北航宇航学院

空气动力学(32学时)

主讲：覃粒子　陈兵

qlz@buaa.edu.cn　　Markchien@buaa.edu.cn

沙河主楼D510，13911744896　沙河主楼D519，13683012881

2024年 春季学期

第一讲 Part2 矢量分析入门

1. 场的概念

2. 矢量代数

3. 微分运算，梯度、散度、旋度

4. 积分运算，散度定理，斯托克斯定理

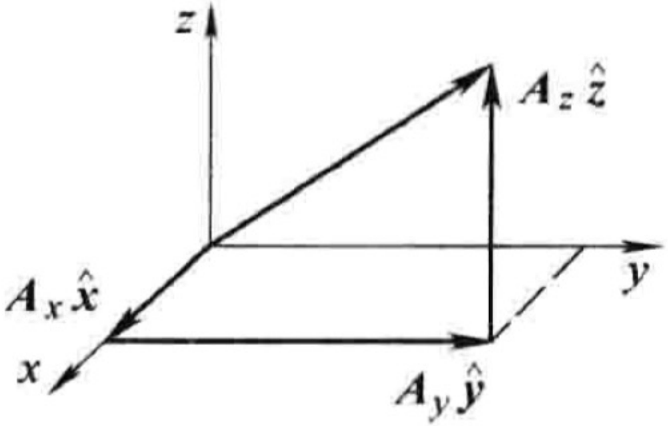
1. 场的概念

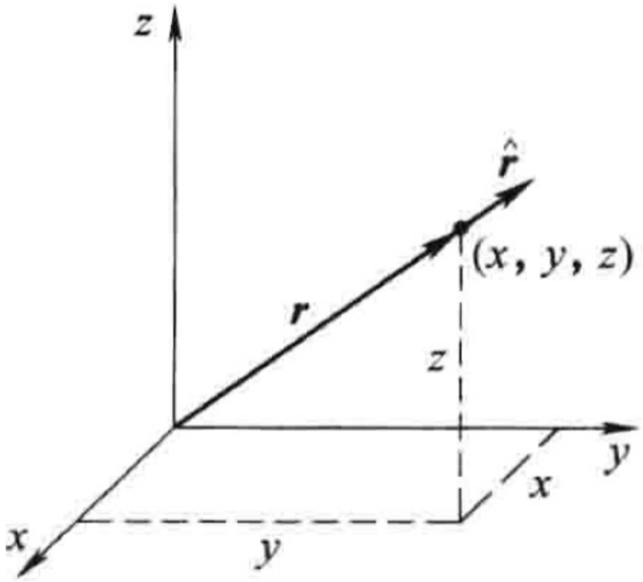
● 标量

仅有大小，没有方向

● 矢量

- 即有大小，又有方向
- 整体形式与分量形式
- 位置矢量
- 单位矢量
- 无限小的位移矢量





$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{r} \equiv x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

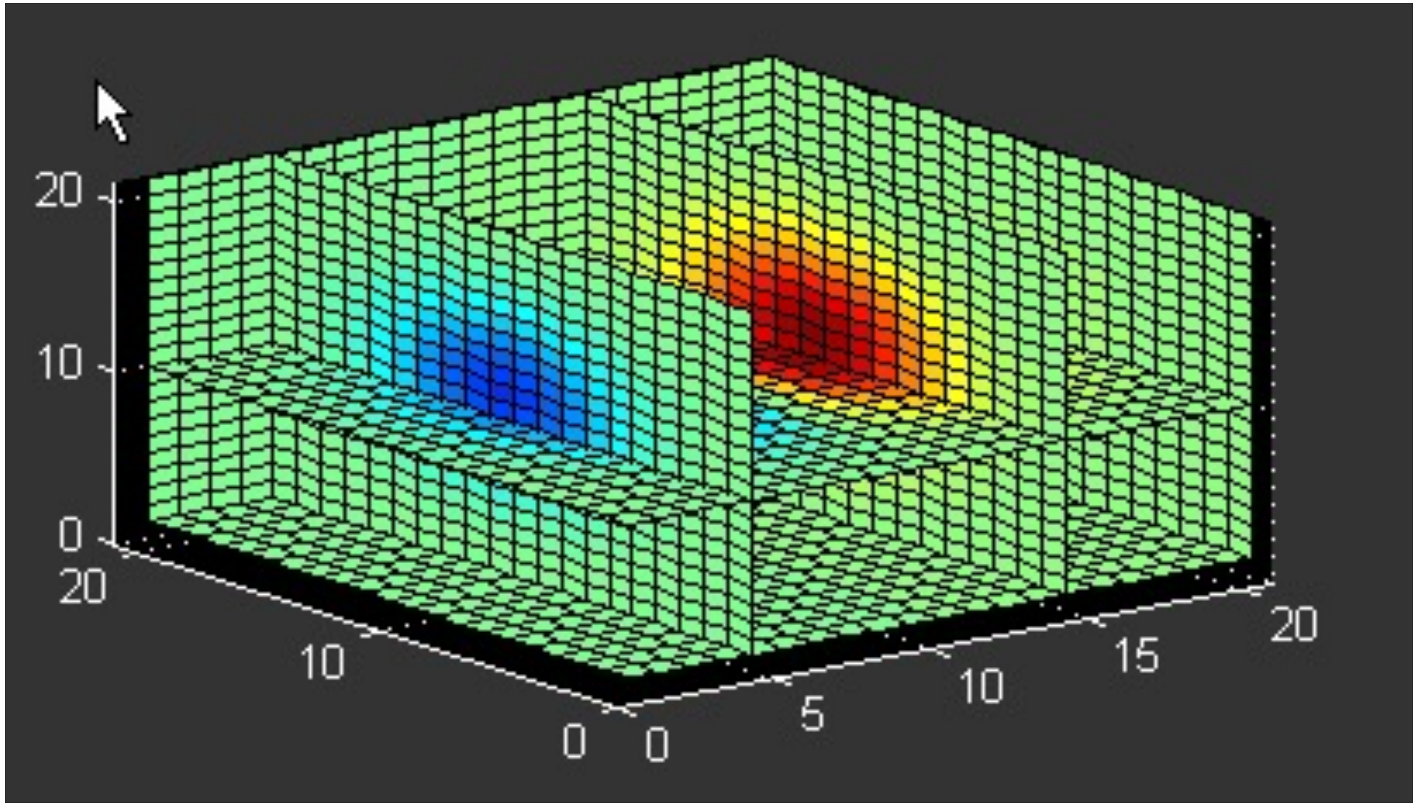
$$d\vec{r} = \mathbf{dx}\,\vec{i} + \mathbf{dy}\,\vec{j} + \mathbf{dx}\,\vec{k}$$

1. 场的概念

场的定义

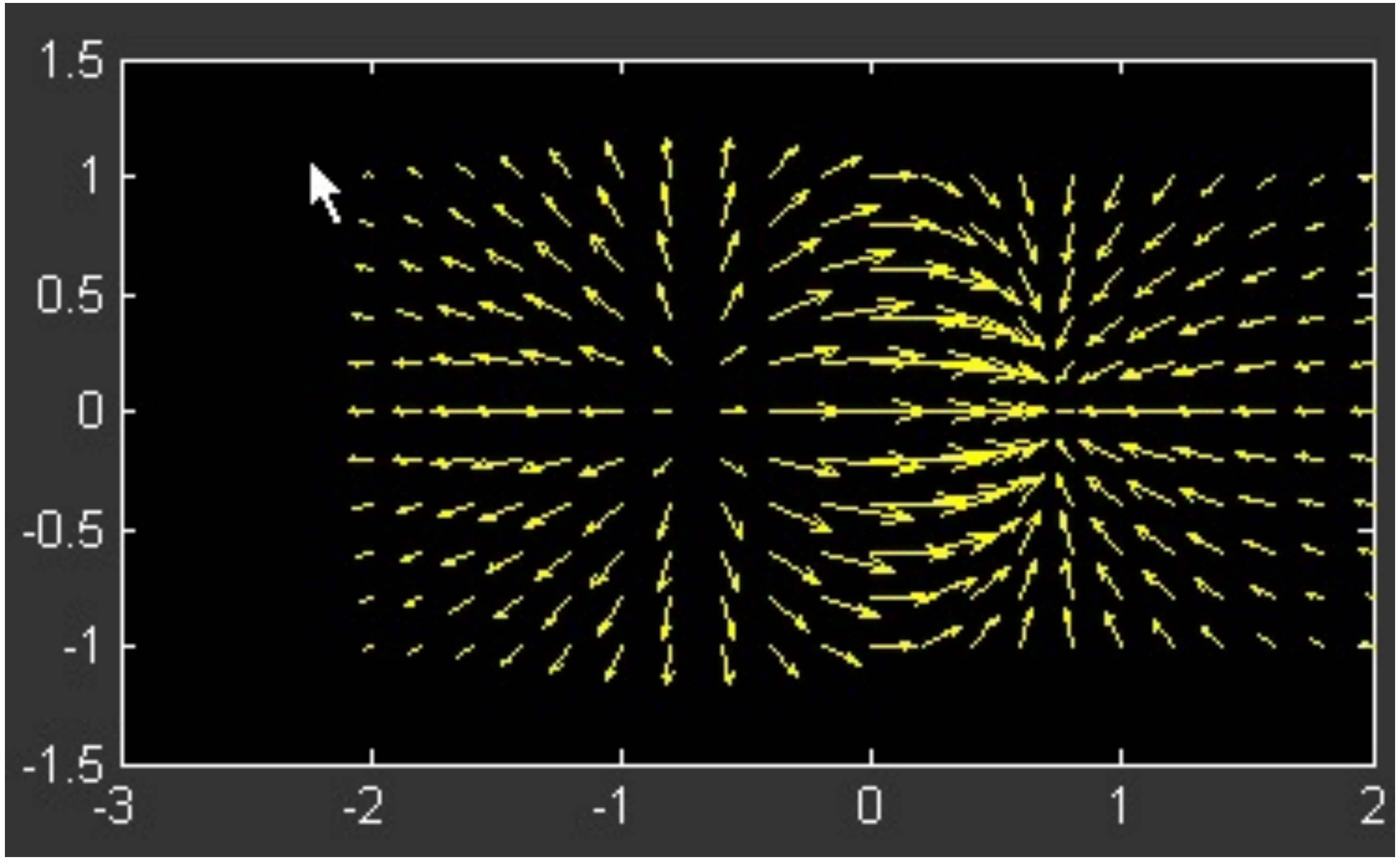
- 设在**空间**的某个区域内定义标量**函数**或矢量函数，则称定义在空间内的**函数**为场。
- 如果定义的是矢量函数，则称之为矢量场
  - 如力场，速度场，电磁场
- 如果定义的是标量函数，则称之为标量场
  - 如温度场，密度场，压力场

1. 场的概念



计算机模拟的温度场，红色表示高温，冷色表示低温

1. 场的概念



用速度矢量表示的速度场

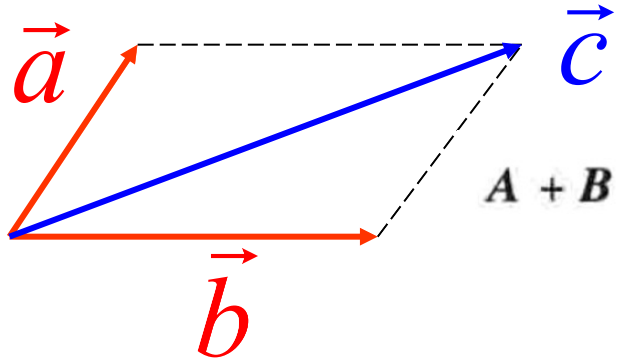
1. 场的概念

- 场的定义要素：
  - 空间变量 **r** 或x , y , z
  - 时间变量 t
- 定义举例：
  - 矢量场**a** (**r**, t) 或是 **a** (x ,y ,z, t)
  - 标量场φ(**r**, t) 或是 φ (x ,y ,z, t)
- 场的空间不均匀性
  - 同一时刻场函数随空间坐标而变化
  - 不随空间坐标而变的场称为均匀场
- 场的时间非定常性
  - 同一点上场函数随时间而变化
  - 如场内函数值不随时间变化而变化称为定常场
  - 反之称为非定常场

2. 矢量的代数运算

- 矢量相加

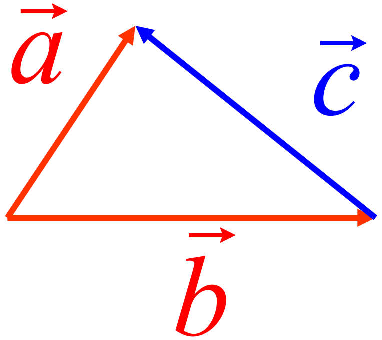
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



$$\mathbf{A} + \boldsymbol{B} = (A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}) + (B_x\hat{\boldsymbol{x}} + B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}})$$
$$= (A_x + B_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (A_y + B_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (A_z + B_z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

- 矢量相减

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$



问题：

如何识别” 和” 矢量？

2. 矢量的代数运算

- 矢量与标量相乘

$$a\boldsymbol{A} = (aA_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (aA_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (aA_z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

- 矢量点积

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}})\cdot(B_x\hat{\boldsymbol{x}} + B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}})$$

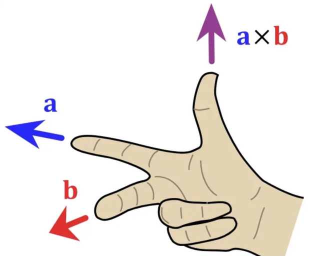
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$$

- 矢量叉积

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$$

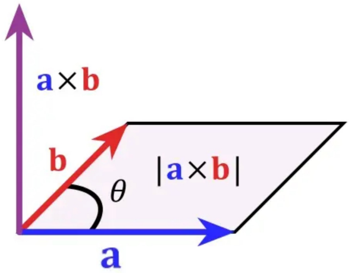
$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

点积与叉积的几何意义？

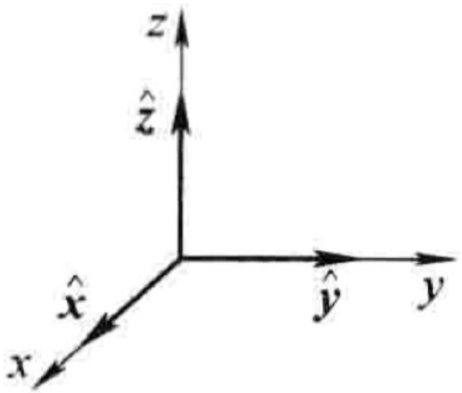
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \equiv AB\cos\theta$$

反映了两个矢量在方向上的相似度，结果越大越相似

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \equiv AB\sin\theta\hat{\boldsymbol{n}}$$



2. 矢量的代数运算



$$\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{x}\cdot\hat{z}=\hat{y}\cdot\hat{z}=0$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A_x^2+A_y^2+A_z^2$$

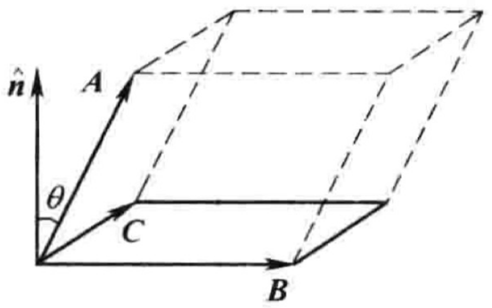
$$\hat{x}\times\hat{x}=\hat{y}\times\hat{y}=\hat{z}\times\hat{z}=0$$

$$\hat{x}\times\hat{y}=-\hat{y}\times\hat{x}=\hat{z}$$

$$\hat{y}\times\hat{z}=-\hat{z}\times\hat{y}=\hat{x}$$

$$\hat{z}\times\hat{x}=-\hat{x}\times\hat{z}=\hat{y}$$

2. 矢量的代数运算



- 混合积（三重积）

（1）标量三重积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

（2）矢量三重积

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

3. 场的微分运算

标量场的微分 —— 梯度

$$\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\cdot(\mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}})$$
$$= (\nabla T)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l})$$

$$\nabla T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \mathrm{d}T = \nabla T\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = |\nabla T|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{l}|\cos\theta$$

梯度∇T所指方向是函数 T 有最大增加的方向

$|\nabla T|$ 给出沿这个最大增加方向的斜率(增加速率)

$\nabla T = 0$ 的数学意义?

3. 场的微分运算

标量场的微分 —— 方向导数

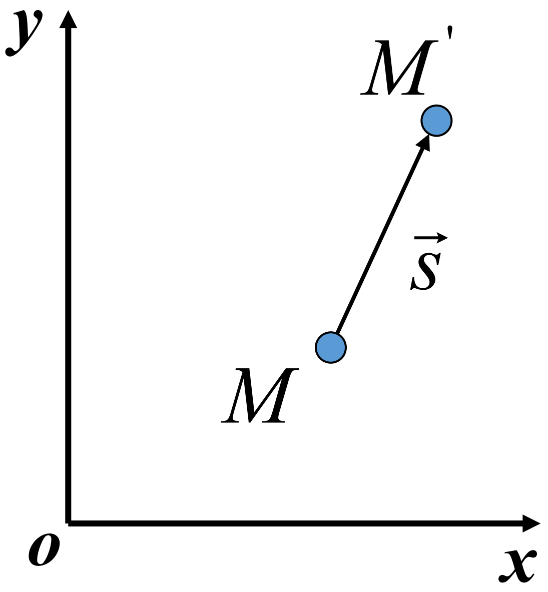
有空间点M，和一个方向$\vec{s}$

对于数量场φ,若下面极限存在

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}}=\lim_{MM'\to 0}\frac{\varphi(M')-\varphi(M)}{MM'}$$

称$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}}$是场$\varphi$在$M$处沿$s$方向的方向导数

在这里$\vec{s}$方向是任意方向

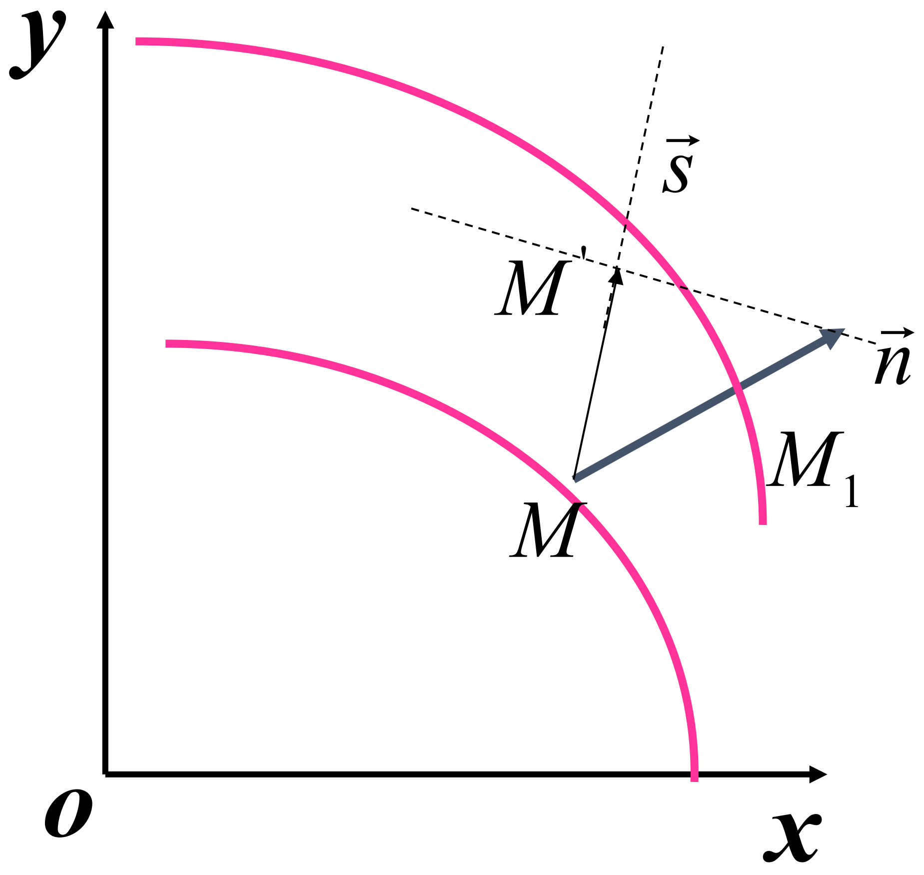


3. 场的微分运算

标量场的微分 —— 梯度的性质

- 梯度的主要性质是:
- 性质一:
  - 梯度在任一方向上的投影等于该方向的方向导数。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \cos(\vec{n}, \vec{s})$$



3. 场的微分运算

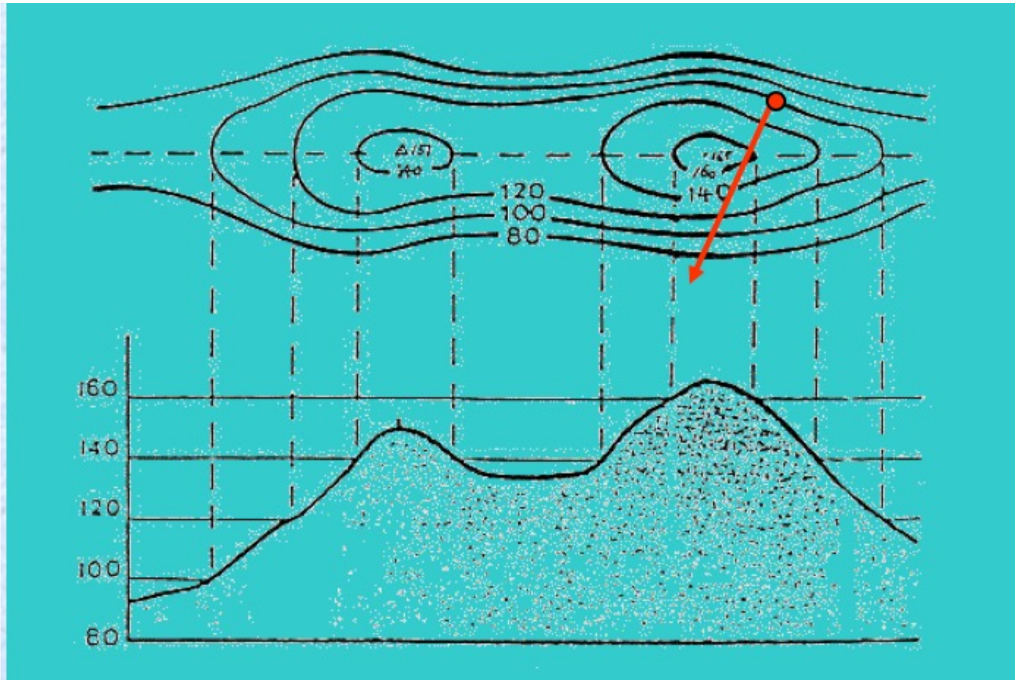
标量场的微分 —— 梯度的性质

❖性质二:

梯度的方向，是等势面的法线方向，是位势函数变化最快的方向，且指向函数值增加的方向；大小是场函数沿等势面法线方向的方向导数。

满足$\vec{a} = grad\varphi$的矢量场称为位势场, φ称为位势函数.

一个矢量场存在位势函数也叫“有势”



3. 场的微分运算

▽ 算子 （哈密顿算子）

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

▽ 并不是通常意义上的矢量。▽T 并不是▽ 与 T 相乘。
▽ 仅是一种求导数的表示形式。
▽ 带有矢量特征，几乎所有的适用于矢量的规则都适用于 ▽

1. 作用在一个标量函数 T 上：∇T（梯度）；
2. 通过点积形式作用在一个矢量函数 $\boldsymbol{v}$ 上：$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$（散度）；
3. 通过叉积形式作用在一个矢量函数 $\boldsymbol{v}$ 上：$\nabla\times\boldsymbol{v}$（旋度）。

3. 场的微分运算

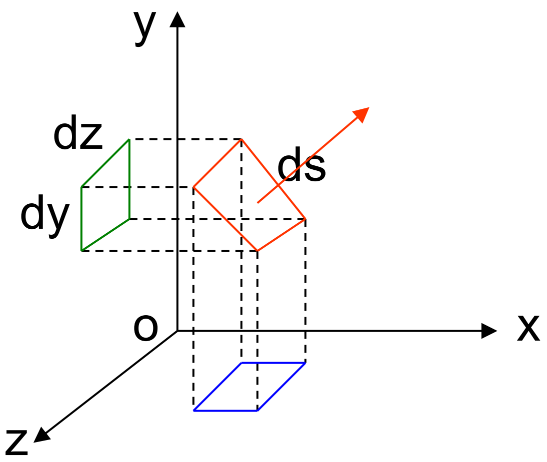
矢量场的散度 div (divergence)

首先定义矢量$\vec{a}$通过面$\vec{S}$的通量, 有以下几种表示方法

$$\int_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{a}\cdot\vec{n}ds = \int_S a_n ds$$

$$= \int_S \left[a_x \cos(\vec{n},\vec{i}) + a_y \cos(\vec{n},\vec{j}) + a_z \cos(\vec{n},\vec{k}) \right] ds$$

$$= \int_S \left(a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy \right)$$

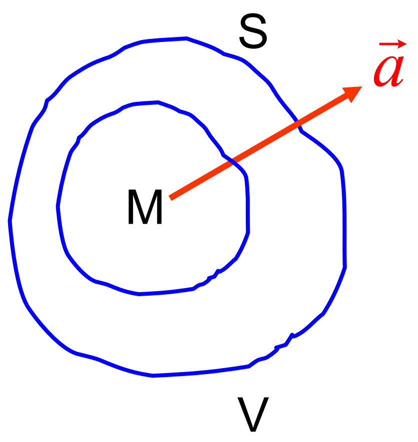


3. 场的微分运算

矢量场的散度 div (divergence)

定义散度：

在场内任取一点M，以体积V包之，若V界面为S，作矢量$\vec{a}$通过S面的通量，然后用体积V除之。令体积V向M点收缩，得极限



$$div\vec{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_S a_n ds}{V}$$

散度的意义：矢量$\vec{a}$通过单位体积元V的界面$\vec{S}$的通量。

3. 场的微分运算

矢量场的散度 div

$$\text{散度}div\vec{a}=\lim_{V\to 0}\frac{\int_S a_n ds}{V}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

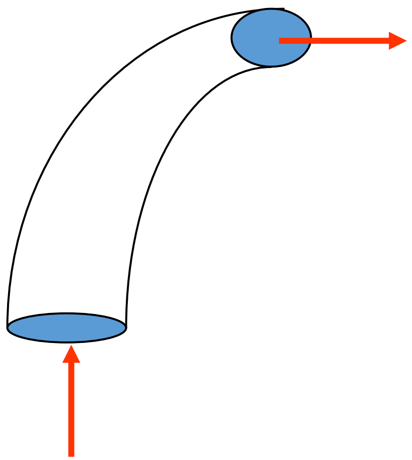
$$\nabla\cdot\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=div\vec{a}$$

$div\vec{a}=0$的矢量场称为无源场或管形场.

管形场意味着,像管子一样只能有物质的流入流出,而不可能凭空流出物质来,也不可能吸收物质.

无源场具有一些特殊性质，如:

无源矢量a经过矢量管任一横截面上的通量保持同一数值



3. 场的微分运算

矢量场的旋度 rot, cur (rotation, curl)

首先介绍环量:

给定一矢量场$\vec{a}(r,t)$,在场内取任意一曲线L,作积分:

$$\Gamma = \int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_L \left(a_x dx + a_y dy + a_z dz \right)$$

称为矢量a沿曲线L的环量。

3. 场的微分运算

矢量场的旋度 rot, cur

环量面密度

设M为矢量场$\vec{a}$中一点，在M处取定一个方向n，

再过M点以$\vec{n}$为法向做微小曲面$\Delta\vec{S}$，

若极限$\dfrac{\Delta\Gamma}{\left|\Delta\vec{S}\right|}$存在，

则称为矢量场在点M处沿n方向的环量面密度

$$\mu_n = \lim_{\Delta S \to M} \frac{\Delta\Gamma}{\left|\Delta\vec{S}\right|}$$

3. 场的微分运算

矢量场的旋度 rot, cur

若在矢量场$\vec{a}$中有一点M处存在这样一个矢量, 沿其方向的环量面密度为最大, 这个最大的数值为该矢量的模, 则称该矢量为矢量场M处的旋度 $rot\vec{a}$

环量面密度和旋度的关系与方向导数和梯度的关系非常相似

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = grad\varphi\cdot\vec{n}$$

$$\mu_n = rot\vec{a}\cdot\vec{n}$$

3. 场的微分运算

矢量场的旋度 rot, cur

旋度在直角坐标系下展开为

$$rot\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)k=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{a}=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=rot\vec{a}$$

3. 场的微分运算

微分运算中的简单规则

k 标量常数

$$\nabla(kf) = k\nabla f$$

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla \cdot (k\boldsymbol{A}) = k(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{B})$$

$$\nabla \times (k\boldsymbol{A}) = k(\nabla \times \boldsymbol{A})$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

3. 场的微分运算

微分运算中的乘积规则

通过乘积来构造标量：fg（两个标量函数的乘积），$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$（两个矢量函数的点积）

通过乘积来构造矢量：$f\boldsymbol{A}$（标量乘以矢量），$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$（两个矢量的叉积）

上述用乘积构造的场函数与 ▽ 算子相作用：标量的梯度运算，矢量的点积运算，矢量的叉积运算

相应地，有六个积规则，对梯度有两个：

(i) $$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$$

(ii) $$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

对散度有两个：

(iii) $$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=f(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla f)$$

(iv) $$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

对旋度有两个：

(v) $$\nabla\times(f\boldsymbol{A})=f(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\times(\nabla f)$$

(vi) $$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

3. 场的微分运算

二阶微分

（1）梯度的散度：$\nabla\cdot(\nabla T)$

（2）梯度的旋度：$\nabla\times(\nabla T)$

（3）散度的梯度：$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$

（4）旋度的散度：$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})$

（5）旋度的旋度：$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$

3. 场的微分运算

二阶微分

梯度的散度：$\nabla \cdot (\nabla T)$

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \Delta T$ Δ称为拉普拉斯算子

注：上式是标量场 T 的拉普拉斯，矢量场的定义有所不同。

矢量的拉普拉斯：$\nabla^2 \boldsymbol{v} = (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \neq \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$ $\nabla^2 \boldsymbol{v} \equiv (\nabla^2 v_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (\nabla^2 v_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (\nabla^2 v_z)\hat{\boldsymbol{z}}$

旋度的旋度：$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \nabla^2 \boldsymbol{v}$ 此式也经常作为矢量的拉普拉斯的定义式

3. 场的微分运算

二阶微分

(1) 梯度的散度：$\nabla \cdot (\nabla T)$ $= \triangle T$

(2) 梯度的旋度：$\nabla \times (\nabla T)$ $= 0$ 无旋必有势

(3) 散度的梯度：$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$

(4) 旋度的散度：$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v})$ $= 0$ 无散必有旋

(5) 旋度的旋度：$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \triangle \boldsymbol{v}$

场的二阶导数一般只有“拉普拉斯”以及“散度的梯度”这两种运算。

4. 场的积分运算

关于梯度的积分

$$\int_{ap}^{b}(\nabla T)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=T(b)-T(a)$$

推论 1：$\int_{a}^{b}(\nabla T)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 不依赖于从 a 点到 b 点的路径。

推论 2：$\oint(\nabla T)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，因为始末点重合 $b=a$，$T(b)-T(a)=0$。

4. 场的积分运算

关于散度的积分（高斯定理、格林定理、散度定理）

$$\int_{V}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau=\oint_{S}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

关于旋度的积分（斯托克斯定理）

$$\int_{S}(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\oint_{P}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

课外延伸阅读：

1. 大卫 J. 格里菲斯(Griffiths), 电动力学导论（翻译版 原书第3版），机械工业出版社，2013. 【阅读第1章的1.1~1.4节】
2. 吴望一，流体力学（上册），北京大学出版社，1982. 【阅读第一章1.1~1.9节】

要求：

- 补充了解圆柱坐标系下的梯度、散度、旋度。
- 加深对概念的认识与理解

作业：

1、求数量场$u=3x^2+5y^2-2z$在点（1,1,3）处沿其等值面朝Z轴正向一方的法线方向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$。

2、求矢量$\vec{a}=xyz\vec{r}\ (\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$在点（1,3,2）处的散度。

3、求矢量$\vec{a}=(3x^2y+z)\vec{i}+(y^3-xz^2)\vec{j}+(2xyz)\vec{k}$的旋度。

4、由散度、旋度的定义，推导出：$div\,\vec{V}=\nabla\cdot\vec{V}$　　$rot\,\vec{V}=\nabla\times\vec{V}$

5、证明：　$div\,(rot\vec{V})=0$　　$rot\,(grad\varphi)=0$

6、　$(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{V}$ 是否等于 $(\nabla\cdot\vec{A})\vec{V}$ ？请用直角坐标系下的展开式予以说明。

谢谢！