度

例62　求图92中的一条最佳投递路线

分析：有10个奇点 $v_i(i=2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 13,\ 14)$。可按奇偶点作业法求解

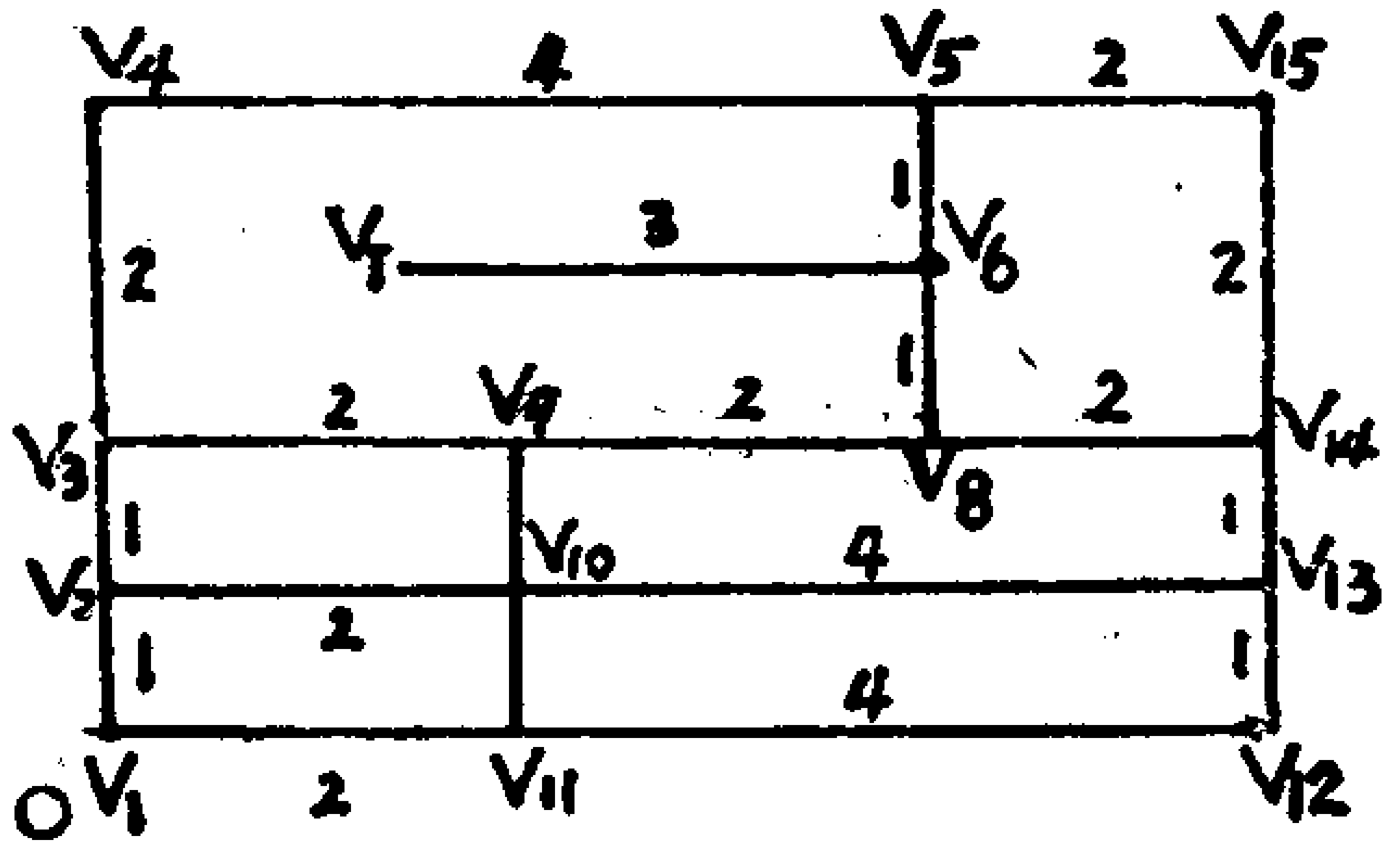

图92

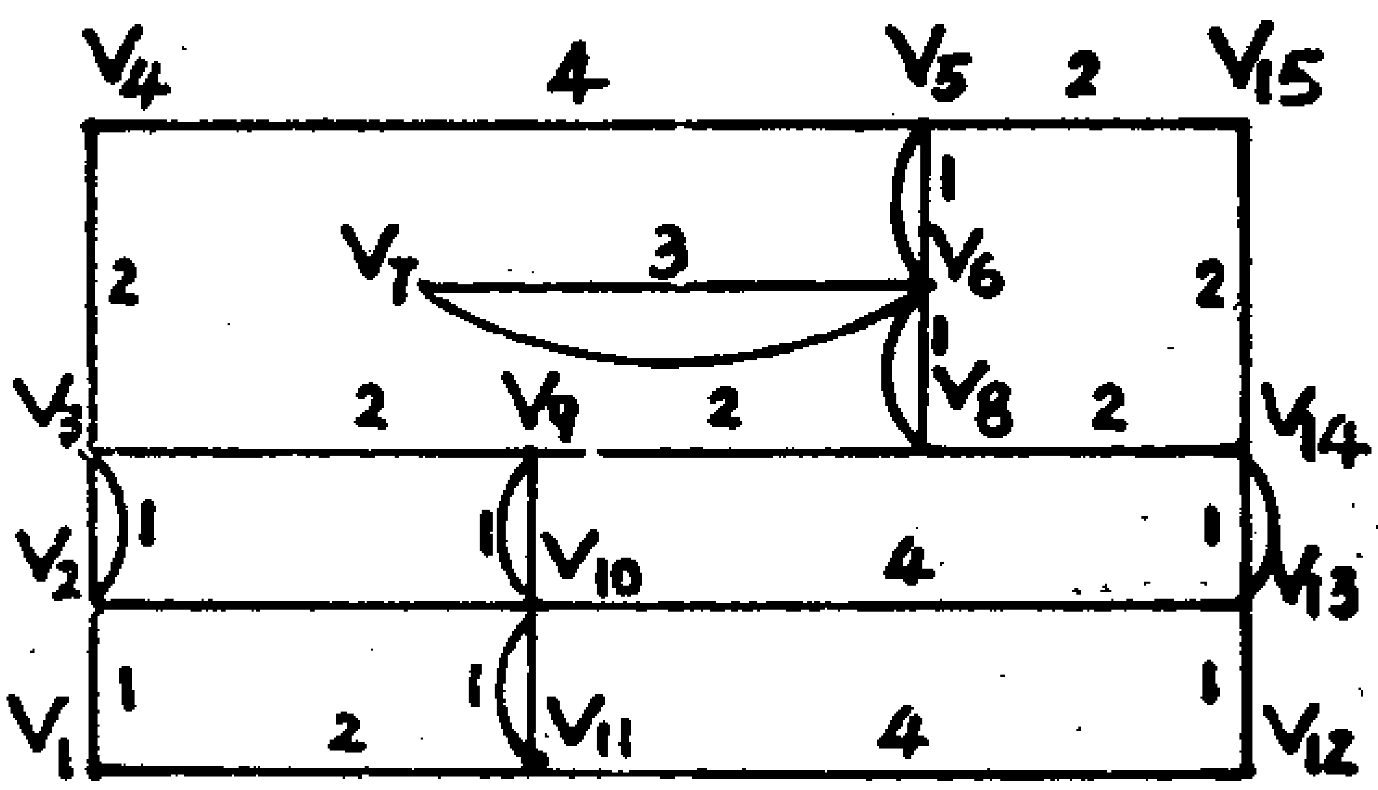

图93

解：连 $\{v_2, v_3\}$，$\{v_5,\ v_6,\ v_8\}$，$\{v_7,\ v_6\}$，$\{v_9,\ v_{10}, v_{11}\}$，$\{v_{13},\ v_{14}\}$。如图93

则图93已最优化。不难求出一条最佳投递路线

$\mu=\{v_{11},\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_2,\ v_{10},\ v_{11},\ v_{10},\ v_9,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6,\ v_7,\ v_6,\ v_5,\ v_{15},\ v_{14},\ v_{13},\ v_{14},\ v_8,\ v_6,\ v_8,\ v_9,\ v_{10},\ v_{13},\ v_{12},\ v_{11}\}$

说明：奇点甚多时，为了配好对，可从权最小着眼。

§9 练习题解答

1 如图94

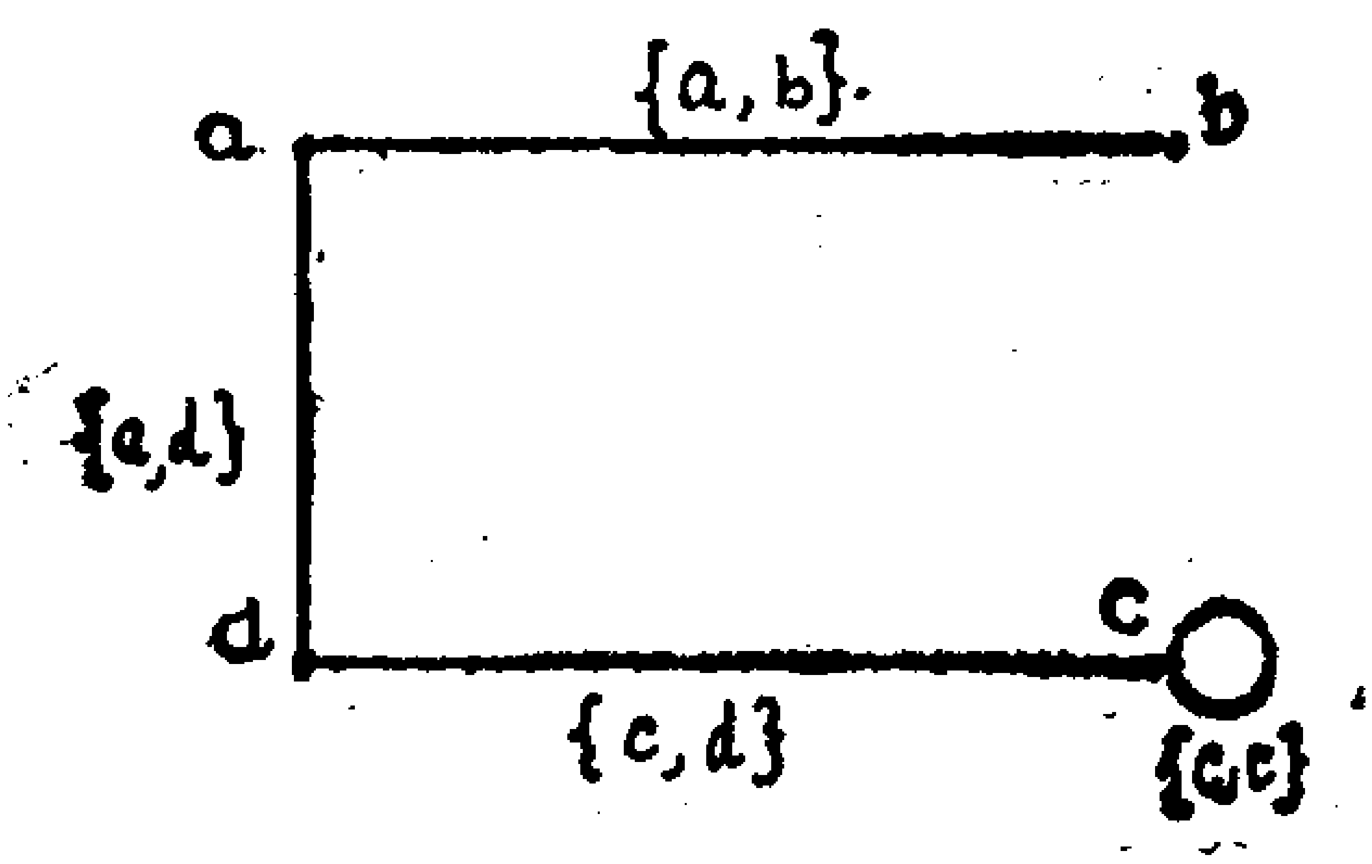

图94

2 由于$d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=6$且G为简单图。所以v_1，v_2，v_3分别与v_4，v_5，v_6，v_7有关联边。

因此 $d(v_i)\geqslant 3$ $(i=4,5,6,7)$与有一点v_7的次$d(v_7)=2$矛盾

3 用顶点表示人，如果两人相互认识，则连以边。于是问题转化为

若在图G（V，E）中，奇点的集合为V_1

则 $|V_1|$ 为偶数。

即证奇点的个数为偶数

4 ∵图G是简单图

∴ $d(v_i)\leqslant p-1$

$$2q=\sum_{i=1}^{p}d(v_i)\leqslant\sum_{i=1}^{p}(p-1)=p(p-1)$$

故　$q\leqslant\frac{1}{2}p(p-1)$

说明：p阶简单图G的边数$\leqslant K_p$的边数

$\leqslant\frac{1}{2}p(p-1)$

5　（利用反证法）

否则　$d(v_i)\leqslant 6$（$i=1, 2, \cdots, n$），则

$$2(3n+1)=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}6=6n$$

$6n+2\leqslant 6n$　　矛盾

6　（1）画出v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6，v_7各点

（2）连v_1、v_2，v_2、v_3，v_3、v_4，v_4、v_5，v_5、v_6，v_6、v_7，v_7、v_1，于是各点的次均为2

（3）连v_1、v_3，v_2、v_4，v_3、v_5，v_4、v_6，v_5、v_7，v_6、v_1，v_7、v_2

如图95，则图95即为所求

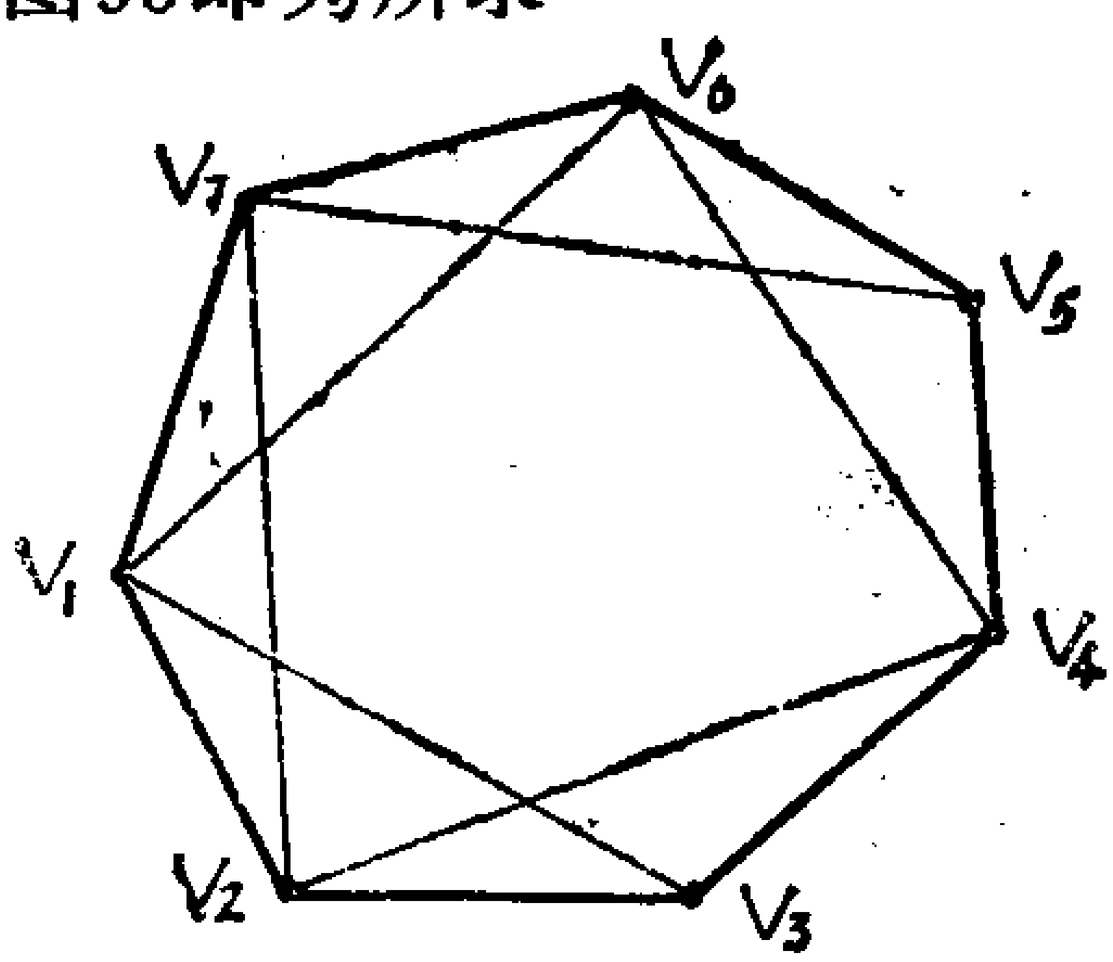

图95

说明：顶点的次为k的简单图，称为k——正规图，此练习为4——正规图

7 $\because d(v_1)\geqslant 2$

$\therefore$不失一般性，可设存在$\{v_1, v_2\}\in E$

(1) 若$\{v_3, v_4\}\in E$，则$\{v_1, v_2\}$，$\{v_3, v_4\}$即为所求

(2) 若$\{v_3, v_4\}\notin E$，由于$d(v_3)\geqslant 2$，则$\{v_1, v_3\}\in E$，$\{v_2, v_3\}\in E$；

由于$d(v_4)\geqslant 2$，则$\{v_1, v_4\}$，$\{v_1, v_4\}\in E$

故 $\{v_1, v_3\}$，$\{v_2, v_4\}$或者$\{v_1, v_4\}$，$\{v_2, v_3\}$即为所求。

8 均为连通图

9 从一条v_1到v_1的通路μ中，如何删去重复顶点呢？v_6是第一个出现的重复顶点，删去

$$(v_7, v_3, v_8, v_9, v_5, v_{10}, v_6)$$

这一段路得

$$\mu_1=(v_1, v_6, v_2, v_7, v_8, v_4, v_9, v_{10}, v_1)$$

μ_1中没有重复顶点，μ_1即为所求的一个圈

10 基本通路共有七条：

(A, B, C, F)，　(A, B, C, E, F)，

(A, B, E, F)，　(A, B, E, C, F)，

(A, D, E, F)，　(A, D, E, B, C, F)，

(A, D, E, C, F)

简单通路共有九条，除上面的七条外，还有(A, D, E, B, C, E, F)，(A, D, E, C, B, E, F)

11　(1, 2, 3, 7, 6, 5, 8, 4, 1) 即为一条满足条件的圈。

12　设　$e=(v_1, v_2)$。不失一般性，可设

$$\mu=(v_1, v_2, \cdots, v_s, v_1)$$

是G中包含e的一条从v_1到v_1的通路，由例22知必存在一条从v_1到v_1的基本通路，即存在包含(v_1, v_2)的一个圈。

13　由于G是连通图，因此G中每一顶点v_i的次数$d(v_i)\geqslant 1$

如果G的每个点v_i的次均为偶数，则

$$d(v_i)\geqslant 2$$

于是

$$2(n-1)=\sum_{i=1}^{n} d(v_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n} 2=2n$$

从而推出　$n-1\geqslant n$，矛盾

说明：既然G中至少有一个奇点，又奇点的个数为偶数，故G至少有两个奇点。

14　由于$d(v_i)\geqslant 2$，不失一般性，可取一点v_1，因为$d(v_1)\geqslant 2$，因此有与v_1邻接的点，设为v_2。

因为$d(v_2)\geqslant 2$，因此又有与v_2邻接的点，设为v_3。

如此继续讨论下去，得一条通路$(v_1, v_2, \cdots v_l)$

由于G中的顶点个数有限，必选至一点v，它首先又重复选到已被选过的顶点v_k，于是得到通路$(v_1, v_2\cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_k)$

则$(v_k, v_{k+1}, \cdots, v_k)$便是$G$中的一个圈。

15 略

16 ∵对每一对顶点v_i，v_j的次数和

$$d(v_i)+d(v_j)=(p-1)+(p-1)=2p-2\geqslant p-1$$

由例28知K_p为连通图

17 略

18 完全图K_{p-1}外加一个孤立点u所组成的简单图。

19 若G不是连通图，则G由k个连通分支组成，其中$k\geqslant 2$

一定有一个分支C，它的顶点个数$|V'|\leqslant\left[\frac{p}{2}\right]$ 这是因为

如果每个分支的顶点个数均超过$\left[\frac{p}{2}\right]$的话，那么k（$k\geqslant 2$）个分支的顶点个数就要超过

$$k\left(\left[\frac{p}{2}\right]+1\right)\geqslant 2\left(\left[\frac{p}{2}\right]+1\right)>p$$

这与图G有p个顶点矛盾

由于G是简单图，因此C上的顶点v的次数 $d(v)\leqslant\left[\frac{p}{2}\right]-1$，但这又与已知条件$d(v_i)>\left[\frac{p}{2}\right]-1$（$i=1, 2, \cdots, p$）矛盾

故G是连通图

说明：对完全图K_p来说，因为对每一个顶点v_i的次

$$d(v_i)=p-1>\left[\frac{p}{2}\right]-1$$

∴K_p是连通图

20　（利用数学归纳法）

（1）当$p=2$时，G为2阶连通图，显然有一条边，命题成立

（2）假定$p=n$时成立，即n阶连通图至少有$n-1$条边

那么当$p=n+1$时

如果G包含n条边，命题成立。

如果G包含m条边，$m<n$，则G中存在一个顶点v　且$d(v)=1$，于是$G-v$是一个n阶连通图。由归纳假定$G-v$至少有$n-1$条边。故G至少有n条边，命题也成立

因此原命题成立

21　（利用数学归纳法）

（1）当$p=3$时，G为3阶连通图，又边数大于2时，显然有一个圈，命题成立

（2）假定$p=n$时成立，即当边数$>n-1$时n阶连通图至少有一个圈

那么当$p=n+1$时　且边数$>n$

如果G没有一个圈，则G中必存在一个顶点v，且$d(v)=1$

显然$G-v$是一个没有圈的$n-1$阶连通图。由归纳假定知$G-v$有不多于$n-1$条边，从而G有不多于n条边与G的边数$>n$矛盾

故G有一个圈。

22　有三种，如图96

23　有六种，如图97

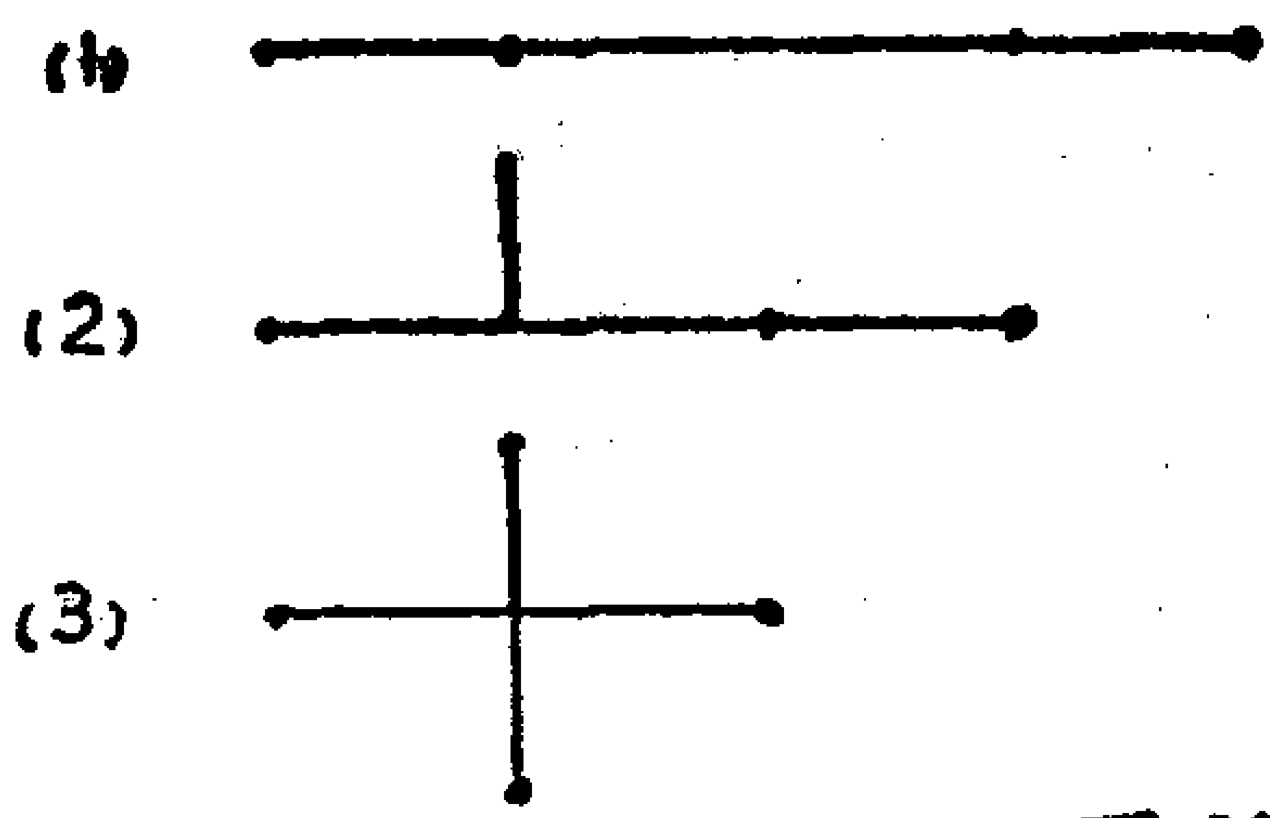

图96

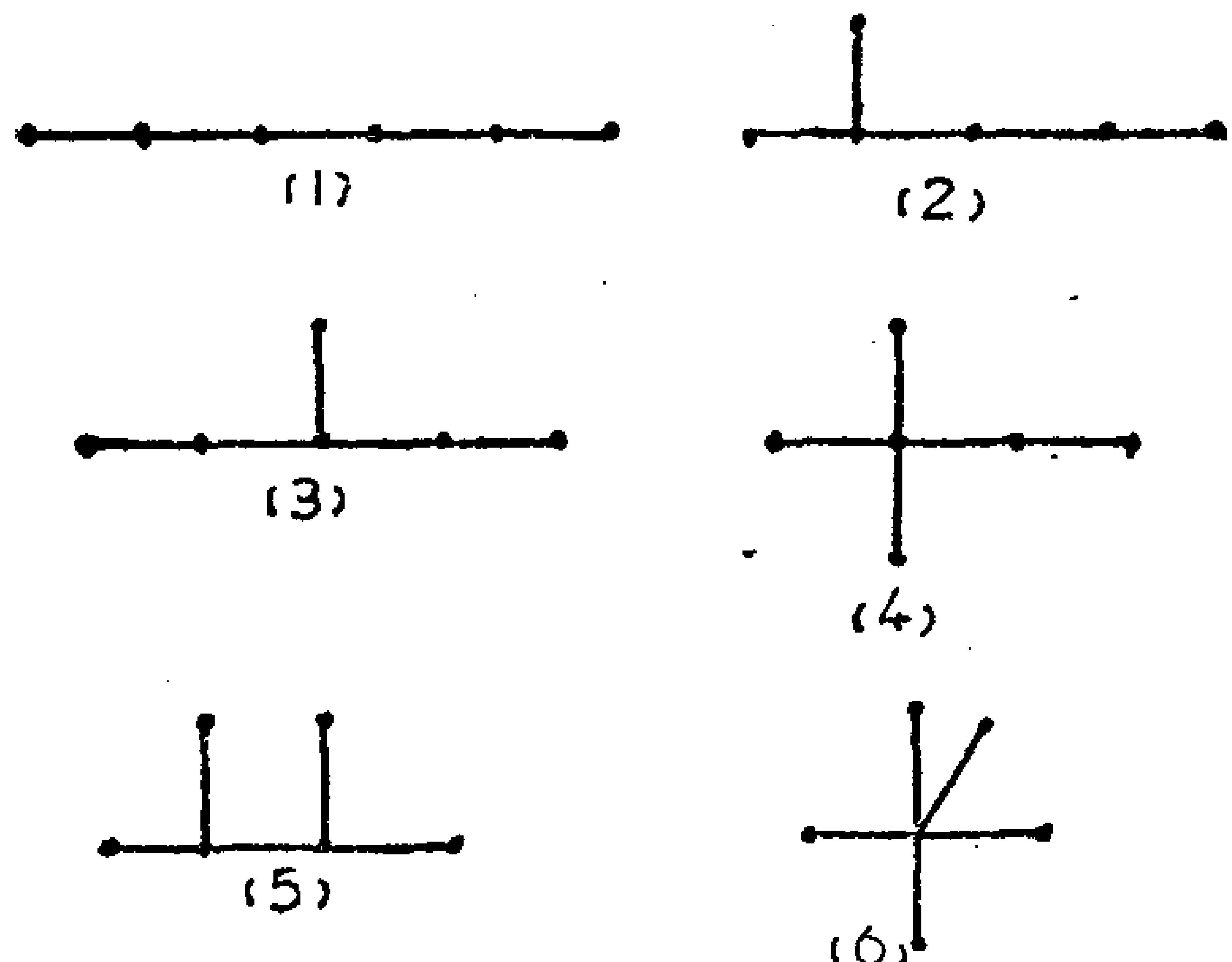

图97

24　设T为（p，q）图，则$q=p-1$，若至多有一个悬挂点，则其余各顶点v_i的次$d(v_i)\geqslant 2$

$$2(p-1)=2q=\sum_{i=1}^{p}d(v_i)\geqslant 1+(p-1)2=2p-1 \quad \text{矛盾}$$

25　设这棵树T为（p，q）图，悬挂点为x个，则

$$\begin{cases} p=x+n_2+n_3+\cdots+n_k \\ 2q=x+2n_2+3n_3+\cdots+kn_k \\ q=p-1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow 2\ (x+n_2+n_3+\cdots+n_k-1)$

$= x+2n_2+3n_3+\cdots+kn_k$

$\Longrightarrow x = n_3+2n_4+\cdots+(k-2)n_k+2$

26　设T为（p，q）图，由于T是树，故$q=p-1$

$$2(p-1)=2q=\sum_{i=1}^{p}d(v_i)\geqslant 2+\sum_{i=3}^{p}2$$

$$=2+2\ (p-2)\ =(2p-1)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=3}^{p}d(v_i)=\sum_{i=3}^{p}2$$

$$\Longrightarrow\quad d(v_i)=2\ (i=3,\ 4,\ \cdots,\ p)$$

27　取G的部分树T，则T也是p阶图，它有$p-1$条边，

因$T\subset G$

故G至少有$p-1$条边

28　有十一种，如图98

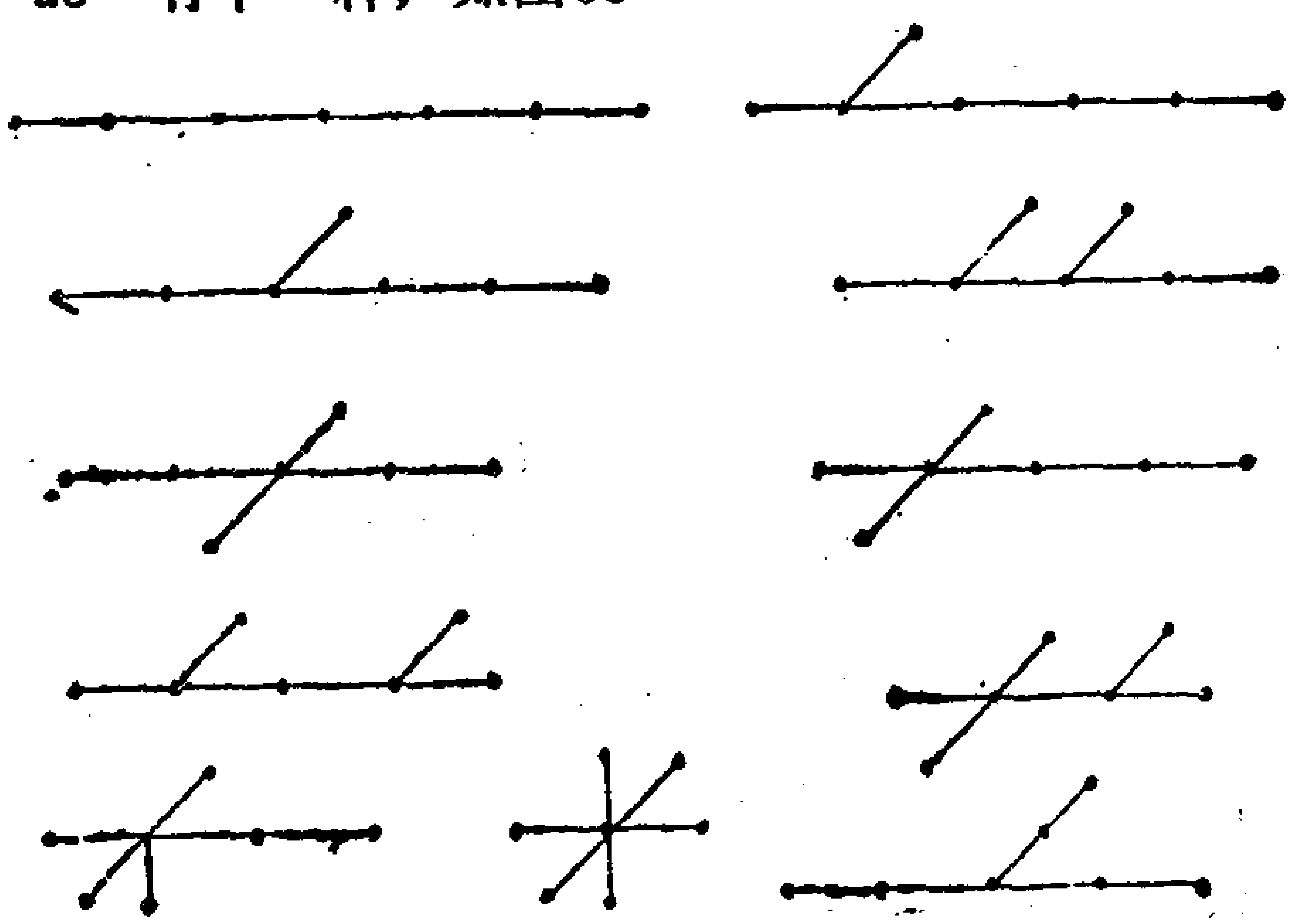

图98

29　设G有k个分支G_i（$i=1, 2, \cdots, k$）又设G_i为（p_i，q_i）图

由于G没有圈，因而G_i也没有圈，G_i为树因此$q_i=p_i-1$（$i=1, 2, \cdots, k$）

$$p-1=q=\sum_{i=1}^{k}q_i=\sum_{i=1}^{k}(p_i-1)=\sum_{i=1}^{k}p_i-k=p-k$$

故$k=1$，即G是连通图，从而G是一颗树

30　(1) 有多少个这样的树呢？

树的边数＝顶点数－1＝6－1＝5(条)

从7条边去掉两条边共有$C_7^2=21$种方法，而去掉两条边不成树的情形有6种：

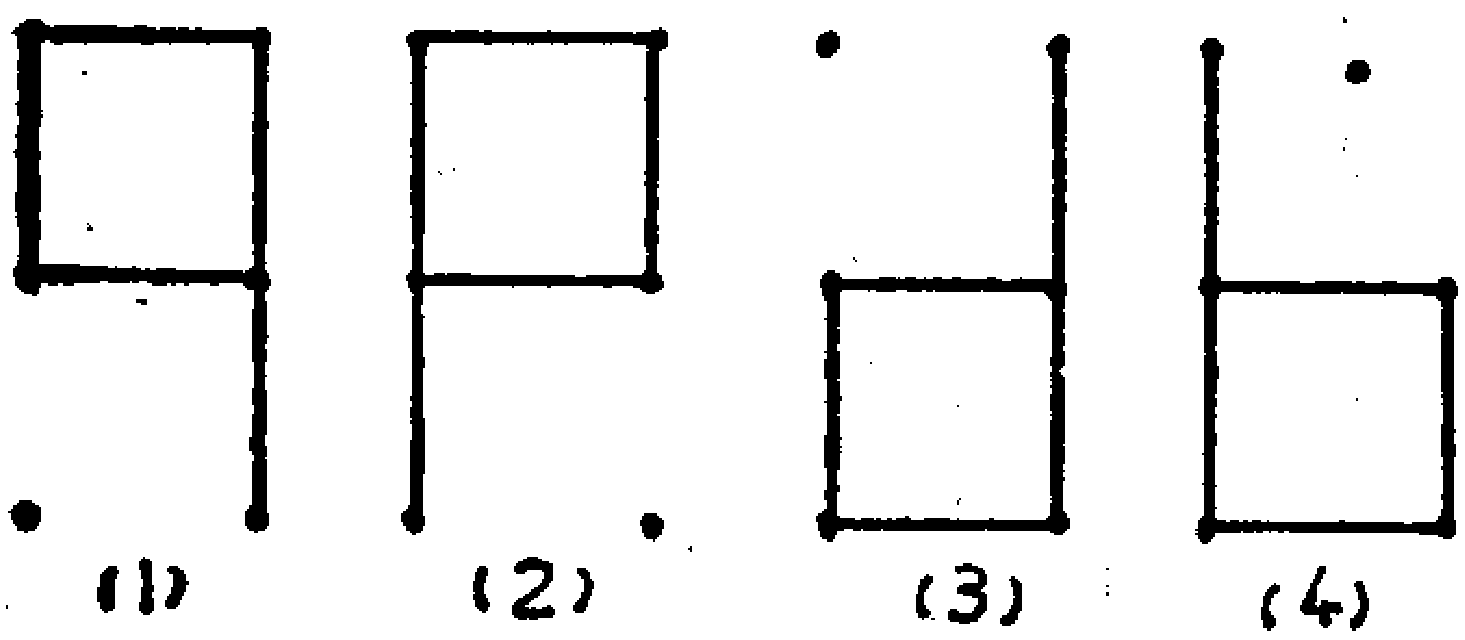

图99

4个角的相邻边——4种．如图99

拦腰截断——2种，如图100

故共有21－6＝15种树

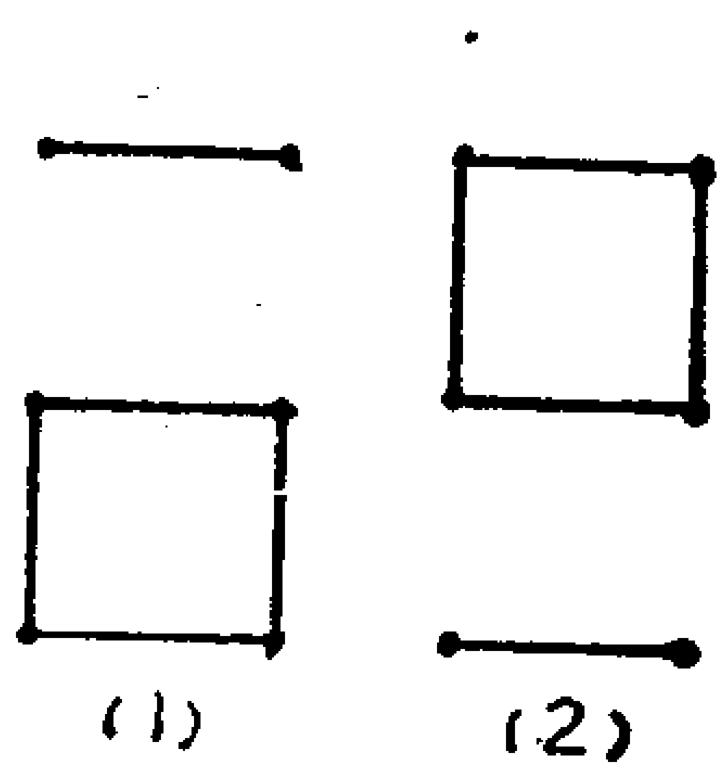

图100

(2) 15棵树　如图101

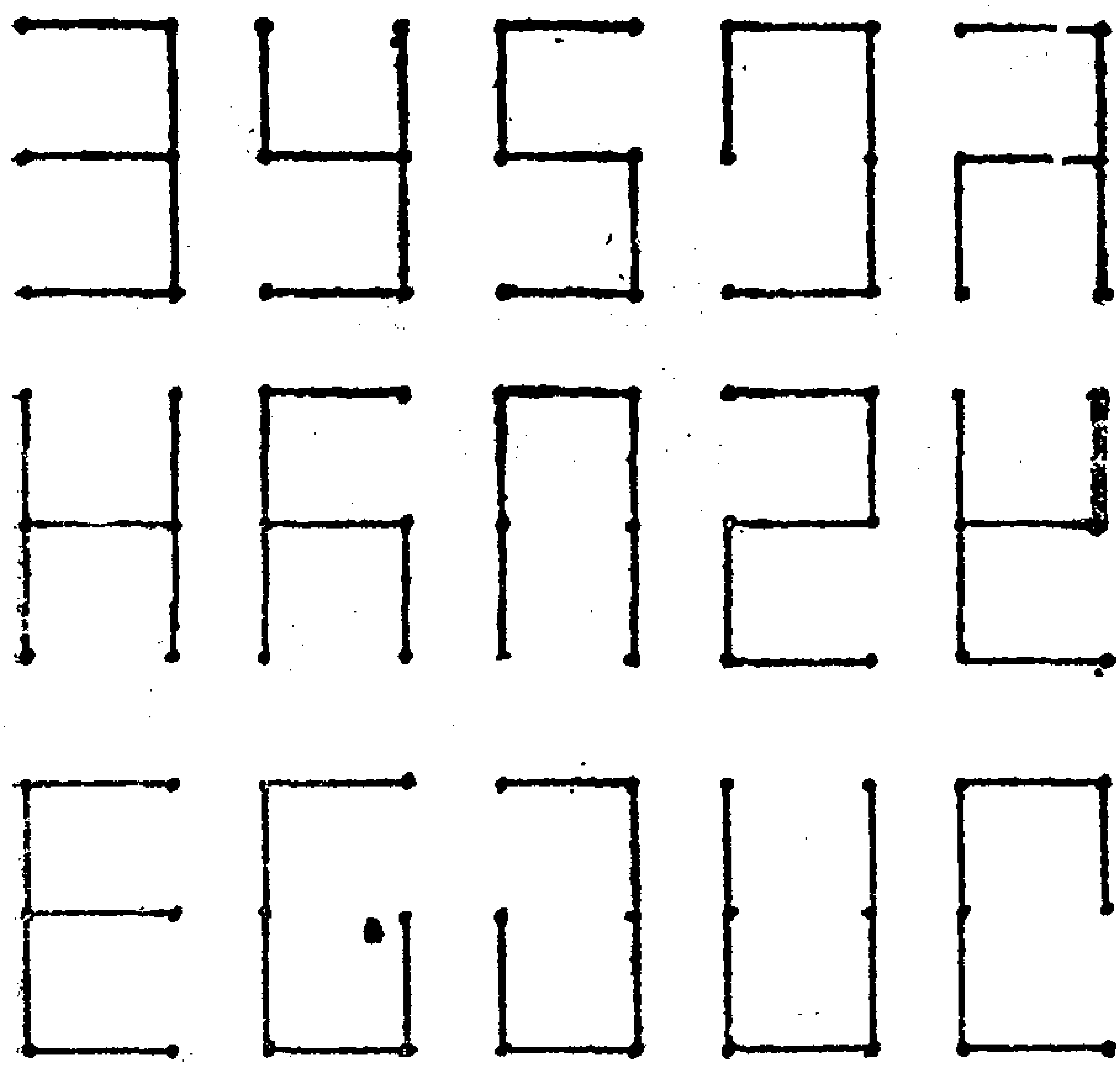

图 101

31　(1) $\because d(A)=d(B)=d(C)=d(D)=d(E)=4$

故　图53 (1) 为欧拉图

(2) $\because d(v_1)=d(v_6)=1$，$d(v_2)=d(v_5)=3$，

$d(v_3)=d(v_4)=2$

由于有四个奇点，故图53(2)为非欧拉图

(3) $\because d(v_2)=d(v_4)=d(v_r)=d(v_8)=5$有四个奇点，

故图53(3)非欧拉图

(4) $\because d(A)=d(B)=d(C)=d(D)=d(E)=d(F)=4$

故图53(4) 是欧拉图

32　由于v_1，v_{10}是仅有的两个奇点，故存在以v_1，v_{10}为始点，终点的欧拉通路$\mu=(v_1, v_2, v_4, v_1, v_3, v_4, v_6, v_3, v_5, v_6, v_8, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_7, v_9, v_{10})$ 就是一条欧拉通路

33　由于各点均为偶点，所以一定有欧拉回路，尝试画图$\mu=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_9, v_5, v_{10}, v_4, v_2, v_{10}, v_{12}, v_1)$即为所求

34　$(v_1, v_2, v_3, v_{10}, v_9, v_8, v_7, v_6, v_{13}, v_{12}, v_5, v_4, v_{11})$是一条哈密顿通路。

35　(1)　$(v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5, v_8, v_4, v_1)$

(2)　$(v_1, v_4, v_3, v_2, v_6, v_7, v_8, v_{12}, v_{11}, v_{10}, v_9, v_5, v_1)$

(3)　$(v_5, v_6, v_{12}, v_{11}, v_{15}, v_{16}, v_{13}, v_{14}, v_8, v_7, v_1, v_2, v_3, v_9, v_{10}, v_4, v_5)$

36　因为对于完全图K_n来说，任两点均有边关联

故$(v_1, v_2, \cdots, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n, v_1)$是哈密顿回路，因此$K_n$是哈密顿图

37　如图102

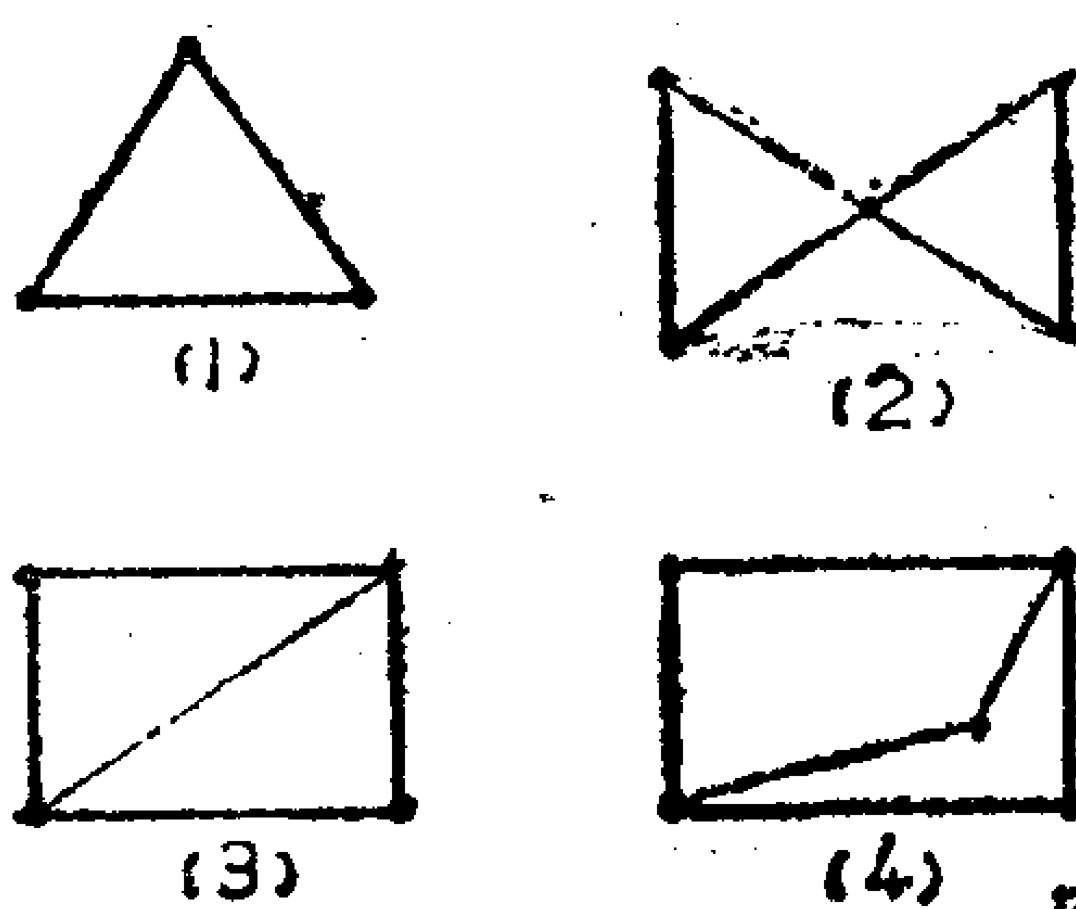

图102

38 由于G是欧拉图，故每一顶点的次均为非零偶数。即$d(v_i)=2k_i$，$k_i\geqslant 1$，$(i=1, 2, \cdots, p)$

又

$$2q=\sum_{i=1}^{p} d(v_i)=\sum_{i=1}^{p} 2k_i \geqslant \sum_{i=1}^{p} 2=2p$$

故 $q\geqslant p>p-1$

39 (1) (1, 8, 7, 2, 3, 4, 12, 13, 5, 6, 14, 19, 20, 17, 18, 11, 10, 15, 16, 9, 1)

(2) (1, 4, 3, 2, 7, 8, 16, 17, 18, 23, 24, 21, 22, 15, 14, 19, 20, 13, 5, 12, 11, 6, 1)

(3) (1, 11, 12, 2, 5, 6, 7, 20, 16, 15, 19, 8, 22, 24, 23, 21, 9, 18, 28, 27, 26, 25, 14, 13, 17, 10, 3, 4, 1)

(4) (1, 2, 3, 4, …, 31, 32, 1)

40 图67共有8个顶点，故此图的部分树边数$q=8-1=7$条

图67共有17条边，而最小树的边数为7条。故要去掉$17-7=10$条边

比较知此例用克鲁斯卡尔算法较好

41 (利用破圈法)

(1) 取圈 (v_1, v_2, v_7, v_1)，去掉边$\{v_1, v_2\}$；

(2) 取圈 $(v_2, v_3, v_6, v_7, v_2)$，去掉边$\{v_2, v_3\}$；

(3) 取圈$(v_1, v_7, v_6, v_5, v_1)$，去掉边$\{v_1, v_5\}$；

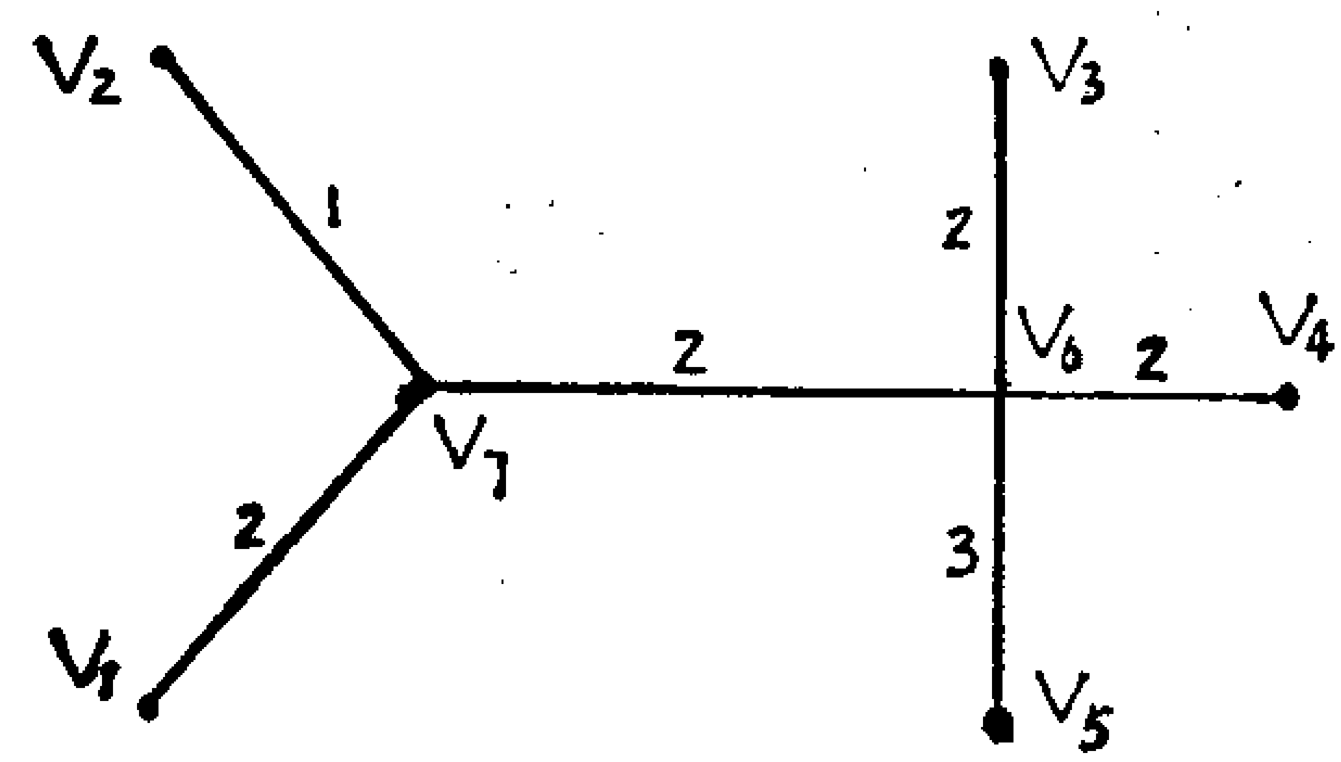

图103

(4) 取圈 (v_3, v_4, v_6, v_3)，去掉边 $\{v_3, v_4\}$；

(5) 取圈 (v_6, v_4, v_5, v_6)，去掉边 $\{v_4, v_5\}$

如图 103，则图 103即为所求

42 第一步，画出各顶

第二步，将权由小到大依次排列如下

$$w_{89} = w_{49} = w_{59} = w_{69} = w_{68} = w_{46} = 1$$

$$w_{23} = w_{29} = w_{39} = w_{34} = w_{56} = 2$$

$$w_{19} = w_{18} = w_{78} = w_{67} = w_{12} = 3$$

第三步，按权的大小依次增如下

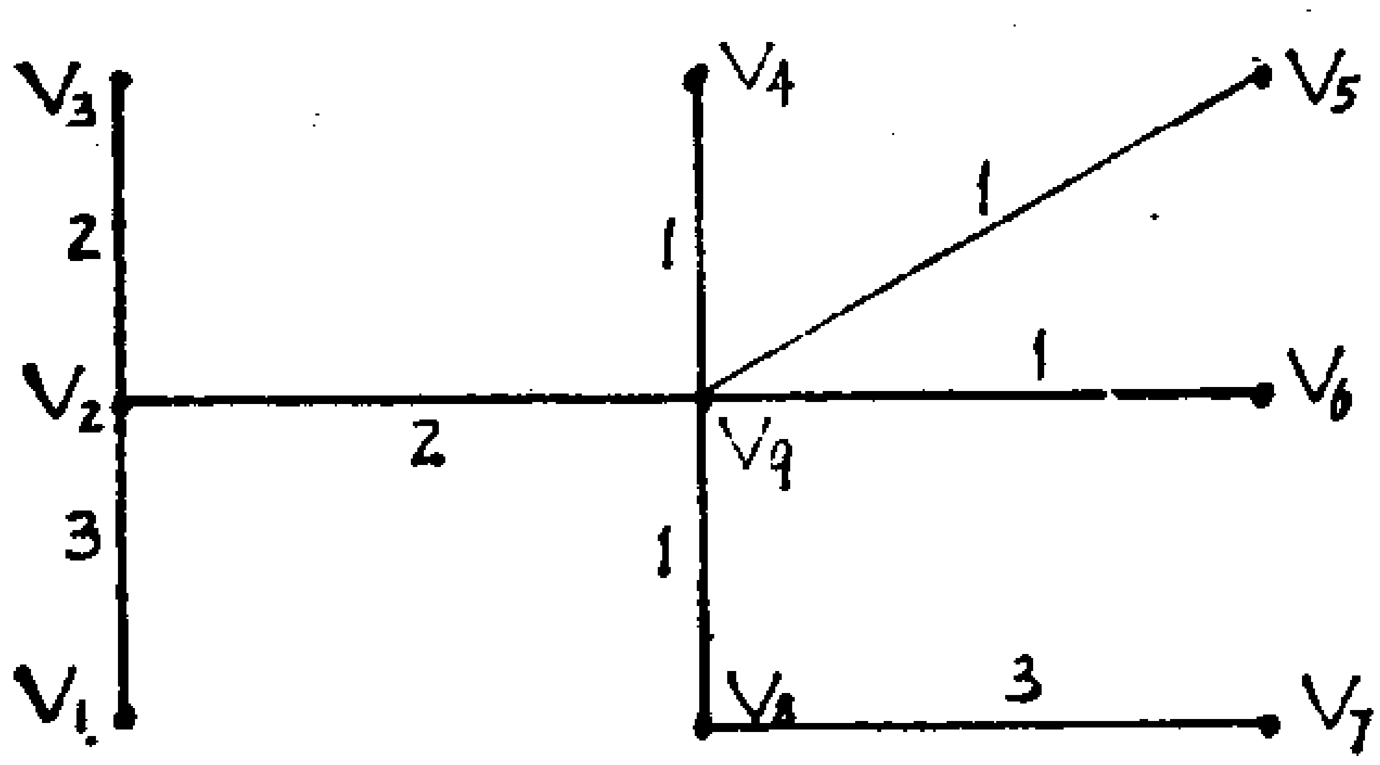

图104

$\{v_8, v_9\}$，$\{v_4, v_9\}$，$\{v_5, v_9\}$，$\{v_6, v_9\}$，$\{v_2, v_3\}$，$\{v_2, v_9\}$，$\{v_1, v_2\}$，$\{v_7, v_8\}$

如图104则图104即为所求

注意图G的最小树并不一定是唯一的，例如图 105 也是最小树

43 (1) 画出 v_1，v_2，…，v_8各点

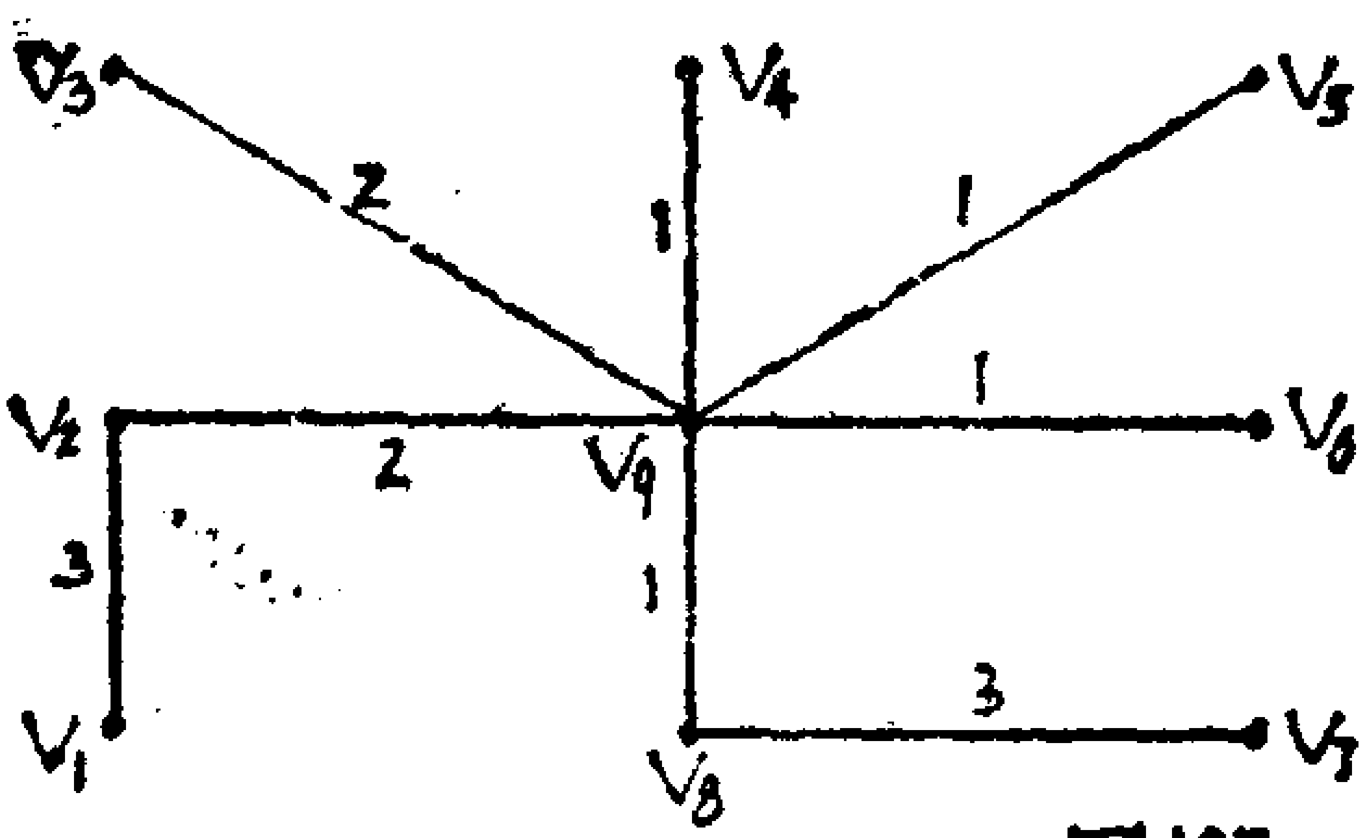

图105

（2）将权由小到大依次排列如下

$w_{78}=0.5$，$w_{67}=0.6$，$w_{15}=w_{45}=0.7$，

$w_{58}=0.8$，$w_{14}=w_{23}=w_{43}=w_{56}=0.9$，

$w_{38}=w_{68}=1.0$，…

（3）按权的大小依次增边如下

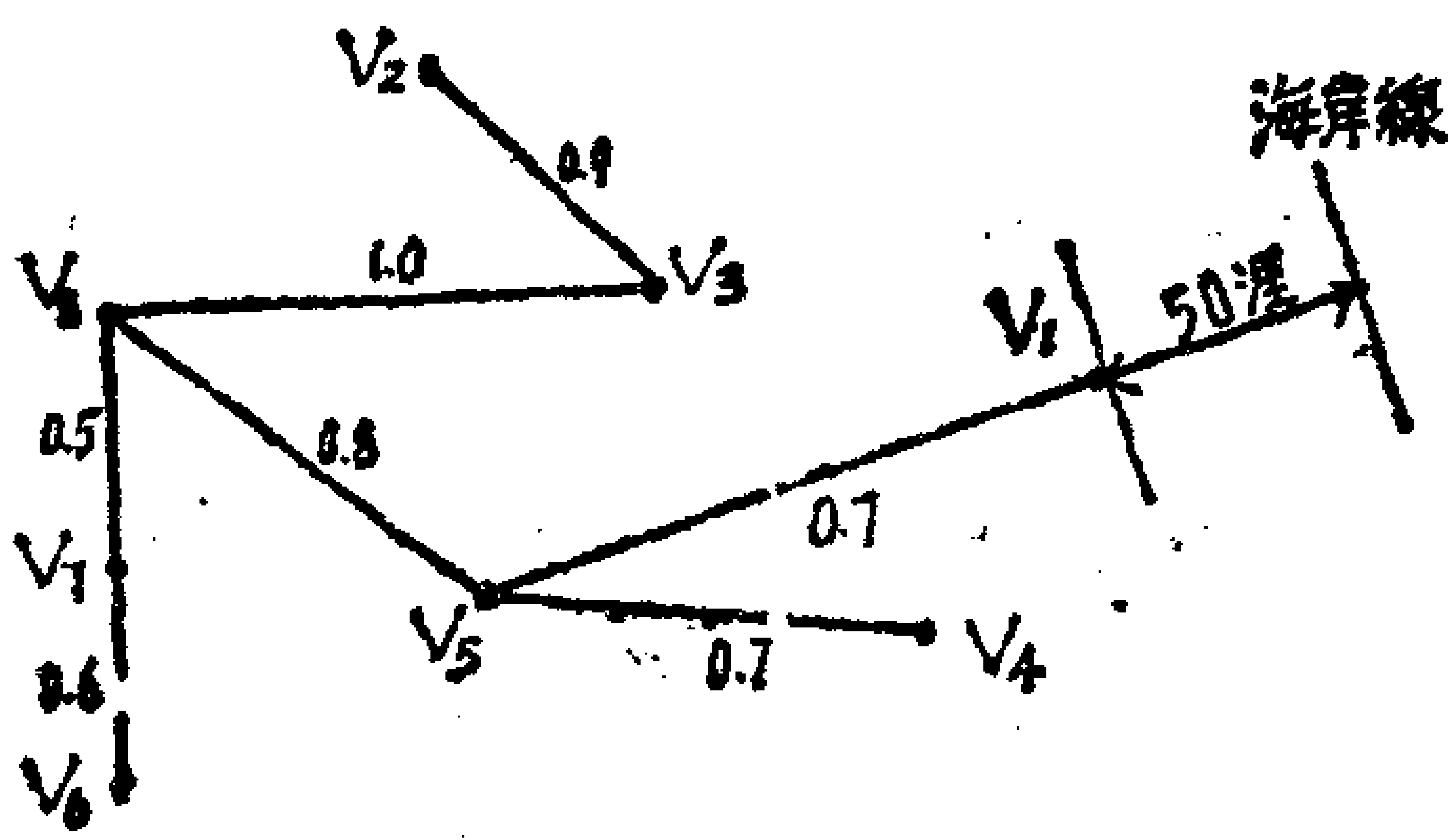

图106

$\{v_7, v_8\}$，$\{v_6, v_7\}$，$\{v_1, v_5\}$，$\{v_4, v_5\}$，$\{v_5, v_8\}$，$\{v_2, v_3\}$，$\{v_3, v_8\}$

如图106，则图106即为所求．总长为10.2浬

44　设用电缆总长为a米，则总费用为

$$10a+(0.6\times1\times3)a+5a=16.8a$$

欲$16.8a$最小，只要电缆总长a最小即可

只要求出图G的最小树T即可

(1) 画出16个点①、②、…、⑮、⓪

(2) 将权按由小到大的次序排列如下

$$w_{3,4}=w_{12,15}=2$$

$$w_{0,2}=w_{7,8}=3$$

$$w_{0,10}=w_{0,12}=w_{3,6}=w_{7,9}=w_{10,11}=4$$

$$w_{0,3}=w_{3,5}=w_{9,10}=w_{11,15}=w_{12,13}=w_{13,14}=5$$

$$w_{0,7}=w_{0,11}=w_{0,13}=w_{5,6}=w_{5,8}=w_{0,14}$$
$$=w_{1,4}=7$$

…

(3) 按权的大小依次增边如下

{③, ④}, {⑫, ⑮}, {⑥, ②}, {⑦, ⑧}, {⓪, ⑩},
{⓪, ⑫}, {③, ⑥}, {⑦, ⑨}, {⑩, ⑪}, {⓪, ③},
{③, ⑤}, {⑨, ⑩}, {⑫, ⑬}, {⑬, ⑭}, {①, ④}.

如图107

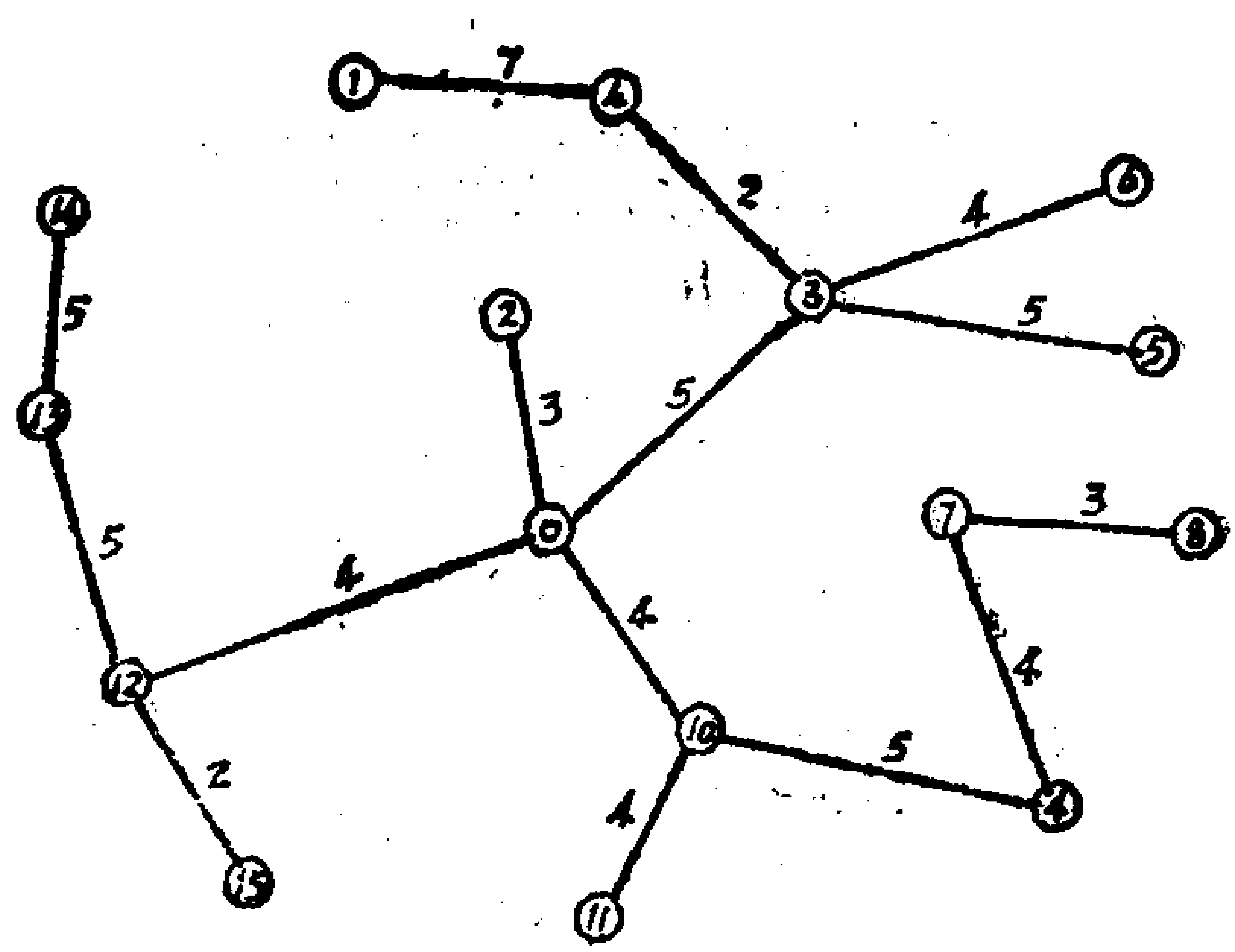

图107