



# 北航宇航学院

## 空气动力学(32学时)

主讲：覃粒子

陈 兵

[qlz@buaa.edu.cn](mailto:qlz@buaa.edu.cn)

沙河主楼D510, 13911744896

[Markchien@buaa.edu.cn](mailto:Markchien@buaa.edu.cn)

沙河主楼D519, 13683012881

2024年 春季学期

## 第十讲 粘性流体力学基础 (2/2)

- 粘性流体中的作用力
- 粘性流体运动基本方程
- 雷诺方程与雷诺应力
- 附面层基础知识
- 管道内的流动损失与湍流

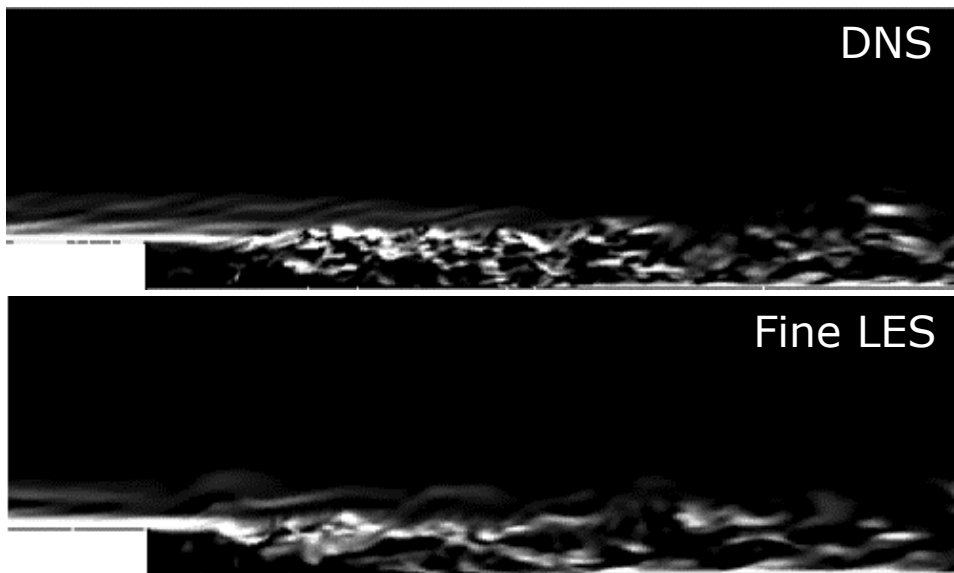
**考虑粘性后流体旋运动的基本方程及规律**

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

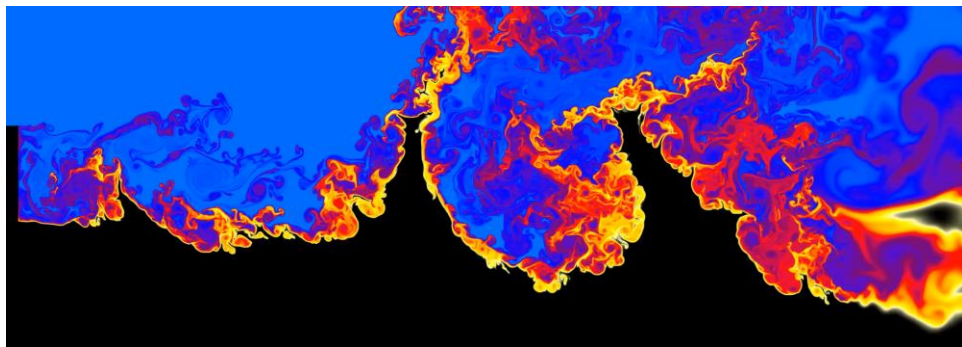
- 雷诺实验及湍流的实质
- 雷诺时均化思想
- 雷诺方程
- 雷诺应力

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

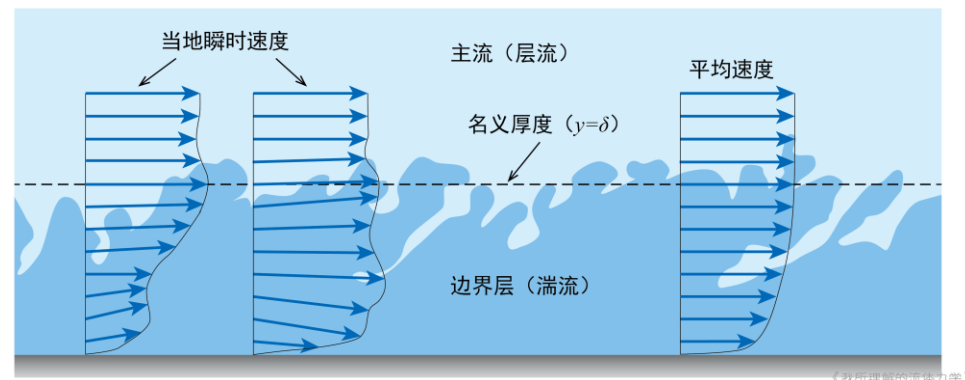
### ▣ 初识别湍流——流场实例



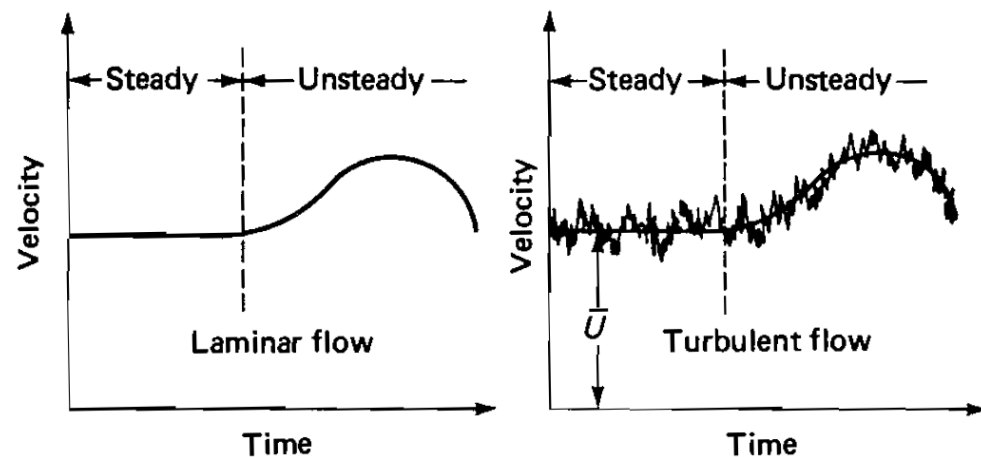
后台阶流动 CTR, Stanford



湍流超临界氢/氧在分流板后方流动



湍流附面层内速度分布



典型的层流和湍流速度分布对比

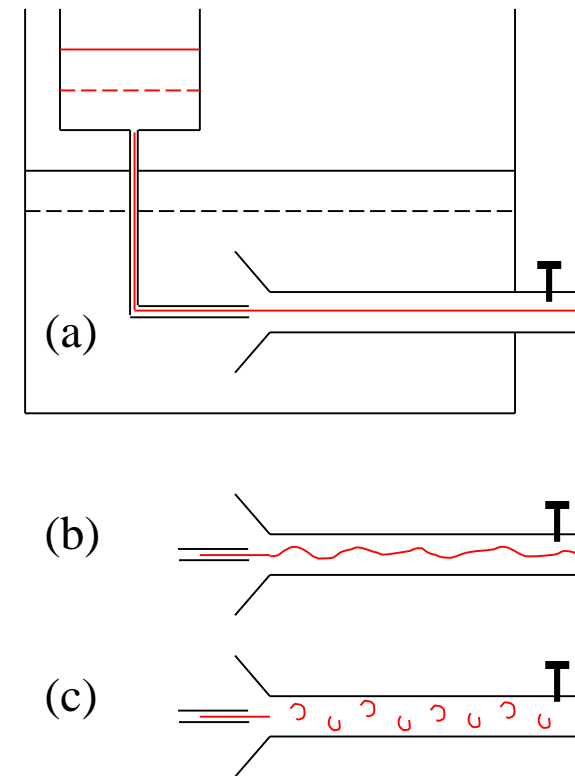
## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

### 7.3.1 雷诺实验及湍流实质

#### □ 雷诺实验

1883年，英国人雷诺发表著名实验：

- 开始流速小，状态如(a)，一条直线，多条直线不相混。
- 处于层流(laminar flow)状态；
- 抬高阀门，增大流速，如(b)，红线波动，开始有径向速度；
- 当水流速度增大超过一个临界值，红线剧烈波动、断裂，形成很多小旋涡，整个管内全被染红，如(c)，形成湍流（亦称紊流），turbulent flow；
- 然后再减小流速，变回层流。



雷诺实验

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

### 7.3.1 雷诺实验及湍流实质

#### □ 雷诺实验

1883年，英国人雷诺发表著名实验：

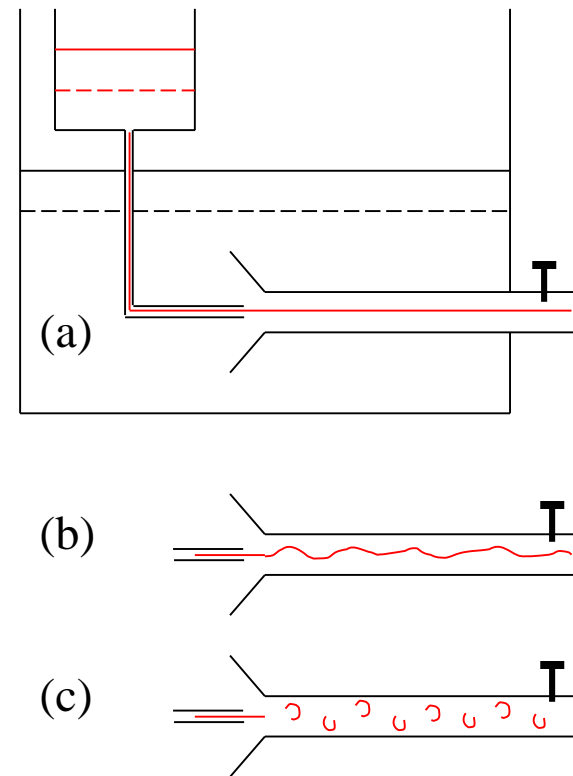
- 红线的变化反应了水流动状态的变化.
- **转捩** (transition)：存在层流和湍流，其间有过渡状态，层流转变为湍流，这个过程称为**转捩**
- 雷诺发现：影响流动状态的不仅是速度，还有其它参数。起决定作用的是如下组合量：

$$\text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} \left( = \frac{V d}{\nu} \right) \quad \text{叫做雷诺数}$$

分子：流过单位面积流体动量，反映惯性力大小；

分母：粘性力。

雷诺数为**惯性力**与**粘性力**之比



雷诺实验

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力



### 7.3.1 雷诺实验及湍流实质

#### 雷诺实验

1883年，英国人雷诺发表著名实验：

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} (= \frac{V d}{\nu})$$

从层流转变为紊流，从紊流转变为层流的雷诺数是不一样的，分别记为 $Re'_{cr}$ 和 $Re_{cr}$ ，叫做上临界雷诺数、下临界雷诺数。

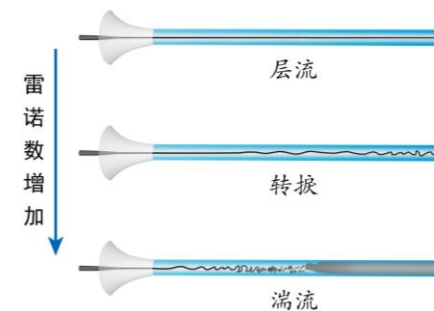
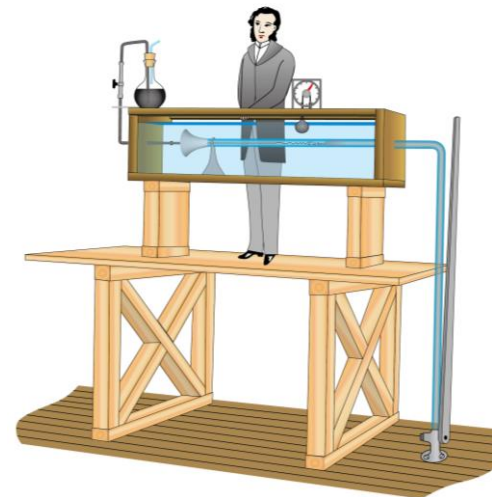
$$Re_{cr} = 2320$$

$$Re'_{cr} = 13800$$

$Re < Re_{cr}$  时为层流

$Re > Re'_{cr}$  时为湍流

$Re_{cr} < Re < Re'_{cr}$  时  
认为和原状态一样!



雷诺实验

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

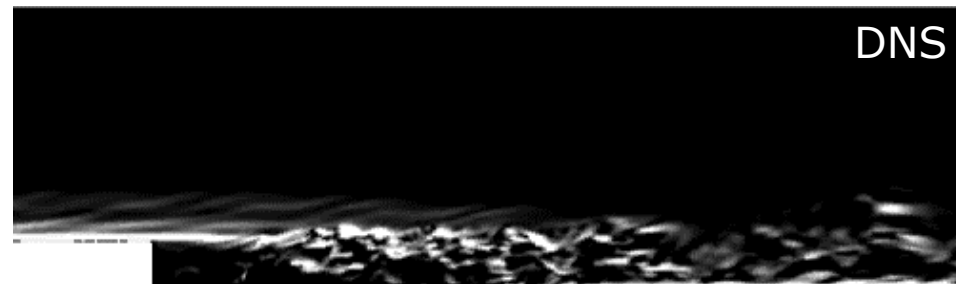
### 7.3.1 雷诺实验及湍流实质

#### □ 湍流的实质

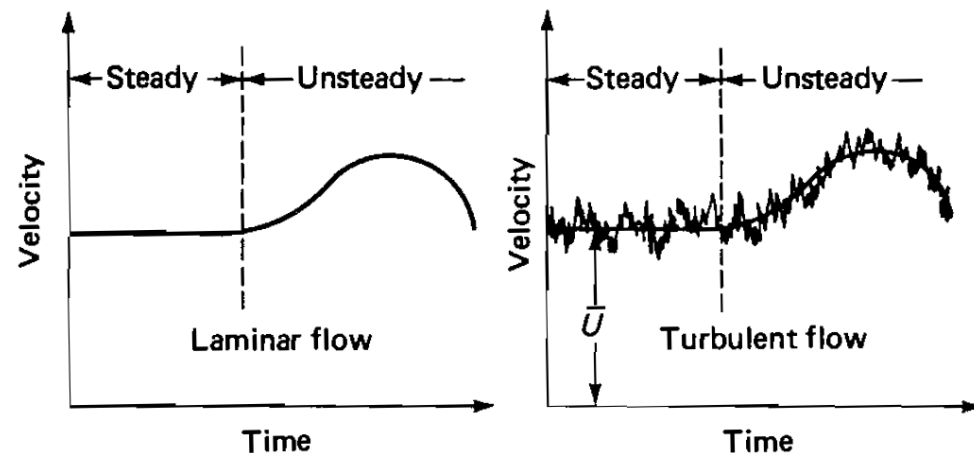
- 空间一点的速度，在时间上是**随机、不规则、脉动的**。
- 湍流的实质在于**流体微团的“脉动”**。其所表现出来的特性与**流体分子热运动**比较相似，该脉动必然带来流体动量、能量和质量等交换。与**分子粘性**相对应，将其称为**湍流粘性**。
- 借助层流粘性的计算公式计算湍流。

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad \longrightarrow \quad \tau_t = \mu_t \frac{dV}{dy}$$

- 流动的这种特性使得计算非常困难：要模拟流动的细节需要的计算量极大。



后台阶流动 CTR, Stanford



典型的层流和湍流速度分布对比



## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

### 7.3.2 雷诺时均化思想

- 虽然空间点上的速度是随机的、不规则的、脉动的，但大方向是一致的。抓主要矛盾，在**平均周期 $T$** 内采取**统计平均**的概念研究。

- 时均值:  $\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V dt$

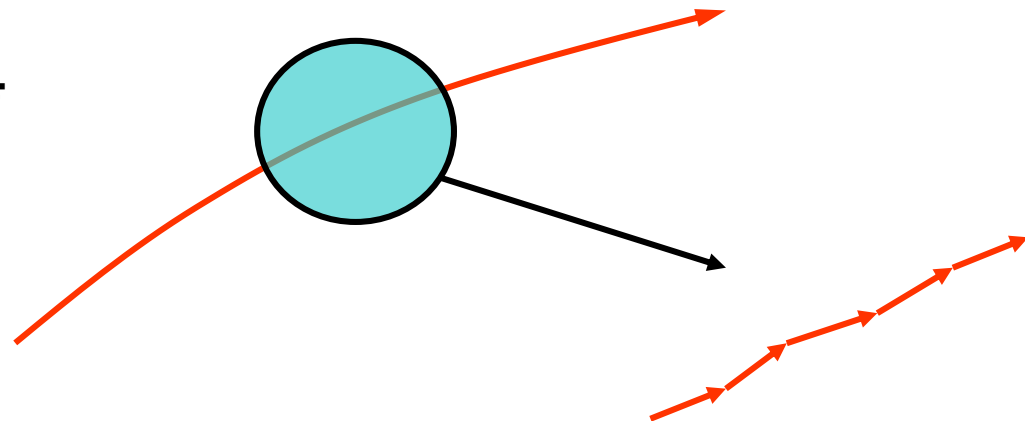
- 脉动值:  $V' = V - \bar{V}$

- 湍流度:  $\varepsilon = \frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\bar{V}}$

- 瞬时值:  $V = \bar{V} + V'$

❖ 1886雷诺提出。

❖ 有了时均值的概念，就可以采用时均化速度、压力等来研究“**准稳定流体**”，即平均流场。



空间一点的速度

$$\begin{aligned}\text{而 } \bar{V'} &= \frac{1}{T} \int_0^T V' dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (V - \bar{V}) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V dt - \bar{V} = 0\end{aligned}$$

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

### 7.3.2 雷诺时均化思想

▣ 时均值的运算关系:

$$1、\overline{\overline{F}} = \overline{F}$$

$$2、\overline{F'} = 0$$

$$3、\overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$4、\overline{\overline{A}B'} = 0$$

$$5、\overline{\overline{A}B} = \overline{A}\overline{B}$$

$$\begin{aligned} 6、\overline{AB} &= \frac{1}{T} \int AB dT = \frac{1}{T} \int (\overline{A} + A')(\overline{B} + B') dT \\ &= \frac{1}{T} \int (\overline{A}\overline{B} + A'\overline{B} + B'\overline{A} + A'B') dT \\ &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A'B'} \end{aligned}$$

$$7、\overline{\frac{\partial^n A}{\partial x^n}} = \frac{\partial^n \overline{A}}{\partial x^n}, \overline{\frac{\partial^n A'}{\partial x^n}} = 0$$

$$8、\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}$$

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力



### 7.3.3 雷诺方程

对Navier-Stokes方程进行雷诺平均后得到的方程

以二维、不可压、无质量力流动为例

连续方程

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

雷诺平均

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial y} = 0$$

x-向动量方程

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right)$$

变换 (连续方程)

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x^2}{\partial x} + \frac{\partial V_x V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right)$$

雷诺平均

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial t} + \frac{\partial \overline{V_x V_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V_x V_y}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial y^2} \right)$$

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

### 7.3.3 雷诺方程

对Navier-Stokes方程进行雷诺平均后得到的方程

以二维、不可压、无质量力流动为例

x-向动量方程

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}_x \bar{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_x \bar{V}_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial y^2} \right)$$

雷诺平均运算

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}_x \bar{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_x \bar{V}_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \overline{V_x' V_x'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{V_x' V_y'}}{\partial y}$$

平均连续方程

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \overline{V_x' V_x'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{V_x' V_y'}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right)$$

- 相对未时均化的NS方程，多了两项**关联项**：

$$-\rho \overline{V_x' V_x'}$$

$$-\rho \overline{V_x' V_y'}$$

- y-方向的动量方程处理类似

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

### 7.3.3 雷诺应力

$$-\rho \overline{V'_x V'_x}$$

- 考察  $V_x$  在  $x$  向的动量传递。穿过  $x$  向微元面  $dA$  的动量：

$$\rho V_x V_x dA = \rho (\bar{V}_x + V'_x)(\bar{V}_x + V'_x) dA$$

- 雷诺时均化后：

$$\rho \overline{V_x V_x} dA = (\rho \bar{V}_x \bar{V}_x + \rho \overline{V'_x V'_x}) dA$$

比时均动量多出一部分。动量的增加意味着有力的作用，该力称为**湍流脉动正应力**。

$$-\rho \overline{V'_x V'_y}$$

- 考察  $V_x$  在  $y$  向的动量传递。由于**脉动速度**导致穿过  $y$  向微元面  $dA$  的动量：

$$\rho V_x V'_y dA$$

- 时均化后：

$$\begin{aligned} \overline{\rho V_x V'_y} dA &= \rho \overline{V_x V'_y} dA = \rho \overline{(\bar{V}_x + V'_x) V'_y} dA \\ &= \rho \overline{V'_x V'_y} dA \end{aligned}$$

由于脉动使得在  $y$  向多传递了  $V_x$  动量，也理解成力，称为**湍流脉动切应力**。

### 雷诺应力

由于流体微团脉动、迁移造成

## 7.3 雷诺方程与雷诺应力

### 7.3.3 雷诺应力

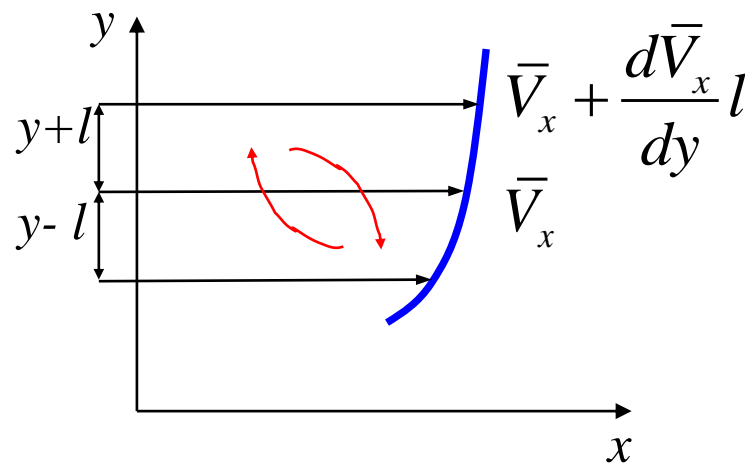
#### □ Prandtl混合长度理论

- 湍流应力是由于流体微团脉动、迁移造成，与分子粘性相似，因此借用分子粘性的计算公式：

$$\tau = \mu \frac{dV_x}{dy} \Rightarrow \tau_t = \mu_t \frac{d\bar{V}_x}{dy}$$

$\mu_t$ 为湍流粘性系数（涡粘性系数）

- **混合长度 $l$** ：流体微团运动时不与相邻微团碰撞的距离，流体微团的自由程，在这期间运动，流体微团保持原有的速度。



$$\left. \begin{array}{l} 1、 V'_x = l \frac{d\bar{V}_x}{dy} \\ 2、 V'_y \propto V'_x \quad V'_y = -C \cdot l \frac{d\bar{V}_x}{dy} \end{array} \right\} \tau_t = -\rho \overline{V'_x V'_y} = \rho C l^2 \left( \frac{d\bar{V}_x}{dy} \right)^2 \rightarrow \tau_t = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{V}_x}{dy} \right)^2 \rightarrow \mu_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{V}_x}{dy} \right|$$

- Prandtl的模型是计算湍流粘性系数的一种方法。一百年来，人们发展了不同的计算湍流粘性系数的方法，称为“**湍流模型**”。比如，代数模型（BL等）、一方程模型（SA）、两方程模型（k- $\omega$ 模型等），等等。

## 7.4 附面层基础知识

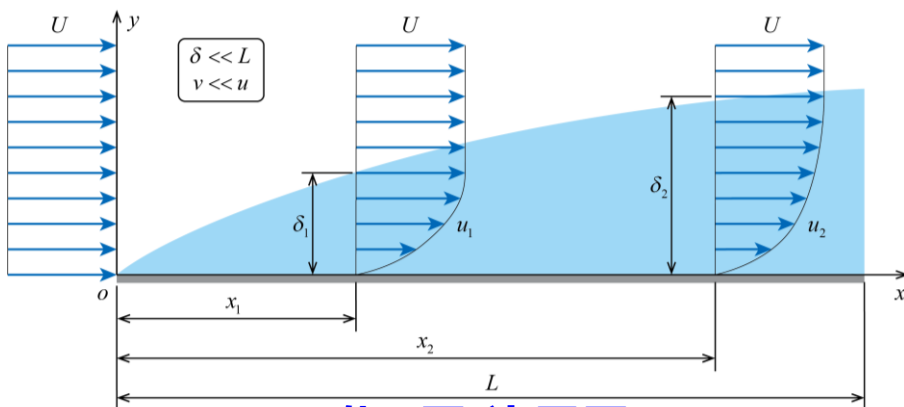
- 附面层概念
- 附面层转捩
- 附面层厚度
- 湍流附面层的结构

# 7.4 附面层基础知识



## 7.4.1 附面层概念

- 在普朗特以前，研究流体力学两分支：**纯理论研究无粘流**和**纯实验研究**。
- Prandtl**提出**附面层理论**，将实验现象与理论研究统一起来，成为近代流体力学的奠基人。附面层理论包括**附面层概念**和**附面层方程**。本小节介绍附面层概念。
- 1904年，普朗特第一次提出了附面层的概念：他认为对于粘性较小的流体，绕物体流时粘性的影响**仅限于贴近物面的薄层中**；在这一个薄层之外，粘性影响可以略去不计，应用经典的理想流体动力学方程的解来确定这一薄层外的流动是合理的。
- 普朗特把物面上受到粘性影响的这一薄层称之为**附面层(边界层)**。



附面层(边界层)

## 1.4 流体力学发展史及展望

### □ 20世纪初

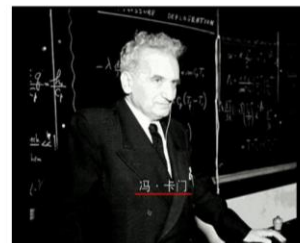
- 以儒科夫斯基、恰普雷金、**普朗特**等为代表的科学家，开创了以无粘不可压缩流体位势流理论为基础的机翼理论，阐明了机翼怎样会受到升力，从而诞生了飞机；

### □ 普朗特学派

- 从1904年到1921年逐步将N-S方程作了简化，从推理、数学论证和实验测量等各个角度，建立了**边界层理论**，能实际计算简单情形下，边界层内流动状态和流体同固体间的粘性力。



普朗特



冯·卡门



陆士嘉



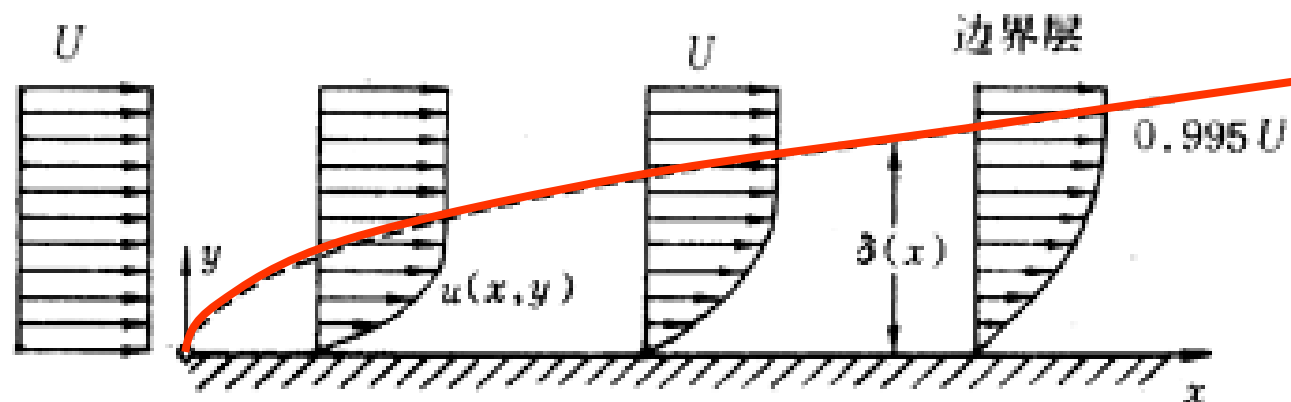
钱学森



## 7.4 附面层基础知识



### 7.4.1 附面层概念



平板附面层

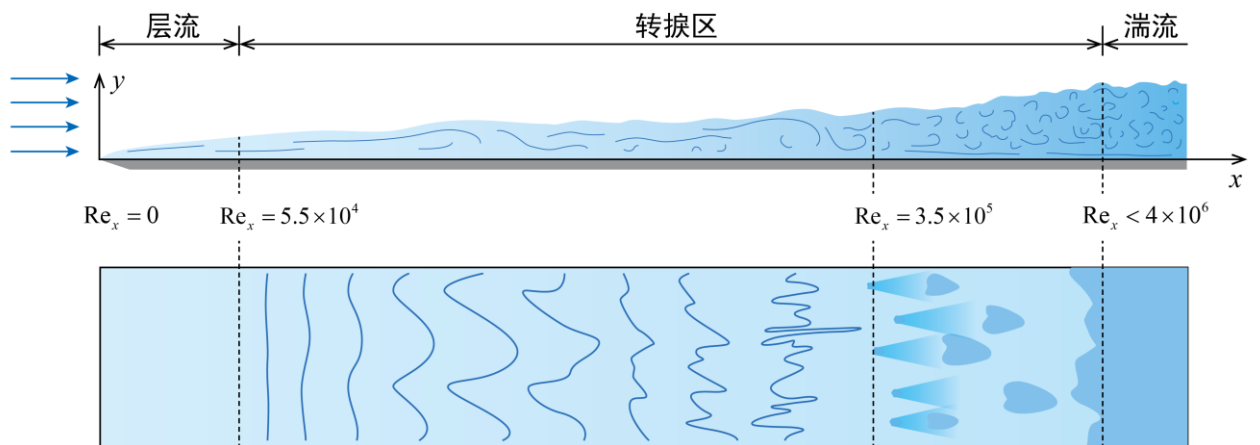
- 在附面层中：
  - 流速由壁面上的零值急剧增加到自由来流速度相同的数量级。
  - 沿物面法向方向的速度梯度很大，即使流体粘性系数较小，但粘性应力仍然可以达到一定数值。
  - 由于速度梯度很大，使得附面层的流体有相当大的涡旋强度。
- 附面层以外的区域：
  - 流动的速度梯度很小，粘性影响可以略去，流动看成无粘的，可以按理想流体来处理。
- 流体整个流场可以分区求解：
  - 附面层内，可以运用附面层方程进行求解。
  - 附面层外，无粘理想流求解。

## 7.4 附面层基础知识



### 7.4.2 附面层转捩

- 附面层内的流动也有层流和湍流/紊流之分;
- 实验观察到, 流体从平板前沿起形成层流附面层;
- 而后某处开始, 流动变的不稳定, 并逐渐过渡到紊流;
- 这个过渡的过程, 称为转捩.



平板附面层转捩

《我所理解的流体力学》

转捩起点到平板前缘的距离为 $X_t$ , 对应于转捩起点A的雷诺数称为临界雷诺数:

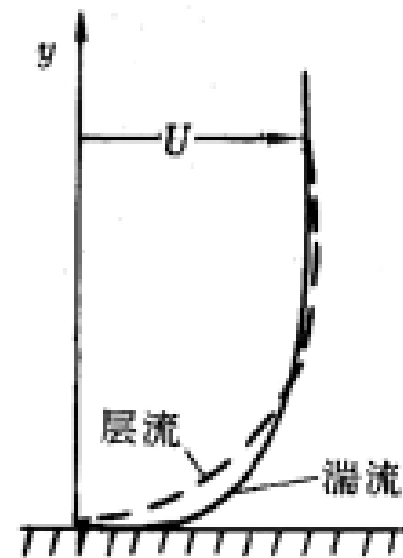
$$Re_{cr} = \frac{V_{\infty} X_t}{\nu}$$

一般情况下, 平板流动临界雷诺数为:

$$Re_{cr} = 5 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$$

- 一般情况下, 层流附面层比紊流附面层“尖锐”, 紊流附面层比层流附面层“饱满”。
- 紊流附面层的分布接近“七分之一”律。

$$\frac{V}{V_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$



速度分布

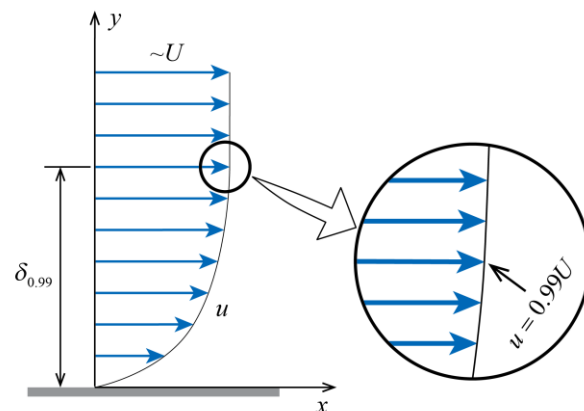
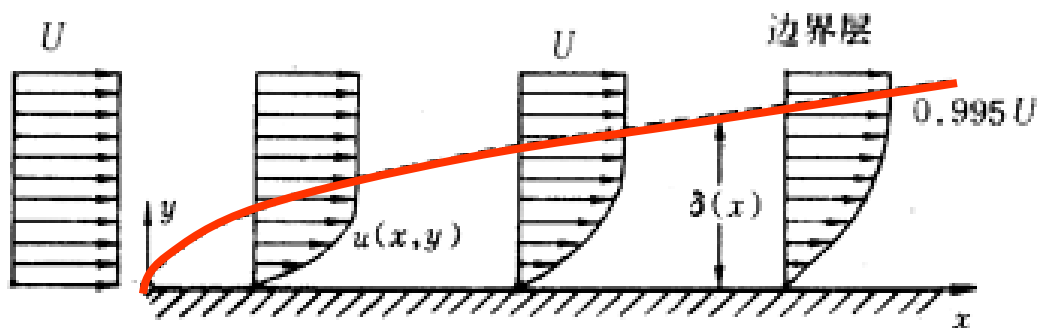
## 7.4 附面层基础知识

### 7.4.3 附面层厚度

#### ▣ 附面层(名义)厚度 $\delta$

由于离物面一定距离后，速度梯度就非常小，以致于可以不计粘性的影响。

如外部无粘流速度为 $U$ ，则通常把各个截面上速度达到 $V_x=0.99U$ ，或 $V_x=0.995U$ 值的所有点的连线定义为附面层边界，而边界到物面的距离定义为附面层厚度（用 $\delta$ 表示）。很显然，面层厚度 $\delta$ 是以速度为标准定义的。



《我所理解的流体力学》

附面层名义厚度

## 7.4 附面层基础知识

### 7.4.3 附面层厚度

#### ▣ 附面层位移厚度 $\delta^*$

附面层内的**质量流量**和**动量**也可以用来定义附面层厚度，分别得到**附面层位移厚度**和**附面层动量损失厚度**

设P点处的附面层厚度为 $\delta$ ，则此处通过附面层的流量为：

$$\int_0^{\delta} \rho V_x dy$$

$\rho$ : 是附面层内流体的当地密度

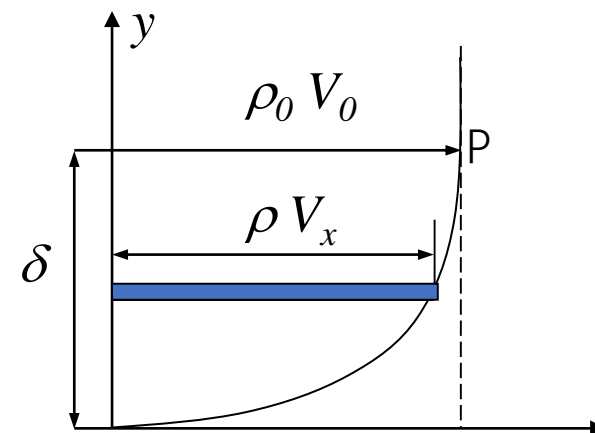
$V_x$ : 是附面层内流体的当地X方向速度.

通过同样大小截面的理想流体的流量为

$$\int_0^{\delta} \rho_0 V_0 dy$$

$\rho_0$ : 是附面层外理想流体的密度

$V_0$ : 是附面层外理想流体的速度.



附面层位移厚度

显然 
$$\int_0^{\delta} \rho_0 V_0 dy > \int_0^{\delta} \rho V_x dy$$

## 7.4 附面层基础知识

### 7.4.3 附面层厚度

#### ▣ 附面层位移厚度 $\delta^*$

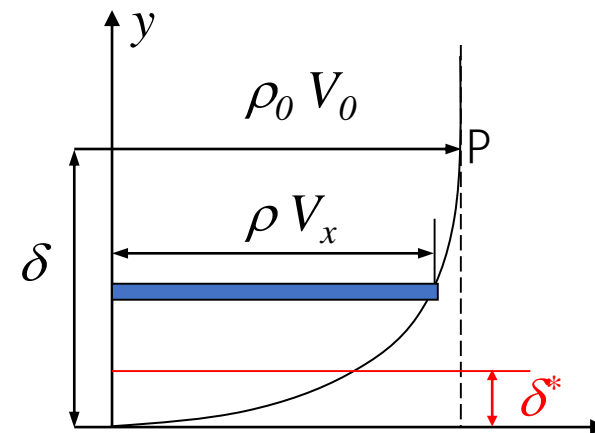
理想流体并不需要 $\delta$ 这么大的截面积，就可以通过相同的流量。粘性流体比理想流体多需要的这一部分截面积，定义为位移厚度 $\delta^*$

$$\rho_0 V_0 (\delta - \delta^*) = \int_0^\delta \rho V_x dy$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho V_x}{\rho_0 V_0}\right) dy$$

对于不可压缩流体：

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{V_x}{V_0}\right) dy.$$



附面层位移厚度

## 7.4 附面层基础知识

### 7.4.3 附面层厚度

#### ▣ 附面层动量损失厚度 $\delta^{**}$



《我所理解的流体力学》

类似地，附面层内流体的流速小于理想流体的流速，相同质量流体输运的动量也会比较少。

$$\int_0^\delta \rho_0 V_x V_0 dy > \int_0^\delta \rho V_x V_x dy$$

相当于损失了一层厚度为 $\delta^{**}$ ，速度为 $V_0$ 、密度为 $\rho_0$ 的流体所具有的动量。这个厚度 $\delta^{**}$ 称为动量损失厚度。

$$\rho_0 V_0^2 \delta^{**} = \int_0^\delta \rho_0 V_x V_0 dy - \int_0^\delta \rho V_x^2 dy$$

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V_x}{V_0} \left(1 - \frac{V_x}{V_0}\right) dy$$

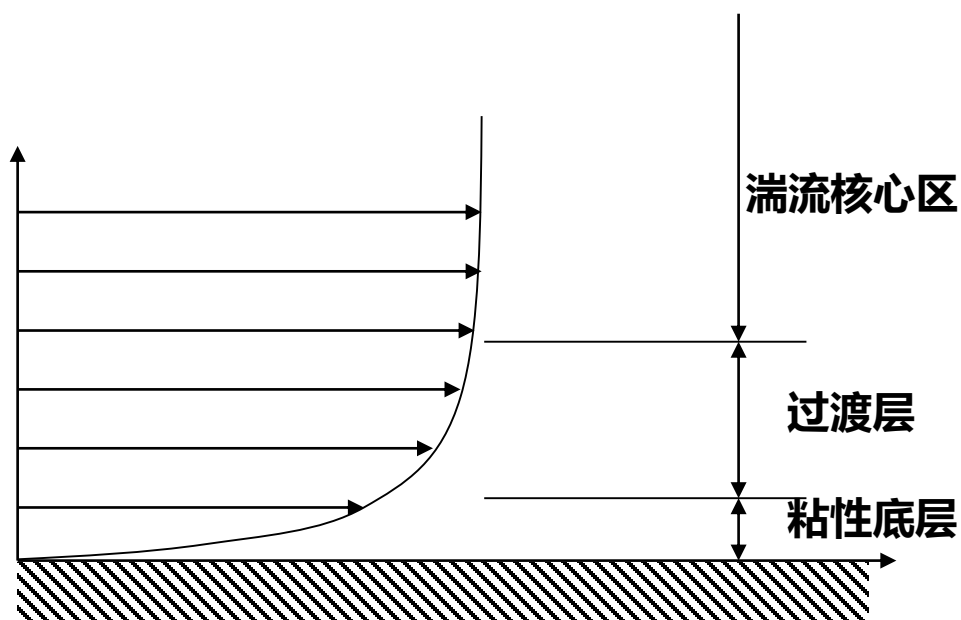
对于不可压缩流体：

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{V_x}{V_0} \left(1 - \frac{V_x}{V_0}\right) dy$$

## 7.4 附面层基础知识

### 7.4.4 湍流附面层的结构

- 湍流附面层由下至上分为三层：
  - 粘性底层
  - 过渡层
  - 湍流核心区

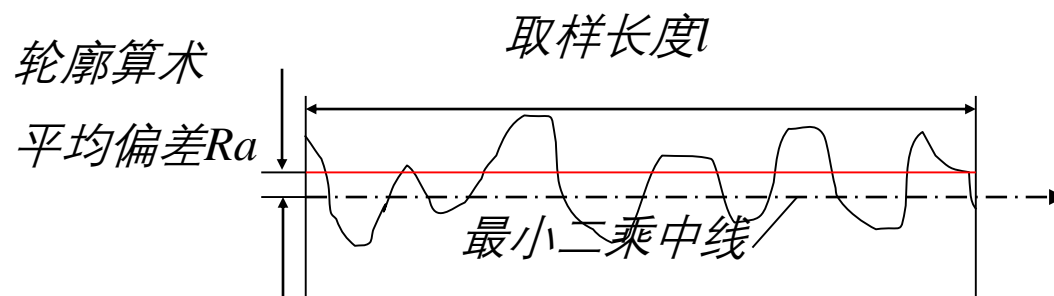


湍流附面层的结构

#### □ 粘性底层 $\delta_l$

- 湍流受到壁面限制，流动处于层流状态，分子粘性占优 $\tau >> \tau_t$ ;
- 很薄，一般不到1mm，约占整个附面层2%;
- 对损失影响很大，与壁面粗糙度 $\Delta$ 有关。

#### □ 光滑管和粗糙管



当 $\delta_l \geq \Delta$ ，水力光滑管；

当 $\delta_l < \Delta$ ，水力粗糙管。

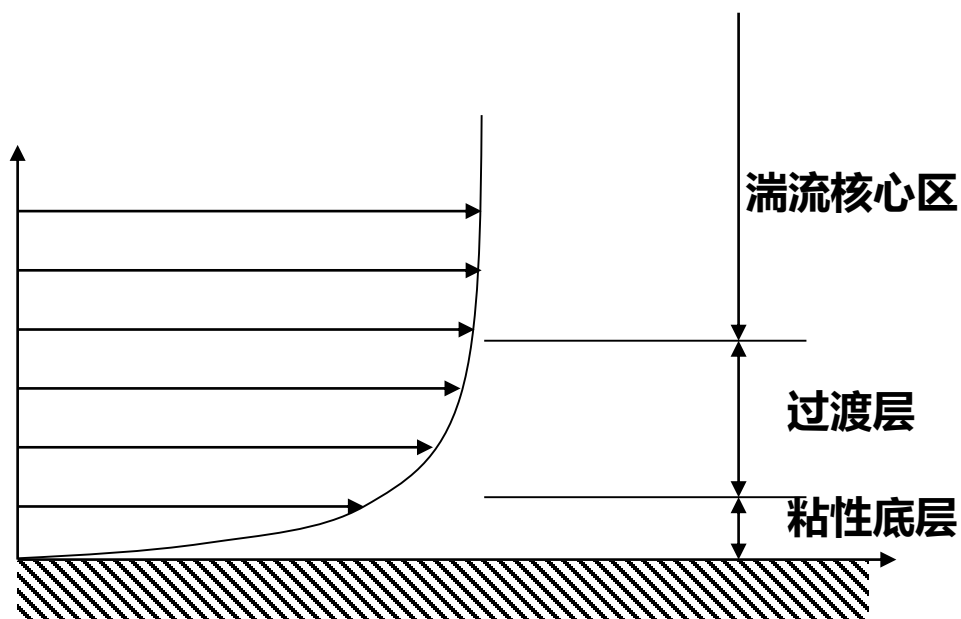
$$\delta_l = \frac{32.8d}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}$$

## 7.4 附面层基础知识

### 7.4.4 湍流附面层的结构

□ 湍流附面层由下至上分为三层：

- 粘性底层
- 过渡层
- 湍流核心区



湍流附面层的结构

在粘性底层内，可以认为速度呈线性分布，根据牛顿内摩擦定律：

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} = \mu \frac{V}{y} = \tau_0$$

$\tau_0$ 为壁面剪应力。

□ 定义摩擦速度：是衡量壁面湍流速度很好的尺度

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \rightarrow V_*^2 = \frac{\nu V}{y} \quad \text{或} \quad \frac{V}{V_*} = \frac{V_* y}{\nu}$$

定义：无量纲速度  $u^+ = \frac{V}{V_*}$

无量纲离壁距离：  $y^+ = \frac{V_* y}{\nu}$

则粘性底层内的速度分布可表示成：  $u^+ = y^+$

称线性律。



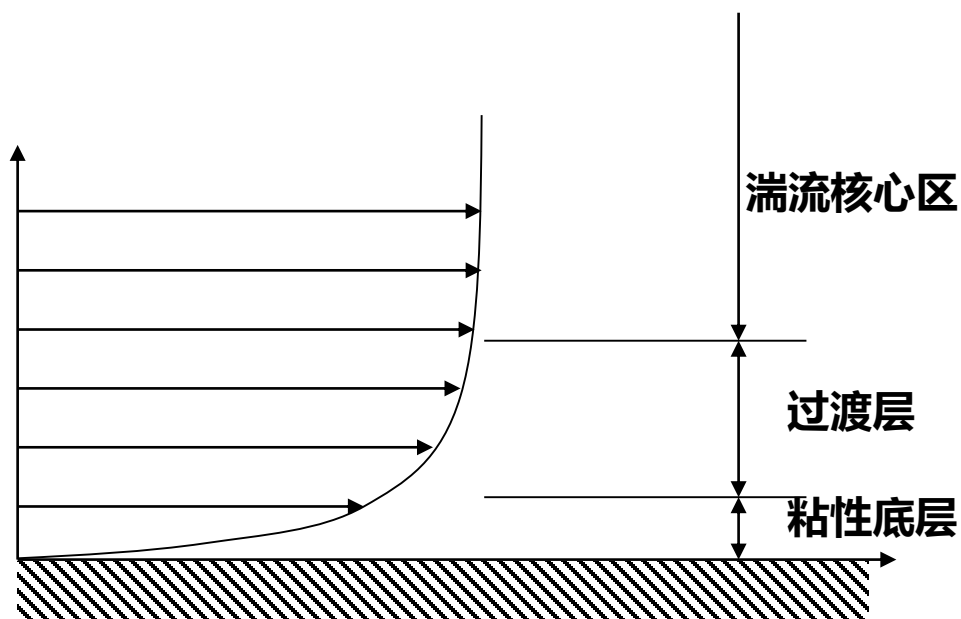
## 7.4 附面层基础知识



### 7.4.4 湍流附面层的结构

□ 湍流附面层由下至上分为三层：

- 粘性底层
- 过渡层
- 湍流核心区



湍流附面层的结构

#### □ 湍流核心区

■ 湍流充分发展,  $\tau_t \gg \tau$

■ 根据普朗特的混合长度理论：

$$\tau_t = \rho l^2 \left( \frac{dV}{dy} \right)^2$$

其中  $l = ky$  称混合长度，为流体微团运动自由程。

如果认为  $\tau_t \approx \tau_0$ ，则：

$$\tau_0 = \rho l^2 \left( \frac{dV}{dy} \right)^2$$

利用摩擦速度

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = l \frac{dV}{dy} = ky \frac{dV}{dy}$$

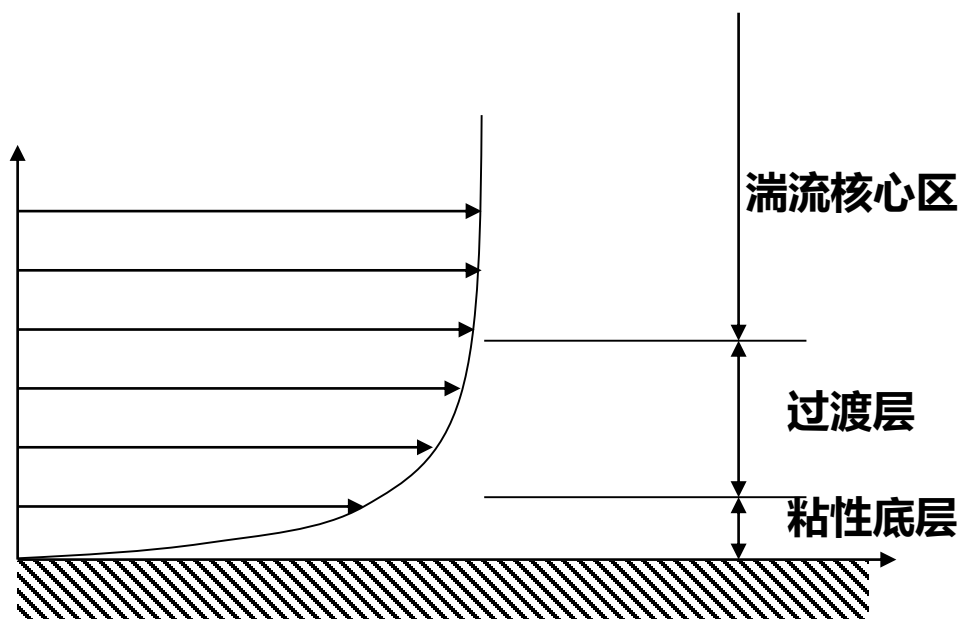
→ 即： $\frac{dV}{V_*} = \frac{dy}{ky}$

## 7.4 附面层基础知识

### 7.4.4 湍流附面层的结构

□ 湍流附面层由下至上分为三层：

- 粘性底层
- 过渡层
- 湍流核心区



湍流附面层的结构

$$\text{即: } \frac{dV}{V_*} = \frac{dy}{ky}$$

积分之，得： $\frac{V}{V_*} = \frac{1}{k} \ln y + C'$

$$\text{令: } C' = C - \frac{1}{k} \ln \frac{\nu}{V_*}$$

$$\frac{V}{V_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{yV_*}{\nu} + C$$

$$\text{或: } u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + C$$

其中： $k = 0.4$ （冯·卡门常数）， $C = 5.5$ 。

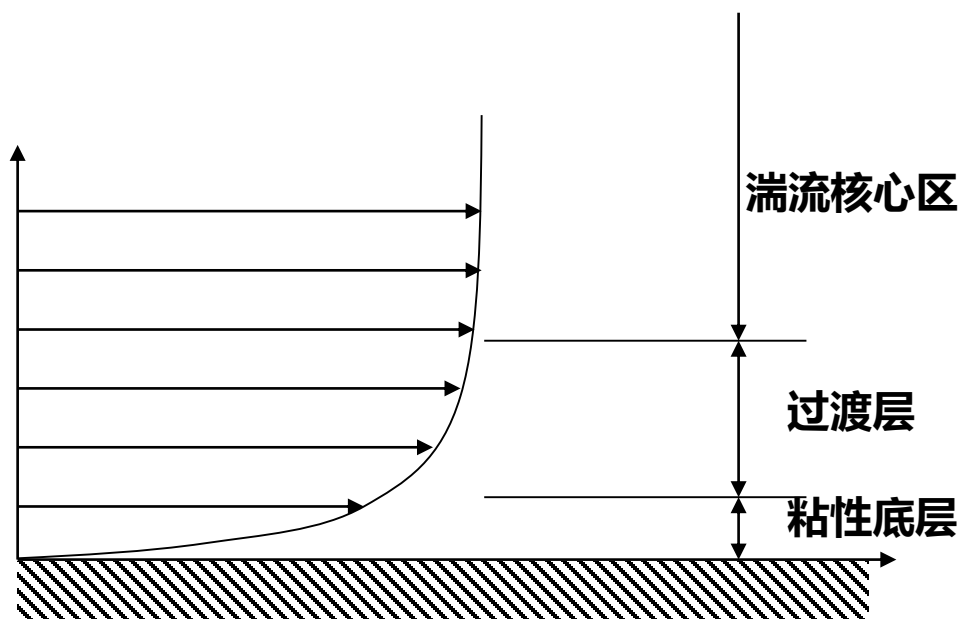
速度满足对数率分布

## 7.4 附面层基础知识

### 7.4.4 湍流附面层的结构

□ 湍流附面层由下至上分为三层：

- 粘性底层
- **过渡层**
- 湍流核心区



湍流附面层的结构

□ 过渡层

- $\tau_t$ 与 $\tau$ 具有相同的量级，研究比较困难，沿用核心区公式。

□ 有量纲值使用范围窄 ( $y$ 值太小)，利用 $y^+$ 定义，可以将附面层划分为三区：

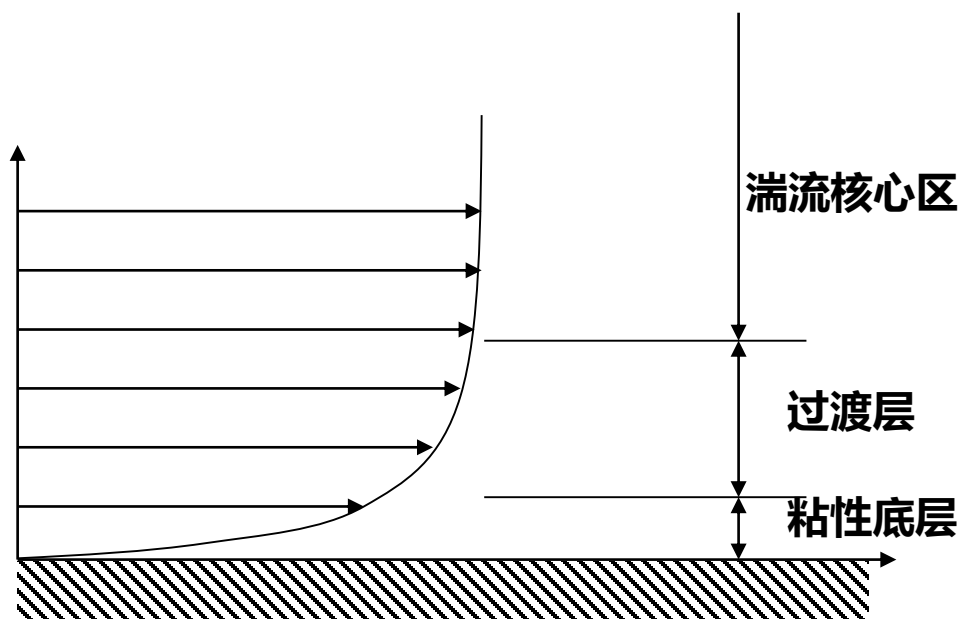
- 粘性底层：  $y^+ < 5$ ;
- 过渡层：  $5 < y^+ < 30$ ;
- 核心区：  $30 < y^+$ 。

## 7.4 附面层基础知识

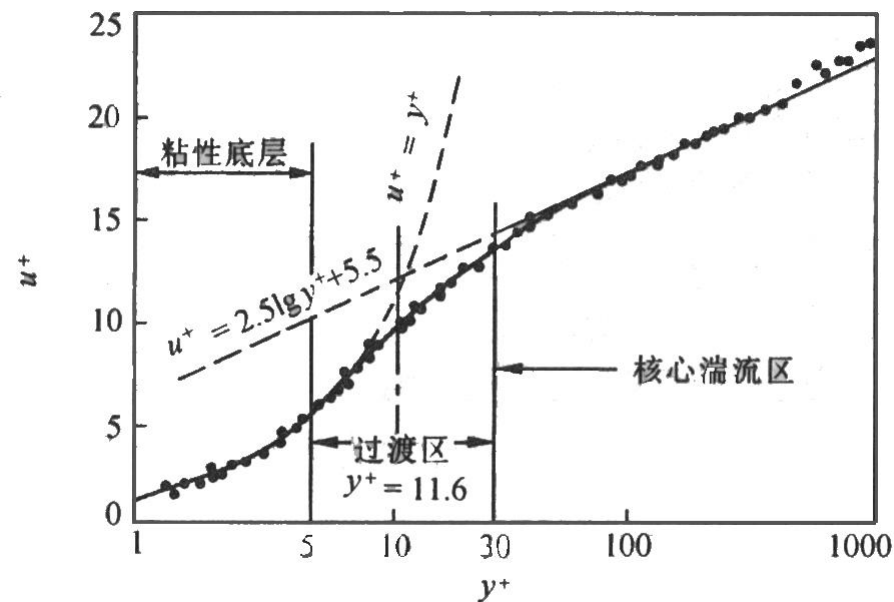
### 7.4.4 湍流附面层的结构

□ 湍流附面层由下至上分为三层：

- 粘性底层
- 过渡层
- 湍流核心区



湍流附面层的结构



湍流附面层壁面律

以上划分太复杂，工程上经常采用指数速度分布规律

$$\frac{V}{V_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

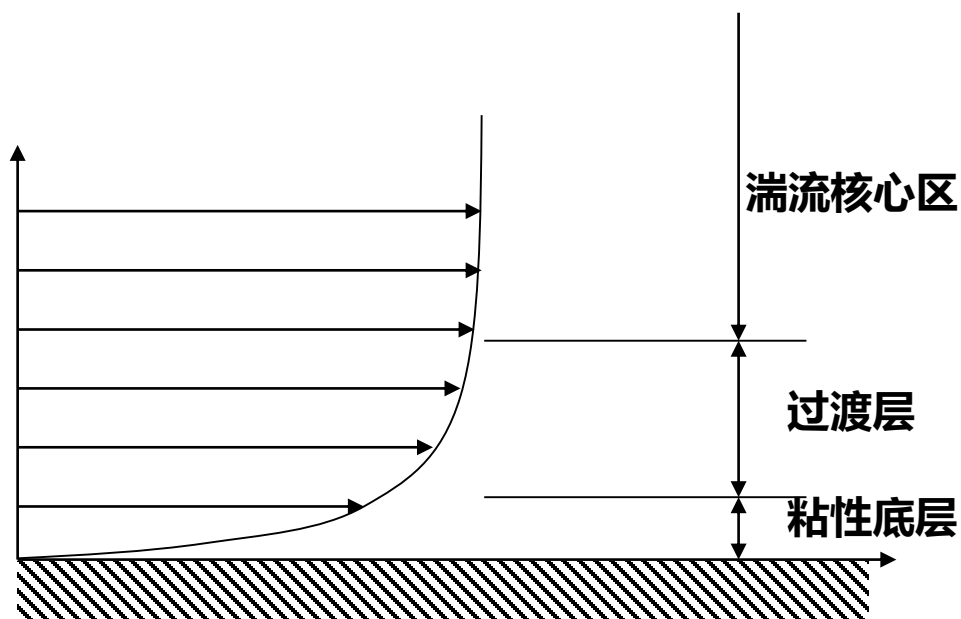
根据速度分布积分流量 $Q$ 可以得到平均速度。

## 7.4 附面层基础知识

### 7.4.4 湍流附面层的结构

□ 湍流附面层由下至上分为三层：

- 粘性底层
- 过渡层
- 湍流核心区



湍流附面层的结构

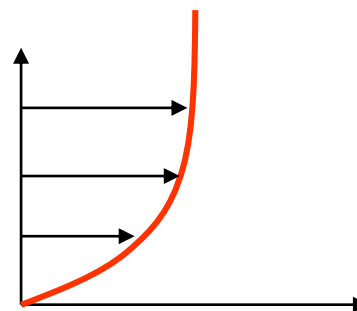
□ 根据速度分布积分流量 $Q$ ，可以得到平均速度：

$$\bar{V} = V_{\max} - 3.75V_*$$

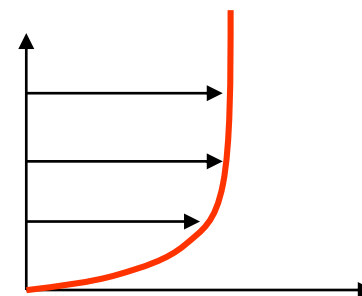
□ 经实验修正为：

$$\bar{V} = V_{\max} - 4.07V_*$$

□ 平均速度与最大速度的比值一般约**0.8~0.85**，如果采用1/7率，则为**0.817**，而层流为**0.5**。这说明：湍流速度分布比较均匀，速度型比较饱满。



层流



湍流

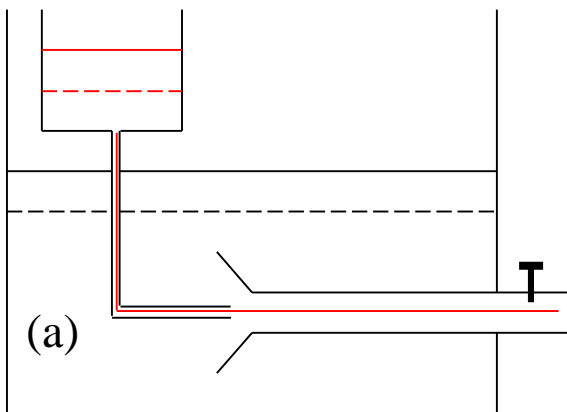
## 7.5 管道内的流动损失与湍流

- 流动与损失分类
- 管道内的层流流动
- 管道内的湍流流动

# 7.5 管道内的流动损失与湍流

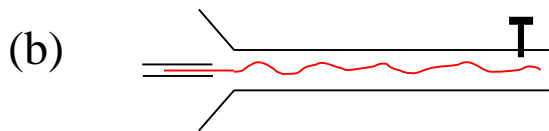
## 7.5.1 流动与损失分类

### ▣ 管道内流动分类：层流和湍流

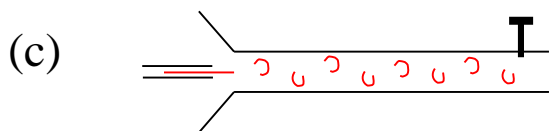


$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} (= \frac{V d}{\nu})$$

$$Re_{cr} = 2320$$



$$Re'_{cr} = 13800$$



### 非圆形截面的管道的雷诺数

要用当量直径来作为计算雷诺数的特征尺寸

**湿周长 $\chi$** ：液体与壁面接触的周长；

**水力半径 $R$** ：  $R = \frac{A}{\chi}$ , 其中 $A$ 为流通面积；

代表流通能力，圆管最大，为 $d/4$

**当量直径 $d_e$** ：按水力半径相等的原则将非圆管折合成圆管

$d_e/4 = A/\chi$ , 则它的当量直径为 $d_e (= 4R)$

## 7.5 管道内的流动损失与湍流

### 7.5.1 流动与损失分类

#### ▣ 管道内流动损失分类

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C$$

- ◆ 根据一维不可压流的伯努利定理，流动过程中**总水头**保持不变。但实际上由于粘性的作用，总水头会下降，称为**损失**。
- ◆ 根据损失产生的机理和表现形式，可以把流动损失分为匀直管中的**沿程损失**以及管道构件和管道连接件中的**局部损失**。

#### ✓ 沿程损失

- ◆ 沿流动路程上由于各流体层之间的内摩擦而产生的流动损失,其数值大小与管道的长度成正比。

#### ✓ 局部损失

- ✓ 流体在流动中因遇到局部障碍而产生的损失。
- ✓ 所谓局部障碍,包括流道发生弯曲,流通截面突然扩大或缩小,流道中遇到各种物体如阀门等。
- ✓ 这种损失只有在局部障碍周围发生,故称为局部损失。

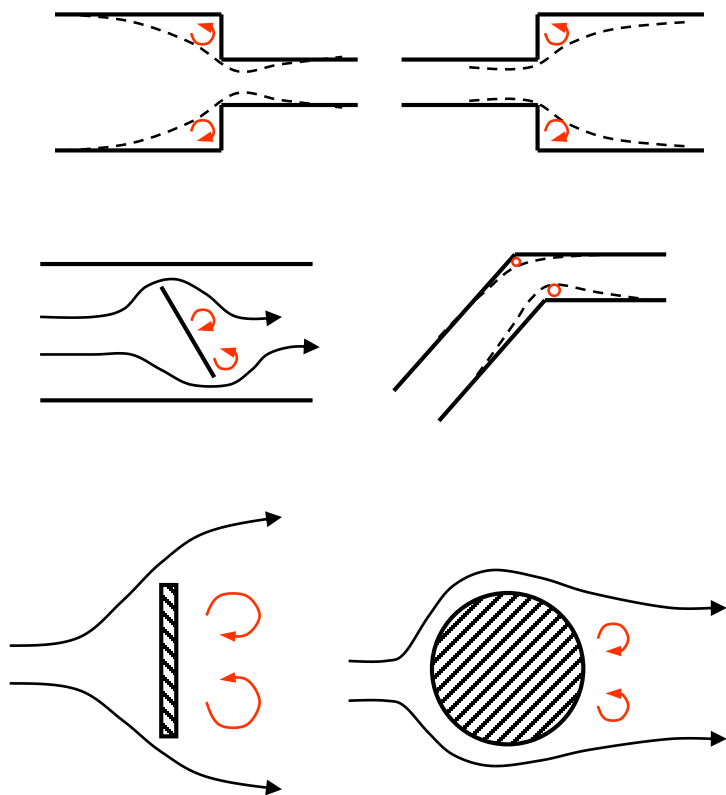


## 7.5 管道内的流动损失与湍流

### 7.5.1 流动与损失分类

#### ▣ 管道内流动损失分类

##### 几种局部损失



不可压流体的伯努利方程为：
$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = H_0$$

当有摩擦时,总水头下降。设下降的水压头为 $h_w$ ,叫损失头

雷诺总结:

对于层流  $\lg h_w = \lg k_1 + m_1 \lg V$

对于湍流  $\lg h_w = \lg k_2 + m_2 \lg V$

根据实验:  $m_1=1$ ,  $m_2=1.75\sim 2$

由此可知, 必先确定流动状态, 然后才能计算损失。

## 7.5 管道内的流动损失与湍流

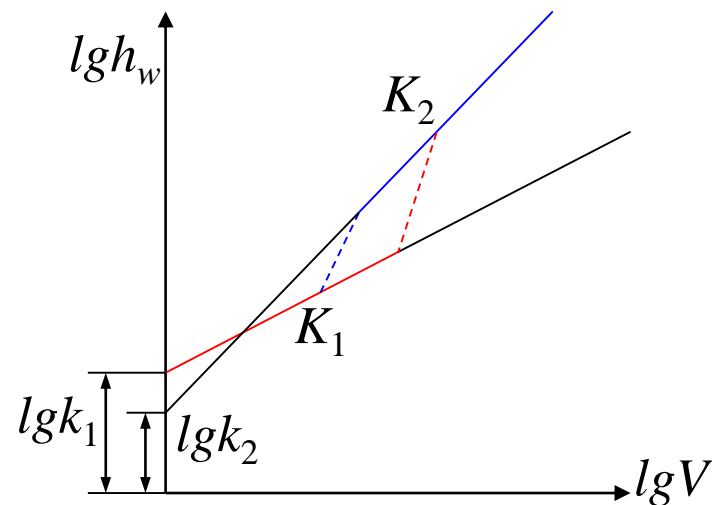
### 7.5.1 流动与损失分类

#### ▣ 管道内流动损失分类

$m_2 > m_1$ , 湍流损失大于层流损失. Why?

两种流动状态产生粘性的机理是不同的:

- ▣ 层流中粘性力的产生是由于分子间吸引力和分子动量交换;
- ▣ 而在湍流中流体微团的脉动是产生湍流粘性的主要原因, 其强度比层流状态下大得多。



对于层流  $\lg h_w = \lg k_1 + m_1 \lg V$

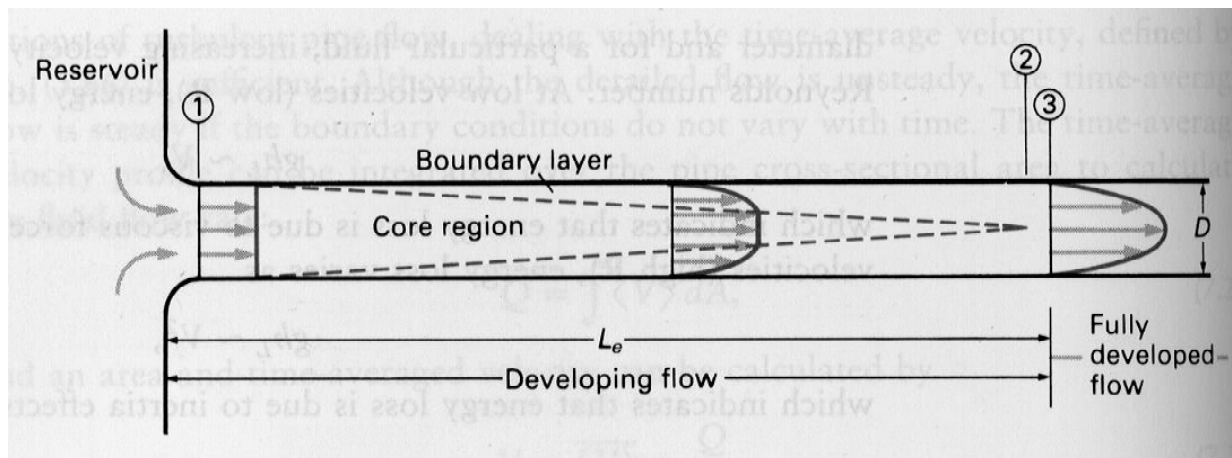
对于湍流  $\lg h_w = \lg k_2 + m_2 \lg V$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = H_0$$

## 7.5 管道内的流动损失与湍流

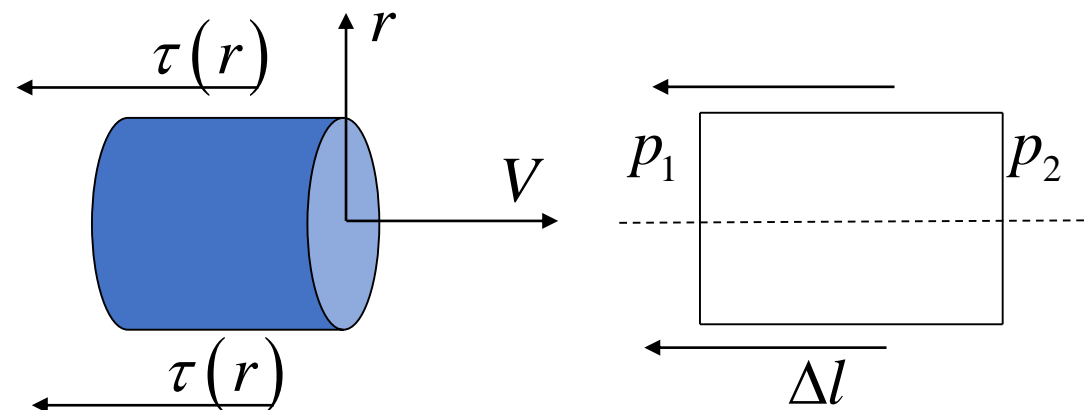
### 7.5.2 管道内的层流流动损失

#### ▣ 速度分布



管道内的层流

- ◆ 入口段结束处管长与直径之比 $L_e/D$ 约为20
- ◆ 为了讨论沿程损失,只讨论充分发展的管流.即截面③以后的流动.因为一般的管道都比较长
- ◆ 在充分发展的管流中流动是对称的; 只有沿径向的差别 $V(r)$ , 而没有流向的速度变化



设圆柱半径为 $r$ , 长度为 $\Delta l$ ,  
两端静压分别为 $p_1, p_2$ ; 半径 $r$ 处的  
切应力为 $\tau(r)$

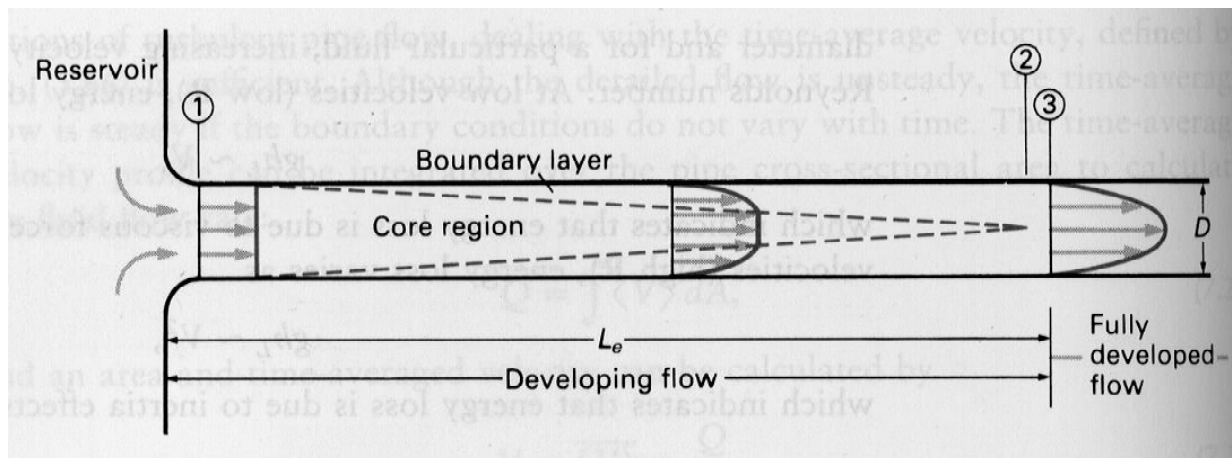
圆柱两端受静压, 柱面受摩擦力, 没有加速度, 由牛顿定律得:

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r \Delta l = 0$$

## 7.5 管道内的流动损失与湍流

### 7.5.2 管道内的层流流动损失

#### ▣ 速度分布



管道内的层流

- ◆ 入口段结束处管长与直径之比 $L_e/D$ 约为20
- ◆ 为了讨论沿程损失,只讨论充分发展的管流.即截面③以后的流动.因为一般的管道都比较长
- ◆ 在充分发展的管流中流动是对称的; 只有沿径向的差别 $V(r)$ , 而没有流向的速度变化

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r \Delta l = 0$$

$$\longrightarrow \Delta p \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r \Delta l = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\Delta p r}{2\Delta l} = \tau(r)$$

$\tau$ 呈线性分布。当 $r = r_0$ 时,  $\tau_0 = \frac{\Delta p r_0}{2\Delta l}$ ,  
称为壁面剪应力。

根据牛顿剪应力定律:  $\tau = -\mu \frac{dV(r)}{dr}$

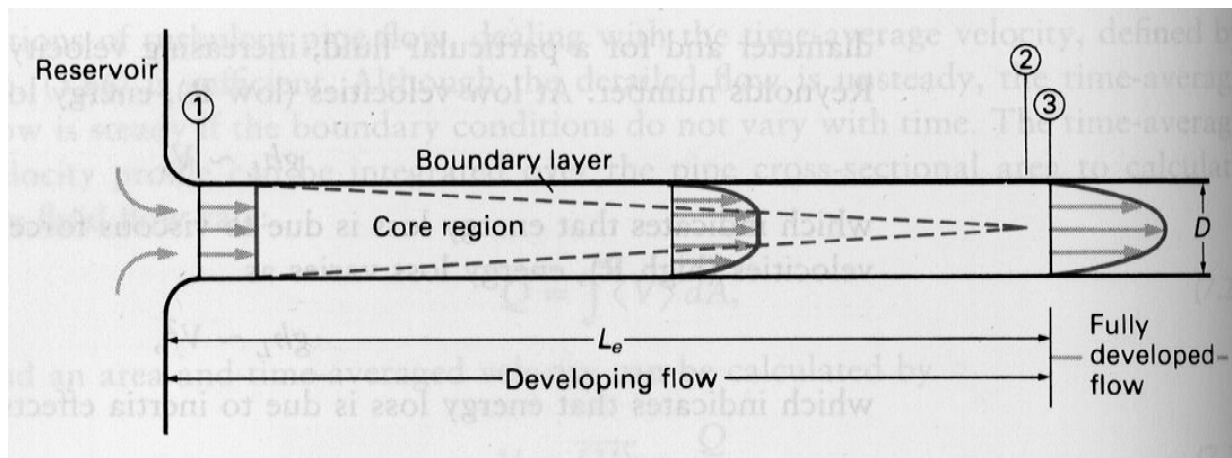
两式连立得:  $\frac{\Delta p r}{2\Delta l} = -\mu \frac{dV(r)}{dr}$

解微分方程:  $V(r) = -\frac{\Delta p r^2}{4\mu \Delta l} + C$

## 7.5 管道内的流动损失与湍流

### 7.5.2 管道内的层流流动损失

#### ▣ 速度分布



#### 管道内的层流

- ◆ 入口段结束处管长与直径之比  $L_e/D$  约为20
- ◆ 为了讨论沿程损失,只讨论充分发展的管流.即截面③以后的流动.因为一般的管道都比较长
- ◆ 在充分发展的管流中流动是对称的; 只有沿径向的差别  $V(r)$ , 而没有流向的速度变化

解微分方程: 
$$V(r) = -\frac{\Delta p r^2}{4\mu\Delta l} + C$$

边界条件, 壁面无滑移条件:

$$r = r_0 \text{ 时, } V(r_0) = 0;$$

$$V(r) = \frac{\Delta p}{4\mu\Delta l} (r_0^2 - r^2)$$

速度分布为抛物面, 在  $r = 0$  处速度最大:

$$V_{\max} = \frac{\Delta p}{4\mu\Delta l} r_0^2$$

速度也可以表示为:

$$V = V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

平均速度为:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^{r_0} V 2\pi r dr}{\pi r_0^2} = \frac{V_{\max}}{2} = \frac{\Delta p}{8\mu\Delta l} r_0^2$$

## 7.5 管道内的流动损失与湍流

### 7.5.2 管道内的层流流动损失

#### ▣ 沿程损失计算

利用推广的伯努利方程,1,2两截面间的参数有如下关系

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_w$$

对于水平管, 如果维持速度不变, 则:

$$h_w = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

说明: 维持速度不变, 需要付出压力能!

下面用管道几何参数替换 $\Delta p$ 得到其实用形式。

$$\text{利用 } V_{\max} = \frac{\Delta p}{4\mu\Delta l} r_0^2$$

$$h_w = \frac{4\mu l V_{\max}}{\gamma r_0^2} = \frac{8\mu l \bar{V}}{\gamma r_0^2} = \frac{64\mu l}{\rho \bar{V} d^2} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\text{注意到: } \text{Re} = \frac{\rho \bar{V} d}{\mu}$$

$$\text{得: } h_w = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (\text{此式仅对层流成立})。$$

## 7.5 管道内的流动损失与湍流

### 7.5.2 管道内的层流流动损失

#### ▣ 沿程损失计算

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

上式称为**达西-威斯巴赫**公式。

显然，管道几何因素和动力学因素对沿程损失的 $h_w$ 影响：

- 与管长成正比
- 与管径直径成反比
- 与平均速度平方成正比
- 比例系数 $\lambda$  称为**沿程损失系数**。

$\lambda$ 与壁面剪应力 $\tau_0$ 关系：

$$\tau_0 = \frac{\Delta p r_0}{2\Delta l} = \frac{\lambda}{8} \rho \bar{V}^2$$

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

## 7.5 管道内的流动损失与湍流

### 7.5.3 管道内的湍流流动损失

#### ▣ 计算方法（与层流情形相比）

- ◆ 湍流沿程损失的决定因素与层流相同，可应用同样的公式，变化在于沿程损失系数 $\lambda$ 。
- ◆ 实际应用中可根据雷诺数和相对粗糙度 $\Delta/d$ 选用合适的沿程损失系数 $\lambda$ 计算公式。

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

- ◆ 工程实际管道有别于人工粗糙管，具体情况差别较大，使用时可参考有关手册。工程上在整个湍流区，可使用以下经验公式：

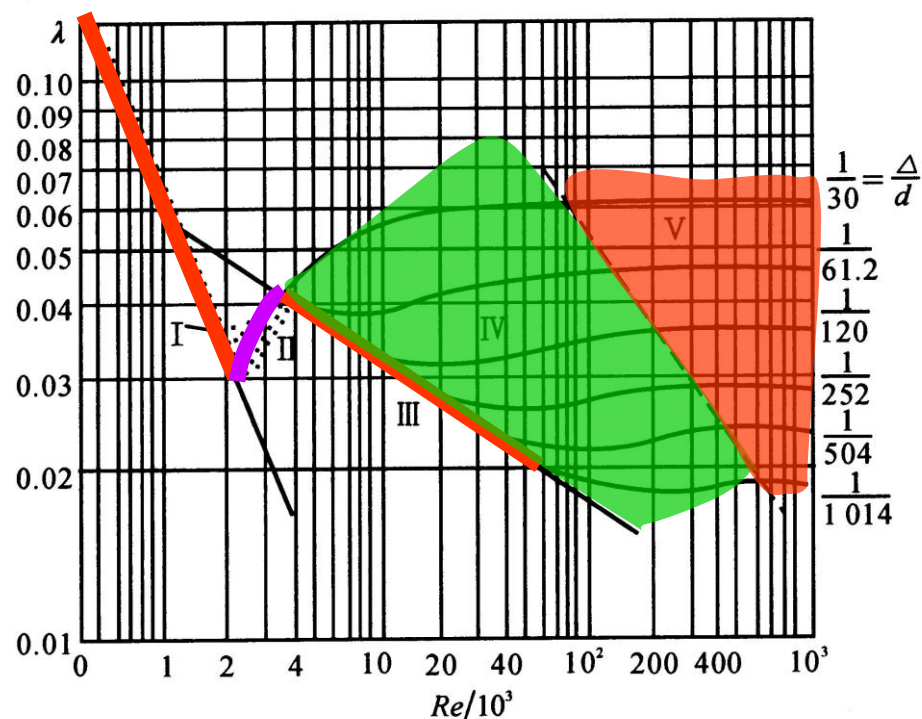
$$\lambda = 0.11 \left( \frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0.25}$$



## 7.5 管道内的流动损失与湍流

### 7.5.3 管道内的湍流流动损失

#### ▣ 实验研究—尼古拉兹实验



尼古拉兹实验曲线

尼古拉兹实验曲线分为**5个区**

- 1、**层流区**:  $Re < 2320$ ,  $\lambda = 64/Re$
- 2、**过渡区**:  $2320 < Re < 4000$ ,  $\lambda = 0.0025 Re^{1/3}$
- 3、**光滑管区**:  $4000 < Re < 80(d/\Delta)$   
勃拉修斯公式 ( $4000 \leq Re \leq 10^5$ ):  $\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}$   
尼古拉兹公式 ( $10^5 < Re \leq 3 \times 10^6$ ):  
 $\lambda = 0.0032 + 0.221 Re^{-0.237}$  或:  $\lambda = [2 \lg(Re/\sqrt{\lambda}) - 0.8]^{-2}$
- 4、**粗糙管区**:  $80(d/\Delta) < Re < 4160(d/2\Delta)^{0.85}$   
考尔布鲁克公式:  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg\left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\Delta}{3.7d}\right)$
- 5、**阻力平方区**:  $Re > 4160(d/2\Delta)^{0.85}$

$$\lambda = \left(2 \lg \frac{d}{2\Delta} + 1.74\right)^{-2}$$

□P290页:

10.10

□P107页:

4.1, 4.5, 4.7, 4.10



北京航空航天大学  
BEIHANG UNIVERSITY

**THE END.**

