证：考虑内积 $\langle \vec{x}-\lambda\vec{y},\ \vec{x}-\lambda\vec{y}\rangle$.

原式 $= \langle \vec{x},\vec{x}\rangle - 2\lambda\langle \vec{x}.\vec{y}\rangle + \lambda^2\langle \vec{y},\vec{y}\rangle$

由于内积 ≥ 0

$\therefore \langle \vec{x}.\vec{x}\rangle - 2\lambda\langle \vec{x}.\vec{y}\rangle + \lambda^2\langle \vec{y}.\vec{y}\rangle \geq 0$

(1) 当 $\langle \vec{y}.\vec{y}\rangle = 0$ 时. $\vec{y}=\vec{0}$，$\langle \vec{x}.\vec{y}\rangle = 0$ 上式成立.

$\langle \vec{x}.\vec{y}\rangle^2 = 0 = \langle \vec{x},\vec{x}\rangle\langle \vec{y}.\vec{y}\rangle$

(2) 当 $\langle \vec{y}.\vec{y}\rangle > 0$ 时. 为了使 $\forall\lambda\in R$，$\langle \vec{x}.\vec{x}\rangle - 2\lambda\langle \vec{x}.\vec{y}\rangle + \lambda^2\langle \vec{y}.\vec{y}\rangle \geq 0$

则 $\Delta = (-2\langle \vec{x}.\vec{y}\rangle)^2 - 4\langle \vec{x}.\vec{x}\rangle\langle \vec{y}.\vec{y}\rangle \leq 0$

$\therefore \langle \vec{x}.\vec{y}\rangle^2 \leq \langle \vec{x}.\vec{x}\rangle\langle \vec{y}.\vec{y}\rangle$

④ 完备：在S这个赋范向量空间上，取出向量组成的 Cauchy 数列都收敛.
则这个赋范向量空间是完备的
形象地说就是这个赋范向量空间上没有孔洞.

⑤ 巴拿赫空间与希尔伯特空间.

赋范向量空间完备化就是巴拿赫空间.

用内积空间诱导成的赋范向量空间完备化后是希尔伯特空间.