北航宇航学院

空气动力学(32学时)

主讲：覃粒子　　　陈　兵

qlz@buaa.edu.cn　　Markchien@buaa.edu.cn

沙河主楼D510，13911744896　　沙河主楼D519，13683012881

2024年 春季学期

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

第七讲 平面不可压势流（I/2）

- 势函数和流函数方程
- 几种典型的平面定常势流
- 势流叠加原理
- 几种平面势流的叠加势流
- 儒科夫斯基升力定理

求解不可压理想流体无旋运动的规律

6.1 势函数和流函数方程

- 有旋流和无旋流
- 势函数及势函数方程
- 流函数及流函数方程

6.1 势函数和流函数方程

6.1.1 有旋流和无旋流

- 在速度分解定理中体现了旋转；

$$\vec{V}=\vec{V}_0+E\cdot\delta\vec{r}+\vec{\omega}\times\delta\vec{r}$$

- 宏观：如旋风，集中涡；
- 微观：肉眼看不到，如湍流运动中的流体微团的运动，数学涡。

- 无旋运动是指流场中各点**旋度均为零**的流体运动.
- 引起旋涡的原因主要是**粘性**。
- 判断流体运动是否有旋
  - 唯一标准是旋度是否为零。
  - 必须看**流体微团**是不是在**自转**,而不是看它有没有绕中心作圆周运动,这就是**局部和整体性**的差别。

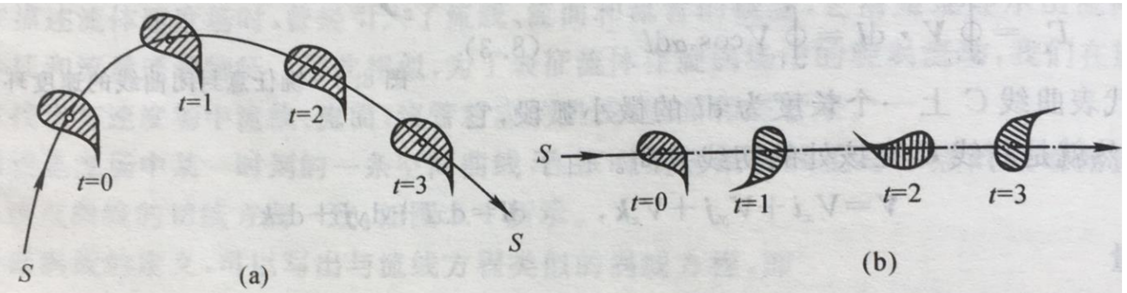


图 8.4　无旋流动和有旋流动的例子

(a) 无旋运动;(b) 有旋运动

6.1 势函数和流函数方程

6.1.1 有旋流和无旋流

根据无旋流动条件：

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}=\frac{\partial V_y}{\partial x},\quad \frac{\partial V_y}{\partial z}=\frac{\partial V_z}{\partial y},\quad \frac{\partial V_z}{\partial x}=\frac{\partial V_x}{\partial z}$$

有下面的定理: 无旋场 $\Leftrightarrow$ 有势场

也就是说必存在标量函数φ,使得: $\vec{V}=\nabla\varphi$

称φ为速度势函数

$$V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},V_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},V_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

6.1.2 势函数及势函数方程

- 无旋流与势函数
  - 当流体运动的旋度为0即流体无旋时，存在势函数φ，其与速度的关系为

$$V_x = \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad V_y = \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad V_z = \varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

  - 因此求解无旋流动时，可以先求势函数φ，然后得到三个速度分量。
  - 但是，如何来求势函数φ呢?

有必要推导出速度势φ的控制方程 (Euler方程变形)!

思路：从Euler方程中法消去其他量，从而获得关于速度的控制方程。

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

6.1.2 势函数及势函数方程

- 葛罗米柯方程

  Euler运动微分方程

$$\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}$$

又由于有矢量运算恒等式

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{V}\times\left(\nabla\times\vec{V}\right)$$

故可以得到运动微分方程的另一种形式(即葛罗米柯方程)

$$\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{V}\times\left(\nabla\times\vec{V}\right)$$

流体运动=无旋运动 +有旋运动

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

6.1.2 势函数及势函数方程

- 势函数方程
  - 在定常、无旋、理想（无粘）气体（质量力忽略）流动中，葛罗米柯方程化简

$$\cancel{\vec{R}}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\cancel{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{V}\times\cancel{\left(\nabla\times\vec{V}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho\vec{V}\cdot\left[-\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\left(\frac{V^2}{2}\right)+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)p=0$$

思路：从Euler方程中法消去其他量，从而获得关于速度的控制方程。

6.1.2 势函数及势函数方程

- 势函数方程
  - 结合声速方程、连续方程，进一步变形，

$$\rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\left(\frac{V^2}{2}\right)+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)p=0$$

$$\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)=0$$

$$\vec{V}\cdot\left[\nabla p=c^2\nabla\rho\right]$$

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)p=c^2\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\rho$$

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\rho=-\rho\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)p=-\rho c^2\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\left(\frac{V^2}{2}\right)-c^2\nabla\cdot\vec{V}=0$$

6.1.2 势函数及势函数方程

- 势函数方程
  - 进一步作展开运算，

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\left(\frac{V^2}{2}\right)-c^2\nabla\cdot\vec{V}=0$$

$$V_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)+V_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right)+V_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right)-c^2\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=0$$

$$V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2$$

$$\left(V_x^2-c^2\right)\frac{\partial V_x}{\partial x}+\left(V_y^2-c^2\right)\frac{\partial V_y}{\partial y}+\left(V_z^2-c^2\right)\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$+V_xV_y\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)+V_yV_z\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)+V_zV_x\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=0$$

6.1 势函数和流函数方程

6.1.2 势函数及势函数方程

- 势函数方程
  - 应用势函数φ与速度V之间的关系式，

$$\left(\underset{\varphi_x}{V_x^2}-c^2\right)\underset{\varphi_{xx}}{\frac{\partial V_x}{\partial x}}+\left(V_y^2-c^2\right)\underset{\varphi_{yy}}{\frac{\partial V_y}{\partial y}}+\left(V_z^2-c^2\right)\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$+V_xV_y\left(\underset{\varphi_{xy}}{\frac{\partial V_x}{\partial y}}+\underset{\varphi_{xy}}{\frac{\partial V_y}{\partial x}}\right)+V_yV_z\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)+V_zV_x\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1-\frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)\varphi_{xx}+\left(1-\frac{\varphi_y^2}{c^2}\right)\varphi_{yy}+\left(1-\frac{\varphi_z^2}{c^2}\right)\varphi_{zz}-\frac{2}{c^2}\left(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}+\varphi_z\varphi_x\varphi_{zx}\right)=0$$

此即为势函数方程。在二维流动情形下，简化为

$$\left(1-\frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)\varphi_{xx}+\left(1-\frac{\varphi_y^2}{c^2}\right)\varphi_{yy}-\frac{2}{c^2}\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}=0$$

6.1 势函数和流函数方程

6.1.3 流函数及流函数方程

- 流函数定义
  - 流函数定义

在二维定常流中，连续方程为

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}=0$$

两边同除以滞止密度 ρ^* ，则连续方程可以化为

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$

其中

$$M=-\frac{\rho}{\rho^*}V_y$$

$$N=\frac{\rho}{\rho^*}V_x$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

6.1.3 流函数及流函数方程

- 流函数定义
  - 流函数定义

$$M=-\frac{\rho}{\rho^*}V_y \qquad N=\frac{\rho}{\rho^*}V_x$$

由数学中曲线积分的性质，如果在规定的区域内，函数M和N及其导数$\partial M/\partial y$和$\partial N/\partial x$都连续，则在该区域内存在点函数$\psi(x,y)$，使得 $d\psi=Mdx+Ndy$成立的充要条件是

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}}$$

称$\psi(x,y)$为流函数，它与势函数的量纲相同。即

$$\psi(x,y)=\int\frac{1}{\rho^*}\left(-\rho V_y dx+\rho V_x dy\right)$$

6.1.3 流函数及流函数方程

$$\psi(x,y)=\int\frac{1}{\rho^*}\left(-\rho V_y dx+\rho V_x dy\right)$$

- 流函数的性质

1、已知流函数，即可求出速度分布；

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho^*}}V_y,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho^*}}V_x \longrightarrow \text{不可压}$$

2、等流函数线，即为流线；

$$\psi=C\Rightarrow d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{\partial\psi/\partial y}{\partial\psi/\partial x}=\frac{V_x}{V_y}$$

3、等流函数线与等势函数线**正交**：二维定常无旋流场；

$$\varphi=C'\Rightarrow d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{\partial\varphi/\partial y}{\partial\varphi/\partial x}=-\frac{V_y}{V_x}$$

6.1.3 流函数及流函数方程

- 流函数定义
  - **流函数的4点说明：**

✓ 一切平面流动（有旋与否、有粘与否），都有可能存在流函数ψ；而只有无旋流才有势函数φ。故对于平面流，流函数具有更普遍的意义。

✓对于可压流动，只有二维、定常流动，才有流函数，三维或者非定常流不存在ψ。

✓对于不可压流动，只要流动为二维的，就一定存在流函数（不要求定常）。

✓对于非定常不可压流动，流函数是时间的函数，同一流场在不同瞬时的流函数是不一样的。

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}=0 \Longrightarrow \psi(x,y)=\int\frac{1}{\rho^*}\left(-\rho V_y dx+\rho V_x dy\right)$$

6.1.3 流函数及流函数方程

□ 流函数方程

- 从葛罗米柯方程出发，应用**定常**、**无旋**、**理想（无粘）气体**等条件，可以推导流函数方程

$$\left[1-\frac{\psi_y^2}{c^2}\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2\right]\psi_{xx}+\left[1-\frac{\psi_x^2}{c^2}\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2\right]\psi_{yy}+2\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2\frac{\psi_x\psi_y}{c^2}\psi_{xy}=0$$

- 关于流函数的两点说明：
  - ✓对于**二维有旋流动**，也存在流函数方程，形式较上面方程要复杂。由于此时不存在势函数，故常用流函数求解。
  - ✓对于**二维无旋流**，ψ和φ都存在，但ψ方程复杂，故此类流场常采用势函数求解。

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

6.1.3 流函数及流函数方程

- 平面不可压势流势函数、流函数方程
  - 势函数方程（$c \to \infty$）

$$\left(1-\frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)\varphi_{xx}+\left(1-\frac{\varphi_y^2}{c^2}\right)\varphi_{yy}-\frac{2}{c^2}\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}=0 \Rightarrow \quad \varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$$

  - 流函数方程（$c \to \infty$）

$$\left[1-\frac{\psi_y^2}{c^2}\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2\right]\psi_{xx}+\left[1-\frac{\psi_x^2}{c^2}\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2\right]\psi_{yy}+2\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2\frac{\psi_x\psi_y}{c^2}\psi_{xy}=0 \Rightarrow \psi_{xx}+\psi_{yy}=0$$

  - 它们都是**拉普拉斯方程**，是只与速度有关的**线性方程**，给定适当边界条件方程是容易求解的。数学上满足拉氏方程的函数称为**调和函数**。

6.2 几种典型的平面定常势流

- 均匀直线流动
- 点源和点汇
- 点涡（有旋涡）

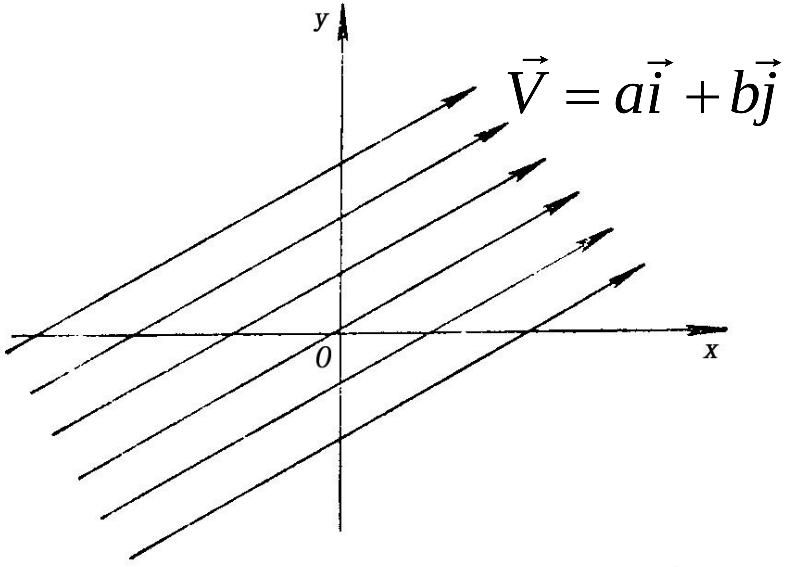
北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

6.2.1 均匀直线流动

- **均匀直线流**是一种速度不变的最简单的平行流动。其流速为

$$V_x = a \qquad V_y = b$$

这里a和b为常数。很显然， 流动为无旋（旋度为0），且满足连续方程，所以该流场同时具有**势函数φ**和**流函数ψ**。



北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

6.2.1 均匀直线流动

- **势函数**

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=V_x dx+V_y dy=adx+bdy$$

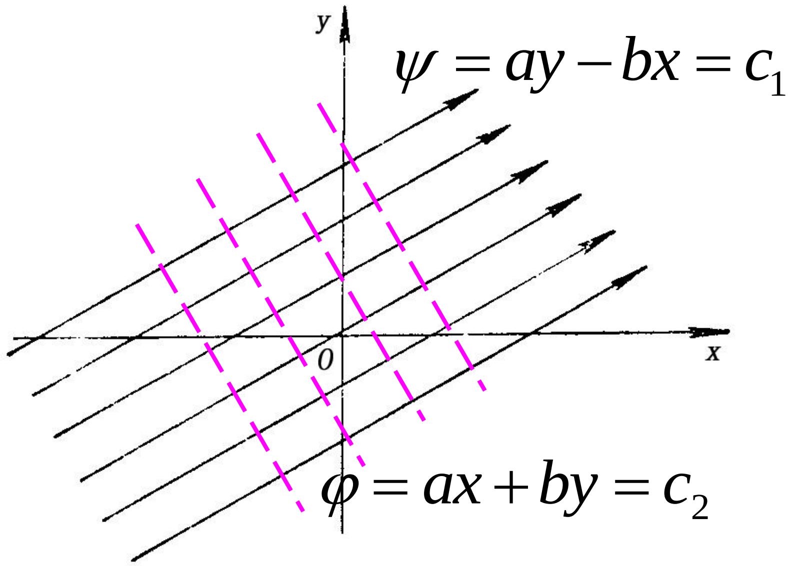
$$\Rightarrow \varphi(x,y)=ax+by+C_1$$

- **流函数**

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=-V_y dx+V_x dy$$

$$=-bdx+ady$$

$$\Rightarrow \psi(x,y)=-bx+ay+C_2$$



如果取（0，0）点的$\varphi=\psi=0$，则$C_1=C_2=0$。

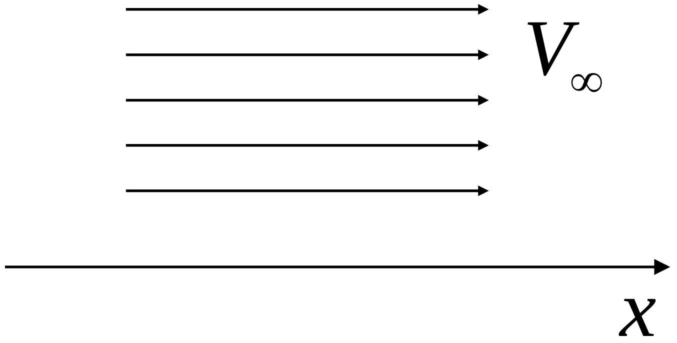
6.2 几种典型的平面定常势流

6.2.1 均匀直线流动

- 验证计算表明，φ和ψ均满足拉普拉斯方程。
- 常用的是这样的直匀流，它与 x 轴平行，从左面远方流来，流速为 V_∞ 。
- 此时**势函数**和**流函数**分别为

$$\varphi = V_\infty x$$

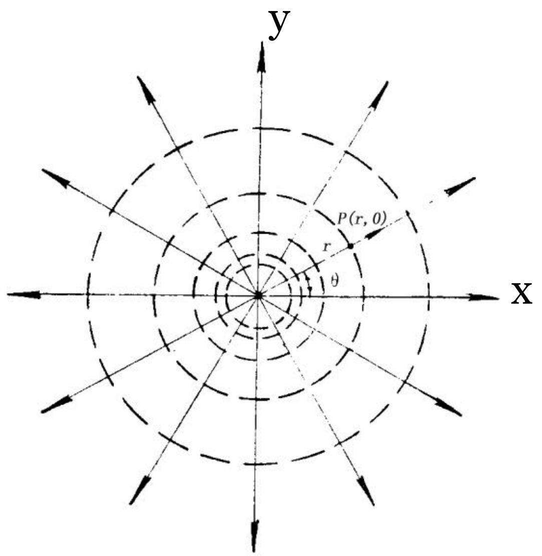
$$\psi = V_\infty y$$



6.2.2 点源和点汇

- **点源定义：设在无限大平面上，流体以一恒定的体积流量Q（>0），源源不断地从一个点沿径向向四周均匀地流出，这种流动称为点源，这个点称为源点。Q称为点源强度。**

- **点汇定义：在上述定义中，如果体积流量$Q<0$，则意味着流体沿着径向均匀地从四周流入一点，这种流动称为点汇，这个点称为汇点。**



位于原点的点源

6.2.2 点源和点汇

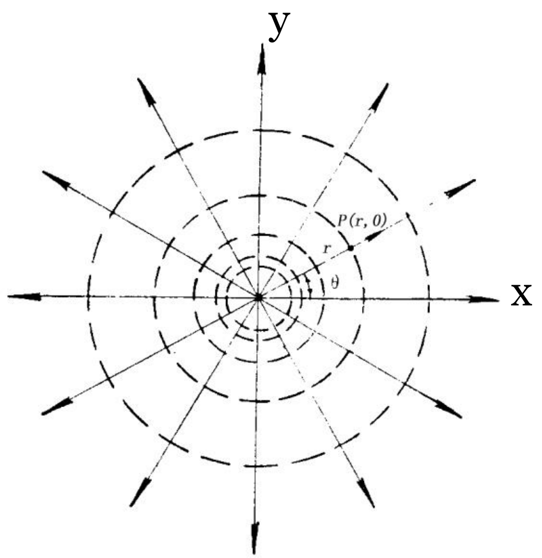
- **如果把源点（或汇点）放在坐标原点上，研究底面为半径r的圆、单位高度的圆柱流体作为研究对象，则这流动便只有 V_r，而没有 V_θ。**

- 设半径为 r 处的流速是 V_r，那么这个源的总流量是

$$Q = 2\pi r V_r.$$

- 由于流量是常数，故流速 V_r 与半径成反比

$$V_r = \frac{Q}{2\pi r}$$



位于原点的点源

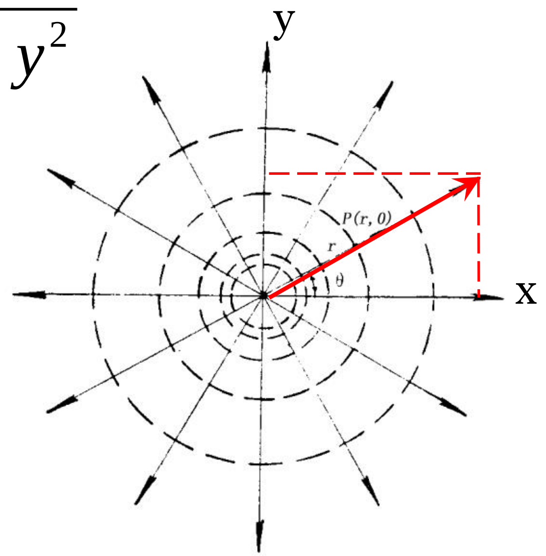
6.2.2 点源和点汇

- x、y 向的速度可分别写为

$$V_x = V_r\cos\theta = \frac{Q}{2\pi r}\frac{x}{r} = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$V_y = V_r\sin\theta = \frac{Q}{2\pi r}\frac{y}{r} = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

- 根据点源（汇）的速度分布，很容易求出它的势函数和流函数。



位于原点的点源

6.2.2 点源和点汇

▫ 点源（汇）的势函数

$$d\varphi = V_x dx + V_y dy = \frac{Q(xdx + ydy)}{2\pi(x^2 + y^2)} = \frac{Q}{4\pi}\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

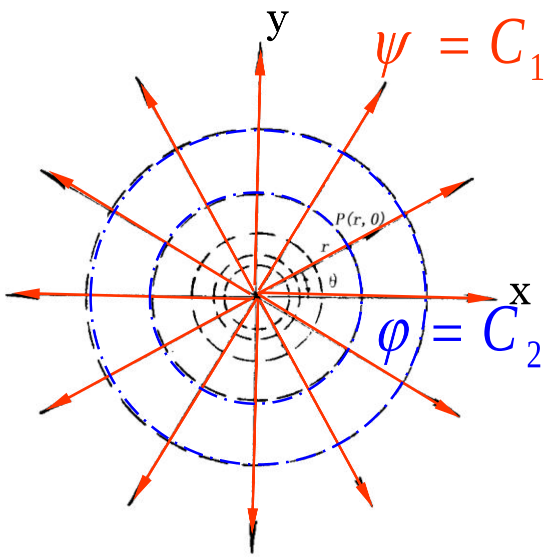
$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi}\ln(x^2 + y^2) = \frac{Q}{2\pi}\ln r$$

❖ 点源（汇）的流函数

$$d\psi = -V_y dx + V_x dy = \frac{Q(xdy - ydx)}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\frac{d(y/x)}{1 + (y/x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \psi = \frac{Q}{2\pi}\text{acrtan}\frac{y}{x} = \frac{Q}{2\pi}\theta$$



位于原点的点源

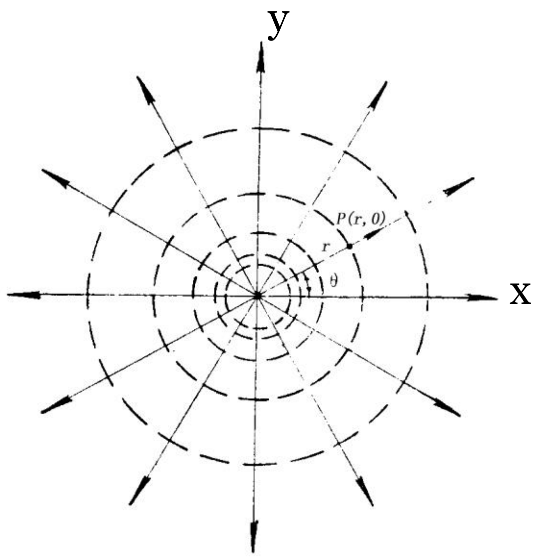
6.2 几种典型的平面定常势流

6.2.2 点源和点汇

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi}\ln(x^2+y^2) = \frac{Q}{2\pi}\ln r$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\mathrm{acrtan}\frac{y}{x} = \frac{Q}{2\pi}\theta$$

- 当$r \to 0$时，$V_r \to \infty$，$\varphi \to \infty$，故源点（汇点）是奇点，即径向速度和速度势只在源（汇）点以外的点有意义。
- 验证计算表明，φ和ψ均满足拉普拉斯方程。



位于原点的点源

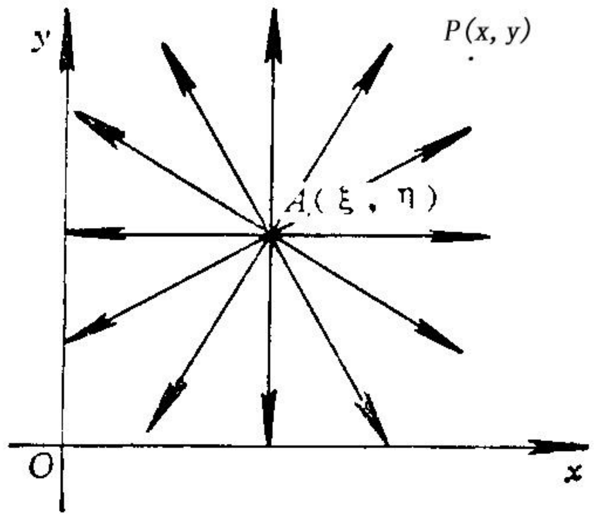
北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

6.2.2 点源和点汇

如果源的位置不在坐标原点，而在 A（ξ,η）处，则

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} arctg \frac{y-\eta}{x-\xi}$$



相应的速度分量为：

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi}\frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \\ V_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi}\frac{(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \end{aligned}\right\}$$

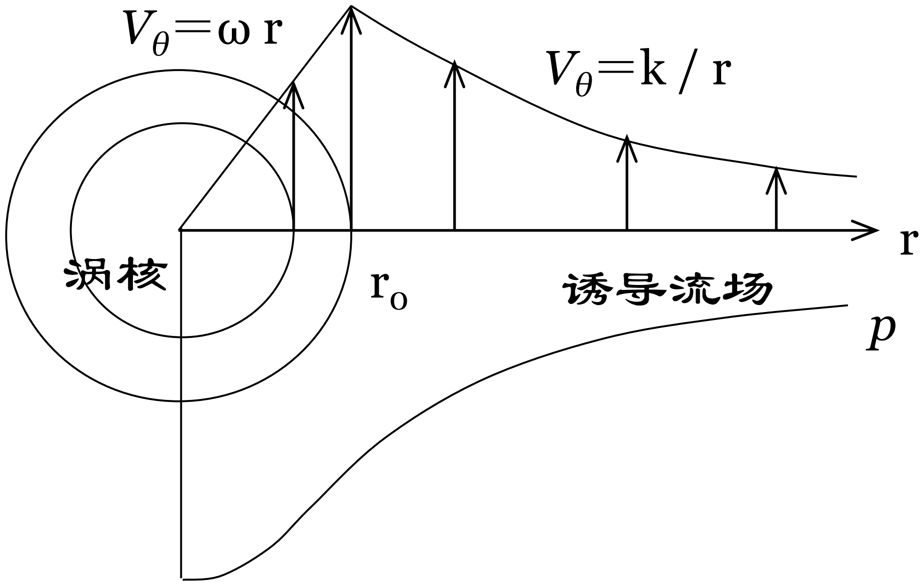
除奇点处速度无定义之外，流场其他区域都是是无旋的。

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

6.2.3 点涡（有旋涡）

- 实际旋涡包含有旋的涡核和涡核外的被诱导的无旋流场。

实际旋涡的涡核内为有旋流



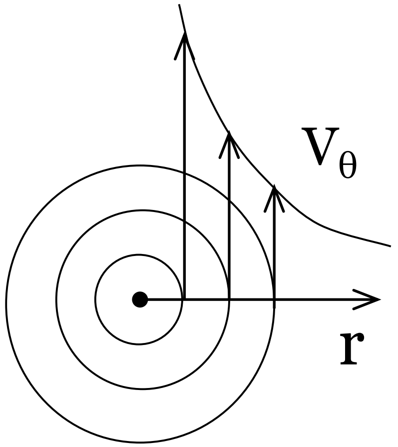
6.2.3 点涡（有旋涡）

- 点涡可以看成实际旋涡的涡核直径趋于零时的一种极限情况，除涡所在一点外，整个平面流场是无旋的，流体被点涡诱导绕点涡作圆周运动，流线是一些同心圆，流速只有周向速度 V_θ，而没有径向速度 V_r。绕点涡的环量Γ是个确定的常数，例如绕半径为 r 的圆环作环量计算，有：

$$\Gamma = V_\theta (2\pi r)$$

- 式中的Γ是个常数称为点涡的强度，反时针方向为正。从而周向速度与离开中心点的距离 r 成反比

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

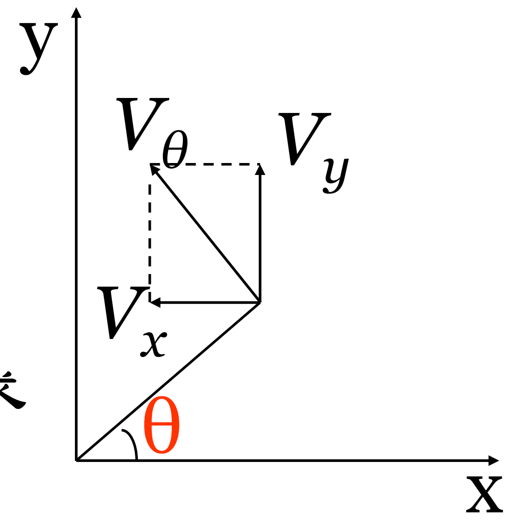


6.2.3 点涡（有旋涡）

由几何条件可立刻写出速度分量：

$$V_x = -V_\theta \sin\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\frac{y}{r} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$V_y = V_\theta \cos\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\frac{x}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$



势函数可由上式代入 $\partial\varphi/\partial x = V_x$ 等后积分求出，但方便的还是利用极坐标关系：

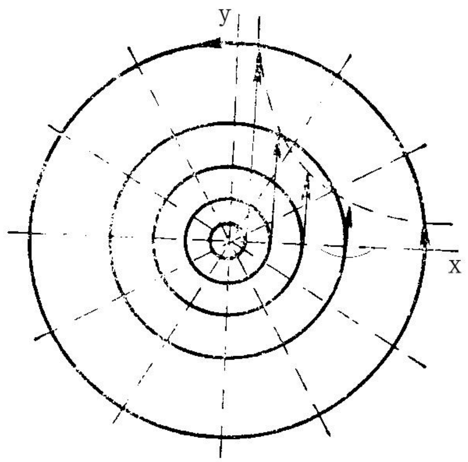
$$\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

积分后得：

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} arctg\frac{y}{x}$$

显然等势线φ=C是一系列射线

6.2.3 点涡（有旋涡）



求流函数可由极坐标下流函数与势函数的柯西－黎曼关系

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{r\partial \theta} = -V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

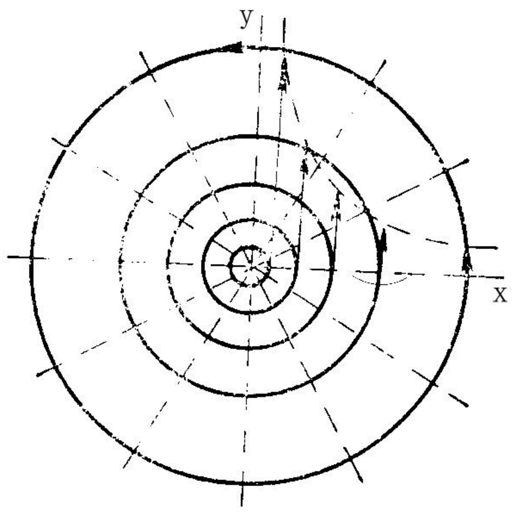
积分得：

$$\boxed{\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = -\frac{\Gamma}{4\pi}\ln(x^2 + y^2)}$$

显然流线$\psi = C$是一系列同心圆，可见点涡与点源的势函数与流函数只是对调了一下（上述负号只是代表涡转向）。

6.2.3 点涡（有旋涡）

如果点涡的位置不在原点，而在(ξ,η)，则点涡的位函数和流函数的式子分别是：



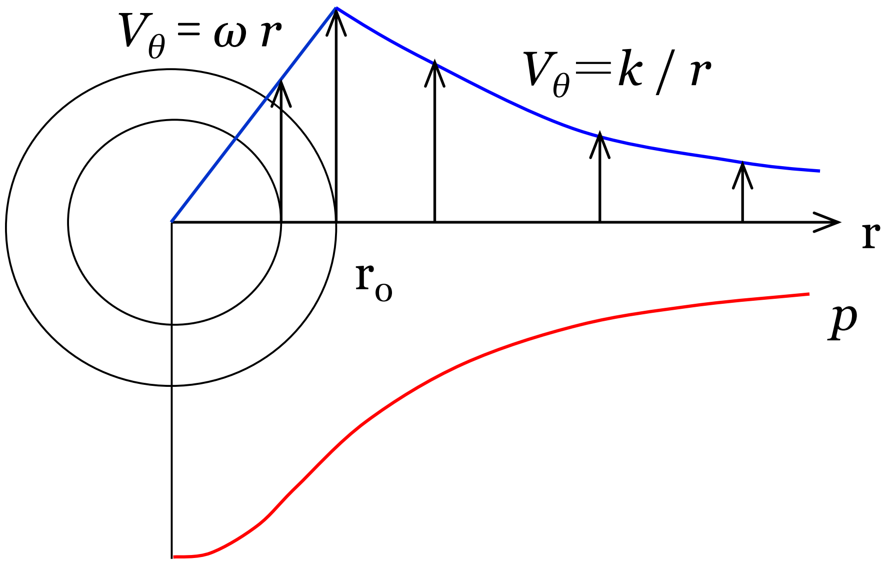
$$\phi=\frac{\Gamma}{2\pi}arctg\frac{y-\eta}{x-\xi}$$

$$\psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

6.2.3 点涡（有旋涡）

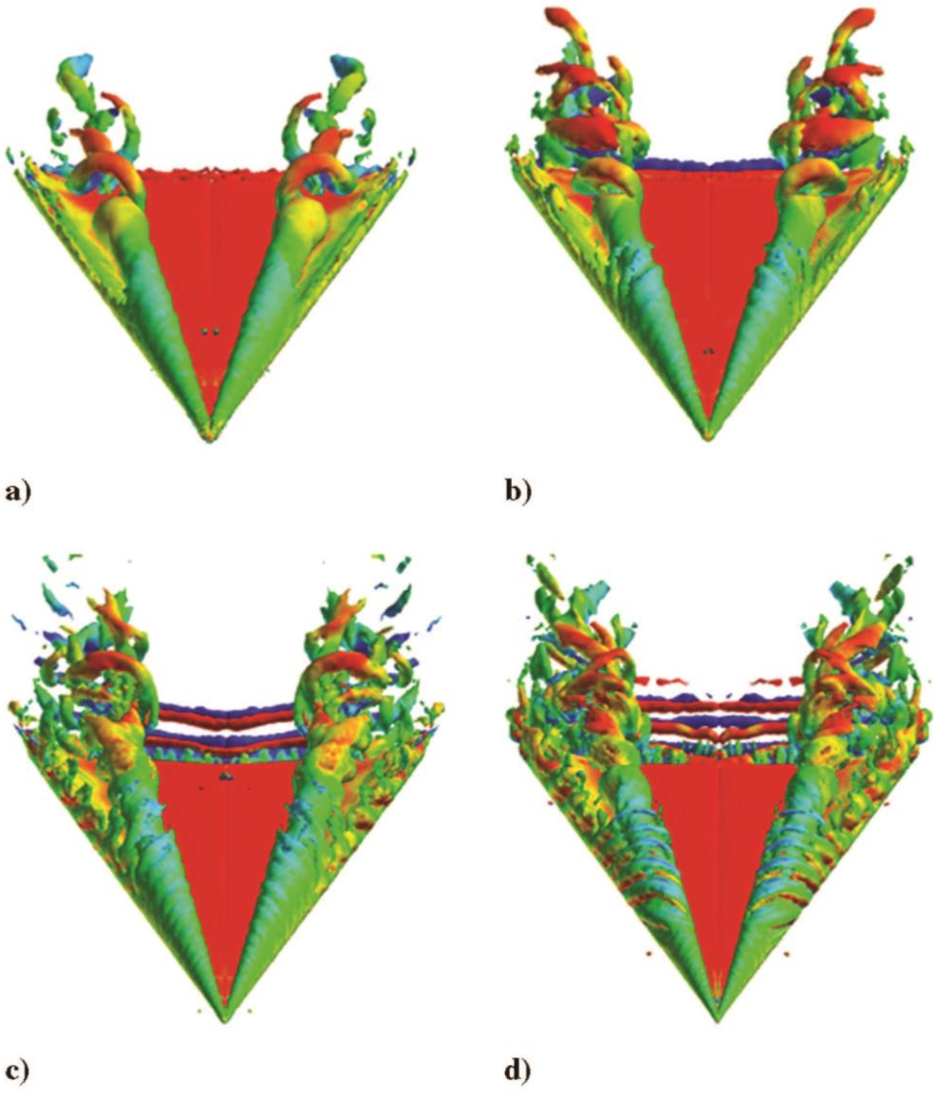
- 点涡是实际旋涡的一种数学近似。
- 点涡的速度在半径 $r \to 0$ 时将使 $V_\theta \to \infty$、势必使压强 $p \to -\infty$，这是不现实的，这时粘性必然要起作用，因此实际的旋涡存在一个涡核，核内流体 V_θ 与半径成正比为有旋流，核外为无旋流。
- 实际涡核尺寸与粘性和涡强弱有关，一般不大，
- 故数学上抽象为一个点，形成点涡模型。



6.2 几种典型的平面定常势流

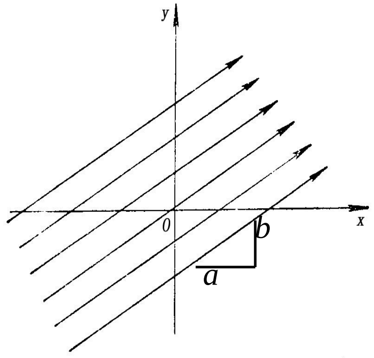
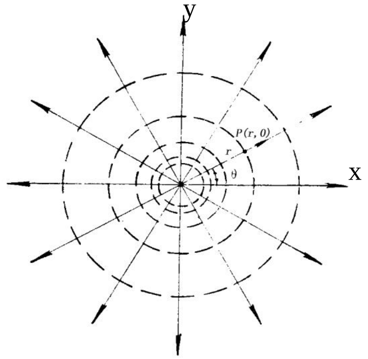
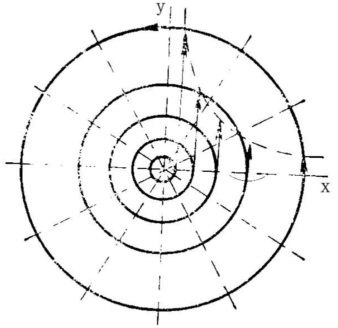
6.2.3 点涡（有旋涡）

❖ 三角翼与涡升力简介



6.2 几种典型的平面定常势流

6.2.3 点涡（有旋涡）

直匀流：	$\varphi = ax + by$ $\psi = ay - bx$	
点源(汇)：	$\varphi = \dfrac{Q}{2\pi}\ln r$ $\psi = \dfrac{Q}{2\pi}\theta$	
点涡：	$\varphi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta$ $\psi = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	

6.3 势流叠加原理

- 势流叠加原理

6.3.1 势流叠加原理

- 以两个势流叠加为例

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\varphi_1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}=0\\ \nabla^2\varphi_2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\partial^2(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial y^2}=0$$

$$\Rightarrow \nabla^2\varphi = \nabla^2(\varphi_1+\varphi_2) = 0$$

- 流函数的叠加类似。又由于速度分量与势函数之间的关系是线性的，故**速度分量也可以叠加**得到

$$V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = V_{x1}+V_{x2}$$

$$V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = V_{y1}+V_{y2}$$

6.3.1 势流叠加原理

- 平面不可压势流的势函数和流函数方程均为拉普拉斯方程，即为

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad \nabla^2\psi=0$$

- 拉普拉斯方程可用算子 ∇^2 表为 $\nabla^2 f=0$。它是个线性方程，可以用叠加原理求复合的解。
- 所谓叠加原理是说如果有 $f_1, f_2, \dots, f_n$, 分别满足拉普拉斯方程$\nabla^2 f_i=0$，则这些函数的线性组合$f=a_1f_1+a_2f_2+\dots+a_nf_n$，也必满足拉普拉斯方程$\nabla^2 f=0$。

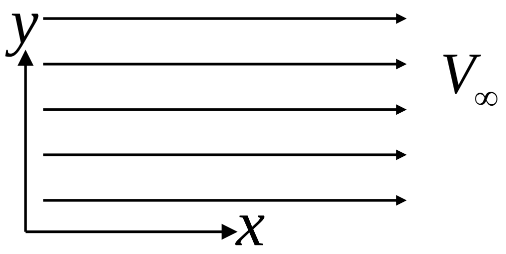
6.3 势流叠加原理

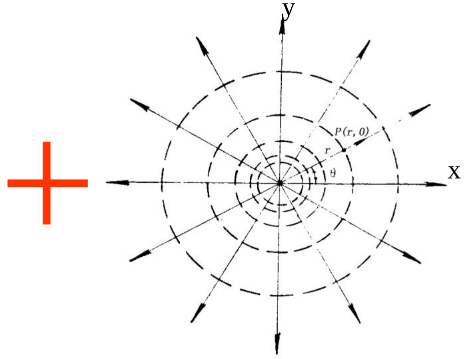
6.3.1 势流叠加原理

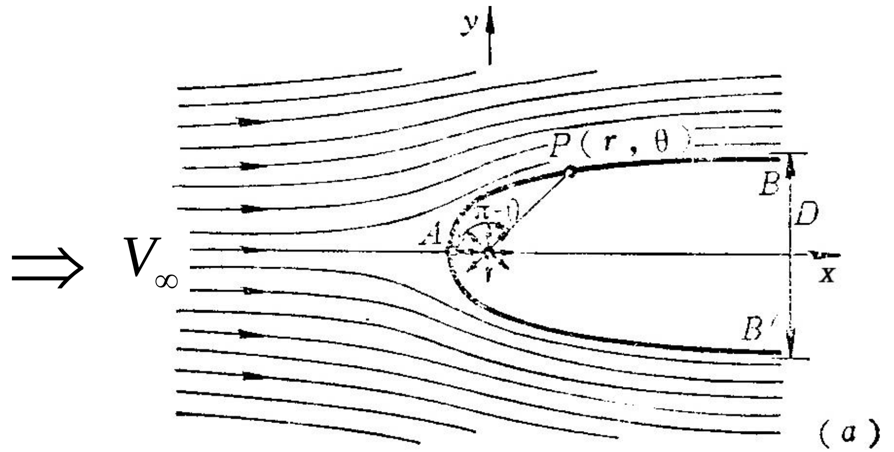
- 也就是说，将多个势流叠加起来，形成的新流动仍然是有势流。该复合流动的
  - 势函数$\varphi=\Sigma\varphi_i$
  - 流函数$\psi=\Sigma\psi_i$
  - 速度$V=\Sigma V_i$

- 叠加原理的用途：
  - 就可利用一些简单势流解来求解复杂势流。
    - ✓均匀直线流+点源
    - ✓点源/汇+点涡
    - ✓点源+点汇
    - ✓……

课后作业1







求复合流动的流函数、势函数和速度。

课后作业

P249页： 8.2、8.3、8.4、8.5

P260页： 9.1、9.3、9.4、9.5、9.7

北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

To be continued …