1 Интегрирование

1.1 Первообразный и неопределённый интеграл

Функция F(x) — называется первообразной для функции f(x), на промежутке X, если x $\in$ X, выполняется равенство F'(x) = f(x)

Тогда X, называется областью определения функции F(x)

Если F(x) первообразная для функции f(x), то множество функции F(x) + C, где C произвольная постоянная, называется неопределённым интегралом от функции f(x) и обозначается

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

При этом функция f(x), называется под интегральной функцией.

$\int f(x)\,dx$ (произносится как: *f(x) по dx*) — называется под интегральным выражением. Восстановление функции по её производной или что тоже отыскание неопределённого интеграла, называется **интегрированием**.

Интегрирование — обратно дифференцированию

Значение неопределённых интегралов

1. $$\int dx = x + C$$

2. $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

3. $$\int \frac{dx}{x} = \ln|\ x\ | + C$$

4. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

5. $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

6. $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

7. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

8. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \mid x + \sqrt{x^2 \pm + a^2} \mid + C$$

11. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2a} \ln \mid \frac{a+x}{a-x} \mid + C$$

12. $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} arcctan \frac{x}{a} + C$$

13. $$\int e^x dx = e^x + C$$

Свойство интеграла

1. Производная неопределённого интеграла равна под интегральному выражению функции, а его дифференциал — подынтегральному выражению
$$(\int f(X)dx)' = f(x),\ d(\int f(x)dx) = f(x)dx)$$

2. Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен сумме этих функций и произвольной константе
$$\int d\,F(x) = F(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределённого интеграла
$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)dx$$

4. Неопределённый интеграл от суммы (разности) двух непрерывных функций равен сумме(разности) интегралов от этих функций
$$\int (f(x) \pm g(t))dx = \int f(x)dx \pm \int g(t)dx$$

2 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование
2. Метод подстановки
3. Метод интегрирования по частям

2.1 Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование — Вычисление интегралов с помощью значений простейших неопределённых интегралов и на основе свойств неопределённых интегралов

2.2 Метод подстановки

Метод подстановки — или замена переменной заключается в том чтобы заменить x на ϕ(t), где ϕ(t) – непосредственно дифференцируемая функция, полагают dx равно ϕ(t) * dt и получают

$$\int f(X)dx = \int f(\phi(t) * \phi'(t))dt$$

2.3 Метод интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям в неопределённом интеграле называется формула:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

*Где **u** и **v** – деференцируемые функции от **x**, то есть **u(x)** и **v(x)**. Формула позволяет свести вычисления интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказатся более простой для интегрирования.*

Большую часть интегралов вычисляемых интегрированиям по частям можно разбить на 3 группы:

1. (a) $\int P(x)arctan(x)\,dx$
   (b) $\int P(x)arcctg(x)\,dx$
   (c) $\int P(x)ln(x)\,dx$
   (d) $\int P(x)arcsin(x)\,dx$
   (e) $\int P(x)arccos(x)\,dx$
   (f) $\int P(x)arcctg(x)\,dx$

   *Где **P(x)** – многочлен. Для их вычисления следует "положить"**u** равной одной из указанной выше функции. Например в уравнении $\int P(x)arctan(x)\,dx$ заменить $arctan(x)$ на **u**, а деференциал равный P(x)dx.*

2. (a) $\int P(x)e^{kx}dx$
   (b) $\int P(x)sin(kx)dx$

(c) $\int P(x)cos(x)dx$

Где P(x) – многочлен, а k–некоторое число (может быть даже 1) для вычисления слудует обозначить u=P(x), тогда:

(a) $\int P(x)e^{kx}dx \quad , \quad dv = e^{kx}dx$

(b) $\int P(x)sin(kx)dx \quad , \quad dv = sin(kx)dx$

(c) $\int P(x)cos(x)dx \quad , \quad dv = cos(x)dx$

3. (a) $\int e^{ax}cos(bx)dx$

   (b) $\int e^{ax}sin(bx)dx$

   Где a и b некоторые числа, эти интегралы вычисляются двукаратным интегрированием по частям