中学数学奥林匹克系列专题

绝对不等式 200例

张宁生 田利英 编著

新 华 出 版 社

中学数学奥林匹克系列专题

绝对不等式200例

张宁生　田利英　编著

新华出版社

引 言

有差异就存在着不等，因此不等式是大量的、绝对的，而等式却显得微乎其微。今天，关于不等式的探讨与应用几乎渗透到涉及数量关系的数学各个领域。正是基于此点，国内外中学生数学竞赛中，不等式的问题才经常出现。

本书是作者在北京市东城区、海淀区数学奥林匹克学校等处用过的讲稿的基础上整理汇编而成。

目　录

引言

§1　基本知识…………………………………………（1）

§2　基本不等式的应用……………………………（11）

§3　含绝对值符号的不等式………………………（21）

§4　利用反证法与数学归纳法……………………（27）

§5　算术——几何平均不等式……………………（37）

§6　柯西不等式………………………………………（46）

§7　排序不等式………………………………………（58）

§8　切比雪夫不等式…………………………………（63）

§9　幂平均不等式……………………………………（75）

§10　几何不等式………………………………………（79）

§11　三角函数不等式…………………………………（89）

练习题解答……………………………………………（97）

§1 基本知识

1 不等符号

$$<,\ >,\ \leqslant,\ \geqslant,\ \neq,\ \ngtr,\ \ngeqslant,\ \nless,\ \nleqslant$$

例1 若$a\in R$，则

(1) $a^2\geqslant 0$

(2) $|a|\geqslant 0$

(3) $\sqrt[2n]{a^2}=\sqrt[n]{|a|}\geqslant 0$

(4) $a^2-2a+2=(a-1)^2+1\geqslant 1$

(5) $-2a^2+6a+16=20\frac{1}{2}-2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\leqslant 20\frac{1}{2}$

2 比较法

(1) $a-b>0\Longleftrightarrow a>b$

(2) $a-b=0\Longleftrightarrow a=b$

(3) $a-b<0\Longleftrightarrow a<b$

例2 若a、$b\in R$，则$a^2+b^2\geqslant 2ab$。其中等号当且仅当

$a=b$时成立。

证 $\because$ $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$

$\therefore$ $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 且

$(a-b)^2=0\Longleftrightarrow a-b=0\Longleftrightarrow a=b$

例3 若a、$b\in R^+$，则$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$。其中等号当且仅当$a=b$时成立。

证 $\because$ $\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$

$\therefore$ $\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$ 且当a、$b\in R^+$时

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0\Longleftrightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}=0\Longleftrightarrow\sqrt{a}=\sqrt{b}$

$\Longleftrightarrow a=b$

练习 1 已知$a>0$，求证$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$

（山西省1978年高中数学竞赛试题）

例4 若a、b、$m\in R^+$且$a<b$，则

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$$

证 $\because$ $\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{(a+m)b-a(b+m)}{b(b+m)}$

$$= \frac{mb - ma}{b(b+m)} = \frac{m(b-a)}{b(b+m)} = \frac{(+)(+)}{(+)(+)} > 0$$

$$\therefore \quad \frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$$

例5　若a、$b \in R^+$，则

$(a+b)(a^4+b^4) \geqslant (a^2+b^2)(a^3+b^3)$

（苏联基辅第49届数学竞赛试题）

证　$\because\ (a+b)(a^4+b^4)-(a^2+b^2)(a^3+b^3)$

$= a^4b + ab^4 - a^2b^3 - a^3b^2$

$= ab(a-b)^2(a+b) \geqslant 0$

$\therefore\quad (a+b)(a^4+b^4) \geqslant (a^2+b^2)(a^3+b^3)$

例6　柯西（Cauchy）不等式

若　a_k，$b_k \in R$（$k=1$，2，$\cdots$，n），则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

其中等号当且仅当a_k/b_k为一常数时成立

说明：特别规定当a_k、b_k之一为零，则另一个也为零。

证　$\because$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \sum_{j=1}^{n} a_j b_j + \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_k^2 b_j^2 - 2a_k b_k a_j b_j + a_j^2 b_k^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_k b_j - a_j b_k\right)^2 \geqslant 0$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$ 且

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_k b_j - a_j b_k\right)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow a_k b_j - a_j b_k = 0 \ (k,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_j}{b_j} \ (k,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

练习2 若$a_i>0$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$），$m\in N$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m-1}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m}\right)^2$$

例7 切比雪夫(Чебышев)不等式

设$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

式中等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时成立。

证 $\because\ n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=1}^{n}b_j$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_kb_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k-a_kb_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_jb_j-a_jb_k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k+a_jb_j-a_kb_j-a_jb_k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_j)(b_k-b_j)\geqslant 0$$

$$\therefore\quad n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\geqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k$$

说明：切比雪夫不等式曾于1963年—1964年波兰数学竞赛中出现过

若 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，$b_1<b_2<\cdots<b_n$，$n\geqslant 2$，$n\in N$，则

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

3　比值法

若$b>0$，则

（1）$a/b>1 \Longleftrightarrow a>b$

（2）$a/b=1 \Longleftrightarrow a=b$

（3）$a/b<1 \Longleftrightarrow a<b$

例8　比较$\sqrt{3}$和$2^{0.6}$的大小

（沈阳市1978年数学竞赛试题）

分析：为此只要比较$(\sqrt{3})^{10}=3^5$与$(2^{0.6})^{10}=2^6$的大小即可。

解　$\because \dfrac{(\sqrt{3})^{10}}{(2^{0.6})^{10}}=\dfrac{3^5}{2^6}=\dfrac{243}{64}>1$

$\therefore \quad (\sqrt{3})^{10}>(2^{0.6})^{10}$

故　$\sqrt{3}>2^{0.6}$

练习3　求证　$16^{18}>18^{16}$

例9　若a、$b\in R^+$且$a\neq b$，则$a^ab^b>a^bb^a$

证　不失一般性，假定$a>b$。

$\because \quad \dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$

$\therefore \quad a^ab^b>a^bb^a$

练习4　若a、$b\in R^+$则

$$\frac{a+b}{2} \geqslant (a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$$

例10 若a、b、$c \in R^+$，则

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$$

（1974年美国第三届数学竞赛试题）

证 不失一般性，假定$a \geqslant b \geqslant c$

$$\because \quad \frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}}$$

$$= a^{\frac{a-b}{3}+\frac{a-c}{3}} \, b^{\frac{b-a}{3}+\frac{b-c}{3}} \, c^{\frac{c-a}{3}+\frac{c-b}{3}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}} \geqslant 1$$

$$\therefore \quad a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$$

练习5 若$a>b>c>0$，则

$$a^{2a} b^{2b} c^{2c} > a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$$

（上海市第七届中学生数学竞赛试题）

练习6 若$a_i \in R^+ (i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

4 分析与综合

例11 求证 $2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}>0$

分析：欲证 $2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}>0$成立

只要证 $2>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ 成立

只要证 $4>2+\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 成立

只要证 $2>\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 成立

只要证 $4>2+\sqrt{3}$ 成立

只要证 $2>\sqrt{3}$ 成立

只要证 $4>3$ 成立

但上式显然成立

综合 $4>3\Longrightarrow 2>\sqrt{3}\Longrightarrow 4>2+\sqrt{3}$

$\Longrightarrow 2>\sqrt{2+\sqrt{3}}\Longrightarrow 4>2+\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\Longrightarrow 2>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\Longrightarrow 2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}>0$

例12 若$k\in N$，则

$$2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1}$$

分析：(1) 欲证 $\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1}$

只要证 $1<2k-2\sqrt{k-1}\ \sqrt{k}$

只要证 $2\sqrt{k-1}\ \sqrt{k}<2k-1$

只要证 $4(k-1)k<(2k-1)^2$

只要证 $4k^2-4k<4k^2-4k+1$

但这是显然的

(2) 欲证 $2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}$

只要证 $2\sqrt{k+1}\ \sqrt{k}-2k<1$

只要证 $2\sqrt{k+1}\ \sqrt{k}<2k+1$

只要证 $4(k+1)k<(2k+1)^2$

只要证 $4k^2+4k<4k^2+4k+1$。但这是显然的。

练习7 求证 $(0.99)^{99}>(1.01)^{-101}$

练习8 求证 $\left(\frac{1}{\sin^4\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^4\theta}-1\right)\geqslant 9$

5 扩大与缩小

例13 若 $n>1$，$n\in N$，则

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>1$$

(1937年—1938年匈牙利
数学竞赛试题)

证 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}$

$$>\frac{1}{n}+\underbrace{\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}_{(n^2-n)\text{个}}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1$$

例14 若a、b、c、$d\in R^+$ 设

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$$

则 $1<S<2$

证 (1) $S<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}$

$$=\frac{a+b}{a+b}+\frac{c+d}{c+d}=2$$

(2) $S>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}$

$$+\frac{d}{a+b+c+d}=\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}=1$$

故$1<S<2$

练习9 比较$\sqrt[8]{8!}$和$\sqrt[9]{9!}$哪个大?

练习10 若$n>2$,则$2\cdot4\cdot6\cdots2n<(n+1)^n$

练习11　设$0\leqslant a$、b、$c\leqslant 1$，则

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1$$

（第9届美国数学竞赛试题）

§2 基本不等式的应用

1　若a、$b\in R$，则$a^2+b^2\geqslant 2ab$。其中等号当且仅当$a=b$时成立（见§1例2）

例15　若a、b、$c\in R$，则

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$$

证　$\because$ $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ca$

$\therefore$ $(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)\geqslant 2ab+2bc+2ca$

即　$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$

故　$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$

例16　若a、b、$c\in R$，则

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$$

证 $\because\quad a^2b^2+c^2a^2\geqslant 2ab\cdot ca=2a^2bc$

$$b^2c^2+a^2b^2\geqslant 2ab^2c$$

$$c^2a^2+b^2c^2\geqslant 2abc^2$$

将上面三个不等式相加，得

$$2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\geqslant 2abc(a+b+c)$$

故 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$

练习12 若a、b、$c\in R$，则

$$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$$

例17 设a、b、c为任意三角形三边之长，且$p=a+b+c$，$S=ab+bc+ca$，则$3S\leqslant p^2<4S$

（天津市1978年数学竞赛试题）

证 (1) $\because\quad a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$

$\therefore\quad 3S=3(ab+bc+ca)\leqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$=(a+b+c)^2=p^2$$

(2) $\because\quad |a-b|<c\quad\therefore\quad a^2-2ab+b^2<c^2$

同理 $b^2-2bc+c^2<a^2$，$a^2-2ca+c^2<b^2$

故 $2(a^2+b^2+c^2)-2ab-2bc-2ca<a^2+b^2+c^2$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca<4(ab+bc+ca)$$

即 $(a+b+c)^2<4S$，故$p^2<4S$

因此 $3S\leqslant p^2<4S$

例18　若a、b、$c\in R^+$，则$a+b+c\leqslant\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$

（1962年—1963年波兰数学竞赛试题）

证　$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$\geqslant abc(a+b+c)$

从而　$\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}\geqslant a+b+c$

练习13　若a、b、$c\in R$且$a^2+b^2+c^2=1$，则

$$-\frac{1}{2}\leqslant ab+bc+ca\leqslant 1$$

（1909年—1911年匈牙利
数学竞赛试题）

2　若a、$b\in R^+$则 $\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$。其中等号当且仅当$a=b$时成立（见§1例3）

说明：这也是北京市昌平县1978年数学竞赛试题。

例19　若a、b、$c\in R^+$，则

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$$

证　$\because$　$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$，$\therefore$　$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

同理　$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$，$c+a\geqslant 2\sqrt{ca}$

故 $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8abc$

例20 若a、b、$c\in R^{+}$且$a+b+c=1$，则

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8$$

（天津市河西区1978年数学竞赛试题）

分析 欲证上面不等式成立

只要证 $\dfrac{1-a}{a}\ \dfrac{1-b}{b}\ \dfrac{1-c}{c}\geqslant 8$ 成立

只要证 $(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$ 成立

只要证 $(b+c)(c+a)(a+b)\geqslant 8abc$

但最后一个不等式即例19。

练习14 若a、$b\in R^{+}$，则

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\geqslant 8a^3b^3$$

练习15 若a、b、$c\in R^{+}$，则

$$(a+b)^4(a^2+b^2)\geqslant 32a^3b^3$$

练习16 若a、b、$c\in R^{+}$，则

$$(a+1)(b+1)(c+a)^3(b+c)^3\geqslant 256a^2b^2c^3$$

例21 若$x\in R$，则$\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$

证 $\because$ $\dfrac{1+x^4}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}+x^2\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{x^2}\cdot x^2}=2$

$\therefore$ $\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$

例22　若$x\in R$，则$\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$。其中等号当且仅当$x=0$时成立。

证　$\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\geqslant 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=2$.其中等号当且仅当$\sqrt{x^2+1}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\Longleftrightarrow x^2+1=1\Longleftrightarrow x^2=0\Longleftrightarrow x=0$

时成立。

练习17　若$a>1$，则$\log_{10}a+\log_a 10\geqslant 2$

练习18　若a_1，…，$a_n\in R^+$且$a_1\cdots a_n=1$，则

$(1+a_1)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n$

练习19　若$x>0$，$x\neq 1$，则

$(1+x^n)(1+x)^n>2^{n+1}x^n$

练习20　若$a>0$，$a\neq 1$，则

$$\frac{1+a}{2}\cdot\frac{1+a^2}{2}\cdot\frac{1+a^3}{2}\cdots\frac{1+a^n}{2}>a^{\frac{1}{4}(n^2+n)}$$

例23　若a、b、$c\in R^+$，则

$(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)\geqslant 16abc$

证　$(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)$

$=(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)$

$\geqslant 2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{bc}=16abc$

例24　若a、b、$c\in R$且$a+b+c=1$，则

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant 5$$

证 $\because \sqrt{4a+1}=\sqrt{(4a+1)\cdot 1}\leqslant\frac{(4a+1)+1}{2}=2a+1$

$\sqrt{4b+1}\leqslant 2b+1$，$\sqrt{4c+1}\leqslant 2c+1$

$\therefore$ $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant(2a+1)$

$+(2b+1)+(2c+1)$

$=2(a+b+c)+3=2\times 1+3=5$

例25 若$x>0$，$y>0$，则$\sqrt{xy}\geqslant\frac{2xy}{x+y}$

证 设$a>0$，$b>0$，则$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$

令 $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y}$，则

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}$$

即 $\frac{x+y}{2xy}\geqslant\frac{1}{\sqrt{xy}}$

故 $\sqrt{xy}\geqslant\frac{2xy}{x+y}$

例26 若$x>0$，$y>0$且$x+y=1$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 4$

证 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}$

$=4$

例27 若a、b、c、$d\in R^{+}$则

$\sqrt[4]{abcd}\leqslant\frac{1}{4}(a+b+c+d)$

证 $\because$ $\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$，$\frac{1}{2}(c+d)\geqslant\sqrt{cd}$

$$\therefore\quad \frac{\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)}{2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{1}{2}(c+d)}$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$$

即 $\frac{1}{4}(a+b+c+d)\geqslant\sqrt[4]{abcd}$

例28 若a、b、c是$\triangle ABC$的三条边，则

$$(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)\leqslant abc$$

证 设$2p=a+b+c$，则

$a+b-c=2(p-c)$，$c+a-b=2(p-b)$，$b+c-a=2(p-a)$

$$\therefore\quad \sqrt{(p-a)(p-b)}\leqslant\frac{(p-a)+(p-b)}{2}$$

$$=\frac{2p-a-b}{2}=\frac{c}{2}$$

同理 $\sqrt{(p-b)(p-c)}\leqslant\frac{a}{2}$，$\sqrt{(p-c)(p-a)}\leqslant\frac{b}{2}$

将上面三个不等式相乘，得

$$(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\frac{1}{8}abc$$

$$2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)\leqslant abc$$

故 $(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)\leqslant abc$

例29 设a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、$c_2\in R$，且$a_1a_2>0$，$a_1c_1\geqslant b_1^2$，$a_2c_2\geqslant b_2^2$，则

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)\geqslant(b_1+b_2)^2$$

（1939年—1941年匈牙利数学竞赛试题）

证　显然a_1、a_2、c_1、c_2同号

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)=a_1c_1+a_2c_2+a_1c_2+a_2c_1$$

$$\geqslant b_1^2+b_2^2+a_1c_2+a_2c_1$$

$$\geqslant b_1^2+b_2^2+2\sqrt{a_1c_2a_2c_1}$$

$$\geqslant b_1^2+b_2^2+2\sqrt{b_1^2b_2^2}$$

$$=b_1^2+b_2^2+2|b_1|\ |b_2|=(|b_1|+|b_2|)^2\geqslant(b_1+b_2)^2$$

例30　设a、b、c是一个三角形的三边长，

$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，r是三角形内切圆半径，则

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}$$

（美国第27届大学生数学竞赛题）

证　$\because \frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{(p-a)^2}\frac{1}{(p-b)^2}}$

$$=\frac{2}{(p-a)(p-b)}$$

$$\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{2}{(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{1}{(p-c)^2}+\frac{1}{(p-a)^2}\geqslant\frac{2}{(p-c)(p-a)}$$

将上面的三个不等式相加，得

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{(p-a)(p-b)}$$

$$+\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}$$

$$=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$\because\quad r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$\therefore\quad \dfrac{1}{(p-a)^2}+\dfrac{1}{(p-b)^2}+\dfrac{1}{(p-c)^2}\geqslant\dfrac{1}{r^2}$

例31　已知矩形的一边长为1cm，两条互相垂直的直线将它分为4个小矩形，其中3个小矩形的面积不小于$1cm^2$，第4个小矩形的面积不小于$2cm^2$，试求矩形另一边的最小值。

（苏联数学竞赛题）

解　设3个小矩形不小于1cm的面积分别为s_1，s_2，s_3

设　第4个小矩形不小于$2cm^2$的面积为s_4

则　$s_i\geqslant1(i=1,2,3)$，$s_4\geqslant2$

由图1　知$s_1s_4=ac\cdot bd=ad\cdot bc=s_2s_3$

$\therefore\quad s_2+s_3\geqslant2\sqrt{s_2s_3}=2\sqrt{s_1s_4}\geqslant2\sqrt{2}$

从而　$s_1+s_2+s_3+s_4\geqslant1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$

即　$1\times(a+b)\geqslant3+2\sqrt{2}$

其中　等号当且仅当$s_2=s_3$、$s_2s_3=s_1s_4=2$时成立

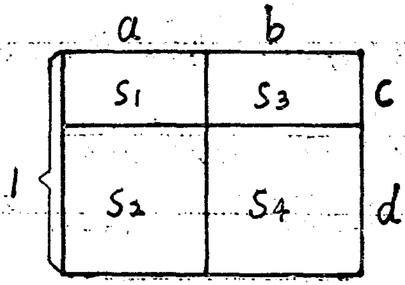

图1

即 $s_2 = s_3 = \sqrt{2}$

因此 $s_1 = 1$，$s_4 = 2$时成立。

故另一边的最小值是$a + b = 3 + 2\sqrt{2}$。

例32 设变量x、y、z、t满足不等式

$$1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant t \leqslant 100$$

试求$\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{t}$能达到的最小值

（苏联竞赛题）

解 由已知条件知

$$\frac{x}{y} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}, \quad \frac{z}{t} \geqslant \frac{z}{100}$$

从而有$\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{t} \geqslant \dfrac{1}{z} + \dfrac{z}{100} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{z}{100}} = \dfrac{1}{5}$

其中等号当且仅当$x=1$，$y=z$，$t=100$，$\frac{1}{z}=\frac{z}{100}$时成立 即

$x=1$，$y=z=10$，$t=100$时成立 此时

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t}=\frac{1}{5} \qquad \text{为最小。}$$

§3 含绝对值符号的不等式

1 若 a、$b\in R$，则 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$。其中等号当且仅当$ab\geqslant0$时成立。

证 (1) 当$a+b\geqslant0$时

$$|a+b|=a+b\leqslant|a|+|b|$$

(2) 当$a+b<0$时

$$|a+b|=-(a+b)=(-a)+(-b)\leqslant|a|+|b|$$

练习21 若$a_i\in R(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

例33 若a、$b\in R$ 则$|a+b|+|a-b|\geqslant2|a|$

证 $|a+b|+|a-b|\geqslant|(a+b)+(a-b)|$ (§3.1)

$$=|2a|=2|a|$$

例34 若$|a_n-A|<\varepsilon$，则$|a_n|<|A|+\varepsilon$

证　$|a_n| = |(a_n - A) + A| \leqslant |a_n - A| + |A|$ (§3.1)

$< \varepsilon + |A|$

例35　若$x \in R$，$x_i \in R(i = 1, 2, \cdots, n)$则

$|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$

证　$\because$　$|x| = |(x + x_1 + \cdots + x_n) - (x_1 + \cdots + x_n)|$

$\leqslant |x + x_1 + \cdots + x_n| + |-(x_1 + \cdots + x_n)|$

$= |x + x_1 + \cdots + x_n| + |x_1 + \cdots + x_n|$

$\leqslant |x + x_1 + \cdots + x_n| + (|x_1| + \cdots + |x_n|)$

$\therefore$　$|x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|) \leqslant |x + x_1 + \cdots + x_n|$

2　若a、$b \in R$，则$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$

证(1)　$\because$　$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$

$\therefore$　$|a| - |b| \leqslant |a - b|$

(2)　$\because$　$|b| - |a| \leqslant |b - a| = |a - b|$

$\therefore$　$|a| - |b| \geqslant -|a - b|$

综合(1)、(2)知

$-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b|$

故　$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$

例36　若a、$b \in R$，则$|a + b| - |a - b| \leqslant 2|b|$

证　$|a + b| - |a - b| \leqslant |(a + b) - (a - b)|$ (§3.2)

$= |2b| = 2|b|$

练习22　若$a \geqslant b \geqslant 0$，则$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a - b|}$

练习23　若a、$b \in R$，则$||a| - |b|| \leqslant |a + b|$

练习24　若a、b、$c \in R$，则$|a - b| \leqslant |a - c| + |c - b|$

并求等号成立的条件。

练习25 若a、b、$c\in R$，则$\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right|\leqslant|a-b|$其中等号当且仅当$a=b$时成立

练习26 若$a\in R$。试确定$\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$的所有可能值

（1978年罗马尼亚数学竞赛题）

练习27 若$|a|<1$，$|b|<1$，则$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$

练习28 若$n\in N$，则$|\sin nt|\leqslant n|\sin t|$

例37 $|a|+|b|+|c|-|b+c|-|c+a|-|a+b|$

$+|a+b+c|\geqslant 0$（$Hlawka$）

证 (1) $\because |b|+|c|\geqslant|b+c|$

$\therefore\quad |b|+|c|-|b+c|\geqslant 0$

同理可证 $|c|+|a|-|c+a|\geqslant 0$，$|a|+|b|-|a+b|\geqslant 0$

(2) $\because |b+c|=|(-a)+a+b+c|$

$\leqslant|-a|+|a+b+c|=|a|+|a+b+c|$

$\therefore\quad |a|+|a+b+c|-|b+c|\geqslant 0$

同理可证

$|b|+|a+b+c|-|c+a|\geqslant 0$

$|c|+|a+b+c|-|a+b|\geqslant 0$

(3) $\because(|a|+|b|+|c|-|b+c|-|c+a|-|a+b|$

$$+|a+b+c|)(|a|+|b|+|c|+|a+b+c|)$$

$$=(|b|+|c|-|b+c|)(|a|+|a+b+c|-|b+c|)+(|c|+|a|-|c+a|)(|b|+|a+b+c|-|c+a|)+(|a|+|b|-|a+b|)(|c|+|a+b+c|-|a+b|)\geqslant 0$$

故不等式成立

例38 *Hlawka*不等式不能对$n\geqslant 4$拓广成

$$\sum_{i=1}^{m}|a_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i+a_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|a_i+a_j+a_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|a_1+a_2+\cdots+a_n|\geqslant 0$$

(*Luxemburg*)

解　例如$n=4$。设$a_1=a_2=a_3=1$，$a_4=-2$时，拓广的不等式不成立。这是因为：

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=5$$

$$|a_1+a_2|+|a_1+a_3|+|a_1+a_4|+|a_2+a_3|+|a_2+a_4|+|a_3+a_4|$$

$$=2+2+1+2+1+1=9$$

$$|a_1+a_2+a_3|+|a_1+a_2+a_4|+|a_1+a_3+a_4|+|a_2+a_3+a_4|$$

$$=3+0+0+0=3$$

$$|a_1+a_2+a_3+a_4|=1$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{4}|a_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}|a_i+a_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}|a_i+a_j+a_k|-|a_1+a_2+a_3+a_4|=5-9+3-1=-2<0$$

例39 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

证 $\because(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)^2$

$=|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2+2|a_1||a_2|+2|a_1||a_3|$

$+\cdots+2|a_{n-1}||a_n|\geqslant|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2$

$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$\therefore\quad|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\geqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

例40 若Z_1、$Z_2\in C$，则$|Z_1+Z_2|\leqslant|Z_1|+|Z_2|$

证 (1) 设$Z_1=a_1+b_1i$，$Z_2=a_2+b_2i$

$|Z_1+Z_2|=|(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)|$

$=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$

$|Z_1|+|Z_2|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

但 $(a_1a_2+b_1b_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$ (§1.例6)

$\therefore\quad 2a_1a_2+2b_1b_2\leqslant2\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$

$(a_1^2+2a_1a_2+a_2^2)+(b_1^2+2b_1b_2+b_2^2)\leqslant(a_1^2+a_2^2)$

$+2\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}+(b_1^2+b_2^2)$

$\therefore(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2\leqslant(\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2})^2$

故$\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

即$|Z_1+Z_2|\leqslant|Z_1|+|Z_2|$

例41 若a、b、$c\in C$，则

$|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\geqslant|a+b|+|b+c|+|c+a|$

证 设$a=\alpha_1+\alpha_2i$，$b=\beta_1+\beta_2i$，$c=\gamma_1+\gamma_2i$，则

(1) $|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2$

$=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)^2$

$+(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)^2$

$$=2(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2+\alpha_1\beta_1+\beta_1\gamma_1$$

$$+\gamma_1\alpha_1+\alpha_2\beta_2+\beta_2\gamma_2+\gamma_2\alpha_2)$$

$$=(\alpha_1+\beta_1)^2+(\alpha_2+\beta_2)^2+(\beta_1+\gamma_1)^2+(\beta_2+\gamma_2)^2$$

$$+(\gamma_1+\alpha_1)^2+(\gamma_2+\alpha_2)^2$$

$$=|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2$$

(2) $2|a||b|+2|c||a+b+c|$

$$=2(|a||b|+|ca+cb+c^2|)\geqslant 2|ab+ca+cb+c^2|$$

$$=2(|b+c||c+a|)$$

同理

$$2|b||c|+2|a||a+b+c|\geqslant 2(|c+a||a+b|)$$

$$2|c||a|+2|b||a+b+c|\geqslant 2(|a+b||b+c|)$$

(3) 综合(1)、(2)得

$$(|a|+|b|+|c|+|a+b+c|)^2\geqslant(|a+b|+|b+c|$$

$$+|c+a|)^2$$

故 $|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\geqslant|a+b|+|b+c|$

$$+|c+a|$$

§4 利用反证法与数学归纳法

1 利用反证法

例42 若a、b、c、A、B、$C\in R$且$ac-b^2>0$ $aC-2bB+cA=0$，则$AC-B^2\leqslant 0$

（1909年—1911年匈牙利数学竞赛试题）

证（利用反证法）

假如$AC-B^2\nleqslant 0$，则$AC>B^2$

$$acAC>b^2B^2$$

又 $aC+cA=2bB$

$$4acAC>(2bB)^2=(aC+cA)^2$$

$$=a^2C^2+2acAC+c^2A^2$$

$$a^2C^2-2acAC+c^2A^2<0$$

$(aC-cA)^2<0$矛盾

故 $AC-B^2\leqslant 0$

例43　有两个同心圆盘，各分成 n 个相等的小格．外盘固定，内盘可以转动如图 2 所示．内外两盘小格上分别填有实数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n；且满足条件

$$a_1+a_2+\cdots+a_n<0,\quad b_1+b_2+\cdots+b_n<0$$

试证：可将内盘转动到一个适当位置，使两个盘的小格对齐，这时两个盘 n 个对应小格内数字乘积的和为一正数

（安徽省1978年数学竞赛试题）

证（利用反证法）

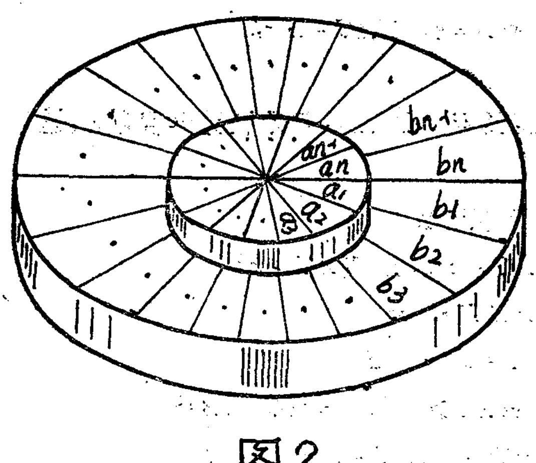

图2

如果不论内盘转到什么位置，两盘 n 个对应小格内数字乘积的和都不是正数，即

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant 0$$

$$a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1\leqslant 0$$

$$a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_nb_2\leqslant 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}\leqslant 0$$

把这n个不等式相加，得

$$a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_n)+\cdots+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_n)\leqslant 0$$

即 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\leqslant 0$ ①

但由假定知

$$a_1+a_2+\cdots+a_n<0,\quad b_1+b_2+\cdots+b_n<0$$

$\Longrightarrow(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)>0$ ②

①与②矛盾

故必有一位置，使内外盘对应小格内数字乘积之和为一正数。

2 正向归纳法

例44 若$n>4$，$n\in N$，则$2^n>n^2$

证 （利用数学归纳法）

（1）当$n=5$时，$2^5=32>25=5^2$命题成立。

（2）假定$n=k$（$k>4$）时成立，即

$$2^k>k^2$$

那么当$n=k+1$时

$$2^{k+1}=2^k\cdot 2>k^2\cdot 2=k^2+k^2$$

$>k^2+2k+1$（见练习29）

$=(k+1)^2$　　命题成立

故原不等式成立

练习29　若$n>4$，$n\in N$，则$n^2>2n+1$

例45　若 $n>2$，$n\in N$，则$\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$

（1961年—1962年波兰数学竞赛试题）

证　为此只要证$(n+1)^n<n^{n+1}$成立即可。利用数学归纳法

（1）当$n=3$时　$4^3<3^4$命题成立

（2）假定$n=k$时成立。即

$$(k+1)^k<k^{k+1}$$

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k<k$$

那么当$n=k+1$时

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}<\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$<k\cdot\frac{k+1}{k}=k+1$$

故　$(k+2)^{k+1}<(k+1)^{k+2}$　命题成立

从而原命题成立

例46　若$x_i\geqslant0$，$n\in N$，$i=1,2,\cdots,n$且$\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant\frac{1}{2}$

则

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\geqslant\frac{1}{2}$$

（1965年—1966年波兰数学竞赛试题）

证　（利用数学归纳法）

（1）当$n=1$时

由$x_1\leqslant\frac{1}{2}$得$1-x_1\geqslant\frac{1}{2}$。命题成立

（2）假定$n=k$时成立

那么当$n=k+1$时，则$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}\leqslant\frac{1}{2}$

设$x_k'=x_k+x_{k+1}$　由　$x_k\geqslant0$，$x_{k+1}\geqslant0$知$x_k'\geqslant0$

于是$x_1+x_2+\cdots+x_k'\leqslant\frac{1}{2}$。故由归纳假定知

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_k')\geqslant\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_k-x_{k+1})\geqslant\frac{1}{2}$$

但由$x_kx_{k+1}\geqslant0\Longrightarrow1-x_k-x_{k+1}\leqslant1-x_k-x_{k+1}$

$$+x_kx_{k+1}=(1-x_k)(1-x_{k+1})$$

$\therefore$　$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_k)(1-x_{k+1})$

$\geqslant(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_k-x_{k+1})\geqslant\frac{1}{2}$　命题成立

从而原命题成立。

例47　设m和n都是正整数，试证$\sqrt[n]{m}$和$\sqrt[m]{n}$中较小的一个数不超过$\sqrt[3]{3}$

证　（1）不失一般性，假定$m\leqslant n$

则 $\sqrt[n]{m}\leqslant\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[m]{n}$

从而$min\ (\sqrt[n]{m},\ \sqrt[m]{n})\leqslant\sqrt[n]{n}$

故只要证$\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[3]{3}$成立即可

而$n=1$，2时成立

（2）当$n=3$时成立

假定$n=k(k\geqslant3)$时成立。即

$\sqrt[k]{k}\leqslant\sqrt[3]{3}$ 即$k^3\leqslant3^k$

那么当$n=k+1$时

$$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1\leqslant k^3+k\cdot k^2+k\cdot k+k^2$$

$$=k^3+k^3+2k^2<k^3+k^3+k\cdot k^2=3k^3\leqslant3\cdot3^k$$

$=3^{k+1}$

∴ $\sqrt[k+1]{k+1}\leqslant\sqrt[3]{3}$成立

从而$n\geqslant3$时 有$\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[3]{3}$

故$n\in N$原命题成立

例48 贝努利（$Bernoulli$）不等式

设a_1、a_2、…、a_n皆大于-1且同号，则

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

证 （1）当$n=2$时 显然成立

（2）假定$n=k$时成立

那么当$n=k+1$时

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})$$

$$>(1+a_1+a_2+\cdots+a_k)(1+a_{k+1})$$

$$=1+a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1}$$

$$>1+a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}$$

从而原命题成立。

例49　若x_1、x_2、…、$x_n\in R^+$且$x_1x_2\cdots x_n=1$，则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n$$

其中等号当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$时成立

证　(1) 当$n=1$　时 显然成立

(2) 假定$n=k$　时 成立。即

若$x_1x_2\cdots x_k=1$　时 则$x_1+x_2+\cdots+x_k\geqslant k$,其中等号当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_k=1$　时 成立。

那么当$n=k+1$　时，分两种情况讨论

第一种情况：若$x_1=x_2=\cdots=x_k=x_{k+1}$则所有乘数都等于1

$$\therefore\quad x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{k+1}=k+1\quad 成立$$

第二种情况：若x_1、x_2、…、x_k、x_{k+1}不都是1，但由于$x_1x_2\cdots x_{k+1}=1$知，其中必有一个乘数大于1，一个乘数小于1，不妨设$x_1>1$，$x_{k+1}<1$。令$x_1x_{k+1}=y_1$

则$y_1x_2\cdots x_k=1$，由归纳假定知

$$y_1+x_2+\cdots+x_k\geqslant k$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}$$

$$=(y_1+x_2+\cdots+x_k)+x_1+x_{k+1}-x_1x_{k+1}$$

$$\geqslant k+1+(x_1+x_{k+1}-x_1x_{k+1}-1)$$

$$=k+1+(x_{k+1}-1)(1-x_1)>k+1\ 成立$$

故原命题成立。

例50　设m，$n\in N$，则

$$\frac{1}{m+n+1}-\frac{1}{(m+1)(n+1)}\leqslant\frac{4}{45}\qquad(Grüss)$$

证　设$f(m,\ n)=\dfrac{1}{m+n+1}-\dfrac{1}{(m+1)(n+1)}$，

$$k=m+n+2$$

(1) 当$k=4$　时

$$f(1,\ 1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}<\frac{4}{45}$$

当$k=5$时

$$f(1,\ 2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}<\frac{4}{45}$$

$$f(2,\ 1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}<\frac{4}{45}\qquad 均成立$$

(2) 今证$k\geqslant 6$　时正确

显然$\dfrac{1}{(m+1)(n+1)}\geqslant\dfrac{4}{(m+n+2)^2}$

$\therefore\quad f(m,\ n)\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{4}{k^2}=g(k)$下降。这是因为：

欲证$g(k)$下降

只要证$g(k+1)-g(k)\leqslant 0$

只要证$\dfrac{1}{k}-\dfrac{4}{(k+1)^2}-\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{4}{k^2}\right)\leqslant 0$

只要证$\dfrac{-1}{k(k-1)}+\dfrac{4(2k+1)}{k^2(k+1)^2}\leqslant 0$

只要证$4(2k+1)(k-1)-k(k+1)^2\leqslant 0$

只要证$k^3-6k^2+5k-4\geqslant 0$

只要证$(k-6)(k^2+5)\geqslant 0$

但这是显然的

∵　$g(k)$递减

∴　$k=6$时最大

$$g(6)=\frac{1}{6-1}-\frac{4}{6^2}=\frac{4}{45}$$

故　$f(m,n)\leqslant\frac{4}{45}$

3　逆向归纳法

例51　若$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$n\geqslant 2$，$n\in N$，则

$$A_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G_n$$

先证引理

若$a_i>0(i=1,2,\cdots,2^m)$

则　$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^m}}{2^m}\geqslant 2^m\sqrt{a_1a_2\cdots a_{2^m}}$$

(1)　当$m=1$时

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}\quad 成立$$

(2)　假定$m=k$时成立，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\geqslant 2^k\sqrt{a_1a_2\cdots a_{2^k}}$$

那么当$m=2^{k+1}$时

$$\text{左边}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\dfrac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}$$

$$\geqslant\frac{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}}{2}$$

$$\geqslant\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^{k+1}}}=\text{右边，不等式成立}$$

从而对于形如$2^m(m\in N)$时的不等式也成立

其次再证算术、几何平均不等式

对于任何一个大于1的自然数n，总存在自然数m， 使得$2^m\leqslant n<2^{m+1}$

$$\text{令}a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{2^{m+1}}=A=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}$$

$$\geqslant\sqrt[2^{m+1}]{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots a_{2^{m+1}}}$$

$$\Longrightarrow\frac{nA+\overbrace{A+\cdots+A}^{2^{m+1}-n\text{个}}}{2^{m+1}}\geqslant\sqrt[2^{m+1}]{a_1a_2\cdots a_nA^{2^{m+1}-n}}$$

$$\Longrightarrow A\geqslant\sqrt[2^{m+1}]{a_1a_2\cdots a_n}\;A^{\frac{2^{m+1}-n}{2^{m+1}}}$$

$$\Longrightarrow A^{2^{m+1}}\geqslant a_1a_2\cdots a_nA^{2^{m+1}-n}$$

$$\Longrightarrow A^n\geqslant a_1a_2\cdots a_n$$

$$\Longrightarrow A \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

其中等号当且仅当所有的$a_i(i=1,2,\cdots,n)$全相等时成立

练习30 所谓斐波那契多项式$F_n(x)$是这样定义的：

$F_n(x)=xF_{n-1}(x)+F_{n-2}(x)$，$F_1(x)=1$，$F_2(x)=x$

试对$n=3$、4、…，证明

$$F_n(x)^2 \leqslant (x^2+1)^2(x^2+2)^{n-2} \qquad (Swamy)$$

§5 算术—几何平均不等式

1 算术、几何平均不等式

若$a_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，$n\geqslant 2$，$n\in N$ 则

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G$$

证1：见§4 例51

证2：$a_1a_2\cdots a_n=G^n$

$$\therefore \left(\frac{a_1}{G}\right)\left(\frac{a_2}{G}\right)\cdots\left(\frac{a_n}{G}\right)=1$$

故由§4 例49知

$$\frac{a_1}{G}+\frac{a_2}{G}+\cdots+\frac{a_n}{G}\geqslant n$$

因此$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant G=\sqrt[n]{a_1a_1\cdots a_n}$

其中等号当且仅当$\dfrac{a_1}{G}=\dfrac{a_2}{G}=\cdots=\dfrac{a_n}{G}$时成立，即$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立

例52　求证$37^{73}>73!$

证　$\because \dfrac{1+2+\cdots+73}{73}>\sqrt[73]{1\cdot 2\cdot 3\cdots 73}$

即　$\dfrac{\frac{1}{2}\times 73\times 74}{73}>\sqrt[73]{73!}$

$$37>\sqrt[73]{73!}$$

故　$37^{73}>73!$

例53　若$n\geqslant 2$，则$n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$

证　$\because \sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}<\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\dfrac{n+1}{2}$

$\therefore\quad n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$

练习31　设$x\geqslant 0$，则

$$1+x+x^2+\cdots+x^{2n}\geqslant(2n+1)x^n$$

练习32　设 a_1，$\cdots$，$a_n\in R^+$，则

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n$$

例54　若a、b、$c\in R^+$且$abc=1$，则

$$a+b+c\geqslant 3$$

(1949年—1950年波兰数学竞赛题)

证　由算几不等式知

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{1}=1$$

故　$a+b+c\geqslant 3$

例55　设b_1，b_2，…，b_n是正数a_1，a_2，…，a_n的某一个排列，则

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n$$

(1934年—1935年匈牙利数学竞赛试题)

证　$\because b_1$，b_2，…，b_n是a_1，a_2，…，a_n的某一个排列

$\therefore$　$b_1b_2\cdots b_n=a_1a_2\cdots a_n$

由算几不等式知

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)\geqslant\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\times\frac{a_2}{b_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{b_n}}$$
$$=\sqrt[n]{1}=1$$

故　$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n$

练习33　若 $r\in R$，则

$$(1^r+2^r+3^r+\cdots+n^r)^n\geqslant n^n(n!)^r$$

练习34　设a、b、$c>1$，则

$$\log_a b+\log_b c+\log_c a\geqslant 3$$

练习35 若$n\in N$ 且 $0\leqslant x\leqslant 1$，则

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

例56 设a_1、a_2、…、$a_n\in R^+$，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$$

证 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$

$$\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\,\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}=n^2$$

练习36 设a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、$b_3\in R^+$，则

$$\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\right)\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}\right)\geqslant 9$$

练习37 试证不等式

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1}+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{a_2}+\cdots+$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_n}\geqslant n(n-1)$$

其中a_1、a_2、…、$a_n\in R^+$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时等号成立

练习38 设a、b、$c\in R^+$，则

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc$$

练习39 设a、b、c、$d\in R^+$，则

$$(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)\geqslant 16abcd$$

练习40 设a、b、c、$d\in R^+$，则

$a^2cd+b^2da+c^2ab+d^2bc\geqslant 4abcd$

例57　若a、b、$c\in R^+$且$a+b+c=1$，则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$$

（1950年—1951年波兰数学竞赛试题）

证　由算几不等式知

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}}=9$$

练习41　若a、b、$c\in R^+$且$a+b+c=1$，则

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant 27$$

例58　若$n\geqslant 2$，$n\in N$，则

$$n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>n\sqrt[n]{n+1}$$

证　左$=(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots$

$$+\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}$$

$$>n\sqrt[n]{2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}}=n\sqrt[n]{n+1}$$

练习42　若$n>2$，$n\in N$，则

$$n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)>(n-1)\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$$

例59　设三直角四面体$PABC$（即$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^{\circ}$）的六条边长之和为$S$，试求（并证明）其体积的最大值，如图3

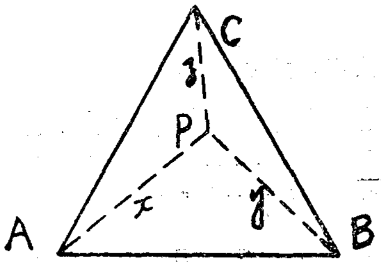

图3

（美国竞赛试题）

解　设$AP=x$，$BP=y$，$CP=z$，则有

$S=x+y+z+\sqrt{x^{2}+y^{2}}+\sqrt{y^{2}+z^{2}}+\sqrt{z^{2}+x^{2}}$且．

$$V=\frac{1}{6}xyz$$

$$\begin{cases} x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz} \\ \sqrt{x^{2}+y^{2}}+\sqrt{y^{2}+z^{2}}+\sqrt{z^{2}+x^{2}}\geqslant\sqrt{2xy}+\sqrt{2yz} \\ \qquad +\sqrt{2zx} \end{cases}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{2xy}\sqrt{2yz}\sqrt{2zx}}=3\sqrt{2}\sqrt[3]{xyz}$$

$$\therefore\quad S\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt{2}\sqrt[3]{xyz}=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{xyz}$$

$$=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{6V}$$

其中等号当且仅当$x=y=z$时成立

$$V\leqslant\frac{(\sqrt{2}-1)S^3}{27\times 6}=\frac{5\sqrt{2}-7}{162}S^3$$

$$V_{max}=\frac{5\sqrt{2}-7}{162}S^3 .$$

2 几何、调和平均不等式

若$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$n\geqslant 2$，$n\in N$，则

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=H_n$$

其中等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立

证：在算几不等式$\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{y_1\cdots y_n}$中

令$y_1=\frac{1}{a_1}$，…，$y_n=\frac{1}{a_n}$得

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geqslant\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

例60 若x、y、$z\in R^+$，则

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geqslant\frac{9}{2(x+y+z)}$$

证 $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\geqslant\frac{3}{\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{3}}$$

$$=\frac{9}{2(x+y+z)}$$

练习43 设a、b、c、$d\in R^{+}$，则

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{a+b+c}$$

$$\geqslant\frac{16}{3}\,\frac{1}{a+b+c+d}$$

练习44 设a、b、$c\in R^{+}$，则

$$a+\frac{1}{(a-b)b}\geqslant 3\ (a>b)$$

练习45 设a、b、$c\in R^{+}$且$a+b+c=1$，则

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

练习46 设a、b、c是三角形的三边，则

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$$

例61 设a、b、c、x、y、$z\in R^{+}$，则

$$\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}$$

证　两边分别用$\sqrt[3]{abc}$除之，则问题转化为

若　$A=\frac{x}{a}>0$，$B=\frac{y}{b}>0$，$C=\frac{z}{c}>0$，则

$$\sqrt[3]{(1+A)(1+B)(1+C)} \geqslant 1+\sqrt[3]{ABC}$$

只要证$(1+A)(1+B)(1+C) \geqslant 1+3\sqrt[3]{ABC}$

$$+3(\sqrt[3]{ABC})^2+ABC$$

只要证$1+(A+B+C)+(AB+BC+CA)+ABC$

$$\geqslant 1+3\sqrt[3]{ABC}+3(\sqrt[3]{ABC})^2+ABC$$

只要证$(A+B+C)+(AB+BC+CA)$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{ABC}+3(\sqrt[3]{ABC})^2$$

但这是显然的，因为：

$$A+B+C \geqslant 3\sqrt[3]{ABC}$$

$$AB+BC+CA \geqslant 3\sqrt[3]{(AB)(BC)(CA)}$$

$$=3(\sqrt[3]{ABC})^2$$

说明：一般地有

若a_1、a_2、…、a_n、b_1、b_2、…、$b_n \in R^+$，则

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$
$$+\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}$$

其中等号当且仅当$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$时成立

(Minkcwski)

§6 柯西不等式

1 柯西不等式

若a_k，$b_k \in R(k=1, 2, \cdots, n)$则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

证1：见§1 例6

证2 (1) 多项式$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2$不能有两个不同的实根

$$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2=0$$

$$\Longrightarrow a_1x-b_1=a_2x-b_2=\cdots=a_nx-b_n=0$$

$$\Longrightarrow x=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$$

故最多有一个实根

(2) 因为不能有两个不同的实根，所以判别式$\Delta \leqslant 0$

$\because \quad (a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2$

$=(a_1^2+\cdots+a_n^2)x^2-2x(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)$

$+(b_1^2+\cdots+b_n^2)$

$\therefore \quad 4(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+\cdots+a_n^2)$

$(b_1^2+\cdots+b_n^2)\leqslant 0$

故 $(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$

其中等号当且仅当$\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}$时成立。

例62 若$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$

则

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leqslant 1$$

证$\because \quad (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$

$\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

$=1\times1=1$

$\therefore \quad |a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leqslant 1$

例63 若a_i，$b_i\in R^+(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)\geqslant(a_1+\cdots+a_n)^2$$

证 左$=\left[(\sqrt{a_1b_1})^2+\cdots+(\sqrt{a_nb_n})^2\right]$

$$\left[\left(\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left(\sqrt{a_1b_1}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)^2$$

$=(a_1+\cdots+a_n)^2$

练习47 利用柯西不等式再证例56

例64 若$a+b+c=1$，则$a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$

证　$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)$

$$\geqslant\frac{1}{3}(1\times a+1\times b+1\times c)^2=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

练习48　若a、b、$c\in R^+$，则

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$$

练习49　若a、b、c、$d\in R^+$，则

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)^2\leqslant 4(a^6+b^6+c^6+d^6)$$

练习50　若$a\geqslant 0$，$n\in N$　则

$$n(1+a^2+\cdots+a^{2n})\geqslant(1+a+\cdots+a^n)^2$$

练习51　若a、b、x_1、$x_2\in R^+$且$a+b=1$，则

$$(ax_1+bx_2)(bx_1+ax_2)\geqslant x_1x_2$$

练习52　若$a>b>c$，则$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$

练习53　若a、b、$c\in R^+$，则

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

例65　设x_1，x_2，…，$x_n\in R^+$，则

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}>x_1+x_2+\cdots+x_n$$

（1984年全国高中联赛试题）

证：∵　$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$

$$=\left(\sqrt{x_2}\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}+\sqrt{x_3}\frac{x_2}{\sqrt{x_3}}+\cdots+\sqrt{x_1}\frac{x_n}{\sqrt{x_1}}\right)^2$$

$$\leqslant\left(x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1\right)\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\right)$$

$$\therefore\quad x_1+\cdots+x_n\leqslant\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}$$

例66　若a_1，a_2，…，a_n为两两不相等的正整数，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

（第20届国际数学竞赛试题）

证　$\because\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$$

$\because$　a_1、a_2、…、a_n是n个互不相同的正整数

$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

故　$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\right)$$

$$\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)(1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

例67 设$a+b+c+d+e=8$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$求e的最大值

（第7届美国中学数学竞赛试题）

解 $\because\quad (8-e)^2=(a+b+c+d)^2$

$$=(1\times a+1\times b+1\times c+1\times d)^2$$

$$\leqslant(1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$=4(16-e^2)$$

$\therefore\quad e(5e-16)\leqslant 0\Longrightarrow 0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$

故当$a=b=c=d$时 e有最大值$\frac{16}{5}$。此时$a=b=c=d$ $=\frac{1}{4}(8-e)=\frac{1}{4}(8-\frac{16}{5})=\frac{6}{5}$

例68 已知a，b为正实数且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$。

试证：对每一个$n\in N$

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$$

（1988年全国高中数学联赛试题）

证 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\Longrightarrow ab=a+b$

$$\Longrightarrow ab-a-b+1=1\Longrightarrow (a-1)(b-1)=1$$

$$(a+b)^n-a^n-b^n=(ab)^n-a^n-b^n$$

$$=(ab)^n-a^n-b^n+1-1=(a^n-1)(b^n-1)-1$$

$$=(a-1)(b-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)(b^{n-1}+b^{n-2}$$

$$+\cdots+1)-1$$

$$=(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+1)-1$$

$$\geqslant\left(a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}+a^{\frac{n-2}{2}}b^{\frac{n-2}{2}}+\cdots+1\times1\right)^2-1$$

$$=\left[(ab)^{\frac{n-1}{2}}+(ab)^{\frac{n-2}{2}}+\cdots+1\right]^2-1$$

又 $ab=a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant2\sqrt{ab}\cdot2\sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{b}}=4$

$\therefore\quad (a+b)^n-a^n-b^n$

$$\geqslant\left[(ab)^{\frac{n-1}{2}}+(ab)^{\frac{n-2}{2}}+\cdots+1\right]^2-1$$

$$\geqslant(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1)^2-1=(2^n-1)^2-1$$

$$=2^{2n}-2\cdot2^n+1-1$$

$$=2^{2n}-2^{n+1}$$

例69　P为$\triangle ABC$内一点，D、E、F分别为P到BC、CA、AB各边所引垂线的垂足，求所有使$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$为最小的$P$点。

（第22届国际数学竞赛试题）

解　设$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，且$PD=d_1$，$PE=d_2$，$PF=d_3$，如图4

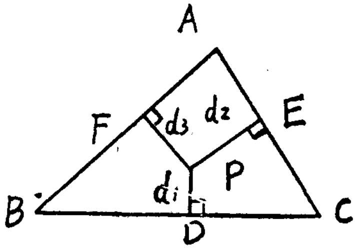

图4

则　$\left(\dfrac{a}{d_1}+\dfrac{b}{d_2}+\dfrac{c}{d_3}\right)\left(ad_1+bd_2+cd_3\right)$

$$=\left(\frac{a^2}{ad_1}+\frac{b^2}{bd_2}+\frac{c^2}{cd_3}\right)\left(ad_1+bd_2+cd_3\right)$$

$$\geqslant\left(\frac{a}{\sqrt{ad_1}}\sqrt{ad_1}+\frac{b}{\sqrt{bd_2}}\sqrt{bd_2}+\frac{c}{\sqrt{cd_3}}\sqrt{cd_3}\right)^2$$

$$=(a+b+c)^2$$

$$\therefore\quad \frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{ad_1+bd_2+cd_3}=\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\Delta ABC}}$$

其中等号当且仅当

$$\frac{a^2}{ad_1}\Big/ad_1=\frac{b^2}{bd_2}\Big/bd_2=\frac{c^2}{cd_3}\Big/cd_3$$

$$\Longrightarrow \frac{a^2}{a^2d_1^2}=\frac{b^2}{b^2d_2^2}=\frac{c^2}{c^2d_3^2}$$

$$\Longrightarrow d_1=d_2=d_3$$

时成立。即当P为$\triangle ABC$的内心时$\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}$有极小值$\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}$

例70　设a_1，a_2，…，a_n是给定的不全为0的实数，r_1，r_2，…，r_n是实数，如果不等式

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\cdots+r_n(x_n-a_n)$$
$$\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \qquad ①$$

对任何实数x_1，x_2，…，x_n成立，求r_1，r_2，…，r_n的值

（1988年第三届全国中学生数学冬令营竞赛试题）

分析：题中给了一个$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n\in R$，不等式①都成立的条件，这个条件乍看似乎摸不着，细想给的条件太多了。这就促使我们给x_1，x_2，…，x_n以固定的数值，尝试摸索。

解　(1) 取$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，由①有

$$-r_1a_1-r_2a_2-\cdots-r_na_n\leqslant-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

$$\Longrightarrow r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n\geqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \qquad ②$$

(2) 取$x_1=2a_1$，$x_2=2a_2$，…，$x_n=2a_n$。由①有

$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n\leqslant 2\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

$$-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

$$\Longrightarrow r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \qquad ③$$

由②、③得

$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \qquad ④$$

（3）由柯西不等式

$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n$$

$$\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}\ \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \qquad ⑤$$

∵ a_1，a_2，…，a_n不全为0

∴ $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}>0$

④代入⑤

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}$$

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

两边约去$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$，得

$$1\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2} \qquad ⑥$$

（4）取$x_1=r_1$，$x_2=r_2$，…，$x_n=r_n$，由①有

$$r_1(r_1-a_1)+r_2(r_2-a_2)+\cdots+r_n(r_n-a_n)\leqslant\sqrt{r_1^2+\cdots+r_n^2}$$

$$-\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

$$\Longrightarrow(r_1^2+\cdots+r_n^2)-(r_1a_1+\cdots+r_na_n)\leqslant\sqrt{r_1^2+\cdots+r_n^2}$$

$$-\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

$$\Longrightarrow r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2} \qquad ⑦$$

$$\Longrightarrow\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}\leqslant 1 \qquad ⑧$$

(5) 由⑥、⑧得

$$\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}=1$$

由④，有

$$r_1a_1+\cdots+r_na_n=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

$$=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\ \sqrt{r_1^2+\cdots+r_n^2}$$

此即柯西不等式⑤中等号成立之时，因此有实数λ，使得

$$r_1=\lambda a_1,\quad r_2=\lambda a_2,\quad \cdots,\quad r_n=\lambda a_n \tag{9}$$

代入④得

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}} \tag{10}$$

将⑩代入⑨得

$$r_j=\frac{a_j}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

2 三角不等式

设 $A=(x_1,\ x_2)$，$B=(y_1,\ y_2)$，$C=(z_1,\ z_2)\in R^2$

$$d(x,\ y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

则 $\sqrt{(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2}\leqslant\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

$$+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}$$

我们可以图示如图5

由 $|AC|\leqslant|AB|+|BC|$ 及距离公式即得证

一般在距离空间中，用到：

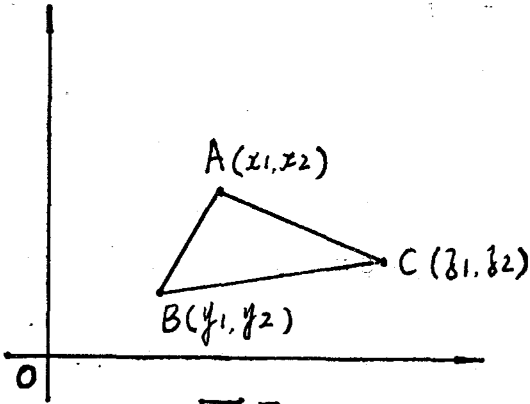

图5

设 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n),$

$z=(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)\in R^n$

$$d(x,\ y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

则 $$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2}$$

设 $a_k=x_k-y_k,\ b_k=y_k-z_k$

则 $x_k-z_k=(x_k-y_k)+(y_k-z_k)=a_k+b_k$

于是只要证

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$$

成立即可

三角不等式

设a_1、…、a_n和b_1、…、b_n是任意两组实数，则

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2}\leqslant\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$$

证 $\because a_1b_1+\cdots+a_nb_n\leqslant\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad&(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2\\&=(a_1^2+\cdots+a_n^2)+(b_1^2+\cdots+b_n^2)+2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)\\&\leqslant(a_1^2+\cdots+a_n^2)+(b_1^2+\cdots+b_n^2)\\&\quad+2\sqrt{(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)}\\&=(\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2})^2\end{aligned}$$

两边开平方取算术根即得证。

练习54 若a_i、$b_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\left|\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}\right|$$

$$\leqslant|a_1-b_1|+\cdots+|a_n-b_n|$$

§7　排序不等式

1　定义

设　$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，

b_1'，b_2'，…，b_n'是b_1，b_2，…，b_n的任一个排列，则称

（1）$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$为同序和

（2）$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$为逆序和

（3）$a_1b_1' + a_2b_2' + \cdots + a_nb_n'$为乱序和

2　排序不等式

逆序和≤乱序和≤同序和

证　（1）先证　乱序和≤同序和

为此只要证得乱序和取得最大值时，必须a_n配b_n，a_{n-1}配b_{n-1}，…，a_1配b_1

设a_n配b_n'（$b_n' \leqslant b_n$），b_n配某a_k（$k<n$）

则　$a_nb_n + a_kb_n' - a_kb_n - a_nb_n'$

$$= (a_n - a_k)(b_n - b_n') \geqslant 0$$

$\Longrightarrow a_n b_n' + a_k b_n \leqslant a_k b_n' + a_n b_n$

故a_n配b_n时 乱序和方有可能取得最大值。

同理可证：a_{n-1}必配b_{n-1}，a_{n-2}必配$b_{n-2}\cdots$，a_1必配b_1

因此 $a_1b_1' + a_2b_2' + \cdots + a_nb_n' \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

其中等号当且仅当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时成立。

(2) 次证逆序和≤乱序和

$\because$ $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$-b_n \leqslant -b_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant -b_2 \leqslant -b_1$

故由乱序和≤同序和知

$$a_1(-b_n) + a_2(-b_{n-1}) + \cdots + a_n(-b_1)$$

$$\geqslant a_1(-b_1') + a_2(-b_2') + \cdots + a_n(-b_n')$$

$$\Longrightarrow a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \leqslant a_1b_1' + a_2b_2' + \cdots + a_nb_n'$$

其中等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $-b_n = -b_{n-1} = \cdots = -b_1$(即$b_1 = b_2 = \cdots = b_n$)时成立。

例71　若a、$b \in R^+$且$a \neq b$，$n > k$，n，$k \in N$，则

$$a^n + b^n > a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k}$$

证　不失一般性，假定$a < b$

则　$a^{n-k} < b^{n-k}$，$a^k < b^k$

故由 同序和≥逆序和知

$$a^{n-k}a^k + b^{n-k}b^k \geqslant a^{n-k}b^k + b^{n-k}a^k$$

即　$a^n + b^n \geqslant a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k}$

其中等号当且仅当$a^{n-k} = b^{n-k}$或$a^k = b^k$时成立、但$a < b$。

故　$a^n + b^n > a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k}$

例72　利用排序不等式证§6例65

证：不失一般性、假定$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$

则　$x_1^2\leqslant x_2^2\leqslant\cdots\leqslant x_n^2$，$\dfrac{1}{x_n}\leqslant\dfrac{1}{x_{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{1}{x_1}$

故由 乱序和$\geqslant$逆序和知

$$x_1^2\frac{1}{x_2}+x_2^2\frac{1}{x_3}+\cdots+x_{n-1}^2\frac{1}{x_n}+x_n^2\frac{1}{x_1}$$

$$\geqslant x_1^2\frac{1}{x_1}+x_2^2\frac{1}{x_2}+\cdots+x_{n-1}^2\frac{1}{x_{n-1}}+x_n^2\frac{1}{x_n}$$

即　$\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^2}{x_n}+\dfrac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$

例73　利用排序不等式证§6例66

证　假定b_1，b_2，…，b_n是a_1，a_2，…，a_n的一个排列且$b_1<b_2<\cdots<b_n$，则

$b_1\geqslant1$，$b_2\geqslant2$，…，$b_n\geqslant n$

又　$1>\dfrac{1}{2^2}>\cdots>\dfrac{1}{n^2}$

故 由逆序和$\leqslant$乱序和知

$$b_1\cdot1+b_2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+b_n\cdot\frac{1}{n^2}\leqslant a_1\cdot1+a_2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$\Longrightarrow1\cdot1+2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{n^2}\leqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$$

故　$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\leqslant a_1+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}$

练习55　利用排序不等式证§5例55

例74　用A、B、C表示$\triangle ABC$的三个内角的弧度数，a、b、c顺序表示其对边，则

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geqslant \frac{\pi}{3}$$

证 序列a、b、c与序列A、B、C同序

故由 同序和$\geqslant$乱序和知

$$aA+bB+cC=aA+bB+cC \quad ①$$

$$aA+bB+cC \geqslant bA+cB+aC \quad ②$$

$$aA+bB+cC \geqslant cA+aB+bC \quad ③$$

①＋②＋③得

$$3(aA+bB+cC) \geqslant (a+b+c)(A+B+C)$$

故 $$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geqslant \frac{\pi}{3}$$

例75 利用排序不等式证§1练习5

证 为此只要证

$$2a\lg a+2b\lg b+2c\lg c \geqslant (b+a)\lg a+(c+a)\lg b+(a+b)\lg c$$

成立即可

由于a、b、c与$\lg a$、$\lg b$、$\lg c$同序

故由 同序和$\geqslant$乱序和知

$$a\lg a+b\lg b+c\lg c \geqslant b\lg a+c\lg b+a\lg c \quad ①$$

$$a\lg a+b\lg b+c\lg c \geqslant c\lg a+a\lg b+b\lg c \quad ②$$

①＋②得

$$2a\lg a+2b\lg b+2c\lg c \geqslant (b+c)\lg a+(a+c)\lg b+(a+b)\lg c$$

练习56 利用排序不等式证§1 例10

例76 设x_i、$y_i \in R(i=1, 2, \cdots, n)$且

$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$，$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$，$z_1$、$z_2$、$\cdots$、$z_n$是$y_1$、$y_2$、$\cdots$、$y_n$的一个排列，则

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$$

(1975年第17届IMO试题)

分析：为此只要证$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2$

$\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i+\sum_{i=1}^{n}z_i^2$成立即可

只要证$-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant-2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i$成立即可

（注意$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\sum_{i=1}^{n}z_i^2$）

只要证$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_iz_i$成立即可。

但这是同序和≥乱序和。不等式显然成立。

§8 切比雪夫不等式

1 切比雪夫不等式（一）

若$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$，则

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

其中等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时成立

（见§1．例7）

说明：若$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

2 切比雪夫不等式（二）

若$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

说明：若$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

例77　利用切比雪夫不等式证§7例74

证　不失一般性，假定$a\geqslant b\geqslant c$，则

$$A\geqslant B\geqslant C$$

故由切比雪夫不等式知

$$3(aA+bB+cC)\geqslant(a+b+c)(A+B+C)$$

$$=(a+b+c)\pi$$

故 $$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\geqslant\frac{\pi}{3}$$

例78　设$a_k\in R$（$k=1$，2，$\cdots$，n）且

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=m$$

则

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{m^2}{n}$$

证　不失一般性，假定$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，则

$$n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

$$=n(a_1a_1+a_2a_2+\cdots+a_na_n)$$

$$\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

$$=m\times m=m^2$$

故 $$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{m^2}{n}$$

说明：一般的设$a_{i1}\geqslant a_{i2}\geqslant\cdots\geqslant a_{in}$。其中$a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}$是$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$的一个排列，则

$$n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$
$$=n(a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2)$$
$$=n(a_{i1}a_{i1}+a_{i2}a_{i2}+\cdots+a_{in}a_{in})$$
$$\geqslant(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=m^2$$

故 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\dfrac{m^2}{n}$

例79　利用切比雪夫不等式解§6例67

解　$\because a+b+c+d=8-e$，$a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$

不失一般性，假定 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d$。则由切比雪夫不等式知

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2)=4(a\cdot a+b\cdot b+c\cdot c+d\cdot d)$$
$$\geqslant(a+b+c+d)(a+b+c+d)$$

即　$4(16-e^2)\geqslant(8-e)^2$

$\Longrightarrow 5e^2-16e\leqslant 0\Longrightarrow 0\leqslant e\leqslant\dfrac{16}{5}$

故 e 的最大值是$\dfrac{16}{5}$。当且仅当$a=b=c=d$
$=\dfrac{1}{4}\left(8-\dfrac{16}{5}\right)=\dfrac{6}{5}$时。

例80　在$\triangle ABC$中，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle$并指出在什么条件下等号成立

(第3届IMO试题)

解：设$a+b+c=2s$。

不失一般性，假定$a\geqslant b\geqslant c$

故由切比雪夫不等式知

$$3(a\cdot a+b\cdot b+c\cdot c)\geqslant(a+b+c)(a+b+c)$$

$$\Longrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(2s)^2$$

$$\Longrightarrow a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{4}{3}s^2$$

其中等号当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}s$ 时成立，此时三角形面积$\triangle$有最大值。

$$\triangle_{max}=\frac{\sqrt{3}}{9}s^2\Longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{9}s^2\geqslant\triangle\Longrightarrow s^2$$

$$\geqslant 3\sqrt{3}\triangle$$

故 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{3}\triangle=4\sqrt{3}\triangle$

其中等号当且仅当$a=b=c$时成立。

例81　在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，设它们的边分别是a、b、c和a'、b'、c'且$a\leqslant b\leqslant c$，$a'\leqslant b'\leqslant c'$。其面积分别为$\triangle$，$\triangle'$，则

$$a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2\geqslant 16\triangle\triangle'$$

证　$\because a\leqslant b\leqslant c$，$a'\leqslant b'\leqslant c'$

$\therefore$　$a^2\leqslant b^2\leqslant c^2$，$a'^2\leqslant b'^2\leqslant c'^2$

故由切比雪夫不等式知

$$3(a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2)$$

$$\geqslant(c^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)$$

$$\geqslant 4\sqrt{3}\triangle\cdot 4\sqrt{3}\triangle'\ (\text{例80})$$

$=16\cdot 3\triangle\triangle'$

因此　$a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2\geqslant 16\triangle\triangle'$

例82　利用切比雪夫不等式证§1例10

证　不失一般性、假定$a\geqslant b\geqslant c>0$，则

$$\ln a\geqslant\ln b\geqslant\ln c$$

故由切比雪夫不等式知

$$3(a\ln a+b\ln b+c\ln c)\geqslant(a+b+c)(\ln a+\ln b+\ln c)$$

$$\Longrightarrow 3\ln a^ab^bc^c\geqslant\ln(abc)^{a+b+c}$$

$$\Longrightarrow \ln a^ab^bc^c\geqslant\ln(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$$

$$\Longrightarrow a^ab^bc^c\geqslant abc^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$$

练习57　设a、b、c、$d\in R^+$，则

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^3\leqslant 16(a^6+b^6+c^6+d^6)$$

$$\leqslant 4(a^9+b^9+c^9+d^9)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\right)$$

练习58　若a、$b\in R$，则

$$\frac{a+b}{2}\ \frac{a^2+b^2}{2}\ \frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}$$

（波兰1958年—1959年数学竞赛试题）

练习59　利用切比雪夫不等式证§1例18

练习60　若a、b、$c\in R^+$，则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

例83 在$\triangle ABC$中 有

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\geqslant 9$$

证 首先注意$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$ 这是因为

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$\Longrightarrow\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Longrightarrow\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

不失一般性、假定$A\geqslant B\geqslant C$

则 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\geqslant\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\geqslant\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\leqslant\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\leqslant\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

故由切比雪夫不等式知

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

$$=\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$$

$$\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)$$

$$\geqslant 3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right.$$

$$\left.+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$$

$$=3(1+1+1)=9$$

例84　在$\triangle ABC$中　求证

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leqslant\sin A+\sin B+\sin C$$

（1979年上海市数学竞赛试题）

证　不失一般性、假定$A\geqslant B\geqslant C$

则　$\sin A\geqslant\sin B\geqslant\sin C$，$\cos A\leqslant\cos B\leqslant\cos C$

故由切比雪夫不等式知

$$3(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)$$

$$\leqslant(\sin A+\sin B+\sin C)(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\leqslant(\sin A+\sin B+\sin C)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow\frac{3}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)\leqslant\frac{3}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\Longrightarrow\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leqslant\sin A+\sin B+\sin C$$

说明：为什么$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$

(1)　$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]\sin\frac{C}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right]\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right]^2$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

(2) $\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant 1+4\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

例85 若 a、b、c 是$\triangle ABC$的三边，且 $2s=a+b+c$，则

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}s^{n-1}$$

(第28届IMO候选题)

证 不失一般性，假定$a\geqslant b\geqslant c$

则 $a+b\geqslant a+c\geqslant b+c$，$\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{1}{a+c}\geqslant\frac{1}{a+b}$

故由切比雪夫不等式知

$$3\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\right)$$

$$\geqslant(a^n+b^n+c^n)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$$

(1) 由$M_1(a, b, c)\leqslant M_n(a, b, c)$知

$$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\left(\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Longrightarrow a^n+b^n+c^n\geqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

(2) $2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

$$=[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$\geqslant\left[\sqrt{a+b}\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b+c}\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right.$$

$$\left.+\sqrt{c+a}\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right]^2$$

$$=(1+1+1)^2=9$$

$\therefore\ 3\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\right)$

$$\geqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n\frac{9}{2(a+b+c)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}s\right)^{n-1}9=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}s^{n-1}$$

故 $\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}s^{n-1}$

说明：$M_1(a,b,c)\leqslant M_n(a,b,c)$ 见§9。

例86 设x_1、x_2、…、$x_n\in R^+$，$n\geqslant 2$且$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$

求证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$

（第4届全国中学生数学冬令营试题）

证　不失一般性，假定$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$

则　$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$

故由切比雪夫不等式知

$$n\left(x_1\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+x_2\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+x_n\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}\right)$$

$$\geqslant(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$$

又　$M_1(\sqrt{1-x_1},\ \sqrt{1-x_2},\ \cdots\sqrt{1-x_n})$

$\leqslant M_2(\sqrt{1-x_1},\ \sqrt{1-x_2},\ \cdots,\ \sqrt{1-x_n})$

即　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}$

$$\leqslant\left(\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\cdots+(1-x_n)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

故 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}} \qquad ①$$

再由柯西不等式知

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{x_i})^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{2}} = (n\times 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \qquad ②$$

因此 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$

另证：$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1-(1-x_i)}{\sqrt{1-x_i}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}}}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)]^{\frac{1}{n}}}}$$

$$\geqslant \frac{n}{\sqrt{\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\cdots+(1-x_n)}{n}}}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{\frac{n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}}}=\frac{n}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$$

$$=n\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\leqslant\left[\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[n\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[n\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{n(n-1)}$$

故 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant n\sqrt{\frac{n}{n-1}}-\sqrt{n(n-1)}$

$$=\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant\left[\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{2}}=(n\times 1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}$$

因此$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$

§9 幂平均不等式

1 定义1

设 a_1、a_2、…、$a_n \in R^+$，$r \neq 0$，则称

$$M_r(a_1, a_2, \cdots, a_n) \triangleq \left(\frac{a_1{}^r + a_2{}^r + \cdots + a_n{}^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

为这一组数的r次幂平均数，简记作$Mr(a)$或Mr

2 定义2

设 a_1、a_2、…、$a_n \in R^+$，则称

$$M_0(a_1, a_2, \cdots, a_n) \triangleq \lim_{r\to 0} M_r(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

为这一组数的0次幂平均数，简记作$M_0(a)$或M_0。

说明：可以证明$\lim\limits_{r\to 0} M_r = G_n$。故$M_0 = G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

3 幂平均不等式

若 a_1、a_2、…、$a_n \in R^+$且$\alpha < \beta$，则

$$M_\alpha(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant M_\beta(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

其中等号当且仅当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$时成立

证：略

例87　若a、b、$c \in R^+$且$a+b+c=6$，则

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 12$$

证　由$M_1(a, b, c) \leqslant M_2(a, b, c)$知

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

即　$\frac{6}{3} \leqslant \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

故　$a^2+b^2+c^2 \geqslant 12$

例88　若x、y、$z \in R^+$且$x^2+y^2+z^2=8$，则

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}$$

证　由$M_2(x, y, z) \leqslant M_3(x, y, z)$知

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

即　$\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

故　$x^3+y^3+z^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}$

练习61　若x、y、$z \in R^+$且$x^4+y^4+z^4=1$，则

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant \sqrt{3}$$

练习62　若x、y、$z \in R^+$且$x+y+z=3$，则

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3$$

练习63 若a、b、c、$d\in R^{+}$，则

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)^2\leqslant 4(a^6+b^6+c^6+d^6)$$

例89 若a、$b\in R^{+}$ 且$a+b=1$，则

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geqslant\frac{25}{2}$$

证 由$M_1(a+\frac{1}{a},\ b+\frac{1}{b})\leqslant M_2(a+\frac{1}{a},b+\frac{1}{b})$知

$$\frac{(a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})}{2}\leqslant\left[\frac{(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

故 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geqslant\frac{1}{2}[(a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})]^2$

$$=\frac{1}{2}[(a+b)+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})]^2$$

$$=\frac{1}{2}[1+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})]^2$$

但 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)\ (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{a}\ \frac{1}{b}}=4$

故 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geqslant\frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2}$

练习64 若a、b、$c\in R^{+}$且$a+b+c=1$，则

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2\geqslant\frac{100}{3}$$

练习65 若a_1、a_2、…、$a_n\in R^{+}$，$m\geqslant 1$且

$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，则

$$(a_1+\frac{1}{a_1})^m+(a_2+\frac{1}{a_2})^m+\cdots+(a_n+\frac{1}{a_n})^m\geqslant n\ (n+\frac{1}{n})^m$$

例90 若a、b、$c\in R^{+}$ 且$a+b+c=1$，则

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\sqrt{3}$$

证　由 $M_1(\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c})\leqslant M_2(\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c})$ 知

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

故　$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\sqrt{3}$

练习66　若a、b、$c\in R^+$且$a+b+c=1$，则

$$\sqrt{13a+1}+\sqrt{13b+1}+\sqrt{13c+1}\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

例91　若a_1、a_2、…、a_n、α、$\beta\in R^+$　且$\gamma=\alpha+\beta$，则

$$M_\gamma^\gamma(a)\geqslant M_\alpha^\alpha(a)M_\beta^\beta(a)$$

证　由幂平均不等式知　$M_\alpha(a)\leqslant M_\gamma(a)$

$\therefore$　$M_\alpha^\alpha(a)\leqslant M_\gamma^\alpha(a)$

同理　$M_\beta^\beta(a)\leqslant M_\gamma^\beta(a)$

故　$M_\alpha^\alpha(a)M_\beta^\beta(a)\leqslant M_\gamma^{\alpha+\beta}(a)=M_\gamma^\gamma(a)$

例92　若a、b、$c\in R^+$　则

$$a^5+b^5+c^5\geqslant abc(a^2+b^2+c^2)$$

证　由$M_5^5(a,\ b,\ c)\geqslant M_3^3(a,\ b,\ c)M_2^2(a,\ b,\ c)$知

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{3}\geqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\quad\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$\geqslant\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\quad\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

故　$a^5+b^5+c^5\geqslant abc(a^2+b^2+c^2)$

练习67　若a、b、$c\in R^+$，则

$$3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

练习68　若x、y、$z\in R^+$ 且$xyz=1$，$n\geqslant3$，则

$$x^n+y^n+z^n\geqslant x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3}$$

§ 10　几何不等式

1　简单的几何不等式

例93　$\triangle ABC$的三边a、b、c彼此不等，且

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

求证：$\angle B$是锐角

证：由已知得　$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$

从而知　$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$成等差数列

$$\therefore\quad \frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}\text{或}\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$$

即　$a<b<c$或$a>b>c$

故　b边不是最大边，因此$\angle B$是锐角。

例94　设a、b、c是$\triangle ABC$的三边长，求证

$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}<2$$

证　不失一般性、假定$a\leqslant b\leqslant c$

$$\therefore\quad \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$$

$$\leqslant\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+a}+\frac{b}{b+a}=\frac{a+b+c}{a+b}=1+\frac{c}{a+b}$$

$$<1+1=2$$

例95　在直角$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，d是斜边上的高，则$a+d>b+c$

证　(1) 先证如下命题

若$a>b>c>d>0$，$ad=bd$　则$a+d>b+c$.这是因为：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$\because\quad b>d\quad\therefore\quad a-b>c-d$

故　$a+d>b+c$

(2) 由(1)即得证

另证　$a^2+d^2=(b^2+c^2)+d^2>b^2+c^2$

$$\therefore\quad a^2+2ad+d^2>b^2+2bc+c^2$$

$$(a+d)^2>(b+c)^2$$

又　$a+d>0$，$b+c>0$

∴　$a+d>b+c$

例96　周长相同的三角形中，面积最大者是等边三角形

解　由算几不等式知

$$\frac{1}{3}[(s-a)+(s-b)+(s-c)]\geqslant\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

即　$\frac{1}{3}s\geqslant\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\frac{s^4}{27}\geqslant s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\frac{s^2}{3\sqrt{3}}\geqslant\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S_{\Delta ABC}$$

故周长$2s$一定时，三角形面积最大值为$\frac{\sqrt{3}}{9}s^2$，当且仅当$s-a=s-b=s-c$即$a=b=c$时等号成立。

练习69　设三角形的三个内角是A、B、C则

$$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\geqslant\frac{27}{\pi^2}$$

例97　在$\triangle ABC$中，r是内切圆半径，R是外接圆半径，则

$$\frac{1}{4r^2}\geqslant\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{R^2}$$

证　$S_{\Delta ABC}=rp=\frac{abc}{4R}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{Rr}=\frac{4p}{abc}=\frac{2(a+b+c)}{abc}=2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$\because \quad R\geqslant 2r$

$$\therefore \quad \frac{1}{4r^2}\geqslant\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{R^2}$$

练习70 在$\triangle ABC$中，R是外接圆的半径，则

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{1}{R^2}$$

练习71 在$\triangle ABC$中，R是外接圆的半径，则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{R}$$

例98 已知三角形的三边为a、b、c， 外接圆的半径为R，内切圆的半径为r，则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt{\frac{3}{2Rr}}$$

证 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\sqrt{3\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}\right)}$

$$=\sqrt{\frac{3(a+b+c)}{abc}}$$

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=\dfrac{abc}{4R}$

$$\therefore \quad a+b+c=\frac{abc}{2Rr}$$

故 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\sqrt{\dfrac{3}{2Rr}}$

例99 设Δ与R分别为$\triangle ABC$的面积和外接圆半径、a、b、c为三边。则

$$R \leqslant \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{32\triangle}$$

证 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{32\triangle}$

$$= \frac{(2R\sin A + 2R\sin B)(2R\sin B + 2R\sin C)}{32 \cdot \frac{1}{2}ab\sin C}$$

$$(2R\sin C + 2R\sin A)$$

$$= \frac{8R^3}{16} \cdot \frac{(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)}{2R\sin A \cdot 2R\sin B \cdot \sin C}$$

$$\geqslant \frac{R}{8} \quad \frac{2\sqrt{\sin A\sin B} \cdot 2\sqrt{\sin B\sin C} \cdot 2\sqrt{\sin C\sin A}}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$= R$$

练习72 用a、b、c表示$\triangle ABC$的三边长，用m_a、m_b、m_c分别表示对应边上中线之长，则

$$am_a + bm_b + cm_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

其中等号当且仅当$a = b = c$时成立。

例100 在$\triangle ABC$中有

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\triangle + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

证 ∵ $a^2 + b^2 \geqslant 2ab \geqslant 2ab\cos(60^\circ - C)$

∴ $a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^\circ - C) \geqslant a^2 + b^2 - 2ab$

$$2(a^2 + b^2) \geqslant 4ab\cos(60^\circ - C) + 2(a^2 + b^2) - 4ab$$

$$2(a^2 + b^2) - 2ab\cos C = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\geqslant 4ab\cos(60^\circ - C) + 2(a-b)^2 - 2ab\cos C$$

$$=4\sqrt{3}\triangle+2(a-b)^2$$

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle+2(a-b)^2$

同理 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle+2(b-c)^2$

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle+2(c-a)^2$$

不失一般性，假定$a\geqslant b\geqslant c$，则$a-b\geqslant 0$，$b-c\geqslant 0$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle+2(a-c)^2$$

$$=4\sqrt{3}\triangle+(a-c)^2+[(a-b)+(b-c)]^2$$

$$=4\sqrt{3}\triangle+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+2(a-b)(b-c)\geqslant 4\sqrt{3}\triangle+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$$

2 换元法

例101 已知a、b、c是任意一个三角形的三边之长，则

$$a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$$

（第6届IMO试题）

证 令$\begin{cases}-a+b+c=x\\ a-b+c=y\\ a+b-c=z\end{cases}$ 则 $x>0$，$y>0$，$z>0$且

$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}(y+z)\\ b=\dfrac{1}{2}(x+z)\\ c=\dfrac{1}{2}(x+y)\end{cases}$$

$$a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c)-3abc$$

$$=\left(\frac{y+z}{2}\right)^2x+\left(\frac{x+z}{2}\right)^2y+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$z-3\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}[2x(y+z)^2+2y(x+z)^2+2z(x+y)^2-3(y+z)$$

$$(x+z)(x+y)]$$

$$=\frac{1}{8}[2y^2x+2z^2x+2x^2y+2z^2y+2x^2z+2y^2z+12xyz$$

$$-3(y^2x+z^2x+x^2y+z^2y+x^2z+y^2z+2xyz)]$$

$$=-\frac{1}{8}(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y-6xyz)$$

$$=-\frac{1}{8}[y(x-z)^2+x(y-z)^2+z(x-y)^2]\leqslant 0$$

故 $a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$

练习73 在$\triangle ABC$中有

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$$

练习74 在$\triangle ABC$中求证

$$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)\geqslant 0$$

其中等号当且仅当$a=b=c$时成立

(第24届IMO试题)

练习75 设a、b、c表示$\triangle ABC$三边之长，则

$$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

3 一类特殊的几何问题

例102 若x、y、$z\in R^{+}$ 且$\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$

$+\dfrac{z^2+x^2-y^2}{2xz}>1$

则 x、y、z构成某个三角形的三边长

分析：为此只要证明

$$\begin{cases} x,\ y,\ z\in R^{+} \\ \dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\dfrac{z^2+x^2-y^2}{2xy}>1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x,\ y,\ z\in R^{+} \\ x+y>z \\ y+z>x \\ z+x>y \end{cases}$$

证 $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\dfrac{z^2+x^2-y^2}{2xy}>1$

$\Longleftrightarrow z(x^2+y^2-z^2)+x(y^2+z^2-x^2)+y(z^2+x^2-y^2)$

$-2xyz>0$

$\Longleftrightarrow x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y-x^3-y^3-z^3$

$-2xyz>0$

$\Longleftrightarrow (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)>0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y+z-x>0 \\ z+x-y>0 \\ x+y-z>0 \end{cases}$$

(注意两个因子为负的情形并不存在)

故x、y、z为某一个三角形的三条边

例103　求证：当且仅当

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)$$

时，长为a、b、c的三条线段可以作成一个三角形

（1955年—1956年波兰数学竞赛试题）

证　$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)$

$\Longleftrightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2<0$

$\Longleftrightarrow (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)>0$

$\Longleftrightarrow (b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)>0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b+c>a \\ a+b>c \\ a+c>b \end{cases}$$

故a、b、c为某一个三角形的三条边

例104　(1) 设三个正实数a、b、c满足

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$$

求证　a、b、c一定是某个三角形的三条边长

(2) 设n个正实数a_1、a_2、…、a_n满足不等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)$$

其中$n>3$

求证这些数中的任何三个一定是某个三角形的三条边长

(第3届数学冬令营竞赛题)

证 (1) $(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$

$\Longleftrightarrow -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2>0$

$\Longleftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)>0$

由例103知a、b、c一定是某个三角形的三条边长

(2) $(a_1^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+\cdots+a_n^4)$

$\Longleftrightarrow (a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2+2(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)a_n^2+a_n^4$

$>(n-1)(a_1^4+\cdots+a_{n-1}^4)+(n-1)a_n^4$

$\Longrightarrow (n-2)a_n^4-2(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)a_n^2$

$+(n-1)\quad(a_1^4+\cdots+a_{n-1}^4)-(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2<0$

又 $n-2>0$

$\triangle=4[(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2-(n-2)(n-1)$

$(a_1^4+\cdots+a_{n-1}^4)+(n-2)(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2]$

>0

整理得

$(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2>(n-2)(a_1^4+\cdots+a_{n-1}^4)$

从而$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$

由前一部分的结论知a_1、a_2、a_3 可为某个三角形的三边长

从而知a_1、a_2、$\cdots$、a_n 中的任何三数均可作为某个三角形的三边长

§ 11 三角函数不等式

1 正弦、余弦函数

例105 在$\triangle ABC$中，$\sin A\sin B\leqslant\sin^2\dfrac{A+B}{2}$

证 $\sin A\sin B=-\dfrac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]$

$=-\dfrac{1}{2}[1-2\sin^2\dfrac{A+B}{2}-\cos(A-B)]$

$=\sin^2\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{1-\cos(A-B)}{2}$

$=\sin^2\dfrac{A+B}{2}-\sin^2\dfrac{A-B}{2}$

$\leqslant\sin^2\dfrac{A+B}{2}$

其中等号当且仅当$A=B$时成立

练习76 在$\triangle ABC$中，$\sin A\sin B\sin C\leqslant\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$

练习77 设A、B、C是三角形的三个内角，试证：

$\sin A+\sin B>\sin C$

（1978年旅大市中学生数学竞赛试题）

练习78　在$\triangle ABC$中，$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}$

练习79　在$\triangle ABC$中，$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$

练习80　在$\triangle ABC$中，$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$

练习81　在锐角$\triangle ABC$中

$$\sin A\cos\frac{A}{2}+\sin B\cos\frac{B}{2}+\sin C\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4}$$

例106　若A、B、C为任意三角形的三个内角，则

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{4}$$

（1896年—1897年匈牙利数学竞赛试题）

说明：今证更强的结果

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

证1　见例84的说明

证2　$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$

$$\Longleftrightarrow\quad 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\leqslant 1$$

$$\Leftarrow \quad 4\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\leqslant 1 \qquad \text{（放大）}$$

$$\Leftrightarrow \quad -4\sin^2\frac{A}{2}+4\sin\frac{A}{2}-1\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2\frac{A}{2}-4\sin\frac{A}{2}+1\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{A}{2}-1\right)^2\geqslant 0 \quad \text{但这是显然的}$$

证3 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=2\sin 30^\circ\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant 2\sin^2\frac{60^\circ+A}{4}\sin^2\frac{B+C}{4} \qquad \text{（例105）}$$

$$=2\left(\sin\frac{60^\circ+A}{4}\sin\frac{B+C}{4}\right)^2$$

$$\leqslant 2\sin^4\frac{60^\circ+A+B+C}{8} \qquad \text{（例105）}$$

$$=2\sin^4 30^\circ=\frac{1}{8}$$

证4 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1-\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}}{2}\right]^2=\frac{1}{8}$$

例107　设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，内切圆半径为r，则$R\geqslant 2r$

证　$S_{\triangle ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{r}{2}(a+b+c)=rR(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$2R^2\sin A\sin B\sin C=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\frac{2r}{R}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1$$

$\therefore\quad R\geqslant 2r$

练习82　在$\triangle ABC$中，$\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\geqslant 4$

练习83　在$\triangle ABC$中，$\cos A\cos B\cos C\leqslant\dfrac{1}{8}$

练习84　在$\triangle ABC$中，$\cos A+\cos B+\cos C>1$

例108　设m、$n\in N$，求证

$$\sin^m x\cos^n x\leqslant\frac{1}{2}$$

证　(1) 当$m=n=1$时

$$\sin x\cos x\leqslant|\sin x|\,|\cos x|=\frac{1}{2}|\sin 2x|\leqslant\frac{1}{2}$$

(2) 当$m\geqslant n\geqslant 1$时

$$\sin^m x\cos^n x\leqslant|\sin^m x\cos^n x|$$

$$\leqslant|\sin^n x\cos^n x|=\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^n\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant\frac{1}{2}$$

(3) 当$n\geqslant m\geqslant 1$时

$$\sin^m x\cos^n x\leqslant|\sin^m x\cos^n x|$$

$$\leqslant|\sin^m x\cos^m x|=\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^m\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^m\leqslant\frac{1}{2}$$

例109 若$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 9$$

（1979年全国数学竞赛试题）

证 $左=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\alpha\cos^2\beta}}$$

$$\geqslant 3\cdot\frac{1}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta}{3}}$$

$=9$

2 正切、余切函数

例110 若$0<\theta<\pi$，则$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\geqslant 1+\operatorname{ctg}\theta$

（1978年山西省数学竞赛试题）

证　$\because 0<\theta<\pi$

$\therefore$　$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{ctg}\theta=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\geqslant 1$

故　$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\geqslant 1+\operatorname{ctg}\theta$

例111　在锐角$\triangle ABC$中，$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B>1$

证　$\because \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C$，

$\therefore$　$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}C}$

$=1+\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}C}>1$

例112　在锐角$\triangle ABC$中，$\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C\geqslant 9$

证　(1)　$\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C$

$\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B\operatorname{tg}^2C}=3(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C)^{\frac{2}{3}}$

$=3\ (\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)^{\frac{2}{3}}$

(2)　$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}$

$=3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}$

$\Longrightarrow(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)^{\frac{2}{3}}\geqslant 3$

综合(1)、(2)知

$\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C\geqslant 3\ (\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)^{\frac{2}{3}}$

$\geqslant 3\cdot 3=9$

例113　在$\triangle ABC$中，$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1$

证　$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$

$$\geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$=1$$

其中等号当且仅当$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$时 即 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$时成立。

说明：$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$

$$\Longrightarrow \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$$

练习85　在锐角$\triangle ABC$中，$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt{3}$

练习86　在$\triangle ABC$中，$\operatorname{ctg}^2A+\operatorname{ctg}^2B+\operatorname{ctg}^2C\geqslant 1$

练习87　在$\triangle ABC$中，$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\geqslant\sqrt{3}$

例114　在锐角$\triangle ABC$中，$n\in N$，则

$$\operatorname{tg}^nA+\operatorname{tg}^nB+\operatorname{tg}^nC>3+\frac{3}{2}n$$

证　$M_n(\mathrm{tg}A,\mathrm{tg}B,\mathrm{tg}C)\geqslant M_1(\mathrm{tg}A,\mathrm{tg}B,\mathrm{tg}C)$

$$\therefore\quad\left(\frac{\mathrm{tg}^nA+\mathrm{tg}^nB+\mathrm{tg}^nC}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C}{3}$$

$$\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{3}\qquad\text{（练习85）}$$

$$=\sqrt{3}$$

故　$\mathrm{tg}^nA+\mathrm{tg}^nB+\mathrm{tg}^nC\geqslant3(\sqrt{3})^n>3(1+0.7)^n$

$$\geqslant3(1+0.7n)=3+2.1n>3+\frac{3}{2}n$$

练习题解答

1 $\because a+\frac{1}{a}-2=\frac{1}{a}(a^2-2a+1)=\frac{1}{a}(a-1)^2\geqslant 0$

$\therefore \quad a+\frac{1}{a}\geqslant 2$

2 $\because \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m-1}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m}\right)^2$

$=\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{2m}+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_j^{m+1}a_k^{m-1}+a_j^{m-1}a_k^{m+1})\right]$

$-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2m}+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} a_j^{m}a_k^{m}\right)$

$=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_j^{m+1}a_k^{m-1}+a_j^{m-1}a_k^{m+1}-2a_j^{m}a_k^{m})$

$=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} a_j^{m-1}a_k^{m-1}(a_j-a_k)^2\geqslant 0$

$\therefore \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m-1}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m}\right)^2$

3 $\because 16^{18}/18^{16}=\left(\dfrac{16}{18}\right)^{16}\cdot 16^{2}=\left(\dfrac{8}{9}\right)^{16}(\sqrt{2})^{16}$

$$=\left(\frac{8\sqrt{2}}{9}\right)^{16}>1$$

$\therefore\quad 16^{18}>18^{16}$

4　不失一般性，假定$a\geqslant b$

$$\because\quad \frac{\frac{1}{2}(a+b)}{(a^{b}b^{a})^{\frac{1}{a+b}}}\geqslant\frac{\sqrt{ab}}{(a^{b}b^{a})^{\frac{1}{a+b}}}=a^{\frac{a-b}{2(a+b)}}b^{\frac{b-a}{2(a+b)}}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}\geqslant 1$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{2}\geqslant(a^{b}b^{a})^{\frac{1}{a+b}}$$

5　$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$

$\Longleftrightarrow a^{3a}b^{3b}c^{3c}>a^{b+c+a}b^{c+a+b}c^{a+b+c}$

$\Longleftrightarrow a^{a}b^{b}c^{c}>(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$

后一不等式由例10得证

6　不失一般性，假定$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$

$$\because\quad \prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}\Big/\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{\frac{1}{n}(a_i-a_j)}\geqslant 1$$

$$\therefore\quad \prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$$

7　为此只要证$\left(\frac{99}{100}\right)^{99}>\left(\frac{101}{100}\right)^{-101}$

只要证$\left(\frac{100}{99}\right)^{99}<\left(\frac{101}{100}\right)^{101}$

但　$1<\frac{100}{99}<\frac{101}{100}$

$\therefore\quad\left(\frac{100}{99}\right)^{99}<\left(\frac{101}{100}\right)^{99}<\left(\frac{101}{100}\right)^{101}$

8　为此只要证 $\frac{1-\sin^4\theta}{\sin^4\theta}\ \frac{1-\cos^4\theta}{\cos^4\theta}\geqslant 9$

只要证　$\frac{(1+\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\geqslant 9$

只要证　$2+\sin^2\theta\cos^2\theta\geqslant 9\sin^2\theta\cos^2\theta$

只要证　$1\geqslant 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

只要证　$1\geqslant(\sin 2\theta)^2$但这是显然的。

9　今证拓广了的不等式$(n!)^{\frac{1}{n}}<[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}$

只要证　$(n!)^{n+1}<[(n+1)!]^n$

这是因为：

$$(n!)^{n+1}=(n!)^n n!<(n!)^n(n+1)^n=[(n+1)!]^n$$

10　$\because\frac{1}{2}[2r+2(n-r+1)]>\sqrt{2r\cdot 2(n-r+1)}$

$\Longrightarrow 2r\cdot 2(n-r+1)<(n+1)^2$

$\therefore\quad 2\cdot 2n<(n+1)^2$

$4\cdot(2n-2)<(n+1)^2$

……

$(2n-2)\cdot 4<(n+1)^2$

$$2n\cdot 2<(n+1)^2$$

将上面n个不等式相乘得

$$(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n)^2<(n+1)^{2n}$$

$\therefore\quad 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n<(n+1)^n$

读者不难证明$n^n>1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$

11　不失一般性，假定$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$，则

(1) $$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}$$

$$\leqslant\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{a+b+1}+\frac{c}{a+b+1}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+1}=1-\frac{1-c}{a+b+1}$$

(2) $$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\leqslant 1-\frac{1-c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$=1-\frac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)]$$

只要证　$1-\dfrac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)]\leqslant 1$

只要证　$-\dfrac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)]\leqslant 0$

只要证　$1-(1+a+b)(1-a)(1-b)\geqslant 0$

只要证　$(1+a+b)(1-a)(1-b)\leqslant 1$

只要证　$(1+a+b+ab)(1-a)(1-b)\leqslant 1$

只要证　$(1+a)(1+b)(1-a)(1-b)\leqslant 1$

只要证 $(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 1$。但这是显然的。

12 $a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2$

$\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$(例15)

$\geqslant abc(a+b+c)$ (例16)

13 $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2=1$

$\because$ $0\leqslant(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=1+2(ab+bc+ca)$

$\therefore$ $ab+bc+ca\geqslant -\dfrac{1}{2}$

14 $(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{a^2b^2}\cdot 2\sqrt{a^3b^3}$

$=8a^3b^3$

15 $(a+b)^4(a^2+b^2)\geqslant(2\sqrt{ab})^4(2\sqrt{a^2b^2})=32a^3b^3$

16 $(a+1)(b+1)(c+a)^3(b+c)^3\geqslant 2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b}$

$\cdot(2\sqrt{ac})^3(2\sqrt{bc})^3=256a^2b^2c^3$

17 $\log_{10}{}^a+\log_a{}^{10}\geqslant 2\sqrt{\log_{10}{}^a\log_a{}^{10}}=2$

18 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$

$\geqslant 2\sqrt{1\cdot a_1}\cdot 2\sqrt{1\cdot a_2}\cdots 2\sqrt{1\cdot a_n}$

$=2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}=2^n\sqrt{1}=2^n$

19 $(1+x^n)(1+x)^n\geqslant 2\sqrt{x^n}(2\sqrt{x})^n=2^{n+1}x^n$

20 $\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1+a^i}{2}>a^{\frac{1}{2}}a^1a^{\frac{3}{2}}\cdots a^{\frac{n}{2}}$

$=a^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{2}}=a^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}i}=a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}}=a^{\frac{1}{4}(n^2+n)}$

21　利用数学归纳法

22　(1)　$|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\leqslant|\sqrt{a}|+|-\sqrt{b}|$

$=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(2)　$\because\ |\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\,|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$

$\leqslant|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\,|\sqrt{a}+\sqrt{b}|=|(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})|=|a-b|$

$\therefore\ |\sqrt{a}-\sqrt{b}|\leqslant\sqrt{|a-b|}$

23　$\big||a|-|b|\big|=\big||a|-|-b|\big|\leqslant|a-(-b)|$　(§3.2)

$=|a+b|$

24　$|a-b|=|(a-c)+(c-b)|\leqslant|a-c|+|c-b|$

其中等号成立的条件为

$$\begin{cases}a-c>0\\c-b>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}a-c<0\\c-b<0\end{cases}\text{或}a-c=0\text{或}c-b=0$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a>c\\c>b\end{cases}\text{或}\begin{cases}a<c\\c<b\end{cases}\text{或}a=c\text{或}c=b$$

$$\Longrightarrow a>c>b\text{或}a<c<b\text{或}a=c\text{或}b=c$$

25　为此只要证$(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2})^2\leqslant(a-b)^2$成立

只要证　$a^2+c^2+b^2+c^2-2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$

$\leqslant a^2-2ab+b^2$成立

只要证　$c^2+ab\leqslant\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$成立

只要证　$c^4+2abc^2+a^2b^2\leqslant a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+c^4$成立

只要证　$2ab\leqslant a^2+b^2$成立。但这是成立的，其中等号当且仅当$a=b$时成立。

26 $\left|\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}\right|$

$$=\left|\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|$$

$$\leqslant\left|\left(a+\frac{1}{2}\right)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right|=1$$

$\because\quad a+\frac{1}{2}\neq a-\frac{1}{2}$

$\therefore\quad -1<\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}<1$

27 为此只要证 $|a+b|<|1+ab|$

只要证 $a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2$

只要证 $a^2+b^2-1-a^2b^2<0$

只要证 $(1-a^2)(1-b^2)>0$

但 $|a|<1$，$|b|<1$ $\therefore 1-a^2>0$，$1-b^2>0$

故 $(1-a^2)(1-b^2)>0$显然成立。

28 （利用数学归纳法）

(1) 当$n=1$时成立

(2) 假定$n=k$时成立

那么当$n=k+1$时

$$|\sin(k+1)t|=|\sin(kt+t)|$$

$$=|\sin kt\cos t+\sin t\cos kt|$$

$$\leqslant|\sin kt\cos t|+|\sin t\cos kt|$$

$$=|\sin kt||\cos t|+|\sin t||\cos kt|$$

$$\leqslant|\sin kt|+|\sin t|$$

$\leqslant k|\sin t|+|\sin t|$（归纳假定）

$=(k+1)|\sin t|$ 成立

从而原命题成立。

29 （1）当$n=5$时，$5^2=25>11=2\times5+1$，命题成立。

（2）假定$n=k(k>4)$时成立，即$k^2>2k+1$

那么当$n=k+1$时

$$(k+1)^2=k^2+2k+1>(2k+1)+2k+1$$

$$=4k+2>2k+3=2(k+1)+1 \quad 命题成立$$

故 $n^2>2n+1\ (n>4)$

30 （1）当$n=3$时

$$F_3(x)=xF_2(x)+F_1(x)=x\cdot x+1=x^2+1$$

$$F_3(x)^2=(x^2+1)^2\leqslant(x^2+1)^2(x^2+2)^{3-2} \quad 成立$$

当$n=4$时

$$F_4(x)=xF_3(x)+F_2(x)=x(x^2+1)+x=x(x^2+2)$$

$$F_4(x)^2=x^2(x^2+2)^2\leqslant(x^2+1)^2(x^2+2)^{4-2}成立$$

（2）假定$n=k-1$、k时成立$(k\geqslant4)$

那么当$n=k+1$时

$$F_{k+1}(x)^2=(xF_k(x)+F_{k-1}(x))^2$$

$$=x^2F_k(x)^2+2xF_k(x)F_{k-1}(x)+F_{k-1}(x)^2$$

$$\leqslant x^2(x^2+1)^2(x^2+2)^{k-2}$$

$$+2x\sqrt{(x^2+1)^2(x^2+2)^{k-2}\cdot(x^2+1)^2\ (x^2+2)^{k-3}}$$

$$+(x^2+1)^2(x^2+2)^{k-3}$$

$$=(x^2+1)^2(x^2+2)^{k-3}(x^2(x^2+2)+2x\sqrt{x^2+2}+1)$$

$$=(x^2+1)^2(x^2+2)^{k-3}(x\sqrt{x^2+2}+1)^2$$

故只要证 $x\sqrt{x^2+1}+1\leqslant x^2+2$

只要证 $x\sqrt{x^2+2}\leqslant x^2+1$

只要证 $x^4+2x^2\leqslant x^4+2x^2+1$

但这是显然的。$\therefore n=k+1$时成立

故原命题成立。

31 $1+x+x^2+\cdots+x^{2n}$

$$\geqslant(2n+1)\sqrt[2n+1]{1\cdot x\cdot x^2\cdots x^{2n}}$$

$$=(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{1+2+\cdots+2n}}$$

$$=(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{\frac{1}{2}\cdot(2n)(2n+1)}}=(2n+1)x^n$$

32 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}$

$$\geqslant n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_n}{a_1}}=n\sqrt[n]{1}=n$$

33 $\frac{1}{n}(1^r+2^r+\cdots+n^r)\geqslant\sqrt[n]{1^r2^r\cdots n^r}$

$=\sqrt[n]{(n!)^r}$

$\therefore$ $1^r+2^r+\cdots+n^r\geqslant n\sqrt[n]{(n!)^r}$

故 $(1^r+2^r+\cdots+n^r)^n\geqslant n^n(n!)^r$

34 $\log_a b+\log_b c+\log_c a\geqslant 3\sqrt[3]{\log_a b\log_b c\log_c a}$

$$=3\sqrt[3]{\log_a b\frac{\log_a c}{\log_a b}\frac{\log_a a}{\log_a c}}=3$$

35 为此只要证 $\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\leqslant 1+\frac{x}{n+1}$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\sqrt[n+1]{1\times\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$\leqslant\frac{1+\overbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)+\left(1+\frac{x}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{x}{n}\right)}^{n\text{个}}}{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)+n\cdot\frac{x}{n}}{n+1}=1+\frac{x}{n+1}$$

36 $\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\right)\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}\right)$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}}=9$$

37 $\because (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$

将不等式左边之积乘出，得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1}+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_2}+\cdots+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_n}\geqslant n^2$$

$$1+\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1}+1+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{a_2}+\cdots+1$$

$$+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_n}\geqslant n^2$$

从而导出不等式

38 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$=9abc$

39 左$\geqslant 4\sqrt[4]{abcd}\ 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}=16abcd$

40 左$\geqslant 4\sqrt[4]{a^2cd\cdot b^2da\cdot c^2ab\cdot d^2bc}=4abcd$

41 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=(a+b+c)(a+b+c)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2}\frac{1}{c^2}}=27$

42 左$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}$

$>(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}}=(n-1)\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

43 左$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{a+b+c}\times\frac{1}{b+c+d}\times\frac{1}{c+d+a}\times\frac{1}{a+b+d}}$

$=\frac{4}{\sqrt[4]{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(a+b+d)}}$

$\geqslant\frac{4}{\frac{1}{4}[(a+b+c)+(b+c+d)+(c+d+a)+(a+b+d)]}$

$=\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{a+b+c+d}$

44 $a+\frac{1}{(a-b)b}\geqslant a+\frac{1}{\left[\frac{(a-b)+b}{2}\right]^2}=a+\frac{4}{a^2}$

$=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{4}{a^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{2}\frac{a}{2}\frac{4}{a^2}}=3$

45 为此只要证$\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)$

$+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)\geqslant\frac{3}{2}+3$

只要证$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+c+a}{c+a}+\frac{c+a+b}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}$

只要证$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}$

令 $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}}$$

$$\geqslant\frac{3}{\frac{1}{3}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]}=\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{9}{2}$$

46 ∵三角形中两边之和大于第三边

∴ $b+c-a$，$c+a-b$，$a+b-c$均为正数

故 $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c-a}\cdot\frac{1}{c+a-b}\cdot\frac{1}{a+b-c}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$$

$$\geqslant\frac{3}{\frac{1}{3}[(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)]}=\frac{9}{a+b+c}$$

47 $(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$

$$\geqslant\left(\sqrt{a_1}\sqrt{\frac{1}{a_1}}+\cdots+\sqrt{a_n}\sqrt{\frac{1}{a_n}}\right)^2=n^2$$

48 ∵$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

$$=[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$\geqslant\left[\sqrt{a+b}\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b+c}\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{c+a}\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right]^2$$

$$=(1+1+1)^2=9$$

$$\therefore\quad \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$$

49　$4(a^6+b^6+c^6+d^6)$

$$=(1^2+1^2+1^2+1^2)[(a^3)^2+(b^3)^2+(c^3)^2+(d^3)^2]$$

$$\geqslant(1\cdot a^3+1\cdot b^3+1\cdot c^3+1\cdot d^3)^2$$

$$=(a^3+b^3+c^3+d^3)^2$$

50　$n(1+a^2+\cdots+a^{2n})$

$$=(1^2+1^2+\cdots+1^2)(1^2+a^2+\cdots+(a^n)^2)$$

$$\geqslant(1\cdot 1+1\cdot a+\cdots+1\cdot a^n)^2$$

$$=(1+a+\cdots+a^n)^2$$

51　$(ax_1+bx_2)(bx_1+ax_2)=(ax_1+bx_2)(ax_2+bx_1)$

$$\geqslant(\sqrt{ax_1}\sqrt{ax_2}+\sqrt{bx_2}\sqrt{bx_1})^2$$

$$=(a\sqrt{x_1x_2}+b\sqrt{x_1x_2})^2=(a+b)^2x_1x_2=x_1x_2$$

52　$\because (a-c)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)$

$$=[(a-b)+(b-c)]\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)$$

$$\geqslant\left(\sqrt{a-b}\frac{1}{\sqrt{a-b}}+\sqrt{b-c}\frac{1}{\sqrt{b-c}}\right)^2$$

$$=(1+1)^2=4$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$$

53 $左=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{a+c}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$

$$=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+a+c}{a+c}+\frac{c+a+b}{a+b}-3$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(1+1+1)^2-3=\frac{3}{2}$$

54 $\because\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$

$$\therefore\quad -2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}\leqslant-2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)$$

$$\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$\leqslant(a_1^2-2a_1b_1+b_1^2)+\cdots+(a_n^2-2a_nb_n+b_n^2)$$

$$\Longrightarrow\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2\leqslant(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2$$

$$\Longrightarrow\left|\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}\right|$$

$$\leqslant\sqrt{(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$

$$\leqslant|a_1-b_1|+\cdots+|a_n-b_n|$$

55　不失一般性，假定$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$

则　$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{a_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{a_n}$

故由 逆序和≤乱序和 知

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} \leqslant a_1 \cdot \frac{1}{b_1} + a_2 \cdot \frac{1}{b_2} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

因此$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n$

56　为此只要证 $a\lg + b\lg b + c\lg c \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)$

$(\lg a + \lg b + \lg c)$成立即可

由于a、b、c与$\lg a$、$\lg b$、$\lg c$同序

故由 同序和≥乱序和知

$$a\lg a + b\lg b + c\lg c = a\lg a + b\lg b + c\lg c \qquad ①$$

$$a\lg a + b\lg b + c\lg c \geqslant b\lg a + c\lg b + a\lg c \qquad ②$$

$$a\lg a + b\lg b + c\lg c \geqslant c\lg a + a\lg b + b\lg c \qquad ③$$

① + ② + ③得

$3(a\lg a + b\lg b + c\lg c) \geqslant (a+b+c)(\lg a + \lg b + \lg c)$

57　不失一般性、假定$a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$

则　$a^9 \geqslant b^9 \geqslant c^9 \geqslant d^9$，$a^6 \geqslant b^6 \geqslant c^6 \geqslant d^6$

$$\frac{1}{a^3} \leqslant \frac{1}{b^3} \leqslant \frac{1}{c^3} \leqslant \frac{1}{d^3}$$

故由切比雪夫不等式知

$$4(a^9 + b^9 + c^9 + d^9)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}\right)$$

$$\geqslant 4 \cdot 4\left(a^9 \frac{1}{a^3} + b^9 \frac{1}{b^3} + c^9 \frac{1}{c^3} + d^9 \frac{1}{d^3}\right)$$

$$=16(a^6+b^6+c^6+d^6)$$

$$=4\cdot4(a^2a^4+b^2b^4+c^2c^4+d^2d^4)$$

$$\geqslant4(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^4+b^4+c^4+d^4)$$

$$\geqslant(a^2+b^2+c^2+d^2)^3$$

58　由切比雪夫不等式知

$$4(a^6+b^6)=2\cdot2(a^3a^3+b^3b^3)$$

$$\geqslant2(a^3+b^3)(a^3+b^3)$$

$$=2(a\cdot a^2+b\cdot b^2)(a^3+b^3)$$

$$\geqslant(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)$$

故 $$\frac{a^6+b^6}{2}\geqslant\frac{a+b}{2}\ \frac{a^2+b^2}{2}\ \frac{a^3+b^3}{2}$$

59　不失一般性。假定$a\geqslant b\geqslant c$

故由切比雪夫不等式知

$$3(a^4+b^4+c^4)=3(aa^3+bb^3+cc^3)$$

$$\geqslant(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

$$\geqslant3(a+b+c)abc\qquad\text{(算几不等式)}$$

故 $$a+b+c\leqslant\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$$

60　不失一般性。假定$a\geqslant b\geqslant c$

故由切比雪夫不等式知

$$3(a^8+b^8+c^8)=3(a^2a^6+b^2b^6+c^2c^6)$$

$$\geqslant(a^2+b^2+c^2)(a^6+b^6+c^6)$$

$$\geqslant(ab+bc+ca)3\sqrt[3]{a^6b^6c^6}$$

$$=3(ab+bc+ca)a^2b^2c^2$$

$$=3\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)a^3b^3c^3$$

故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{a^3b^3c^3}$

61 由$M_2(x, y, z)\leqslant M_4(x, y, z)$知

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\frac{x^4+y^4+z^4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

故 $x^2+y^2+z^2\leqslant\sqrt{3}$

62 由$M_1(x, y, z)\leqslant M_3(x, y, z)$知

$$\frac{x+y+z}{3}\leqslant\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

即 $\frac{3}{3}\leqslant\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

故 $x^3+y^3+z^3\geqslant3$

63 由$M_3(a, b, c, d)\leqslant M_6(a, b, c, d)$知

$$\left(\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant\left(\frac{a^6+b^6+c^6+d^6}{4}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\Longrightarrow\left(\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}\right)^2\leqslant\frac{a^6+b^6+c^6+d^6}{4}$$

$$\Longrightarrow(a^3+b^3+c^3+d^3)^2\leqslant4(a^6+b^6+c^6+d^6)$$

64 由$M_1\left(a+\frac{1}{a}, b+\frac{1}{b}, c+\frac{1}{c}\right)\leqslant M_2\left(a+\frac{1}{a},\right.$ $\left.b+\frac{1}{b}, c+\frac{1}{c}\right)$知

$$\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}}{3}$$

$$\leqslant\left[\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$\geqslant\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

但 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$$\geqslant(3\sqrt[3]{abc})\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\ \frac{1}{b}\ \frac{1}{c}}\right)=9$$

故 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2$

$$\geqslant\frac{1}{3}(1+9)^2=\frac{100}{3}$$

65 由$M_1\leqslant M_m$知

$$\frac{a_1+\frac{1}{a_1}+\cdots+a_n+\frac{1}{a_n}}{n}$$

$$\leqslant\left[\frac{\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^m+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^m}{n}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\Longrightarrow\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^m+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^m$$

$$\geqslant\frac{n}{n^m}\left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\right]^m$$

$$=\frac{n}{n^m}\left[1+\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\right]^m$$

但 $\quad \dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=(a_1+\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$

$\geqslant n^2$

故 $\quad \left(a_1+\dfrac{1}{a_1}\right)^m+\cdots+\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)^m$

$$\geqslant \frac{n}{n^m}(1+n^2)^m=n\left(n+\frac{1}{n}\right)^m$$

66 由 $M_1(\sqrt{13a+1}, \sqrt{13b+1}, \sqrt{13c+1})$

$\leqslant M_2(\sqrt{13a+1}, \sqrt{13b+1}, \sqrt{13c+1})$ 知

$$\frac{\sqrt{13a+1}+\sqrt{13b+1}+\sqrt{13c+1}}{3}$$

$$\leqslant\left[\frac{(13a+1)+(13b+1)+(13c+1)}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{13(a+b+c)+3}{3}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{13\times 1+3}{3}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

故 $\quad \sqrt{13a+1}+\sqrt{13b+1}+\sqrt{13c+1}\leqslant 4\sqrt{3}$

67 由 $M_3{}^3(a, b, c)\geqslant M_1(a, b, c)M_2{}^2(a, b, c)$ 知

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant\frac{a+b+c}{3}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

故 $\quad 3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

68 由 $M_n^n(x, y, z)\geqslant M_3^3(x, y, z)M_{n-3}^{n-3}(x, y, z)$

知

$$\frac{x^n+y^n+z^n}{3}\geqslant\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\cdot\frac{x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3}}{3}$$

$$\geqslant xyz\,\frac{x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3}}{3}=\frac{x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3}}{3}$$

故 $\quad x^n+y^n+z^n\geqslant x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3}$

69 $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{A^2B^2C^2}}$

$$=\frac{3}{(\sqrt[3]{ABC})^2}\geqslant\frac{3}{\left(\frac{A+B+C}{3}\right)^2}=\frac{3}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{27}{\pi^2}$$

70 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2$

$$\geqslant\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{R^2}$$

71 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\geqslant\frac{3}{R^2}$

∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{R}$

72 由柯西不等式知

$$(am_a+bm_b+cm_c)^2$$

$$\leqslant(a^2+b^2+c^2)(m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2)$$

$$=(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

∴ $am_a+bm_b+cm_c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$

73 设 $-a+b+c=x$，$a-b+c=y$，$a+b-c=z$

则 $x>0$，$y>0$，$z>0$，$a=\frac{y+z}{2}$，$b=\frac{x+z}{2}$，$c=\frac{x+y}{2}$

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc$$

$$-(a^3+b^3+c^3)$$

$$=\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{z-y}{2}\right)^2+\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{x-z}{2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$+4\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$-\left[\left(\frac{y+z}{2}\right)^3+\left(\frac{x+z}{2}\right)^3+\left(\frac{x+y}{2}\right)^3\right]$$

$$=\frac{1}{8}[(y^2-z^2)(y-z)+(x^2-y^2)(x-z)+(x^2-y^2)$$

$$(x-y)+4(y+z)(x+z)(x+y)-(y+z)^3$$

$$-(x+z)^3-(x+y)^3]$$

$$=\frac{1}{8}[(y^3-y^2z-z^2y+z^3)+(x^3-x^2y-z^2x+z^3)$$

$$+(x^3-x^2y-y^2x+y^3)+4(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z$$

$$+z^2x+z^2y+2xyz)-(2y^3+2z^3+2x^3+3x^2z$$

$$+3xz^2+3y^2x+3x^2y+3z^2y+3zy^2)]$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 8xyz=xyz>0$$

故 $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc$

$>a^3+b^3+c^3$

74 设 $-a+b+c=x$，$a-b+c=y$，$a+b-c=z$

则 $x>0$，$y>0$，$z>0$，$a=\dfrac{y+z}{2}$，$b=\dfrac{x+z}{2}$，

$$c=\frac{x+y}{2}$$

$$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)$$

$$=\left(\frac{x+z}{2}\right)^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{z-y}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{x-z}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{16}[(x+z)^2(x+y)(z-y)+(z+y)^2(y+z)$$

$$(x-z)+(y+z)^2(x+z)(y-x)]$$

$$=\cdots$$

$$=2xyz\left(\frac{y^2}{z}+\frac{x^2}{y}+\frac{z^2}{x}-x-y-z\right)$$

$\because\quad \frac{y^2}{z}+z\geqslant 2y,\quad \frac{x^2}{y}+y\geqslant 2x,\quad \frac{z^2}{x}+x\geqslant 2z$

$\therefore\quad \frac{y^2}{z}+\frac{x^2}{y}+\frac{z^2}{x}\geqslant x+y+z$

故　$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)\geqslant 0$

其中等号成立的充要条件是

$$\begin{cases}\frac{y^2}{z}=z\\ \frac{x^2}{y}=y\\ \frac{z^2}{x}=x\end{cases}\iff x=y=z\iff a=b=c$$

75　$a+b-c$、$b+c-a$、$c+a-b\in R^+$

$$a=\frac{(a+b-c)+(c+a-b)}{2}\geqslant\sqrt{(a+b-c)(c+a-b)}$$

$$b=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}\geqslant\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$$

$$c=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}\geqslant\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$$

$\therefore\quad abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

说明：可以推广为

若$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 且$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=(n-1)s$，则

$$\prod_{i=1}^{n}a_i\geqslant(n-1)^n\prod_{i=1}^{n}(s-a_i)$$

76 $\sin A\sin B\sin C=\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}\sin A\sin B\sin C$

$\leqslant\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin^2\frac{60^\circ+A}{2}\sin^2\frac{B+C}{2}$ （例105）

$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\sin\frac{60^\circ+A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\right)^2$

$\leqslant\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin^4\frac{60^\circ+A+B+C}{4}$ （例105）

$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin^4 60^\circ=\frac{3}{8}\sqrt{3}$

77 $\sin C=\sin[180^\circ-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\because\quad -1<\cos B<1,\ -1<\cos A<1,\sin A>0,\sin B>0$

$\therefore\quad \sin A\cos B<\sin A,\ \cos A\sin B<\sin B$

故 $\sin C<\sin A+\sin B$

78 设 $A'=\frac{\pi-A}{2},\ B'=\frac{\pi-B}{2},\ C'\frac{\pi-C}{2}$

则 $A'+B'+C'=\frac{\pi-A}{2}+\frac{\pi-B}{2}+\frac{\pi-C}{2}=\pi$

∴ A'、B'、C'是$\triangle A'B'C'$的三个内角．由练习76知：

$$\sin A'\sin B'\sin C'\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}$$

故 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$=\sin A'\sin B'\sin C'\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}$$

79 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\leqslant 4\times\frac{3}{8}\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

80 设 $A'=\frac{\pi-A}{2}$，$B'=\frac{\pi-B}{2}$，$C'=\frac{\pi-C}{2}$

则 $A'+B'+C'=\pi$

∴ A'、B'、C'是$\triangle A'B'C'$的三个内角，故由练习79知 $\sin A'+\sin B'+\sin C'\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$

故 $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$=\sin A'+\sin B'+\sin C'\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

81　不失一般性，假定$A\geqslant B\geqslant C$

则　$\sin A\geqslant\sin B\geqslant\sin C,\ \cos\frac{A}{2}\leqslant\cos\frac{B}{2}\leqslant\cos\frac{C}{2}$

故由切比雪夫不等式知

$$\sin A\cos\frac{A}{2}+\sin B\cos\frac{B}{2}+\sin C\cos\frac{C}{2}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}$$

82　$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\geqslant4$$

83　设$\frac{A'}{2}=\frac{\pi}{2}-A,\ \frac{B'}{2}=\frac{\pi}{2}-B,\ \frac{C'}{2}=\frac{\pi}{2}-C$；

则　$\frac{A'}{2}+\frac{B'}{2}+\frac{C'}{2}=\frac{1}{2}\pi$

∴　A'、B'、C'是$\triangle A'B'C'$的三个内角

故　$\sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2}\leqslant\frac{1}{8}$

因此　$\cos A\cos B\cos C$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)$$

$$=\sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

84　为此只要证$\cos A+\cos B+\cos C-1>0$即可

$$\cos A+\cos B+\cos C-1$$

$$=(\cos A+\cos B)-(1-\cos C)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$$

85　$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}$

$$=3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}$$

$$\Longrightarrow(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)^{\frac{2}{3}}\geqslant 3$$

$$\Longrightarrow\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt{3}$$

86　(1)　$\because \operatorname{ctg}(A+B)=\operatorname{ctg}(\pi-C)=-\operatorname{ctg}C$

$$\Longrightarrow\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}=-\operatorname{ctg}C$$

$$\Longrightarrow\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1=-\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C$$

$$\Longrightarrow\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C=1$$

(2)　$\operatorname{ctg}^2A+\operatorname{ctg}^2B+\operatorname{ctg}^2C$

$$\geqslant\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C$$

$=1$

87　$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-4\triangle\operatorname{ctg}A$$

同理$b^2=a^2+c^2-4\triangle\operatorname{ctg}B$，$c^2=a^2+b^2-4\triangle\operatorname{ctg}c$

$\therefore$　$a^2+b^2+c^2=4\triangle(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)$

故　$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\triangle}\geqslant\frac{4\sqrt{3}\triangle}{4\triangle}=\sqrt{3}$

中学数学奥林匹克系列专题

绝对不等式200例

张宁生　田利英　编著

*

新华出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

北京燕山印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　4印张　77,000字

1990年12月第一版　　1990年12月北京第一次印刷

印数：1—15,000册

ISBN 7-5011-0935-4/G·289　　定价：1.90元

责任编辑：陶　军
封面设计：王小明

ISBN 7-5011-0935-4/G·289　定价：1.90元