

Homework : Ten-bar Truss

吳培慈

August 2024

1 Question

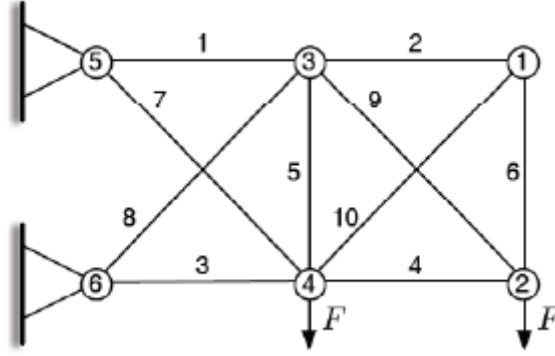


Figure 1: Ten-bar Truss

Problem Definition

在已知條件下，給定桿件截面半徑，求出各桿件的位移、應力、反作用力：

- 整體架構處於靜力平衡的情況下
- 所有桿件截面皆為圓形
- 材料為鋼，楊氏係數 $E = 200 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ，降伏強度 $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$
- 平行桿件與鉛直桿件（桿件 1 至桿件 6）長度皆為 9.14m
- 桿件 1 至 6 截面半徑相同為 r_1 ，桿件 7 至 10 截面半徑相同為 r_2
- 所有桿件半徑的最佳化範圍為 0.001 至 0.5 之間
- 在節點 2 和節點 4 上的負載 F 皆為 $1.0 \times 10^7 \text{ N}$ 向下

Optimization problem

$$\min_{r_1, r_2} f(r_1, r_2) = \sum_{i=1}^6 m_i(r_1) + \sum_{i=7}^{10} m_i(r_2)$$

subject to

$$\begin{aligned} |\sigma_i| &\leq \sigma_y \\ \Delta s_2 &\leq 0.002 \end{aligned}$$

where

f : 所有桿件的質量

Δs_2 : node2 的位移

σ_y : 降伏應力

σ_i : 所有桿件的應力

2 Solution

2.1 Step1 :Element Table

將節點與元素相關數值整理成表格

node	x	y
1	18.28	9.14
2	18.28	0
3	9.14	9.14
4	9.14	0
5	0	9.14
6	0	0

Figure 2: 節點座標

element	node i	node j	E	A	L	cos	sin	theta
1	3	5	200	0.0314	9.14	-1	0	180
2	1	3	200	0.0314	9.14	-1	0	180
3	4	6	200	0.0314	9.14	-1	0	180
4	2	4	200	0.0314	9.14	-1	0	180
5	3	4	200	0.0314	9.14	0	-1	-90
6	1	2	200	0.0314	9.14	0	-1	-90
7	4	5	200	0.0079	12.9259	-0.7071	0.7071	135
8	3	6	200	0.0079	12.9259	-0.7071	-0.7071	-135
9	2	3	200	0.0079	12.9259	-0.7071	0.7071	135
10	1	4	200	0.0079	12.9259	-0.7071	-0.7071	-135

Figure 3: 元素表格

2.2 Step2 :Stiffness Matrix

單一元素的剛性矩陣 (4x4) 為

$$k = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

將其整理取得各元素的剛性矩陣後並進一步得出整體結構的剛性矩陣 (大小為 12x12)

2.3 Step3 :Displacement

node5、6 為固定端，因此在 x、y 方向無位移:

$$Q_9 = Q_{10} = Q_{11} = Q_{12} = 0$$

計算其餘節點的位移:

$$Q^T = K^{-1} F^T$$

最佳化求解為:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0038 \\ -0.0189 \\ -0.0042 \\ -0.0195 \\ 0.0032 \\ -0.0087 \\ -0.0033 \\ -0.0093 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Step4 :Stress

應力與位移 Q 的關係式:

$$\sigma = \frac{E_e}{l_e} [-c \quad -s \quad c \quad s] Q$$

最佳化求解為:

$$\text{Stress} = \begin{bmatrix} 1.0\text{e}+07 & * & & & \\ & 6.9286 & 1.4647 & -7.2163 & -2.0715 & 1.3209 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

2.5 Step5 :Reaction Force

反作用力作用在 node5、6，其關係式為：

$$R = KQ$$

最佳化求解為：

$$R = \begin{bmatrix} 1.0\text{e}+07 & * \\ -3.0000 \\ 1.0407 \\ 3.0000 \\ 0.9593 \end{bmatrix}$$

3 Result

使用 fmincon 進行最佳化後，得其最佳化值與最佳解：

$$(r_1, r_2) = (0.3, 0.2663) \quad f = 212410$$

4 Code

<main.m>

```
1  clc;clear;
2  fun = @object;
3  nonlcon = @nonlcon;
4  tenbarTruss = @tenbarTruss;
5
6  % 初始點&線性限制不等式
7  r0 = [0.1,0.1];
8  A = [];
9  b = [];
10 % 線性限制等式
11 Aeq = [];
12 beq = [];
13 % 目標值上下限 & 運算方式
14 lb = [0.001,0.001];
15 ub = [0.5,0.5];
16 options = optimoptions('fmincon','Display','final','Algorithm','sqp');
17
18 % 最佳化運算 & 結果顯示
19 [r,fval,exitflag] = fmincon(fun,r0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options);
20 [Q, Stress,R] = tenbarTruss(r)
```

<object.m>

```
1  function object = fun(r)
2      m(1) = 7860*pi*r(1).^2*9.14;
3      m(2) = 7860*pi*r(2).^2*12.9259;
4      object = 6*m(1)+4*m(2);
5  end
```

<nonlcon.m>

```
1 % 降伏應力 & 位移限制
2 function [c,ceq]=nonlcon(x)
3 [Q,Stress] = tenbarTruss(x);
4 c(1) = (Q(3,1)^2+Q(4,1)^2)^0.5-0.02;
5 c(2) = max(abs(Stress))-250*10^6;
6 ceq = [];
7 end
```

<tenbarTruss.m>

```
1 function [Q,Stress,R] = tenbarTruss(r)
2 % 桿件角度、長度、截面積
3 ang(1:4) = 180*pi/180;
4 ang(5:6) = -90*pi/180;
5 [ang(7),ang(9)] = deal(135*pi/180);
6 [ang(8),ang(10)] = deal(-135*pi/180);
7 L(1:6) = 9.14;
8 L(7:10) = 12.9259;
9 A(1:6) = pi*r(1)^2;
10 A(7:10) = pi*r(2)^2;
11
12 % 剛性矩陣
13 E = 200*10^9;
14 K = zeros(12);
15 element = [5 6 9 10;1 2 5 6;7 8 11 12;3 4 7 8;5 6 7 8;1 2 3 4;7 8 9 10;5 6 11 12;3 4 5 6;1 2 7 8];
16 for i=(1:10)
17     C = cos(ang(i));
18     S = sin(ang(i));
19     k = A(i)*E/L(i)*[C^2 C*S -C^2 -C*S;C*S S^2 -C*S -S^2;-C^2 -C*S C^2 C*S;-C*S -S^2 C*S S^2];
20     for I=(1:4)
21         for H=(1:4)
22             K(element(i,H),element(i,I)) = K(element(i,H),element(i,I)) + k(I,H);
23         end
24     end
25 end
26
27 % 位移Q計算(Q = K-1*FT)
28 F = [0,0,0,-10^7,0,0,0,-10^7]; % 力矩陣
29 Q = inv(K(1:8,1:8))*F';
30 Q = [Q;0;0;0;0];
31
32 % 應力分析
33 Stress = zeros(10,1);
34
35 for i=(1:10)
36     C = cos(ang(i));
37     S = sin(ang(i));
38     q = [Q(element(i,1),1);Q(element(i,2),1);Q(element(i,3),1);Q(element(i,4),1)];
39     Stress(i,1) = E/L(i)*[-C -S C S]*q;
40 end
41
42 % 反作用力(R = KQ)
43 R = K(9:12,1:12)*Q;
```