Lista 5. Proces Poissona

5.1 Teoria - dodatek

Definicja Niech N_t będzie procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Kompensowanym procesem Poissona nazywamy proces $\widetilde{N}_t = N_t - \lambda t$.

5.2 Zadania na laboratoria

Zadanie 1 Zaimplementuj generowanie próby trajektorii procesu Poissona na odcinku $[0, T]$ opierając się na znajomości rozkładu jego czasów oczekiwania.

1. Narysuj jego trajektorie.
2. Napisz algorytm obliczający wartości N_t, zweryfikuj, czy ma poprawny rozkład.

Zadanie 2 Zaimplementuj funkcję generującą trajektorie kompensowanego procesu Poissona.

5.2.1 Metody generowania

Metoda 1 Zaimplementujemy metodę generowania czasów oczekiwania na kolejny skok. Oznaczenia:

- I - liczba skoków $N(t)$ na $[0, T]$,
- $S_1, \ldots, S_I$ - momenty skoków,
- t - suma czasów oczekiwania T_i.

1. Podstaw $I = 0, t = 0$.
2. Generuj U z rozkładu $U(0, 1)$.
3. Wstaw $t = t - \frac{1}{\lambda} \log U$. Jeśli $t > T$, to koniec, w przeciwnym przypadku przejdź do 4.
4. Wstaw $I = I + 1, S_I = t$.
5. Wróć do 2.

Metoda 2 Druga metoda generowania procesu Poissona polega na generowaniu momentów skoku.

1. Generuj $n \sim \text{Poisson}(\lambda T)$.
2. Jeśli $n = 0$, to koniec (brak skoków).
3. Generuj $U_1, \ldots, U_n$ - i.i.d., $U_i \sim U(0, T)$.
4. Sortuj $(U_1, \ldots, U_n)$ aby otrzymać $(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n})$.
5. Wstaw $S_i = U_{i:n}$ (statystyki pozycyjne), $i = 1, \ldots, n$.

5.3 Zadanie dodatkowe

Alternatywne metody generowania zmiennych poissonowskich.

Twierdzenie Jeśli U_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U(0, 1)$, to zmienna losowa $X = \max\{n : \prod_{j=1}^{n} U_j > e^{-\lambda}\}$ ma rozkład Poissona z parametrem λ.

Pseudokod do generowania zmiennych losowych z rozkładu Poissona dla niewielkich $\lambda > 0$.

1. Ustaw $n = 1, a = 1$.
2. Wygeneruj $U \sim U(0, 1)$ i ustaw $a = a * U$.
3. Jeśli $a \geq e^{-\lambda}$, ustaw $n = n + 1$ i wróć do 2.
4. W przeciwnym wypadku zwróć $X = n - 1$.

Powyższy pseudokod z oczywistych względów nie działa szybko dla dużych $\lambda > 0$. W takim wypadku stosujemy następujący algorytm.

1. Ustaw $m = floor((7/8)\lambda)$.
2. Generuj $Y \sim \text{Gamma}(m, 1)$.
3. Jeśli $Y \leq \lambda$, to generuj za pomocą poprzedniego algorytmu Z z rozkładu Poissona z parametrem $\lambda - Y$ i ustaw $X = m + Z$.
4. W przeciwnym wypadku generuj X z rozkładu dwumianowego $\text{Bin}(m-1, \lambda/Y)$.

Zadanie dodatkowe Za pomoca jednej z poznanych metod zaimplementuj generator liczb losowych z rozkładu Poissona.