北航宇航学院

空气动力学(32学时)

主讲：覃粒子　　　陈　兵

qlz@buaa.edu.cn　　Markchien@buaa.edu.cn

沙河主楼D510，13911744896　　沙河主楼D519，13683012881

2024年 春季学期

内容提要

第二讲 流体静力学（2/2）

- 流体的特性
- 流体中的力
- 欧拉静平衡方程
- 流体的相对静止
- 流体对物体的作用力

流体静止/相对静止的时候所满足的方程及其应用

2.5 流体对物体的作用力

- 流体对平面的作用力
- 流体对曲面的作用力
- 浮力定律

确定流体对平面作用力的方向、大小和力的作用点（压心）位置

知识回顾

几个思考题

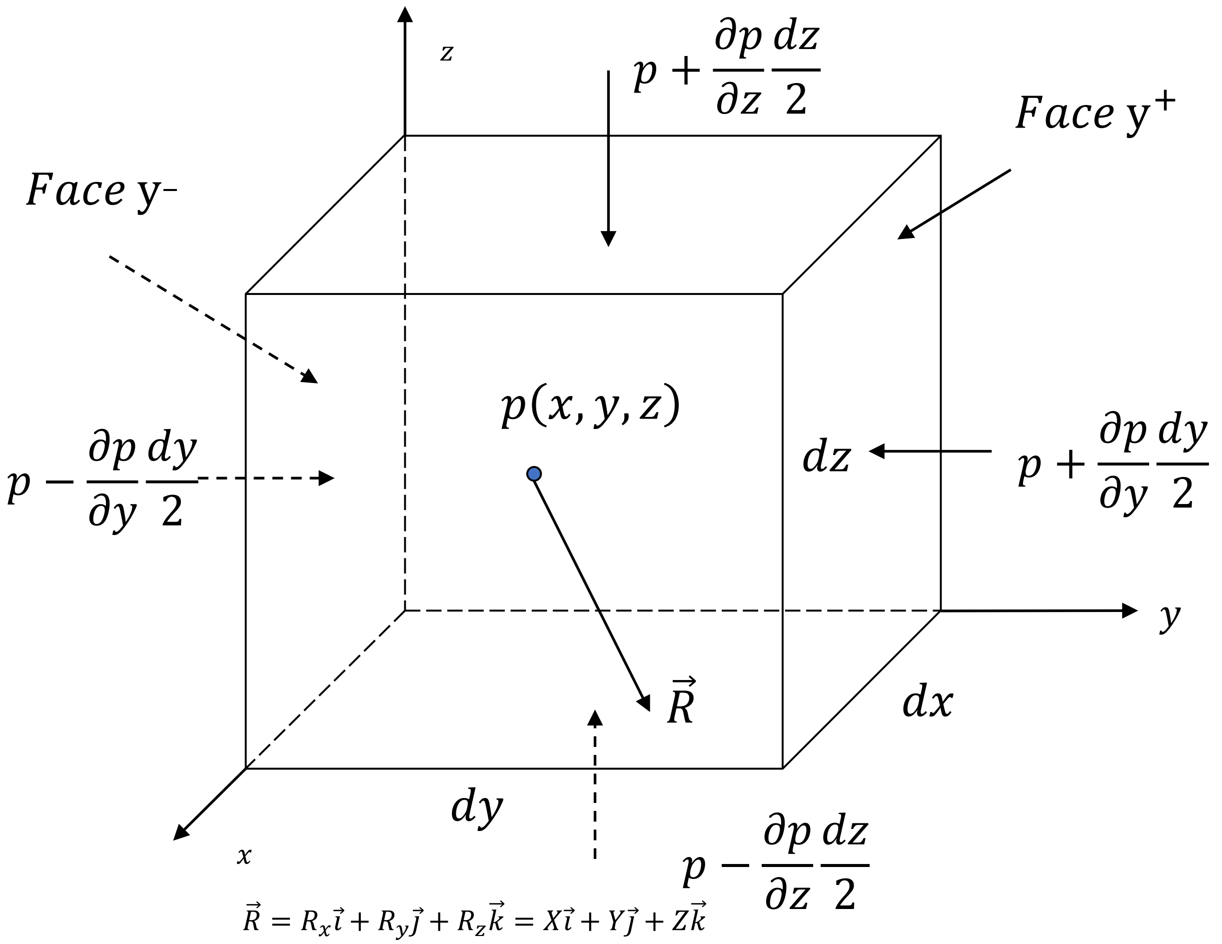
1. 液体以任意速度V水平流动，自由液面上压强为p_0，液面下h深处压强为$p_0+\gamma h$。
2. 液体以任意速度V非水平流动，自由液面上压强为p_0，液面下h深处压强为__________。
3. 流体的粘性是由流动流体的__________和__________所引起的。
4. 当温度升高时，液体的粘性__________，气体的粘性__________。
5. 作用在流体上的力按作用方式分为__________和__________。
6. 欧拉静平衡方程的表达式为__________，它描述了在静止流体中__________和单位质量力（及密度）的关系。
7. 设稀薄气体的分子自由程是几米的数量级,问下列哪种情况连续介质假设成立?

   (1)人造卫星在飞离大气层进入稀薄气体层.

   (2)假想地球在这样的稀薄气体中运动.

知识回顾

- **什么是流体?**
  - 易流性、物质三态的力学特性
- **连续介质假说**
  - 流体质点、连续介质假说、努森数
- **流体物理量的定义**
- **流体的粘性**
  - 粘性产生的原因、牛顿内摩擦定理
- **流体的导热性**
  - 热传导、对流和辐射
- **流体的压缩性和膨胀性**
  - 压缩系数、膨胀系数
- **流体中的力**
  - 质量力、表面力、流体微元的受力、压强的两个特性
- **欧拉静平衡方程**
  - 绝对静止流体、相对静止流体
  - 应用：等压面、等势面、压力分布



$$0=\rho\vec{R}-\nabla p$$

水平加速流体内部的压强分布

质量力为:

$$\vec{R} = -g\vec{k} - a\vec{i}$$

代入欧拉静平衡方程积分

$$p = \int \rho(-g\vec{k} - a\vec{i}) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int \rho(-g\vec{k} - a\vec{i}) \cdot (dx\vec{i} + dz\vec{k})$$

$$= -\rho g z - \rho a x + const$$

引入积分常数

当$x = 0, z = 0$时, $p = p_0$

$$p = -\rho g z - \rho a x + p_0$$

O, P两点的压力差为:

$$p_{OP} = p_P - p_o$$

$$= -\rho g(z_P - z_o) = \gamma \Delta h$$

等压面方程

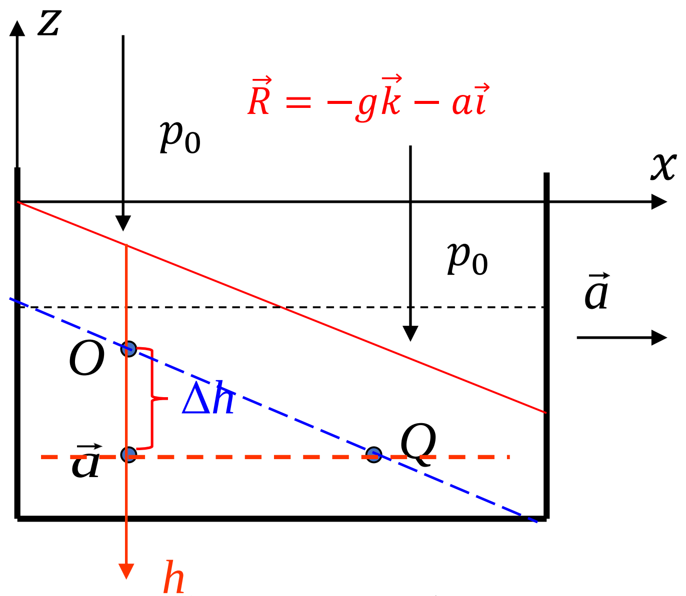
$$const = -gz - ax$$

等压面为斜面簇

自由液面为一个等压面.

$$p_O = p_Q$$

而位于同一水平面上的压力, $p_P > p_Q$



容器有水平加速度$\vec{a}$

如果取自由液面以下h的点, 得:

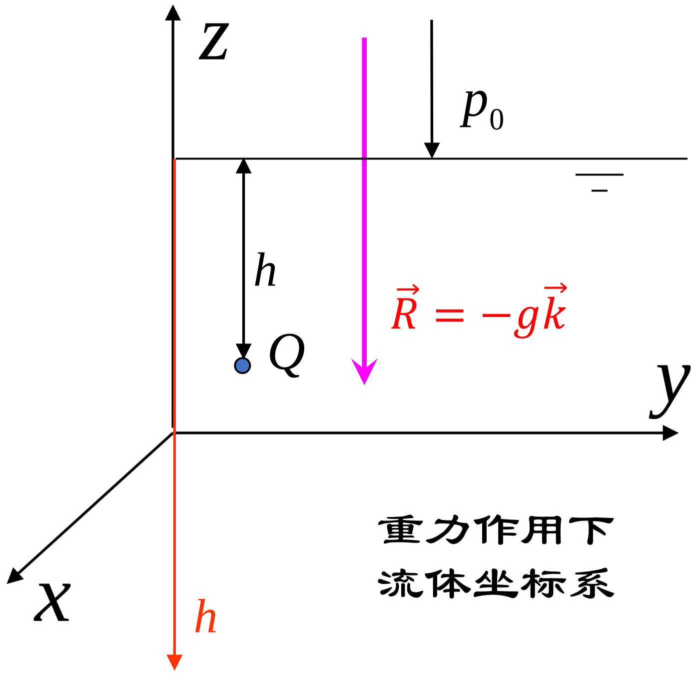
$$p = p_0 + \gamma h$$

$\boxed{\text{压强 = 自由液面压强 + 液柱压强}}$

知识回顾

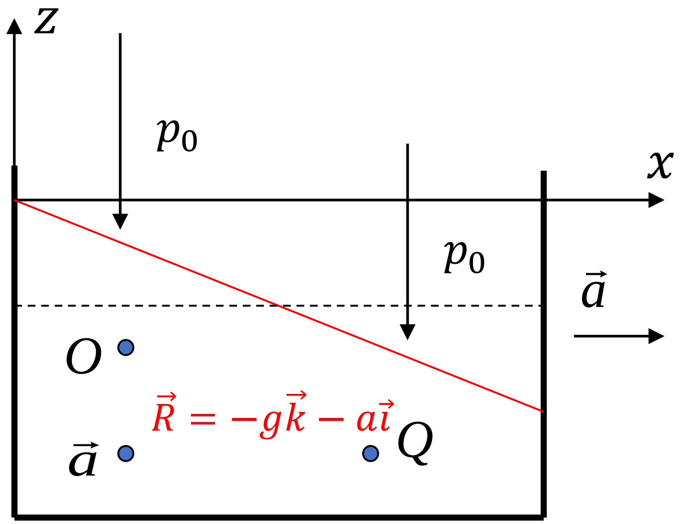
流体内部的压强分布

重量作用下流体内部的压强分布



$$p=p_0+\gamma h$$

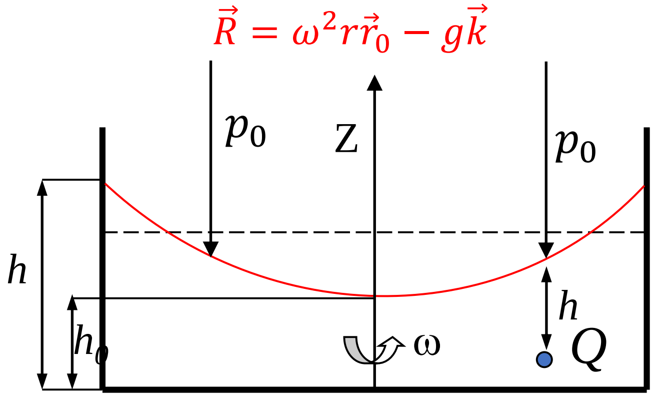
加速水平加速流体内部的压强分布



容器有水平加速度$\vec{a}$

$$p=p_0+\gamma h$$

绕轴旋转流体内部的压强分布



圆柱形容器以ω绕轴转动

$$p=p_0+\gamma h$$

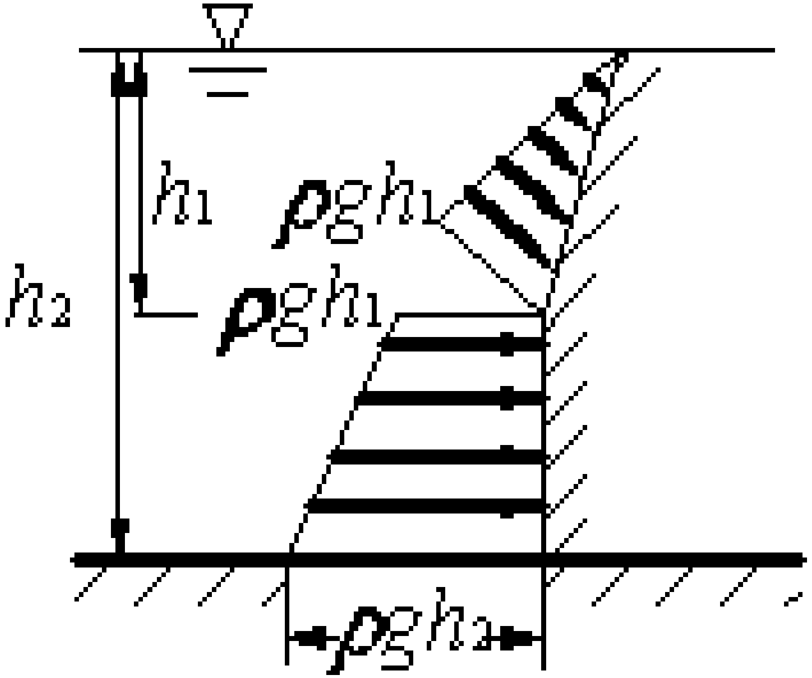
流体压强 = 自由液面压强 + 液柱压强

在竖直方向，只有重力质量力，液体内部压强随深度线性变化

2.5 流体对物体的作用力

2.5.1 对平面的作用力

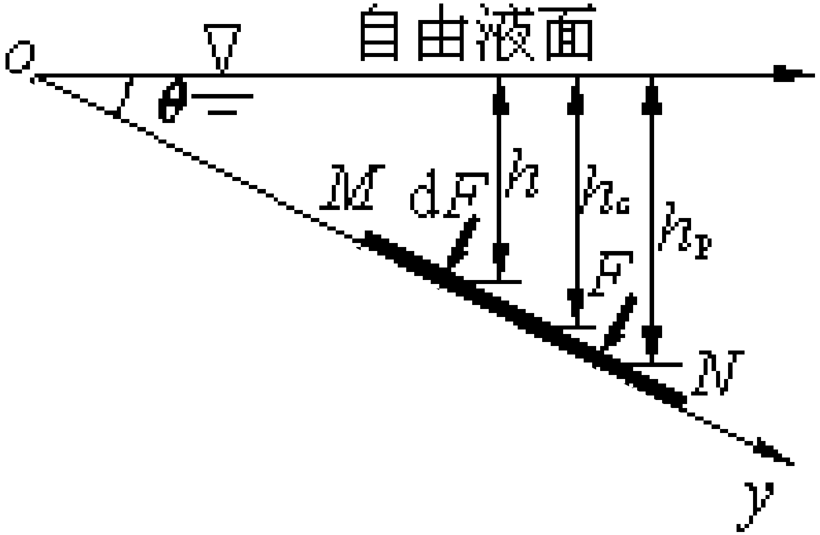
- 重力作用下的压强分布
  - 受压面为平面的情况下，压强分布图的外包线为直线



- MN为任意形状的平面，倾斜放置于水中，与水面成θ角，面积为A，其形心C的坐标为x_c，y_c，形心C在水面下的深度为h_c

力的三要素如何？

- 这里用积分方法求平面上的作用力大小和作用点



流体对平面的作用力求解模型

2.5 流体对物体的作用力

2.5.1 对平面的作用力

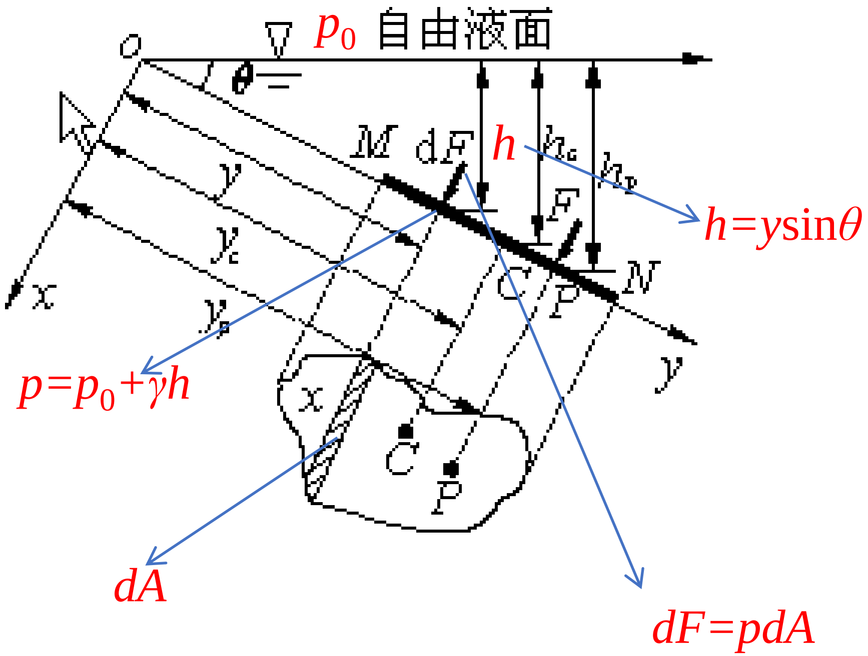
作用力的大小

$$F=\int_A pdA=\int_A(p_0+\gamma h)dA \quad =\int_A(p_0+\gamma y\sin\theta)dA$$

$$=p_0A+\gamma\sin\theta\int_A ydA$$

其中 $\int_A ydA=y_cA$ 为面积静矩

$$F=\int_A pdA=p_0A+\gamma\sin\theta\, y_cA=(p_0+\gamma\sin\theta\, y_c)A=(p_0+\gamma h_c)A=p_cA$$



流体对平面的作用力求解模型

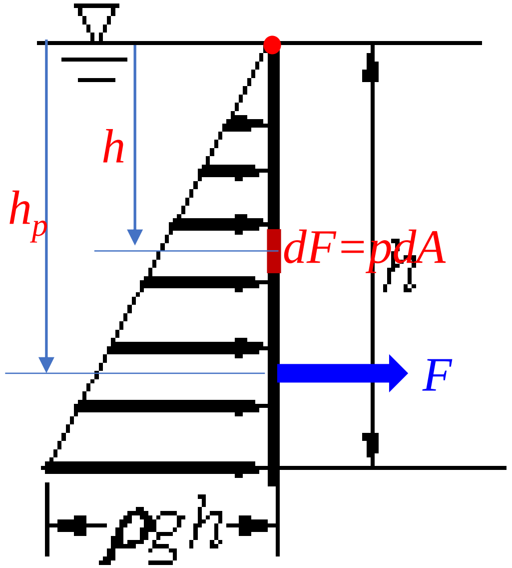
含义：合力F = 几何中心压力p_c × 作用面面积A

2.5.1 对平面的作用力

作用力的作用点

- 那么是否意味着压力的作用点也在形心呢?

- 考虑右图最简单的情况，可以看到压力是线性分布力，其化简结果不在形心。



平行力系对某转轴的力矩之和 = 合力对同一转轴的力矩

2.5.1 对平面的作用力

作用力的作用点— 先求对x轴的力矩

1）通过平行力系积分求解

$$L_x=\int_A ydF=\int_A y\cdot(p_0+\gamma y\sin\theta)\,dA=p_0\int_A ydA+\gamma\sin\theta\int_A y^2dA$$

$$=p_0y_cA+\gamma\sin\theta\,J_x$$

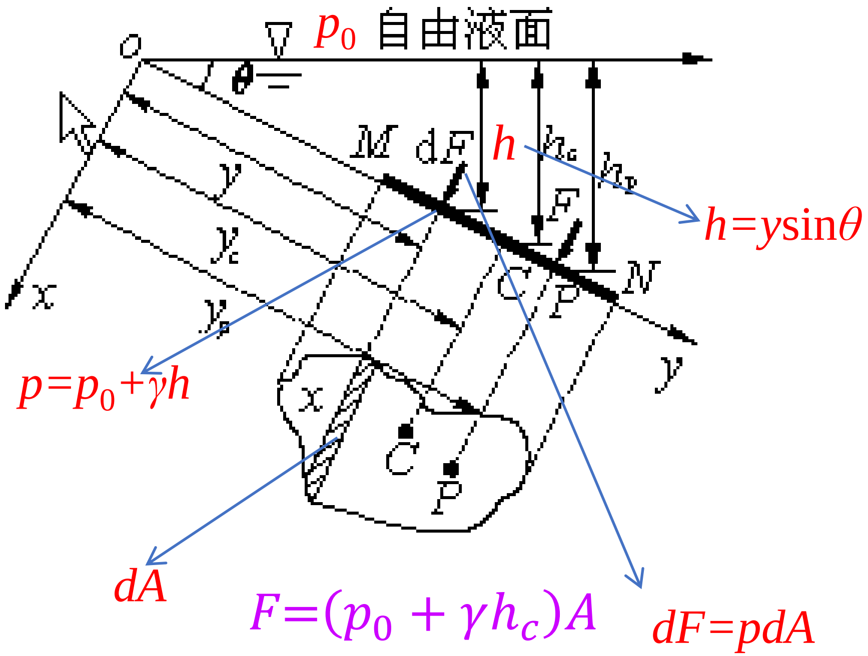
其中$J_x=\int_A y^2dA$ 为对x轴的惯性矩

2）通过合力求解

$$L_x=Fy_P\quad=(p_0+\gamma h_c)Ay_P$$

3）压心的y坐标

$$y_P=\frac{L_x}{F}=\frac{\int_A dF\cdot y}{\int_A dF}=\frac{p_0y_cA+\gamma\sin\theta\,J_x}{(p_0+\gamma\sin\theta\,y_c)A}$$



流体对平面的作用力求解模型

2.5.1 对平面的作用力

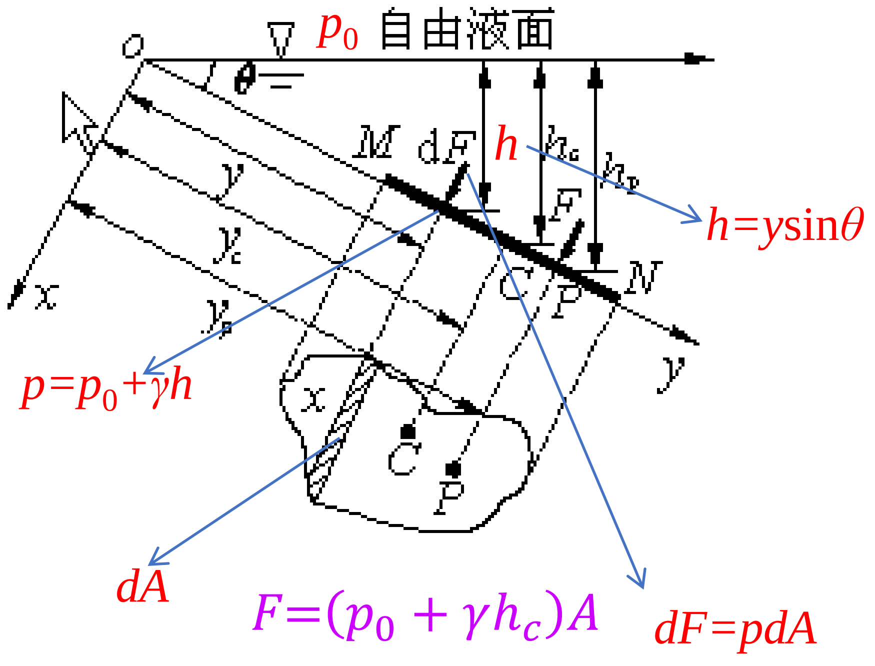
作用力的作用点— 先求对**y**轴的力矩

1）通过平行力系积分求解

$$L_y=\int_A dF\cdot x=\int_A(p_0+\gamma y\sin\theta)\,dA\cdot x\ =p_0\int_A xdA+\gamma\sin\theta\int_A yxdA$$

$$=p_0x_cA+\gamma\sin\theta\,J_{xy}$$

其中$J_{xy}=\int_A yxdA$ 为面积惯性积



流体对平面的作用力求解模型

2）通过合力求解

$$L_y=Fx_P=(p_0+\gamma h_c)Ax_P$$

3）压心的x坐标

$$x_P=\frac{L_y}{F}\cdot=\frac{\int_A dF\cdot x}{\int_A dF}=\frac{p_0x_cA+\gamma\sin\theta\,J_{xy}}{(p_0+\gamma\sin\theta\,y_c)A}$$

2.5.1 对平面的作用力

平行移轴原理— 坐标原点与形心重合

$$J_x = J_c + y_c^2 A$$

$$J_{xy} = J_{xyc} + x_c y_c A$$

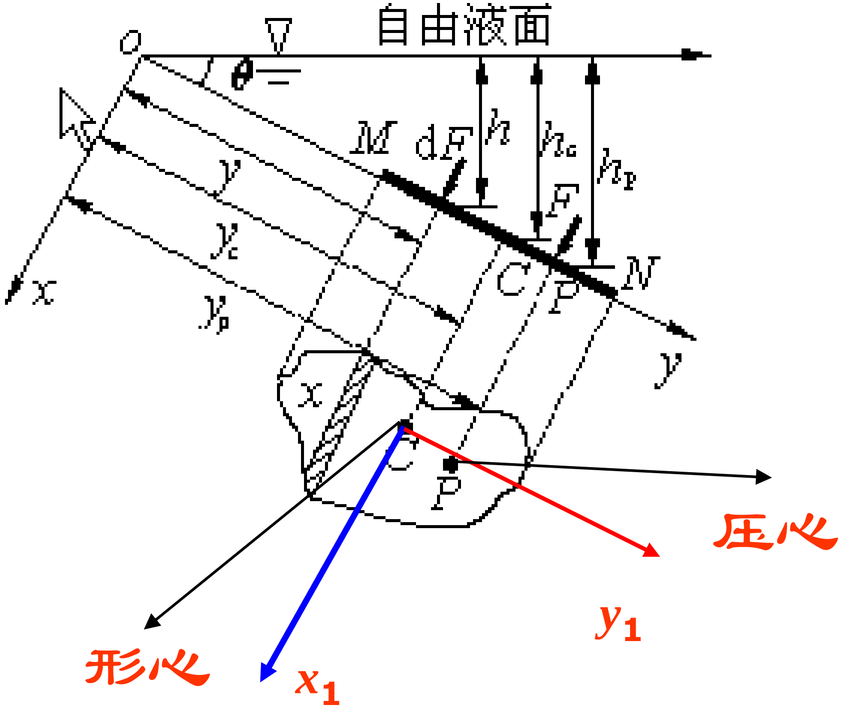
J_c是平面对过形心C,且与x轴平行的轴的惯性矩,

J_{xyc}是平面对过形心C,并与x轴y轴平行的轴的惯性积,

x_c, y_c是形心在坐标系中的坐标值.

压心

$$\begin{cases} x_p = x_c + \dfrac{\gamma J_{xyc} \sin\theta}{(p_0 + \gamma y_c \sin\theta)A} \\ y_p = y_c + \dfrac{\gamma J_c \sin\theta}{(p_0 + \gamma y_c \sin\theta)A} \end{cases}$$



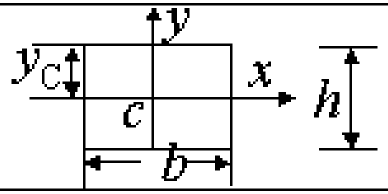
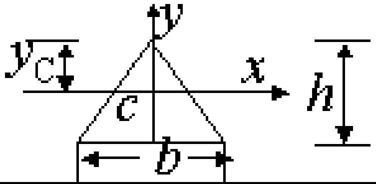
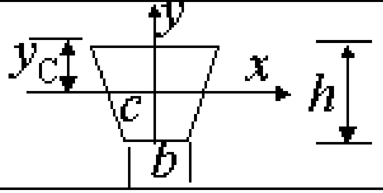
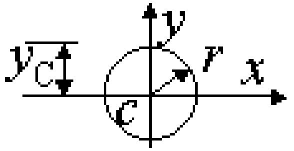
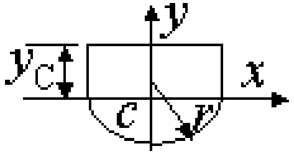
平行移轴模型

一般地，压力中心位于形心下方！

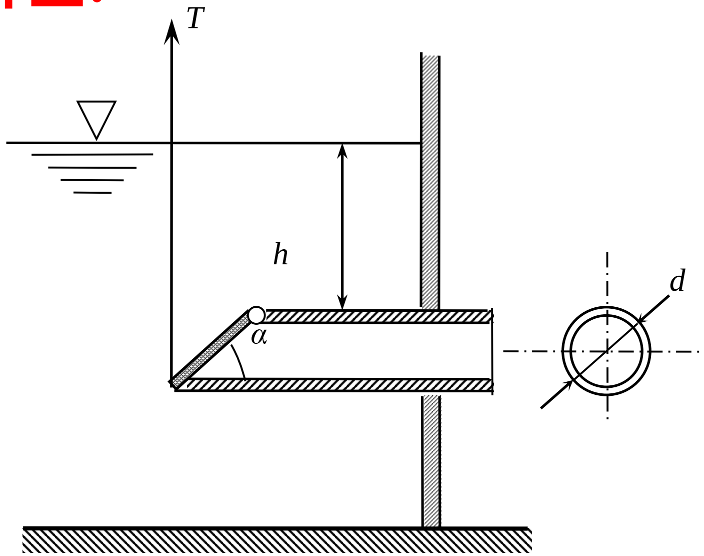
2.5 流体对物体的作用力

2.5.1 对平面的作用力

常见几何形状的特征参数

几何图形名称	面积A	形心坐标y_C	对通过形心轴的惯性矩I_{xC}
矩形 	bh	$\frac{1}{2}h$	$\frac{1}{12}bh^3$
三角形 	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{2}{3}h$	$\frac{1}{36}bh^3$
梯形 	$\frac{1}{2}h(a+b)$	$\frac{h}{3}(\frac{a+2b}{a+b})$	$\frac{1}{36}h^3(\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b})$
圆 	πr^2	r	$\frac{1}{4}\pi r^4$
半圆 	$\frac{1}{2}\pi r^4$	$\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$	$\frac{9\pi^2-64}{72\pi}r^4$

补充作业：



盛水的容器壁上有一圆管，深度h=2.0m，管子直径d = 0.6m，管的内口切成α = 45°的斜口并用盖板封住，盖板可绕着上面的铰链旋转（如左图所示）。如不计盖板的重量及铰链的摩擦力矩，试求提起此盖板所需的力T。

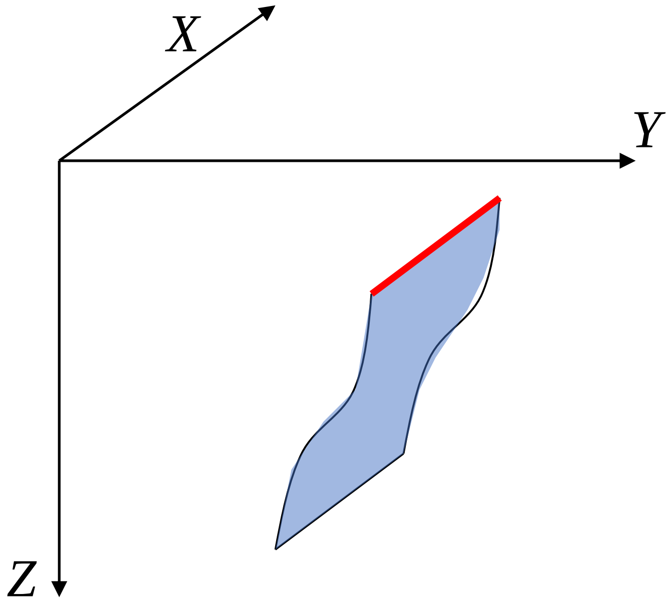
2.5.2 对曲面的作用力

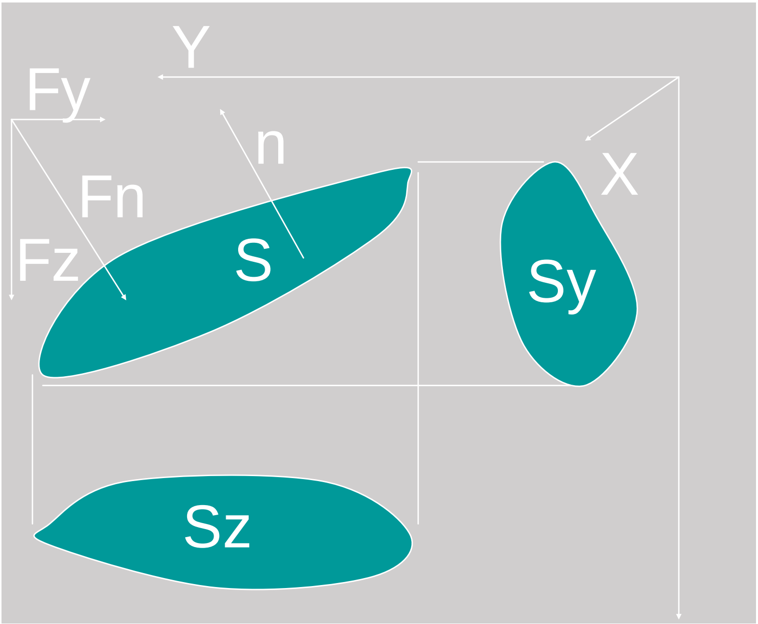
基本思路：

将流体对曲面的作用力转化为对平面的作用力来处理

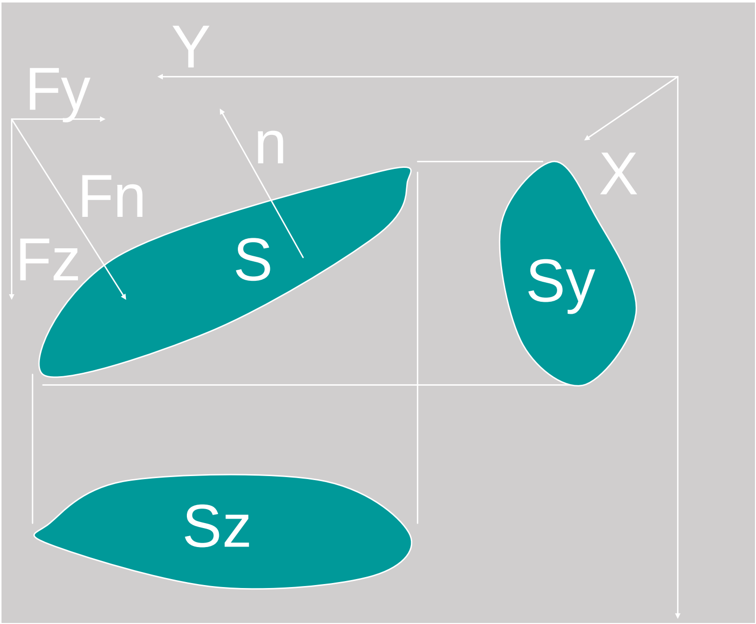
一般曲面的受力，可以转换为该曲面在三个坐标平面的投影平面的受力来考虑

现从微元面入手分析来求解。先来研究母线平行于X轴的一类柱面。





2.5.2 对曲面的作用力



在Y方向和Z方向上分解为

$$dF_y = p_n dS \cdot \cos(\vec{n},\vec{j}) = p_n dS_y \Longrightarrow F_y = \int_S dF_y = \int_{S_y} p_n dS_y$$

$$dF_z = p_n dS \cdot \cos(\vec{n},\vec{k}) = p_n dS_z \Longrightarrow F_z = \int_S dF_z = \int_{S_z} p_n dS_z$$

对X轴的力矩为:

$$\mathrm{M}(F_y) = \int_S z dF_y = \int_S p_n z dS \cdot \cos(\vec{n},\vec{j}) = \int_{S_y} p_n z dS_y$$

$$\mathrm{M}(F_z) = \int_S y dF_z = \int_S p_n y dS \cdot \cos(\vec{n},\vec{k}) = \int_{S_z} p_n y dS_z$$

也就是说作用于曲面上的压力,可以用它在$\boldsymbol{y}$和$\boldsymbol{z}$轴上的投影来完全代替.

2.5.2 对曲面的作用力

Y-方向的作用力及力矩

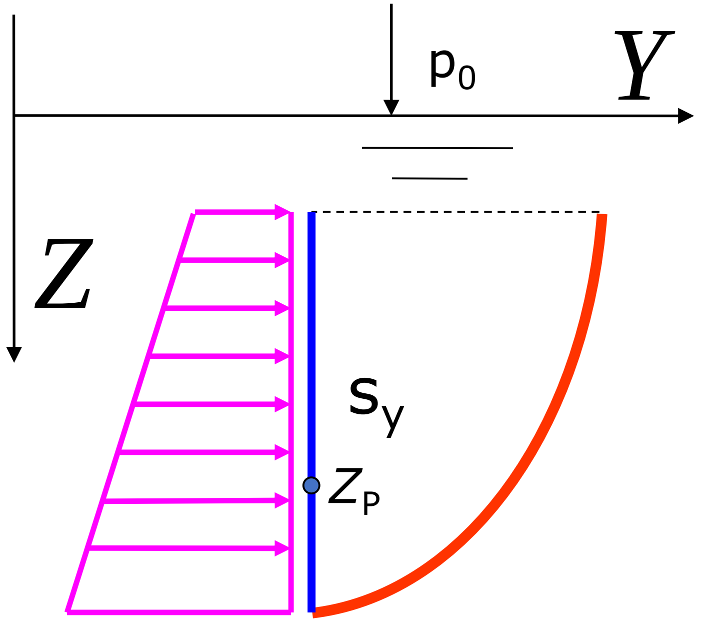
Y向的作用力

$$F_y = \int_S dF_y = \int_S p_n dS \cdot \cos(\vec{n},\vec{j}) = \int_{S_y} p_n dS_y$$

对X轴的力矩

$$L_x = \mathrm{M}(F_y) = \int_S z dF_y = \int_S p_n z dS \cdot \cos(\vec{n},\vec{j}) = \int_{Sy} p_n z dS_y$$

Y方向上的作用为与坚直平面S_y上的作用力相当



- 作用于曲面上的总压力F的水平分力F_y等于作用于该曲面的水平方向投影面S_y上的总压力，
- 方向水平指向受力面，
- 作用线通过面积S_y的压力中心Z_P。

2.5.2 对曲面的作用力

Z-方向的作用力

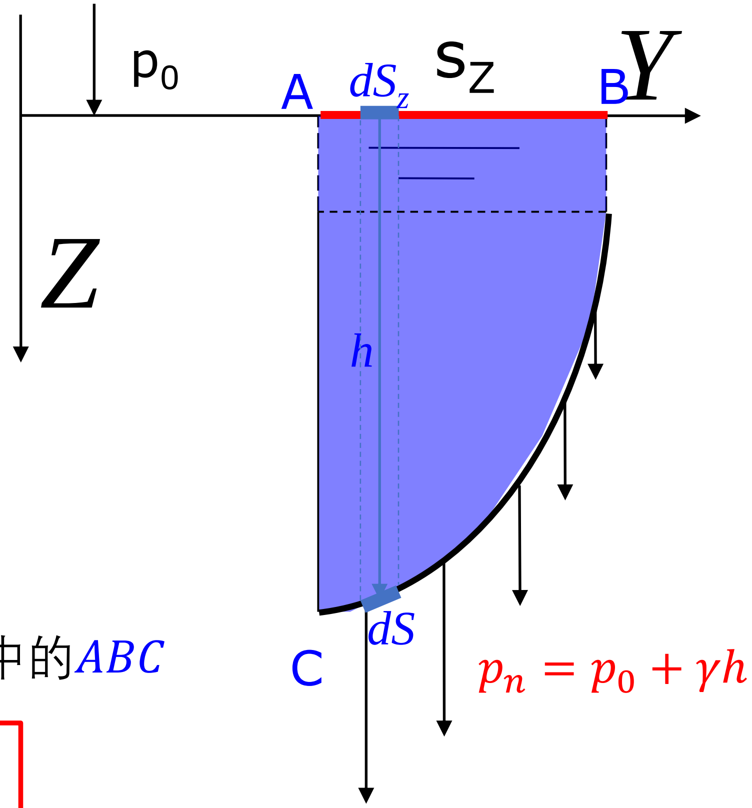
Z向的作用力

$$dF_z = p_n dS \cdot \cos(\vec{n}, \vec{k}) = p_n dS_z$$

积分得：

$$F_z = \int_{S_z} p_n dS_z = \int_{S_z} (p_0 + \gamma h) dS_z = p_0 S_z + \gamma \int_{S_z} h dS_z = p_0 S_z + \gamma V$$

$$V = \int_{Sz} h \cdot dS_z$$



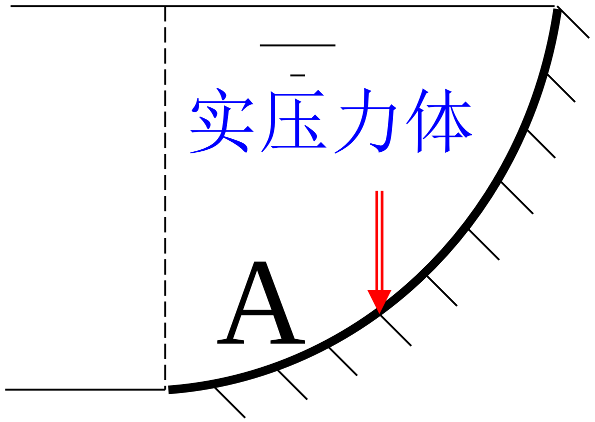
V这是以曲面为底，延伸到自由液面的任意几何形状的体积，称为压力体；如图中的ABC

结论：

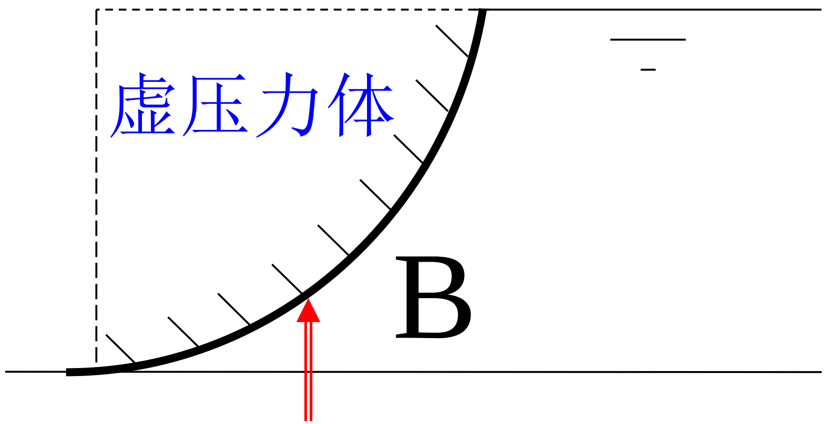
- 静止流体作用在曲面的合力的竖直分量等于曲面在Z向的投影面积与自由液面压强乘积，加上曲面上方压力体重量.
- 以上推导可推广至任意形状的曲面.

2.5.2 对曲面的作用力

压力体的概念及应用



A)为实压力体

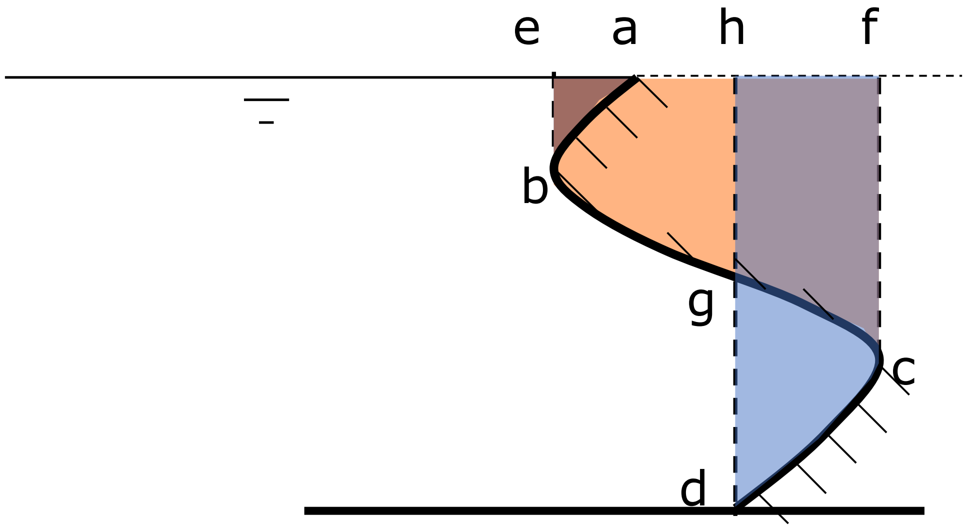


B)受向上压力，假想V间充满液体，曲面受力平衡，所受向上力等于其它向下的力之和，这时为虚压力体。

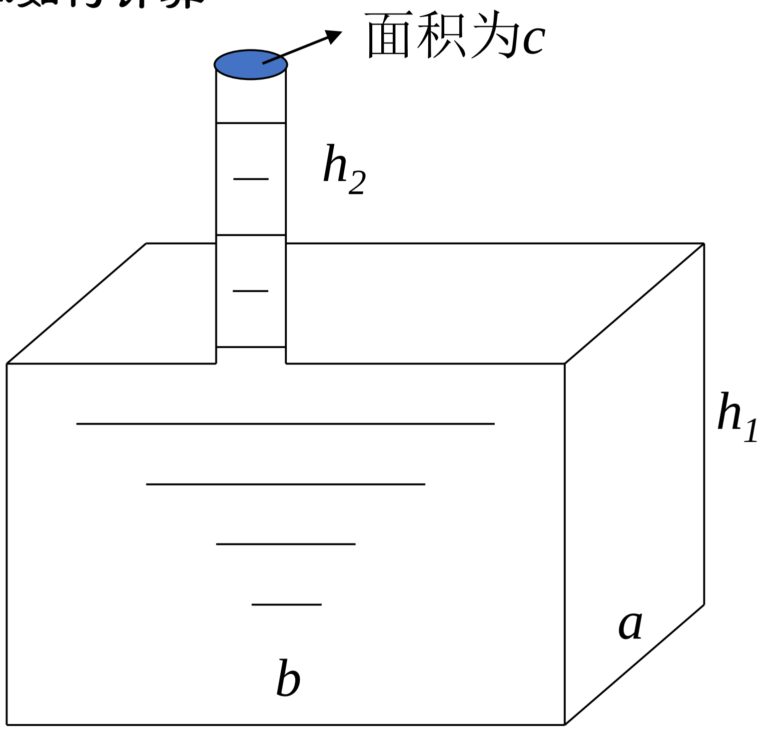
2.5.2 对曲面的作用力

压力体的概念及应用

计算图中压力体体积



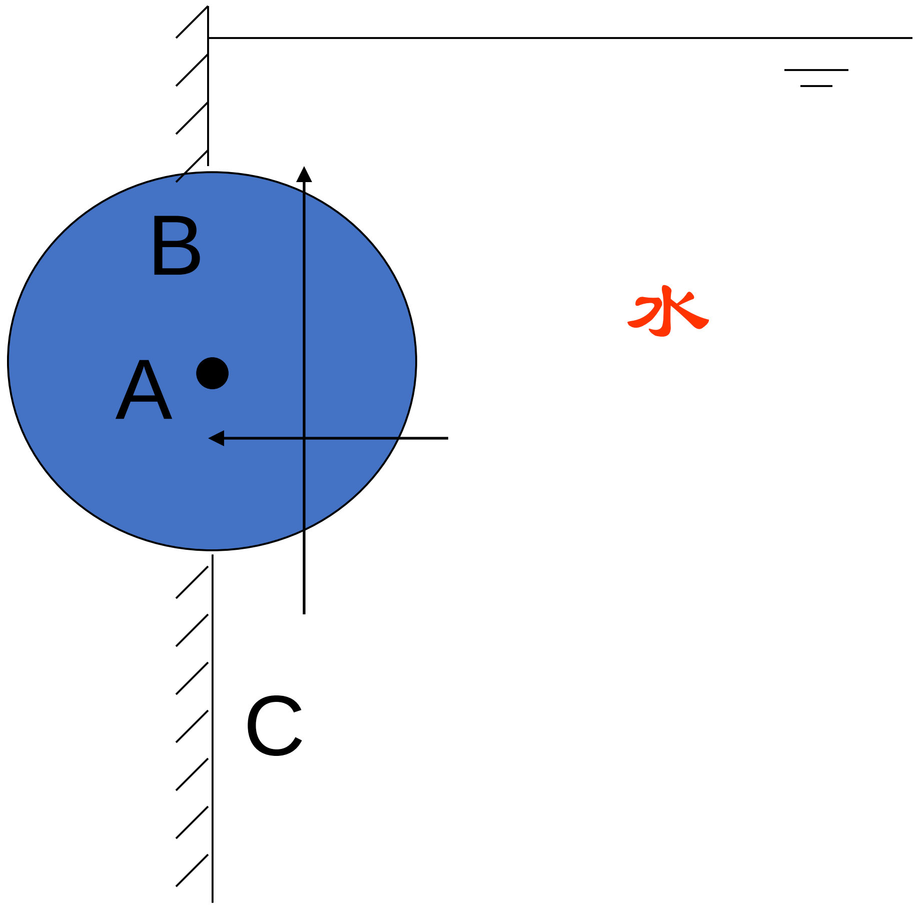
底面压力体如何计算



2.5.2 对曲面的作用力

思考题

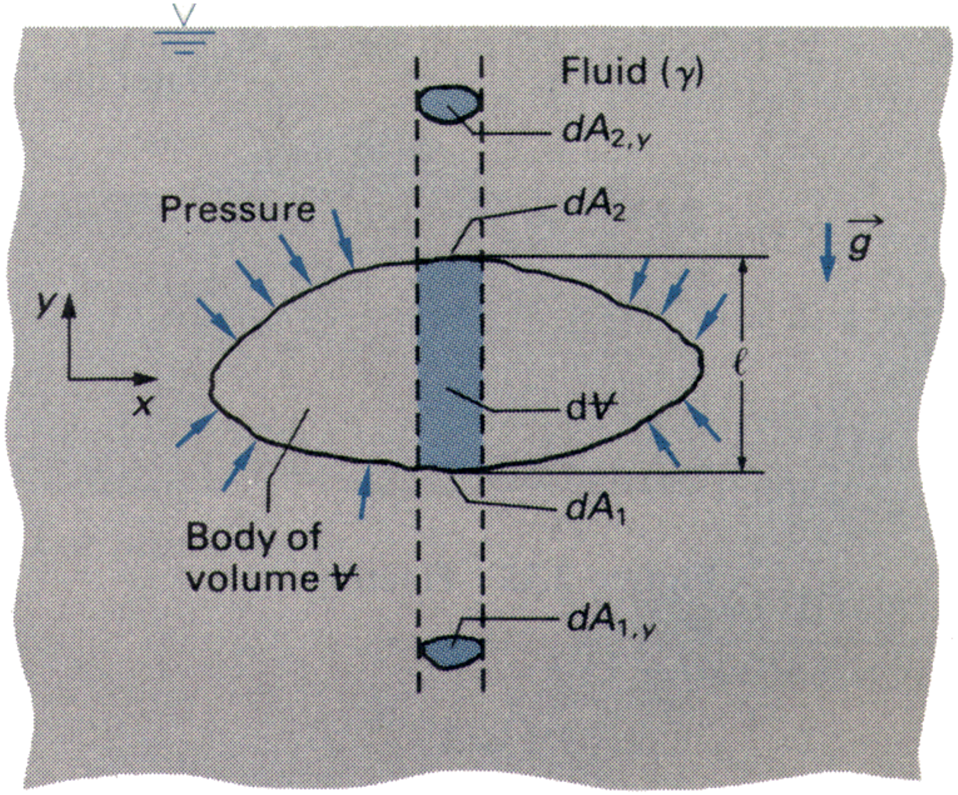
- B是圆筒
- A是轴，在圆心
- C是固体壁面
- 请分别求得水对圆筒的作用力及其对A点的力矩;
- 判断B是否会转动



北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

2.5.3 浮力定律

- 浸没在流体中的物体在水平方向上由于流体对其压力相抵,故受水平力为零.
- 所以受流体作用力可以用作用于其上下表面的实压力体和虚压力体推得.



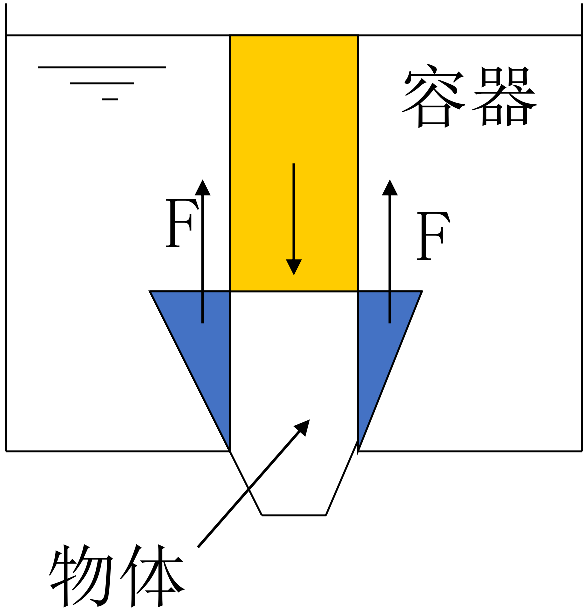
- 浮力是物体表面受流体的静压力的合力.
- (阿基米德)浮力原理：
  - 浸没在流体中的物体所受浮力等于该物体排开流体的重量。浮力作用点（浮心）位于该体积的几何中心。

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

2.5.2 对曲面的作用力

思考题

- 理解了浮力产生的原因，就不难看到右图中所示的物体所受的浮力。



课后作业

- P33-35(10道题）：

  2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 2.9, 2.10, 2.12, 2.14, 2.15.

- ppt P14的补充作业。

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

THE END