偏振的基础知识

吴荣源

March 8, 2020

谨以此文献给入门偏振的筒子们

20200224:

光通量（科学解释）：符号是 Φ, 标准单位是流明，是一种表示光功率的物理量，指每单位时间内光源所发出或被照体所吸收的光能

$$\Phi = \int I \mathrm{d}\Omega$$

光通量(直观解释): 光通量体现的是人眼感受到的功率。对大量具有正常视力的观察者所做的实验表明，在较明亮环境中人的视觉对波长为 555.0nm 左右的绿色光最敏感，这种人眼对各波长光谱敏感程度不同的性质可以由视见函数 $V(\lambda)$ 表示。光通量就是用来表示辐射功率经过人眼的视见函数影响后的光谱辐射功率大小的物理量。

光强：点光源 Q 沿某方向 r 的发光强度 I 定义为沿此方向单位立体角发出的光通量，如 figure1 所示，我们以 r 为轴取一立方体 dΩ，dΩ 内的光通量为 dΦ，则沿 r 方向的发光强度为：

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\Omega} \tag{1}$$

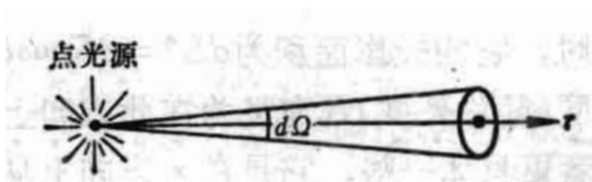

图 1: 点光源的发光强度

亮度：某方向上单位投影面积的发光强度

$$B = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} \tag{2}$$

照度：某方向单位面积上的光通量

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S} \tag{3}$$

20200225:

具有如下性质的波场叫作定态波场

1) 空间各点的扰动是同频率的简谐震荡（频率与振源相同）

2) 波场中各点扰动的振幅不随时间变化，在空间上形成一个稳定的振幅分布

普遍的定态标量波的表达式为：

$$U(P,T) = A(P)cos[\omega t - \varphi(P)] \tag{4}$$

其中
P: 代表场点
A(P): 反映振幅的空间分布，与时间无关
$\varphi(P)$: 反映位相的空间分布，与时间无关
ω: 圆频率

光波是一种电磁波，它是矢量横波，需要用两个矢量场来描述：

$$\begin{cases} E(P,T) = E_0(P)cos[\omega t - \varphi(P)] \\ H(P,T) = H_0(P)cos[\omega t - \varphi(P)] \end{cases} \tag{5}$$

其中 E 和 H 分别代表电场强度和磁场强度矢量。$E_0(P)$ 和 $H_0(P)$ 分别是他们的振幅分布。在一定条件下，往往只需要考虑光波中振动矢量的某一分量。

使用复振幅 来描述光波：

$$U(P,T) = A(P)cos[\omega t - \varphi(P)] \tag{6}$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{U}(P,t) = A(P)e^{-i(\omega t - \varphi(P))} = A(P)e^{i\varphi(P)}e^{-i\omega t} \tag{7}$$

在讨论单色波场中各点扰动的空间分布时，时间因子 $e^{-i\omega t}$ 总是相同的，常可以略取不写，剩下空间分布因子：

$$\tilde{U}(P,t) = A(P)e^{i\varphi(P)} \tag{8}$$

强度的振幅表示: 我们知道任何波的强度都真比于振幅的平方，光波也不例外。可以直接令光强 I 等于振幅 A 的平方：

$$I(P) = [A(P)]^2 \tag{9}$$

对于矢量波，若存在多个正交分量的振动时，总强度应为各分量强度之和：

$$I = A_x^2 + A_y^2 \tag{10}$$

光的横波性和五种偏振态

偏振片

有些晶体对不同方向的电磁振动具有选择吸收的性质，例如天然的电气石晶体是六角形的片状（见下图），长对角线的方向称作它的光轴。当光线射在这种晶体的表面上时，振动的电矢量与光轴平行时被吸收的较少，光可以较多地通过；电矢量与光轴垂直时被吸收的较多，光通过的很少。这种性质叫作二向色性。

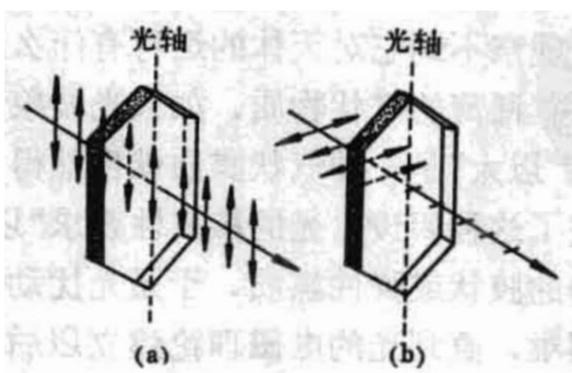

图 2: 电气石的二向色性

自然光

现在让我们用一块偏振片 P 来检验普通光源（如太阳、电灯）发出的光。当我们转动 P 的透振方向时，透射光的强度 I 并不改变，这是为什么呢?

光是光源中大量原子或分子发出的，在普通光源中各原子分子发出的光波不仅初相位彼此没有关联，振动方向也是杂乱无章的，因此宏观看来，入射光包含了所有方向的振动，而平均来说它们对于光的传播方向形成轴对称分布，哪个方向也不必其他方向优越，如图 2 所示。具有这种特点的光叫作**自然光**

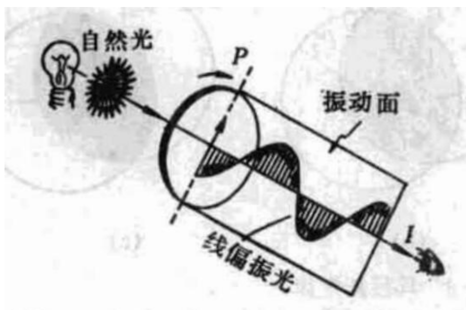

图 3: 自然光的演示

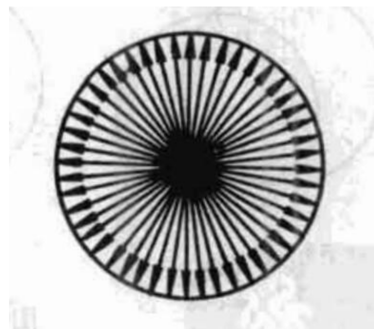

图 4: 自然光振动的分布

部分偏振光

经常遇到的光，除了自然光和线偏振光之外，还有一种偏振状态介于两者之间的光，其强度每转 90° 交替出现极大和极小，但是极小强度不为 0；从内部结构来看，这种光的振动虽然也是各个方向都有，但是不同方向振幅大小不同（见下图），具有这种特点的光叫做**部分偏振光**。我们用检偏器来检测部分偏振光时，透射光的强度随着其透射方向而改变。设强度的极大和极小值是 I_{max}，I_{min}，两者差越大，我们说这部分偏振光的偏振程度越高。通常用偏振度 P 来衡量部分偏振光偏振程度的大小，它定义为

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{11}$$

在晴朗的日子里，蔚蓝色天空所散射的日光多半是部分偏振光。散射光与入射光的方向越接近垂直，散射光的偏振度越高。

圆偏振光

如果一束光的电矢量在波面内运动的特点是其瞬时值大小不变，方向以角速度 ω 匀速旋转，即电矢量的端点描绘的轨迹为一圆，这种光叫作**圆偏振光**，圆偏振光可以看成是两个相互垂直的线偏振光的合成，其分量写成

$$\begin{cases} E_x = Acos\omega t \\ E_y = Acos(\omega t \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases} \tag{12}$$

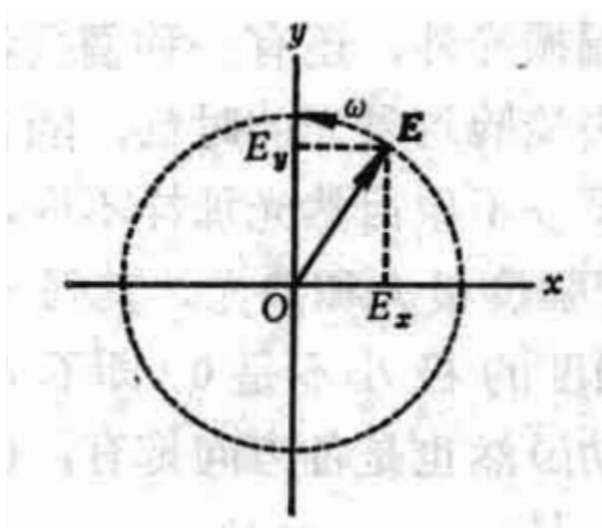

图 5: 圆偏振光中电矢量的运动

我们迎着波的传播方向观察，如图 5所示：如果电矢量按逆时针方向旋转，称之为左旋圆偏振光；如果电矢量按照顺时针方向旋转，称之为右旋圆偏振光。可以验证，在式 12中的 $\pi/2$，正号对应右旋，负号对应左旋。如果迎着圆偏振光的传播方向放置一偏振片，并旋转其透振方向观察光强的变化，我们会发现光强不变，这是因为圆偏振光可以沿任意一对互相垂直的方向分解成振幅相等的两个线偏振光，其中一个分量通过偏振片，另外一个分量不通过。
那么如何将圆偏振光与自然光区分开呢?

椭圆偏振光

电矢量的端点在波面内描绘的轨迹为一椭圆的光，叫做**椭圆偏振光**，椭圆运动也可以看成两个互相垂直的简谐振动的合成，只是它们的振幅不等，或相位差不等于 $\pm\pi/2$。如图 6所示，椭圆偏振光的两个分量的表达式可以写成：

$$\begin{cases} E_x = Acos\omega t \\ E_y = Acos(\omega t \ + \delta) \end{cases} \tag{13}$$

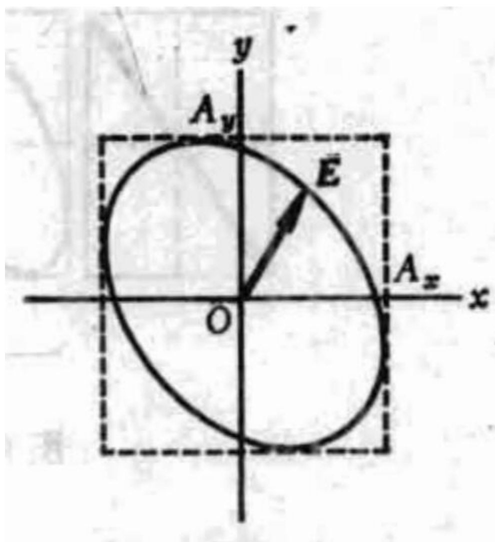

图 6: 椭圆偏振光中电矢量的运动

从图 7中可以看出，线偏振光和圆偏振光都可以看成是椭圆偏振光的特例。椭圆偏振光退化成圆偏振光的条件是：$A_x = A_y$ 且 $\delta = \pm\pi/2$；退化为线偏振光的条件是：$A_x = 0$ 或 $A_y = 0$ 或 $\delta = 0, \pm\pi/2$。在式 14中，$\delta > 0$ 对应右旋；$\delta < 0$ 对应左旋。$(0 < |\delta| < \pi)$
如果迎着椭圆偏振光的传播方向放置一偏振器，旋转其透射方向以观察透射光强度的变化，我们可以看到透射光每隔 $90°$ 从极大变成极小，再由极小变为极大，但无消光现象。这一特点与部分偏振光相同。
如何将椭圆偏振光与部分偏振光区别开来？

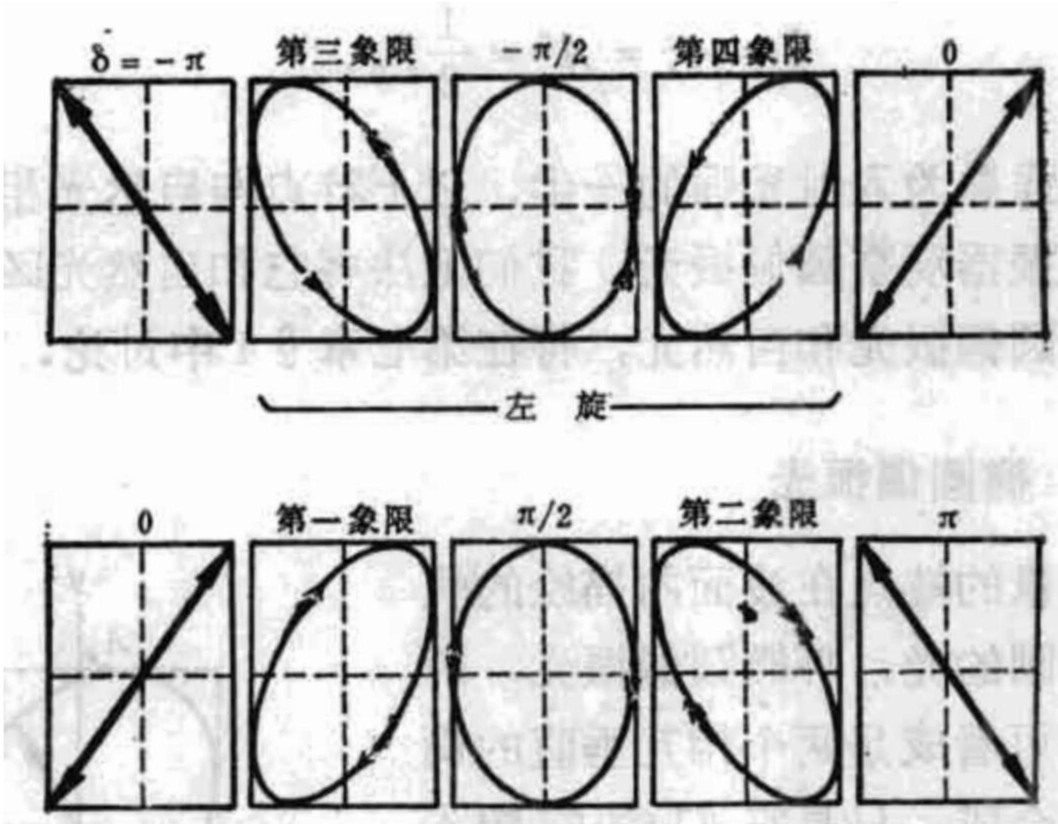

图 7: 各种相位差的椭圆运动

哇咔咔

20200308:

详细介绍一下椭圆偏振光，下面是椭圆偏振光公式：

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} cos(\omega t \ + \delta_1) \\ E_y = E_{0y} cos(\omega t \ + \delta_2) \end{cases} \tag{14}$$

化简得：

$$\frac{1}{E_{0x}^2} E_x^2 + \frac{1}{E_{0y}^2} E_y^2 - 2 \frac{cos\delta}{E_{0x} E_{0y}} E_x E_y = sin^2\delta, \qquad \delta = \delta_2 - \delta_1 \tag{15}$$

下面是偏振椭圆（polarization ellipse）示意图

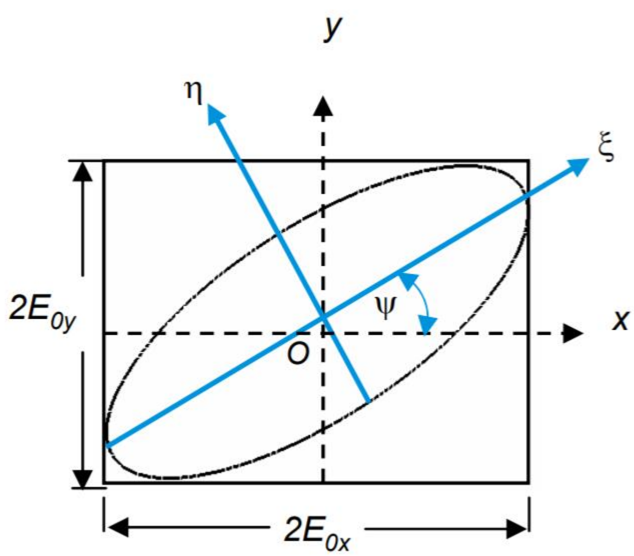

图 8: 偏振椭圆

一般来说，光场是椭圆偏振的，但是有几种特殊情况值得注意
他们被称为退化偏振态（degenerate polar states）

1) linearly horizontal/vertical polarized light (LHP/LVP)

2) linear ±45° polarized light (L+45P/L–45P)

3) right/left circularly polarized light (RCP/LCP)

如下图所示：

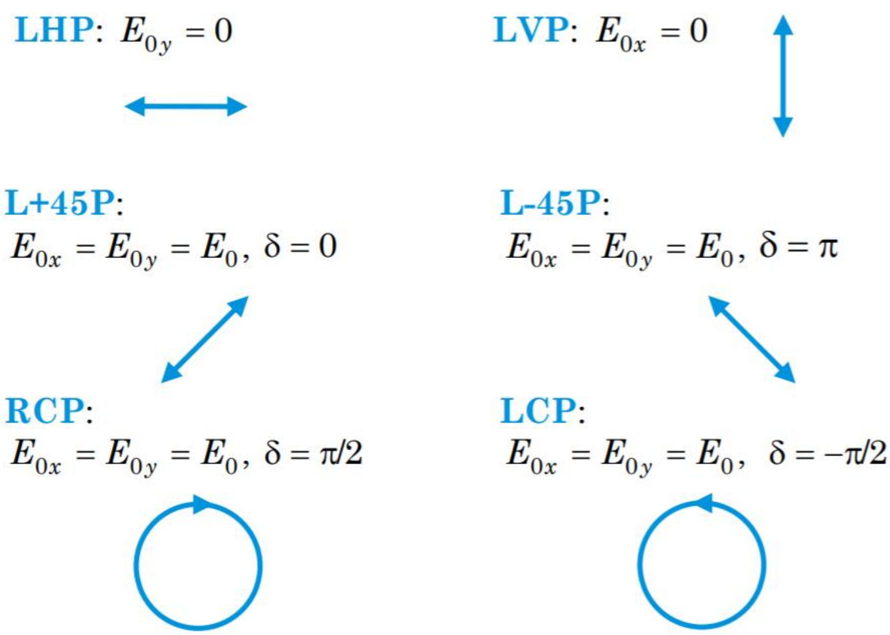

图 9: 几种退化偏振态

偏振椭圆可以用两个角度参数表示:

$$orientation \quad angle \quad \psi(0 \leq \psi \leq \pi)$$

$$ellipticity \quad angle \quad \chi(-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4})$$

它们的本质意义:
ψ: 如图 8所示，椭圆长轴偏离 xoy 坐标系的角度
χ: 如图 8所示，设椭圆长轴长度为 a，短轴长度为 b，令

$$tan\chi = \pm\frac{b}{a}, \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \tag{16}$$

正负号分别表示椭圆是右旋还是左旋
它们可以被偏振椭圆的参数定义:

$$tan2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}cos\delta, \qquad (0 \leq \psi \leq \pi) \tag{17}$$

$$sin2\chi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}sin\delta, \qquad (-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}) \tag{18}$$

引入一个辅助角:

$$tan\alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}, \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{19}$$

得到:

$$tan2\psi = tan(2\alpha)cos\delta$$

$$sin2\chi = sin(2\alpha)cos\delta$$

$$0 \leq \delta \leq 2\pi$$

使用偏振椭圆不能直观地表示 orientation angle 和 ellipticity angle，大神庞加莱推荐使用一个球体 (半径为 1) 来表示偏振光，下图表示**庞加莱球**及其球面坐标系和笛卡尔坐标系。

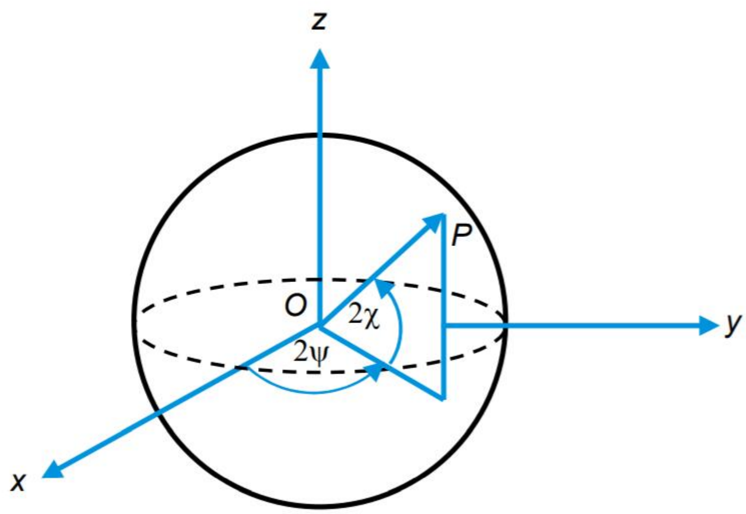

图 10: 庞加莱球

$$\begin{cases} x = cos(2\chi)cos(2\psi) \\ y = cos(2\chi)sin(2\psi) \\ z = sin(2\chi) \end{cases} \tag{20}$$

$$0 \leq \psi \leq \pi$$
$$-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}$$

使用斯托克斯矢量来表示偏振态， $S_0/S_1/S_2/S_3$ 均为可直接观测的偏振量, 他们被称为斯托克斯变量（Stokes polarization parameters）

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

$$\begin{cases} S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ S_2 = 2E_{0x}E_{0y}cos\delta \\ S_3 = 2E_{0x}E_{0y}sin\delta \\ \delta = \delta_2 - \delta 1 \end{cases} \tag{21}$$

S_0 反映的是光束的总强度
S_1 反映的是 LHP 相对于 LVP 的优势
S_2 反映的是 L+45P 相对于 L-45P 的优势
S_3 反映的是 RCP 相对于 LCP 的优势

使用复数形式来描绘斯托克斯矢量

$$\begin{cases} E_x(t) = E_{0x}exp(i\delta_x) \\ E_y(t) = E_{0y}exp(i\delta_y) \end{cases} \tag{22}$$

则式 21可以改写成

$$\begin{cases} S_0 = E_x\bar{E}_x + E_y\bar{E}_y \\ S_1 = E_x\bar{E}_x - E_y\bar{E}_y \\ S_2 = E_x\bar{E}_y + E_y\bar{E}_x \\ S_3 = i(E_x\bar{E}_y - E_y\bar{E}_x) \end{cases} \tag{23}$$

将斯托克斯参数整理成矩阵的形式比较方便，称之为椭圆偏振光的斯托克斯矢量

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x}E_{0y}cos\delta \\ 2E_{0x}E_{0y}sin\delta \end{pmatrix} \tag{24}$$

斯托克斯矢量的退化偏振态如下图所示

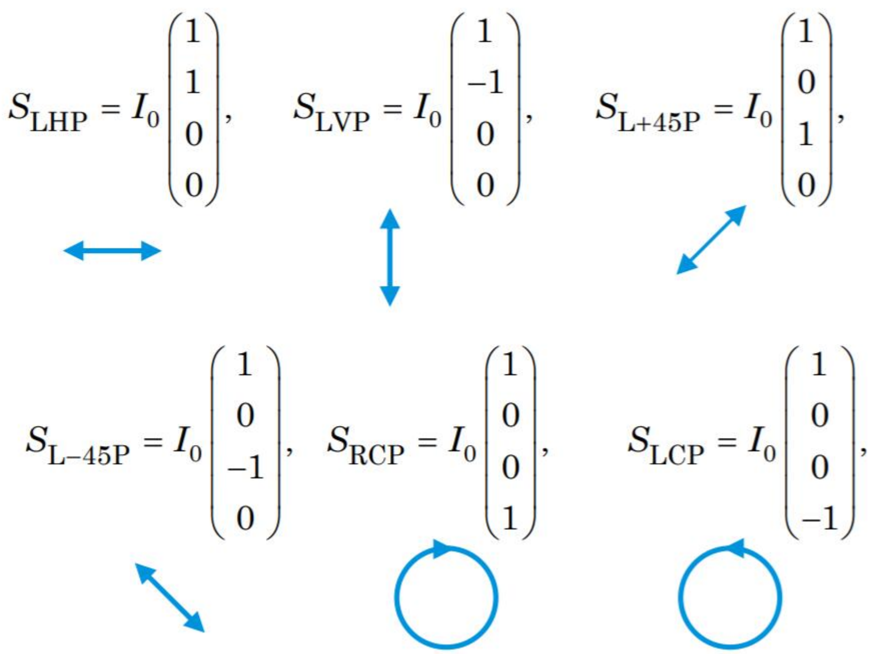

图 11: 退化偏振态的斯托克斯矢量表示

斯托克斯参数与 orientation angle 和 ellipticity angle 的关系如下

$$S_1 = S_0cos(2\chi)cos(2\psi)$$

$$S_2 = S_0cos(2\chi)sin(2\psi)$$

$$S_3 = S_0sin(2\chi)$$

且

$$\psi = 0.5atan\frac{S_2}{S_1}, \qquad 0 \leq \psi \leq \pi$$
$$\chi = 0.5asin\frac{S_3}{S_0}, \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}$$

斯托克斯矢量不仅可以描述完全偏振光，还可以用来描述非偏光和部分偏振光

$$S_{unpolarization} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

部分偏振光是完全偏振光和非偏光的混合，可以这样表示

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = (1-P)\begin{pmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq P \leq 1$$

P 称为偏振度 (degree of polarization (DOP)), 对于完全偏振光，P = 1，上述方程可以化为椭圆偏振光的斯托克斯矢量；对于非偏光，P = 0; 偏振度 P 可以由下式进行计算

$$P = \frac{I_{polar}}{I_{total}} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S^0}, \qquad 0 \leq P \leq 1 \tag{25}$$

偏振光束的四个斯托克斯参数可以通过将光束依次通过两个偏振元件 (波板和偏振器) 来测量。出现的光束然后入射到光学探测器上。测量配置如下所示。

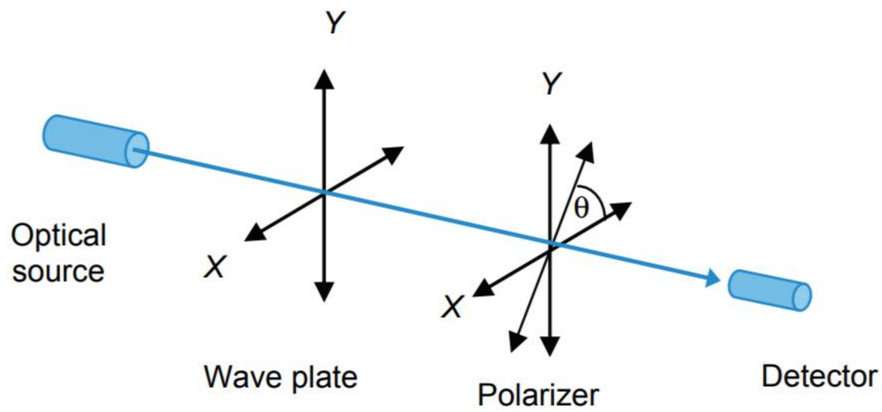

图 12: 斯托克斯参数测量装置

波板就是一个相位延迟器，延迟相位 ϕ; 偏振器转动角度 θ 则输出分量 $I(\theta,\phi)$ 为:

$$I(\theta,\phi)=\frac{1}{2}[S_0+S_1cos2\theta+S_2sin2\theta cos\phi-S_3sin2\theta sin\phi] \quad (26)$$

那么斯托克斯矢量可以被这样测得:

$$\begin{aligned}S_0&=I(0,0)+I(\pi/2,0)\\S_1&=I(0,0)-I(\pi/2,0)\\S_2&=2I(\pi/4,0)-S_0\\S_3&=S_0-2I(\pi/4,\pi/2)\end{aligned}$$