

中国研究生创新实践系列大赛
“华为杯”第十七届中国研究生
数学建模竞赛

学 校

湖南科技大学

参赛队号

20105340005

队员姓名

1.

吴漫

2.

吴明月

3.

王维斯

中国研究生创新实践系列大赛

“华为杯”第十七届中国研究生

数学建模竞赛

题 目 飞行器质心平衡供油策略优化研究

摘 要：

本文研究了许多约束条件下飞行器质心平衡供油策略优化问题。在飞行过程中，飞行器姿态改变或油箱供油后质量变化，均会导致飞行器质心位置改变，对飞行器的控制产生影响。制定油箱的供油策略，对于控制飞行器执行飞行任务有着重要意义。

针对问题一，通过对飞行器相关参数与 6 个油箱供油速度数据的分析，得出某一时刻油箱内油量。根据对称性，将三维空间中质心求解问题降维至二维坐标系中研究。利用凸多边形质心公式，得到该时刻油箱质心坐标。最后，应用空间中质点组质心公式，确定该时刻飞行器质心坐标。进而得出飞行器在此次飞行任务中每隔一秒的质心位置数据，见所上传的附件 6 结果表“第一问结果”，质心变化曲线如图 5.11 所示。

针对问题二，在已知油箱初始油量的条件下，通过对飞行器保持平飞状态时油箱及飞行器质心位置的探究，建立多目标规划模型，利用 MATLAB 软件编程求解，得到飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为 0.5098 m ，4 个主油箱的总供油量为 7.6278 m^3 ，并绘出飞行器飞行过程中 6 个油箱各自的供油速度曲线如图 5.13 至 5.18 所示，4 个主油箱的总供油速度曲线如图 5.19 所示，6 个油箱的供油速度数据见所上传的附件 6 结果表“第二问结果”。

针对问题三，与问题二不同的是，减少油箱初始油量这一已知条件，增加在任务结束时 6 个油箱剩余燃油总量至少 1 m^3 的限制条件。通过建立多目标规划模型，结合题目提供的数据求解，得到 6 个油箱的初始载油量分别为 0.2989 m^3 ， 2.2308 m^3 ， 1.1268 m^3 ， 2.9170 m^3 ， 1.7352 m^3 ， 0.7478 m^3 ，飞行器质心与理想质心距离的最大值为 0.4231 m ，4 个主油箱的总供油量为 8.0075 m^3 ，飞行器飞行过程中 6 个油箱的供油速度曲线如图 5.22 至 5.27 所示，4 个主油箱的总供油速度曲线如图 5.28 所示，6 个油箱的初始油量及供油速度数据已存入附件 6 结果表“第三问结果”相应位置。

针对问题四，与问题二不同的是，飞行器在飞行过程中俯仰角度随时间改变。求解过程仅对质心的确定造成了影响，根据问题一中凸多边形质心公式重新确定油箱质心，利用问题二模型及改进的遗传算法，即可解得此题。飞行器瞬时质心与飞行器（不载油）质心的最大距离偏差为 0.5211 m ，4 个主油箱的总供油量为 8.4745 m^3 ，6 个油箱各自的供油速度曲线如图 5.29 至 5.34 所示，4 个主油箱的总供油速度曲线与计划耗油速度曲线如图 5.35 所示，6 个油箱的供油速度数据见附件 6 结果表“第四问结果”。

最后，结合模型应用的结果，本文对所建立的模型、设计的算法有效性和复杂度进行了分析与评价。

关键词： 供油策略；质点组质心；分阶段优化；贪婪算法；多目标规划；改进遗传算法

目 录

1. 问题重述.....	3
1.1 问题背景.....	3
1.2 问题提出.....	3
2. 问题分析.....	4
3. 模型假设.....	4
4. 符号说明.....	5
5. 模型的建立与求解.....	6
5.1 问题一的建模与求解.....	6
5.1.1 数据预处理.....	6
5.1.2 确定 t 时刻油箱质心位置.....	6
5.1.3 确定飞行器在 t 时刻质心位置.....	13
5.1.4 问题一求解.....	14
5.2 问题二的建模与求解.....	14
5.2.1 初步分析.....	14
5.2.2 第一目标规划模型.....	15
5.2.3 第二目标规划模型.....	16
5.2.4 问题二求解.....	17
5.3 问题三的建模与求解.....	18
5.3.1 问题三的初始值定界.....	18
5.3.2 模型限制条件.....	18
5.3.3 可行解的分析评价.....	19
5.3.4 问题三求解.....	19
5.4 问题四的建模与求解.....	20
5.4.1 供油策略分析.....	20
5.4.2 问题四约束条件.....	21
5.4.3 模型综述.....	21
5.4.4 问题四求解.....	22
6. 算法的有效性和复杂度分析.....	23
7. 参考文献.....	24
附录.....	25

1. 问题重述

1.1 问题背景

高准确度质量特性测量在航空航天工程中有着重要的意义。由于飞行器结构复杂，元器件繁多，一般很难准确地确定其质心的几何位置，而飞行器的质心变化对飞行器的控制有着十分重要的影响。因此，对造成飞行器质心变化的因素进行研究成为一个重要的课题。

现有某类携带多个油箱的飞行器，在执行任务过程中，各个油箱内油量的分布和供油策略将导致飞行器质心的变化，对飞行器的控制产生着直接影响。通过对飞行器结构的分析，结合相关供油条件，制定各个油箱的供油策略，能够更有效的控制飞行器，更安全的完成飞行任务。

1.2 问题提出

题目提供了 5 个数据文件，附件 1 给出了以飞行器（不载油）的质心为原点 O 建立的惯性坐标系 $O-XYZ$ 中，各个油箱的中心位置，以及各个油箱的尺寸、燃油的密度、飞行器的净质量和油箱间供油关系等条件，附件 2 至附件 5 所提供的数据文件为 6 个油箱的供油速度、飞行器在飞行过程中的俯仰角、飞行器计划耗油速度及飞行器在飞行坐标系下的理想质心位置等数据，要求利用该数据解决如下问题：

问题一：已知飞行器的相关参数，及每隔一秒所记录的飞行器各油箱的供油速度、飞行器在飞行过程中的俯仰角变化数据，

(1) 给出该飞行器的质心变化曲线；

(2) 按照时间（每隔一秒）先后顺序，将飞行器质心在飞行坐标系中的位置数据存入所提供的附件 6 结果表对应位置。

问题二：在飞行器始终保持平飞状态时，结合飞行器计划耗油速度数据及飞行器在飞行器坐标系下的理想质心位置数据，在使得每一时刻实际的质心位置与理想质心位置的欧氏距离的最大值最小的情况下，制定 6 个油箱的供油策略，即

(1) 给出飞行过程中 6 个油箱的供油速度曲线；

(2) 给出 4 个主油箱的总供油速度曲线（时间间隔为 $1s$ ）；

(3) 求得飞行器实际质心与理想质心距离的最大值；

(4) 求得 4 个主油箱的总供油量；

(5) 按照时间（每秒一组）先后顺序，将 6 个油箱的供油速度数据存入所提供的附件 6 结果表“第二问结果”中。

问题三：在飞行器始终保持平飞状态时，在已知某次任务的飞行器计划耗油速度数据与飞行器在飞行器坐标系下的理想质心位置数据的条件下，增加限制条件：任务结束时 6 个油箱剩余燃油总量至少 $1m^3$ ，

(1) 给出 6 个油箱的初始载油量并存入所提供的附件 6 结果表中的对应位置；

(2) 其余所求内容与问题二 5 条要求一致。

问题四：问题二、三是在飞行器始终保持平飞的状态下进行研究与讨论的，实际任务中，飞行器俯仰角是随时间变化的。在飞行器相关参数不变的情况下，分析飞行器俯

仰角的变化数据和耗油速度数据，在瞬时质心与理想质心欧氏距离最大值尽量小的条件下，制定油箱供油策略：

(1) 将 4 个主油箱的总供油速度曲线（时间间隔为 $1s$ ）与计划耗油速度曲线绘于同一个图中；

(2) 其余所求内容与问题二 5 条要求一致。

2. 问题分析

本文研究飞行器质心平衡供油策略优化问题，当飞行器在飞行过程姿态改变或油箱供油后质量变化时，会导致飞行器质心位置改变，对飞行器的控制产生影响。

针对问题一，通过分析题目，我们知道发动机质心位置受当前时刻 6 个油箱的状态影响。首先对油箱内燃油体积及切面图形分类讨论，利用凸多边形重心公式及矢量加法原则，可得到油箱在飞行器坐标系中的位置矢量。然后利用力学知识，由加权平均公式，即可求得该时刻飞行器的质心坐标。在此基础上，对时间进行迭代，即可确定任务过程中每个时刻，飞行器质心在飞行器坐标系中的位置坐标，从而绘出此次任务中飞行器的质心变化曲线。

针对问题二，通过分析题目，我们把该类的问题归纳为多目标规划问题。并利用多目标规划问题的常用解决方法字典序法进行求解。在问题一的基础上，合理利用四个主油箱的供油策略，拟合出几种供油趋势图，分类抽象为常见的基本函数。在题目给出总的供油策略的前提下，用四个主油箱的拟合函数来合成一个新的总供油策略。为了更好的描述第一规划目标，定义一个新指标来评价每一个供油策略拟合理想供油策略的优劣。通过对第一目标规划求解，筛选出几个全局较佳的解，以此作为第二目标的输入，针对每种情况进行第二目标规划。根据题目已给的评价公式，添加两个副油箱的供油曲线，以此来平衡质心偏离曲线。最后综合分析得到相对最优的可行解。

针对问题三，在问题二的基础上，各油箱初始油量为未知量，增加限制条件，重新构造目标函数，修改约束条件，利用二分法对该问题进行求解，确定每个油箱的初始油量值，从而将问题三转化为问题二同类型题目，利用问题二模型即可解得本题。

针对问题四，总的来说是综合模型一和模型二的方法对该问题进行求解。考虑飞行器的俯仰角随时间变化的情形，此时质心位置不再只是相对飞行器坐标系中 $X(t)O(t)Y(t)$ 平面上下移动，同时还会相对 $Y(t)O(t)Z(t)$ 平面左右移动。利用问题一模型，确定该情况下飞行器质心位置，利用问题二模型进行求解，得到可行的解集。将可行的解集作为输入，作为遗传算法的第一代，经过交叉与变异，设定算法出口条件，筛选出符合该题目一个较佳的解。

3. 模型假设

为简化问题，题目已对飞行器的结构和相关供油限制作出了 7 条假设与要求，除此之外，我们作出了如下 5 条假设和要求：

(1) 在飞行过程中，油箱形状及位置保持不变。

(2) 飞行器姿态的改变仅考虑平直飞与阜阳情况，不考虑飞行航向上的上下俯仰或左右偏转。

(3) 油箱内燃油随飞行器的俯仰发生倾斜，但燃油分布均匀密度保持不变。

- (4) 油箱内燃油表面作为平面进行处理。
(5) 只考虑数据集及题目中所提供的信息，不考虑额外因素对质心的影响。

4. 符号说明

符号	说明
a_i, b_i, c_i	第 <i>i</i> 个油箱的长、宽、高， $i=1,2,\dots,6$ ，单位 <i>m</i>
t	时间
\bar{P}_i	第 <i>i</i> 个空油箱中心位置， $i=1,2,\dots,6$
$P_i(t)$	第 <i>i</i> 个油箱在 <i>t</i> 时刻质心在油箱坐标系中位置， $i=1,2,\dots,6$
$P_{\text{飞}i}(t)$	第 <i>i</i> 个油箱在 <i>t</i> 时刻质心在飞行器坐标系中位置， $i=1,2,\dots,6$
$P(t)$	飞行器在 <i>t</i> 时刻的质心位置坐标
ρ	燃油的密度，单位 kg/m^3
M	飞行器（不载油）总重量，单位 <i>kg</i>
$M_i(t)$	第 <i>i</i> 个油箱到 <i>t</i> 时刻减少的燃油重量，单位 <i>kg</i>
$N_i(t)$	第 <i>i</i> 个油箱到 <i>t</i> 时刻增加的燃油重量，单位 <i>kg</i>
m_i	第 <i>i</i> 个油箱的初始燃油重量，单位 <i>kg</i>
$m_i(t)$	第 <i>i</i> 个油箱到 <i>t</i> 时刻燃油重量，单位 <i>kg</i>
U_i	第 <i>i</i> 个油箱的供油速度上限， $U_i > 0, i=1,2,\dots,6$ ，单位 kg/s
$u_i(t)$	<i>t</i> 时刻第 <i>i</i> 个油箱的供油速度， $i=1,2,\dots,6$ ，单位 kg/s
$u(t)$	<i>t</i> 时刻飞行器耗油速度，单位 kg/s
$\bar{c}_0(0,0,0)$	飞行器坐标系下，飞行器（不载油）质心
$\bar{c}_i(t)$	飞行器每一时刻质心位置
$\bar{c}_s(t)$	理想质心位置
$\bar{d}_i(t)$	第 <i>i</i> 个油箱在 <i>t</i> 时刻的质心位置， $i=1,2,\dots,6$
$\theta(t)$	飞行器 <i>t</i> 时刻俯仰角
$O-XYZ$	惯性坐标系
$O(t)-X(t)Y(t)Z(t)$	飞行器坐标系
$O_i-X_iY_iZ_i$	第 <i>i</i> 个油箱坐标系， $i=1,2,\dots,6$
$V_i(t)$	第 <i>i</i> 个油箱在 <i>t</i> 时刻所含燃油体积，单位 m^3
V_i	第 <i>i</i> 个油箱初始油量， $i=1,2,\dots,6$
$f_i(t)$	第 <i>i</i> 个油箱供油速度函数， $i=1,2,\dots,6$
$S_i(t)$	<i>t</i> 时刻第 <i>i</i> 个油箱内燃油截面图形面积， $i=1,2,\dots,6$ ，单位 m^2
$k_i(t)$	<i>t</i> 时刻第 <i>i</i> 个油箱供油与否变量， $i=1,2,\dots,6$

5. 模型的建立与求解

5.1 问题一的建模与求解

5.1.1 数据预处理

(1) 确定 t 时刻油箱内燃油体积

对附件 2 提供的各油箱供油速度数据，分别进行拟合，可得每个油箱供油速度函数 $f_i(t)$ ，对 $f_i(t)$ 进行积分，可得到 t 时刻，该油箱减少的燃油重量为 $M_i(t) = \int_0^t f_i(x) dx$ ，该油箱增加的燃油重量为 $N_i(t)$ ，由于编号为 1、3、4、6 的油箱均没有其他油箱供油，故当 $i=1,3,4,6$ 时 $N_i(t)=0$ ，编号为 2、5 的油箱分别会接收编码为 1、6 的油箱供油，故当 $i=2,5$ 时， $N_i(t)=M_{i+1}(t)$ ，即有

$$N_i(t) = \begin{cases} M_{i+1}(t), & i=2,5 \\ 0, & i=1,3,4,6 \end{cases} \quad (1)$$

再根据附件 1 中各油箱的初始油量为 V_i ，由质量公式得初始重量 $m_i = \rho V_i$ ，从而 t 时刻，第 i 个油箱内的燃油重量为 $m_i(t) = m_i - M_i(t) + N_i(t)$ ，再根据质量公式可得第 i 个油箱内燃油体积为

$$V_i(t) = m_i(t) / \rho \quad (2)$$

(2) 建立油箱坐标系

由于飞行过程中，油箱位置相对飞行器位置保持不变，且油箱与飞行器均为立方体形状，故可选取油箱中心位置原点 O_i ，与飞行器坐标系对应坐标轴平行建立油箱坐标系如图 5.1 坐标系 $O_i - X_i Y_i Z_i$ 所示。

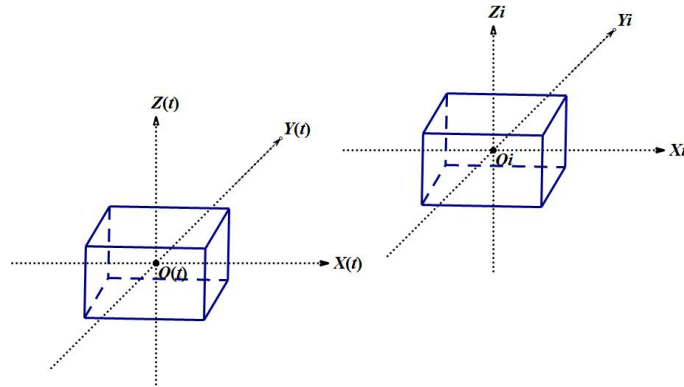


图 5.1 油箱坐标系图

5.1.2 确定 t 时刻油箱质心位置

在飞行过程中，由于燃油分布均匀且密度处处相等，在油箱坐标系中，油箱内燃油形状始终关于 $X_i O_i Z_i$ 平面对称，此时油箱质心坐标 $P_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ 中， $y_i(t) = 0$ 。故我们可将问题从三维坐标系，降维到二维坐标系 $O_i - X_i Z_i$ 中进行探究。以三棱柱形态举例说明，如图 5.2 所示：

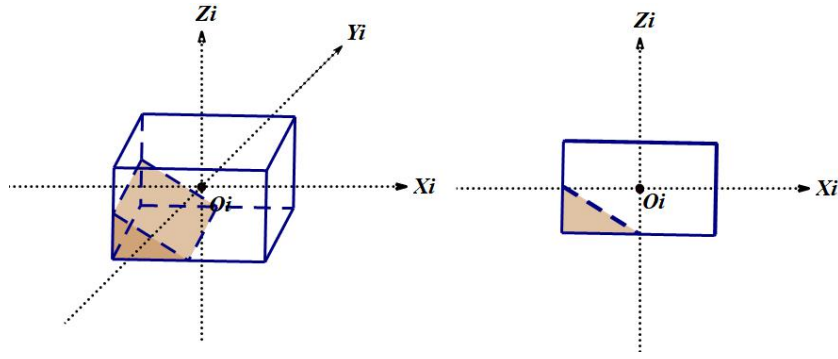


图 5.2 降维举例说明图

由于飞行过程中，飞行器姿态的改变仅考虑平直飞与俯仰情况，从截面图来看，油箱内燃油截面形状有三角形、四边形（包括长方形、直角梯形）和五边形，且均为凸多边形。

我们需要知道凸多边形重心位置公式，经查找与阅读文献我们得知如下信息。

(1) 凸多边形重心（形心）公式

图的形心为其几何中心，通常把凸多边形看成密度一致的平面薄片，均匀平面薄片的重心也叫做平面薄片所占的平面图形的形心。^[1]

在平面几何中，若三角形的三个顶点坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ，则 $\triangle ABC$ 的重心 $G(x, y)$ 的坐标公式为

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (3)$$

对于四边形，我们可把它分为两个三角形组成的系统，其中每个三角形可抽象为一个带质量的点 $P_i, i=1, 2$ ，点的位置为三角形的质心，点的质量和三角形的面积 $s_i (i=1, 2)$ 成正比，根据两个点的系统的质心求解公式，可得四边形质心求解公式：

$$x = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{s_1 + s_2}, y = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2}{s_1 + s_2} \quad (4)$$

依次类推，对于 n 多边形，我们可把它分为 $n-2$ 个三角形组成的系统，每个三角形面积 $s_i (i=1, 2, \dots, n-2)$ ，可得 n 多边形质心求解公式：

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} x_i s_i}{\sum_{i=1}^{n-2} s_i}, y = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} y_i s_i}{\sum_{i=1}^{n-2} s_i} \quad (5)$$

(2) t 时刻油箱质心在油箱坐标系中位置

平飞状态油箱质心位置

显然在飞行器保持平飞（俯仰角为 0）的任务规划过程中，各个油箱内燃油是与油箱同底的长方体，且燃油长方体的高为 $V_i(t)/a_i b_i$ ，如图 5.3 所示：

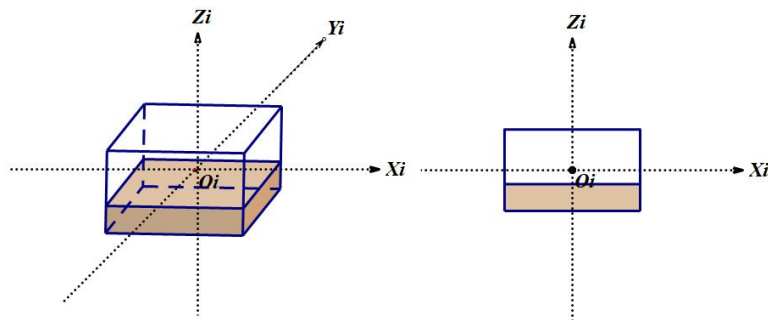


图 5.3 平飞状态燃油状态图

由于燃油分布均匀，各部分密度相等，由对称性得此时油箱质心在油箱坐标系中的坐标为

$$P_i(t) = \left(0, 0, -\frac{c_i}{2} + \frac{V_i(t)}{2a_i b_i} \right) \quad (6)$$

飞行器向上飞行器油箱质心位置

飞行器俯仰飞行时，油箱相对地面发生倾斜，油箱内燃油形态改变。我们首先考虑飞行器向上飞行时的情况。在油箱坐标系中，油箱截面长方形的长与宽相对坐标轴是平行的，此时对油箱内燃油形态进行探究：

情况 1：当油箱内燃油量较少时，飞行器仰角为 $\theta_i(t)$ ，燃油在油箱内呈三棱柱状态，

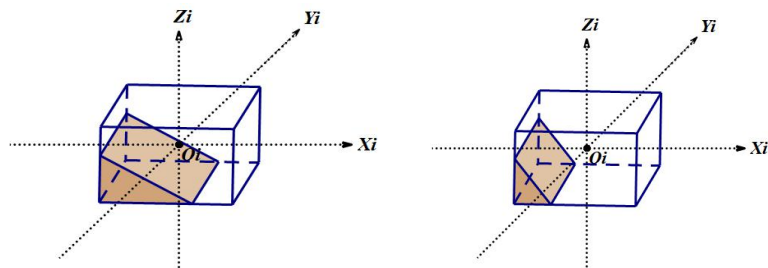


图 5.4 燃油呈三棱柱的状态图

其在平面 $X_i O_i Z_i$ 中截面为直角三角形，如图 5.5 所示：

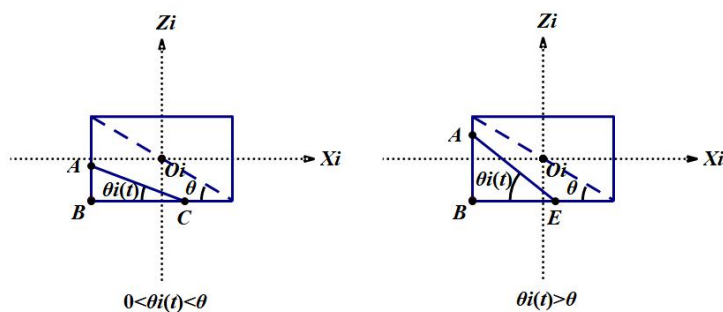


图 5.5 燃油截面为三角形的状态图

已知该三棱柱体积（即燃油重量） $m_i(t)$ 、高 b_i ，故我们可得三角截面面积 $S_i(t) = m_i(t)/b_i$ 。设此时的直角三角形截面的两直角边分别长为 x 米、 z 米，斜边长为 l 米，则有

$$\begin{cases} S_i(t) = xz/2 \\ l \cos \theta_i(t) = x \\ l \sin \theta_i(t) = z \end{cases} \quad (7)$$

即可确定该时刻三角形三顶点在 $O_i - X_i Z_i$ 坐标系中的坐标。当 $z > c_i/2$ 时，表示 A 点在 $X_i O_i Y_i$ 平面上方，此时点 A 的 Z_i 轴上的坐标值为 $z - c_i/2$ ；当 $z < c_i/2$ 时，表示 A 点在 $X_i O_i Y_i$ 平面下方，此时点 A 在 Z_i 轴上的坐标值为 $-(c_i/2 - z) = z - c_i/2$ 。综上所述，点 A 在油箱坐标系 $O_i - X_i Y_i Z_i$ 的坐标为 $A(-a_i/2, 0, z - c_i/2)$ 。当 $x > a_i/2$ 时，表示 C 点在 $Y_i O_i Z_i$ 平面右方，此时点 C 的 X_i 轴上的坐标为 $x - a_i/2$ ；当 $x < a_i/2$ 时，表示 C 点在 $Y_i O_i Z_i$ 平面左方，此时点 C 的 X_i 轴上的坐标为 $-(a_i/2 - x) = x - a_i/2$ 。综上所述，点 C 在油箱坐标系 $O_i - X_i Y_i Z_i$ 的坐标为 $C(x - a_i/2, 0, -c_i/2)$ 。易得点 B 在油箱坐标系 $O_i - X_i Y_i Z_i$ 的坐标为 $B(-a_i/2, 0, -c_i/2)$ 。

利用三角形重心公式即可求得该时刻第 i 个油箱质心坐标 $P_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ 为：

$$x_i(t) = \frac{-a_i/2 + (x - a_i/2) + (-a_i/2)}{3}, \quad y_i(t) = 0, \quad z_i(t) = \frac{(z - c_i/2) + (-c_i/2) + (-c_i/2)}{3}$$

化简得第 i 个油箱在油箱坐标系中的质心坐标为

$$P_i(t) = \left(\frac{x}{3} - \frac{a_i}{2}, 0, \frac{z}{3} - \frac{c_i}{2} \right) \quad (8)$$

情况 2： 当油箱内燃油量较情况 1 更多时，飞行器仰角为 $\theta_i(t)$ ，燃油在油箱内呈四棱柱状态，

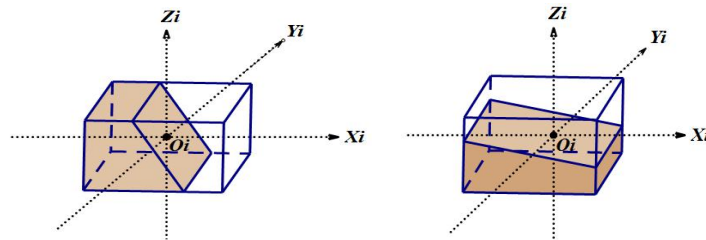


图 5.6 燃油为四棱柱的状态图

其在平面 $X_i O_i Z_i$ 中截面为直角梯形形，此时又可分为两种情况，如图 5.7 所示：

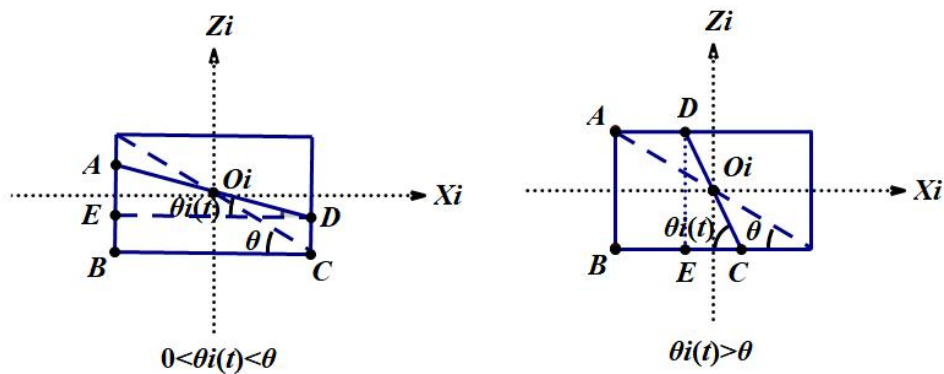


图 5.7 燃油截面为直角梯形的状态图

这里我们仅对上图中第一种情况进行讨论，第二种情形类似推导即可。

已知该四棱柱体积（即燃油重量） $m_i(t)$ 、高 b_i ，故我们可得直角梯形截面面积

$S_i(t) = m_i(t)/b_i$ 。又直角梯形直角边长为油箱长度 a_i ，设此时上底边分别长为 $z_1(t)$ 米，下底长为 $z_2(t)$ 米，斜边长为 l 米，则有

$$\begin{cases} S_i(t) = (z_1(t) + z_2(t))a_i/2 \\ l \cos \theta_i(t) = a_i \\ l \sin \theta_i(t) = z_2(t) - z_1(t) \end{cases} \quad (9)$$

通过上式，即可解得上下底边长度，从而可得划分的两个三角形体系各自的面积为

$$s_i(t) = z_i(t)a_i/2, \quad i=1,2 \quad (10)$$

进而可以确定直角梯形四个顶点在油箱坐标系中的位置：

$$A = \left(-\frac{a_i}{2}, 0, z_2(t) - \frac{z_i}{2}\right), \quad B = \left(-\frac{a_i}{2}, 0, -\frac{z_i}{2}\right), \quad C = \left(\frac{a_i}{2}, 0, -\frac{z_i}{2}\right), \quad D = \left(\frac{a_i}{2}, 0, z_1(t) - \frac{z_i}{2}\right)$$

利用三角形质心公式，分别求出 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的质心 $P_{i1}(t)$ 与 $P_{i2}(t)$ 坐标如下：

$$P_{i1}(t) = \left(-\frac{a_i}{6}, 0, \frac{z_1(t) + z_2(t)}{3} - \frac{z_i}{2}\right), \quad P_{i2}(t) = \left(\frac{a_i}{6}, 0, \frac{z_1(t)}{3} - \frac{z_i}{2}\right)$$

然后根据四边形质心求解公式得出该时刻油箱质心在油箱坐标系中的位置为

$$P_i(t) = \left(\frac{-a_i s_1(t) + a_i s_2(t)}{6(s_1(t) + s_2(t))}, 0, \frac{z_1(t)s_1(t) + z_2(t)s_1(t) + z_1(t)s_2(t)}{3(s_1(t) + s_2(t))} - \frac{z_i}{2}\right) \quad (11)$$

同理可求得图*中第二种情况下，直角梯形四个顶点在油箱坐标系中的位置：

$$A = \left(-\frac{a_i}{2}, 0, \frac{c_i}{2}\right), \quad B = \left(-\frac{a_i}{2}, 0, -\frac{c_i}{2}\right), \quad C = \left(x_2(t) - \frac{a_i}{2}, 0, -\frac{c_i}{2}\right), \quad D = \left(x_1(t) - \frac{a_i}{2}, 0, -\frac{c_i}{2}\right)$$

利用三角形质心公式，分别求出 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的质心 $P_{i1}(t)$ 与 $P_{i2}(t)$ 坐标如下：

$$P_{i1}(t) = \left(\frac{x_1(t)}{3} - \frac{a_i}{2}, 0, -\frac{c_i}{6}\right), \quad P_{i2}(t) = \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{3} - \frac{a_i}{2}, 0, -\frac{c_i}{2}\right)$$

然后根据四边形质心求解公式得出该时刻油箱质心在油箱坐标系中的位置为

$$P_i(t) = \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{3} + \frac{3a_i s_1(t) + 2x_2(t)s_2(t)}{6(s_1(t) + s_2(t))}, 0, \frac{-c_i s_1(t) - 3c_i s_2(t)}{6(s_1(t) + s_2(t))}\right) \quad (12)$$

情况 3：当油箱内燃油量较多时，飞行器仰角为 $\theta_i(t)$ ，燃油在油箱内呈五棱柱状态，

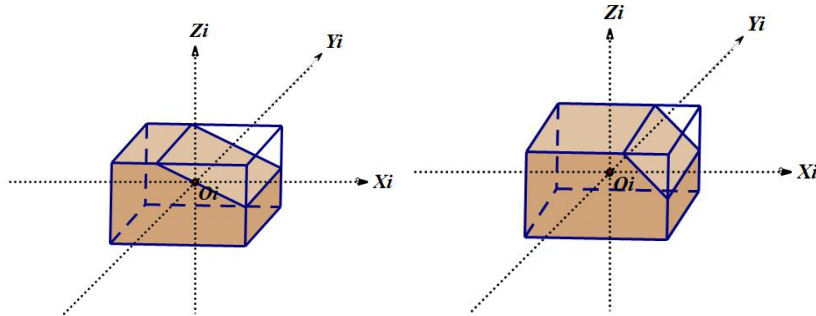


图 5.8 燃油为五棱柱的状态图

其在平面 $X_i O_i Z_i$ 中截面为五边形，如图 5.9 所示：

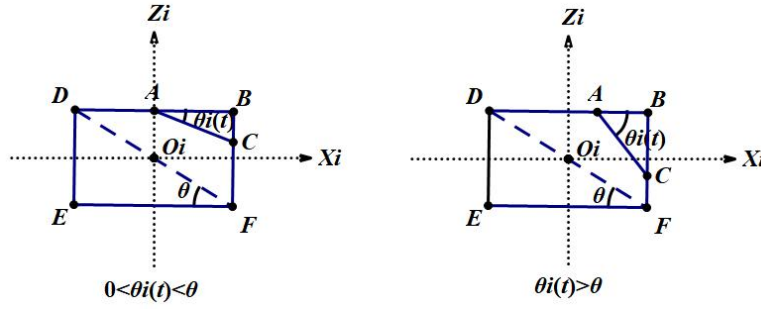


图 5.9 燃油截面为五边形的状态图

已知该四棱柱体积（即燃油重量） $m_i(t)$ 、高 b_i ，故我们可得五边形截面面积 $S_i(t) = m_i(t)/b_i$ 。油箱截面长方形中剩余三角形 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = a_i c_i - S_i(t)$ ，此时我们直角边 AB 长为 x ，另一直角边 BC 长为 z ，斜边 AC 长为 l ，则有

$$\begin{cases} S_{\triangle ABC} = xz/2 \\ l \cos \theta_i(t) = x \\ l \sin \theta_i(t) = z \end{cases} \quad (13)$$

通过上式，即可解得边长 x, z 的长度大小，从而可得划分的三个三角形体系各自的面积为

$$s_1(t) = a_i c_i / 2, \quad s_2(t) = a_i (c_i - z) / 2, \quad s_3(t) = z(a_i - x) / 2 \quad (14)$$

进而可以确定五边形五个顶点在油箱坐标系中的位置：

$$A = \left(\frac{a_i}{2} - x, 0, \frac{c_i}{2} \right), C = \left(\frac{a_i}{2}, 0, \frac{c_i}{2} - z \right), D = \left(\frac{a_i}{2}, 0, \frac{c_i}{2} \right), E = \left(-\frac{a_i}{2}, 0, -\frac{c_i}{2} \right), F = \left(\frac{a_i}{2}, 0, -\frac{c_i}{2} \right),$$

利用三角形质心公式，分别求出 $\triangle DEF$ 、 $\triangle CDF$ 与 $\triangle ACD$ 的质心 $P_{i1}(t)$ 、 $P_{i2}(t)$ 与 $P_{i3}(t)$ 的坐标如下：

$$P_{i1}(t) = \left(\frac{a_i}{6}, 0, -\frac{c_i}{6} \right), P_{i2}(t) = \left(\frac{a_i}{2}, 0, \frac{c_i}{6} - \frac{z}{3} \right), P_{i3}(t) = \left(\frac{a_i}{2} - \frac{x}{3}, 0, \frac{c_i}{2} - \frac{z}{3} \right)$$

然后根据多边形质心求解公式得出该时刻油箱质心在油箱坐标系中的位置为

$$P_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$$

其中：

$$\begin{cases} x_i(t) = \frac{a_i s_1(t) + 3a_2 s_2(t) + 3a_i s_3(t) - 2x s_3(t)}{6(s_1(t) + s_2(t) + s_3(t))} \\ y_i(t) = 0 \\ z_i(t) = \frac{-c_i s_1(t) + c_i s_2(t) + 3a_i s_3(t) + 3c_i s_3(t) - 2z s_3(t)}{6(s_1(t) + s_2(t) + s_3(t))} \end{cases} \quad (15)$$

飞行器向下飞行器油箱质心位置

当向下飞行时，各油箱内燃油形态与向上飞行时情况类似，均会出现油箱内燃油量较少时三棱柱形态、适中时四棱柱形态、较多时五棱柱形态，如图 5.10 列出部分形态：

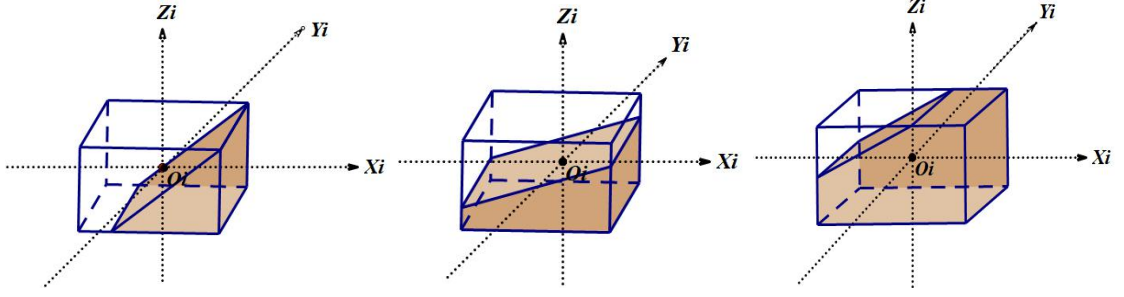


图 5.10 向下飞行时部分燃油形态图

且向下飞行与向上飞行所产生的相同形态关于油箱中心截面是对称的，

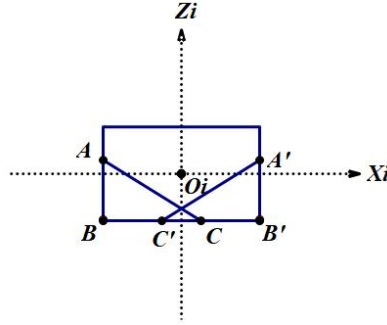


图 5.11 上仰下倾燃油形态对称图

根据轴对称相关性质，即可得到向下飞行时，不同形态油箱质心在油箱坐标系中的坐标为：

三棱柱形态下油箱质心在油箱坐标系中的位置：

$$P_i(t) = \left(-\frac{a_i}{2} + \frac{x}{3}, 0, \frac{z}{3} - \frac{c_i}{2} \right) \quad (16)$$

四棱柱形态下油箱质心位置：

$$\begin{cases} P_i(t) = \left(\frac{a_i s_1(t) - a_i s_2(t)}{6(s_1(t) + s_2(t))}, 0, \frac{z_1(t)s_1(t) + z_2(t)s_1(t) + z_1(t)s_2(t)}{3(s_1(t) + s_2(t))} - \frac{z_i}{2} \right), & 0 < \theta_i(t) < \theta \\ P_i(t) = \left(-\frac{x_1(t) + x_2(t)}{3} - \frac{3a_i s_1(t) + 2x_2(t)s_2(t)}{6(s_1(t) + s_2(t))}, 0, \frac{-c_i s_1(t) - 3c_i s_2(t)}{6(s_1(t) + s_2(t))} \right), & \theta < \theta_i(t) < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (17)$$

五棱柱形态下油箱质心位置：

$$P_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$$

其中：

$$\begin{cases} x_i(t) = -\frac{a_i s_1(t) + 3a_2 s_2(t) + 3a_i s_3(t) - 2x s_3(t)}{6(s_1(t) + s_2(t) + s_3(t))} \\ y_i(t) = 0 \\ z_i(t) = \frac{-c_i s_1(t) + c_i s_2(t) + 3a_i s_3(t) + 3c_i s_3(t) - 2z s_3(t)}{6(s_1(t) + s_2(t) + s_3(t))} \end{cases} \quad (18)$$

(3) t 时刻油箱质心在飞行器坐标系中位置

通过(2)我们可以确定每时刻各个油箱的质心在相应油箱坐标系 $O_i - X_i Y_i Z_i$ 中的位置 $P_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ 。现目标是将油箱坐标系中坐标统一转化到飞行器坐标系 $O(t) - X(t) Y(t) Z(t)$ 中。

由于几何向量知识，我们知道若两坐标系对应坐标轴方向及单位长度相同，则分别处于两坐标系中的不同向量可进行矢量加减操作，且两坐标系原点构成的向量与其中一个坐标系原点发出到该坐标系中任一点的向量，根据向量相加的三角形法则，所得到的向量即为该点在另一个坐标系中的位置，如图 5.12 所示：

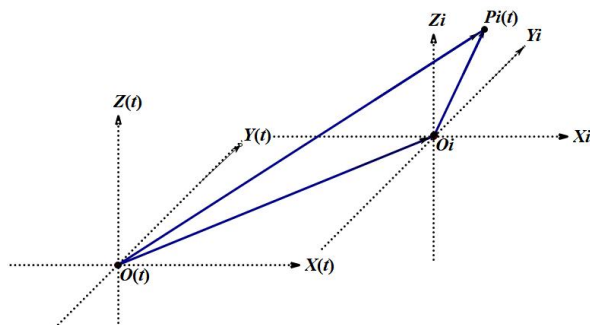


图 5.12 平行坐标系矢量加法示意图

根据上述内容，飞行器坐标系 $O(t) - X(t) Y(t) Z(t)$ 中，第 i 个油箱的油箱坐标系原点矢量为 $\overrightarrow{O(t)O_i}$ ，在油箱坐标系中第 i 个油箱质心矢量为 $\overrightarrow{O_i P_i(t)}$ ，则油箱质心在飞行器坐标系中位置矢量为

$$\overrightarrow{O(t)P_i(t)} = \overrightarrow{O(t)O_i} + \overrightarrow{O_i P_i(t)} \quad (19)$$

从而得到油箱质心在飞行器中的位置坐标 $P_{\text{fi}}(t) = (x_{\text{fi}}(t), y_{\text{fi}}(t), z_{\text{fi}}(t))$ ，其中各坐标值为对应位置矢量的分量值。

5.1.3 确定飞行器在 t 时刻质心位置

在明确飞行过程中，每时刻各油箱质心在飞行器坐标系中的位置后，问题转化为：在三维空间坐标系中，求 6 个质点的质心问题。

在物理学中，质点组的质心位置定义为：

已知空间中有 n 个质点，它们分别位于点 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ ，质量分别为 M_1, M_2, \dots, M_n ，该质点组的质心的坐标 $P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i x_i}{\sum_{i=1}^n M_i}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i y_i}{\sum_{i=1}^n M_i}, \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i z_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (20)$$

在本题中，我们已知在 t 时刻，6 个油箱的质心在飞行器坐标系中的位置 $P_{\text{fi}}(t) = (x_{\text{fi}}(t), y_{\text{fi}}(t), z_{\text{fi}}(t))$ ，及各个油箱的重量 $m_i(t)$ ，根据上述公式，我们有飞行器质心在飞行器坐标系中的坐标 $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 为

$$x(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i(t)x_{\xi_i}(t)}{\sum_{i=1}^n m_i}, y(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i(t)y_{\xi_i}(t)}{\sum_{i=1}^n m_i}, z(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i(t)z_{\xi_i}(t)}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (21)$$

5.1.4 问题一求解

将附件 1 初始油量数据及附件 2 油箱供油速度数据代入公式 (1)、(2)，求得油箱内油量。结合此时飞行器俯仰角，确定所对应的燃油形态模型，按照模型求得各油箱质心在飞行器坐标系中的坐标，应用公式 (21)，即可求得每隔 1s，飞行器质心的位置数据，我们将其按时间先后顺序存入题目所提供的附件 6 结果表“第一问结果”中，利用 MATLAB 对其进行拟合，得质心在三个方向及整个空间内的变化曲线如图 5.13 所示：

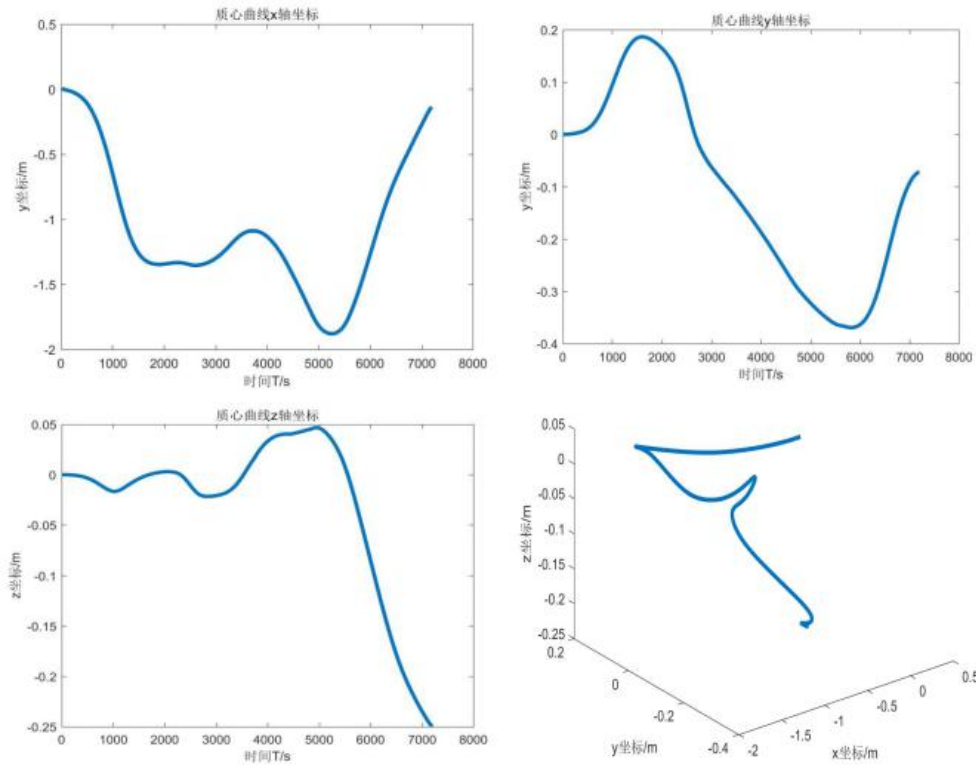


图 5.13 飞行器质心在三个方向轴及整改空间内的变化曲线

通过上述所得曲线，可以得出质心位置变化较为连续与光滑，合乎飞行任务中的实际情况，结果较为合理。

5.2 问题二的建模与求解

5.2.1 初步分析

根据问题一给出的供油数据，我们得到了问题一中各主油箱和总耗油的速率曲线图如图 5.14 所示：

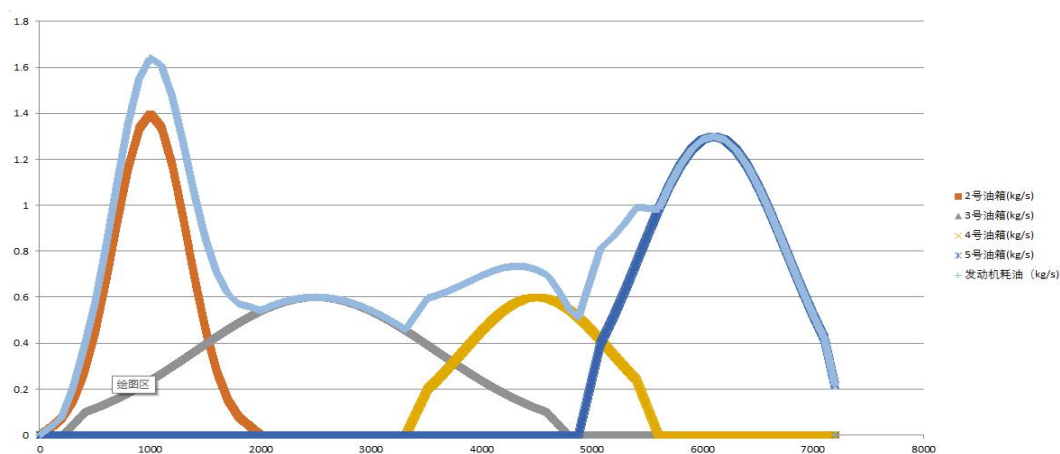


图 5.14 各主油箱和总耗油的速率曲线图

经观察，2 至 4 号油箱图像均与三角函数、正态分布函数、抛物线函数图像类似。通过比较图形的拟合程度，我们选择三角函数作为一个控油方案。

对于每一个油箱供油策略我们提出两种设想，由于这是主油箱的选择，根据题目限制，每个时刻最多有两个主油箱供油。在此基础上设想了一个可行的方案，在某一段时间里，我们使一个油箱的供油速度图基本符合三角函数的某个片段，而另一个供油的速度趋势图，则由当前的总供油速度图和已知某油箱的供油速度图计算出来。

计算方法如下：

Step1：先固定一个时间周期 T ，在此周期对其进行分析，根据大致的质心偏转方向先选取一个合适油箱 i 对其供油。

Step2：对时间周期 T 做一个剖分，记下时间步长，输入初始的数据，如油箱的基本信息，油箱 i 的供油速率图和总的耗油速率图等。

Step3：如果油箱 i 此时的供油不足以达到总的耗油率，此时我们将以状态回溯的方法，在前面某段时间打开油门 j 。

Step4：在差分的基础上，根据上一个阶段结果作为下一个阶段输入，如果油箱的可以达到这个速度，则分配该速率给油箱 j ，分配成功后，更新此刻各个油箱的基本信息，继续 *Step3*。否则转 *Step4*。

Step5：跳出循环，记录已经拟合时间长度。

5.2.2 第一目标规划模型

(1) 单位时间内平均排油量 Q

为了更好的评价拟合曲线的优劣情况，我们引入一个指标来对其进行评价，即单位时间内发动机的平均排油量 Q 。在满足限制条件下，寻找平均排油量达到最小的优化模型。

(2) 模型的限制条件

每个时刻的油箱剩余油量不小于 0，即 $m_i(t) \geq 0$ ；

每个时刻供油速度总和要大于等于耗油速度，即 $\sum_{i=1}^6 u_i(t) \geq u(t)$;

每次最多开两个主油箱，即 $\sum_{i=2}^5 k_i(t) \leq 2$;

每个主油箱的瞬时速率不能超过它对应的最大值 $u_i(t) \leq U_i, 2 \leq i \leq 5$.

(3) 模型综述

综上所述，我们得到第一目标规划模型为：

目标函数：

$$\min Q$$

约束条件：

$$\begin{cases} m_i(t) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^6 u_i(t) \geq u(t) \\ \sum_{i=2}^5 k_i(t) \leq 2 \\ u_i(t) \leq U_i, 2 \leq i \leq 5 \end{cases}$$

5.2.3 第二目标规划模型

根据第一目标规划模型筛选出来的解，作为该模型的输入，调整添加副油箱打开的时间，对时间节点做一个剖分，以质心位置 $\vec{c}_1(t)$ 和理想质心位置 $\vec{c}_2(t)$ 的欧氏距离的最大值达到最小为规划目标，结合题目所给限制条件进行求解。

(1) 模型的评价指标

质心位置 $\vec{c}_1(t)$ 和理想质心位置 $\vec{c}_2(t)$ 的欧氏距离的最大值达到最小，即

$$\min \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_2(t)\|_2$$

(2) 模型的限制条件

每个时刻的油箱剩余油量不小于 0，即 $m_i(t) \geq 0$;

每次最多开三个油箱，即 $\sum_{i=1}^6 k_i(t) \leq 3$;

每个副油箱的瞬时速率不能超过它对应的最大值，即 $u_i(t) \leq U_i, i = 1, 6$.

(3) 模型综述

综上所述，我们得到第二目标规划模型为：

目标函数：

$$\min \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_2(t)\|_2$$

约束条件：

$$\begin{cases} m_i(t) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^6 k_i(t) \leq 3 \\ u_i(t) \leq U_i, i = 1, 6 \end{cases}$$

5.2.4 问题二求解

根据上述模型，代入附件 3 所提供的飞行器计划耗油速度数据，通过 MATLAB 求解，我们得到飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为 0.5098 m ，4 个主油箱的总供油量为 7.6278 m^3 。

飞行器飞行过程中 6 个油箱的供油速度曲线如图 5.15 至 5.20 所示：

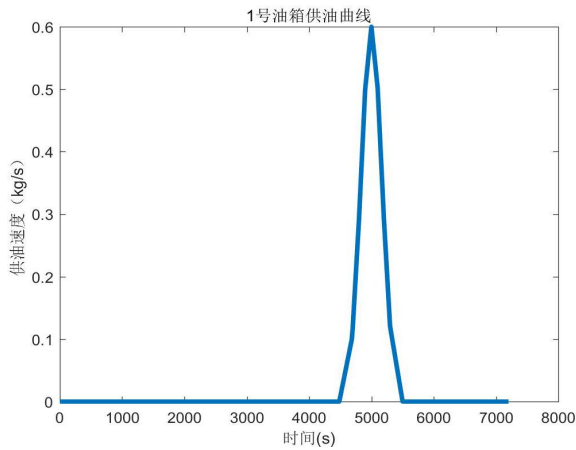


图 5.15 油箱 1 供油速度曲线图

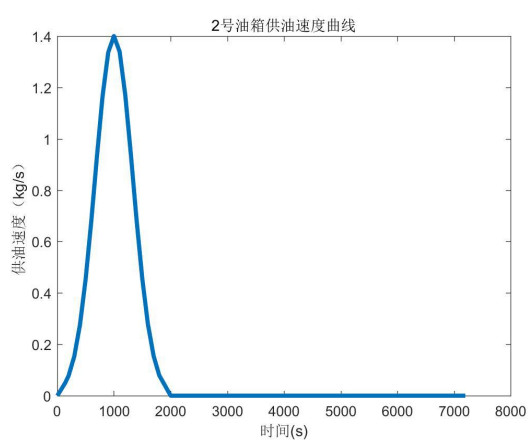


图 5.16 油箱 2 供油速度曲线图

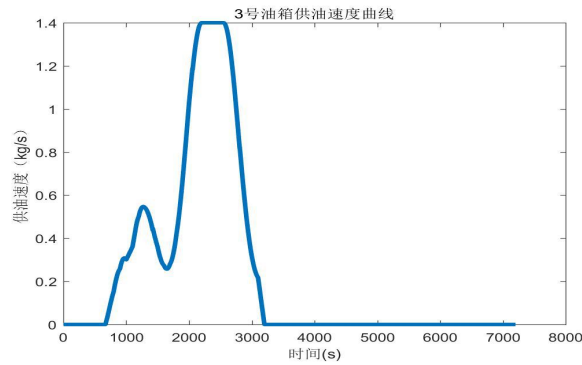


图 5.17 油箱 3 供油速度曲线图

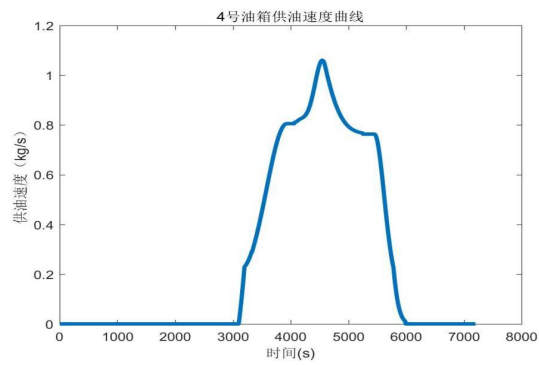


图 5.18 油箱 4 供油速度曲线图

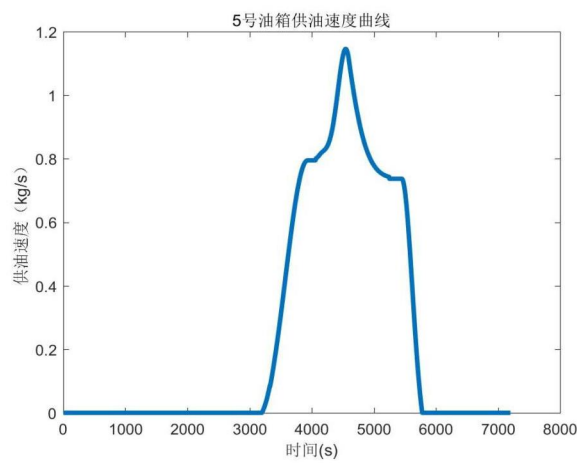


图 5.19 油箱 5 供油速度曲线图

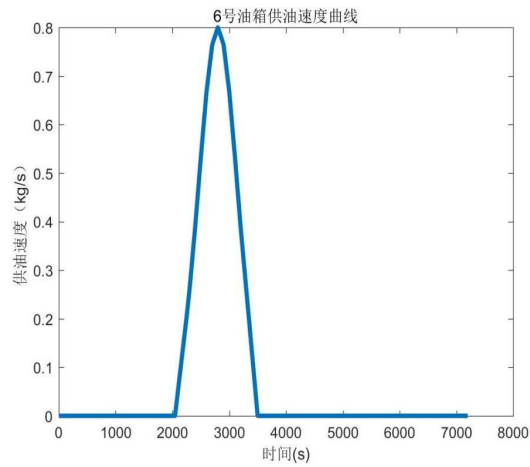


图 5.20 油箱 6 供油速度曲线图

4 个主油箱的总供油速度曲线（时间间隔为 $1s$ ）如图 5.21 所示：

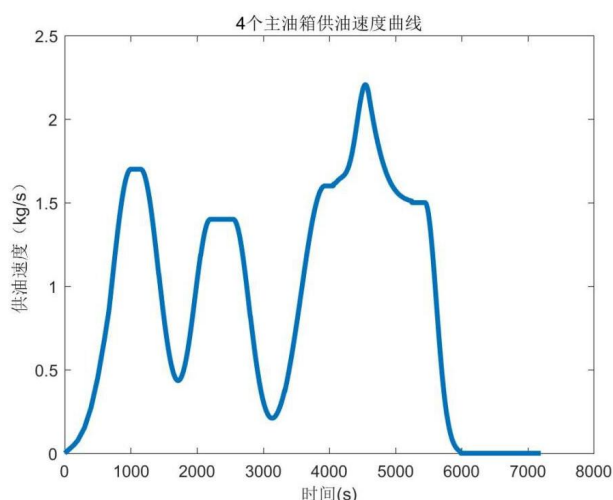


图 5.21 4 个主油箱的总供油速度曲线图

5.3 问题三的建模与求解

5.3.1 问题三的初始值定界

(1) 主副油箱的油量下界的确定方案

为了确定每个油箱的初始值，我们首先通过每个油箱趋势图对理想质心坐标的影响程度做一个三维对比分析，根据拟合程度来决定每个油箱对应的打开的时间。结合分析每个油箱油量对质心的偏转角度影响，从中筛选符合最佳拟合的一个油箱油量的比例。

通过题目给的总供油速度曲线图来计算出任务过程中总供油量，通过对问题二的分析，我们知道耗油量肯定小于或等于供油量。根据上一步的分析，我们可以得到一个油箱的比例关系。在刚好供油量等于耗油量加题目要求必须剩余最小油量的情况下，根据比例分配，分别计算得到每一个油箱初始值的下界。

(2) 主副油量的油量上界的确定方案

由于此题中为了寻找到一个满足任务行动的最优解，考虑这是航天工业，我们将以质心坐标的拟合程度作为一个最佳的目标。在保证完美完成任务的前提下，再考虑经济和材料的节省。故此我们将每个油箱装满作为一个供油方案的上界。

5.3.2 模型限制条件

每个时刻的油箱剩余油量不小于 0，即 $m_i(t) \geq 0$ ；

每个时刻供油速度总和要大于等于耗油速度，即 $\sum_{i=1}^6 u_i(t) \geq u(t)$ ；

每次最多开两个主油箱，即 $\sum_{i=2}^5 k_i(t) \leq 2$ ；

每个油箱的瞬时速率不能超过它对应的最大值，即 $u_i(t) \leq U_i, 1 \leq i \leq 6$ ；

每次最多开三个油箱，即 $\sum_{i=1}^6 k_i(t) \leq 3$ ；

任务结束时 6 个油箱剩余燃油总量至少 1 m^3 ，即 $\sum_{i=1}^6 m_i(t) \leq 1$ 。

5.3.3 可行解的分析评价

基于二分的方法，选定每一油箱的初始值，加上问题三增加的限制条件，运用问题二的模型求出可行的解。

对于这些可行解，我们建立了一个综合评价模型对该问题进行下一步的筛选工作。

可行解筛选算法如下：

Step1：对于所用的解空间，计算每一个可行解与理想质心坐标的二范式值进行比较。选择出二范式比较小的解进入下一轮筛选。

Step2：对于第一步筛选结果集，计算每个解的实际总耗油量，筛选出耗油量较低的解集。如果此时还有多个解，进入第三轮筛选。否则进行输出。

Step3：根据第二步的筛选，我们利用权重分析法，可行解与理想质心坐标偏离程度给予权重 a ，可行解的总供油量与理想耗油量的差值给予权重 $1-a$ 。通过这两个指标的加权值大小进行筛选。选择值较小的解集并进行输出。

5.3.4 问题三求解

根据上述模型，代入附件 4 所提供的飞行器计划耗油速度数据，通过 MATLAB 求解，我们得到 6 个油箱最后剩余 1.0467 m^3 的燃油，4 个主油箱的供油量为 8.0075 m^3 ，飞行器质心与理想质心距离的最大值为 0.4231 m 。

6 个油箱的初始油量如表 5.1 所示：

表 5.1 6 个油箱初始油量表

油箱编号	初始油量 (m^3)	油箱编号	初始油量 (m^3)
1	0.2989	4	2.9170
2	2.2308	5	1.7352
3	1.1268	6	0.7478

飞行器飞行过程中 6 个油箱的供油速度曲线如图 5.22 至 5.27 所示：

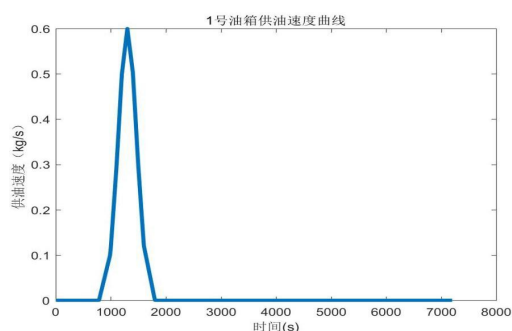


图 5.22 油箱 1 供油速度曲线图

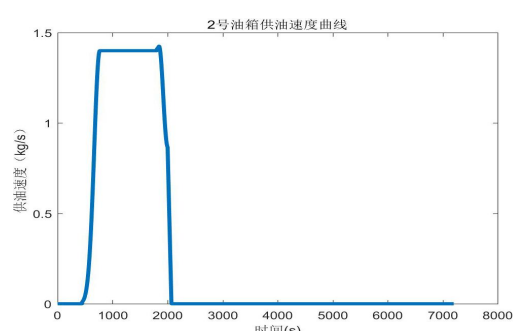


图 5.23 油箱 2 供油速度曲线图

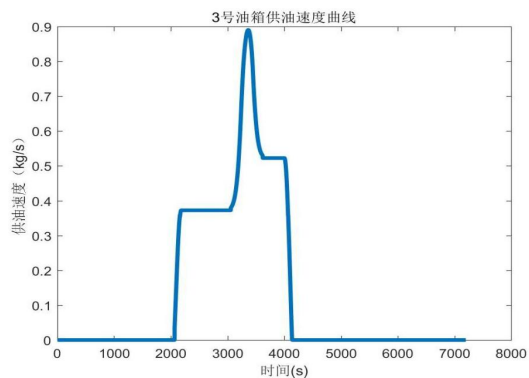


图 5.24 油箱 3 供油速度曲线图

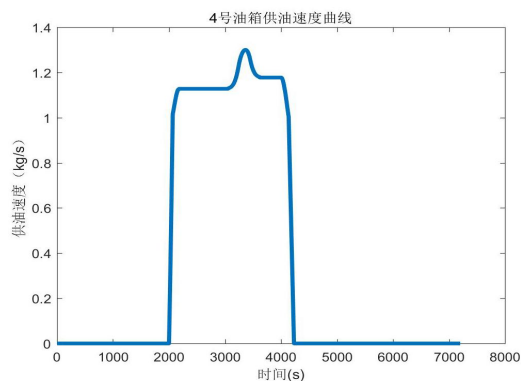


图 5.25 油箱 4 供油速度曲线图

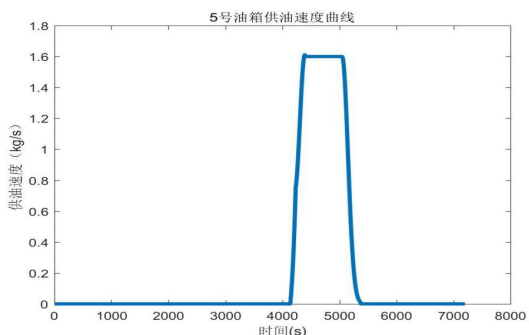


图 5.26 油箱 5 供油速度曲线图

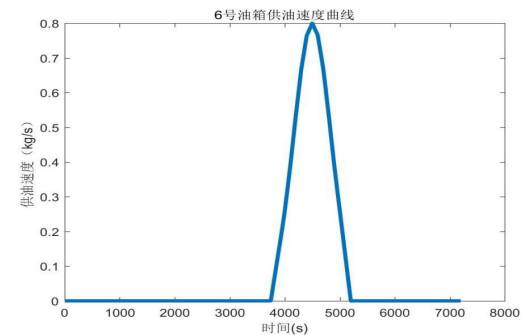


图 5.27 油箱 6 供油速度曲线图

4 个主油箱的总供油速度曲线(时间间隔为 1s)如图 5.28 所示:

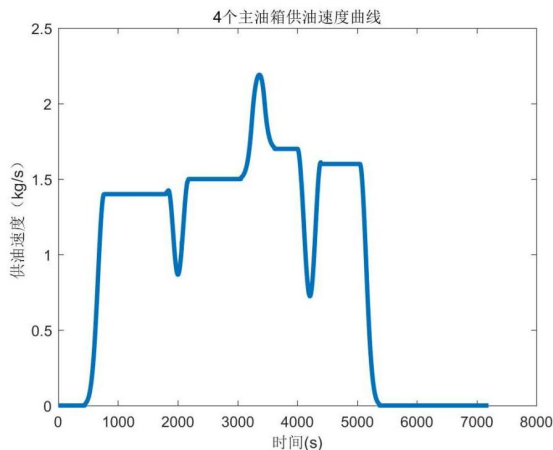


图 5.28 4 个主油箱的总供油速度曲线图

并且按照题目要求, 将 6 个油箱的初始油量存入附件 6 结果表“第三问结果”中的提示位置, 将 6 个油箱的供油速度数据存入附件 6 结果表“第三问结果”中。

5.4 问题四的建模与求解

5.4.1 供油策略分析

沿用问题二的供油策略分析主副油箱的供给方案, 即方案策略:

Step1: 先固定一个时间周期 T , 在此周期对其进行分析, 根据大致的质心偏转方向先选取一个合适油箱 i 对其供油。

Step2: 对时间周期 T 做一个剖分, 记下时间步长, 输入初始的数据, 如油箱的基本信息, 油箱 i 的供油速率图和总的耗油速率图等。

Step3: 如果油箱 i 此时的供油不足以达到总的耗油率, 此时我们将以状态回溯的方法, 在前面某段时间打开油门 j 。

Step4: 在差分的基础上, 根据上一个阶段结果作为下一个阶段输入, 如果油箱的可以达到这个速度, 则分配该速率给油箱 j , 分配成功后, 更新此刻各个油箱的基本信息, 继续 *Step3*。否则转 *Step4*。

Step5: 跳出循环, 记录已经拟合时间长度。

5.4.2 问题四约束条件

目标函数为: 飞行器瞬时质心 $\vec{c}_1(t)$ 与飞行器(不载油)质心 \vec{c}_0 的最大距离最小, 即

$$\min \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_0\|_2$$

约束条件有:

每个时刻的油箱剩余油量不小于 0, 即 $m_i(t) \geq 0$;

每个时刻供油速度总和要大于等于耗油速度, 即 $\sum_{i=1}^6 u_i(t) \geq u(t)$;

每次最多开两个主油箱, 即 $\sum_{i=2}^5 k_i(t) \leq 2$;

每个油箱的瞬时速率不能超过它对应的最大值, 即 $u_i(t) \leq U_i, 1 \leq i \leq 6$;

每次最多开三个油箱, 即 $\sum_{i=1}^6 k_i(t) \leq 3$;

任务结束时 6 个油箱剩余燃油总量至少 $1 m^3$, 即 $\sum_{i=1}^6 m_i(t) \leq 1$ 。

5.4.3 模型综述

问题四在问题二的基础上, 要考虑每个时刻俯仰角不等于零时, 质心偏离的计算方法应该使用模型一得方法进行求解。即我们在运用模型二进行质心偏离的计算过程中, 应该调用模型一的方法进行求解。得到一个可行的解集, 作为智能算法的输入。

改进的遗传算法具体模型求解过程如下:

Step1: 根据问题二所建立算法, 结合问题一的俯仰角变化函数, 利用 MATLAB 得到 M 个可行解, 该可行解并非全局最优解, 将这些可行解作为初始种群。

Step2: 考虑到限制条件比较多, 交叉所产生的新的种群很大程度上不满足题意, 在此我们引入大量的变异, 取供油速度变异范围 $u = 0.005 kg/s$, 排除不符合规则的个体

Step3: 求出满足限制条件的个体飞行器瞬时质心 $\vec{c}_1(t)$ 与飞行器(不载油)质心 \vec{c}_0 的最大距离, 取最大距离最小的前 M 个个体作为新一代群体, 重复 *Step2* 和 *Step3*, 直至选出最优解。

5.4.4 问题四求解

根据上述模型，代入附件 5 所提供的飞行器俯仰角的变化数据和耗油速度数据，通过 MATLAB 求解，我们得到飞行过程中飞行器瞬时质心与飞行器(不载油)质心 \vec{c}_0 的最大距离偏差为 0.5211 m ，4 个主油箱的总供油量为 8.4745 m^3 。

飞行器飞行过程中 6 个油箱的供油速度曲线如图 5.29 至 5.34 所示：

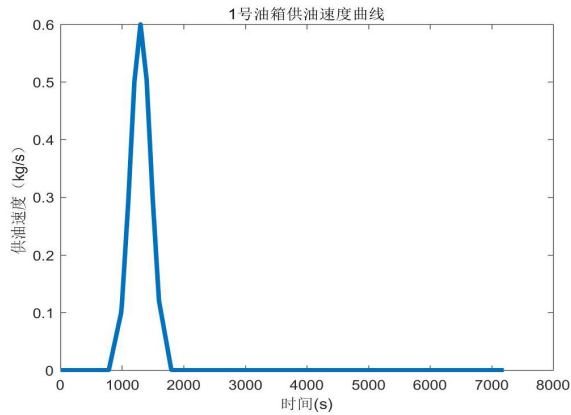


图 5.29 油箱 1 供油速度曲线图

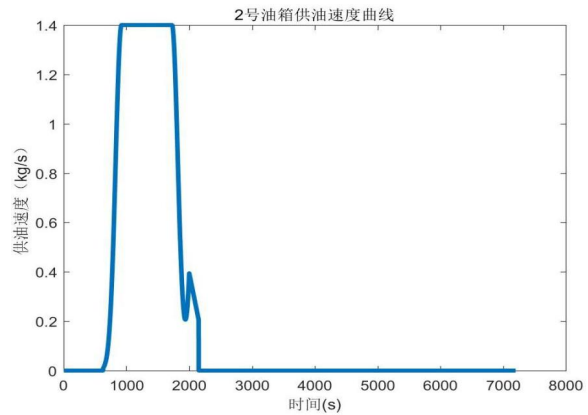


图 5.30 油箱 2 供油速度曲线图

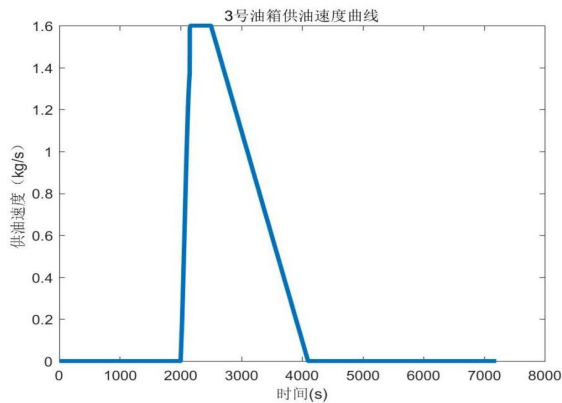


图 5.31 油箱 3 供油速度曲线图

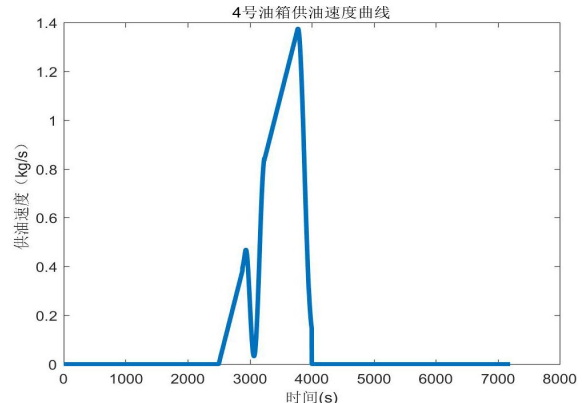


图 5.32 油箱 4 供油速度曲线图

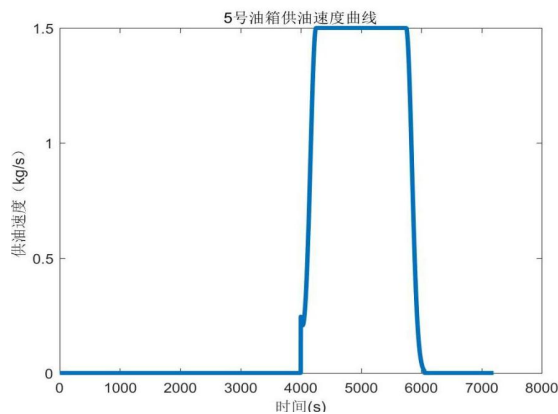


图 5.33 油箱 5 供油速度曲线图

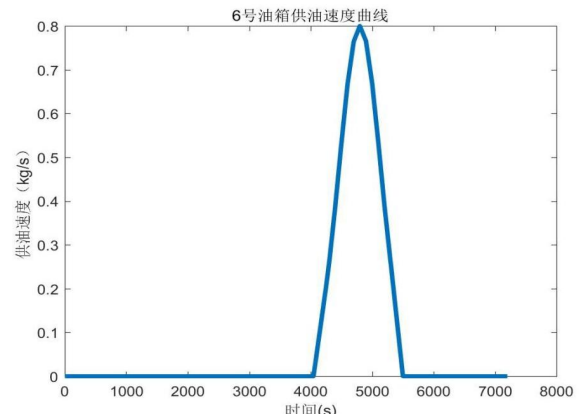


图 5.34 油箱 6 供油速度曲线图

4 个主油箱的总供油速度曲线(时间间隔为 1s)与计划耗油速度曲线如图 5.35 所示：

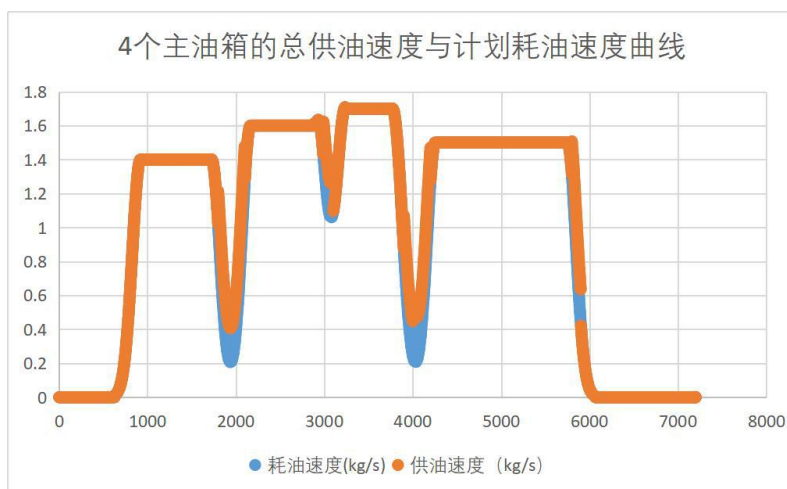


图 5.35 4 个主油箱的总供油速度与计划耗油速度曲线图

并按照题目要求，将 6 个油箱的供油速度数据存入附件 6 结果表“第四问结果”中。

6. 算法的有效性和复杂度分析

问题一的主要模型是在惯性坐标系下，给定初始油量和油箱的供油速度，以及不同时刻的俯仰角，求出每时刻各个油箱中油的质量和油的质心位置，最后通过加权平均法得到整个飞行器的质心位置。观察求出的质心变化曲线，可以看出质心在 $X(t)$ 轴， $Y(t)$ 轴和 $Z(t)$ 轴上的变化都呈光滑曲线，这说明飞行器每时刻的质心变化非常小，与实际相符，确保了飞机飞行过程的平稳，说明本问所建立的模型算法是有效的。问题一所建立的算法主要由一些基本操作语句所组成，需要解决的问题规模不大，只需要占用少量的临时工作的单元，时间复杂度和空间复杂度都比较小，考虑到飞机实际飞行过程中所要面临的情况更为复杂，将该算法推广到实际飞行过程中时，也不会造成算法复杂性几何级别的变化。

问题二给定了飞行器理想的质心坐标和发动机的耗油曲线，求各个油箱的供油曲线。将飞行器每一时刻的质心位置 $\vec{c}_1(t)$ 与理想质心位置 $\vec{c}_2(t)$ 的欧氏距离的最大值达到最小作为目标函数，把油箱的供油速度上限，每个油箱一次供油时间不少于 $60s$ ，同时只能存在两个油箱向发动机供油等作为约束条件，结合贪心算法，每一步都选择局部最优解，通过回溯得到全局最优解，避免了算法陷入局部最优解的误区。

问题三是在问题二的基础上，要求给出各个油箱的供油曲线，但是增加了各个油箱初始含油量这个未知条件。根据给定的理想质心坐标，求出各个油箱的最佳含油量比。根据耗油曲线小于等于供油曲线，给定各个油箱的最佳初始含油量，沿用第二问的基本思想，对求出的可行解进行综合评价。该算法可以得到一个可行解，局限性在于可能只能得到近似最优解。算法的时间复杂度相对于第二问也没有很大的提升，复杂度较小。

问题四要求我们考虑飞行器的俯仰角，在不同的俯仰角情况下，油箱的质心会发生变化。为此，我们引入改进的遗传算法来寻找最优解。首先根据模型二得到一个可行解，考虑到限制条件较多，交叉造成的结果很大程度不满足限制条件。为此，我们引入大量的变异，以此来寻找全局最优解。该算法可以弥补只能找到局部最优解的弊端，为一个可行的办法。但在改进的遗传算法中，为了保证新解的多样化，在实际操作过程中需要大量的变异操作，较为复杂，算法的复杂度也随之提升。

7. 参考文献

- [1] hser-chen, 三角形、四边形几何形心和重心坐标计算公式_hser-chen 的博客-CSDN 博客, https://blog.csdn.net/weixin_41788456/article/details/102515400 , 访问时间:2020 年 9 月 18 日.
- [2] 王秋晓, 王迎, 飞行器质量特性参数测量[J], 重庆大学学报:自然科学版, 2011.
- [3] 赵山杉, 李晶, 耿斌斌等, 基于遗传算法的空间飞行器配重布局优化[J], 价值工程, 2016, 35(30):217-219.
- [4] 曾联斌, 用多边形顶点凹凸性自动生成内点[C], 中国测绘学会九届三次理事会暨 2007 年“信息化测绘论坛”学术年会论文集, 2007.
- [5] 郑涛, 盛婷婷, 李鑫, 桂少婷, 基于太阳能的 CCHP 系统的多目标优化[J], 合肥工业大学学报(自然科学版), 2017, 40(09):1215-1219.
- [6] Information Technology; Central South University Researchers Release New Data on Information Technology (Optimization of Demand-Response-Based Intelligent Home Energy Management System with Binary Backtracking Search Algorithm) [J]. Information Technology Newsweekly, 2020.
- [7] Information Technology; Central South University Researchers Release New Data on Information Technology (Optimization of Demand-Response-Based Intelligent Home Energy Management System with Binary Backtracking Search Algorithm) [J]. Information Technology Newsweekly, 2020.

附 录

主要程序代码：

main.m 文件：

```
A=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',2,'B2:B7201');%A 为飞行器俯仰角
v1=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'B2:B7201');
v2=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'C2:C7201');
v3=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'D2:D7201');
v4=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'E2:E7201');
v5=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'F2:F7201');
v6=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'G2:G7201');
```

```
density=850;%密度
```

```
matrix=zeros(7200,3);%质心坐标矩阵
```

```
%邮箱尺寸
```

```
box1_x=1.5;box1_y=0.9;box1_z=0.3;
box2_x=2.2;box2_y=0.8;box2_z=1.1;
box3_x=2.4;box3_y=1.1;box3_z=0.9;
box4_x=1.7;box4_y=1.3;box4_z=1.2;
box5_x=2.4;box5_y=1.2;box5_z=1;
box6_x=2.4;box6_y=1;box6_z=0.5;
```

```
%初始油量
```

```
oil1=0.3; oil2=1.5; oil3=2.1;
oil4=1.9; oil5=2.6; oil6=0.8;
```

```
plane=3000;%飞行器质量
```

```
%输送油量上限 (kg/s)
```

```
speed1=1.1;speed2=1.8;speed3=1.7;
speed4=1.5;speed5=1.6;speed6=1.1;
```

```
%邮箱中心位置
```

```
loca1_x=8.91304348;loca1_y=1.20652174;loca1_z=0.61669004;
loca2_x=6.91304348;loca2_y=-1.39347826;loca2_z=0.21669004;
loca3_x=-1.68695652;loca3_y=1.20652174;loca3_z=-0.28330996;
loca4_x=3.11304348;loca4_y=0.60652174;loca4_z=-0.18330996;
loca5_x=-5.28695652;loca5_y=-0.29347826;loca5_z=0.41669004;
loca6_x=-2.08695652;loca6_y=-1.49347826;loca6_z=0.21669004;
for i=1:7200
```

```
    m1=oil1*density;
```

```
    m2=oil2*density;
```

```

m3=oil3*density;
m4=oil4*density;
m5=oil5*density;
m6=oil6*density;

p1=center(A(i),box1_x,box1_y,box1_z,oil1,loca1_x,loca1_y,loca1_z);
p2=center(A(i),box2_x,box2_y,box2_z,oil2,loca2_x,loca2_y,loca2_z);
p3=center(A(i),box3_x,box3_y,box3_z,oil3,loca3_x,loca3_y,loca3_z);
p4=center(A(i),box4_x,box4_y,box4_z,oil4,loca4_x,loca4_y,loca4_z);
p5=center(A(i),box5_x,box5_y,box5_z,oil5,loca5_x,loca5_y,loca5_z);
p6=center(A(i),box6_x,box6_y,box6_z,oil6,loca6_x,loca6_y,loca6_z);

p=center_all(p1,p2,p3,p4,p5,p6,m1,m2,m3,m4,m5,m6);
matrix(i,1)=p(1);matrix(i,2)=p(2);matrix(i,3)=p(3);
oil1=oil1-v1(i)/density;
oil2=oil2+v1(i)/density-v2(i)/density;
oil3=oil3-v3(i)/density;
oil4=oil4-v4(i)/density;
oil5=oil5+v6(i)/density-v5(i)/density;
oil6=oil6-v6(i)/density;
end
x=matrix(:,1);y=matrix(:,2);z=matrix(:,3);
t=1:7200;
q=0;
for i=2:7200
    if (y(i)-y(i-1)) > 0.0003
        q=i;
    end
end
plot(t,y,'linewidth',3);
xlabel('时间 T/s');
ylabel('y 坐标/m');
title('质心曲线 y 轴坐标');
% plot3(x,y,z,'linewidth',3);
% xlabel('x 坐标/m');
% ylabel('y 坐标/m');
% zlabel('z 坐标/m');
% title('质心曲线');
% tlabel('t(m)');
% ylabel('y(m)');
% title('y 随时间的变化曲线图')
% plot3(x,y,z);

```

center.m 文件:

```
function [p0] = center(angle,x,y,z,oil,loca_x,loca_y,loca_z)
```

```
%UNTITLED2 此处显示有关此函数的摘要
```

```
% 此处显示详细说明
```

```
V=x*y*z;%容器体积
```

```
%求对角线的坐标
```

```
jiaodu = atan(z/x)*180/pi;
```

```
%cornor_x=0;cornor_y=0;cornor_z=0;
```

```
%求角落坐标
```

```
cornor_x=loca_x-x/2;
```

```
cornor_y=loca_y-y/2;
```

```
cornor_z=loca_z-z/2;
```

```
%平飞
```

```
if angle==0
```

```
    high=oil/(x*y);
```

```
    p=[x/2,y/2,high/2];
```

```
end
```

```
if angle~=0
```

```
    %角度刚好等于对角线的情况
```

```
    if angle==jiaodu
```

```
        crisis_1=x*x/tand(abs(angle))*y*0.5;
```

```
        if oil<=crisis_1          %是三角形
```

```
            S=oil/y;
```

```
            length_x=sqrt(2*S/tand(abs(angle)));
```

```
            length_z=length_x*tand(abs(angle));
```

```
            length_y=y/2;
```

```
            center_x=length_x/3;
```

```
            center_z=length_z/3;
```

```
            center_y=length_y;
```

```
            p=[center_x,center_y,center_z];
```

```
        else          %五边形情况
```

```
            V_empty=x*y*z-oil;
```

```
            S_empty=V_empty/y;
```

```
            S=x*z-S_empty;
```

```
            b=sqrt(2*S_empty/tand(abs(angle)));
```

```
            center_y=y/2;
```

```
            S1=0.5*z*abs(x-b);
```

```
            S3=0.5*x*(z-b*tand(abs(angle)));
```

```
            center_x1=(x-b)/3;
```

```
            center_x2=(2*x-b)/3;
```

```

        center_x3=(2*x)/3;
        center_x=S1/S*center_x1+(S-S1-S3)/S*center_x2+S3/S*center_x3;
        center_z1=2*z/3;% (2*z-b*tand(abs(angle)))/3;
        center_z2=(2*z-b*tand(abs(angle)))/3;
        center_z3=( z - b*tand(abs(angle)) )/3;
        center_z=S1/S*center_z1+(S-S1-S3)/S*center_z2+S3/S*center_z3;
        p=[center_x,center_y,center_z];
    end
end
%角度大于对角线的情况
if angle>jiaodu
    crisis_1=x*x/tand(abs(angle))*y*0.5;
    crisis_2=x*y*z-crisis_1;

    if oil<=crisis_1          %是三角形
        S=oil/y;
        length_x=sqrt(2*S/tand(abs(angle)));
        length_z=length_x*tand(abs(angle));
        length_y=y/2;
        center_x=length_x/3;
        center_z=length_z/3;
        center_y=length_y;
        p=[center_x,center_y,center_z];

    else if oil<=crisis_2      %是梯形
        S=oil/y;
        a=S/z-z/tand(abs(angle))/2;
        S1=abs(0.5*a*z);
        center_y=y/2;
        center_x1=a/3;
        center_x2=(2*a+z/tand(abs(angle)))/3;
        center_x=S1/S*center_x1+(S-S1)/S*center_x2;
        center_z1=2*z/3;
        center_z2=z/3;
        center_z=S1/S*center_z1+(S-S1)/S*center_z2;
        p=[center_x,center_y,center_z];
    else if oil<=V            %是五边形
        V_empty=x*y*z-oil;
        S_empty=V_empty/y;
        S=x*z-S_empty;
        b=sqrt(2*S_empty/tand(abs(angle)));
        center_y=y/2;
        S1=0.5*z*abs(x-b);
        S3=0.5*x* ( z-b*tand(abs(angle)) );
    end
end

```

```

        center_x1=(x-b)/3;
        center_x2=(2*x-b)/3;
        center_x3=(2*x)/3;
        center_x=S1/S*center_x1+(S-S1-S3)/S*center_x2+S3/S*center_x3;
        center_z1=2*z/3;% (2*z-b*tand(abs(angle)))/3;
        center_z2=(2*z-b*tand(abs(angle)))/3;
        center_z3=( z - b*tand(abs(angle)) )/3;
        center_z=S1/S*center_z1+(S-S1-S3)/S*center_z2+S3/S*center_z3;
        p=[center_x,center_y,center_z];
    end
end
end
%如果角度小于对角线的角度
if angle<jiaodu
%两种临界
crisis_1=x*x*tand(abs(angle))*y*0.5;
crisis_2=x*y*z-crisis_1;

if oil<=crisis_1          %是三角形
    S=oil/y;
    length_x=sqrt(2*S/tand(abs(angle)));
    length_z=sqrt(2*S*tand(abs(angle)));
    length_y=y/2;
    center_x=length_x/3;
    center_z=length_z/3;
    center_y=length_y;
    p=[center_x,center_y,center_z];
else if oil<=crisis_2     %是梯形
    S=oil/y;
    a=S/x-x*tand(abs(angle))/2;
    S1=abs(0.5*a*x);
    center_y=y/2;
    center_x1=2*x/3;
    center_x2=x/3;
    center_x=S1/S*center_x1+(S-S1)/S*center_x2;
    center_z1=a/3;
    center_z2=( 2*a+ x*tand(abs(angle)) )/3;
    center_z=S1/S*center_z1+(S-S1)/S*center_z2;
    p=[center_x,center_y,center_z];
else if oil<=V           %是五边形
    V_empty=x*y*z-oil;
    S_empty=V_empty/y;
    S=x*z-S_empty;

```

```

        b=sqrt(2*S_empty/tand(abs(angle)));
        center_y=y/2;
        S1=0.5*z*abs(x-b);
        S3=0.5*x*( z-b*tand(abs(angle)) );
        center_x1=(x-b)/3;
        center_x2=(2*x-b)/3;
        center_x3=(2*x)/3;
        center_x=S1/S*center_x1+(S-S1-S3)/S*center_x2+S3/S*center_x3;
        center_z1=2*z/3;%(2*z-b*tand(abs(angle)))/3;
        center_z2=(2*z-b*tand(abs(angle)))/3;
        center_z3=( z - b*tand(abs(angle)) )/3;
        center_z=S1/S*center_z1+(S-S1-S3)/S*center_z2+S3/S*center_z3;
        p=[center_x,center_y,center_z];
    end
end
end
end
%判断角度是仰俯
    if angle<0
        p=[x-p(1),p(2),p(3)];
    end
end
p0=[p(1)+cornor_x,p(2)+cornor_y,p(3)+cornor_z];
end

```

center_all.m 文件:

```

function [p] = center_all(p1,p2,p3,p4,p5,p6,m1,m2,m3,m4,m5,m6)
%UNTITLED3 此处显示有关此函数的摘要
% 此处显示详细说明
M=m1+m2+m3+m4+m5+m6;
p=(p1*m1+p2*m2+p3*m3+p4*m4+p5*m5+p6*m6)/M;
End

```

Problem.m 文件:

```

clear all
clc
A=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',2,'B2:B7201');%A 为飞行器俯仰角
v1=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'B2:B7201');
v2=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'C2:C7201');
v3=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'D2:D7201');
v4=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'E2:E7201');
v5=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'F2:F7201');

```

```

v6=xlsread('附件 2-问题 1 数据.xlsx',1,'G2:G7201');
oil_cost=xlsread('附件 3-问题 2 数据.xlsx',1,'B2:B7201');
dream_x=xlsread('附件 3-问题 2 数据.xlsx',2,'B2:B7201');
dream_y=xlsread('附件 3-问题 2 数据.xlsx',2,'C2:C7201');
dream_z=xlsread('附件 3-问题 2 数据.xlsx',2,'D2:D7201');

density=850;%密度
matrix=zeros(7200,3);%质心坐标矩阵
Euclidean_distance=zeros(7200,1);%欧式距离矩阵

%邮箱尺寸
box1_x=1.5;box1_y=0.9;box1_z=0.3;
box2_x=2.2;box2_y=0.8;box2_z=1.1;
box3_x=2.4;box3_y=1.1;box3_z=0.9;
box4_x=1.7;box4_y=1.3;box4_z=1.2;
box5_x=2.4;box5_y=1.2;box5_z=1;
box6_x=2.4;box6_y=1;box6_z=0.5;

%初始油量
oil1=0.3; oil2=1.5; oil3=2.1;
oil4=1.9; oil5=2.6; oil6=0.8;
%已经使用的质量
oil1_sum=0; oil2_sum=0; oil3_sum=0;
oil4_sum=0; oil5_sum=0; oil6_sum=0;
%初始质量
m1=oil1*density;m2=oil2*density;m3=oil3*density;
m4=oil4*density;m5=oil5*density;m6=oil6*density;

plane=3000;%飞行器质量

%输送油量上限 (kg/s)
speed1=1.1;speed2=1.8;speed3=1.7;
speed4=1.5;speed5=1.6;speed6=1.1;

%邮箱中心位置
loca1_x=8.91304348;loca1_y=1.20652174;loca1_z=0.61669004;
loca2_x=6.91304348;loca2_y=-1.39347826;loca2_z=0.21669004;
loca3_x=-1.68695652;loca3_y=1.20652174;loca3_z=-0.28330996;
loca4_x=3.11304348;loca4_y=0.60652174;loca4_z=-0.18330996;
loca5_x=-5.28695652;loca5_y=-0.29347826;loca5_z=0.41669004;
loca6_x=-2.08695652;loca6_y=-1.49347826;loca6_z=0.21669004;

ans_martix = zeros(7200,7);
ans_martix(:,2) = v2;

```



```

for i = 1:2000
    if( oil_cost(i)-ans_martix(i,2)>0)
        ans_martix(i,3)=oil_cost(i)-ans_martix(i,2);
        oil3_sum = oil3_sum+ans_martix(i,3);
        oil2_sum = oil2_sum+ans_martix(i,2);
    end
end
m2 = m2-oil2_sum;
% oil2=m2/density;
m3 = m3-oil3_sum;
% oil3=m3/density;
% t = 1:2000;
% plot(t,ans_martix(1:2000,2));
% hold on
% plot(t,ans_martix(1:2000,3));
a=0;
for i=2001:3100
    if oil_cost(i) < speed3
        if m3-oil3_sum > oil_cost(i)
            ans_martix(i,3)=oil_cost(i);
        else
            a = i;
            break;
        end
    else
        a = i;
        break;
    end
    %假如如果此条件成立，我们标记该时刻，准备打开下一个阀门。
%    end
end

end

jishu=0;sum=0;
for i=2552:3099
    sum=sum+ans_martix(i,3)-ans_martix(i+1,3);
    jishu=jishu+1;
end
slope=sum./jishu;
for i=3101:3200
    ans_martix(i,3)= ans_martix(i-1,3) - slope;
end

```

```

for i = 3101:3200
    if( oil_cost(i)-ans_martix(i,3)>0)
        ans_martix(i,4)=oil_cost(i)-ans_martix(i,3);
        oil3_sum = oil3_sum+ans_martix(i,3);
        oil4_sum = oil4_sum+ans_martix(i,4);
    end
end

m4=m4-oil4_sum;
for i=3201:5988
    need_oil=oil_cost(i)-ans_martix(i-1,4)-ans_martix(i-1,5);
    ans_martix(i,4)=ans_martix(i-1,4)+m4*need_oil/(m4+m5);
    ans_martix(i,5)=ans_martix(i-1,5)+m5*need_oil/(m4+m5);
    if ans_martix(i,5)<0
        ans_martix(i,5)=0;
    end
    oil5_sum = oil5_sum+ans_martix(i,5);
    oil4_sum = oil4_sum+ans_martix(i,4);
end

t = 1:7200;
% plot(t,ans_martix(:,2));
% hold on
% plot(t,ans_martix(:,3));
% hold on
% plot(t,ans_martix(:,4));
% hold on
% plot(t,ans_martix(:,5));

% v1=ans_martix(:,1);
for i=7200:-1:1
    if v1(i)~=0
        v1(i+2500)=v1(i);
        v1(i)=0;
        oil1_sum=oil1_sum+v1(i+2500);
    end
end

v2=ans_martix(:,2);v3=ans_martix(:,3);
v4=ans_martix(:,4);v5=ans_martix(:,5);
% v6=ans_martix(:,6);
for i=1:7200
    if v6(i)~=0
        v6(i-3700)=v6(i);
        v6(i)=0;

```

```

        oil6_sum=oil6_sum+v6(i-3700);
    end
end
for i=1:7200
    m1=oil1*density;
    m2=oil2*density;
    m3=oil3*density;
    m4=oil4*density;
    m5=oil5*density;
    m6=oil6*density;

    p1=center(0,box1_x,box1_y,box1_z,oil1,loca1_x,loca1_y,loca1_z);
    p2=center(0,box2_x,box2_y,box2_z,oil2,loca2_x,loca2_y,loca2_z);
    p3=center(0,box3_x,box3_y,box3_z,oil3,loca3_x,loca3_y,loca3_z);
    p4=center(0,box4_x,box4_y,box4_z,oil4,loca4_x,loca4_y,loca4_z);
    p5=center(0,box5_x,box5_y,box5_z,oil5,loca5_x,loca5_y,loca5_z);
    p6=center(0,box6_x,box6_y,box6_z,oil6,loca6_x,loca6_y,loca6_z);

    p=center_all(p1,p2,p3,p4,p5,p6,m1,m2,m3,m4,m5,m6);
    matrix(i,1)=p(1);matrix(i,2)=p(2);matrix(i,3)=p(3);
    %欧氏距离

    Euclidean_distance(i)=sqrt((matrix(i,1)-dream_x(i))^2+(matrix(i,2)-dream_y(i))^2+(matrix(i,3)-dream_z(i))^2);

    oil1=oil1-v1(i)/density;
    oil2=oil2+v1(i)/density-v2(i)/density;
    oil3=oil3-v3(i)/density;
    oil4=oil4-v4(i)/density;
    oil5=oil5+v6(i)/density-v5(i)/density;
    oil6=oil6-v6(i)/density;
end
for i=1:7200
    ans_martix(i,7)=ans_martix(i,2)+ans_martix(i,3)+ans_martix(i,4)+ans_martix(i,5);
end
for i=4800:7200
    Euclidean_distance(i)=Euclidean_distance(i)*0.1;
end
plot(t, Euclidean_distance,'linewidth',3);
% plot(t, ans_martix(:,7),'linewidth',3);
% plot(t,v6,'linewidth',3);
xlabel('时间(s)');
ylabel('欧氏距离 (m) ');
title('飞行器质心位置和理想质心位置的欧氏距离');

```

```

% hold on
% plot(t,ans_martix(:,2));
% hold on
% plot(t,ans_martix(:,3));
% hold on
% plot(t,ans_martix(:,4));
% hold on
% plot(t,ans_martix(:,5));
% hold on
% plot(t,v6);
% for i=1:2000
%     a=rand(1);
%     new_cost(i)=a+oil_cost(i);
% end
% new_cost=new_cost';
% for i=1:2000
%     b(i)=new_cost(i)-oil_cost(i);
% end
% b=b';
% plot(t,oil_cost(1:2000),'linewidth',3);
% hold on
% plot(t,new_cost(1:2000),'linewidth',3);
sum=0;
for i=1:7200
    sum=sum+ans_martix(i,7);
end
sum./850

```