②用 lagrange 对偶解线性可分SVM

$$L(\vec{w}, b, \vec{\alpha}) = \frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (1 - y_i(\vec{w}^T \vec{x_i} + b))$$ 满足强对偶性

primal: $\min\limits_{\vec{w}, b} \max\limits_{\vec{\alpha}} L(\vec{w}, b, \vec{\alpha})$ = Dual: $\max\limits_{\vec{\alpha}} \min\limits_{\vec{w}, b} L(\vec{w}, b, \vec{\alpha})$

由于Dual一定时凸优化问题，所以把 primal 转化为Dual求解.

先求 $\min\limits_{\vec{w}, b} L(\vec{w}, b, \vec{\alpha})$: 对 $\vec{w}$, b 求偏导为 $\vec{0}$

$$\begin{cases} \vec{w} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i \vec{x_i} = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0 \end{cases}$$

把上面二式代入 $L(\vec{w}, b, \vec{\alpha})$ 得.

$$\min_{\vec{w}, b} L(\vec{w}, b, \vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \langle \vec{x_i}, \vec{x_j} \rangle$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0 \quad \alpha_i \geq 0$$

∴ Dual 问题可以化为下面形式

$$\begin{cases} \min\limits_{\vec{\alpha}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \langle \vec{x_i}, \vec{x_j} \rangle - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \\ \text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0 \quad \alpha_i \geq 0 \end{cases}$$

这是一个凸优化问题. 可以用内点法进行求解（详见凸优化部分）

然后 $\vec{w} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i \vec{x_i}$ ，根据(3)得到的KKT对偶互补条件计算b.