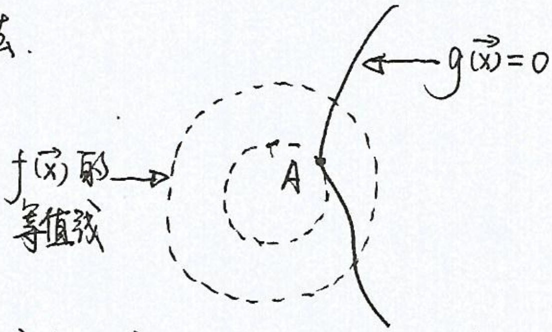
凸优化相关算法

① 等式约束的 Lagrange 乘数法.

$$\min_{\vec{x}} f(\vec{x})$$

$$\text{s.t} \quad g(\vec{x}) = 0$$

$f(\vec{x})$ 是凸函数.



可以从图看出，在 $f(\vec{x})$ 的等值线与 $g(\vec{x})=0$ 相切处 A 点，得到极小值（最小值）

最小点 A 处的座标 $\vec{x}^*$ 一定满足向量

▲ $\nabla g(\vec{x}^*)$ 与 $\nabla f(\vec{x}^*)$ 方向相同或者相反

$\nabla g(\vec{x}^*)$ 是 $g(x)=0$ 在 $\vec{x}^*$ 处的法向量

$\nabla f(\vec{x}^*)$ 是 $f(x)$ 的梯度向量，也就是 $f(x)$ 等值线的法向量.

∴ 只要~~满足~~ $\vec{x}^*$ 满足 $\lambda \nabla g(\vec{x}^*) + \nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$ $(\lambda \neq 0)$，则等式约束最优化达成.

▲ 引入拉格朗日函数. $L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{x}} L(\vec{x}, \lambda) = \lambda \nabla g(\vec{x}^*) + \nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0} \\ \nabla_{\lambda} L(\vec{x}, \lambda) = g(\vec{x}^*) = 0 \end{cases}$$

解以上的方程从而得到等式约束的最小值.