Projet MOGPL
Résolution de problèmes d'affectation et de localisation

Wenshan WU   Sven SAY

Décembre 2018

1 Introduction et objectifs

Le problème de localisation équitable modélise un problème réel consistant à localiser des services (hôpital, administration, caserne de pompiers, bibliothèque, piscine) sur une zone géographique de manière à partager équitablement l'accès à ces ressources par les populations. Selon les cas, la notion d'équité peut porter sur la distance, le temps ou plus généralement le coût d'accès des utilisateurs potentiels (clients) à la ressource qui leur est affectée. Dans ce sujet, on s'intéresse à un seul type de ressource (hôpital ou piscine ou bibliothèque etc) et on se place du point de vue d'un superviseur (agent, logiciel de contrôle) qui connaît la position géographique des clients et celle des sites dans lesquels une ressource peut être implantée et qui, étant donnée le coût d'accès de chaque client à chaque site, doit déterminer une localisation des ressources répartissant "optimalement" les coûts d'accès des clients à ces ressources. L'objet du projet est d'implanter et tester des modèles computationnels s'appuyant sur la programmation linéaire en variables réelles, entières ou mixtes et permettant au superviseur de déterminer des solutions équitables à ce problème de localisation (la notion d'équité restant à préciser).

2 Problème

Soient $I = \{1, ..., n\}$ un ensemble de n villes situées sur le territoire de référence et v_i la population de la ville i pour tout i $\in$ N. On suppose ici qu'on a déjà choisi les k villes dans lesquelles les ressources seront localisées (k < n) et on note J $\subseteq I$ l'ensemble des indices de ces villes ($|J| =$ k). Lorsqu'une ressource est localisée dans une ville j (j $\in$ J) on doit définir son secteur de service, c'est-à-dire l'ensemble des villes qui auront accès à la ressource située en j. Le secteur de service d'une ressource située dans la ville j est caractérisée par les variables x_{ij} ; i $\in$ I qui valent 1 si j est le point d'accès des habitants de la ville i à la ressource (on dit alors que i appartient au secteur j) et 0 sinon. La matrice n x k de terme général x_{ij} sera notée X et caractérise une solution potentielle (réalisable ou non) pour la définition des k secteurs. Bien entendu, plusieurs villes peuvent appartenir à un même secteur de service. En revanche une ville n'appartient qu'à un unique secteur et les secteurs forment une partition des n villes. Pour des raisons de capacité de service et d'équilibrage des charges, la population totale des villes composant un secteur ne doit pas dépasser la quantité

$$\gamma = \frac{1+\alpha}{k} \sum_{i=1}^{n} v_i$$

où α est un paramètre strictement positif donné (par exemple $\alpha = 0.1$). On note d_{ij} la distance moyenne qui sépare un habitant de la ville i d'une ressource située en j et on suppose les distances d_{ij} connues pour tout couple (i,j). L'intérêt du maire d'une ville i est que sa ville se trouve proche de la ville j où se trouve la ressource dont sa commune dépend. On suppose donc que le coût (disutilité) de se voir affecté au secteur j pour le maire de la ville i est mesuré par d_{ij} .

3 Modélisation

Il s'agit ici d'un problème d'affectation classique que l'on retrouve dans la plupart des cas.
Soit un vecteur p_i de taille n où n représente le nombre de villes et p contenant le nombre d'habitants des villes, par exemple p_1 contient le nombre d'habitants de la ville Antony, p_2 d'Asnières-Sur-Seine, ...
Soit un vecteur k_i de taille k où k représente le nombre de villes où les ressources sont localisées et k_i contenant les indices de ces villes en question, par exemple si $k_i = 1$ alors 1 désigne l'indice de la première ville, ie Antony.

Soit x_{ij}

$$\begin{cases} 1 & \text{si la ville i appartient au secteur j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Nous allons dans un premier temps minimiser le coût social de la solution, défini par la fonction :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} d_{ij} x_{ij}$$

Pour cela, il nous faut définir la fonction objectif ainsi que les contraintes suivantes :

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.c.} \left| \begin{array}{llll} \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} & \leq \gamma & \forall j \in 1,\ldots,k & (1) \\ \sum_{j=1}^{k} x_{ij} & = 1 & \forall i \in 1,\ldots,n & (2) \\ \sum_{j=1}^{k} x_{k_j k_j} & = 1 & & (3) \\ x_{ij} \in 0,1 & & & \end{array} \right.$$

(1) La somme des populations d'un secteur ne doit pas dépasser gamma comme indiqué dans le sujet.
(2) La somme de chaque ligne de x_{ij} doit être égale à 1 car une ville ne peut être affectée qu'à un seul secteur.
(3) Les k villes choisies doivent obligatoirement appartenir à leur secteurs respectifs.

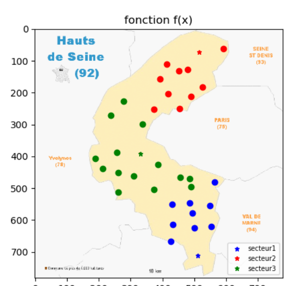

Figure 1: k = 3, $\alpha = 0.2$
satisfaction moyenne = 4.77
moins bien servi = 9.29

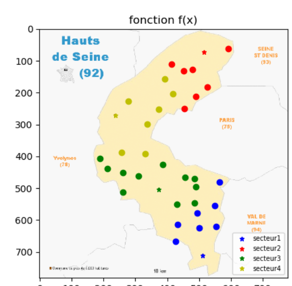

Figure 2: k = 4, $\alpha = 0.2$
satisfaction moyenne = 4.30
moins bien servi = 8.23

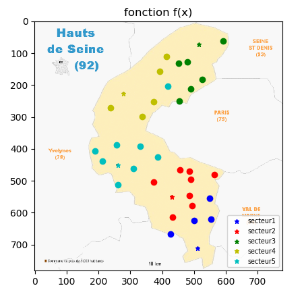

Figure 3: k = 5, $\alpha = 0.2$
satisfaction moyenne = 3.55
moins bien servi = 10.36

Dans la figure 1, nous avons sélectionné les trois villes suivantes dans le cadre de l'implémentation des ressources : Antony, Saint-Cloud et Gennevilliers.
Dans la figure 2, nous avons sélectionné les quatre villes suivantes dans le cadre de l'implémentation des ressources : Antony, Gennevilliers, Meudon et Rueil-Malmaison.
Dans la figure 3, nous avons sélectionné les cinq villes suivantes dans le cadre de l'implémentation des ressources : Antony, Clamart, Gennevilliers, Nanterre et Ville d'Avray.

2. On envisage maintenant de minimiser la fonction suivante :

$$g(x) = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{k} d_{ij} x_{ij} + \epsilon f(x)$$

$$\min z = M + \epsilon f(x)$$

$$\text{s.c.} \left| \begin{array}{llll} \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} & \leq \gamma & \forall j \in 1,\ldots,k & (1) \\ \sum_{j=1}^{k} x_{ij} & = 1 & \forall i \in 1,\ldots,n & (2) \\ \sum_{j=1}^{k} x_{k_j k_j} & = 1 & & (3) \\ \sum_{j=1}^{k} d_{ij} x_{ij} & \leq M & \forall i \in 1,\ldots,n & (4) \\ x_{ij} \in 0,1 & & & \end{array} \right.$$

(4) La somme de chaque ligne doit être inférieur ou égale à une variable M, cette dernière représente donc le max entre chaque ligne.

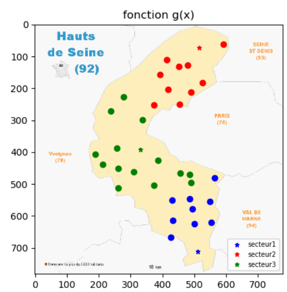

Figure 4: k = 3, $\alpha = 0.2$
satisfaction moyenne = 4.77
moins bien servi = 9.29

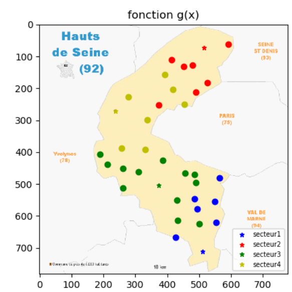

Figure 5: k = 4, $\alpha = 0.2$
satisfaction moyenne = 4.50
moins bien servi = 8.23

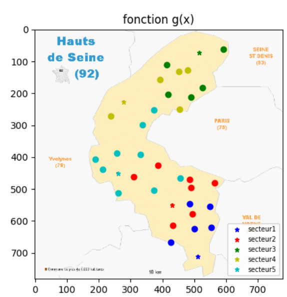

Figure 6: k = 5, $\alpha = 0.2$
satisfaction moyenne = 4.14
moins bien servi = 8.2

Dans la figure 4, nous avons sélectionné les trois villes suivantes dans le cadre de l'implémentation des ressources : Antony, Saint-Cloud et Gennevilliers.
Dans la figure 5, nous avons sélectionné les quatre villes suivantes dans le cadre de l'implémentation des ressources : Antony, Gennevilliers, Meudon et Rueil-Malmaison.
Dans la figure 6, nous avons sélectionné les cinq villes suivantes dans le cadre de l'implémentation des ressources : Antony, Clamart, Gennevilliers, Nanterre et Ville d'Avray.

Il est préférable de minimiser G par rapport à F car en minimisant G on minimise la distance la plus grande et donc on augmente la satisfaction du maire le moins bien servi.

PE pour k = 3 : 1.1102230246251565e-16
PE pour k = 4 : 0.029824451016170705
PE pour k = 5 : 0.14157802612091053

On remarque que lorsque le ratio de l'équité est positif, cela montre que f(x_f^*) < f(x_g^*) donc on accroît la satisfaction moyenne ainsi que celle moins bien servi. Si le ratio est négatif alors f(x_f^*) > f(x_g^*) et donc on améliore la satisfaction du maire le moins bien servi mais on diminue celle des autres villes en compensation.

3. Dorénavant nous n'avons plus connaissance de la localisation des ressources mais seulement du nombre de ressources à localiser.
Soit S_i un vecteur représentant les villes candidates à la localisation des ressources de dimension n nombre de villes.

$$\begin{cases} 1 & \text{i représente l'indice de la ville choisie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\min z = M + \epsilon f(x)$$

$$\text{s.c.} \left| \begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} & \leq \gamma & \forall j \in 1,...,k \quad (1) \\ \sum_{j=1}^{k} x_{ij} & = 1 & \forall i \in 1,...,n \quad (2) \\ \sum_{j=1}^{k} d_{ij} x_{ij} & \leq M & \forall i \in 1,...,n \quad (3) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \geq S_j & \forall j \in 1,...,k \quad (4) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \leq S_j * n & \forall j \in 1,...,k \quad (5) \\ \sum_{i=1}^{n} S_i & = k & \quad (6) \\ x_{ij} \in 0,1 & & \end{array} \right.$$

(4) et (5) vérifient que la somme de chaque colonne de la matrice x_{ij} est soit comprise entre 1 et 36 ou soit mise à 0, puis en couplant avec la (6) seulement la somme de k colonnes seront comprise entre 1 et 36 et donc la somme des colonnes restante seront de 0.

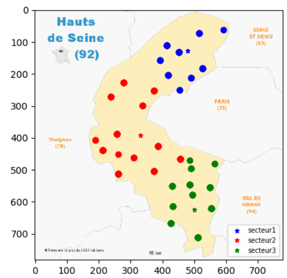

Figure 7: k = 3, $\alpha = 0.2$

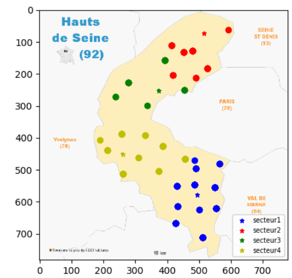

Figure 8: k = 4, $\alpha = 0.2$

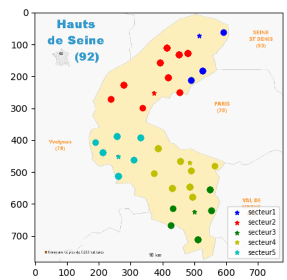

Figure 9: k = 5, $\alpha = 0.2$

Dans la figure 7, les villes implémentant les ressources sont les suivantes Asnieres-sur-Seine, Bagneux et Saint-Cloud.
Dans la figure 8, Fontenay-aux-Roses, Gennevilliers, Puteaux et Ville-d'Avray.
Dans la figure 9, Gennevilliers, Puteaux, Sceaux, Vanves et Ville-d'Avray.
D'après les résultats obtenus sur la carte, on remarque une meilleur répartition des secteurs sur la carte comparer au choix fait à la main. En effet, la moyenne des distances obtenue grâce à la fonction H de l'exercice 3 est inférieur à celle de F et G, donc la satisfaction des maires est meilleur.

References

[1] Maths 'Or' Constraint
mathoverflow.net/questions/104484/linear-programming-with-or-restrictions