Метод Гаусса решения линейной системы с выбором главного элемента по столбцу

29 ноября 2019 г.

1 Алгоритм

Требуется решить систему линейных уравнений $Ax = b$ (A - матрица размера $n \times n$, b - n-мерный вектор свободных членов) методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Зададим m - размер блока матрицы. Тогда n = mk + l и матрица представима в виде:

$$\begin{pmatrix} A_{0,0}^{m\times m} & A_{0,1}^{m\times m} & \dots & A_{0,k-1}^{m\times m} & A_{0,k}^{m\times l} & b_0^m \\ A_{1,0}^{m\times m} & A_{1,0}^{m\times m} & \dots & A_{1,k-1}^{m\times m} & A_{1,k}^{m\times l} & b_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k-1,0}^{m\times m} & A_{k-1,1}^{m\times m} & \dots & A_{k-1,k-1}^{m\times m} & A_{k-1,k}^{m\times l} & b_{k-1}^m \\ A_{k,0}^{l\times m} & A_{k,1}^{l\times m} & \dots & A_{k,k-1}^{l\times m} & A_{k,k}^{l\times l} & b_k^l \end{pmatrix}$$

За норму возьмём максимальную норму столбца:

$$||A^{m\times m}|| = \max_{j=0,\dots,m-1} \sum_{i=0}^{m-1} |a_{i,j}|$$

Найдем в первом столбце обратный блок с минимальной нормой. Если ни у одного блока не посчиталась обратная, метод применить нельзя. Теперь переставляем строку у который первый блок имеет минимальную обратную с первой. Затем умножаем каждый блок первой строки на минимальную обратную слева.

Умножаем каждый элемент первой строки на обратую первого элемента в этой строке

j = 1,. . . ,k

$A'^{m\times m}_{0,j} = (A_{0,0}^{m\times m})^{-1}\ A_{0,j}^{m\times m}$

Умножаем так же блок размера $m \times l$

$A'^{m\times l}_{0,k} = (A_{0,0}^{m\times m})^{-1}\ A_{0,k}^{m\times l}$

Умножаем часть вектора b

$b'^{m}_{0} = (A_{0,0}^{m\times m})^{-1}\ b_0^m$

Получим новую матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} E^{m\times m} & A'^{m\times m}_{0,1} & \dots & A'^{m\times m}_{0,k-1} & A'^{m\times l}_{0,k} & b'^{m}_{0} \\ A_{1,0}^{m\times m} & A_{1,1}^{m\times m} & \dots & A_{1,k-1}^{m\times m} & A_{1,k}^{m\times l} & b_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k-1,0}^{m\times m} & A_{k-1,1}^{m\times m} & \dots & A_{k-1,k-1}^{m\times m} & A_{k-1,k}^{m\times l} & b_{k-1}^m \\ A_{k,0}^{l\times m} & A_{k,1}^{l\times m} & \dots & A_{k,k-1}^{l\times m} & A_{k,k}^{l\times l} & b_k^l \end{pmatrix}$$

Теперь вычетаем из iой строки первую, умноженную на первый коэффициент iой строки:

$A_{i,j}^{m\times m} = A_{i,j}^{m\times m} - A_{i,0}^{m\times m} * A_{0,j}^{m\times m}, i = 1,\dots,k-1, j = 1,\dots,k-1$
$A_{i,k}^{m\times l} = A_{i,k}^{m\times p} - A_{i,0}^{m\times m} * A_{0,k}^{m\times l}, i = 1,\dots,k-1$
$A_{k,i}^{l\times m} = A_{k,i}^{l\times m} - A_{k,0}^{l\times m} * A_{0,i}^{m\times l}, i = 1,\dots,k-1$
$A_{k,k}^{l\times l} = A_{k,k}^{l\times l} - A_{k,0}^{l\times m} * A_{0,k}^{m\times l}$
$b_i^m = b_i^m - A_{i,1}^{m\times m} * b_0^m, i = 1,\dots,k-1$
$b_k^l = b_k^l - A_{k,1}^{l\times m} * b_0^m$
Получим матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} E^{m\times m} & A_{0,1}^{m\times m} & \dots & A_{0,k-1}^{m\times m} & A_{0,k}^{m\times l} & b_0^m \\ 0 & A_{1,1}^{m\times m} & \dots & A_{1,k-1}^{m\times m} & A_{1,k}^{m\times l} & b_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & A_{k-1,1}^{m\times m} & \dots & A_{k-1,k-1}^{m\times m} & A_{k-1,k}^{m\times l} & b_{k-1}^m \\ 0 & A_{k,1}^{l\times m} & \dots & A_{k,k-1}^{l\times m} & A_{k,k}^{l\times l} & b_k^l \end{pmatrix}$$

Теперь повторяем алгоритм для подматрицы размера $(k-1)\times(k-1)$ блоков. Общие формулы на шаге p (p=0,...,k-1):
j = p+1,...,k
$A'^{m\times m}_{p,j} = (A_{p,p}^{m\times m})^{-1}\ A_{p,j}^{m\times m}$
Умножаем так же блок размера $m\times l$
$A'^{m\times l}_{p,k} = (A_{p,p}^{m\times m})^{-1}\ A_{p,k}^{m\times l}$
Умножаем часть вектора b
$b'^{m}_{p} = (A_{p,p}^{m\times m})^{-1}\ b_p^m$

$A_{i,j}^{m\times m} = A_{i,j}^{m\times m} - A_{i,p}^{m\times m} * A_{p,j}^{m\times m}, i = p+1,\dots,k-1, j = p+1,\dots,k-1$
$A_{i,k}^{m\times l} = A_{i,k}^{m\times p} - A_{i,p}^{m\times m} * A_{p,k}^{m\times l}, i = p+1,\dots,k-1$
$A_{k,i}^{l\times m} = A_{k,i}^{l\times m} - A_{k,p}^{l\times m} * A_{p,i}^{m\times l}, i = p+1,\dots,k-1$
$A_{k,k}^{l\times l} = A_{k,k}^{l\times l} - A_{k,p}^{l\times m} * A_{p,k}^{m\times l}$
$b_i^m = b_i^m - A_{i,p}^{m\times m} * b_l^m, i = p+1,\dots,k-1$
$b_k^l = b_k^l - A_{k,p}^{l\times m} * b_l^m$
После прохождения алгоритма получаем верхнетругольную матрицу с единицами на диагонали.

$$\begin{pmatrix} E^{m\times m} & A_{0,1}^{m\times m} & \dots & A_{0,k-1}^{m\times m} & A_{0,k}^{m\times l} & b_0^m \\ 0 & E^{m\times m} & \dots & A_{1,k-1}^{m\times m} & A_{1,k}^{m\times l} & b_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E^{m\times m} & A_{k-1,k}^{m\times l} & b_{k-1}^m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E^{l\times l} & b_k^l \end{pmatrix}$$

1.1 Обртаный ход

$b_i = b_i - A_{i,j} * b_i, j = k,\dots,0, i = i+1,\dots,0$
После выполнения алгоритма в векторе b будет исходный ответ.

2 Работа с блоками

Для работы с блоками матрицы пригодятся две функции - для получения и изменения блоков:

```
void GetBlock(double* A, double* block, const int x, const int y, const int x1, const
void PutBlock(double* A, double* block, const int x, const int y, const int x1, const
```

По переданным индексам x,y и индексам конца x1,y1 кладет часть матрицы A в block. Во втором случае блок записывается в матрицу A на место x, y. Предполагается, что матрица A лежит в памяти построчно.

3 Сложность блочного алгоритма

Сложность операций которые мы используем:
Нахождение обратной матрицы размера n: $8/3 * (n^3)$
Вычитание двух матриц размера m на n: $m * n$
Перемножение двух матриц $m \times n$ и $n \times k$: $2m * n * k$

Пусть $k = n/m$, тогда

Сложность нахождения обратных матриц:
$\sum_{i=0}^{k}(k - i) * (8/3 * m^3) = 8/6 * k * (k + 1) * (m^3) = 8/6 * m^3 * k^2 = 8/6 * m * n^2$

Сложность перемножения первой строки матрицы на обратный блок:
$\sum_{i=0}^{k}(k - i) * (2m^3) = m^3 * k^2 = m * n^2$

Сложность вычитания и умножения строк:
$\sum_{i=1}^{k}(\sum_{s=i+1}^{k}(k - i) * (2m^3 + m^2)) = \sum_{i=0}^{k}(k - i)^2 * (2m^3) = 2/3 * m^3 * k^3 = 2/3 * n^3$
Сложность обратного хода: $\sum_{i=0}^{k}(i) * (2 * m^2 + m^2)$

$$\sum = 8/6 * m^3 * k^2 + m^3 * k^2 + 2/3 * m^3 * k^3 = 2/3 * m^3 * k^3 + 7/3 * m^3 * k^2$$

При m = 1, k = n: $\sum = 2 * n^3/3$
При m = n, k = 1: $\sum = 3 * n^3$