

摘 要

对热防护服装的数理研究，主要是要用数学模型描述热防护服装三层-空气系统内的热力学规律，为热防护服装的功能性设计提供理论参考。当前对于热防护服的研究主要集中在热防护服装新型测试方法、服装热防护性能预测模型，以及对新兴材料在热防护服装上的应用等等。本文通过对多层热防护服-空气系统的研究来完整阐述热传递过程，并结合人体所承受的范围，给出热防护服某层的加工参数。

对于问题一，为了求解假人在高温作业下热防护服装三层-空气系统的温度分布，我们结合相关的物理知识，把它转化为一维热传导问题，然后再对三层防护服皮肤系统接触面进行简化处理，建立了一维热传导模型；采用有限差分格式对一维热传导方程进行离散化处理，在保证差分格式稳定性的前提下，使用合理的时间和空间的步长，利用问题一中的数据，可求得热防护服装三层-空气系统的温度分布（详情见表1和图6）。

对于问题二，为了求解第二层的最优厚度，采用综合分析法对该问题进行考虑，并结合第一问的分析过程，和第二问的2个温度限制条件，建立一个热传导最优厚度的模型。在基于贪婪算法思想的基础上设计了一个启发式的算法进行求解，得到第二层的最优厚度为 $14.6854mm$ 。

对于问题三，我们采用分类讨论的方法进行求解，先对第四层的厚度进行区间划分处理，根据消防服中的空气热传递过程分析，得出一个厚度的临界点。再把该问题分成两种情况，一种情况是以热传递为主，运用问题二中得模型进行求解，另一种情况则是结合热对流的情况下建立热对流-热传导优化模型。最终通过对比可分析得出该问题的最优解。

关键词:热防护服-空气模型；综合分析法；启发式算法；分类讨论法；差分法。

一、问题重述

1.1 问题提出

在高温环境中，为避免工作人员皮肤灼伤，需要穿着应急防护服装。本文考虑由三层织物构成的防护服，分别记作 1、2、3 层，其中直接与外界环境接触的记为第 1 层，与皮肤接触的织物记为第 3 层，第 3 层与皮肤之间的空气层记为第 4 层。

在织物材质一定的情况下，为了设计出防护效果较好的应急防护服装，本实验将一个假人的体内温度控制在 37°C ，置于高温环境中，以此来研究假人外侧皮肤的温度。现要求建立数学模型，确定防护服装各层的温度变化，以此确定假人外侧皮肤的温度变化，并解决下述问题：

(1) 当外界环境温度为 75°C 、第 2 层防护服装厚度为 6mm 、第 4 层厚度为 5mm 的条件下，以及给出防护服装材料各层的参数值（如密度，比热，热传导率等），若工作时间为 90 分钟，附件 2 给出了一组假人的外侧皮肤温度变化数据。试建立计算防护服装各层温度分布的数学模型，并生成相应的 Excel 文件。

(2) 若外界环境温度 65°C 、第 4 层空气层厚度为 5.5mm 的限定条件下，确保在工作时间为 60 分钟时，假人外侧皮肤温度有两个要求：一是，温度低于或等于 47°C ，二是，在 44°C 以上的时间不能超过 5 分钟，在上述条件下确定第 2 层织物材料厚度的最优值。

(3) 在外界环境温度为 80°C 的限定条件下，确保在工作时间为 30 分钟时，要求假人外侧皮肤温度仍满足(2)中两个要求，以此确定第 2 层织物材料和第 4 层空气层厚度的最优值。

二、模型假设

对于防护服-空气层-皮肤系统，本文做出如下假设：

- 1) 本文只考虑热传递，忽略水汽、汗液的影响，即不考虑湿传递；
- 2) 由于织物层阻挡了大部分的辐射，因此在织物层和假人皮肤的传递过程中，可以忽略热辐射；
- 3) 热传递沿着垂直于皮肤的方向进行，所以视为一维热传递；

- 4) 三层防护织物的材料是各项同性的；
- 5) 假设热传递过程中，织物的结构不发生变化，即没有熔融或分解的发生；
- 6) 织物层之间、织物与空气层之间、空气层与皮肤之间的温度分布均为连续变化，不过温度梯度是跳跃的。

三、定义与符号说明

符号	符号说明
C^A	显热容 ($KJ \cdot m^{-3} \cdot K$)
T	温度 (K)
c_p	比热 ($J \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$)
ρ	密度 ($kJ \cdot m^{-3}$)
k	热传导率 ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
L	厚度 (m)
t	时刻
Q	能量
q	热传导系数
x_i	第 i 层的厚度
u	t 时刻 x 位置处的温度 (K)
h_c	对流传热系数
k_a	空气的导热系数 $W / (m^2 \cdot K)$

四、问题一的求解

一、一维热传导方程

1、热传递的三种表现形式

①热传导：由于温度存在差异，能量从高温处转移到低温处叫做热传导。不论何时何地，只要介质内部或两个介质间有温度差，就会引起热传导。

②热对流：由于温度分布不均匀，气体和液体中较热部分与较冷部分间通过循环流动使得温度趋向均匀的过程叫做热对流。

③热辐射：物体因自身的温度而具有向外发射能量的本领，这种热传递的方式叫做热辐射。它不依靠媒质把热量直接从一个系统传给另一系统。

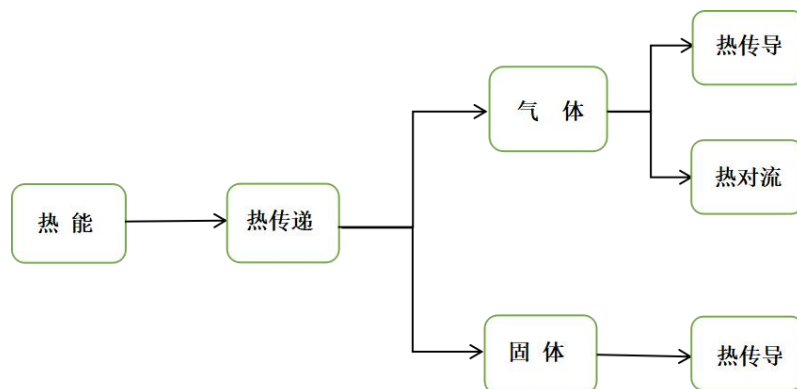


图1 热传递的表现形式

2、热传递的简化

①由于水汽、汗液对高温环境下的热传递影响可忽略不计，因而本文只考虑热传递，不考虑湿传递；

②题目规定织物层与假人之间空气层的厚度值介于 $0.6-6.4mm$ ，在高温情况下，由于空气层厚度极小，热对流产生的影响可忽略不计，因而本文不考虑热对流；

③由于织物层阻挡了大部分的辐射，因此在织物层和假人皮肤的传递过程中，可以忽略热辐射；

综上，本文只考虑高温环境下热传导对假人皮肤温度的影响。

3、热传导到一维的热传导泛定方程的推导

考虑到热量是从高温向低温传播，所以本文假设温度是由外界向假人传播。本题只研究热传导过程。

假设防护服的3层织料各向同性，如下图2所示。热传递沿着垂直于皮肤的方向进行，各层织料与周围介质不存在热交换，且织料内部无热源。

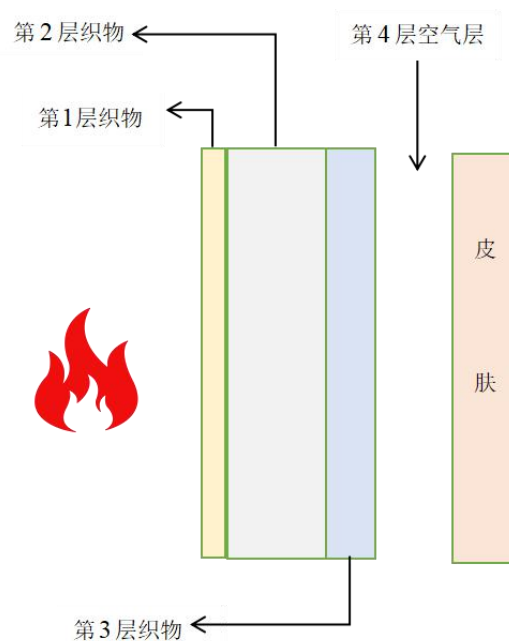


图2 三层防护服、皮肤系统

可以将满足上述条件的问题归于求一维热传导方程的定解。由傅里叶热传导定律知，三维热传导方程^[1]为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t),$$

$$\text{其中, } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad f(x, y, z, t) = \frac{F(x, y, z, t)}{c\rho}$$

满足一定对称性（如均质平板薄板等物质）的三维热传导问题可化为二维的热传导问题，本题中防护服可近似看做二维，因此其泛定方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), (x, y) \in D, t > 0$$

在求解微分方程时，空间维数高一维都会引起本质性的困难，因此，在求解过程中，总会用各种条件想法设法降低维数。由于热传递沿着垂直于假人皮肤的方向进行，所以二维热传导问题降低维数可近似看成一维的热传导问题，此时泛定方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), 0 < x < l, t > 0$$

其中, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k 为热传导率, c 为比热, ρ 为密度, u 为 t 时刻 x 位置处的温度。

4、三层防护服、皮肤系统热传导模型

(1)、防护服各层热传导模型

卢琳珍^[2]于2017年研究发现，防护服由3层织料组成，各层织料各向同性，且热传递沿着垂直于皮肤的方向进行，在同一时间每层织料上各处的温度相等的，织物内部无热源，且各层织物与周围介质不存在热交换。所以本题可转换为一维热传导方程的定解问题。由此，热防护服热传递模型为：

$$C_{dyc}^A(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{dyc}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_1 \times (0, t_{\text{exp}}), \quad (1)$$

$$C_{dec}^A(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{dec}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_2 \times (0, t_{\text{exp}}), \quad (2)$$

$$C_{dsc}^A(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{dsc}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_3 \times (0, t_{\text{exp}}), \quad (3)$$

这里, $C_{dyc}^A, C_{dec}^A, C_{dsc}^A$, 分别是第一层、第二层、第三层织料的显热容; T 是温度; t 是时间; x 是水平坐标; $k_{dyc}, k_{dec}, k_{dsc}$ 分别是第一层, 第二层, 第三层织料的热传导率; $\Omega_i (i=1,2,\dots,5)$ 表示关于 x 取值范围, 其中, $\Omega_1 = (0, L_{dyc})$, $\Omega_2 = (L_{dyc}, L_{dyc} + L_{dec})$, $\Omega_3 = (L_{dyc} + L_{dec}, L_{fab})$, $L_{fab} = L_{dyc} + L_{dec} + L_{dsc}$; t_{exp} 是暴露在闪火环境中的时间。

2、两种边界热传导模型

根据能量守恒定律 $Q = k \frac{T_2 - T_1}{h^2}$, 形如下图3所示的边界, 其温度计算公式如下:

$$T_{\text{边}} = \frac{P_1 T_{\text{左}} + P_2 T_{\text{右}}}{P_1 + P_2} \quad (4)$$

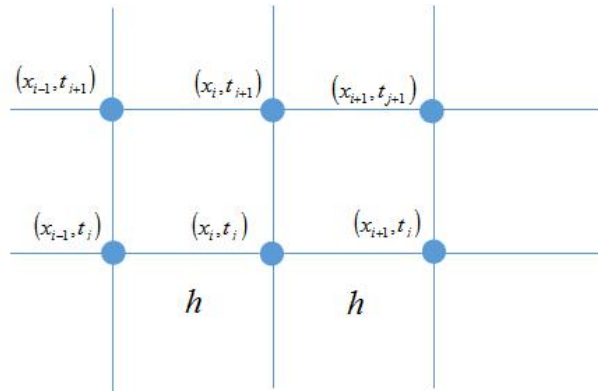


图3 边界情形1

形如下图4所示的边界, 其温度计算公式如下:

$$T = \frac{P_1 d_2^2 T_{\text{左}} + P_2 d_1^2 T_{\text{右}}}{P_1 d_2^2 + P_2 d_1^2} \quad (5)$$

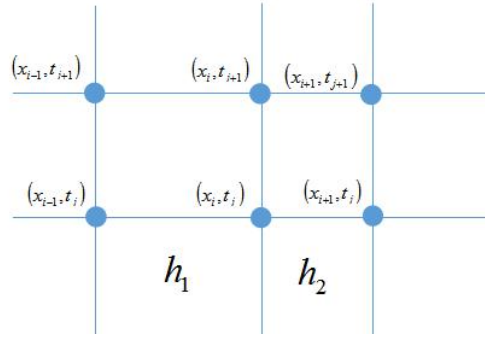


图4 边界情形2

把（1）～（5）构成的模型称为一维热传导方程模型。

二、热传导方程的离散

1、坐标轴的建立，以织物左边界为 t 轴，建立如下空间-时间坐标系，如下图5所示：

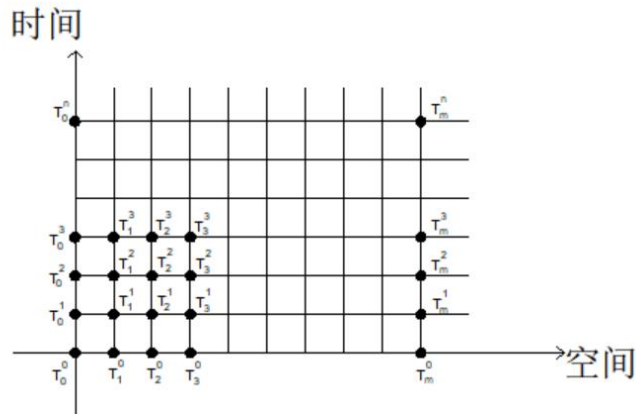


图5 空间-时间坐标系

其中 T_i^j 表示为在 (x_i, t_j) 处的温度， $d_i = T_{i+1}^j - T_i^j$ ， $t_j = T_i^{j+1} - T_i^j$ 分别表示空间与时间的步长。

2、防护服各层热传导模型的离散格式

记织物内的热传导公式系数为： $q = t \cdot k / (c \cdot g \cdot d)$ ，利用二阶差分格式离散（1）～（3）中的右端偏微分，利用一阶差分格式离散（1）～（3）中的左端偏微分。可得如下离散差分格式：

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}$$

整理得：

$$T_i^{j+1} = T_i^j + q_i \cdot (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) \quad (i=1, \dots, 4) \quad (6)$$

其中， $q_i = \frac{k_i \tau_i}{c_i \rho_i h_i^2}$ ，表示第 i ($i=1,2,3$) 层织物热传导系数， q_4 为第 4 层空气层的热传导公式系数。

3、两种边界热传导模型的离散格式

由于分界线左右两侧织物的温度不同、热传导系数不同，且分界线上的温度介于两侧温度之间。

热源与第一层织料的边界的权值取一固定值，其温度的计算公式为：

$$T_1^j = 0.1 \times T_2^j + 0.9 \times 75 ;$$

第一层织料与第二层织料的边界温度为：

$$T_{n_1}^j = \frac{k_1 \cdot T_{n_1-1}^j + k_2 T_{n_1+1}^j}{k_1 + k_2} \quad (7)$$

第二层织料与第三层织料的边界温度为：

$$T_{n_2}^j = \frac{k_2 \cdot T_{n_2-1}^j + k_3 T_{n_2+1}^j}{k_2 + k_3} \quad (8)$$

第三层织料与空气层的边界温度为：

$$T_{n_3}^j = \frac{k_3 \cdot d_4^2 T_{n_3-1}^j + k_4 d_3^2 T_{n_4+1}^j}{k_3 d_4^2 + k_4 d_3^2} \quad (9)$$

空气层与假人皮肤接触的边界温度为：

$$T_{n_4}^j = \frac{k_3 \cdot T_{n_4-1}^j + 0.011525 \times 37}{k_3 + 0.011525} \quad (10)$$

其中 n_i 表示第 i 层的划分数。

称 (6) ~ (10) 为一维热传导离散模型。

三、数值计算

根据网上资料, 只有当 $q_i = \frac{k_i \tau_i}{c_i \rho_i h_i^2} < 0.5$ 时, 差分格式才具有稳定性, 考虑题中下表

1 所给数据, 做如下的剖分, 得到防护服装各层的接触面 (边界) 的温度分布, 见表 1,

完整的防护服装温度分布见附录 *problem1.xlsx* 文件。

附件 1. 专用服装材料的参数值				
分层	密度 (kg/m ³)	比热 (J/(kg • °C))	热传导率 (W/(m • °C))	厚度 (mm)
I 层	300	1377	0.082	0.6
II 层	862	2100	0.37	0.6-25
III 层	74.2	1726	0.045	3.6
IV 层	1.18	1005	0.028	0.6-6.4

$\tau_i = 0.1s(i=1,2,\dots,4)$, $d_i = 0.3mm(i=1,2)$, $d_3 = 0.4mm$, $d_4 = 2.5mm$, $\beta = 1$, $\xi_1 = \xi_2 = 1$ 。

时间 (s)	T_1^j	T_2^j	T_3^j	T_4^j	T_5^j
0.1	37.00	37.00	37.00	37.00	37.00
0.2	72.70	42.65	37.00	37.00	37.00
0.3	72.92	45.55	37.00	37.00	37.00
0.4	73.06	47.50	37.00	37.00	37.00
0.5	73.17	48.98	37.00	37.00	37.00
0.6	73.25	50.18	37.00	37.00	37.00
0.7	73.32	51.19	37.00	37.00	37.00
0.8	73.39	52.05	37.00	37.00	37.00
0.9	73.44	52.81	37.00	37.00	37.00
1	73.49	53.48	37.00	37.00	37.00
...
5391	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08
5392	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08
5394	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08
5395	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08

5396	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08
5397	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08
5398	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08
5399	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08
5400	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08
5401	74.91	73.73	67.88	53.76	48.08

表 1 防护服装各层的接触面（边界）的温度分布

得到最终的温度分布的三维图, 见下图 6:

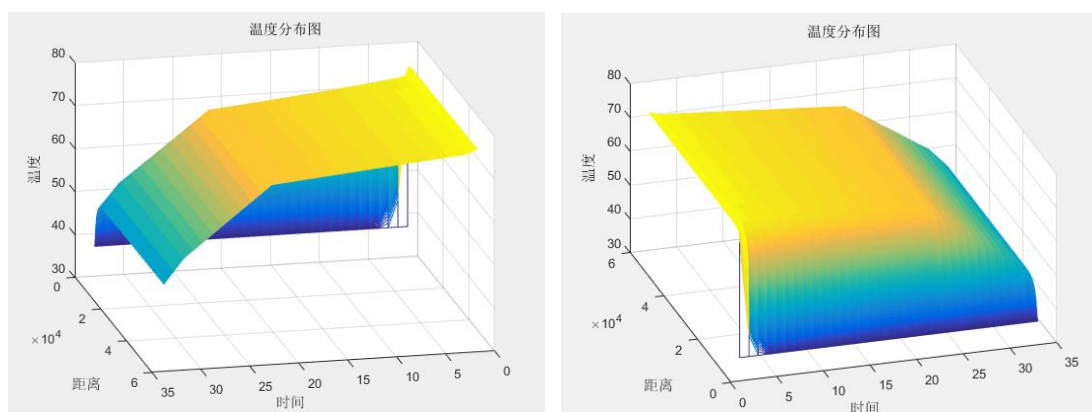


图 6 温度分布三维图

边界温度分布图见下图 7:

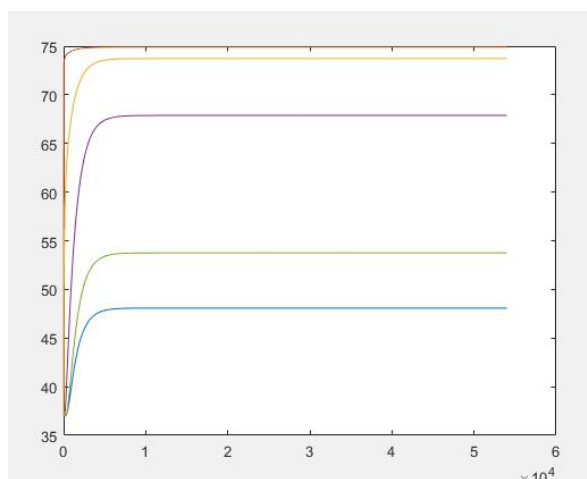


图 7 边界温度分布图

根据实际情况发现, 第一条边界曲线与第二条边界曲线之间代表防火层, 第二条与第三条之间代表防水层, 第三条与第四条之间代表隔热层, 第四条与第五条之间代表空气层。

温度关于时间步长的三维图和一维图见下图8：

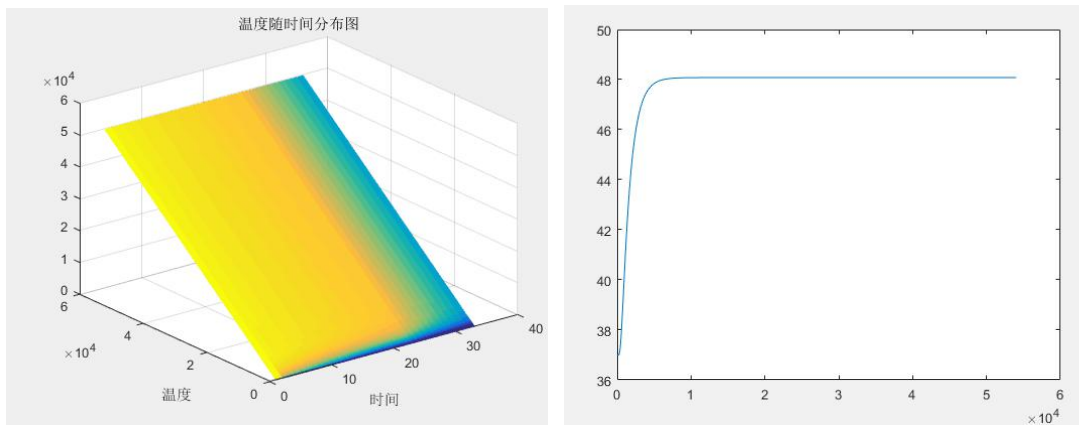


图8 温度与时间步长的关系图

温度关于空间步长的三维图和一维图见下图9：

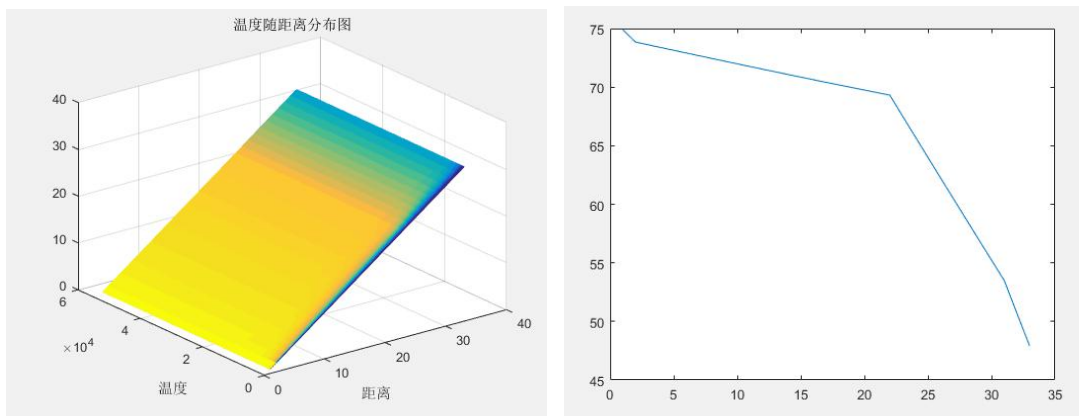


图9 温度与空间步长的关系图

误差分析：利用附件一中每秒时间的温度数据与根据模型求得的温度数据进行误差分析，运用 *Matlab* 求得误差值为 1.6352×10^{-4} 。当二范数达到 10^{-4} 时，说明误差值至少存在 4 位小数，则认定求得的数据在可接受的范围内。因此，通过模型求得的数据是可接受的。

五、问题二的求解

1、问题分析

基于问题一，问题二是在满足一定限制条件的前提下，求出第二层织物的最优厚度。在一定条件下，寻求使目标最大(小)的决策称为最优化问题，这与本文的思路一致，显然本题符合最优化问题。即在满足限制条件的前提下，求解第二层织物的最短厚度。

虽然我们并不知道确切的结果，但可知结果一定会落在某个取值范围内。譬如说本题中，无论具体最佳厚度是多少，但一定会落在 $0.6mm - 25mm$ 的范围之内。自然的，我们想到列举出所有的可能解，然后一个个去验证，以得到最优的结果。这种穷举方法虽然能得到理论上的最优解，但应用于具体题目时，计算量太大导致穷举法的效率极其低下。

因此我们放弃从整体最优上考虑的思路，基于贪婪法的基础上，采用**逐步构造最优解的方法**，即在每个阶段，都选择在一定的标准下，最优的策略，得出在某种意义上的局部最优解。

基于贪婪算法的思想，本文设计了一个启发式算法，将整体划分为部分，自顶向下，通过局部最优解的区间确定再次筛选计算区间，以迭代的方式作出一系列的贪心选择，每作一次贪心选择就可将所求问题简化为规模更小的子问题。当满足某种限制条件时，不再继续前进，算法停止，得到合理的最优解，从而通过局部最优达到整体最优。

2、模型建立

通过对问题二的分析可知本题为最优化问题，从问题的初始解出发，在满足题目给定条件的基础下，尽可能求出最符合题目要求的解。因此基于贪婪算法的思想设计出一个合理的启发式算法，将整体划分为局部，通过局部最优从而达到整体最优，以此求得第二层织物的最优厚度，如下图10所示。

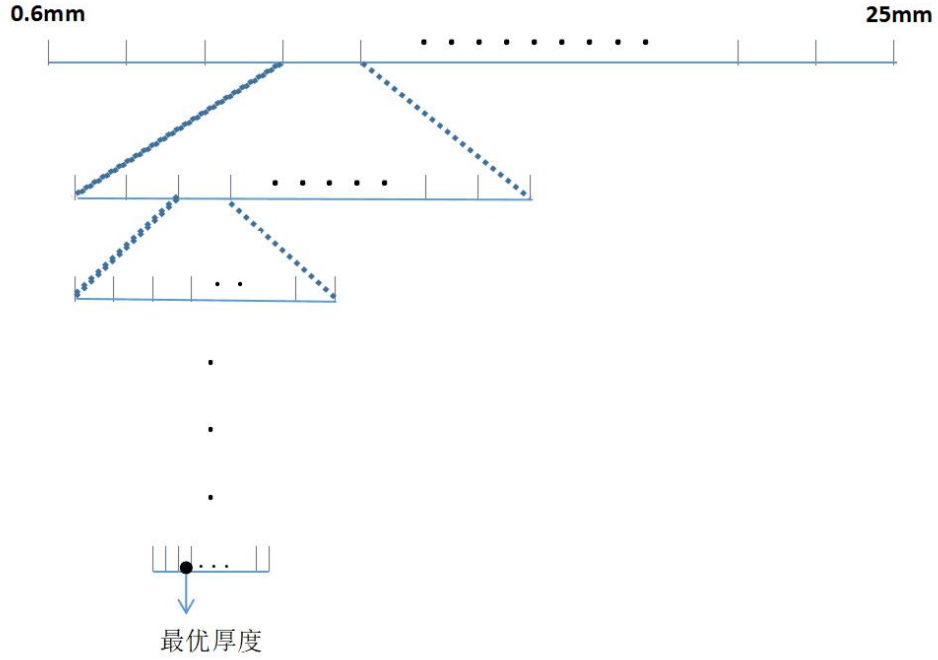


图10 逐步构造最优厚度图示

由附件一和题目知第一层织物、第三层织物及皮肤层的厚度，设置一个合理的步长把第二层区间厚度划分为若干个相等大小的区间。分别取每个区间最左侧端点代表的厚度值带入到问题一中进行仿真模拟求解，求出假人皮肤外侧温度上升到 44°C 和 47°C 分别所需要的时间 t_1 、 t_2 ，根据题目要求筛选出符合条件的厚度区间最优参数。

根据启发式算法，再把所选出的厚度区间再次设置一个合理的步长，以此来划分成若干个相等的子区间，再重复用问题一的模型筛选出最优厚度空间。

假设此过程循环 10^4 次，所求出的厚度区间近似已经达到题目要求。所以，即基于问题一的模型，问题二的目标函数及约束条件为：

$$\begin{cases} \min x_2 = f(x_1, x_3, x_4, t_1, t_2) \\ s.t \begin{cases} t_2 \geq 60 \text{ min}, \\ t_2 - t_1 \leq 5 \text{ min}, \\ x_2 \leq 10^{-4} \text{ mm}. \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

其中， x_1, x_3, x_4 分别表示对应第 i 层的厚度， t_1, t_2 分别题目中对温度要求的上限值。

称(11)式所构成的优化模型为模型2。

3、问题求解

第一次我们将区间 $[3,25]$ 等分成八份，基于问题一的基础上，运用 *Matlab* 求解得到下表2：

区间厚度	达到 44℃所需时间	达到 47℃所需时间	稳定温度(℃)
24	>60min	>60min	42.99
21	>60min	>60min	43.3301
18	>60min	>60min	43.65
15	>60min	>60min	43.9
12	1324s	>60min	44.33

表2 第一次迭代的数据表

通过分析上述表格，在厚度为12的时候，刚好不满足限制条件，从而易知最优解应该在 $[12,15]$ 的区间内，所以我们将这个区间进行了第二次划分。

第二次我们将区间 $[12,15]$ 分成十等份，基于问题一的基础上，运用 *Matlab* 求解得到下表3：

区间厚度	达到 44℃所需时间	达到 44℃所需时间	稳定温度(℃)
14.7	3525	>60min	44.0142
14.4	2778	>60min	44.0485
14.1	2415	>60min	44.0832
13.8	2162	>60min	44.1181
13.5	1964	>60min	44.1535
13.2	1800	>60min	44.1891
12.9	1659	>60min	44.2251
12.6	1535	>60min	44.2615
12.3	1424	>60min	44.2981
12	1324	>60min	44.33

表3 第二次迭代的数据表

通过分析上述表格，在厚度为 14.4 的时候，刚好不满足限制条件，从而易知最优解应该在 $[14.4,14.7]$ ，所以我们将这个区间进行了第三次划分。

由于 *Matlab* 的限制原因，随着空间步长的缩小，时间步长不断缩小，矩阵的行数不断增加，导致计算量很大，不便于计算。因此我们把如上数据拟合成一个与其他初始条件与 x_2 厚度的函数：

$$x_2 = f(x_1, x_3, x_4, t_1, t_2)$$

通过 *Matlab* 拟合的图像如下图11所示：

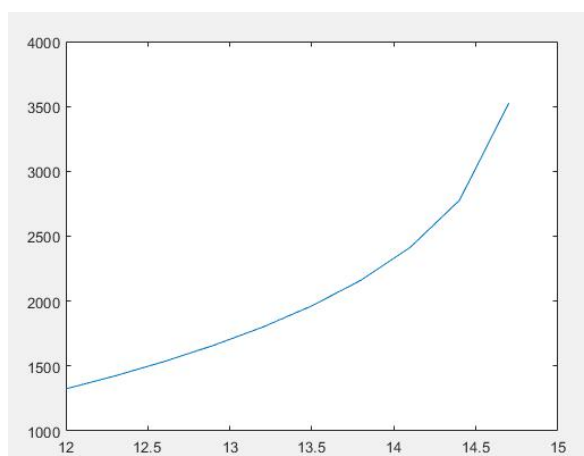


图11 最优厚度 f 函数

由限制条件可知，当 $t_1 = 3300s$ 时， x_2 取得最优值14.6854。

六、问题三的求解

1、问题分析

问题三与问题二类似，在满足一定限制条件的前提下，求出第二层织物和织物与假人之间空气层的最优厚度。在一定条件下，寻求使目标最大(小)的决策称为最优化问题，这与本文的思路一致，显然本题符合最优化问题。即在满足限制条件的前提下，求解第二层织物的最短厚度。

我们先对第四层的厚度进行区间划分处理，根据消防服中的空气热传递分析，得到

一个厚度的临界点。再对该问题分成两种情况，一种情况是以热传递为主，运用问题二中得模型进行求解，另一种情况则考虑热对流进行讨论。

要确定第二层的和第四层的最优厚度，考虑到材料的节省情况，由题可知第四层是空气层，当空气层厚度比较低的情况下，空气层主要考虑热传导，所以空气层应该是越长越好，我们尽量的使第二层达到最短，从而达到该情况最优，另外一个情况是结合热对流对问题二的模型进行改进。

2、模型建立

假人皮肤与防护服第三层织物内表面的温度差、假人皮肤与防护服内表面之间的空气层以及空气层的厚度影响了空气的流动。*Cain*^[3] 等人在1985年提出，如果空气层厚度小于13mm，且防护服内表面与皮肤层之间的温度梯度达到5K时，只考虑热传导的影响。如果空气层厚度大于13mm，或防护服内表面与皮肤层之间的温度梯度大于5K时，则需要同时考虑热传导与自然对流。

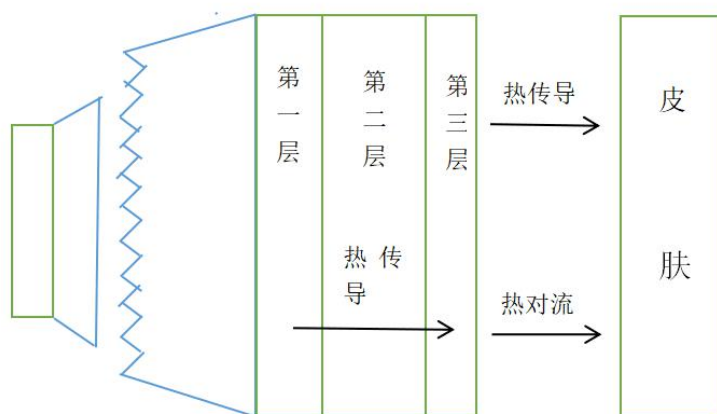


图12 三层防护服-皮肤系统的热量传递

由张昭华^[4] 文章和传热学知, 如果瑞利数(*Rayleigh*) Ra 小于临界值1700时, 空气层中的热量传递主要为热导热, 如果瑞利数(*Rayleigh*) Ra 大于等于临界值1700时, 将出现自然对流。对流换热的强弱都用努谢尔特数(*Nusselt*) Nu 表示:

$$N_u = 1 \quad R_a \leq 1700$$

$$N_u = 0.059(Gr \cdot Pr)^{0.4} \quad Ra > 1700$$

对流传热系数为

$$h_c = Nu \cdot k_a / L_{mc}$$

则衣下空气层的导热(对流)热流量可表达为

$$q_{mc,con} = h_c(T_s - T_{in})$$

式中: T_s 为热板温度, 单位为 K ; T_{in} 为面料内表面温度, 单位为 K ; L_{mc} 为衣下空气层厚度, 单位为 m ; k_a 为空气的导热系数, $W/(m \cdot K)$; h_c 为对流传热系数, 单位为 $W/(m^2 \cdot K)$; $q_{mc,con}$ 为衣下空气层的导热热流量, W/m^2 。



图13 最优厚度

所以我们对第四层空气层先进行了分析, 假设空气层的厚度在 $[x_5, x_6]$ 之间, 其中 x_0 属于这个区间为且为空气厚度从热传导到热对流的临界厚度, 先通过上述文献把临界厚度 x_0 求出来。在基于模型二的基础, 在以热传导为主的情况下厚度应该是越长越好, 所以在区间 $[x_5, x_6]$ 上取空气的厚度为 x_0 作为最佳厚度。然后用模型二进行求解:

$$\begin{cases} \min x_4 = f(x_1, x_3, x_2, t_1, t_2) \\ s.t. \begin{cases} t_2 \geq 30 \text{ min}, \\ t_2 - t_1 \leq 5 \text{ min}, \\ x_2 \leq 10^{-4} \text{ mm}. \end{cases} \end{cases}$$

当空气厚度大于 x_0 时, 我们把问题二的模型做了稍微的改动, 前三层织物层用热传导方程模型, 即:

$$C_{dyc}^A(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{dyc}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_1 \times (0, t_{\exp})$$

$$C_{dec}^A(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{dec}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_2 \times (0, t_{\text{exp}}),$$

$$C_{dsc}^A(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{dsc}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_3 \times (0, t_{\text{exp}}),$$

后三层进建立在热传导模型的基础上加上空气对流的影响进行求解，模型如下：

$$C_{dyc}^A(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{dyc}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_{mc,con}, (x, t) \in \Omega_1 \times (0, t_{\text{exp}}),$$

$$C_{dec}^A(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{dec}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_{mc,con}, (x, t) \in \Omega_2 \times (0, t_{\text{exp}}),$$

$$C_{dsc}^A(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{dsc}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_{mc,con}, (x, t) \in \Omega_3 \times (0, t_{\text{exp}}),$$

$$q_{mc,con} = h_c(T_s - T_{in})$$

再综合第二问的启发式算法，运用步长筛选法，对该区间内求最优解。

最后综合比较这两个最优解，得到最终的结果。

3、模型求解

第四层空气层厚度区间为 $[x_5, x_6]$ ，在厚度越长，隔热效果越好的前提下，用 筛选出在厚度区间 $[x_5, x_6]$ 内最优厚度 x_7 ， x_7 与临界厚度 x_0 进行比较。

当 $x_7 < x_0$ 时，

基于模型二的基础，用 *Matlab* 进行求解：

当 $x_7 \geq x_0$ 时，

基于模型二的基础在离散部分加一个后缀求解可得，用 *Matlab* 进行求解

由于时间原因在程序调试的时候出现了问题，结果没出来。

七、模型评价与改进

7.1 模型评价

模型一根据能量守恒定理，采用一维热传导方程，求得每个时间步长空间步长内的温度，通过误差分析，可知误差值为 1.6352×10^{-4} ，在可接受的范围内。所以，此模型可行性高，满足此模型的条件都可以从三维热传导方程转化为一维热传导过程，从而更加快捷简便的求出问题解。

模型二采用逐步构造最优方法，基于贪婪算法的思想，设计了一个适合本题的启发式算法。将整体划分为部分，自顶向下，在每个阶段，都选择当前最优的区间，多次迭代，最后，通过数据拟合得出符合题意的最优解。此模型移植性比较好，搜索效率高，求解较精确。

模型三、四采用分类讨论的方法，具体问题具体分析，并根据所涉及的时间步长法，运用 *Matlab* 程序快速地给出最优方案。

7.2 模型改进

对于模型二，应该可以先确定一个大概的区间用步长计算法，可以先用二分法大致确定该区间。

对于模型三，此模型临界点计算太过粗糙，应该选一个合理可靠的模型对其计算，再运用 *spss* 软件对的相关因子进行进一步分析，再解出临界点值。

八、参考文献

- [1] 许兰喜. 数学物理方程 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2016. 12-17.
- [2] 卢琳珍. 多层热防护服装的热传递模型及参数最优决定 [D]. 北京: 国家自然科学基金, 2017.
- [3] CAIN B, FARNWOTH B. Two new techniques for determining the thermal radiative properties of thin fabrics [J]. Journal of Building Physics, 1986, 9(4):301-322.
- [4] 张昭华, 王云仪, 李俊. 衣下空气层厚度对人体热传递的影响 [J]. 纺织学报, 2010, 31(12):103-107.
- [5] 赖军, 张梦莹, 张华, 李俊. 消防服衣下空气层的作用与测定方法研究进展 [J]. 纺织学报, 2017, 38(6):151-156.

九、附录

问题一代码:

温度分布图:

```
x=xlsread('A.xlsx',2,'A1:A5401');
y=xlsread('A.xlsx',2,'B1:B5401');
g1=300;g2=862;g3=74.2;g4=1.18;           %g 表示密度
c1=1377;c2=2100;c3=1726;c4=1005;         %c 表示比热容
k1=0.082;k2=0.37;k3=0.045;k4=0.028;      %k 表示热传导
m1=0.6;m2=6;m3=3.6;m4=5;                %m 表示厚度
d=3*10.^-4;                               %d 表示单位步长
t=0.1;                                     %t 表示时间步长
q1=t*k1/(c1*g1*d*d);q2=t*k2/(c2*g2*d*d);q3=t*k3*16/(c3*g3*d*d*100);q4=t*9*k
4/(c4*g4*d*d*625); %q 表示热传导公式系数
T=54010;X=33;                             %行数和列数
a=zeros(T,X);
a(1,1)=37
for i=2:1:33
    a(1,i)=37;
end
n1=2;                                       %区间长度
n2=22;
n3=31;
n4=33;
for j=2:1:54010
    for i=2:1:n1
        a(j,i)=a(j-1,i)+q1*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n1+1:1:n2
        a(j,i)=a(j-1,i)+q2*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n2+1:1:n3
        a(j,i)=a(j-1,i)+q3*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n3+1:1:32
        a(j,i)=a(j-1,i)+q4*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    a(j,1)=(0.1*a(j,2)+0.9*75);
    a(j,n1)=(k1*a(j,n1-1)+k2*a(j,n1+1))/(k1+k2);
    a(j,n2)=(k2*a(j,n2-1)+k3*a(j,n2+1))/(k2+k3);
    a(j,n3)=(k3*a(j,n3-1)+k4*a(j,n3+1))/(k3+k4);
    a(j,n4)=(k3*a(j,n4-1)+0.011525*37)/(k3+0.011525);
end
```

```
[x,t]=meshgrid(1:33,1:54010);
%surf(x,t,a);
mesh(x,t,a)
xlabel('t'),ylabel('x'),zlabel('a');
title('温度分布图');
```

边界温度图代码:

```
x=xlsread('A.xlsx',2,'A1:A5401');
y=xlsread('A.xlsx',2,'B1:B5401');
g1=300;g2=862;g3=74.2;g4=1.18;           %g 表示密度
c1=1377;c2=2100;c3=1726;c4=1005;         %c 表示比热容
k1=0.082;k2=0.37;k3=0.045;k4=0.028;     %k 表示热传导
m1=0.6;m2=6;m3=3.6;m4=5;                %m 表示厚度
d=3*10.^-4;                              %d 表示单位步长
t=0.1;                                    %t 表示时间步长
q1=t*k1/(c1*g1*d*d);q2=t*k2/(c2*g2*d*d);q3=t*k3*16/(c3*g3*d*d*100);q4=t*9*k
4/(c4*g4*d*d*625);   %q 表示热传导公式系数
T=54010;X=33;                             %行数和列数
a=zeros(T,X);
a(1,1)=37
for i=2:1:33
    a(1,i)=37;
end
n1=2;                                       %区间长度
n2=22;
n3=31;
n4=33;
for j=2:1:54010
    for i=2:1:n1
        a(j,i)=a(j-1,i)+q1*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n1+1:1:n2
        a(j,i)=a(j-1,i)+q2*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n2+1:1:n3
        a(j,i)=a(j-1,i)+q3*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n3+1:1:32
        a(j,i)=a(j-1,i)+q4*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    a(j,1)=(0.1*a(j,2)+0.9*75);
    a(j,n1)=(k1*a(j,n1-1)+k2*a(j,n1+1))/(k1+k2);
    a(j,n2)=(k2*a(j,n2-1)+k3*a(j,n2+1))/(k2+k3);
```

```

a(j,n3)=(k3*a(j,n3-1)+k4*a(j,n3+1))/(k3+k4);
a(j,n4)=(k3*a(j,n4-1)+0.011525*37)/(k3+0.011525);
end
[x,t]=meshgrid(1:33,1:54010);
%surf(x,t,a);
mesh(x,t,a)
xlabel('t'),ylabel('x'),zlabel('a');
title('温度分布图');
plot(a(:,33))
hold on
plot(a(:,1))
hold on
plot(a(:,3))
hold on
plot(a(:,23))
hold on
plot(a(:,31))
hold off

```

时间与温度关系一维图:

```

x=xlsread('A.xlsx',2,'A1:A5401');
y=xlsread('A.xlsx',2,'B1:B5401');
g1=300;g2=862;g3=74.2;g4=1.18;      %g 表示密度
c1=1377;c2=2100;c3=1726;c4=1005;    %c 表示比热容
k1=0.082;k2=0.37;k3=0.045;k4=0.028; %k 表示热传导
m1=0.6;m2=6;m3=3.6;m4=5;          %m 表示厚度
d=3*10.^-4;                        %d 表示单位步长
t=0.1;                              %t 表示时间步长
q1=t*k1/(c1*g1*d*d);q2=t*k2/(c2*g2*d*d);q3=t*k3*16/(c3*g3*d*d*100);q4=t*9*k
4/(c4*g4*d*d*625); %q 表示热传导公式系数
T=54010;X=33;                       %行数和列数
a=zeros(T,X);
a(1,1)=37
for i=2:1:33
    a(1,i)=37;
end
n1=2;                                %区间长度
n2=22;
n3=31;
n4=33;
for j=2:1:54010
    for i=2:1:n1
        a(j,i)=a(j-1,i)+q1*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
end

```



```

end
for i=n1+1:1:n2
    a(j,i)=a(j-1,i)+q2*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
end
for i=n2+1:1:n3
    a(j,i)=a(j-1,i)+q3*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
end
for i=n3+1:1:32
    a(j,i)=a(j-1,i)+q4*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
end
a(j,1)=(0.1*a(j,2)+0.9*75);
a(j,n1)=(k1*a(j,n1-1)+k2*a(j,n1+1))/(k1+k2);
a(j,n2)=(k2*a(j,n2-1)+k3*a(j,n2+1))/(k2+k3);
a(j,n3)=(k3*a(j,n3-1)+k4*a(j,n3+1))/(k3+k4);
a(j,n4)=(k3*a(j,n4-1)+0.011525*37)/(k3+0.011525);
end
[x,t]=meshgrid(1:33,1:54010);
%surf(x,t,a);
mesh(x,t,a)
xlabel('t'),ylabel('x'),zlabel('a');
title('温度分布图');
plot(a(:,33))

```

空间与温度关系一维图:

```

x=xlsread('A.xlsx',2,'A1:A5401');
y=xlsread('A.xlsx',2,'B1:B5401');
g1=300;g2=862;g3=74.2;g4=1.18;           %g 表示密度
c1=1377;c2=2100;c3=1726;c4=1005;         %c 表示比热容
k1=0.082;k2=0.37;k3=0.045;k4=0.028;     %k 表示热传导
m1=0.6;m2=6;m3=3.6;m4=5;                %m 表示厚度
d=3*10.^-4;                              %d 表示单位步长
t=0.1;                                    %t 表示时间步长
q1=t*k1/(c1*g1*d*d);q2=t*k2/(c2*g2*d*d);q3=t*k3*16/(c3*g3*d*d*100);q4=t*9*k
4/(c4*g4*d*d*625); %q 表示热传导公式系数
T=54010;X=33;                             %行数和列数
a=zeros(T,X);
a(1,1)=37
for i=2:1:33
    a(1,i)=37;
end
n1=2;                                     %区间长度
n2=22;
n3=31;

```

```

n4=33;
for j=2:1:54010
    for i=2:1:n1
        a(j,i)=a(j-1,i)+q1*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n1+1:1:n2
        a(j,i)=a(j-1,i)+q2*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n2+1:1:n3
        a(j,i)=a(j-1,i)+q3*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n3+1:1:32
        a(j,i)=a(j-1,i)+q4*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    a(j,1)=(0.1*a(j,2)+0.9*75);
    a(j,n1)=(k1*a(j,n1-1)+k2*a(j,n1+1))/(k1+k2);
    a(j,n2)=(k2*a(j,n2-1)+k3*a(j,n2+1))/(k2+k3);
    a(j,n3)=(k3*a(j,n3-1)+k4*a(j,n3+1))/(k3+k4);
    a(j,n4)=(k3*a(j,n4-1)+0.011525*37)/(k3+0.011525);
end
[x,t]=meshgrid(1:33,1:54010);
%surf(x,t,a);
mesh(x,t,a)
xlabel('空间'),ylabel('温度');
plot(a(5401,:))

```

误差分析:

```

x=xlsread('A.xlsx',2,'A1:A5401');
y=xlsread('A.xlsx',2,'B1:B5401');
g1=300;g2=862;g3=74.2;g4=1.18;           %g 表示密度
c1=1377;c2=2100;c3=1726;c4=1005;         %c 表示比热容
k1=0.082;k2=0.37;k3=0.045;k4=0.028;     %k 表示热传导
m1=0.6;m2=6;m3=3.6;m4=5;                %m 表示厚度
d=3*10.^-4;                              %d 表示单位步长
t=0.1;                                    %t 表示时间步长
q1=t*k1/(c1*g1*d*d);q2=t*k2/(c2*g2*d*d);q3=t*k3*16/(c3*g3*d*d*100);q4=t*9*k
4/(c4*g4*d*d*625); %q 表示热传导公式系数
T=54010;X=33;                             %行数和列数
a=zeros(T,X);
a(1,1)=37
for i=2:1:33
    a(1,i)=37;
end

```

```

n1=2; %区间长度
n2=22;
n3=31;
n4=33;
for j=2:1:54010
    for i=2:1:n1
        a(j,i)=a(j-1,i)+q1*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n1+1:1:n2
        a(j,i)=a(j-1,i)+q2*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n2+1:1:n3
        a(j,i)=a(j-1,i)+q3*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n3+1:1:32
        a(j,i)=a(j-1,i)+q4*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    a(j,1)=(0.1*a(j,2)+0.9*75);
    a(j,n1)=(k1*a(j,n1-1)+k2*a(j,n1+1))/(k1+k2);
    a(j,n2)=(k2*a(j,n2-1)+k3*a(j,n2+1))/(k2+k3);
    a(j,n3)=(k3*a(j,n3-1)+k4*a(j,n3+1))/(k3+k4);
    a(j,n4)=(k3*a(j,n4-1)+0.011525*37)/(k3+0.011525);
end
[x,t]=meshgrid(1:33,1:54010);
%surf(x,t,a);
mesh(x,t,a)
xlabel('t'),ylabel('x'),zlabel('a');
title('温度分布图');
b=a(1:10:54010,:);
y=y(1:1:5399,2:2);
y(5400,1)=48.08;
y(5401,1)=48.08;
y1=b(:,33);
e=zeros(5401,1);
for i=1:5401
    e(i)=abs((y1(i)-y(i))/y(i));
end
z=0;
for i=1:5401
    z=e(i)^2+z;
end
z=z/5401

```

问题二代码:

最优厚度:

```
x=xlsread('A.xlsx',2,'A1:A5401');
y=xlsread('A.xlsx',2,'B1:B5401');
for m=2;82
g1=300;g2=862;g3=74.2;g4=1.18;          %g 表示密度
c1=1377;c2=2100;c3=1726;c4=1005;        %c 表示比热容
k1=0.082;k2=0.37;k3=0.045;k4=0.028;    %k 表示热传导
m1=0.6*10.^-3;m3=3.6*10.^-3;m4=5*10.^-3; %m 表示厚度

d1=3*10.^-4;d2=3*10.^-4;d3=4*10.^-4;d4=2.5*10.^-3; %d 表示单位步长
t=0.1; %t 表示时间步长
q1=t*k1/(c1*g1*d1*d1);q2=t*k2/(c2*g2*d2*d3);q3=t*k3/(c3*g3*d3*d3);q4=t*k4/(c4*g4*d4*d4); %q 表示热传导公式系数
n1=ceil(m1/d1); %区间长度
n2=ceil(n1+m);
n3=ceil(n2+m3/d3);
n4=ceil(n3+m4/d4);
T=54010;X=n4; %行数和列数
a=zeros(T,X);
a(1,1)=37;
for i=2:1:X
    a(1,i)=37;
end

for j=2:1:54010
    for i=2:1:n1
        a(j,i)=a(j-1,i)+q1*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n1+1:1:n2
        a(j,i)=a(j-1,i)+q2*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n2+1:1:n3
        a(j,i)=a(j-1,i)+q3*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    for i=n3+1:1:X-1
        a(j,i)=a(j-1,i)+q4*(a(j-1,i+1)-2*a(j-1,i)+a(j-1,i-1));
    end
    a(j,1)=(0.1*a(j,2)+0.9*75);
    a(j,n1)=(k1*a(j,n1-1)+k2*a(j,n1+1))/(k1+k2);
    a(j,n2)=(k2*a(j,n2-1)+k3*a(j,n2+1))/(k2+k3);
    a(j,n3)=(k3*a(j,n3-1)+k4*a(j,n3+1))/(k3+k4);
    a(j,n4)=(k3*a(j,n4-1)+0.011525*37)/(k3+0.011525);
```

```

end
[x,t]=meshgrid(1:33,1:54010);
surf(x,t,a);
mesh(x,t,a)
xlabel('时间'),ylabel('距离'),zlabel('温度');
title('温度分布图');
b=a(1:10:54010,:);
for i=1:5401
    if b(i,X)<44
        i
    end
end
b(5401,X)
end

```

厚度与时间关系图:

```

x=[14.7 14.4 14.1 13.8 13.5 13.2 12.9 12.6 12.3 12.0];
y=[3525 2778 2415 2162 1964 1800 1659 1535 1424 1324];
plot(x,y)

```

拟合出最优厚度:

```

x=[14.7 14.4 14.1 13.8 13.5 13.2 12.9 12.6 12.3 12.0];
y=[3525 2778 2415 2162 1964 1800 1659 1535 1424 1324];
y1=3300;
x=interp1(y,x,y1,'spline')

```