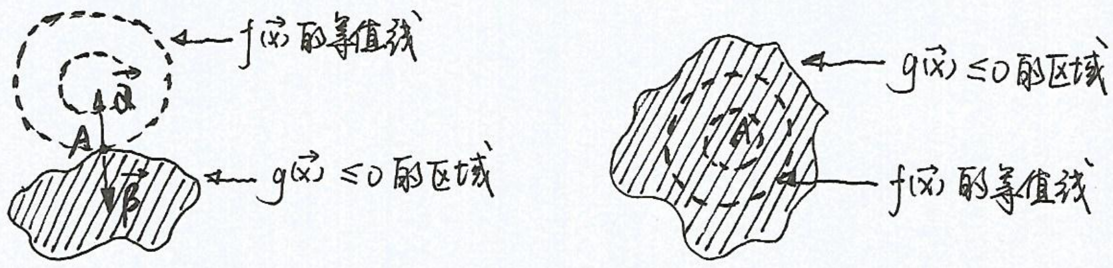
② 不等式约束的 Lagrange 乘数法

$$\min_{x} f(\vec{x}) \qquad f(\vec{x})\text{ 依然是一个凸函数.}$$
$$s.t\ \ g(\vec{x}) \le 0$$

在约束条件下的最小点 $\vec{x}^*$ 可以有两种情况

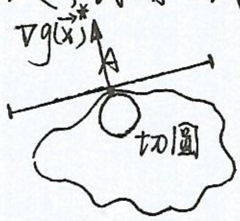


(1) (2)

情况(1) 使最小点 A (座标为 $\vec{x}^*$) 一定出现在 $g(\vec{x})=0$, 即不等约束的边界上。

$\vec{\alpha} = \nabla g(\vec{x}^*)$ ∴ 对于封闭曲线 (不封闭的曲线可以填补成封闭曲线)

$\nabla g(\vec{x}^*)$ 的方向与在 A 点处, 封闭曲线内作一个切圆的法向量相同, 朝向封闭区域外



而 $\vec{\beta} = \nabla f(\vec{x}^*)$, 总是朝 $f(\vec{x})$ 上升的方向, $f(x)$ 是一个凸函数.

∴ $\nabla f(\vec{x}^*)$ 和 $\nabla g(\vec{x}^*)$ 反向

即情况(1) 满足
$$\begin{cases} \nabla f(\vec{x}^*) + \lambda \nabla g(\vec{x}^*) = \vec{0} \\ \lambda > 0 \\ g(\vec{x}^*) = 0 \end{cases}$$

情况(2) 满足
$$\begin{cases} \nabla f(\vec{x}^*) + \lambda \nabla g(\vec{x}^*) = \vec{0} \\ \lambda = 0 \\ g(\vec{x}^*) < 0 \end{cases}$$