

如何找到这个平面，即这个平面要满足的条件是：

$$(1) \quad \begin{aligned} & \max_{\vec{w}, b} \quad r \\ & \text{s.t.} \quad \frac{(\vec{w}^T \vec{x}_i + b) y_i}{\|\vec{w}\|} \geq r \quad (\vec{x}_i, y_i) \in D \end{aligned}$$

即这个平面让对得最勉强(或错得最离谱)的样本点的几何间隔最大

(2) 上式可以等价于：

$$\begin{aligned} & \max_{\vec{w}, b} \quad \frac{\hat{r}}{\|\vec{w}\|} \\ & \text{s.t.} \quad \frac{(\vec{w}^T \vec{x}_i + b) y_i}{\|\vec{w}\|} \geq \frac{\hat{r}}{\|\vec{w}\|} \quad (\vec{x}_i, y_i) \in D \end{aligned}$$

\hat{r} 是函数间隔，函数间隔中 \vec{w} 和 b 等比例的缩放不会影响超平面位置，所以让

\vec{w} 和 b 等比例的缩放直到 $\hat{r}=1$ 然后令 $\max_{\vec{w}, b} \frac{\hat{r}}{\|\vec{w}\|} \Leftrightarrow \min_{\vec{w}, b} \frac{1}{2} \|\vec{w}\|^2$ ，则得到

$$(3) \quad \begin{aligned} & \min_{\vec{w}, b} \quad \frac{1}{2} \|\vec{w}\|^2 \\ & \text{s.t.} \quad (\vec{w}^T \vec{x}_i + b) y_i - 1 \geq 0 \quad (\vec{x}_i, y_i) \in D \end{aligned}$$

(3) 对应的 Lagrange 函数：

$$L(\vec{w}, b, \vec{\alpha}) = \frac{1}{2} \|\vec{w}\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_i (1 - y_i (\vec{w}^T \vec{x}_i + b))$$