

# 第2讲 从数学和计算机看方程求解 —最基本的计算思维：枚举-计算-验证

---

**战 德 臣**

哈尔滨工业大学计算学部教学委员会主任  
国家教学名师

18686783018, [dechen@hit.edu.cn](mailto:dechen@hit.edu.cn)

# 怎样求解一元二次方程？

2

人计算与机器计算

求 $ax^2+bx+c=0$ 的根

人计算与机器  
计算在思维上什  
么差异？

# 怎样求解一元二次方程？

3

人计算与机器计算

例如：求  $ax^2+bx+c=0$  的根

人-计算

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

利用上述公式计算得到x值

机器-计算

- (1) 从  $-n$  到  $n$ ，产生  $x$  的每一个整数值；
- (2) 将其依次代入到方程中计算；
- (3) 如果其值使方程式成立，则即为其解；否则不是

# 怎样求解一元二次方程？

4

## 人计算与机器自动计算的差别

例如：求 $ax^2+bx+c=0$ 的根

### 人-计算

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

利用上述公式计算得到x值

人设计规则-  
人计算获得结果

人快速获得结果的方法

### 人-计算

- 一条规则可能很复杂, 但计算量却可能很小
- 人需要知道具体的计算规则
- 特定规则, 只能求:

$$a_1x^2 + a_2x = c$$

### 机器-计算

- (1) 从-n到n, 产生x的每一个整数值;
- (2) 将其依次代入到方程中计算;
- (3) 如果其值使方程式成立, 则即为其解; 否则不是

枚举-计算-验证

蛮干思维

人设计规则-  
机器自动计算获得结果

### 机器-计算

- 每条规则可能很简单, 但计算量却很大
- 机器也可以采用人所使用的计算规则
- 一般性的规则, 可以求任意:

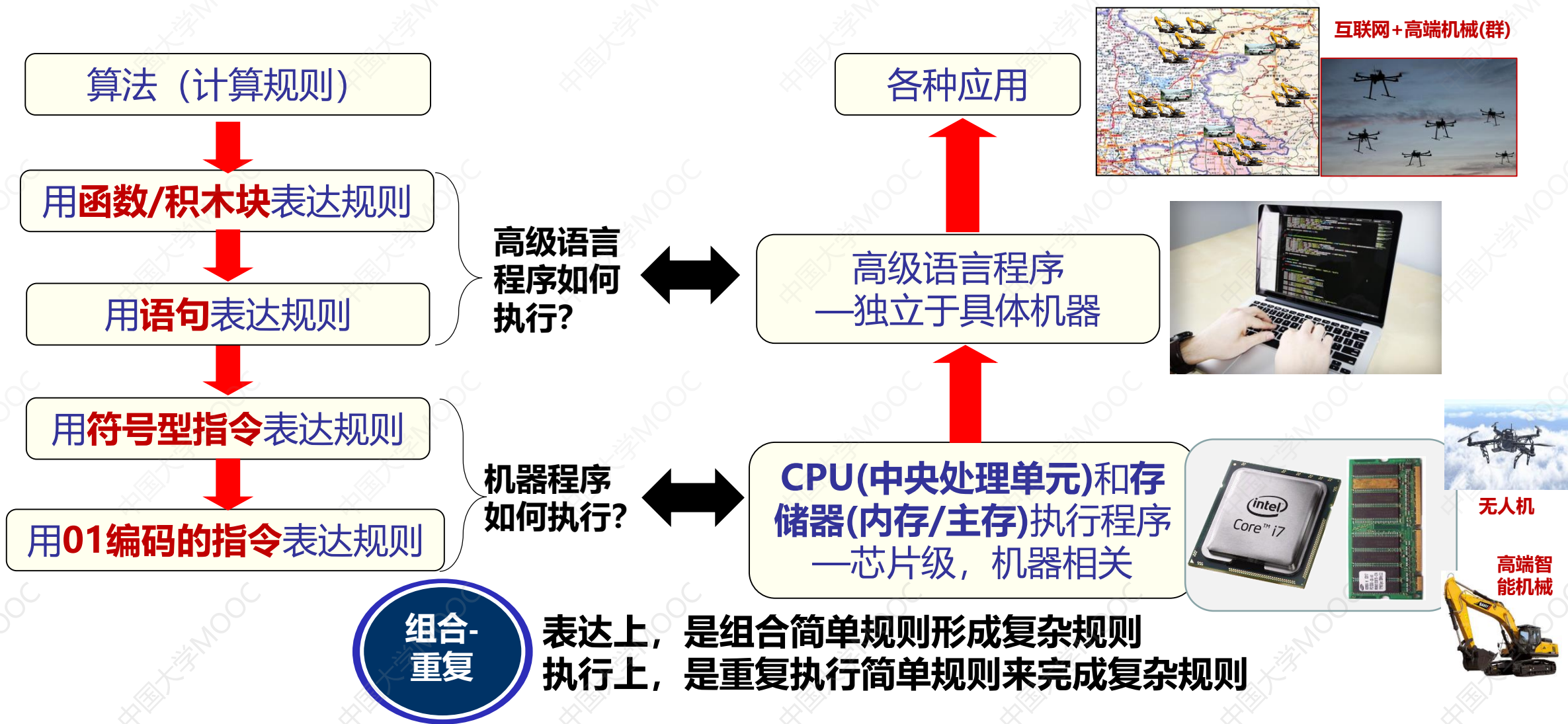
$$a_1x_1^{b_1} + a_2x_2^{b_2} + \dots + a_nx_n^{b_n} = c$$

为什么规则要简单?

复杂规则怎么办--重复运用简单规则

# 机器自动计算

机器是如何自动计算的



# 最基本的计算思维：枚举-计算-验证

6

机器一定能计算出结果吗？

例如：求 $ax^2+bx+c=0$ 的根

人-计算

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

利用上述公式计算得到x值

人快速获得结果的方法

机器-计算

- (1) 从-n到n，产生x的每一个整数值；
- (2) 将其依次代入到方程中计算；
- (3) 如果其值使方程式成立，则即为其解；否则不是

枚举-计算-验证

x一定是整数解吗？

机器-难于计算

- (1) 在实数空间内，以 $\delta$ 为步长，产生x的每一个数值；
- (2) 将其依次代入到方程中计算；
- (3) 如果其值使方程式成立，则即为其解；否则不是。

注意： $\delta$ 可以是0.1, 0.01, ..., 0.000001, ...  
步长越小，求解精度越高，但计算量也越大。

机器能在有限时间内完成计算吗？

算法与算法复杂性

可求解与难求解

蛮干→优化

# 最基本的计算思维：枚举-计算-验证

7

## 其他示例

【示例1】公鸡一个五块钱，母鸡一个三块钱，小鸡三个一块钱，问：用一百块钱买一百只鸡，问公鸡、母鸡、小鸡各能买多少只？

设公鸡  $x$  只，母鸡  $y$  只，小鸡  $z$  只，方程式组：

$$5x + 3y + z/3 = 100$$

$$x + y + z = 100$$

$$0 \leq x \leq 100$$

$$0 \leq y \leq 100$$

$$0 \leq z \leq 100$$

基本算法：  
枚举-计算-  
验证

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 100 \\ 0 &\leq y \leq 100 \\ 0 &\leq z \leq 100 \end{aligned}$$

优化算法：  
减少无效计  
算量

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 20 \\ 0 &\leq y \leq 33 \\ 0 &\leq z = 100 - x - y \end{aligned}$$



# 最基本的计算思维：枚举-计算-验证

8

## 其他示例

【示例2】123456789给出一个排列来，使得前 $n$ 位组成的整数能被 $n$ 整除( $n=1,2,3,\dots,9$ )。

$$A*10^8+B*10^7+C*10^6+D*10^5+E*10^4+F*10^3+G*10^2+H*10^1+I*10^0$$

(1)  $A\%1=0$ ; (2)  $(A*10^1+B*10^0)\%2=0$ ; (3)  $(A*10^2+B*10^1+C*10^0)\%3=0$   
(4) ...; (5)  $(A*10^4+B*10^3+C*10^2+D*10^1+E*10^0)\%5=0$ ;  
(6)...; (7)...; (8)...; (9)  $\%9=0$   
A到I 取其中之一 { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

基本算法：枚  
举-计算-验证

优化算法：减  
少无效计算量

- A-I, 任意组成一个排列：不重复
- 计算并依次检查条件(1)-(9)

哪些排列是没有意义的,是不需要计算和验证。(1) 前5位组成的数能被5整除, 第5位只能是5。(2) 前2、4、6、8位组成的数能被2、4、6、8整除, 则第2、4、6、8位只能是偶数, 所以第1、3、7、9位只能是奇数。A={1,3,7,9}, B={2,4,6,8}, C={1,3,7,9}, D={2,4,6,8}, E=5, F={2,4,6,8}, G={1,3,7,9}, H={2,4,6,8}, I={1,3,7,9} 此时, 还要考虑A、C、G、I不能重复, B、D、F、H不能重复。



# 最基本的计算思维：枚举-计算-验证

9

## 其他示例

【示例3】给出一个整数n，找到所有的0~9的排列，使得前五个数构成的整数能够整除后五个数构成的整数

$$A*10000+B*1000+C*100+D*10+E$$

$$F*10000+G*1000+H*100+K*10+J$$

$$(A*10000+B*1000+C*100+D*10+E) \% (F*10000+G*1000+H*100+K*10+J) == 0$$

注：%为取余数运算

$$A、B、C、D、E = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$F、G、H、K、J = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

基本算法：  
枚举-计算-  
验证

优化算法：  
减少无效计  
算量

# 由计算+，到互联网+、大数据和人工智能+

10

把握计算思维的核心脉络与本质

互联网+/大数据/人工智能+/软件思维/安全+

