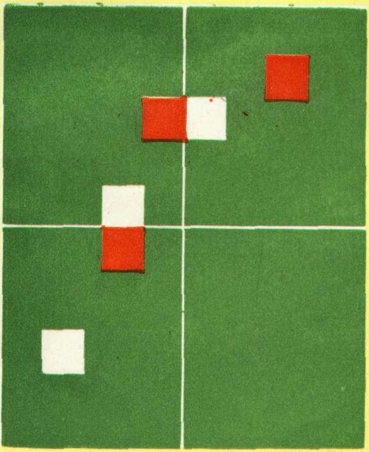
中学数学奥林匹克系列专题

递归关系60例

张宁生 田利英 编著

新华出版社



中学数学奥林匹克系列专题

递归关系60例

张宁生　田利英　编著

新华出版社

中学数学奥林匹克系列专题
递归关系60例
张宁生　田利英　编著
*
新华出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
北京燕山印刷厂印刷
*
787×1092毫米　32开本　2.5印张　47,000字
1990年12月第一版　　1990年12月北京第一次印刷
印数：1—15,000册
ISBN 7—5011—0937—0/G·291　　定价：1.50元

引　言

递归方法是一种探索数学规律的重要方法。由于计算机的操作采取离散的即数字和递归的方式，因此建立递归关系显得尤为重要，它显示了一个人的聪明才智。阅读此书，读者将体会到建立递归关系是饶有趣味的。

本书是作者在北京市奥林匹克数学学校高二组、北京市海淀区、西城区奥林匹克数学学校高二组等处所用讲稿的基础上，整理、扩充而成。

目　　录

§1　基本概念

设数列$\{x_n\}$：x_0，x_1，$\cdots$，x_n，$\cdots$的一个关系到x_n与x_{i1}，x_{i2}，$\cdots$，x_{ik}($K\leqslant n$，$0\leqslant i_1$，i_2，$\cdots i_k\leqslant n-1$）的方程称为递归关系

例1　在数列$\{x_n\}$中

（1）　$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$是递归关系

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \end{cases}\quad \text{称为初始值}$$

（2）$x_n=x_{n-1}+9x_{n-2}-9x_{n-3}(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ 是递归关系。$x_0=0$，$x_1=1$和$x_2=2$是初始值。

从计算的观点看，有时一个公式还不如一个递归关系那样有价值。

例2　$\begin{cases} x_n=4x_{n-1}-x_{n-2} \\ x_1=3 \\ x_2=11 \end{cases}$是给出的递归关系与初始值。

$$x_n=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$$

是给出的通项公式

今求$x_4=?$

显然$x_4=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^4+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^4=?$

并不好算，但是利用递推关系，则有

$$x_3=4x_2-x_1=4\times 11-3=41$$

$$x_4=4x_3-x_2=4\times 41-11=153$$

结果很快就得到了。

练习1 假设$x_1=97$，对$n>1$，$x_n=\frac{n}{x_{n-1}}$，计算乘积

$$x_1x_2\cdots x_8$$

（第三届美国数学邀请赛试题）

练习2 一个数列x_1，x_2，x_3，…定义为

$$x_1=\sqrt[3]{3} \qquad x_2=(\sqrt[3]{3})^{\sqrt[3]{3}}$$

$$x_n=(x_{n-1})^{\sqrt[3]{3}}\ (n>1)$$

使x_n是整数的最小的n是

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 9 (E) 27

（第三十六届美国中学数学竞赛试题）

练习3 循环数例$\{u_n\}$，$u_1=a$（a为任意正数），$u_{n+1}=-\frac{1}{u_n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$下列数值中能使$u_n=a$的n的值是____

(A) 14　(B) 15　(C) 16　(D) 17　(E) 18

（第四十届美国高中数学竞赛试题）

例3　斐波那契(*Fibonacci*)数

在一年开始时把一对兔子放入围场中，雌兔每月产雌雄各一的一对小兔子，第二个月开始，每对新兔子也是每月产一对小兔子，在n个月后围场中有多少对兔子？

解　对于每个$n=1,2,\cdots$令x_n表示第n个月开始(即第$n-1$个月结束)时围场中兔子的对数

$a_1=1$

$a_2=2$

$a_3=$第二个月开始时的兔子对数a_2+第一个月开始时有的兔子对数a_1(即在第二个月末生的小兔子对数a_1)$=2+1=3$

$a_4=$第三个月开始时的兔子对数a_3+第二个月开始时有的兔子对数a_2(即在第三个月末生的小兔子对数a_2)$=3+2=5$

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
大兔对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
小兔对数	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
总对数	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

a_n = 第$n-1$个月开始时的兔子对数a_{n-1} + 第$n-2$个月开始有的兔子对数a_{n-2}(即在第$n-1$个 月末生的 小兔子对数a_{n-2})

故　$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

(通项公式见例12)

例4　今用1分、2分两种邮票粘贴在一长排上，求贴足n分的方法数

解　设x_n表示用两种邮票 粘贴在一长 排上贴足n分的方法数

则　x_n = 先贴一张1分再贴足$n-1$分的所有情形数x_{n-1} + 先贴一张2分再贴足$n-2$分的所 有情形数x_{n-2}

故　$x_n = x_{n-1} + x_n - 2$，其中$x_1 = 1$，$x_2 = 2$为 初始值。

(通项公式见例12)

例5　设有一楼梯共n级，如果规定每步 只 能 跨上一 级或二级，要登上最后一级，有多少种不同的走法？

解　设x_n表示登上第n级的不同走法数。

(1) ∵登上第1级只有一种走法

∴　$x_1 = 1$

(2) ∵登上第2级可以是一级一级 的上，也 可以是登二级

∴　$x_2 = 2$

(3) 当$n \geqslant 3$时，欲求x_n，可分成两类情形讨论之

1) 如果第一步登一级，则从第 2 级登到第n级有x_{n-2}种走法

故
$$
\begin{cases}
x_n = x_{n-1} + x_n - 2 \\
x_1 = 1 \\
x_2 = 2
\end{cases}
$$

（通项公式见例12）

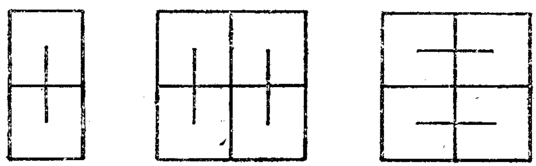
例6　$2\times n$棋盘存在多少个完全覆盖？

解　设x_n表示$2\times n$棋盘的完全覆盖数。

则

$x_1 = 1$　　如图1(1)

$x_2 = 2$　　如图1(2)



(1)　　　　(2)

图1

当　$n\geqslant 3$时，如图2

故　$x_n = 1\times x_{n-1} + 1\times x_{n-2}$

即
$$
\begin{cases}
x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\
x_1 = 1 \\
x_2 = 2
\end{cases}
$$

（通项公式见例12）

说明　例3、例4、例5、例6来自不同的实际问题，但反

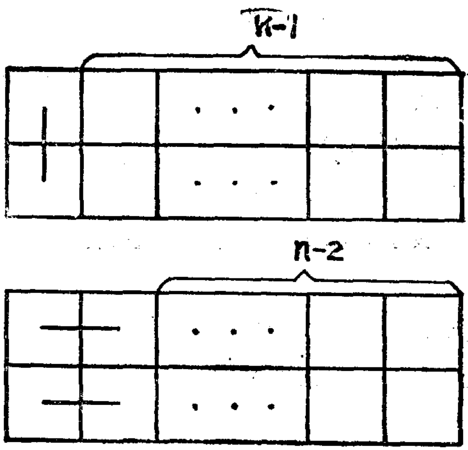


图2

映出来的本质特征——递归关系是相同的。

例7　用1、2两个数字排成n位数，要求数字1、1不相邻，问有多少种排法？

解　设x_n表示排法总数

（1）当首位数字是2时，则剩下的$n-1$位数有x_{n-1}种排法。

（2）当首位数字是1时，则第2位数字一定是2，剩下的$n-2$位数有x_{n-2}种排法

故　$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$，$x_1 = 2$，$x_2 = 3$

（通项公式见练习10）

练习4　考虑一个$1\times n$棋盘，假定我们对棋盘的每个方格用红或蓝两个颜色之一去着色，对$n=1, 2, 3, \cdots$，令x_n表示没有任何两个着红色的方格是相邻的着色的个数，求x_n所

满足的递归方程。

例8　今用1分、2分、3分、4分四种邮票粘贴在一长排上，求贴足8分的方法数？

解　设x_n表示贴足n分的方法数，则

x_n

$=$先贴一张1分后再贴足$n-1$分的方法数

$+$先贴一张2分后再贴足$n-2$分的方法数

$+$先贴一张3分后再贴足$n-3$分的方法数

$+$先贴一张4分后再贴足$n-4$分的方法数

故　$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3}+x_{n-4}(n>4)$

显然　$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=4$，$x_4=8$

$\therefore$　$x_5=x_4+x_3+x_2+x_1=8+4+2+1=15$

$x_6=15+8+4+2=29$

$x_7=29+15+8+4=56$

$x_8=56+29+15+8=108$

练习5　今用2分、3分、4分三种邮票粘贴在一长排上，求贴足10分的方法数。

练习6　假设在*Fibonacci*问题中，在开始时把2对兔子放入围场，n个月后围场中有多少对兔子？

例9　用红、白和蓝三色将$1\times n$棋盘上的方格着色，对于$n=1, 2, 3, \cdots$，令x_n表示没有两相邻方格都着红色这种着色的个数，求x_n所满足的递归关系

解　显然　$x_1=3$，$x_2=8$

当　$n\geqslant 3$时

（1）当第n格不着红色有两种方法，前$n-1$格着色有x_{n-1}种方法，共有$2x_{n-1}$种着色方法；

（2）当第n格着红色，则第$n-1$格有两种着色方法，前$n-2$格着色有x_{n-2}种方法，共有$2x_{n-2}$种着色方法。

故　$x_n=2(x_{n-1}+x_{n-2})$

（通项公式见例13）

练习7　在信道上传输仅用3个字母a，b，c且长度为n的词，规定有两个a连续出现的词不能传输，试确定这个信道容许传输的词的个数

练习8　由红、黑、白三种颜色的球排成一列，共n个球，任意两个白球不相邻，求排列方法种数x_n

例10　如图3所示

P是平面连通区域D_1，D_2，…，D_n的公共界点，用k种颜色给这n个区域染色，并且使相邻区域（有公共边界的区域）着色不同，令x_n表示不同的着色方案数，求递归关系($n\geqslant2$)

解　（1）当$n=2$时，可对D_1着k色中任一色，有k种方法

D_2与D_1相邻，不能再着D_1中的颜色，可着另外$k-1$色之一，有$k-1$种方法，共有$k(k-1)$种

$\therefore$　$x_2=k(k-1)$

（2）当$n=3$时，$x_3=k(k-1)(k-2)$

（3）当$n\geqslant4$时，欲求x_n可分成两种情况讨论

1）当D_1与D_{n-1}异色时（相当D_1，D_{n-1}相邻），则在D_1，

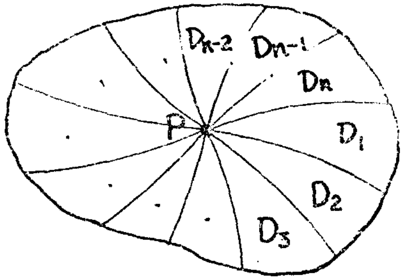


图3

D_2，…，D_{n-1}中有x_{n-1}种着色方案。

又　D_1，D_{n-1}着色既定，D_n有$k-2$种着色方案。

共有$(k-2)x_{n-1}$种方案。

2）当D_1与D_{n-1}同色时（相当D_1，D_{n-2}相邻），则在D_1，D_2，…，D_{n-2}中有x_{n-2}种着色方案。

又　D_1，D_{n-1}着色既定，D_n有$k-1$种着色方案

共有$(k-1)x_{n-2}$种着色方案

故
$$\begin{cases} x_n=(k-2)x_{n-1}+(k-1)x_{n-2} \\ x_2=k(k-1) \\ x_3=k(k-1)(k-2) \end{cases}$$

（通项公式见例18）

练习9　把一个圆分成$n(n\geqslant 2)$个扇形，每个扇形都可用红、白、蓝色之一着色，要求相邻扇形颜色不同，有多少种着色方法？

例11　设y_{2n}为$3\times 2n$棋盘的完全覆盖数，求递归关系

解　（1）当$n=1$时，如图4　知　$y_2=3$

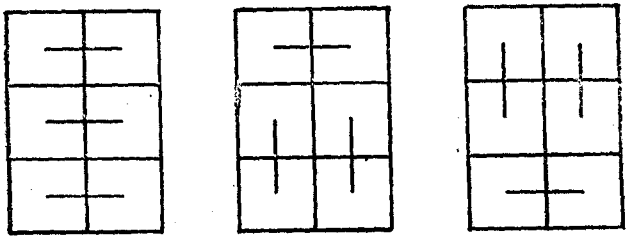


图4

(2) 当$n=2$时，如图5 知 $y_4=3\times3+2=11$

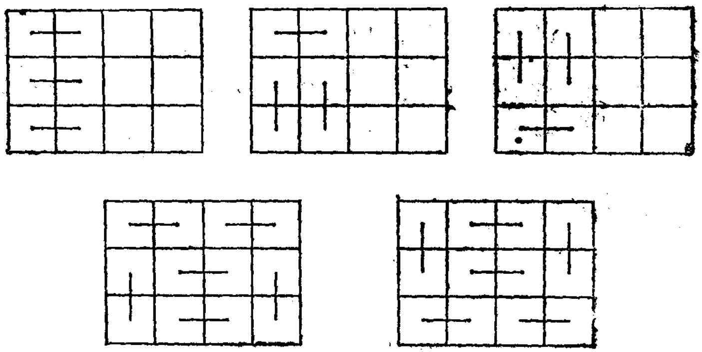


图5

即 $y_4=2y_2+2$

同理 $y_6=3y_4+2y_2+2$

$y_8=3y_6+2y_4+2y_2+2$

………

$$y_{2n}=3y_{2n-2}+2y_{2n-4}+2y_{2n-6}+\cdots+2y_2+2$$

$$y_{2n-2}=3y_{2n-4}+2y_{2n-6}+\cdots+2y_2+2$$

$\therefore\quad y_{2n}-y_{2n-2}=3y_{2n-2}-y_{2n-4}$

故 $\quad y_{2n}=4y_{2n-2}-y_{2n-4}$

（通项公式见例14）

§2 二阶齐次递归方程的解法

1 定义

若 $\quad x_n+ax_{n-1}+bx_{n-2}=0$ ①

其中a、b为常数且$b\neq0$，则称①为二阶齐次递归方程

称 $\quad x^2+ax+b=0$ ②

为①的特征方程，而②的根q_1，q_2称为特征根

2 定理

若初始条件为$\begin{cases}x_0=b_0,\\x_1=b_1\end{cases}$ 其中b_0，b_1为常数，

则

（1）当$q_1\neq q_2$时

$$x_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n \qquad ③$$

（2） 当 $q_1 = q_2 = q \neq 0$时

$$x_n = (c_1 + c_2 n)\ q^n \qquad ④$$

（3） 当 $q_1 = r^n e^{in\theta}$, $q_2 = r^n e^{-in\theta}$时

$$x_n = c_1 r^n \cos n\theta + c_2 r^n \sin n\theta \qquad ⑤$$

其中c_1、c_2是唯一确定的常数

证 （1） ③、④、⑤是①的通解

1） 当$q_1 \neq q_2$时，将③代入①得

左

$= c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + a(c_1 q_1^{n-1} + c_2 q_2^{n-1}) + b\ (c_1 q_1^{n-2}$

$+ c_2 q_2^{n-2})$

$= c_1\ (q_1^2 + a q_1 + b)\ q_1^{n-2} + c_2\ (q_2^2 + a q_2 + b)\ q_2^{n-2}$

$= 0 =$ 右

因此 $x_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$是①的通解

2） 当$q_1 = q_2 = q \neq 0$时，将④代入①得

左

$= (c_1 + c_2 n)\ q^n + a\ (c_1 + c_2\ (n-1) q^{n-1} + b(c_1 +$

$c_2(n-2))q^{n-2}$

$= (c_1 + c_2 n)\ q^n + a\ (c_1 + c_2 n)\ q^{n-1} + b\ (c_1 + c_2 n)$

$q^{n-2} - (aq + 2b)\ c_2 q^{n-2}$

$= (c_1 + c_2 n)\ (q^n + a q^{n-2} + b q^{n-2}) - (aq + 2b) c_2 q^{n-2}$

$= (c_1 + c_2 n) \times 0 - 0 \times c_2 q^{n-2}$

$= 0 =$ 右

3） 当$q_1 = r^n e^{in\theta}$, $q_2 = r^n e^{-in\theta}$时

$$r^n\cos n\theta = \frac{1}{2}(q_1^n + q_2^n)$$

$$r^n\sin n\theta = \frac{1}{2i}(q_1^n - q_2^n)$$

将⑤代入①得

$$\begin{aligned}
左 &= \frac{1}{2}c_1[(q_1^n + q_2^n) + a(q_1^{n-1} + q_2^{n-1}) + b(q_1^{n-2} \\
&\quad + q_2^{n-2})] + \frac{1}{2i}c_2[(q_1^n - q_2^n) + a(q_1^{n-1} - q_2^{n-1}) \\
&\quad + b(q_1^{n-2} - q_2^{n-2})] \\
&= \frac{1}{2}c_1[q_1^{n-2}(q_1^2 + aq_1 + b) + q_2^{n-2}(q_2^2 + aq_2 + b)] \\
&\quad + \frac{1}{2i}c_2[q_1^{n-2}(q_1^2 + aq_1 + b) - q_2^{n-2}(q_2^2 + aq_2 + b)] \\
&= 0 = 右
\end{aligned}$$

(2) 由初始条件可知c_1、c_2唯一确定

1) 当$q_1 \neq q_2$时

$$\begin{cases} x_0 = b_0 \\ x_1 = b_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = b_0 \\ q_1c_1 + q_2c_2 = b_1 \end{cases}$$

今考虑其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = q_2 - q_1 \neq 0$$

故c_1、c_2唯一确定

2) 当$q_1 = q_2 = q \neq 0$时

$$\begin{cases} x_0 = b_0 \\ x_1 = b_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (c_1 + c_2 \times 0)q^0 = b_0 \\ (c_1 + c_2 \times 1)q^1 = b_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = b_0 \\ qc_1 + qc_2 = b_1 \end{cases}$$

今考虑其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ q & q \end{vmatrix} = q \neq 0$$

故　c_1、c_2唯一确定

3）当$q_1 = r^n e^{in\theta}$，$q_2 = r^n e^{-in\theta}$，$\theta \neq n\pi$时

$$\begin{cases} x_0 = b_0 \\ x_1 = b_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = b_0 \\ c_1 r\cos\theta + c_2 r\sin\theta = b_1 \end{cases}$$

今考虑其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r\cos\theta & r\sin\theta \end{vmatrix} = r\sin\theta \neq 0$$

故　c_1、c_2唯一确定

例12　若 $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, & \text{求} x_n = ? \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

解　特征方程为$x^2 - x - 1 = 0$

特征根为　$q_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$q_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

故通解为

$$x_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

其中c_1、c_2是待定的常数

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ c_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

故 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

练习10 若 $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ 求$x_n = ?$

练习11 若 $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{1-2}, \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ 求$x_n = ?$

练习12 若 $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \\ x_1 = 3 \\ x_2 = 6 \end{cases}$ 求$x_n = ?$

例13 若 $\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}, \\ x_1 = 3 \\ x_2 = 8 \end{cases}$ 求$x_n = ?$

解 特征方程为 $x^2 - 2x - 2 = 0$

特征根为 $q_1 = 1 + \sqrt{3}$，$q_2 = 1 - \sqrt{3}$

通解为 $x_n = c_1(1+\sqrt{3})^n + c_2(1-\sqrt{3})^n$

今欲$x_2=2x_1+2x_0$即$8=6+2x_0$，可见必须　$x_0=1$

$$\begin{cases}x_0=1\\x_1=3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}c_1+c_2=1\\c_1(1+\sqrt{3})+c_2(1-\sqrt{3})=3\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}c_1=\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}\\[2ex]c_2=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\end{cases}$$

故　$x_n=\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\dfrac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$

例14　若$\begin{cases}y_{2n}=4y_{2n-2}-y_{2n-4}，\text{求}y_{2n}=?\\y_2=3\\y_4=11\end{cases}$

解　令　$x_n=y_{2n}$，则

$$\begin{cases}x_n=4x_{n-1}-x_{n-2}\\x_1=3\\x_2=11\end{cases}$$

今欲　$x_2=4x_1-x_0$　即　$11=4\times3-x_0$知$x_0=1$

其特征方程为$x^2-4x+1=0$

其特征根为　$q_1=2+\sqrt{3}$，　$q_2=2-\sqrt{3}$

通解为　$x_n=c_1(2+\sqrt{3})^n+c_2(2-\sqrt{3})^n$

$$\begin{cases}x_0=1\\x_1=3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}c_1+c_2=1\\c_1(2+\sqrt{3})+c_2(2-\sqrt{3})=3\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} c_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \\ c_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

故 $y_{2n} = x_n = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n$

$$+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$$

例15 若 $\begin{cases} x_n = 4x_{n-2}, & \text{求} x_n = ? \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

解 特征方程为$x^2 = 4$，特征根为$q_1 = 2$，$q_2 = -2$

通解为 $x_n = c_1 2^n + c_2(-2)^n$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{4} \\ c_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

故 $x_n = 2^n + (-1)^{n-1}2^{n-2}$

例16 若 $\begin{cases} x_n = 8x_{n-1} - 16x_{n-2}, & \text{求} x_n = ? \\ x_0 = -1 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

解 特征方程为$x^2 - 8x + 16 = 0$

特征根为 $q_1 = q_2 = 4$

通解为 $x_n = c_1 4^n + c_2 n 4^n$

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ 4c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

故　$x_n = n \cdot 4^n - 4^n$

例17　若 $\begin{cases} x_n + x_{n-2} = 0, & 求 x_n = ? \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 2 \end{cases}$

解　特征方程为$x^2 + 1 = 0$

特征根为　$q_1 = i$，$q_2 = -i$

通解为　$x_n = c_1 \cos n\frac{\pi}{2} + c_2 \sin n\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

∴　$x_n = 2\sin\frac{n\pi}{2}$

例18　若 $\begin{cases} x_n = (k-1)x_{n-2} + (k-2)x_{n-1}, & 求 x_n = ? \\ x_2 = k(k-1) \\ x_3 = k(k-1)(k-2) \end{cases}$

解　特征方程为$x^2 - (k-2)x - (k-1) = 0$

特征根为　$q_1 = k-1$，$q_2 = -1$

通解为　$x_n = c_1(k-1)^n + c_2(-1)^n$

$$\begin{cases} x_2 = k(k-1) \\ x_3 = k(k-1)(k-2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1(k-1)^2 + c_2(-1)^2 = k(k-1) \\ c_1(k-1)^3 + c_3(-1)^3 = k(k-1)(k-2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = k-1 \end{cases}$$

故　$x_n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$

例19　选取一列整数a_1，a_2，a_3，……，使得每个$n \geqslant 3$都有$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$，若该数列的前1492项之和等于1985，而前1985项之和等于1492，那么前2001项之和是多少？

（第3届美国数学邀请赛试题）

解　$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

其特征方程为$x^2 - x + 1 = 0$

特征根为　$q_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$，$q_2 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$

通项为　$a_n = c_1 q_1{}^n + c_2 q_2{}^n$

$$= c_1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$+ c_2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$= (c_1 + c_2)\cos\frac{n\pi}{3} + (c_1 - c_2)\,i\sin\frac{n\pi}{3}$$

其中c_1、c_2为待定的常数

因$\cos\frac{n\pi}{3}$与$\sin\frac{n\pi}{3}$的最小正周期$T = 6$。故$\{a_n\}$是以6项为周期重复出现的周期数列。

$$a_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(c_1 - c_2)i$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(c_1+c_2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(c_1-c_2)i$$

$$a_3 = -(c_1+c_2)$$

$$a_4 = -\frac{1}{2}(c_1+c_2)-\frac{\sqrt{3}}{2}(c_1-c_2)i$$

$$a_5 = \frac{1}{2}(c_1+c_2)-\frac{\sqrt{3}}{2}(c_1-c_2)i$$

$$a_6 = c_1+c_2$$

显然 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$

又 $1492=248\times 6+4$，$1985=336\times 6+5$

$\therefore$ $S_{1492}=a_1+a_2+a_3+a_4$

$$=-\frac{3}{2}(c_1+c_2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(c_1-c_2)$$

$$S_{1985}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-(c_1+c_2)$$

即 $$\begin{cases} 1985=-\dfrac{3}{2}(c_1+c_2)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(c_1-c_2) \\ 1492=-(c_1+c_2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1+c_2=-1492 \\ c_1-c_2=\dfrac{506}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

$\therefore$ $a_n=-1492\cos\dfrac{n\pi}{3}-\dfrac{506\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{n\pi}{3}$

又 $2001=333\times 6+3$

$\therefore$ $S_{2001}=a_1+a_2+a_3=-(c_1+c_2)+\sqrt{3}(c_1-c_2)i$

$$=1492+\sqrt{3}\left(\frac{506}{3}\sqrt{3}\,i\right)i$$

$$=1492-506=986$$

§3　常系数线性齐次递归关系

1　定义

若a_1，a_2，…，a_k是常数，且$a_k \neq 0$，则

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} \qquad ①$$

$(n = k,\ k+1,\ \cdots)$

的递归关系，叫做k阶常系数线性齐次递归关系。

说明

(1) 若$a_k = 0$，则①可化为较低阶的递归方程，就不是k阶的了。

(2) 因①中出现x_i $(i = n,\ n-1,\ \cdots,\ n-k)$ 都是x_i的一次幂，故称为线性的。否则，例如

$$x_n = 3x_{n-1}^2 + x_{n-2}$$

就不是线性的递归关系。

(3) 因①中没有常数项，故称为齐次的递归关系。否则，例如$x_n = 2x_{n-1} + 3$就不是齐次的递归关系了。

（4）因①中的 a_1，a_2，…，a_k 均为常数，故称为常系数的递归关系。否则，例如

$$x_n=(n+2)x_{n-1}+2x_{n-2}\quad(n=2,\ 3,\ \cdots)$$

就不是常系数的递归关系了。

（5）初始值、特征方程、特征根已如前述，此处不过在概念上作平凡的拓广而已。

2 定理1

设递归关系①的特征根 q_1，q_2，…，q_k 互不相同，则其通解为

$$x_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n \tag{②}$$

其中 c_1、c_2、…、c_n 为待定的常数。

说明　当给出一组初始条件

$$\begin{cases}x_0=b_0\\ x_1=b_1\\ \cdots\\ x_{k-1}=b_{k-1}\end{cases}$$

时，则 c_1、c_2、…、c_k 唯一确定〔1〕

例20　若 $\begin{cases}x_n=x_{n-1}+9x_{n-2}-9x_{n-3}，\\ x_0=0\\ x_1=1\\ x_2=2\end{cases}$ 求 $x_n=?$

解　特征方程为 $x^3-x^2-9x+9=0$

特征根为　$q_1=1$，$q_2=3$，$q_3=-3$

通解为　$x_n=c_11^n+c_23^n+c_3(-3)^n$

$$x_n = c_1 + c_2 3^n + c_3(-3)^n$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 3c_2 - 3c_3 = 1 \\ c_1 + 9c_2 + 9c_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{1}{4} \\ c_2 = \dfrac{1}{3} \\ c_3 = -\dfrac{1}{12} \end{cases}$$

$$\therefore \quad x_n = -\frac{1}{4} + 3^{n-1} + \frac{1}{4}(-1)^{n-1}3^{n-1}$$

3 定理2

设q_1，q_2，…，q_t是递归关系①的t个不同的特征根，且q_i为特征方程的e_i重根（$i = 1, 2, \cdots, t$）

则①的通解为

$$x_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + \cdots + x_n^{(t)} \qquad ③$$

其中$x_n^{(i)} = c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \cdots + c e_i n^{e_i - 1} q_i^n$

$$= (c_1 + c_2 n + \cdots + c_{e_i} n^{e_i - 1}) q_i^n$$

例21 若 $\begin{cases} x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3}, \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ 求$x_n = ?$

解 特征方程为$x^3 - 3x + 2 = 0$，即$(x-1)^2(x+2) = 0$

特征根为 $q_1 = q_2 = 1$，$q_3 = -2$

通解为　$x_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 n \cdot 1^n + c_3(-2)^n$

$$x_n = c_1 + c_2 n + c_3(-2)^n$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 \qquad + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{8}{9} \\ c_2 = -\dfrac{6}{9} \\ c_3 = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

故　$x_n = \dfrac{8}{9} - \dfrac{2}{3}n + \dfrac{1}{9}(-2)^n$

例22　若 $\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} - 4x_{n-3} + 8x_{n-4} \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

求 $x_n = ?$

解　特征方程为 $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$，即

$$(x-2)^3(x+1) = 0$$

特征根为　$q_1 = q_2 = q_3 = 2$，$q_4 = -1$

通解为

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 n^2 2^n + c_4(-1)^n$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 \qquad\qquad\qquad + c_4 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 - c_4 = 1 \\ 4c_1 + 8c_2 + 16c_3 + c_4 = 1 \\ 8c_1 + 24c_2 + 72c_3 - c_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{23}{54} \\ c_2 = -\dfrac{7}{72} \\ c_3 = -\dfrac{1}{24} \\ c_4 = -\dfrac{23}{54} \end{cases}$$

故 $x_n = \dfrac{23}{54}2^n - \dfrac{7}{72}n \cdot 2^n - \dfrac{1}{24}n^2 2^n$

$$+\frac{23}{54}(-1)^{n+1}$$

4 定理3

设$r_1 e^{i\theta_1}, r_1 e^{-i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, r_2 e^{-i\theta_2}, \cdots, r_t e^{i\theta_t}, r_t e^{-i\theta_t}$是递归关系①的$t$对不同的共轭复特征根。且$r_j e^{i\theta_j}$，$r_j e^{-i\theta_j}$（$j=1, 2, \cdots, t$）为特征方程的$m_j$重根，则①的通解为

$$x_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + \cdots + x_n^{(t)} \qquad ③$$

其中$x_n^{(j)} = r_j^n(c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \cdots + c_{m_j} n^{m_j - 1})\cos n\theta_j$

$$+ r_j^n(d_1 + d_2 n + d_3 n^2 + \cdots + d_{m_j} n^{m_j - 1})\sin n\theta_j$$

例23 （巴拿赫火柴问题）

有n根火柴，甲、乙轮流来取，每次只能取 1 根或2根，若甲先取，问最后轮到甲取光的方法数有多少种？

解 设x_n表示n根火柴，由甲先取并且轮到甲取光的方法数

另一方面可分成下面四类情形求出x_n：

(1) 甲先取1根，乙再取1根，这时剩下$n-2$根，最后由

甲取光的方法数为x_{n-2}；

（2）甲先取1根，乙取2根，这时剩下$n-3$根，最后由甲取光的方法数为x_{n-3}；

（3）甲先取2根，乙取1根，这时剩下$n-3$根，最后由甲取光的方法数为x_{n-3}；

（4）甲先取2根，乙也取2根，这时剩下$n-4$根，最后由甲取光的方法数为x_{n-4}。

故
$$\begin{cases} x_n = x_{n-2} + 2x_{n-3} + x_{n-4} \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

特征方程为 $x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$

特征根为 $q_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$q_3 = e^{-\frac{2\pi}{3}}, \quad q_4 = e^{\frac{2\pi}{3}}$$

通解为

$$x_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_3\cos\frac{2n\pi}{3} + c_4\sin\frac{2n\pi}{3}$$

$$
\begin{cases} x_0=0 \\ x_1=1 \\ \\ x_2=1 \\ \\ x_3=1 \end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
c_1+c_2+c_3=0 \\
c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
\quad +c_3\cos\dfrac{2\pi}{3}+c_4\sin\dfrac{2\pi}{3}=1 \\
c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
\quad +c_3\cos\dfrac{4\pi}{3}+c_4\sin\dfrac{4\pi}{3}=1 \\
c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3+c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \\
\quad +c_3\cos 2\pi+c_4\sin 2\pi=1
\end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow
\begin{cases}
c_1=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
c_2=-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
c_3=-\dfrac{1}{2} \\
c_4=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}
\end{cases}
$$

故 $$x_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

§4 迭代与递推

例24 不同元素的重复排列数

从n个不同的元素中，每次取出r个元素，按照一定的顺序排成一列并且元素可以重复取，叫做从n个不同元素取r个元素的一个重复排列。

用 R_n^r表示从n个不同的元素中取r个元素的重复排列数，

则 $R_n^r = n^r$

证 从n个不同元素取r个不同元素的排列数为R_n^r。今分步计算

第一步——选第一个位置上的一个元素有n种方法

第二步——选其它$r-1$个位置上的$r-1$个元素有R_n^{r-1} 种方法

依乘法原理知共有 $n R_n^{r-1}$种方法

故 $R_n^r = nR_n^{r-1}$

递推：

$$R_n^r = nnR_n^{r-2}$$

$$= \cdots$$

$$= \overbrace{nn\cdots n}^{r-1} \quad R_n^1$$

$$= \overbrace{nn\cdots n}^{r} \quad = n^r$$

说明　如果注意到n并没有变化，变元只是r的话

$$\frac{R_n^r}{R_n^{r-1}} = n$$

故由等比数列通项公式知

$$R_n^r = nn^{r-1} = n^r$$

例25　不同元素的无重复排列数

从n个不同的元素中，任取r个不同的元素（$1 \leqslant r \leqslant n$）按照一定的顺序排成一列，叫做从$n$个不同元素取$r$个元素的一个无重复排列。

用P_n^r表示从n个不同的元素取r个元素的无重复排列数，则

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

证　从n个不同元素取r个不同元素的排列数为P_n^r，今分步计算：

第一步——选放第一位置上的元素有n种方法。

第二步—— 选放其它$r-1$个位置上的元素，有P_{n-1}^{r-1}种方法。

依乘法原理知共有nP_{n-1}^{r-1}种方法

故　$P_n^r=nP_{n-1}^{r-1}$

递推：

$$P_n^r=n(n-1)P_{n-2}^{r-2}$$

$$=n(n-1)(n-2)P_{n-3}^{r-3}$$

$$=\cdots$$

$$=n(n-1)\cdots(n-k)P_{n-(k+1)}^{r-(k+1)}$$

$$=\cdots$$

$$=n(n-1)\cdots[n-(r-2)]P_{n-(r-1)}^{r-(r-1)}$$

$$=n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)$$

练习13　确定由n个不同的点把线段分成若干小线段的个数x_n的公式

例26　重复组合公式

设H_n^r表示n个元素中可重复地选r个元素的组合数，今分类计算

设a是n个元素中的一个元素

(1)　从n个元素中取r个元素时不取a，有H_{n-1}^r种方法

(2)　从n个元素中取r个元素时取1次a，有H_{n-1}^{r-1}种方法

(3)　从n个元素中取r个元素时取2次a，有H_{n-1}^{r-2}种方法

……

$(r+1)$　从n个元素中取r个元素时恰取r次a，有H_{n-1}^{0}种方法

因此　$H_n^r = H_{n-1}^r + H_{n-1}^{r-1} + \cdots + H_{n-1}^0$

观察　$H_n^r = ?$

$$H_1^r = 1 = C_r^0$$

$$H_2^r = H_1^r + H_1^{r-1} + \cdots + H_1^0$$

$$= \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{r+1} = r + 1 = C_{r+1}^1$$

$$H_3^r = H_2^r + H_2^{r-1} + \cdots + H_2^0$$

$$= C_{r+1}^1 + C_r^1 + \cdots + C_1^1$$

$$= (r+1) + r + \cdots + 1 = \frac{1}{2}(r+2)(r+1) = C_{r+2}^2$$

……

不难猜测　$H_n^r = C_{r+n-1}^{n-1}$

（可用数学归纳法证之）

例27　河内（$Hanoi$）塔谜

有三个竹桩，把n个圆盘按照由小到大的尺寸穿在一个竹桩上，最大的在底下，打算一次一个地搬动这些圆盘，从这个竹桩转移到另一个上，并规定任何时候都不容许把较大圆盘放在较小圆盘的顶上，求确定完成这个转移而必须搬动的次数，如图6

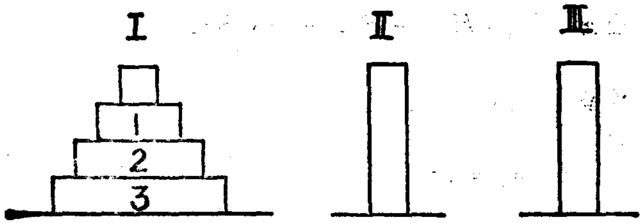


图6

解　设x_n为转移这n个圆盘时所需要搬动的次数（$n=0$，1，2，…）

（1）　当$n=0$时

由于没有移动，故$a_0=0$

（2）　当$n=1$时

将圆盘从Ⅰ移到Ⅱ，只需移动一次，故$a_1=1$

（3）当$n=2$时

将上面的小圆盘从Ⅰ移动到Ⅱ，再将下面的大圆盘从Ⅰ移到Ⅲ，最后将小圆盘从Ⅱ移到Ⅲ　故$a_2=3$

(4) 当$n \geqslant 3$时

欲将n个圆盘从第一个竹桩移到另一个竹桩上

1) 先把最上面的$n-1$个圆盘移到一个竹桩上（比如第三个竹桩上）

2) 把最大圆盘移到空着的竹桩上（比如第二个竹桩上）

3) 最后再把$n-1$个圆盘从Ⅲ移到有最大圆盘的第二个竹桩上

第一步，从Ⅰ的上面$n-1$个圆盘按照要求移到Ⅲ上，需x_{n-1}次

第二步，从Ⅰ上的最大圆盘移到Ⅱ上，需1次。

第三步，将Ⅲ上的$n-1$个圆盘，按照要求移动Ⅱ上（当然移动时要利用空着的第一个竹桩）需x_{n-1}次

故 $x_n = 2x_{n-1} + 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$

递推：

$$
\begin{aligned}
x_n &= 2x_{n-1} + 1 \\
&= 2(2x_{n-2} + 1) + 1 \\
&= 2^2 x_{n-2} + (2 + 1) \\
&= 2^2(2x_{n-3} + 1) + (2 + 1) \\
&= 2^3 x_{n-3} + (2^2 + 2 + 1) \\
&= \cdots\cdots \\
&= 2^k x_{n-k} + (2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1) \\
&= \cdots \\
&= 2^{n-1} x_{n-(n-1)} + (2^{n-2} + \cdots + 2 + 1)
\end{aligned}
$$

$$=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1$$

$$=2^n-1$$

说明 求通项公式尚有其它方法，如

利用差分法

$$x_n=2x_{n-1}+1 \quad ①$$

$$x_{n+1}=2x_n+1 \quad ②$$

②－①得 $x_{n+1}-x_n=2(x_n-x_{n-1})$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=2,\ \text{又}\quad x_2-x_1=2$$

故由等比数列通项公式知

$$x_{n+1}-x_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

$\therefore$ $x_n-x_{n-1}=2^{n-1}$

$\cdots\cdots$

$$x_2-x_1=2$$

将上面的n个等式相加得

$$x_{n+1}-x_1=2^n+2^{n-1}+\cdots+2$$

$$x_{n+1}=2^n+2^{n-1}+\cdots+2+1=2^{n+1}-1$$

故 $x_n=2^n-1$

利用换元法

$$x_n=2x_{n-1}+1$$

$$x_n+1=2(x_{n-1}+1)$$

设 $y_n=x_n+1$

则 $y_n=2y_{n-1}$，$y_1=x_1+1=2$

$\therefore$ $y_n=y_1\times 2^{n-1}=2^n$

故　$x_n = 2^n - 1$

练习14　若 $\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{5}x_{n-1} + 60, \\ x_1 = 60 \end{cases}$ 求$x_n = ?$

例28　若 $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 3}, \\ a_1 = 2 \end{cases}$ 求$a_n = ?$

解　$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n + 3}{a_n} = 1 + \dfrac{3}{a_n}$

令　$b_n = \dfrac{1}{a_n}$，则$b_{n+1} = 3b_n + 1$

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = 3b_1 + 1 = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$b_3 = 3b_2 + 1 = 3\left[3\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right] + 1$$

$$= 3^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 + 1$$

$$b_4 = 3b_3 + 1 = 3\left[3^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 + 1\right] + 1$$

$$= 3^3\left(\frac{1}{2}\right) + 3^2 + 3 + 1$$

……

$$b_n = 3^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3 + 1$$

$$= 3^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$

说明　$b_{n+1} = 3b_n + 1$

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}=3(b_n+\frac{1}{2})$$

设 $c_n=b_n+1$，$c_1=1$

故 $c_n=3^{n-1}$ 即 $b_n=3^{n-1}-\frac{1}{2}$

因此 $a_n=\dfrac{2}{2\cdot 3^{n-1}-1}$

练习15 若$a_{n+1}+a_{n-1}=2(a_n+1)$且$a_1=0$，$a_2=2$，求$a_n=?$

例29 设$n\in N$在图7中所示的正方形上（包括边界），有多少个整点？

解

设有a_n个整点，若边增加一个单位，则在第一象限增加了$n+1$个整点：

$$(1,n),(2,n-1),\cdots,(n,1),(n+1,0)$$

如图7

$\therefore$ $a_{n+1}=a_n+4(n+1)$

递推：

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_n+4(n+1)\\&=a_{n-1}+4n+4(n+1)\\&=\cdots\\&=a_{n-k}+4(n-k+1)+\cdots+4n+4(n+1)\\&=\cdots\\&=a_1+4\times 2+\cdots+4n+4(n+1)\\&=5+4[2+3+\cdots+n+(n+1)+1-1]\\&=2(n+1)(n+2)+1\end{aligned}$$

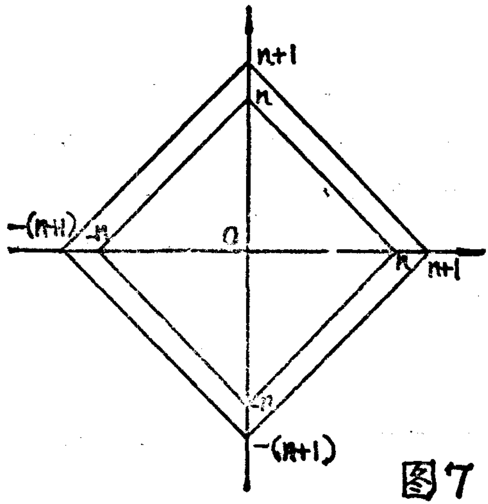


图7

故 $a_n = 2n(n+1)+1 = 2n^2+2n+1$

例30 若数列$\{a_n\}$由 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$ ($n \geqslant 1$) 确定，则a_{100}等于

(A) 9900 (B) 9902 (C) 9904 (D) 10100 (E) 10102

（第35届美国中学数学竞赛试题）

解 $a_{n+1} - a_n = 2n$

$a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$

$a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-2)$

……

$a_3 - a_2 = 2 \times 2$

$a_2 - a_1 = 2 \times 1$

将上面n个等式相加得

$$a_{n+1}-a_1=2(1+2+\cdots+(n-1)+n)=n(n+1)$$

于是$a_{n+1}=n(n+1)+2$

故 $a_{100}=a_{99+1}=99\times 100+2=9902$

例31 某次运动会相继开了$n(>1)$天，共发出奖章m枚，第一天发出奖章一枚及余下的$m-1$枚的$\frac{1}{7}$，第二天发出奖章二枚及余下的$\frac{1}{7}$，依此类推，最后在第n天发出n枚没有剩下的奖章。问这次运动会共开了几天？共发了几枚奖章？

(第9届国际中学生数学竞赛试题)

分析 设a_n是第n天未发奖章前所剩下的奖章数。则

$$a_1=m$$

$$a_2=m-\left(1+\frac{a_1-1}{7}\right)$$

$$a_3=a_2-\left(2+\frac{a_2-2}{7}\right)$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{k+1}=a_k-\left(k+\frac{a_k-k}{7}\right)$$

$$a_{k+1}=\frac{6}{7}(a_k-k)$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n=n$$

$$\begin{cases} m-\frac{7}{6}a_2=1 \\ a_2-\frac{7}{6}a_3=2 \\ a_3-\frac{7}{6}a_4=3 \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1}-\frac{7}{6}a_n=n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m-\frac{7}{6}a_2=1 \\ \frac{7}{6}a_2-\left(\frac{7}{6}\right)^2a_3=2\left(\frac{7}{6}\right) \\ \left(\frac{7}{6}\right)^2a_3-\left(\frac{7}{6}\right)^3a_4=3\left(\frac{7}{6}\right)^2 \\ \cdots\cdots \\ \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}a_{n-1}-\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}n=(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} \end{cases}$$

将上面$n-1$个等式相加得

$$m-\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}n=1+2\left(\frac{7}{6}\right)+3\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+$$

$$(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}$$

$$\therefore m=36+(n-6)\frac{7^n}{6^{n-1}}$$

当$n>1$时，$|n-6|<6^{n-1}$但7^n与6^{n-1}互素。

故 $n-6=0$

$$\therefore\begin{cases} n=6 \\ m=36 \end{cases}$$

例32　n位二进制数，从左向右进行扫描，每当出现010后，就再从下一位重新开始扫描。求最后三位出现010时n位二进制数的个数。

解　设a_n表示模式010 在第n 个数码出 现这 样序列的个数。

在所有n位二进制数中，有2^{n-3}个序列以010 作为最后三个数码

可分成两种情形考虑

(1) 以模式010在第n个数码出现的那些序列，有a_n个

(2) 模式010在最后三位010 出现前已出现，即模式010在第$n-2$位出现，有a_{n-2}种

$$\therefore \quad a_n + a_{n-2} = 2^{n-3}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

$$8a_n + 8a_{n-2} = 2^n$$

其对应的齐次递归方程的特征方程为

$$8x^2 + 8 = 0$$

特征根为　$q = \pm i = \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}$

通解为$\bar{a}_n = c_1\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\sin\frac{n\pi}{2}$

$f(n) = 2^n$，其中特征根$\pm i$不含有2

则　$a_n^* = c_3 \cdot 2^n$

$$\therefore \quad a_n = \bar{a}_n + a^*_n = C_1\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\sin\frac{n\pi}{2} + c_3 \cdot 2^n$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 \times 0 + c_2 \times 1 + 2c_3 = 0 \\ c_1(-1) + c_2 \times 0 + 4c_3 = 0 \\ c_1 \times 0 + c_2(-1) + 8c_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \qquad c_2 + 2c_3 = 0 \\ -c_1 \qquad + 4c_3 = 0 \\ \qquad -c_2 + 8c_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{2}{5} \\ c_2 = -\dfrac{1}{5} \\ c_3 = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{4}{5}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{10}2^n$$

例33　考虑递归地定义的一个数列：$t_1 = 1$对于$n>1$，当n是偶数时，$t_n = 1 + t_{\frac{n}{2}}$，当$n$是奇数时，$t_n = \dfrac{1}{t_{n-1}}$ 已知$t_n = \dfrac{19}{87}$,则n的各位数字之和是

(A) 15　(B) 17　(C) 19　(D) 21　(E) 23

（第38届 国中学生数学竞赛试题）

解　显然$t_n > 0$

(1) 若$0 < t_n \leqslant 1$，则n必为奇数

否则，n为偶数，则$t_n = 1 + t_{\frac{n}{2}} > 1$矛盾

(2) 若$t_n > 1$，则n必为偶数

否则,n为奇数,则$t_n = \dfrac{1}{t_{n-1}} < 1$矛盾

逆向递推：

$\because t_n = \dfrac{19}{87} < 1 \quad \therefore n$是奇数

故由$\frac{19}{87}=t_n=\frac{1}{t_{n-1}}$知$t_{n-1}=\frac{87}{19}$

$\because t_{n-1}=\frac{87}{19}>1 \quad \therefore n-1$是偶数

故由$\frac{87}{19}=t_{n-1}=1+t_{\frac{n-1}{2}}$知

$$t_{\frac{n-1}{2}}=\frac{87}{19}-1=\frac{68}{19}>1 \quad \text{故}\frac{n-1}{2}\text{是偶数}$$

$\Longrightarrow\frac{68}{19}=t_{\frac{n-1}{2}}=1+t_{\frac{n-1}{4}}$

$\Longrightarrow t_{\frac{n-1}{4}}=\frac{68}{19}-1=\frac{49}{19}>1$

$\Longrightarrow\frac{49}{19}=t_{\frac{n-1}{4}}=1+t_{\frac{n-1}{8}}$

$\Longrightarrow t_{\frac{n-1}{8}}=\frac{49}{19}-1=\frac{30}{19}>1$

$\Longrightarrow\frac{30}{19}=t_{\frac{n-1}{8}}=1+t_{\frac{n-1}{16}}$

$\Longrightarrow t_{\frac{n-1}{16}}=\frac{30}{19}-1=\frac{11}{19}<1$

$\Longrightarrow\frac{11}{19}=t_{\frac{n-1}{16}}=\frac{1}{t_{\frac{n-17}{16}}}$

$\Longrightarrow t_{\frac{n-17}{16}}=\frac{19}{11}>1$

$\Longrightarrow\frac{19}{11}=t_{\frac{n-17}{16}}=1+t_{\frac{n-17}{32}}$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-17}{32}} = \frac{19}{11} - 1 = \frac{8}{11} < 1$$

$$\Longrightarrow \frac{8}{11} = t_{\frac{n-17}{32}} = \frac{1}{t_{\frac{n-49}{32}}}$$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-49}{32}} = \frac{11}{8} > 1$$

$$\Longrightarrow \frac{11}{8} = t_{\frac{n-49}{32}} = 1 + t_{\frac{n-49}{64}}$$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-49}{64}} = \frac{11}{8} - 1 = \frac{3}{8} < 1$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{8} = t_{\frac{n-49}{64}} = \frac{1}{t_{\frac{n-113}{64}}}$$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-113}{64}} = \frac{8}{3} > 1$$

$$\Longrightarrow \frac{8}{3} = t_{\frac{n-113}{64}} = 1 + \frac{1}{t_{\frac{n-113}{128}}}$$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-113}{128}} = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3} > 1$$

$$\Longrightarrow \frac{5}{3} = t_{\frac{n-113}{128}} = 1 + t_{\frac{n-113}{256}}$$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-113}{256}} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} < 1$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{3} = t_{\frac{n-113}{256}} = \frac{1}{t_{\frac{n-369}{256}}}$$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-369}{256}}=\frac{3}{2}>1$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{2}=t_{\frac{n-369}{256}}=1+t_{\frac{n-369}{512}}$$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-369}{512}}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}<1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}=t_{\frac{n-369}{512}}=\frac{1}{t_{\frac{n-881}{512}}}$$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-881}{512}}=2>1$$

$$\Longrightarrow 2=t_{\frac{n-881}{512}}=1+t_{\frac{n-881}{1024}}$$

$$\Longrightarrow t_{\frac{n-881}{1024}}=2-1=1$$

$$\Longrightarrow \frac{n-881}{1024}=1\Longrightarrow n=1905$$

$\Longrightarrow$各位数字之和为15，答案(A)正确

§5　几个著名的递归问题

例34　直线划分平面问题

n条直线中每对直线恰好相交，但没有三条直线交于一点，则称此n条直线为处于一般位置的直线。

问题：若$n\in N+\{0\}$。设y_n表示由n条处于一般位置的直线把平面划分成区域的个数。求$y_n=?$

解　当$n=0$时，$y_0=1$

当$n=1$时，$y_1=2$

当$n=2$时，$y_2=4$

当$n\geqslant 2$时

$n-1$条处于一般位置的直线把平面划分成y_{n-1}个区域。在这个平面内插入第n条直线，使得这n条直线处于一般位置。

前$n-1$条直线与第n条直线相交于$n-1$个不同的点，它们把第n条直线划分成$x_{n-1}=n$个线段（见练习13）。第n条直线的这些线段中的每一段都把平面上原有区域之一分成两个区域。如图8

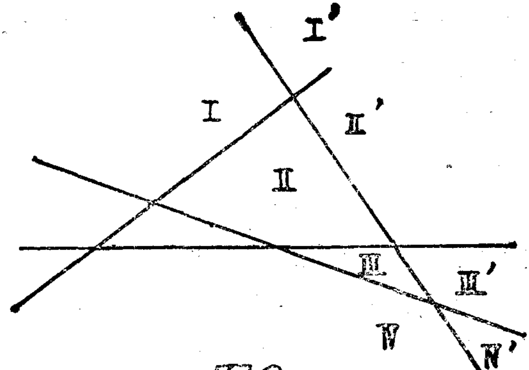


图8

$$\therefore \quad y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$$

$$y_n = y_{n-1} + n$$

递推：

$$y_n = y_{n-2} + (n-1) + n$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= y_{n-k} + (n-k+1) + \cdots + (n-1) + n$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= y_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

$$= 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$$

例35　平面划分空间问题

n个平面中每对平面恰好相交，但是没有三个平面交于一直线，每三个平面交于一点。但没有四个平面相交于一点，则称此n个平面为处于一般位置的平面

问题：若$n \in N + \{0\}$。设z_n表示由n个处于一般位置的平面把空间划分成区域的个数，求$z_n = ?$

解：$z_0 = 1$，$z_1 = 2$

当$n \geqslant 2$时

用$n-1$个处于一般位置的平面把空间划分成z_{n-1}个区域。在空间中插入第n个平面，使得这n个平面处于一般位置。

前$n-1$个平面与第n个平面相交于$n-1$条直线，这些直线在第n个平面上处于一般位置。这$n-1$条直线把第n个平面划分成y_{n-1}个平面区域，而这些平面区域的每一个把z_{n-1}个空间区域之一划分成两个空间区域。因此

$$z_n = z_{n-1} + y_{n-1} = z_{n-1} + \left[1+\frac{1}{2}n(n+1)\right]$$

递推：

$$\begin{aligned}
&z_n = z_{n-1} + y_{n-1}\\
&= z_{n-2} + y_{n-2} + y_{n-1}\\
&= \cdots\cdots\\
&= z_{n-k} + y_{n-k} + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1}\\
&= \cdots\cdots\\
&= z_0 + y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1}\\
&= 1 + (1+0) + \left(1+\frac{1\times 2}{2}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{2}(n-1)n\right)\\
&= 1 + n + c_2^{\,2} + c_3^{\,2} + \cdots + c_n^{\,2}\\
&= 1 + n + c_{n+1}^{\,3}\\
&= \frac{1}{6}\left(n^3 + 5n + 6\right)
\end{aligned}$$

说明　例34、例35可推广为

设W_n表示用n个处于一般位置的$k-1$维超平面把k维空间划分成区域的个数，则

$$W_n = c_n^{\,0} + c_n^{\,1} + \cdots + c_n^{\,k}$$

例36　错位排列

某人写好了n封信，他又在n个信封上写下了不同的地址。装信后，如果把所有的信都装错了信封，共有多少种可能，这就是一个错位排列问题

n个人排成一列，每人有自己固定的位置，解散后重新

排成一列，但每人都不回到他原来应站的位置上，问有多少种不同的排法，这也是一个错位排列问题

一般地有

对于集合$S=\{1,2,\cdots,n\}$的n个元素的任一排列$t_1t_2\cdots t_n$中，$t_i \neq i$（$i=1,2,\cdots,n$）这种排列叫做错位全排列

例如在信封问题中

信封编号为$1,2\cdots,n$，它们装的信笺分别为$t_1,t_2,\cdots,t_n$且$t_i \neq i$，求有多少个这样的排列。

又例如在归队问题中

原先位置编号为$1,2,\cdots,n$。重新排队后的位置为$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 且$t_i \neq i$。求有多少个这样的排列

设D_n表示n个元素的错位全排列数。求D_1、D_2、D_3、$D_4=$？

（1）当$n=1$时，不存在错位。$\therefore D_1=0$

（2）当$n=2$时，21是唯一的错位排列。

$\therefore \quad D_2=1$

（3）当$n=3$时，存在两个错位排列

231，312

$\therefore \quad D_3=2$

（4）当$n=4$时，存在九个错位排列

2143	2341	2413
3142	3412	3421
4123	4312	4321

$\therefore \quad D_4=9$

（5）当$2 \leqslant k \leqslant n$时。设排列为$t_1 t_2 \cdots t_n$

1）当$t_1 = k$，$t_k = 1$时

则其余$n-2$个位置是（$2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$）的错位排列

选k有$n-1$种方法，作其余$n-2$个位置的错位排列有D_{n-2}种方法，共有（$n-1$）D_{n-2}种

2）当$t_1 = k$，$t_k \neq 1$时

则其余$n-1$个位置是（$1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$）的错位排列

选k有$n-1$种方法，作其余$n-1$个位置的错位排列有D_{n-1}种方法，共有（$n-1$）D_{n-1}种

又　1）、2）两类错位排列是不同的（由$t_k = 1$与$t_k \neq 1$可断定它们不同）

故　$D_n = (n-1) \ D_{n-2} + (n-1) D_{n-1}$

$= (n-1) \ (D_{n-2} + D_{n-1})$

$D_5 = 4(D_3 + D_4) = 4(2+9) = 44$

$D_6 = 5(D_4 + D_5) = 5(9+44) = 265$

此即1960年—1961年波兰数学竞赛试题的答案。该问题是

某人给六个不同的收信人写了六封信，并且准备了六个写有收信人地址的信封。有多少种投放信笺的方法，使每封信笺与信封上的收信人都不相符？

一般地有

$$D_n = n!\ \left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

（见例37、例38）

例37 $D_n = n\ D_{n-1}+(-1)^n \quad (n=2,3,4,\cdots)$

证 (1) 当$n=2$时

$D_2=1$

$2D_1+(-1)^2=2\times 0+(-1)^2=1$ 命题成立

(2) 当$n\geqslant 3$时

$D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$

$\Longrightarrow D_n-nD_{n-1}=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]$

$\Longrightarrow D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}=-[D_{n-2}-(n-2)D_{n-3}]$

$\Longrightarrow D_n-nD_{n-1}=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]$

$=(-1)^2[D_{n-2}-(n-2)\ D_{n-3}]$

$=(-1)^3[D_{n-3}-(n-3)\ D_{n-4}]$

$=\cdots\cdots$

$=(-1)^{n-2}\ (D_2-2D_1)$

$=(-1)^{n-2}$

$\therefore \quad D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$

例38 $D_n=n!\ \left(1-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right.$

$$\left.+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

证 (1) 当$n=2$时

$D_2=1$

$$2!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)=1$$ 命题成立

（2） 假定$n=k-1$时成立

那么当$n=k$时

$$D_k=kD_{k-1}+(-1)^k$$

$$=k\left[(k-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}\right]+(-1)^k\right.$$

$$=k!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}\right)+(-1)^k$$

$$=k!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}+(-1)^k\frac{1}{k!}\right)$$

命题成立

从而公式成立。

例39 给定n个实数$r_1,r_2,\cdots,r_n$。用多种方法构成它们的乘积，问共有多少种不同的方法？

解 设a_n表示构成n个数乘积的方法的个数

（1） 当$n=1$时 $a_1=1$

（2） 当$n=2$时 $r_1\times r_2$，$r_2\times r_1$

$\therefore$ $a_2=2$

（3） 当$n=3$时

对于 $r_1\times r_2$，$r_2\times r_1$中的每一个乘积。例如$r_1\times r_2$，r_3可以插入其中：

1）$(r_3\times r_1)\times r_2$

2）$(r_1\times r_3)\times r_2$

3）$r_1\times(r_3\times r_2)$

4）$r_1\times(r_2\times r_3)$

5）r_3也可以左乘得　$r_3\times(r_1\times r_2)$

6）r_3也可以右乘得　$(r_1\times r_2)\times r_3$

$\therefore\quad a_3=4a_2+2a_2=6a_2=12$

同理，对于$r_2\times r_1$也有6种情形

7）$(r_3\times r_2)\times r_1$　　8）$(r_2\times r_3)\times r_1$

9）$r_2\times(r_3\times r_1)$　　10）$r_2\times(r_1\times r_3)$

11）$r_3\times(r_2\times r_1)$　　12）$(r_2\times r_1)\times r_3$

（4）当$n=4$时

对于r_1，r_2，r_3中的每一个乘积，例如$(r_1\times r_2)\times r_3$，这样的乘积需要进行两次乘法

1）对两次乘法之一的任一因子的任一边乘以r_4，例如$r_1\times r_2$

$(r_4\times r_1)\times r_2$　　$(r_1\times r_4)\times r_2$

$r_1\times(r_4\times r_2)$　　$r_1\times(r_2\times r_4)$

对应于r_1，r_2，r_3，r_4的乘积是

$\big((r_4\times r_1)\times r_2\big)\times r_3$　　$\big((r_1\times r_4)\times r_2\big)\times r_3$

$\big(r_1\times(r_4\times r_2)\big)\times r_3$　　$\big(r_1\times(r_2\times r_4)\big)\times r_3$

对于两次乘法的另一个 $(r_1\times r_2)\times r_3$乘以$r_4$得

$\left(r_4\times(r_1\times r_2)\right)\times r_3$ $\left((r_1\times r_2)\times r_4\right)\times r_3$

$(r_1\times r_2)\times(r_4\times r_3)$ $(r_1\times r_2)\times(r_3\times r_4)$

共有$4\times2\times a_3=8a_3$种

(2) 用r_4左乘 r_1，r_2，r_3之积有a_3种

(3) 用r_4右乘 r_1，r_2，r_3之积有a_3种

故 $a_4=10a_3=10\times12=120$种

(5) 当$n\geqslant2$时

对于r_1，r_2，…，r_{n-1}中的每一个乘积之一，这样的乘积需要进行$n-2$次乘法

1) 对$n-2$次乘法之一的任一因子的任一边乘以r_n

一次乘法有 $4a_{n-1}$种

$n-2$次乘法有 $4(n-2)a_{n-1}$种

2) 用r_n左乘r_1，r_2，…r_{n-1}之积有a_{n-1}种

3) 用r_n右乘r_1，r_2，…，r_{n-1}之积有a_{n-1}种

故 $a_n=4(n-2)a_{n-1}+2a_{n-1}$

即 $a_n=(4n-6)a_{n-1}$

递推：

$$
\begin{aligned}
a_n&=(4n-6)[4(n-1)-6]a_{n-2}\\
&=(4n-6)(4n-10)a_{n-2}\\
&=(4n-6)(4n-10)[4(n-2)-6]a_{n-3}\\
&=(4n-6)(4n-10)(4n-14)a_{n-3}\\
&=\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$=(4n-6)(4n-10)\cdots(4\times 2-6)a_1$$

$$=(4n-6)(4n-10)(4n-14)\cdots\times 2$$

$$=2^{n-1}\Big(1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-5)(2n-3)\Big)$$

$$=\frac{2^{n-1}(2n-2)!}{2\times 4\times\cdots\times(2n-6)(2n-4)(2n-2)}$$

$$=\frac{2^{n-1}(2n-2)!}{2^{n-1}\Big(1\times 2\times\cdots\times(n-2)(n-1)\Big)}=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}$$

§6 利用数学归纳法

例40 设$0<u<1$，$u_1=1+u$，$u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n}+u(n\geqslant 1)$。试证对一切自然数$n$有$1<u_n<1+u$

证 (1) 当$n=1$时显然有$1<u_1\leqslant 1+u$，命题成立

(2) 假定$n=k$时命题成立。即$1<u_k\leqslant 1+u$

则 $\dfrac{1}{1+u}\leqslant\dfrac{1}{u_k}<1$

那么当$n=k+1$时

$$u_{k+1}=\frac{1}{u_k}+u<1+u$$

$$u_{k+1}=\frac{1}{u_k}+u\geqslant\frac{1}{1+u}+u=\frac{1+u+u^2}{1+u}>1$$

即　$1<u_{k+1}\leqslant 1+u$　命题也成立。

从而对于$n\in N$命题成立

说明：若只要求证明 $u_n>1$ 即为1977年加拿大数学竞赛题。

例41　设数列a_0，a_1，$\cdots a_n$满足 $a_0=\dfrac{1}{2}$及$a_{k+1}=a_k+\dfrac{1}{n}a_k^2(k=0，1，2，\cdots，n-1)$。其中$n$是一个给定的正整数，试证　$1-\dfrac{1}{n}<a_n<1$

（1980年芬兰、英国、匈牙利和瑞典四国联合举行的数学竞赛试题）

证　今证对一切$1\leqslant k\leqslant n$，都有

$$\frac{n+1}{2n-k+2}<a_k<\frac{n}{2n-k} \qquad ①$$

（1）$a_1=a_0+\dfrac{1}{n}a_0^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4n}=\dfrac{2n+1}{4n}$

$$\because\quad \frac{n+1}{2n+1}<\frac{2n+1}{4n}<\frac{n}{2n-1}$$

即　$$\frac{n+1}{2n+1}<a_1<\frac{n}{2n-1}$$

（2）假定①对$k<n$成立。则

$$a_{k+1}=a_k\left(1+\frac{1}{n}a_k\right)<\frac{n}{2n-k}\left(1+\frac{1}{2n-k}\right)$$

$$=\frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2}<\frac{n}{2n-(k+1)}$$

$$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$$

$$>\frac{n+1}{2n-k+2}+\frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n-k+1}-\frac{n+1}{(2n-k+2)(2n-k+1)}$$

$$+\frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n-(k+1)+2}+\frac{n+1}{2n-k+2}$$

$$\left(\frac{n+1}{n(2n-k+2)}-\frac{1}{2n-k+1}\right)$$

$$>\frac{n+1}{2n-(k+1)+2}$$

由上面二式知①对$k+1\leqslant n$仍成立。所以①对一切$k=1$，2，…，n成立

在①式中取$k=n$即得

$$1-\frac{1}{n}<\frac{n+1}{n+2}<a_n<\frac{n}{n}=1$$

例 42　设 $x_0=0$，$x_1=1$且 $x_{n+1}=4x_n-x_{n-1}$；$y_0=1$，$y_1=2$　且　$y_{n+1}=4y_n-y_{n-1}$（$n=1$，2，3，…）求证：对一切整数$n\geqslant 0$　有　$y_n^2=3x_n^2+1$

（1988年加拿大数学竞赛试题）

证　利用数学归纳法同步证以下两个等式成立

（1）$y_n^2=3x_n^2+1$

(2) $y_n y_{n-1}=3x_n x_{n-1}+2$

当　$n=1$时，以上二式均成立

假定$n=k-1$时成立。那么当$n=k$时

$$y_{k+1}^2=(4y_k-y_{k-1})^2=16y_k^2-8y_k y_{k-1}+y_{k-1}^2$$

$$=16(3x_k^2+1)-8y_k y_{k-1}+(3x_{k-1}^2+1)$$

$$=48x_k^2+16-8(2+3x_k x_{k-1}+3x_{k-1}^2+1)$$

$$=48x_k^2-24x_k x_{k-1}+3x_{k-1}^2+1$$

$$=3(4x_k-x_{k-1})^2+1=3x_{k+1}^2+1$$

$$y_{k+1}y_k=(4y_k-y_{k-1})y_k=4y_k^2-y_{k-1}y_k$$

$$=4(3x_k^2+1)-(3x_k x_{k-1}+2)$$

$$=3x_k(4x_k-x_{k-1})+2$$

$=3x_k x_{k-1}+2$　　命题成立

从而(1)、(2)两式均成立，自然(1)式成立。

§7　利用母函数方法

例43　设“·”是集合S的一个代数运算。求证：S中n个

元素r_1，$r_2\cdots$，r_n的前后顺序不变时，总共有$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$种两个元素加括号的方法

证 （1）设a_n表示n个元素的所有可能的加括号的个数。由于n个元素无论怎样结合，其最后一步总是前k个元素同后$n-k$个元素结合。因此可得递归关系

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1 \quad ①$$

（2）设$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ ②

则 $y^2 = (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$

$= a_1 a_1 x^2 + (a_1 a_2 + a_2 a_1) x^3 + (a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1) x^4 + \cdots$

由递归关系得

$$y^2 = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \quad ③$$

③－②得 $y^2 - y = -a_1 x$ ④

（3） $a_2 = 1$

当 $n = 3$时 有 $(ab)c$，$a(bc)$ 两种情形

$\therefore a_3 = 2$

当 $n = 4$时 有5种情形

$a((bc)d)$，$(ab)(cd)$，$a(b(cd))$，$((ab)c)d$，$(a(bc))d$

$\therefore a_4 = 5$

由 $2 = a_3 = a_1 a_2 + a_2 a_1 = a_1 + a_1$ 知必须有$a_1 = 1$

由④知 $y^2 - y + x = 0$ ⑤

（4） 解⑤得 $y = \dfrac{1 \pm (1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$

$\because$当 $x = 0$时，由②知$y = 0$

$$\therefore \quad y \neq \frac{1+(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$y=\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1-2x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{n!}2^{n}x^{n}$$

$$y=\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{n!}2^{n-1}x^{n} \qquad ⑥$$

比较②、⑥两式中x^n的系数，即得

$$a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{n!}2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

例44　圆周上给定$2n$个点，用n条不相交的弦两两连接不同的点，每点只有一条弦，问共有多少种不同的连接方法？

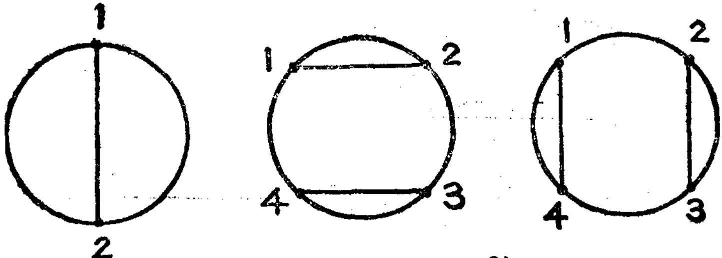
解　设给定$2n$个点时有a_n种不同的连接方法

当　$n=1$时　　$a_1=1$　　如图8(1)

当　$n=2$时　　$a_2=2$　　如图8(2)

当　$n=3$时　　$a_3=5$　　如图9

对满足要求的任何一种连接方法，取出任何一弦就将圆分成两个弓形，显然分布在两段弧上的顶点都必须是偶数



(1)　(2)

图8

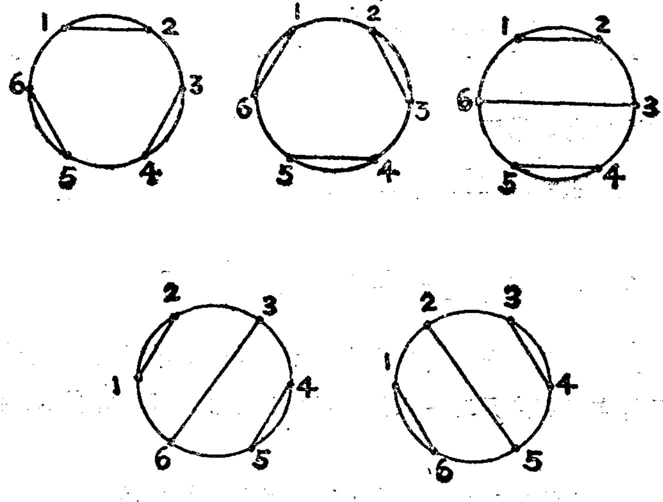


图9

个，因而必须标数为奇数的点与标数为偶数的点相连。设1点与 $2k$ 点相连成弦，则一弧上 $2k-2$ 个点有 a_{k-1} 种连弦方法，另一弧上 $2n-2k=2(n-k)$ 个点有 a_{n-k} 种连弦方法，共有 $a_{k-1}a_{n-k}$ 种方法

$$\therefore \begin{cases} a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

$a_2 = a_0 a_1 + a_1 a_0$ 即 $2 = 2a_0$ $\therefore a_0 = 1$

设 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

则
$$y^2 = a_0 a_0 + (a_0 a_1 + a_1 a_0) x + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) x^2$$
$$+ \cdots + (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n + \cdots$$
$$= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_{n+1} x^n + \cdots$$
$$x y^2 = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$
$$x y^2 - y = a_0 = -1$$
$$x y^2 - y + 1 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \qquad \text{舍去 } y = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{n!} 2^n x^n$$

$$\therefore \quad y = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} x^{n-1}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} 2^n x^n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} 2^n$$

$$= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

练习16　在一个凸n边形中使用对角线划分为三角形区域，要求这些对角线不在凸n边形内相交，求划分的方法数$a_n=?$

§8 递归方程组

例45　一个核反应器里有两类粒子，每秒钟，一个α粒子分裂为3个β粒子，而一个β粒子分裂为一个α粒子和两个β粒子。如果在时间$t=0$时，反应器内只有一个α粒子，求第n秒时反应器内共有粒子数$f_n=?$

解　设第k秒时，α粒子和β粒子各有a_k和b_k个，则$f_n=a_n+b_n$

$$a_0=1$$

$$b_0=0$$

当$k\geqslant1$时，a_k为第k秒的α粒子数，由已知条件它等于第$k-1$秒时有的β粒子数。

$$\therefore\quad a_k=b_{k-1}$$

b_k为第k秒的β粒子数，由已知条件它等于第$k-1$秒时有的"α粒子数的3倍"+"β粒子数的2倍"。

$\therefore \quad b_k = 3a_{k-1} + 2b_{k-1}$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} x^k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} x^k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A(x) - a_0 = xB(x) \\ B(x) - b_0 = 3xA(x) + 2xB(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A(x) = \dfrac{a_0 + (b_0 - 2a_0)x}{1 - 2x - 3x^2} \\ B(x) = \dfrac{3a_0 x + b_0}{1 - 2x - 3x^2} \end{cases}$$

$$F(x) = A(x) + B(x)$$

$$= \frac{1 - 2x + 3x}{1 - 2x - 3x^2} = \frac{1 + x}{(1+x)(1-3x)} = \frac{1}{1-3x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$$

$\therefore \quad f_n = 3^n (k \geqslant 0)$

说明 $\quad f_n = a_n + b_n = b_{n-1} + 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$

$$= 3(a_{n-1} + b_{n-1}) = 3f_{n-1}$$

又 $\quad f_0 = a_0 + b_0 = 1$

由等比数列通项公式可方便地求得

$$f_n = 3^n$$

例46　某粒子反应器内有高能自由粒子与低能自由粒子和核子三种，假设一个高能粒子撞击一个核子且被吸收引起它放射出三个高能粒子和一个低能粒子，一个低能粒子撞击

一个核子且被吸收并引起它放射出两个高能粒子和一个低能粒子。设开始$n=0$微秒时，在具有核子的系统里放入一个高能粒子，问第n微秒时系统中高能、低能粒子有多少？

解　设第k微秒时，高能粒子和低能粒子各有a_k和b_k个

$$a_0=1$$

$$b_0=0$$

当$k\geqslant 1$时

$$\begin{cases} a_k=3a_{k-1}+2b_{k-1} \\ b_k=a_{k-1}+b_{k-1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 3\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{k-1} x^k \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k x^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{k-1} x^k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A(x)-a_0=3xA(x)+2xB(x) \\ B(x)-b_0=xA(x)+xB(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (1-3x)A(x)-2xB(x)=1 \\ xA(x)+(x-1)B(x)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A(x)=\dfrac{1-x}{x^2-4x+1} \\ B(x)=\dfrac{x}{x^2-4x+1} \end{cases}$$

$x^2-4x+1=0$的两根为$q_1=2+\sqrt{3}$，$q_2=2-\sqrt{3}$

$$A(x)=\frac{1-x}{(x-q_1)(x-q_2)}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}\frac{1}{x-q_1}+\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\frac{1}{x-q_2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{q_1} \frac{1}{1-\frac{x}{q_1}} - \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{q_2} \frac{1}{1-\frac{x}{q_2}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{q_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{q_1}\right)^n - \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{q_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{q_2}\right)^n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{q_1} \left(\frac{1}{q_1}\right)^n - \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{q_2} \left(\frac{1}{q_2}\right)^n$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{n+1}$$

$$- \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{6} \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}$$

$$+ \frac{3+\sqrt{3}}{6} \left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1}$$

仿此

$$B(x) = \frac{x}{(x-q_1)(x-q_2)}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{x-q_1} - \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{x-q_2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} \frac{1}{q_1} \frac{1}{1-\frac{x}{q_1}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{q_2} \frac{1}{1-\frac{x}{q_2}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} \frac{1}{q_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{q_1}\right)^n + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{q_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{q_2}\right)^n$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{2+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{q_1}\right)^{n+1} + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{q_2}\right)^{n+1}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} (2-\sqrt{3})^n + \frac{1}{2\sqrt{3}} (2+\sqrt{3})^n$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n-\frac{\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$$

例47　n位数字的四进制序列中，出现非负偶数个0且非负偶数个1的序列有多少个？

解　设$A=\{0, 1, 2, 3\}$的含有偶数个0和偶数个1的n位数的个数为a_n。

今将A的4^{n-1}个$(n-1)$位数分为互不相交的四类：

(1) 含有偶数个0和偶数个1，有a_{n-1}个

(2) 含有偶数个0和奇数个1，设有b_{n-1}个

(3) 含有奇数个0和偶数个1，设为c_{n-1}个

(4) 含有奇数个0和奇数个1，由加法原理知应为$4^{n-1}-a_{n-1}-b_{n-1}-c_{n-1}$个

由A的元构成的4^n个n位数也可分为类似的4类。又A的每一个n位都是在它的一个$(n-1)$位数之后，添上A的一个元而得。故

$$\begin{cases} a_n=2a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1} \\ b_n=a_{n-1}+2b_{n-1}+(4^{n-1}-a_{n-1}-b_{n-1}-c_{n-1}) \\ c_n=a_{n-1}+2c_{n-1}+(4^{n-1}-a_{n-1}-b_{n-1}-c_{n-1}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} a_n=2a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1} \\ b_n=\qquad b_{n-1}-c_{n-1}+4^{n-1} \\ c_n=\qquad -b_{n-1}+c_{n-1}+4^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=2 \\ b_1=1 \\ c_1=1 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} 2a_0+b_0+c_0=2 \\ b_0-c_0=0 \\ -b_0+c_0=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{3}{4} \\ b_0 = \dfrac{1}{4} \\ c_0 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

设

$$\begin{cases} A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ C(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A(x) - \dfrac{3}{4} = 2xA(x) + xB(x) + xC(x) \\ B(x) - \dfrac{1}{4} = xB(x) - xC(x) + \dfrac{x}{1-4x} \\ C(x) - \dfrac{1}{4} = -xB(x) + xC(x) + \dfrac{x}{1-4x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}(1-2x)A(x)-xB(x)-xC(x)=\dfrac{3}{4}\\ (1-x)B(x)+C(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{x}{1-4x}\\ xB(x)+(1-x)C(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{x}{1-4x}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}B(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{x}{1-4x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4^{n-1}x^n\\ C(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4^{n-1}x^n\end{cases}$$

$$\Longrightarrow A(x)=\frac{1}{1-2x}\left[xB(x)+xC(x)+\frac{3}{4}\right]$$

$$=\frac{3-10x}{4(1-2x)(1-4x)}=\frac{1}{3(1-4x)}+\frac{1}{2(1-2x)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot 2^n+\frac{1}{2}\cdot 4^n\right)x^n$$

$$\therefore\begin{cases}a_n=2^{n-1}+4^{n-1}\\ b_n=4^{n-1}\\ c_n=4^{n-1}\end{cases}$$

例48　A和E是一正八角形一对相对的顶点一青蛙由A点出发，按照如下的规定跳跃：除E点外，不论在哪一点，都可跳到与这点相邻的两个顶点之一；当到达E点时，不得再跳，而停留在那里。设a_n为以E为终点的n次跳跃的所有不同途径的数目。试证明：

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})^{m-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})^{m-1},& n=2m;\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

（第21届国际中学生数学竞赛试题）

证 因为青蛙不能在跳4次以内到达E点，故$a_1=a_2=a_3=0$；它能按两条路径跳4次跳到E点，故$a_4=2$

从A点作奇数次跳，青蛙可能到达B、D、F、H点，但不可能跳到E点，如图10，故$a_{2m-1}=0$（$m\in N$）

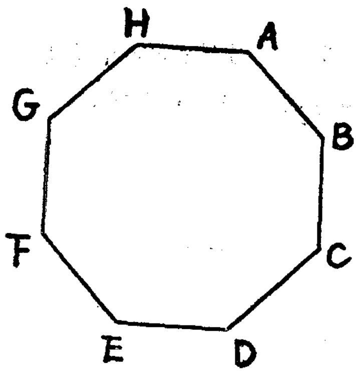


图10

现在，用b_n表示从C点开始以n次跳，最后跳到E点的各不同路径的数目（这与从G点开始一样，从C点跳2次到E点，只有一种途径，故$b_2=1$

青蛙从A点起跳2次之后，它可能在C、G点或返回到A点，它可以有两种途径返回

A：$A\to B\to A$或$A\to H\to A$

故从A到E跳n次的路径a_n

$=$从C、G点跳$n-2$次到达E点的路径数$+$从A到E跳$n-2$次的路径数的2倍

即　$a_n = 2b_{n-2} + 2a_{n-2}$　①

当青蛙从C开始跳并跳了大于2次的次数，前2次跳的结果或落在A点或落在C点（因为若落在E点它不能再跳，即只跳了2次），所以

路径数b_n

$=$从A起跳，跳$n-2$次到E点的路径数$+$从C起跳，跳$n-2$次到E点的路径数的2倍（因为前2次跳可能为$C\to D\to C$或$C\to B\to C$）

故　$b_n = 2b_{n-2} + a_{n-2}$ $(n>2)$　②

②$-$①得　$b_n - a_n = -a_{n-2}$

$$b_n = a_n - a_{n-2}$$

故　$b_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-4}$　③

③代入①得

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-2} - 2a_{n-4} \ (n>4) & ④ \\ a_2 = 0 \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

当$n=2m$时

$$a_{2m} = 4a_{2m-2} - 2a_{2m-4}$$

设　$c_m = a_{2m}$，又　$c_1 = 0$，$c_2 = 2$

则　$c_m = 4c_{m-1} - 2c_{m-2}$

其特征方程为　$x^2 - 4x + 2 = 0$

特征根为 $q_1 = 2+\sqrt{2}$，$q_2 = 2-\sqrt{2}$

$$\therefore \quad c_m = A(2+\sqrt{2})^m + B(2-\sqrt{2})^m$$

$$c_2 = 4c_1 - 2c_0 \Longrightarrow 2 = 4\times 0 - 2c_0 \Longrightarrow c_0 \triangleq -1$$

$$\begin{cases} c_0 = -1 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ A(2+\sqrt{2}) + B(2-\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})} \\[2ex] B = -\dfrac{1}{\sqrt{2}\,(2-\sqrt{2})} \end{cases}$$

$$\therefore \quad a_{2m} = c_m = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})^m$$

$$-\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})^m = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})^{m-1}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})^{m-1}$$

练习题解答

1 $\because\ x_{n-1}\ x_n = n$

$\therefore\ x_1x_2 = 2\quad x_3x_4 = 4\quad x_5x_6 = 6\quad x_7x_8 = 8$

故 $\prod_{i=1}^{8} x_i = 2\times4\times6\times8 = 384$

2 $x_1 = 3^{\frac{1}{3}}$

$$x_2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\sqrt[3]{3}} = 3^{\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}}$$

$$x_3 = \left(3^{\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{3}} = 3^{\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}}$$

$$x_4 = \left(3^{\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}}\right)^{\sqrt[3]{3}} = 3^{\frac{1}{3}\sqrt[3]{27}} = 3$$

所以最小的n是4

3 $u_1 = a$

$$u_2 = -\frac{1}{u_1+1} = -\frac{1}{a+1}$$

$$u_3 = -\frac{1}{-\frac{1}{a+1}+1} = -\frac{a+1}{a}$$

$$u_4 = -\frac{1}{-\frac{a+1}{a}+1} = a$$

不难想象

$$u_5 = -\frac{1}{a+1}, \quad u_6 = -\frac{a+1}{a}, \quad u_7 = a;$$

$$u_8 = -\frac{1}{a+1}, \quad u_9 = -\frac{a+1}{a}, \quad u_{10} = a;$$

$$u_{11} = -\frac{1}{a+1}, \quad u_{12} = -\frac{a+1}{a}, \quad u_{13} = a;$$

$$u_{14} = -\frac{1}{a+1}, \quad u_{16} = -\frac{a+1}{a}, \quad u_{16} = a;$$

$$u_{17} = -\frac{1}{a+1}, \quad u_{18} = -\frac{a+1}{a}$$

故　n的值是16。

4
$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

5　设x_n表示贴足n分的方法数，则

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-3} + x_{n-4}$$

显然　$x_1 = 0$，$x_2 = 1$，$x_3 = 1$，$x_4 = 2$

不难得到　$x_{10} = 17$

6　设y_n表示第n个月开始围场中有的兔子对数。

$$y_1 = 2 = 2x_1$$

$$y_2 = 4 = 2x_2$$

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \\ y_1 = 2 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

（通项公式见练习）

7　设x_n表示容许传输且长度为n的词的个数，则

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2} \quad (n\geqslant 3) \\ x_1 = 3 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

8
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 8 \\ x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2} \end{cases}$$

9　设有x_n种着色方法，则

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} \\ x_1 = 3 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

（通项公式见练习12）

10　其通项由例12知

$$x_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

今欲$x_2 = x_1 + x_0$　即　$3 = 2 + x_0$，可见必须$x_0 = 1$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad c_1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$$

故　$x_n = \dfrac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$+\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

11 $$x_n=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

12 $x_n=3\times 2^{n-1}$

13 由于$n-1$个点将线段划分成x_{n-1}个线段。第n个点又把x_{n-1}个线段之一划分成二个线段。

∴ $x_n=x_{n-1}+1$

故 $x_n=n+1$

14 $x_1=60$

$$x_2=\frac{1}{5}x_1+60=\frac{1}{5}\times 60+60$$

$$x_3=\frac{1}{5}x_2+60=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\times 60+60\right)+60$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)^2 60+\frac{1}{5}\times 60+60$$

……

$$x_n=\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{5}+1\right]60$$

$$=75-15\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

另解 $$x_n-75=\frac{1}{5}x_{n-1}+60-75$$

$$x_n-75=\frac{1}{5}\left(x_{n-1}-75\right)$$

设 $y_n = x_n - 75$, $y_1 = -15$

$\therefore$ $y_n = -15\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

即 $x_n - 75 = -15\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

故 $x_n = 75 - 15\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

15 $a_n = n(n-1)$

16 $a_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$

参考资料

〔1〕(美) R.A.Brualdi著 李盘林、王天明译 《组合学导引》 第六章 递归关系

华中工学院出版社。

责任编辑：陶　军
封面设计：王小明

ISBN 7-5011-0937-0/G·291　定价：1.50元