

2019 年湖南娄底涟源市教师招聘考试市场模拟卷

《中学数学》

一、单选（共 20 题，每题 2 分，共 40 分）

1. 【答案】A. 解析：将 499.5 亿用科学记数法表示为：4.995×10¹⁰。故选：A.

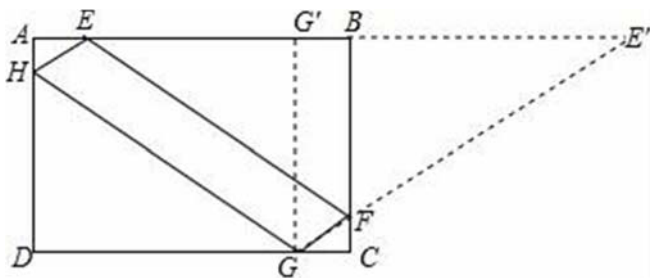
2. 【答案】C. 解析：∵ $a^2 + b^2 - 4a - 10b + 29 = 0$ ，∴ $(a^2 - 4a + 4) + (b^2 - 10b + 25) = 0$ ，
∴ $(a - 2)^2 + (b - 5)^2 = 0$ ，∴ $a = 2$ ， $b = 5$ ，∴ 当腰为 5 时，等腰三角形的周长为 5+5+2=12，当腰为 2 时，2+2<5，构不成三角形。故选：C.

3. 【答案】C. 解析：∵ 关于 x 的一元二次方程 $(a+1)x^2 + 2bx + (a+1) = 0$ 有两个相等的实数根，
∴ $\begin{cases} a+1 \neq 0 \\ \Delta = (2b)^2 - 4(a+1)(a+1) = 0 \end{cases}$ ，∴ $b = a+1$ 或 $b = -(a+1)$ 。当 $b = a+1$ 时，有 $a-b+1=0$ ，此时 -1 是方程 $x^2 + bx + a = 0$ 的根；当 $b = -(a+1)$ 时，有 $a+b+1=0$ ，此时 1 是方程 $x^2 + bx + a = 0$ 的根。∵ $a+1 \neq 0$ ，∴ $a+1 \neq -(a+1)$ ，∴ 1 和 -1 不都是关于 x 的方程 $x^2 + bx + a = 0$ 的根。故选：C.

4. 【答案】D. 解析：解分式方程 $\frac{a}{y-2} + \frac{2}{2-y} = 2$ 可得 $y = \frac{a+2}{2}$ ，∴ 分式方程 $\frac{a}{y-2} + \frac{2}{2-y} = 2$ 的解是非负实数，∴ $a \geq -2$ ，∵ $y = x^2 + (a-1)x + b$ ，∴ 抛物线开口向上，对称轴为 $x = \frac{1-a}{2}$ ，∴ 当 $x < \frac{1-a}{2}$ 时， y 随 x 的增大而减小，∴ 在 $x < -1$ 时， y 随 x 的增大而减小，∴ $\frac{1-a}{2} \geq -1$ ，解得 $a \geq 3$ ，综上可知满足条件的 a 的值为 3，故选：D.

5. 【答案】A. 解析：直线 $y = \frac{3}{2}x$ 向右平移 3 个单位后所得直线解析式为 $y = \frac{3}{2}(x - 3)$ ，即 $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ ，
设 $B(\frac{k}{t}, t)$ ，则 $A(\frac{k}{2t}, 2t)$ ，把 $A(\frac{k}{2t}, 2t)$ 代入 $y = \frac{3}{2}x$ 得 $2t = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{2t}$ 即 $k = \frac{8}{3}t^2$ ，把 $B(\frac{k}{t}, t)$ ，代入 $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ 得 $t = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{t} - \frac{9}{2}$ ，则 $k = \frac{2t(t - \frac{9}{2})}{\frac{3}{2}}$ ，所以 $\frac{8}{3}t^2 = \frac{2t(t - \frac{9}{2})}{\frac{3}{2}}$ ，解得 $t_1 = 0$ (舍去)， $t_2 = \frac{3}{2}$ ，所以 $k = \frac{8}{3} \times (\frac{3}{2})^2 = 6$ 。故选：A.

6. 【答案】C. 解析：作点 E 关于 BC 的对称点 E'，连接 E'G 交 BC 于点 F，此时四边形 EFGH 周长取最小值，EF = E'F，过点 G 作 GG' ⊥ AB 于点 G'，如图所示。∵ AE = CG，BE = BE'，∴ E'G' = AB = 8，
∵ GG' = AD = 6，∴ E'G = $\sqrt{E'G'^2 + GG'^2} = 10$ ，∴ C_{四边形 EFGH} = 2(GF + EF) = 2E'G = 20。故选：C.



7. 【答案】C. 解析：A. “掷一枚硬币正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$ ”表示每抛硬币 2 次就有 1 次正面朝上的可能性很大，但不是一定就有 1 次正面朝上，故本选项错误；B. 一组数据 2，2，3，6 的众数是 2，中

位数是 $\frac{2+3}{2}=2.5$ ，故本选项错误；C. 要了解全市人民的低碳生活状况，适宜采用抽样调查的方法，故本选项正确；D. 乙两名同学的5次数学成绩，计算得平均分都是90分，方差分别是 $S^2_{甲}=5$ ， $S^2_{乙}=12$ ，说明甲的成绩较为稳定，故本选项错误；故选：C.

8. 【答案】B. 解析：由中心对称图形的定义即可判断，A不是中心对称图形，B是中心对称图形，C不是中心对称图形，D不是中心对称图形，故选B.

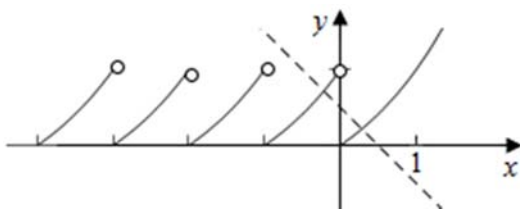
9. 【答案】A. 解析：A、若 $a>|b|$ ，则 $a^2>b^2$ ，正确；B、若 $a>b$ ，当 $a=1$ ， $b=-2$ 时，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ，错误；C、若 $a>b$ ，当 $c^2=0$ 时，则 $ac^2=bc^2$ ，错误；D、若 $a>b$ ， $c>d$ ，如果 $a=1$ ， $b=-1$ ， $c=-2$ ， $d=-4$ ，则 $a-c=b-d$ ，错误；故选：A.

10. 【答案】B. 解析：根据题意得：四边形ABCD是梯形， $AB+BC=6$ ， $CD=10-6=4$ ， $\therefore \frac{1}{2}AD \times CD=8$ ， $\therefore AD=4$ ，又 $\therefore \frac{1}{2}AD \times AB=2$ ， $\therefore AB=1$ ，当P运动到BC中点时，梯形ABCD的中位线也是 $\triangle APD$ 的高， \therefore 梯形ABCD的中位线长 $=\frac{1}{2}(AB+CD)=\frac{5}{2}$ ， $\therefore \triangle PAD$ 的面积 $=\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 4=5$ ；故选：B.

11. 【答案】C. 解析： $x^2-5x+4<0 \Rightarrow 1<x<4$ 而 $x \in \mathbb{Z}$ ，所以 $x=2,3$ ，因此集合 $A=\{2,3\}$ ， $A \subseteq B$ ，所以 $m=3$ ，因此本题选C.

12. 【答案】B. 解析： $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 是常数， $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 是常数，若已知 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$ ，则 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \cdot \vec{c} = |\vec{c}| |\vec{b}| \cos \alpha \cdot \vec{a} \Rightarrow |\vec{a}| \cos \theta \cdot \vec{c} = |\vec{c}| \cos \alpha \cdot \vec{a}$ ，则向量 \vec{a}, \vec{c} 共线，但是有可能反向；若已知向量 \vec{a}, \vec{c} 同向，则设 $\vec{c} = \lambda \vec{a}$ ，代入 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$ 得到： $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \lambda \vec{a} = (\vec{b} \cdot \lambda \vec{a}) \cdot \vec{a}$ 式子成立，故向量 \vec{a}, \vec{c} 同向，一定有 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$ ， \therefore “ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$ ”是“向量 \vec{a}, \vec{c} 同向”的必要不充分条件. 故选：B.

13. 【答案】C. 解析：



函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 (x \geq 0) \\ f(x+1) (x < 0) \end{cases}$ 的图象如图所示，作出直线 $l: y = a - x$ ，向左平移直线 l 观察可得函数 $y = f(x)$ ，的图象与函数 $y = -x + a$ 的图象有两个交点，即方程 $f(x) = -x + a$ 有且只有两个不相等的实数根，即有 $a < 1$ ，故选：C.

14. 【答案】B. 解析：由题意得， $f'(x) = \frac{2}{x} + 2ax - 3$ ， $\therefore f'(2) = 4a - 2 = 0$ ，解得 $a = \frac{1}{2}$ ， $\therefore f(x) = 2\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 3x$ ， $f'(x) = \frac{2}{x} + x - 3 = \frac{(x-1)(x-2)}{x}$ ， $\therefore f(x)$ 在 $(0,1), (2, +\infty)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减， $\therefore f(x)$ 的极大值为 $f(1) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$ ，故选：B.

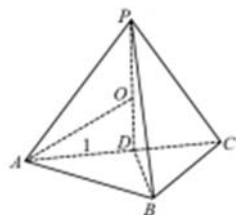
15. 【答案】D. 解析：由题意，知 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}absinC = \frac{1}{4}c^2$ ，得 $c^2 = 2absinC$ ，再由正弦定

理得 $\sin^2 C = 2\sin A \sin B \sin C$, 因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\sin C = 2\sin A \sin B$, 即 $\sin(A+B) = 2\sin A \sin B$, 所以 $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 2\sin A \sin B$, 两边同时除以 $\sin A \sin B$, 得 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} = 2$. 故选 D.

16. 【答案】A. 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列, $a_2 a_8 = 16a_5$, $a_3 + a_5 = 20$, 所以 $a_2 a_8 = a_5^2 = 16a_5$, $a_5 = 16$, $a_3 = 4$, 所以 $a_5 = a_3 q^2$, $q = 2$, $a_5 = a_1 q^4$, $a_1 = 1$, $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$, 因为 $\sqrt{a_m a_n} = 32$, 所以 $2^{m-1} 2^{n-1} = 2^{10}$, $m+n=12$, $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12} (m+n) (\frac{1}{m} + \frac{4}{n}) = \frac{1}{12} (5 + \frac{n}{m} + \frac{4m}{n}) \geq \frac{1}{12} (5 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{4m}{n}}) = \frac{3}{4} (m>0, n>0)$, 当且仅当 $n=2m$ 时“=”成立, 所以 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$, 故选 A.

17. 【答案】C. 解析: 复数 $z = 1 - \sqrt{3}i$, $\therefore \bar{z} = 1 + \sqrt{3}i$, $\therefore \frac{\bar{z}}{z} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i) \cdot (1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i) \cdot (1+\sqrt{3}i)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{\bar{z}}{z}$ 的虚部为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 因此本题选 C.

18. 【答案】B. 解析: 主视图是边长为 2 的正三角形 PAC , 面 $PAC \perp$ 面 ABC , 高是 $\sqrt{3}$, 其中 $DA = DB = DC = 1$, $PD \perp ABC$, 球心 O 在 PD 上, 设球的半径为 r , 则 $r^2 = (\sqrt{3} - r)^2 + 1^2$, 解得 $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 $V = \frac{32\sqrt{3}}{27} \pi$. 故选 B.



19. 【答案】D. 解析: 由 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 知:

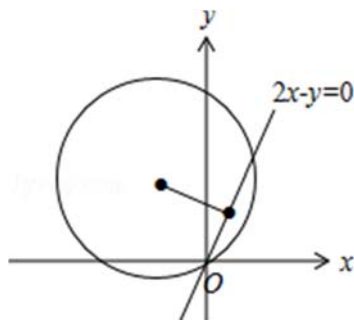
在 A 中, 若 $\alpha \perp \beta$, $m \perp \beta$, 则 $m // \alpha$ 或 $m \subset \alpha$, 故 A 错误;

在 B 中, 若 $m // \alpha$, $n \perp m$, 则 n 与 α 相交、平行或 $n \subset \alpha$, 故 B 错误;

在 C 中, 若 $m \perp \alpha$, $n // \beta$, $m \perp n$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 C 错误;

在 D 中, 若 $m // \beta$, $m \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = n$, 则由线面平行的性质定理得 $m // n$, 故 D 正确. 故选: D

20. 【答案】B. 解析: 圆 C: $x^2 + 2x + y^2 - 2ay = 0$ 化简为 $(x+1)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 1$, 圆心坐标为 $C(-1, a)$, 半径为 $\sqrt{a^2 + 1}$. 如图, 由题意可得, 当弦 AB 最短时, 过圆心与点 $(1, 2)$ 的直线与直线 $2x - y = 0$ 垂直. 则 $\frac{a-2}{-1-1} = -\frac{1}{2}$, 即 $a=3$. 故选: B.

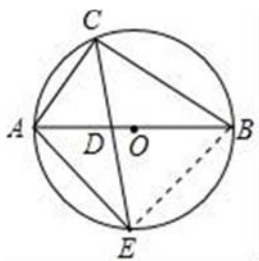


二、填空（共 10 题，每题 2 分，共 20 分）

21. 【答案】2020. 解析：∵ m 是方程 $x^2 - x - 2019 = 0$ 的根，∴ $m^2 - m - 2019 = 0$ ，∴ $m^2 = m + 2019$ ， $m^3 = m^2 + 2019m = m + 2019 + 2019m = 2020m + 2019$ ，∴ 可得 $m^3 + 2020n - 2019 = 2020m + 2019 + 2020n - 2019 = 2020(m+n)$ ，∵ m, n 是方程 $x^2 - x - 2019 = 0$ 的两实数根，∴ $m+n=1$ ，∴ $m^3 + 2020n - 2019 = 2020$. 故答案为 2020.

22. 【答案】 $a+b=c$. ∵ $2^a=5$, $2^b=10$, ∴ $2^a \cdot 2^b=50$, ∴ $2^{a+b}=50$, ∵ $2^c=50$, ∴ $a+b=c$, 故答案为: $a+b=c$.

23. 【答案】 $\frac{15}{2}$. 解析：连接 BE，设 $AC=a$ ，∵ AB 是 ⊙O 的直径，∴ $\angle ACB=90^\circ$ ，∵ $\angle ABC=30^\circ$ ，∴ $AB=2AC=2a$ ，由勾股定理得， $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{3}a$ ，∵ CE 平分 $\angle ACB$ ，∴ $AE=BE$ ，∴ $AE=BE$ ，∴ $\triangle AEB$ 为等腰直角三角形，∴ $AE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}a$ ，∵ $\angle AEC=\angle ABC$ ， $\angle ADE=\angle CDB$ ，∴ $\triangle ADE \sim \triangle CDB$ ，∴ $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CDB}} = \left(\frac{AE}{BC}\right)^2$ ，即 $\frac{5}{S_{\triangle CDB}} = \frac{2}{3}$ ，解得， $S_{\triangle CDB} = \frac{15}{2}$ ，故答案为: $\frac{15}{2}$.



24. 【答案】②③④. 解析：抛物线的对称轴位于 y 轴左侧，则 a, b 同号，即 $ab > 0$ ，抛物线与 y 轴交于正半轴，则 $c > 0$ ，所以 $abc > 0$ ，故①错误；如图所示，当 $x=1$ 时， $y < 0$ ，所以 $a+b+c < 0$ ，故②正确；∵ 对称轴 $x = -\frac{1}{3} = -\frac{b}{2a}$ ，∴ $3b = 2a$ ，则 $a = \frac{3}{2}b$ ，如图所示，当 $x=-1$ 时， $y = a - b + c > 0$ ，∴ $\frac{3}{2}b - b + c > 0$ ，∴ $b + 2c > 0$ ，故③、④正确；如图所示，当 $x=-1$ 时， $y = a - b + c > 0$ ，故⑤错误；综上所述，正确的结论是：②③④. 故答案是：②③④.

25. 【答案】 $\frac{4035}{64}$ (或 $63\frac{3}{64}$). 解析：∵ $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ， $\frac{63 \times 64}{2} + 3 = 2019$ ，

∴ 2019 个数里面包含：1 个 1，2 个 $\frac{1}{2}$ ，3 个 $\frac{1}{3}$ ，...，63 个 $\frac{1}{63}$ ，3 个 $\frac{1}{64}$ ，

∴ $S_{2019} = 1 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \dots + 63 \times \frac{1}{63} + 3 \times \frac{1}{64} = 63\frac{3}{64}$. 故答案是: $\frac{4035}{64}$ (或 $63\frac{3}{64}$).

26. 【答案】 $2\sqrt{3}$. 解析：由题意结合平行四边形的性质和向量的运算法则有： $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$ ，结合题意可得 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + 4 = 2 \times (4 + 4)$ ，解得： $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{3}$.

27. 【答案】2. 解析： $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数，
可得 $f(-x) = -f(x)$ ， $f(1-x) = f(1+x)$ 即有 $f(x+2) = f(-x)$ ，
即 $f(x+2) = -f(x)$ ，进而得到 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，
 $f(x)$ 为周期为 4 的函数，

若 $f(1) = 2$ ，可得 $f(3) = f(-1) = -f(1) = -2$ ，

$$f(2) = f(0) = 0, f(4) = f(0) = 0,$$

$$\text{则 } f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2 + 0 - 2 + 0 = 0,$$

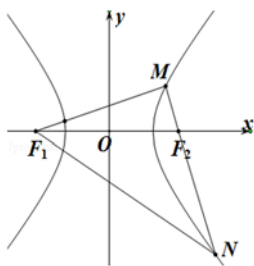
$$\text{可得 } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2018)$$

$$= 504 \times 0 + 2 + 0 = 2. \text{ 故填: } 2.$$

28. 【答案】21. 解析: 把 6 根电线杆放好, 7 个空, 选择两个放入需要移除的电线杆, 这样这两根需要移除的电线杆中间至少有一根, 然后再把余下一根放到这两根中间去, 所以有 $C_7^2 = 21$ 种方法, 故答案为 21.

29. 【答案】-1. 解析: 展开式中含 x^3 的项为 $C_5^2 1^2 \cdot (-ax)^3 \cdot (x^2)^0 + C_5^3 C_2^1 1^3 \cdot (-ax)^1 \cdot (x^2)^1 = (-10a^3 - 20a)x^3$, 所以 $-10a^3 - 20a = 30$, $a^3 + 2a + 3 = 0$, $(a^2 - a + 3)(a + 1) = 0$, 所以 $a = -1$. 故答案为: -1.

30. 【答案】24. 解析: 设 $|MF_1| = m$, $|MF_2| = n$, $\because F_1, F_2$ 分别为双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的左、右焦点, $\therefore m - n = 2a = 4$, $|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{10}$, $\because \vec{MF_1} \cdot \vec{MF_2} = 0$, $\therefore \vec{MF_1} \perp \vec{MF_2}$, \therefore 可以得大 $m^2 + n^2 = 4c^2 = 40$, $\therefore (m - n)^2 = m^2 + n^2 - 2mn$, 即 $2mn = 40 - 16 = 24$, $\therefore mn = 12$, 解得 $m = 6$, $n = 2$, 设 $|NF_2| = t$, 则 $|NF_1| = 2a + t = 4 + t$, 在 $Rt\triangle MF_1N$ 中可得 $(4 + t)^2 = (t + 2)^2 + 6^2$, 解得 $t = 6$, $\therefore |MN| = 6 + 2 = 8$, $\therefore \triangle MF_1N$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |MN| \cdot |MF_1| = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$, 故答案为 24.



三、解答题 (共 6 题, 共 40 分)

31. 【答案】(1) $y = 5t + 100$; (2) 前 60 天利润最大, 最大利润为 3200 元; (3) n 的取值范围为 $1.9 \leq n < 5$. 解析:

(1) 设 $y = kt + b$, 把 $t = 1, y = 105$; $t = 10, y = 150$ 代入得到: $\begin{cases} k + b = 105 \\ 10k + b = 150 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} k = 5 \\ b = 100 \end{cases}$, $\therefore y = 5t + 100$;

(2) 设第 x 天的销售利润为 w 元.

当 $1 \leq t \leq 40$ 时, 由题意 $w = (12 - 2)(5t + 100) = 50t + 1000$;

当 $t = 40$ 时 w 最大值为 3000 元;

当 $41 \leq t \leq 90$ 时, $w = (5t + 100)(-\frac{1}{10}t + 16 - 2) = -\frac{1}{2}t^2 + 60t + 1400$,

\because 对称轴 $t = 60$, $a = -\frac{1}{2} < 0$,

\therefore 在对称轴左侧 w 随 x 增大而增大,

$\therefore t = 60$ 时, w 最大值 = 3200,

综上所述前 60 天利润最大，最大利润为 3200 元。

(3) 设每天扣除捐赠后的日销售利润为 m 元。

$$\text{由题意 } m = (5t+100) \left(-\frac{1}{10}t+16-2 \right) - (5t+100)n = -\frac{1}{2}t^2 + (60-5n)t + 1400 - 100n,$$

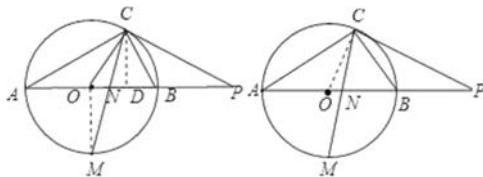
\therefore 在后 50 天中，每天扣除捐赠后的日销售利润随时间 t 的增大而减少， $\therefore 49.5 \leq 60-5n < 50.5$,

$\therefore 1.9 < n \leq 2.1$ 。又 $\therefore n < 5$ ， $\therefore n$ 的取值范围为 $1.9 \leq n < 5$ 。

32. 【答案】(1) 证明见解析；(2) $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 。解析：

(1) 证明：连接 OC ， $\therefore OA=OC$ ， $\therefore \angle A=\angle ACO$ ， $\therefore AC=PC$ ， $\therefore \angle A=\angle P$ ， $\therefore \angle PCB=\angle P$ ， $\therefore \angle ACO=\angle PCB$ ，又 $\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径， $\therefore \angle ACB=90^\circ$ ，即 $\angle ACO+\angle OCB=90^\circ$ ， $\therefore \angle PCB+\angle OCB=90^\circ$ ，即 $\angle PCO=90^\circ$ ， $\therefore OC \perp PC$ ， $\therefore OC$ 是 $\odot O$ 的半径， $\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 连接 OM 、 OC 。过点 C 作 $CD \perp OB$ 于点 D 。 \therefore 直径 $AB=4$ ， $\therefore OB=OM=2$ ，由 (1) 得， $\angle ACO=\angle PCB$ ， $\angle A=\angle P$ ， $\therefore \angle ACO=\angle PCB$ ， $AC=PC$ ， $\angle A=\angle P$ ， $\therefore \triangle AOC \cong \triangle PBC$ (ASA)， $\therefore OC=BC$ ， $\therefore OB=OC$ ， $\therefore \triangle OCB$ 是等边三角形， $\therefore \angle CBD=60^\circ$ ， $\therefore CD \perp OB$ ， $\therefore OD=BD=1$ ， $CD=\sqrt{3}$ ， $\angle CDN=90^\circ$ ， \therefore 点 M 为 AB 的中点， OM 为 $\odot O$ 的半径， $\therefore OM \perp AB$ ， $\therefore \angle MON=90^\circ$ ， $\therefore \angle MON=\angle CDN=90^\circ$ ， $\therefore \angle ONM=\angle DNM$ ， $\therefore \triangle ONM \sim \triangle DNC$ ， $\therefore \frac{OM}{CD} = \frac{ON}{DN}$ ， $\therefore \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1-DN}{DN}$ ， $\therefore DN=2\sqrt{3}-3$ ，由勾股定理得， $CD^2+DN^2=CN^2$ ， $\therefore (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3}-3)^2 = CN^2$ ， $\therefore CN=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 。



33. 【答案】(1) $b=2$ ； $D(1, -4)$ 。(2) 点 P 的坐标 $(0, 0)$ $(9, 0)$ 。解析：

(1) 把 $A(-1, 0)$ 代入 $y=x^2-bx-3$ ，得 $1+b-3=0$ ，解得 $b=2$ 。 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ ， \therefore 可得 $D(1, -4)$ 。

(2) 如图，当 $y=0$ 时， $x^2-2x-3=0$ ，

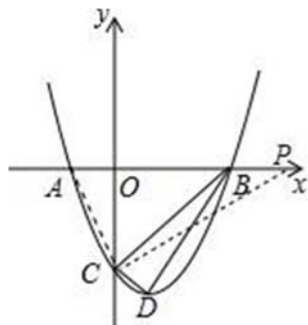
解得 $x_1=-1$ ， $x_2=3$ ，即 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $D(1, -4)$ 。

由勾股定理，得 $BC^2=18$ ， $CD^2=1+1=2$ ， $BD^2=2^2+16=20$ ， $BC^2+CD^2=BD^2$ ， $\angle BCD=90^\circ$ ，

①当 $\triangle APC \sim \triangle DCB$ 时， $\frac{AP}{CD} = \frac{CP}{BC}$ ，即 $\frac{AP}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ，解得 $AP=1$ ，即 $P(0, 0)$ 。

②当 $\triangle ACP \sim \triangle DCB$ 时， $\frac{AP}{BD} = \frac{AC}{CD}$ ，即 $\frac{AP}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$ ，解得 $AP=10$ ，即 $P'(9, 0)$ 。

综上所述：点 P 的坐标 $(0, 0)$ $(9, 0)$ 。



34. 【答案】(1) $[k\pi + \frac{5}{12}\pi, k\pi + \frac{11}{12}\pi] (k \in \mathbb{Z})$; (2) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 解析:

(1) 由题 $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x - 2\cos x \sin x = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = -2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 得 $k\pi + \frac{5}{12}\pi \leq x \leq k\pi + \frac{11}{12}\pi$, 即函数 $f(x)$ 的增区间为 $[k\pi + \frac{5}{12}\pi, k\pi + \frac{11}{12}\pi] (k \in \mathbb{Z})$.

(2) $f(A) = -\sqrt{3}$, $\sin(2A - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\because 0 < A < \frac{\pi}{2}, \therefore -\frac{\pi}{3} < 2A - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}, \therefore 2A - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \therefore A = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore \frac{1}{2} \times a \times h = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} \therefore h = bc \times \frac{\sqrt{3}}{6}$, 由余弦定理知 $9 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3}$, 得 $b^2 + c^2 - bc = 9 \geq 2bc - bc$, 当且仅当 $b=c$, “=” 成立, 故 $bc \leq 9, \therefore h \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 此时 $b=c=3$, 所以 BC 边的最大值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

35. 【答案】(1) 详见解析; (2) $\frac{3}{5}$.

解析: (1) 连接 ED 交 AC 于点 O, 连接 OF, 由四边形 ABCD 为菱形, F 为 B_1D 的中点得, $OF \parallel B_1E$, $B_1E \notin$ 平面 ACF, 所以 $B_1E \parallel$ 平面 ACF.

(2) 由第 (I) 小题可知得, 以 MD、MA、 MB_1 , 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 (如图).

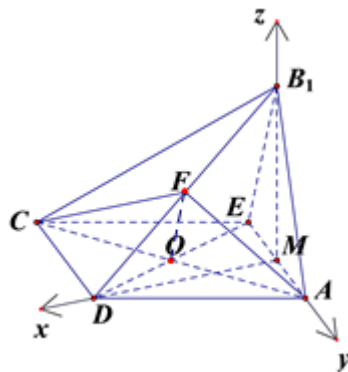
则 $A(0, \frac{a}{2}, 0)$, $D(\frac{\sqrt{3}a}{2}, 0, 0)$, $B_1(0, 0, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, $C(\frac{\sqrt{3}a}{2}, -a, 0)$, $E(0, -\frac{a}{2}, 0)$,

$\overrightarrow{EC} = (\frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{a}{2}, 0)$, $\overrightarrow{EB_1} = (0, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, $\overrightarrow{AD} = (\frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{a}{2}, 0)$, $\overrightarrow{AB_1} = (0, -\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, 设平面 ADB_1 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}a}{2}x - \frac{a}{2}y = 0 \\ -\frac{a}{2}y + \frac{\sqrt{3}a}{2}z = 0 \end{cases}$, 令 $y = 1$, 解得 $\vec{m} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3})$,

同理平面 ECB_1 的法向量 $\vec{n} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{5}$,

故平面 ADB_1 与平面 ECB_1 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3}{5}$.



36. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($x \neq \pm 2$); (2) $x \pm y - 1 = 0$. 解析:

(1) \because 动点 E 到点 $A(2, 0)$ 与点 $B(-2, 0)$ 的直线斜率之积为 $-\frac{1}{4}$, $\therefore \frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{4}$ ($x \neq \pm 2$).

化为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($x \neq \pm 2$), 即为点 E 的轨迹曲线 C 的方程.

(2) 当 $l \perp x$ 轴时, l 的方程为: $x = 1$, 代入: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 解得 $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \neq -\frac{3}{5}$. 不符合题意, 舍去.

当 l 与 x 轴不垂直时,

设 l 的方程为: $y = k(x - 1)$ ($k \neq 0$), 代入: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 化为: $(1 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$, $\Delta > 0$.

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$. 则: $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4k^2-4}{1+4k^2}$, $\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 +$

$k^2(x_1 - 1)(x_2 - 1) = (1 + k^2)x_1x_2 - k^2(x_1 + x_2) + k^2 = \frac{k^2-4}{1+4k^2} = -\frac{3}{5}$, 解得 $k = \pm 1$.

\therefore 直线 l 的方程 $x \pm y - 1 = 0$.