证明3：① $f*f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\alpha_j k(\vec{x_i}\ \vec{x_j}) = \vec{\alpha}^T K_{m\times m}\vec{\alpha}$

由于 $K_{m\times m}$ 矩阵半正定 ∴ $f*f\geq 0$

② 如果 $\vec{f}=\vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\alpha_i k(\cdot,\vec{x_i})=\vec{0}$

∴ $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i k(\cdot,\vec{x_i})$ 中的每个分量 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i k(\vec{x_j},\vec{x_i})=0$

∴ $f*f=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\sum_{i=1}^{m}\alpha_i k(\vec{x_j}\ \vec{x_i})=0$

如果 $f*f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\alpha_j k(\vec{x_i}\ \vec{x_j})=0$

先证 $|f*g|^2\leq(f*f)(g*g)$ 这个施瓦茨不等式：

▲构造关于λ的不等式 $(f+\lambda g)*(f+\lambda g)\geq 0$ 恒成立，通过 $\Delta\leq 0$ 得证施瓦茨不等式

然后，构造 $f(\vec{x})=k(\cdot,\vec{x})*f(\cdot)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i k(\vec{x},\vec{x_i})$

即 $f(\vec{x})$ 是 $f(\cdot)$ 这个无穷维向量的任意一个分量

$$(f(\vec{x}))^2=(k(\cdot,\vec{x})*f(\cdot))^2 \underset{\text{施瓦茨不等式}}{\leq} (k(\cdot,\vec{x})*k(\cdot,\vec{x}))(f*f)=k(\vec{x},\vec{x})(f*f)$$

如果 $f*f=0$ 则 $|f(\vec{x})|=0$ 即 $f(\cdot)$ 的任意一个分量为0

∴ $f(\cdot)=\vec{0}$

这样S构成了一个内积空间，*可以用内积运算代替。

④ 把S完备化，就得到了希尔伯特空间。由于 $k(\cdot\ \vec{x})*f(\cdot)=f(\vec{x})$，也叫再生核希尔伯特空间