范函基础.

① 向量空间：集合S对加法和数乘封闭，则S就是向量空间.

② 赋范向量空间：

对向量空间向量集合S中的每个$\vec{v}$向量定义$\|\cdot\|$映射 $S\to R$

$\|\cdot\|$叫范数. 满足

1. $\|\vec{v}\|\geq 0$ 2. $\|\vec{v}\|=0 \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$

3. $\|a\vec{v}\| = |a|\,\|\vec{v}\|$

4. $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

③ 内积空间. 定义满足如下条件的 $S\times S \to R$ 的映射叫内积，内积记作$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$

1. $\langle\vec{x}\cdot\vec{y}\rangle=\langle\vec{y}\cdot\vec{x}\rangle$

2. $\langle a\vec{x}\cdot\vec{y}\rangle = a\langle\vec{x}\cdot\vec{y}\rangle$ $\langle\vec{x}+\vec{z},\vec{y}\rangle=\langle\vec{x},\vec{y}\rangle+\langle\vec{z},\vec{y}\rangle$

3. $\langle\vec{x}\cdot\vec{x}\rangle\geq 0$ ，$\langle\vec{x}\cdot\vec{x}\rangle=0$ 当且仅当 $\vec{x}=\vec{0}$.

▲ 可以用$\sqrt{\langle\vec{x}\cdot\vec{x}\rangle}$ 来导出$\|\vec{x}\|$，这叫"诱导"

证明：范数中的性质1 可以用内积的性质3得到

范数中的性质2 可以用内积的性质3得到

范数中的性质3 可以用内积的性质2得到

即 $\|a\vec{x}\|=\sqrt{\langle a\vec{x},a\vec{x}\rangle} = \sqrt{a^2}\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = |a|\|\vec{x}\|$

范数中的性质4 如果可以证明

$\langle\vec{x}\cdot\vec{y}\rangle^2 \leq \langle\vec{x}\cdot\vec{x}\rangle\langle\vec{y}\cdot\vec{y}\rangle$ 则性质4易证.

下面证明 施瓦茨不等式$\langle\vec{x}\cdot\vec{y}\rangle^2 \leq\langle\vec{x}\cdot\vec{x}\rangle\langle\vec{y}\cdot\vec{y}\rangle$