

硕 士 研 究 生 读 书 报 告



题目 计算机图形学的数学

作者姓名 姚 苒

作者学号 21551045

指导教师 李启雷

学科专业 软件工程

所在学院 软件学院

提交日期 二○一五年十二月

The mathematics of computer graphics

A Dissertation Submitted to

Zhejiang University

in partial fulfillment of the requirements for

the degree of

Master of Engineering

Major Subject: Software Engineering

Advisor: Li Qilei

By

Yao Ran

Zhejiang University, P.R. China

2015

摘要

直至今日，计算机图形学的专家们对将数学应用在计算机图形学上的研究依然很少。计算通常只是用作评估算法的一个简单的工具，因此正规的计算机图形学方面的书对此介绍的很少。现在这些情况正在发生改变，如几何计算开始被有效应用在图形学上，因为渲染和表现的力量能够使模型构造表现的更精确和清楚。传统的图像处理方面，如采样，走样，傅立叶变换，卷积和基本的系统理论都应用在计算机图形领域。现在，微分和代数几何、分形数学，曲线的定义，动态的领域，和形状变形等领域都在计算机图形学上相互交叠和联系以及发展。这些再加上诸如管线转换、图形语言和接口设计、并行应用程序这些规范的方法，图形产生的过程和效果将会大大提高。本文将对计算机图形学与数学和数值分析的联系以及未来预期发展的各个方面展开介绍。

**关键词**：计算机、图形学、数学、建模、几何学

Abstract

Until relatively recently, researchers in computer graphics paid scant attention to the mathematics of their computations. Calculation usually only is used as a simple tool for evaluation algorithm, so books of computer graphics describe little about it. This is now changing, geometric computations must be performed more accurately (in some sense) since the power of rendering and presentation now enables model construction to be more clearly seen. The traditional image processing, such as sampling, aliasing, Fourier transform, convolution and basic systems theory are applied in the field of computer graphics. Now, the fields such as differential and algebraic geometry, fractal mathematics, the definition of the curve, dynamic field, and shape deformation are overlapping and interacting as well as developing on computer graphics. These coupled with the method of converting, graphics language, interface design, and interface design, parallel application program, the process and effect of graphics will be greatly improved. This paper reviews the aspects of mathematics and numerical analysis of relevance to computer graphics and the anticipated developments in the future.

**Keywords：**computer, graphics, mathematics, modelling, geometry

**1.绪论**

**1.1介绍**

直到最近，在计算机图形学方面的研究人员对其计算的数字付出了少量的注意力。计算被用作一个简单的工具，以评估算法或将数据转换成一些适当的绘画作品。因此，标准的计算机图形文本对数值方法没什么可说的，正像早期的数值分析的教科书对计算机图形学也没什么可说的。现在这种情况正在发生变化，这也是为什么写这篇文的重要原因。

迄今计算机图形和数值方法之间关联很少，除了标准的'数学'方面。一些重要的因素正在扭转这一趋势。几何计算必须更加准确的进行（在某种意义上），因为现在渲染和表现的力量使模型构造更清楚的被显示出来。计算机图形和图像处理技术能够靠拢在一起，是并行处理架构，硅编译和执行，晶片机，和其他引擎发展的结果。因此，传统的图像处理方面，如采样，走样，傅立叶变换，卷积和基本的系统理论都在计算机图形领域发展着他们的相关因素。最后，微分和代数几何，分形数学，曲线的定义，动态，和形状变形这些领域在未来相互交叠和联系，是由于这些技术（通常起源于更多的“古典”领域）在计算机图形专业领域的发展。

本增效将对无论是在硬件或软件上应用的图形处理产生一个额外的严格的定义和执行， 使数字和图片相互耦合和互利互惠产生重大改变。这反过来将使得下一代图形处理器在严谨和一致的基础上进行设计。当这再加上算法规范和执行上的管线转换，图形语言和接口设计和并行应用程序的规范的方法，我们对图片产生过程的理解将大大提高。本文对计算机图形学数学和数值分析的联系和未来预期发展的各个方面展开介绍。

**1.2调查背景**

在历史上一直存在着计算机图形学和数值方法以及几何学之间的重叠，是由于诸如以下几个方面的需求：

1. 用来表示点、线等的矩阵的操作。
2. 欧氏距离的计算如由点到线的单位法线和垂直线。
3. 平面交叉点和直线的计算。
4. 曲线和曲面的点的计算——为了将它们显示在某些显示装备上。
5. 制作显示在显示屏幕上的有效精确的图片，如离散网络或光栅。
6. 在批量设备上精确图片时防止舍入误差的积累。

此外，数值属性和方法的知识在以下几个方面是必不可少的：

1. 选择曲线或曲面的类型以最能代表所述系统或对象的物理特性。
2. 当限定点被变换或旋转时曲线或曲面的选择是不变（对形状的保存是必不可少的）。
3. 在计算表达式和函数时使用适当的方法，使得在使用的特定硬件上不会引起中间值上溢或者下溢。
4. 改变算法以产生更快的执行速度。
5. 生产可靠，精确的几何计算，以确保在各种情况下的一致性。

另一个有趣的领域是那些与文物（如锯齿或阶梯）相联系的领域，并往往产生于多种因素的组合。建立良好的技术的存在是为了消除那些异常。

本文并不是用来介绍关于标准数学的点、线、曲线和曲面的定义和用法。它们已经在相关书籍中被很好的介绍。

以下是关于基本建模和图像产生的相关操作的总结：

表现：确切的形式和使用的数值参数定义的对象必须是指定的。

建模：从设计人员所希望的形状的概念化上产生适当的数学参数必须是可能的。

转型：这些是基本的几何变换（缩放，旋转，平移和透视），它们由同样的4\*4矩阵表示。此操作通常是通过从那些转化矩阵的旧的表面和内容转换新的表面的数学参数来表示。

边界检测：仅由功能定义的表面有可能延伸到无限大。真正的对象通常是有边界的，必须确定一个点是在对象内还是对象外。

交点：必须可以找到当前表面与其他表面，线，和平面的交点。

表面法线：必须可以在任何所需的点计算出表面法线向量。

这在两个方面上是有用的：它可以用来定义表面的轮廓边界；当阴影图片被绘制时，它也是强度计算的主要组成部分。

**2.数学模型和表示**

作为数学中形状处理和空间关系的一个分支，几何一直是3D对象在计算机中处理的被关注的焦点。然而，在3维图形的基本问题之一是其中的对象表现的方法，这使得分析和渲染在有限时间是可行的。此外，这将是特别有用的，有一些广义的模型，可以安装不同的形状和组件，因为这些将更易于处理优雅的数学表示和操作。信息完整的陈述会使任何有明确几何性质的对象，或对象集合，可以自动计算。Requicha和Tilove（1978年），Requicha（1980年），以及Requicha和Voelcker（1982年，1983年）总结了一些早期的实体建模的方法。与现行利息计算几何造型方面的建模领域扩展；处理尺寸、公差和几何约束；快速编辑算法的研究；空目标和干扰检测；从一个代表变成另一个代表；几何算法复杂度分析；数值几何中的精度问题。

以分层结构的形式表示对象的理论是由Tilove (1981, 1984),Meagher (1982), Kedem and Ellis (1984), and Samet (1984)研究出来的。进一步的进展将记录在Samet(1985), Samet and Tamminen (1985), Nelson and Samet (1986), and Muuss (1987)。混合模式是需要的，以有效地满足建模和表现的所有要求。另外，作为显示结构的硬件的发展，数据结构和算法必须以这样的方式被映射，以充分利用新的发展的能力。

一个用来建模和形状展现的相关的方法，是由布雷迪（1981年，1984年A，B）从计算机视觉的角度来提出的。这更适用于视觉识别的问题，而不是计算机图形学，但自动机器人和组装厂需要知道如何处理形状并将它作为识别和操作过程的一部分。

作为表现、模型和图像之间的相互依赖性的例子，van Overveld (1987)考虑了下面的例子。当一个三维对象呈现为像素空间，所选择的方法取决于要呈现的对象的数学表示。如果这是一个多边形的列表，然后处理由光栅扫描转换为每个多边形，以便找到所有的像素的兴趣。如果它被表示为CSG树，那么它被适当的CSG基元解释和呈现。然而，同样的物体的边界表示（例如突出的关节）涉及了不同的策略，要求该CSG原语的交点的计算和利用直线或曲线的绘制算法来选择要强调的像素。但是没有保证这些像素与连接的位置重合，因为它们出现在图片中的初始位置。富兰克林（1986）指出，同样的问题时，不同的算法被用在同一画面产生丢失和虚假的像素，这是异常行为的迹象。所需要的是一个更一致的和统一的方法，基于一个严格的模型，具有统一的操作。

福雷斯特（1985）的另一个例子突出了复杂的场景，在评估看似简单的情况下，双线的交点。仔细注意数值细节是需要的，也保证了实际系统中几何运算的顺序的一致。混合不同类型的坐标系也可以是一个不平凡的情况；从一个映射到另一个需要详细考虑。例如,两个线段的端点之间的交集在整数网格可能不是可表示的浮点数系统,由于舍入或截断独特的浮点数必须一致。

一些可能的解决方法是标准化的浮点运算; 代数和象征性的操纵; 区间算术运算(例如Mudur Koparker 1984); 和合理的使用算术。然而,后者不能满足一般的点集。

考虑在生产自动化和制造业领域已经明确表示,它已不再足以使用精确的模型来表现对象。公差需要以一定的方式制定和代表。工艺规划的自动化机器人和机械工具,需要的不仅仅是静止的对象的描述——我们需要知道这些对象在空间中移动,而他们是在任何给定的时间点(卡梅隆1984)。这涉及到空间切削加工过程。在专门的应用，领域（如剪羊毛机和机械手），灵活的模型必须展现出来。一些更进一步的问题是处理的由对象的组件介绍的复杂性；物体性质如质量，表面纹理和外观的表示和解释；以及处理零件的运动、机械加工和装配的过程。最终目标之一是能够自动创建，分析，传输和管理的所有的产品定义，流程定义，以及相关的业务数据。

**3.欧氏几何**

在图形或几何环境数值计算的更一般的考虑是由达夫（1984年）给出的，包括订单收敛，设计查找表，功能评价，交集计算，样条插值和逼近。在计算欧氏距离的一个有趣的例子是引用摩尔和墨里森的（1983）。计算平方根的算法（A + B×B）需要一种快速、稳健、当计算一个中间值时不产生上溢或下溢，A或B，B。由摩尔和墨里森的方法算出的不会遇到这些问题，提供的结果是个范围。它具有立方收敛甚至可能比sqrt（a，b，b）计算的快。其结果是2次迭代后精确到6.5个数字，3次精确到20个数字，4次精确到62个数字。因此，正常使用将指定迭代的范围，并省略测试。Dubrelle(1983)分析了算法的几何,并概述了一组关于集合的任意大的规则的归纳。达夫（1984）估计，计算欧几里德距离90％的平方根应用在计算机图形应用程序。此外,大多数照明模型需要每个可见表面的每个单位像素都被计算出来。另一个例子，由Voider (1959)提出并由Turkowski (1982)描述的CORDIC旋转算法，可以用来计算2维旋转，直角坐标和极坐标到直角坐标的转换，欧几里德的点，点线和点的线段的距离，圆形和双曲三角函数，指数函数，对数，平方和根。定位非线性方程的零点是必需的，用于生产跟踪渲染的三维表面的光线。Blinn（1982）开发了一种混合的牛顿-拉夫逊/假位置迭代的方法来找到正确的根根据无论何时牛顿-拉夫逊都会时给予的正确的根的集合。

汉拉汉（1983）采用多元多项式函数的射线追踪的代数曲面，包括平面、曲面和环面。

介绍曲线的插补和逼近特别是关于计算机图形学方面的是由Brodlie（1985年）和Earnshaw（1985年）提出的。有很多的调查工作基于不同种类的花键的用途和应用（巴特尔斯1984年等;巴恩希尔和里森费尔德1974年;1987年巴斯基）。

**4.采样、卷积和傅里叶变换**

从图像处理的方法和技术，有越来越多的计算机图形学相关的两个领域靠拢在一起，通过对抽样的地区，类似的程序使用并行处理，实时图像制作、图形、文字识别、交互式CAD、机器人、人工智能和计算机视觉，和理论基础。

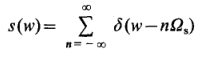
混叠来自不充分的采样的连续环境（图）与离散光栅网格（显示）。这导致粗糙度沿着线(也称为“阶梯效应”)。同样在时间域、时域混叠产生的物体移动很快就引起闪烁的动画序列对象的相机（波特1984）。基本的问题前者是扫描线到扫描线的变化，后者是帧到帧的变化。

两个定理与卷积和乘法在时间域和频率域阐述混叠的问题（Kajiya 1984a，b）。当一个输入信号进行采样，其值在一个等距的点集中代表完成信号。在离散的时间间隔采样一个输入信号s(t)，可以表示为一系列增量信号的乘法：



在这里T表示采样的区间。

一系列增量信号的傅里叶变换是一种具有不同间距的相似序列：



在这里Ωs表示采样率。

因此取样一个输入信号可以被建模为在时域中的卷积。这个卷积是一系列由Ωs分开的增量信号，导致了插入到频域的副本中的输入频率的拷贝，每一个集中在相应的增量信号的位置。这可能会导致这些副本重叠的区域产生混叠的现象。在空间域中这产生锯齿;在频域中它产生一组环绕包裹的频率，以产生不同的频率。对于没有发生混叠的原始频谱应该有没有频率超出了一个小范围围绕零（香采样定理）。

如果x(t)能够傅里叶转换为X(w)例如当|w|>Ωs/2时X(w)=0,那么x(t)可以由x=x(nT)决定。

这里T是一个采样区间。这使用的卷积和傅里叶变换特性。为了恢复原始信号，所有额外的拷贝都是由卷积与内核的输出抑制的：



这具有作为其付立叶变换为矩形函数，其中非零只存在于原始频谱的区域。



进一步的材料包含在Kajiya (1984), Oppenheim and Shafer (1975) and Pratt (1978)。

**5.更多主题**

**5.1基元变形**

巴尔（1981，1984a，b）概述了分层实体造型操作的扭转、弯曲、变细，压缩，和扩展的几何对象。在更简单的对象中的位置矢量和法向量来计算更复杂的形式的位置和法线向量。在变形层次中的每一个层次，需要一个额外的矩阵乘法的正常矢量计算。除了模拟杆或金属板的弯曲外，还可以使用诸如塑料、织物或橡胶等柔性物体的变形。

**5.2爱因斯坦求和符号**

巴尔（1984a，b）介绍利用爱因斯坦求和符号用于表达多维笛卡尔方程的速记方法。这种表示的优点包括易于长表达式的操纵，特别是用于交叉积，决定因素，旋转和矩阵逆。该公约的参考可以在描述张量分析和三维力学课本中找到（谢格尔1977; Solkolnikoff1956年）。

**5.3微分和代数几何**

相关计算机图形的微分几何方面涉及复写，微分形式，和联通。代数几何有助于齐次多项式，因数分解，消除和平面曲线的理论（1965年斯皮瓦克，1975年，1984年Kajiya;哈茨霍恩1977年）。

**5.4动力学和运动**

经典牛顿力学可以提供对象的动画的依据。有许多文本总结这些方面的计算物理（Courant and Hilbert 1962; Arnold 1975; Goldstein 1980）。

**5.5人机界面建模**

图形通常是人与机器之间的接口的一个组成部分。计算机的有效利用率将越来越依赖于更严格的定量评估人机界面特性（纽曼1987）。这反过来将受益于所述接口过程的建模; 关于对特定应用的输入工具的选择是否恰当的研究; 以及方法的结构，用于指定的接口的设计（普里斯等人1987;普法夫1985）。

**5.6分形数学**

在明显混乱的框架中发现有序是本质调查的目的之一，也是使用模型、理论和数学结构的表现。有趣的是，这里出现了一个在本质的微分析和全局的宏观外形和表现的对称。这可能是巧合，但它更可能反映了自然的深层结构和支配其组成部分的关系的法律。宏观结构和外观的例子有树木,云彩,海岸线,河流,山脉,风景——显然是随机的,但事实上封装秩序的基本原则可以用简单的数学表述。然而,为此欧几里得几何是不够的;分形几何(曼德布洛特1977、1983)提供了一个表现自然界的形状以及数学中的实体的框架基础。分形几何图形表现出自相似性的本质,即整体复制部分,并且有一个维度。早期的几何形式如龙曲线，von Koch snowflake曲线和Sierpinski曲线，都显示出精确的自相似性，而在物体本质上显示出统计的自相似性。例如，在不同的尺度（相当于缩放成或从一个给定的区域）的轮廓绘制产生的一组图像，基本上是相似的。事实上，他们是如此的相似，他们可以采取同样的轮廓的不同部分且都在一个恒定的规模。在物理上，这似乎像不规则中的规律性。在数学术语,它代表了一种高度的变化下的不变性。

曼德布洛特集的结合、计算机和计算机图形学提供了一个强大的工具集,探索复杂的平面和动力系统的行为：“想象以前无法想象的”(Salinger 1987）。这为我们理解数学和复杂的系统作出了重大贡献,并已经被很好地记录下来了(如 Pietgen and Richter 1985)。这一现象说明了一个重要问题：计算机图形学提供了一个强大的工具来揭示数学和物理行为,进而数学提供了计算机模拟的发展的基础和代表性的自然场景。前者是后者的一个非常有趣的模拟,反之亦然。有一些讨论在多大程度上利用计算机图形学的方法（如Fournier et al. 1982）体现了数学曼德布洛特分形的纯度(1982年曼德布洛特), 但照片产生继续令人印象深刻的现实，无论是自然地形，片，或云。沃斯（1985）总结了一些主要的数学结构及其分形的定义关系。

**5.7空间填充曲线**

最近的一些发展空间曲线和皮亚诺曲线体现不同的策略生成像素图像提供更大的速度。这些描述在Peano (1890), Witten and Wyvill(1983), 和 Cole (1987)中。

**5.8并行性的数学**

设计算法并行架构及其开发的操作和显示对象是当前关注的领域。Mooreet al. (1987), Dew et al. (1985, 1986), Handler et al.(1986), 和May and Shepherd (1986) 提供当前的工作的总结,包括收缩期阵列及其影响。福克斯(1987)给出了当前超大规模集成工作的总结。

映射的技术同步, 数据独立计算如卷积计算和转换等是众所周知的事情。然而，扩展到同步和数据相关的情况下是更困难的-目前还没有正式和全面的处理。到计算机集成块映射算法需要一个分区，以最大限度地减少与整体模型进行通信的需要。

利用并行是最近的一些研究（例如Theoharis1986）的主题。奥坎姆提供并行处理环境。Gold feather et al. (1986)描述利用中央控制和逻辑处理器在每个节点上，以评估多项式利用空间的并行性。二次原语的结果在执行所需的CSG树的过程令人印象深刻。然而，为了开发并行处理器上实现算法的自动化的方法，一些形式的一般模型表示的并行性是必要的。

**5.9设计方法论**

最近的研究都集中在设计领域，以获得更大的理解和设计过程的详尽(Lansdown 1985,1987a--c; Lawson 1983, 1987; King 1987)。已经假设了一些模型：首先，这些基础上逐步迭代对最终设计一个明确的方式（所谓的'稳健'的设计），其次，那些代表在一个更不连续的方式进展的那些相关的新的想法的产生（所谓的'精益'设计）。突变理论模型已被用来说明，这2种方法可以代表一个整体的统一模型。修改现有的设计可以帮助设计师提供“标准”选项可供选择。在选择这些选项是相互关联的序列(例如在设计建筑的门窗不能大于墙壁)可以在设计过程中加入以知识为基础的方法。然而,处理不完备的过程的本质是一项简单的任务。

**6结论**

**6.1算法制定和复杂性**

学习算法的学生已经证明，固有的复杂性甚至存在于看似最简单的算法里。涉及隐藏线和隐藏面消除的计算机图形算法已经受到相当重视，以便优化和改进。布氏算法（1965年）已成为许多研究和完善的主题 - 甚至涉及程序转换（Sproull1982年）。然而，任何东西除了最简单的算法的正式的数学分析（例如，排序和搜索）已经被证明非常困难（Tucker 1985）。

**6.2处理几何和算法复杂度**

在一个信息上完整的意义上展现对象的集合或者组件的聚集十分的困难，做到的话模型的所有的需求可以得到明确的满足。另外，即使是从最简单的操作中产生的计算的复杂性是这样的，在合理的时间执行任务，更好的优化或更强大的硬件都是需要的。Shamos（1975）指出了几何运算所带来的复杂性。应用在并行体系结构上的映射算法是一项重要的任务。福雷斯特（1987）主张在建设大型和复杂的几何体系时应使用严格的软件工程技术，这样计算能可靠，准确，一致地进行。

**6.3符号和概念化**

适当的符号和抽象的表现将能够更好地理解所涉及的过程和问题。此外，能够代表大众的复杂性的心智模式，往往提示思考问题的新方法。这往往是前进的方向。

**6.4计算机图形学和计算机视觉的整合**

计算机正在迅速地从信息处理设备移动到视觉处理机器。输入处理对应于将对象场景转变成用于在计算机中进行分析和操作的对象表示。输出处理对应于对象数据转换成图象数据。如果这一切必须被实时执行，那么流程必须有效地表示和执行。需要一种视觉处理机的模型，这样作为有机组成部分，这些组件将适合。

**6.5数学，模型和计算机图形学**

在模型领域中的最近的一些研究已经证实了严格概念化框架的功率，性能和优点。例子是Kunii（1987年）的CAD和图形通信网络，Woodwark和Quarendon（1987年）的图形学，和 Hall （1987年）的色彩还原和光照模型。今后的工作应建立在这种严格和系统化的方法。计算机图形学迅速从一个很大程度上基于语用学和实验和错误的解决方案的学科向一个基于严格的分析和正规方法的学科转变。在这个过渡的统一工具是模型，指标和数学。

参考文献

[1] Earnshaw [Rae.](http://scholar.cnki.net/result.aspx?q=%e4%bd%9c%e8%80%85%3a(Rae+A.+Earnshaw))The mathematics of computer graphics[J]. The Visual Computer,1987, Vol.3 (3):115-124