

扩展第3讲 计算机的理论模型-图灵机

战 德 臣

哈尔滨工业大学计算学部教学委员会主任
国家教学名师

18686783018, dechen@hit.edu.cn

本讲讲什么

2

内容提要

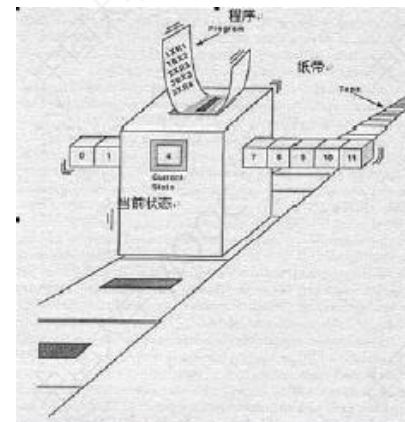
- ◆ 理解图灵机模型
- ◆ 图灵机与算法和可计算性的关系
- ◆ 图灵机模型对现代计算机的启示
- ◆ 图灵机的一个重要应用——形式语言及其识别

图灵是谁

3

图灵及其贡献

- ◆ **图灵** (Alan Turing, 1912~1954), 出生于英国伦敦, 19 岁入剑桥皇家学院, 22 岁当选为皇家学会会员。
- ◆ 1937 年, 发表了论文《论可计算数及其在判定问题中的应用》, 提出了 **图灵机模型**, 后来, 冯·诺依曼根据这个模型设计出历史上第一台电子计算机。
- ◆ 1950 年, 发表了划时代的文章: 《机器能思考吗?》, 成为了人工智能的开山之作。
- ◆ 计算机界于1966年设立了最高荣誉奖: **ACM图灵奖**。



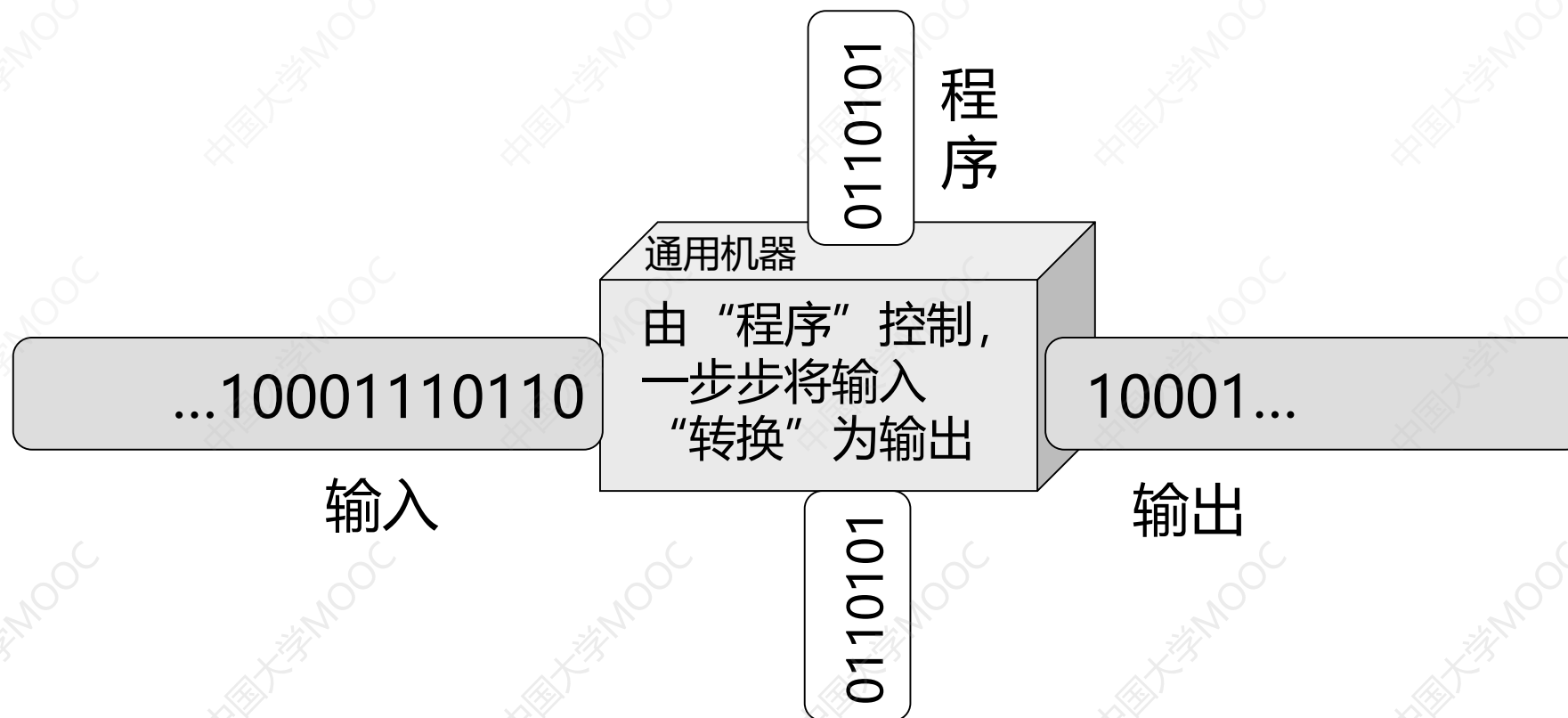
图灵的贡献重要在哪里呢?

你能查阅一下哪些人获得图灵奖了吗? 因为什么贡献而获奖呢?

图灵机的基本思想

什么是计算—图灵的观点

◆ 所谓**计算**就是计算者(人或机器)对一条两端可无限延长的纸带上的一串0或1，执行指令一步一步地改变纸带上的0或1，经过有限步骤最后得到一个满足预先规定的符号串的**变换过程**。

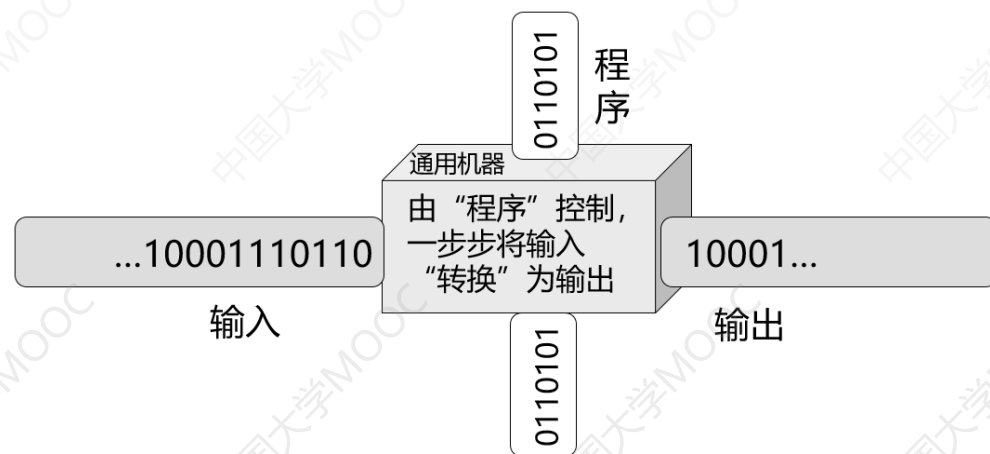


图灵机的基本思想

什么是计算—图灵的观点

关于数据、指令、程序及程序/指令自动执行的基本思想。

- ◆ 输入被制成一串0和1的纸带，送入机器中----**数据**。如00010000100011...
- ◆ 机器可对输入纸带执行的**基本动作**包括：“翻转0为1”，或“翻转1为0”，“前移一位”，“停止”。
- ◆ 对基本动作的控制----**指令**，机器是按照指令的控制选择执行哪一个动作，指令也可以用0和1来表示：**01**表示“翻转0为1”（当输入为1时不变），**10**表示“翻转1为0”（当输入0时不变），**11**表示“前移一位”，**00**表示“停止”。
- ◆ 输入如何变为输出的控制可以用指令编写一个**程序**来完成，如：**011110110111011100...**
- ◆ 机器能够读取程序，按程序中的指令顺序读取指令，读一条指令**执行**一条指令。由此实现**自动计算**。



图灵机模型

图灵机是什么

◆基本的图灵机模型为一个七元组,如右图

◆几点结论:

(1) 图灵机是一种**思想模型**, 它由一个控制器(有限状态转换器), 一条可无限延伸的带子和一个在带子上可完成读写的读写头构成, 纸带可以向右或向左移动, 或者说, 读写头可以向左或向右移动。

(2) **一个图灵机就是一个程序**。程序是**五元组** $\langle q, X, Y, R(\text{或}L\text{或}N), p \rangle$ **形式的指令集**。其定义了机器在一个特定状态 q 下从方格中读入一个特定字符 X 时所采取的动作作为在该方格中写入符号 Y , 然后纸带向右移一格 R (或向左移一格 L 或不移动 N), 同时将机器状态设为 p 供后续操作使用。

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, B, F)$$

其中:

Q : 状态的有穷集合

Σ : 输入字母表

Γ : 带符号表

S : 开始状态

F : 终止状态集合

B 或 b : 空白符号

δ : **移动函数**, $\delta(q, X) = (p, Y, R\text{或}L\text{或}N)$ 表示 M 在状态 q 时读入符号 X , 则将状态改为 p , 并在 X 所在的带方格中印刷符号 Y , 然后将纸带向右/向左移动一格或者不动; (注: 也可定义读写头向右/向左移动一格。读写头向右移动即纸带向左移动。这里定义是纸带向右/向左移动, 便于后续示例一致性)



理解图灵机模型

7

图灵机【示例1】

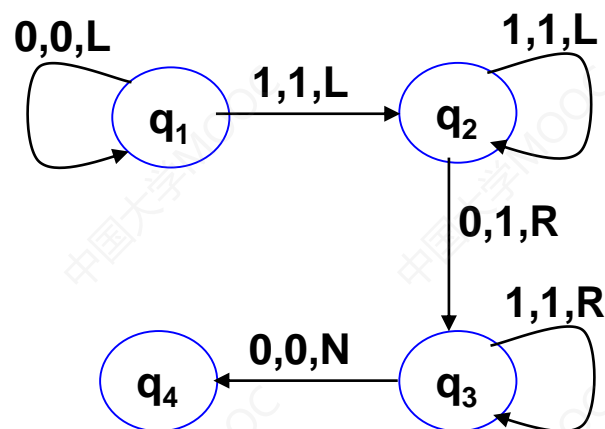
一个具体的图灵机示例

$(q_1, 0, 0, L, q_1)$
 $(q_1, 1, 1, L, q_2)$
 $(q_2, 1, 1, L, q_2)$
 $(q_2, 0, 1, R, q_3)$
 $(q_3, 1, 1, R, q_3)$
 $(q_3, 0, 0, N, q_4)$

指令集 (移动函数)

与通常【程序】(一条接一条执行的指令集合) 的差异

依据【当前状态】和【输入】决定执行哪条指令



状态图 (或状态输入转换图)

(注: (q, X, Y, L, p) , 状态图中圆圈内的的是状态, 箭线上的是 $\langle X, Y, L \rangle$, 表示读出 X 时则写入 Y 并向 L 移动。 L 位置也可以是 R (向右移动) 或 N (不动))。

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, B, F)$$

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

其中

q_1 : 开始状态

q_2 : 右移状态

q_3 : 左移状态

q_4 : 停机状态

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

Γ 带字符集 = $\{0, 1, b\}$

$$S = \{q_1\}$$

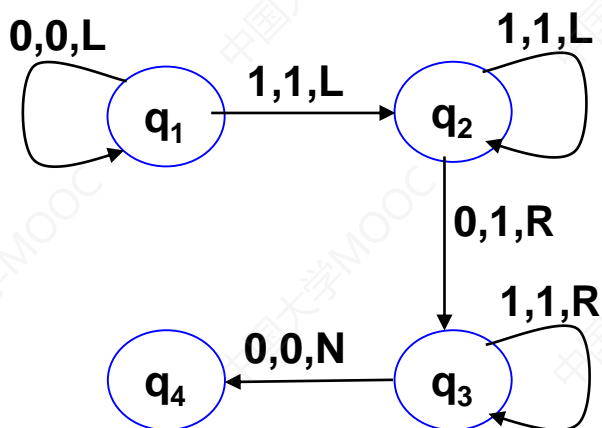
$$F = \{q_4\}$$

B/b 空白字符

δ -- 移动函数/指令集

理解图灵机模型

图灵机计算过程【示例1】



纸带向左移,
读写头向右移

功能：将一串连续1的后面再加一位1

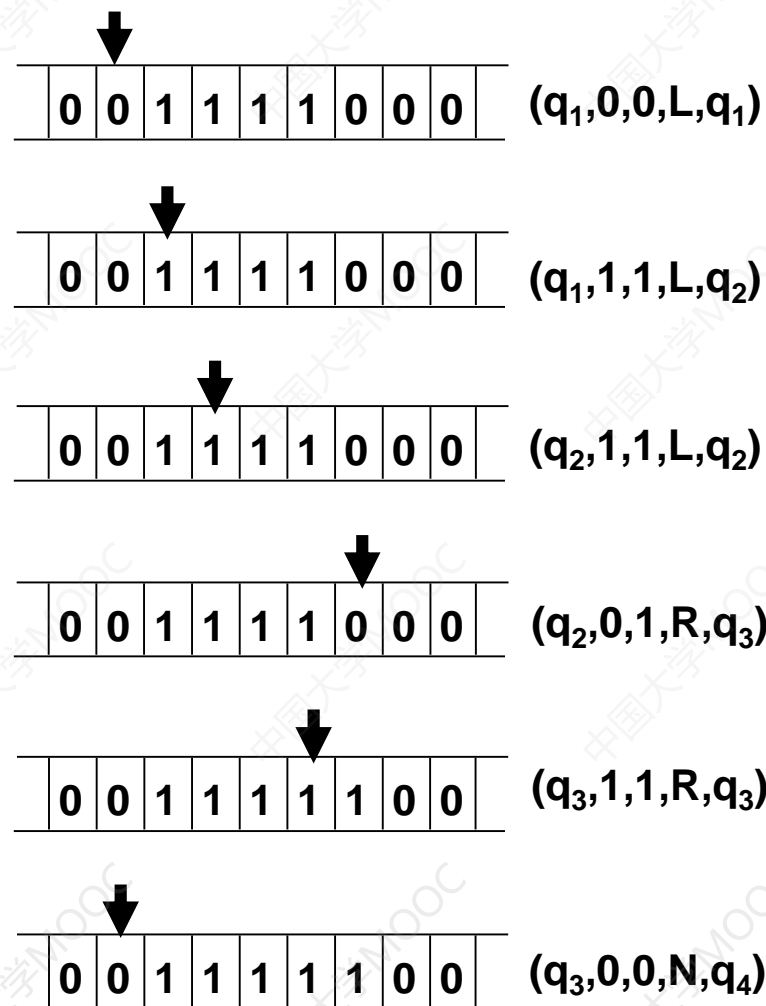
你能否用另一个输入模拟一下这个程序的执行呢？

控制器

0 0 1 1 1 1 0 0 0

0 0 1 1 0 0 0 1 1

该图灵机能
处理完给定
的输入吗？
后面再讨论

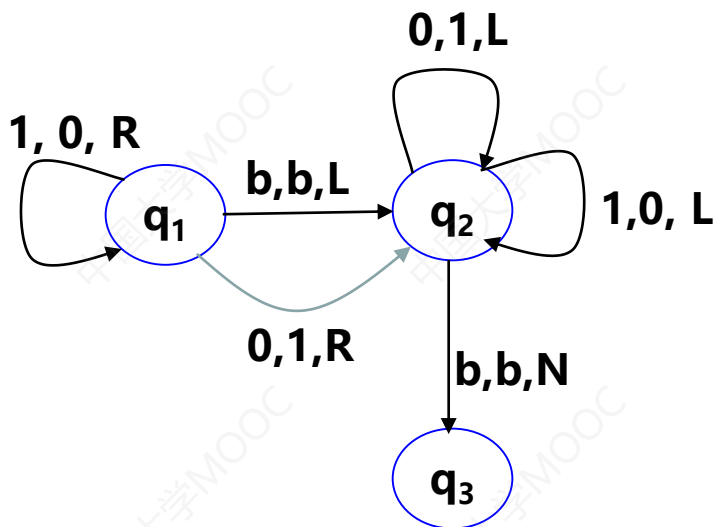


图灵机模型示例

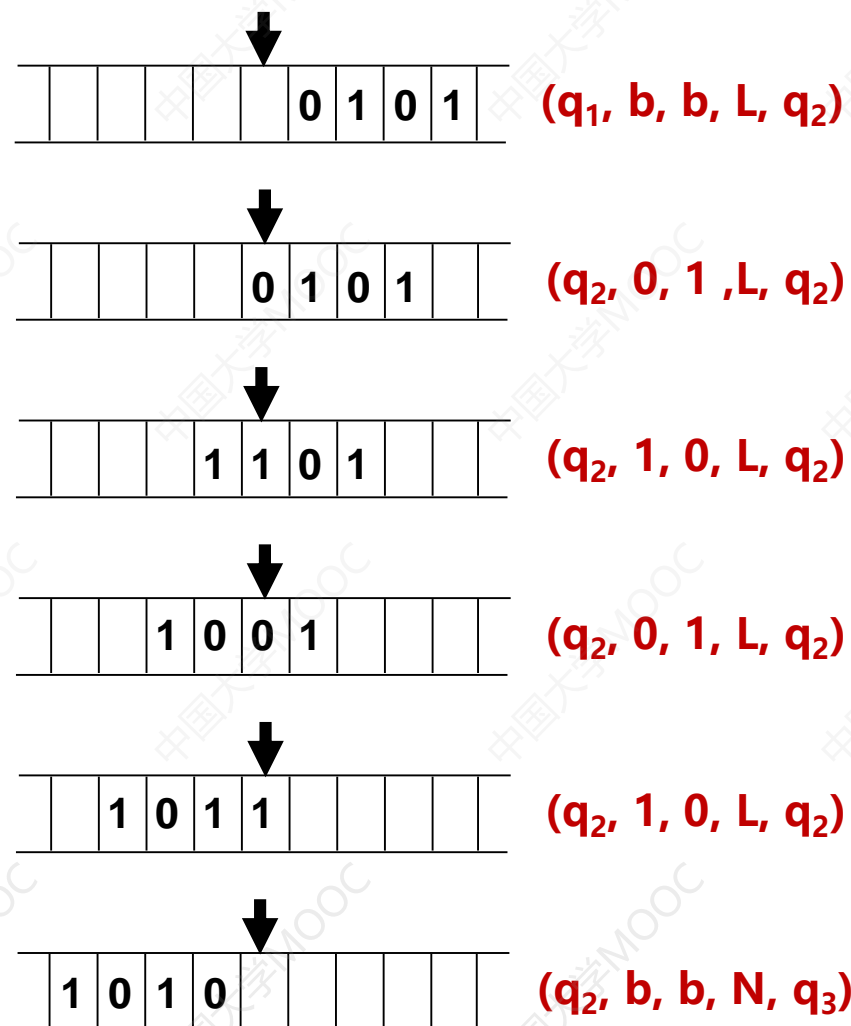
9

另一个示例 (空白输入开始)

$(q_1, 1, 0, R, q_1)$
 $(q_1, 0, 1, R, q_2)$
 (q_1, b, b, L, q_2)
 $(q_2, 0, 1, L, q_2)$
 $(q_2, 1, 0, L, q_2)$
 (q_2, b, b, N, q_3)



注：纸带的左移(相当于读写头的右移)，纸带的右移(相当于读写头的左移)。状态图中标示的是纸带的移动。

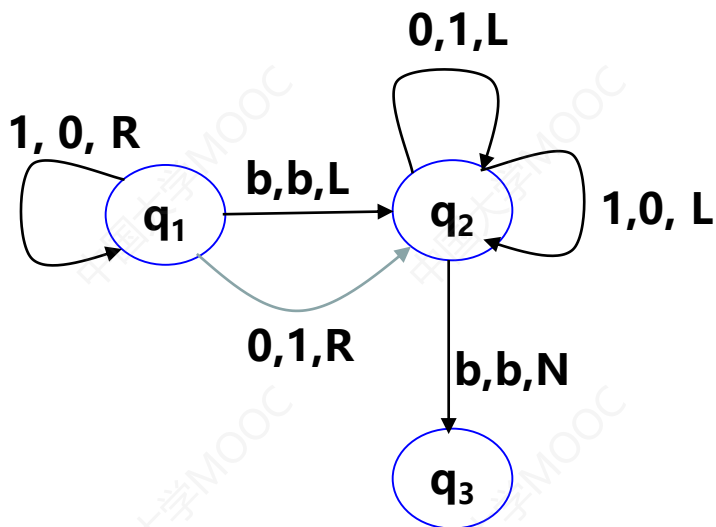


图灵机模型示例

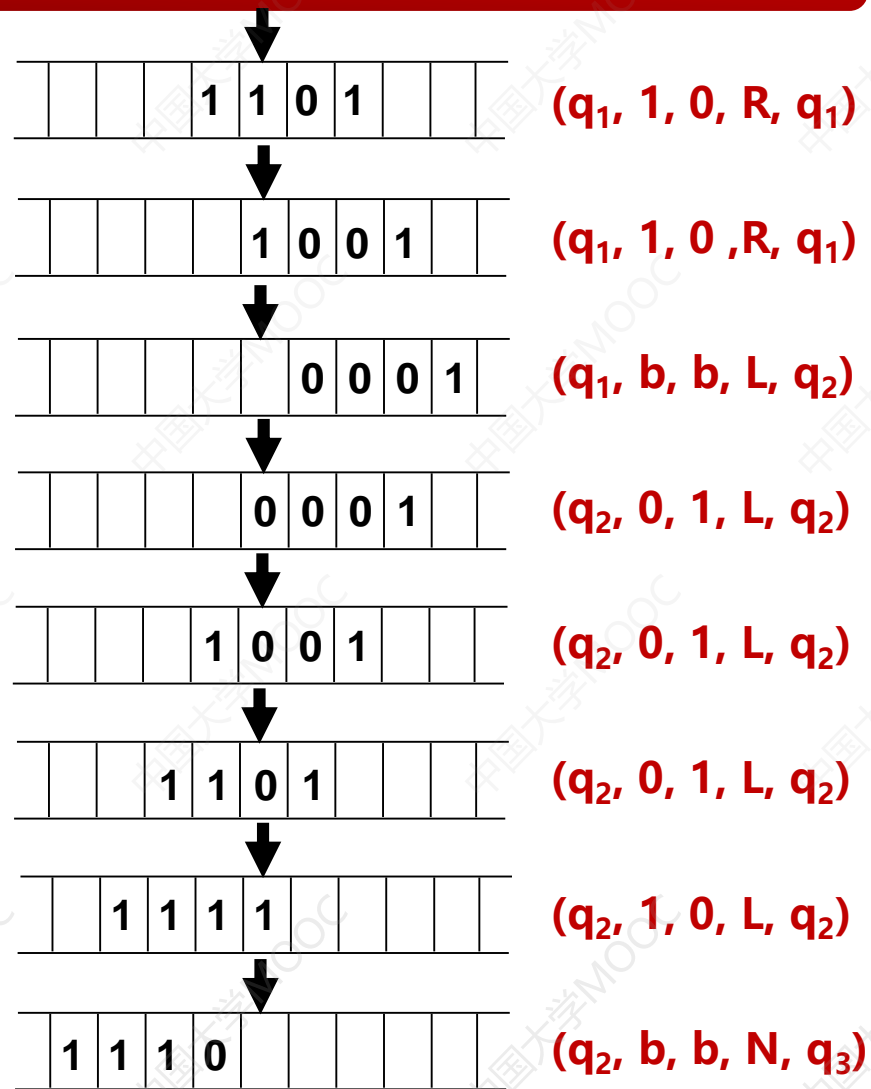
10

另一个示例（从纸带1处开始）

$(q_1, 1, 0, R, q_1)$
 $(q_1, 0, 1, R, q_2)$
 (q_1, b, b, L, q_2)
 $(q_2, 0, 1, L, q_2)$
 $(q_2, 1, 0, L, q_2)$
 (q_2, b, b, N, q_3)



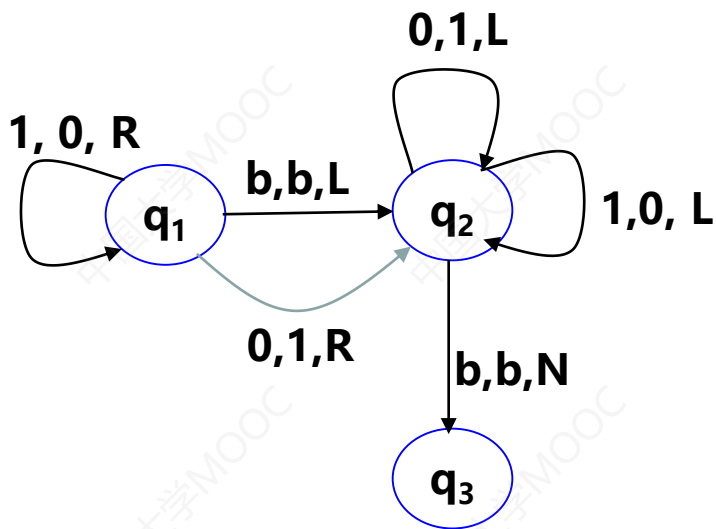
注：纸带的左移(相当于读写头的右移)，纸带的右移(相当于读写头的左移)。状态图中标示的是纸带的移动。



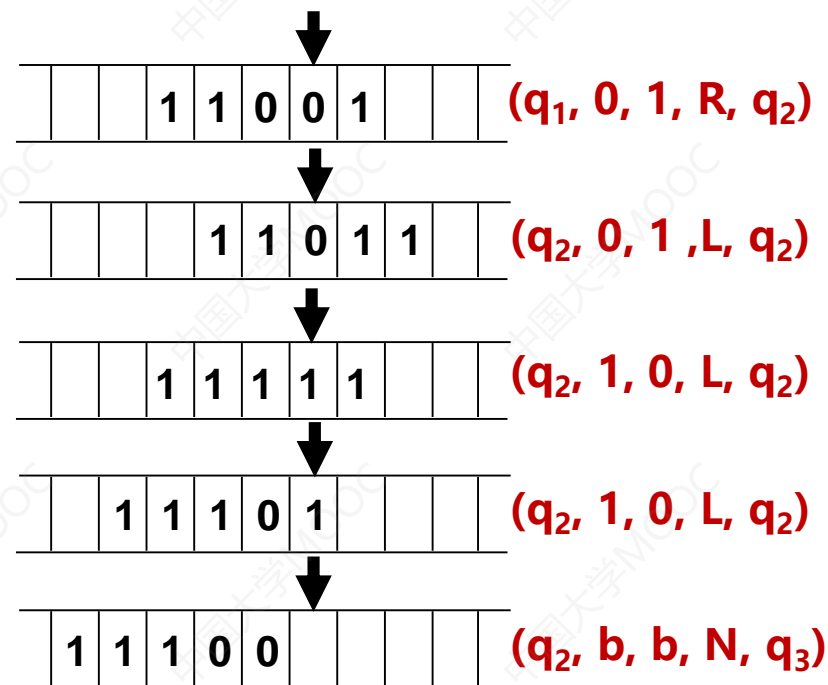
图灵机模型示例

另一个示例 (从纸带0处开始)

$(q_1, 1, 0, R, q_1)$
 $(q_1, 0, 1, R, q_2)$
 (q_1, b, b, L, q_2)
 $(q_2, 0, 1, L, q_2)$
 $(q_2, 1, 0, L, q_2)$
 (q_2, b, b, N, q_3)



注：纸带的左移(相当于读写头的右移)，纸带的右移(相当于读写头的左移)。状态图中标示的是纸带的移动。



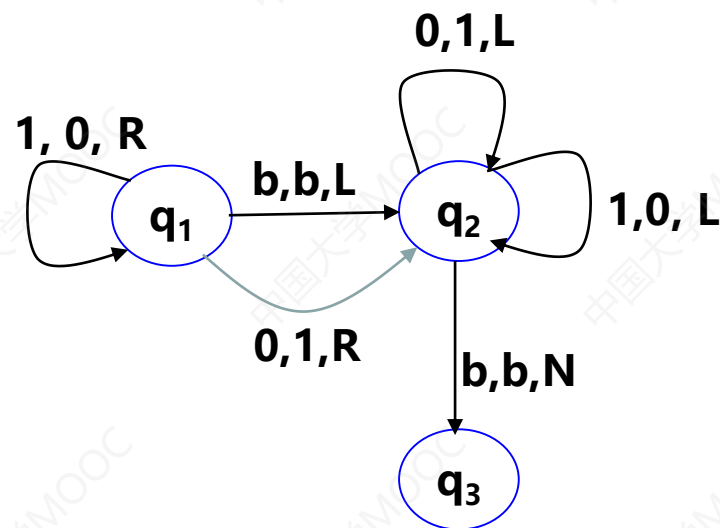
图灵可计算性

12

继续看图灵机是什么

图灵机模型被认为是计算机的基本理论模型

- ◆ 图灵机从初始状态开始对纸带上的输入符号进行处理，如果能够到达终止状态，则被认为是成功地完成一次计算，此时纸带上的符号就是输出。
- ◆ 当图灵机的输入纸带为 X ，运行指令集，如果能够到达终止状态且输出纸带变为期望的 $M(X)$ ，则说图灵机求解了 X 。
- ◆ 有一类特殊的问题，其输入为 X ，而输出是1（接受）或0（拒绝），则被称为【判定问题】。例如输入一个字符串，如果输出为1表明该字符串是可接受的符合规则的字符串，否则为不可接受的或者说不符合规则的字符串。
- ◆ 图灵机从初始状态开始对纸带上的输入符号进行处理，如果输入处理完毕，且能够到达{接受、拒绝}等某一终止状态，则被认为是成功地完成了一次判定：输入被接受，或者输入被拒绝。
- ◆ 图灵机是一种离散的、有穷的、构造性的问题求解思路，一个问题的求解可以通过构造其图灵机(即程序或算法)来解决。
- ◆ 计算机是使用相应的程序或算法来完成任何设定好的任务。



图灵机怎样才算结束并给出答案

图灵可计算性

13

继续看图灵机是什么

图灵可计算问题

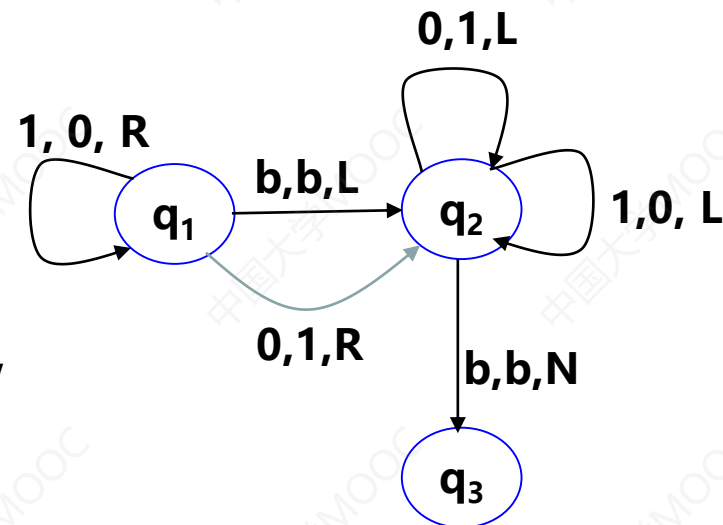
◆ 一个问题“能否由 A 计算出 B？”，利用图灵机做一个判定，即：如果能在 A 与 B 之间找到或设计出一个图灵机，使输入 A **停机**得到的结果是 B，就说明这个问题可解；否则就说明这个问题不可解。

◆ 图灵机根据指令集对输入进行处理，有的输入（初始状态与初始输入）可能导致停机（即能够到达某一终止状态）。有的输入则可能导致无限的执行序列（即不能够到达任一终止状态或停留在非终止状态）。**【停机问题】**：是否存在一个算法，对于任意给定的图灵机都能判定任意的【初始状态+初始输入】是否会导致停机。已经证明，这样的算法是不存在的，即停机问题是不可判定的。

◆ 假设纸带上的符号串为与自然数 n 相关的编码。如果机器以此为输入，到达终止状态时，纸带上的符号串已改造为 m 相关的编码，则称机器计算了函数 $f(n)=m$ 。如果一个函数以自然数为值域和定义域，并且有一个图灵机计算它，则称此函数为“可计算函数”。

◆ 已有的关于可计算函数的另一些定义，如递归函数、 λ 可定义函数等，都等价于图灵机定义的可计算函数（为什么？同学可继续学习相关课程来回答）

◆ 凡是能用算法方法解决的问题也一定能用图灵机解决；凡是图灵机解决不了的问题任何算法也解决不了。（为什么？同学可继续学习相关课程来回答）



图灵机一定能
停机吗？能否
判定

图灵机模型对现代计算机的启示

现代计算机的基本思想

是否是图灵机的思想呢?



输入/输出都是0和1的形式表达

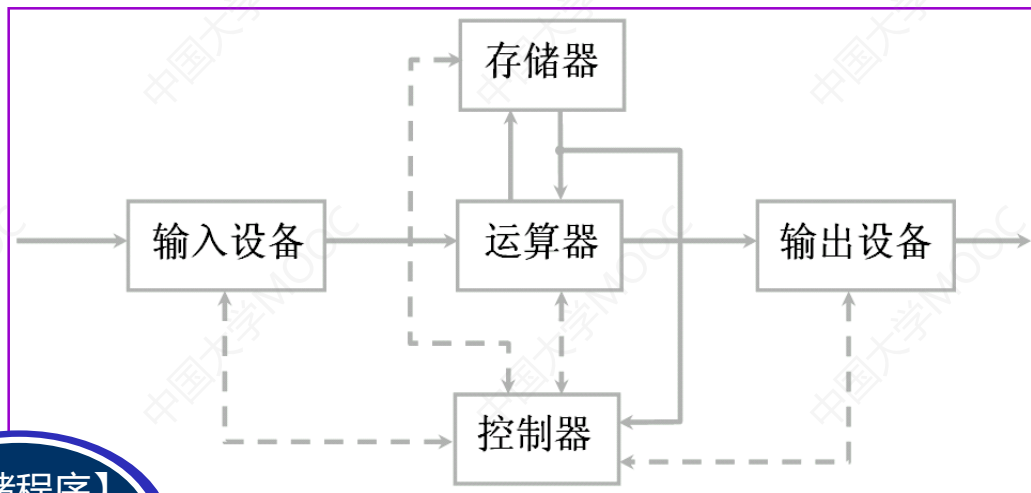
程序和指令也是0和1的形式表达

程序可用状态转换图来表达

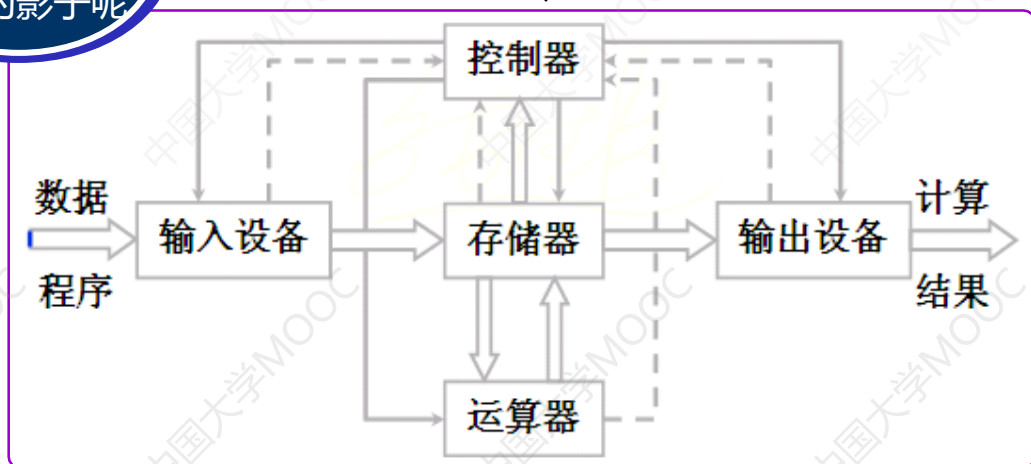
图灵机模型对现代计算机的启示

15

冯·诺依曼计算机: 思想与构成



【存储程序】
怎样能看出图灵机的影子呢



$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, B, F)$$

其中:

Q : 状态的有穷集合

Σ : 输入字母表

Γ : 带符号表

S : 开始状态

F : 终止状态集合

B 或 b : 空白符号

δ : **移动函数**, $\delta(q, X) = (p, Y, R \text{ 或 } L \text{ 或 } N)$ 表示 M 在状态 q 时读入符号 X , 则将状态改为 p , 并在 X 所在的带方格中印刷符号 Y , 然后将纸带向右/向左移动一格或者不动; (注: 也可定义读写头向右/向左移动一格。读写头向右移动即纸带向左移动。这里定义是纸带向右/向左移动, 便于后续示例一致性)



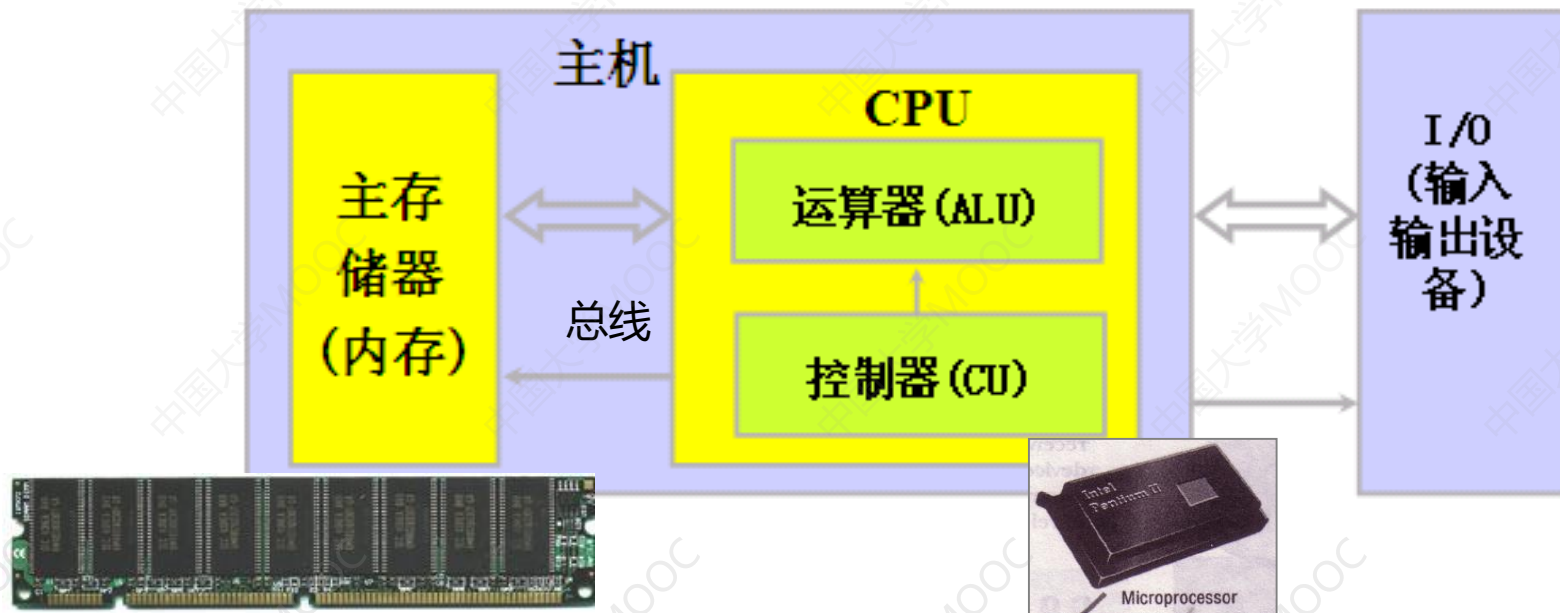
图灵机模型对现代计算机的启示

16

现代计算机

计算机的基本部件

- ◆CPU：中央处理单元(Central Process Unit)，将运算器和控制器集成在一块芯片上，形成微处理器。
- ◆CPU、主存储器、I/O设备及总线成为现代计算机的四大核心部件。

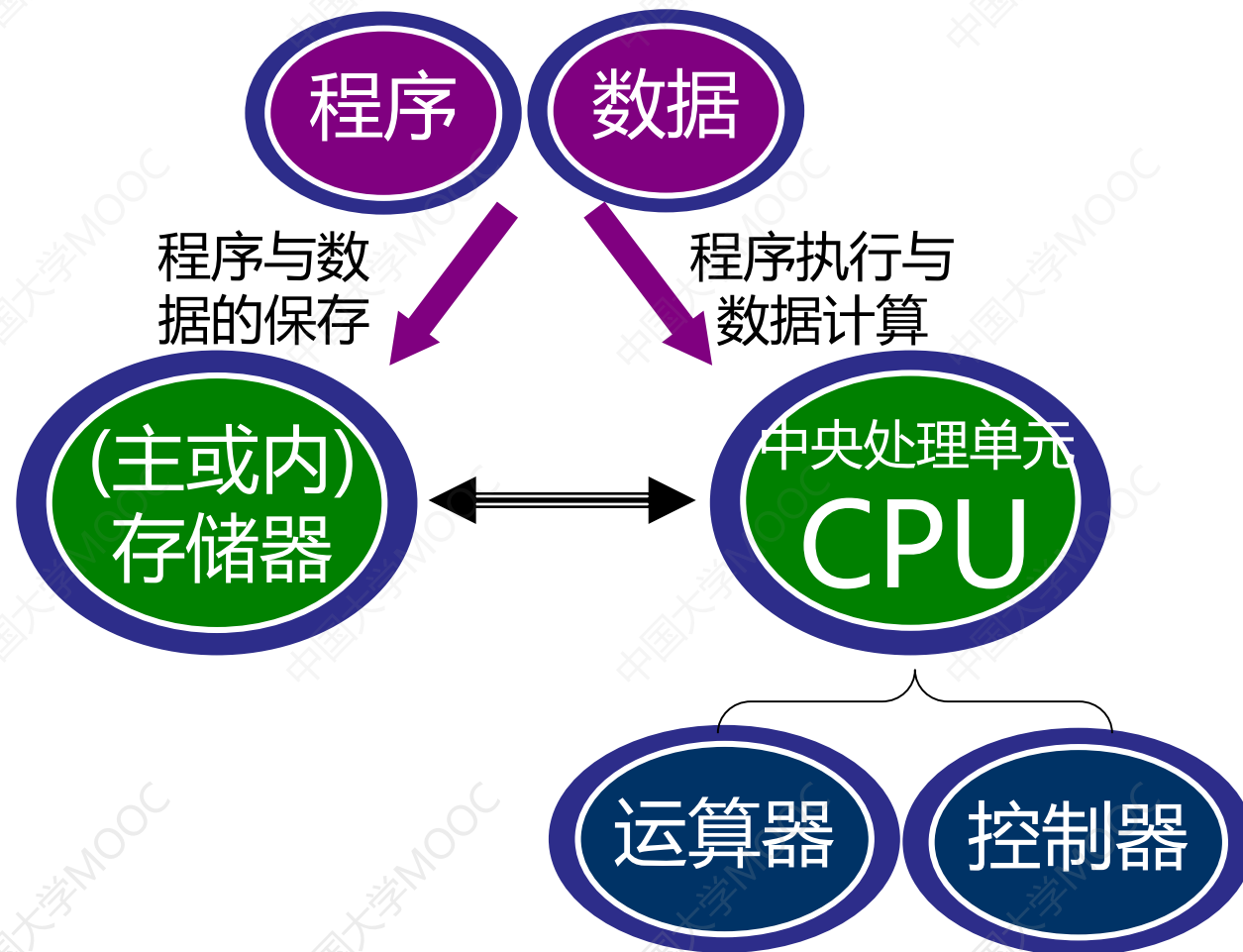


现代计算机里面，一个微处理器(芯片)可能包含多个CPU，即多核。

图灵机模型对现代计算机的启示

17

计算机非常简单：数据与程序，存储器与CPU



图灵机的重要作用——形式语言及其识别

18

形式语言与自动机

■形式计算的基础是符号化和语言。形式语言与自动机是研究符号化表达(即形式语言)以及符号化识别与处理(即自动机)的理论。

◆形式语言：字母表 Σ 上满足一定条件的字符串的集合 L ，称为 Σ 上的一种语言。

- 例如，若是由26个英文字母(包括大小写)、标点符号和空格组成的字母表，则 Σ 上那些符合英文单词组成规则和句子生成规则的字符串的集合，便是英语。

- 再如，全部二进制整数也可看作一种语言，它是字母表 $\{0, 1\}$ 上所有字符串的集合。

◆文法：文法是一类语言发生器。从一个文法 G 可以产生出一个语言 L 的各个句子，这些句子实际上是字符串。文法即是形式语言定义中需要满足的“条件”，即按文法产生的字符串(或说句子)才是该语言的字符串。

◆自动机：自动机是一种符号处理系统，或者说语言识别器，即它能识别出符合一个语言文法的各个字符串(句子)。它根据状态、输入和规则决定下一个状态和输出。即：状态 + 输入 + 规则 \rightarrow 状态迁移 + 输出。

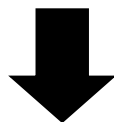
图灵机的重要作用—形式语言及其识别

19

语句模式的识别

“模式” 化语句的识别
(形式语言的识别-符合一定文法的字符串的识别)

Value = 8 + 20;
Result = 7 + 10;

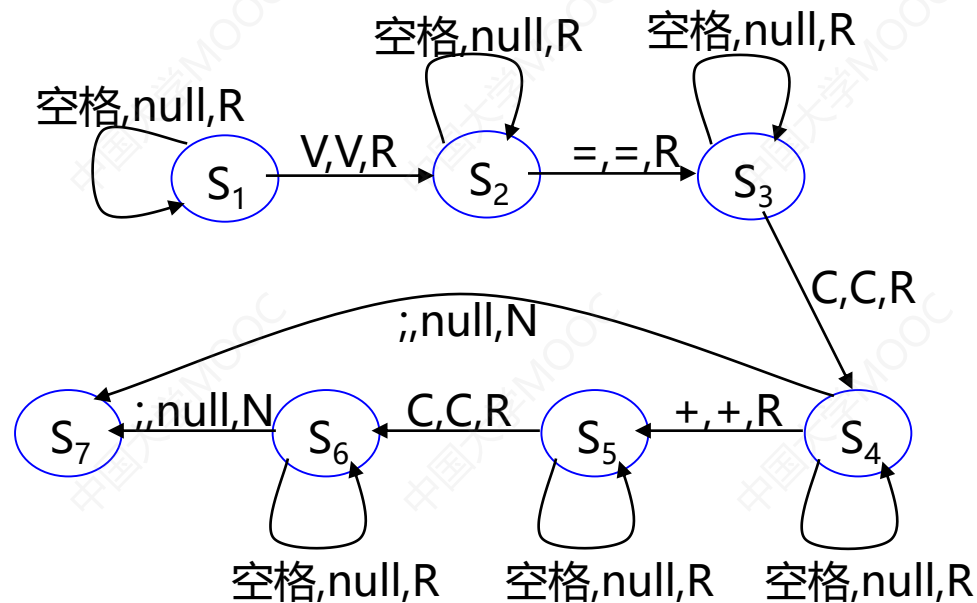


$(V, 1) = (C, 1) + (C, 2);$
 $(V, 2) = (C, 3) + (C, 4);$

$V = C + C;$
标识符 = 常量 + 常量
(形式语言的语法规则)

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, B, F)$

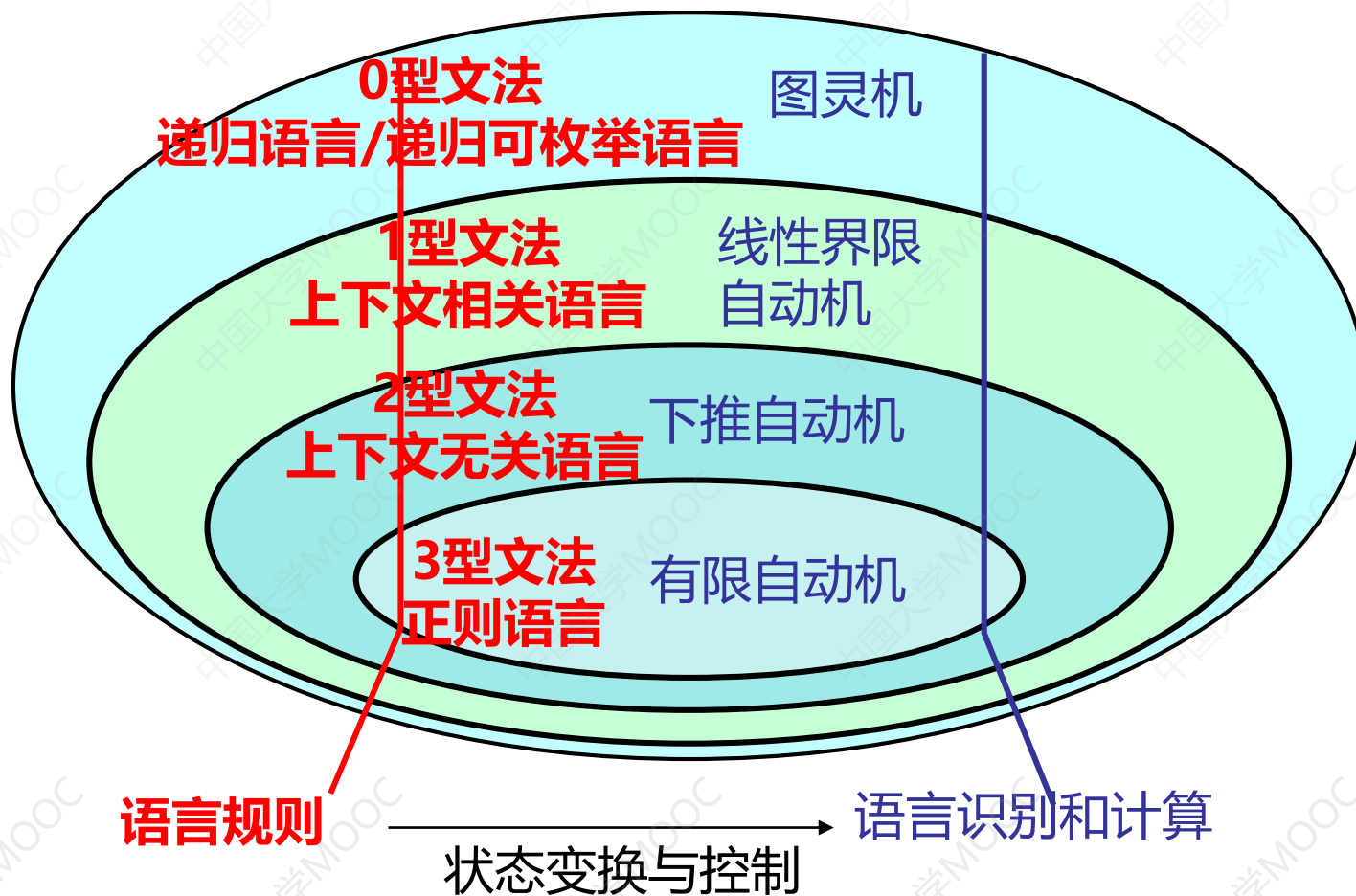
字母表 $\{V, C, =, +, \text{空格}, ;\}$; S_1 起始状态; S_7 终止状态; null 表示什么也不写回。



能识别两种模式 “V=C;” 和 “V=C+C;”
并能去除空格的图灵机示意图

图灵机的重要作用—形式语言及其识别

形式语言的类别与识别机器



【图灵机】是
有更少约束的
自动机

计算机的理论模型-图灵机

为什么图灵机是计算机的理论模型

- ◆理解图灵机模型
- ◆图灵机与算法和可计算性的关系
- ◆图灵机模型对现代计算机的启示
- ◆图灵机的一个重要应用—形式语言及其识别

