

第12章 非稳态热传导

12-1 非稳态导热基本概念

12-2 零维问题的分析法——集中参数法

12-3 典型一维非稳态导热的分析解

12-4 半无限大物体的非稳态导热

了解导热微分方程解的唯一性定律和第三类边界条件下Bi数对平板中温度分布的影响；

了解简单几何形状非稳态导热的分析和计算方法；

掌握非稳态导热的基本概念，特点及类型；

掌握集中参数法的概念和计算方法，掌握集中参数法的适用范围及应用举例。

第12章 非稳态热传导

12.1 非稳态导热的基本概念

定义： 物体的温度**随时间而变化的**导热过程称为非稳态导热

分类： 物体温度随时间推移逐渐趋近于恒定的值(**金属热处理**)

物体温度随时间做周期性的变化(**太阳辐射的地球1y和房屋1d**)

差别： **不同位置**处的**导热量**处处不同

一般不能用**热阻**的方法**定量**分析

内容： 1.简述非稳态导热的基本概念;

2.由**简单到复杂**依次介绍零维问题、一维问题、半无限大物体的导热微分方程的分析解法。

3.总结求解非稳态导热问题的一般策略以及应用实例。

表达形式: $t = f(x, y, z, \tau)$

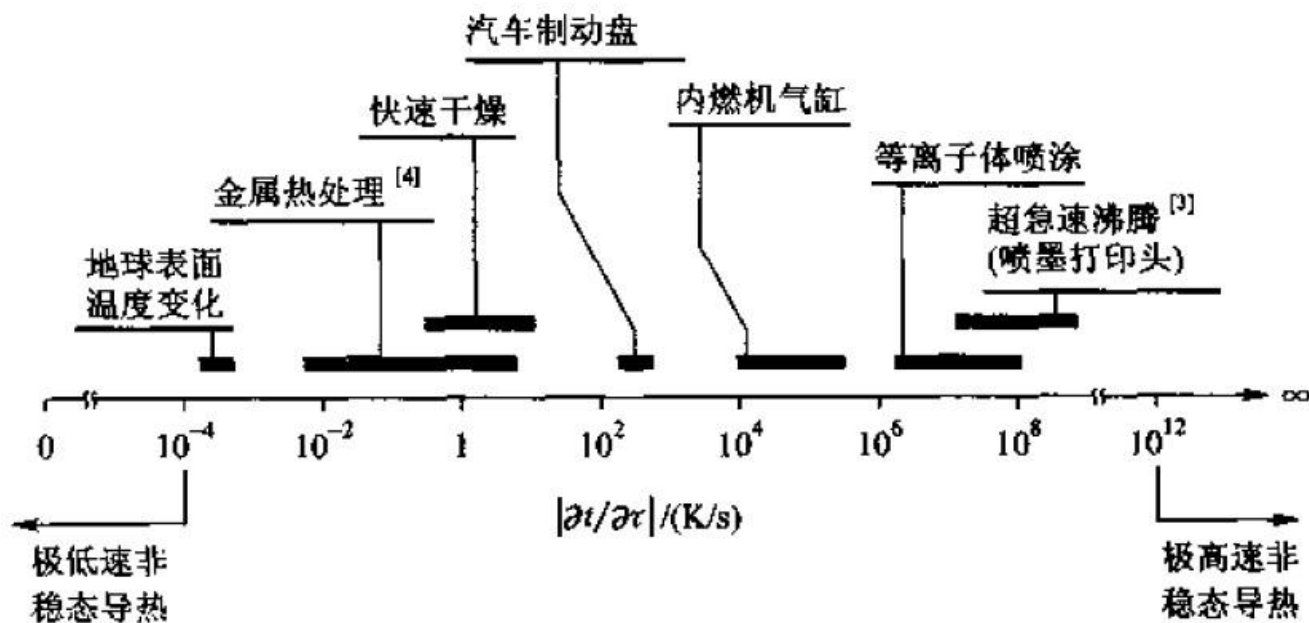
第12章 非稳态热传导

应用：在动力机械起动、停机及变动工况运行时，急剧的温度变化会使部件因热应力而破坏，因此需要确定物体内部的瞬时温度场；

钢制工件的热处理是一个典型的非稳态导热过程，掌握工件中温度变化的速率是控制工件热处理质量的重要因素。

金属在加热炉内加热时需要确定它在加热炉内停留的时间，以保证达到规定的温度。

掌握：与稳态导热问题类似，学习非稳态导热主要掌握**基本概念**、确定物体**瞬时温度场**的方法和在**一段时间间隔内**物体所**传导热量**的计算方法。



几种典型非稳态导热过程的温度变化率

第12章 非稳态热传导

非稳态导热问题定性分析:

左金属、右保温，初始 t_0 ，左边升高至 t_1 ，
温度变化情况。

第一阶段：P-B-L

第二阶段：P-D-L

第三阶段：P-E-L

第四阶段：P-H-M (HM斜率大于PH斜率)

两个不同阶段:

非正规状况阶段
(不规则情况阶段) \longrightarrow 温度分布主要受
初始温度分布控制

正规状况阶段
(正常情况阶段) \longrightarrow 温度分布主要取决于
边界条件及**物性**

导热过程的三个阶段:

非正规状况阶段（起始阶段）、正规状况阶段、新的稳态

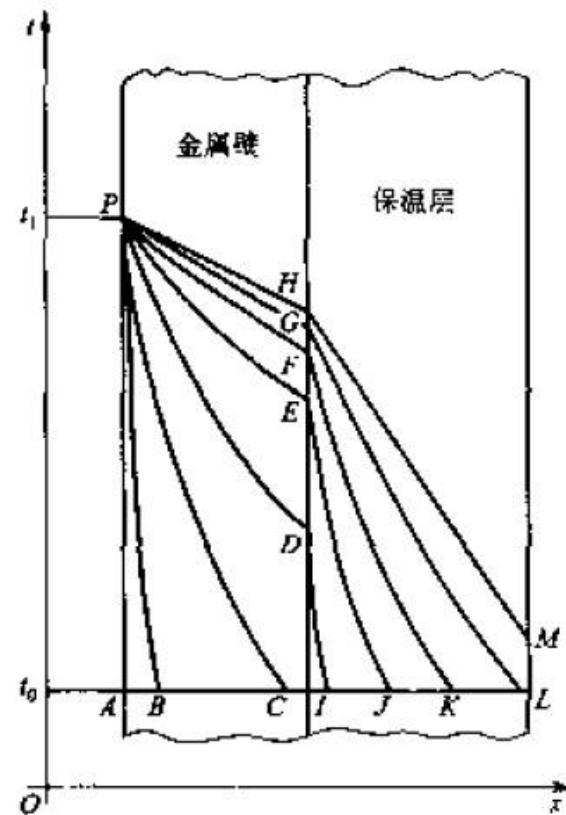
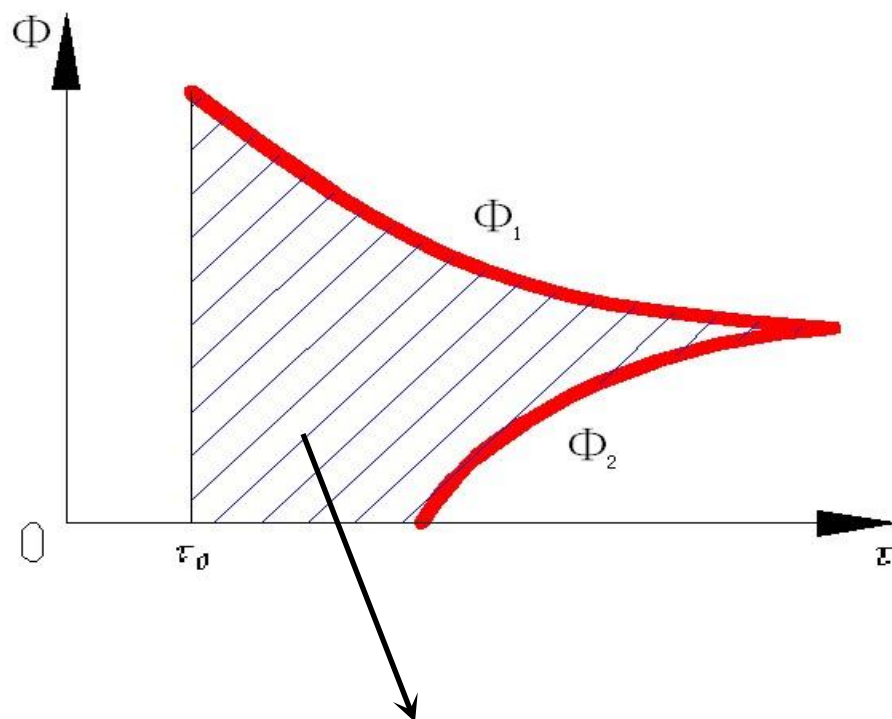


图 3-2 非稳态导热过程中
复合壁温度的变化

第12章 非稳态热传导



Φ_1 ——板左侧导入的热流量

Φ_2 ——板右侧导出的热流量

从图中可以看出，整个非稳态传热过程中这两个热流量是不相等的，但是随着过程的进行其差别逐渐减小，直到进入稳态阶段两者达到平衡。

阴影线的部分代表了复合壁在升温过程中所积聚的能量

第12章 非稳态热传导

3.1.2 导热微分方程解的唯一性定律

导热微分方程
初始条件, 边界条件 \longrightarrow 导热问题完整数学描述 \longrightarrow 规定的初始条件和边界条件下求解导热微分方程

笛卡尔、圆柱和圆球坐标系下的**导热微分方程**可以统一表示为

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} t) + \dot{\phi} \quad (12-1a)$$

其中, $\operatorname{div}(\operatorname{grad} t)$ 是温度的拉普拉斯算子 $\nabla^2 t$, 在 ρc_p 为常数的条件下,

引入扩散系数 $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$, 于是有 $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{\phi}}{\rho c_p} \quad (12-1b)$ \longleftarrow **导热微分方程**

初始条件 $t(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad (12-2a)$ $\longrightarrow t(x, y, z, 0) = t_0 \quad (12-2b)$

边界条件 $-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w = h(t_w - t_f) \quad (12-3)$

(第三类边界条件, n 为换热表面外法线, h, t_f 已知, $t_w, \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w$ 未知)

第12章 非稳态热传导

唯一解定律： 如果某一函数满足**导热微分方程**以及一定的**初始条件**与**边界条件**，那么此函数就是这一特定导热问题的**唯一解**。

12.1.3 第三边界条件下Bi数对温度分布的影响

(1) 问题的分析

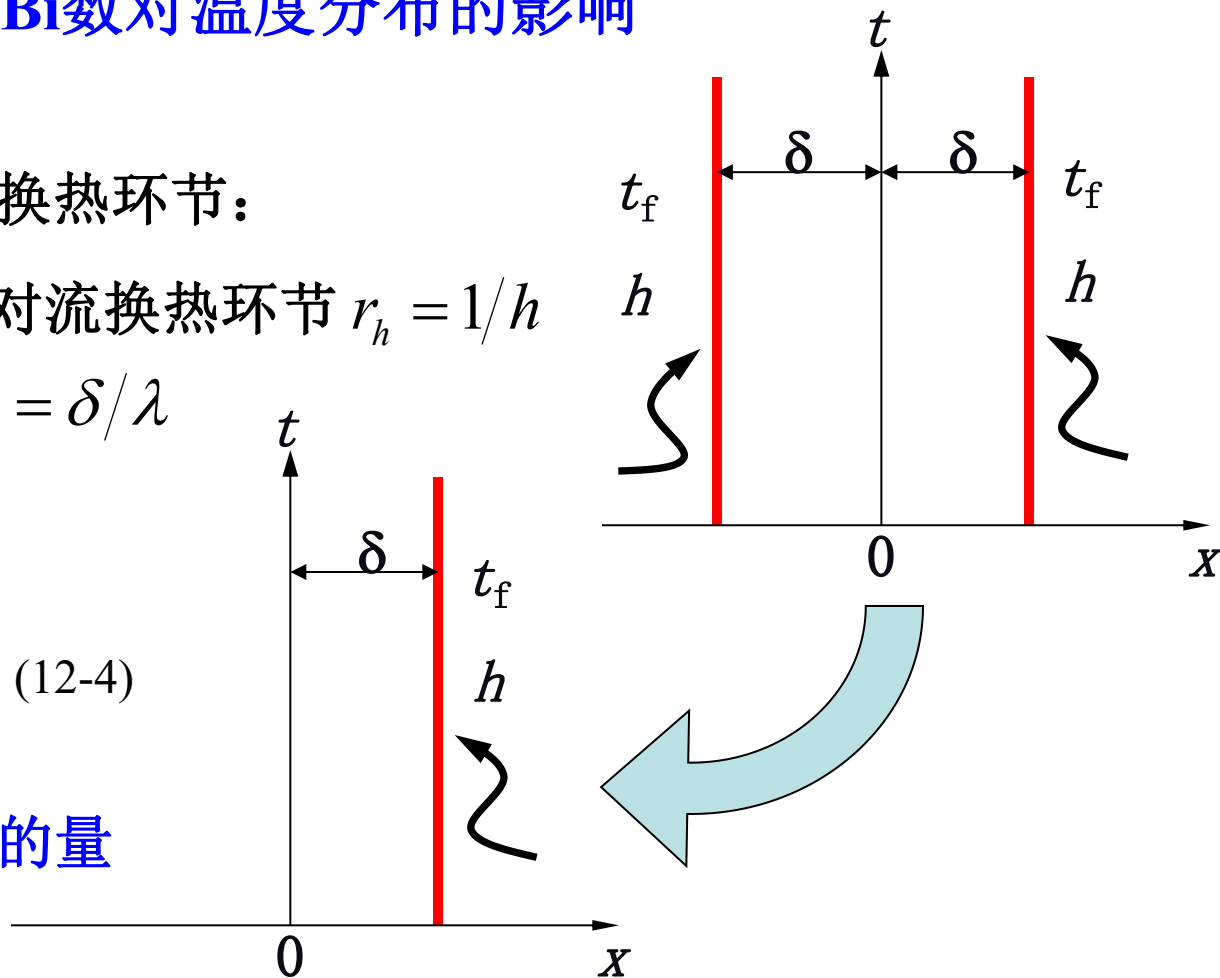
如图所示，存在两个换热环节：

- a 流体与物体表面的对流传热环节 $r_h = 1/h$
- b 物体内部的导热 $r_\lambda = \delta/\lambda$

(2) 毕渥数的定义：

$$Bi = \frac{r_\lambda}{r_h} = \frac{\delta/\lambda}{1/h} = \frac{\delta h}{\lambda} \quad (12-4)$$

两个热阻比值的量纲一的量



第12章 非稳态热传导

12.1.3 第三边界条件下Bi数对温度分布的影响

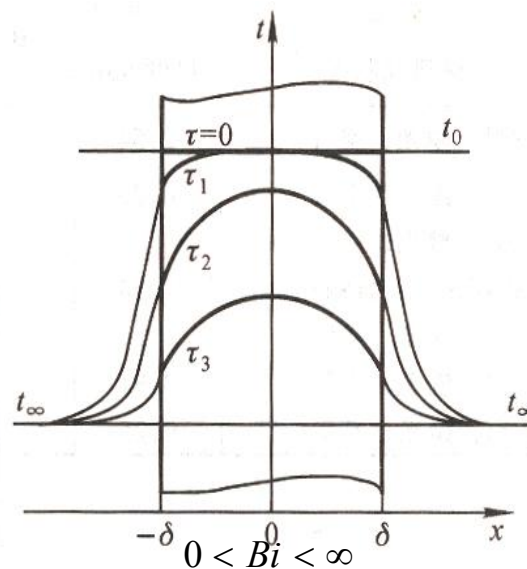
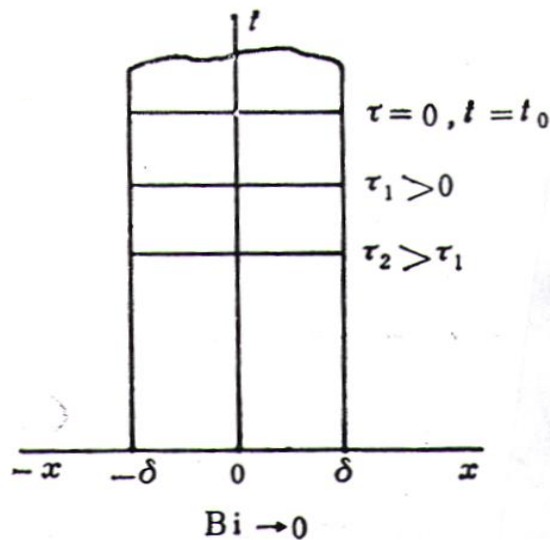
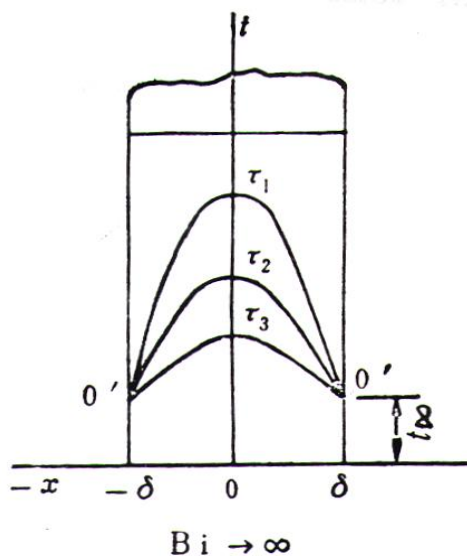
$$Bi = \frac{r_\lambda}{r_h} = \frac{\delta / \lambda}{1/h} = \frac{\delta h}{\lambda}$$

当 $Bi \rightarrow \infty$ 时, $\Rightarrow r_\lambda \gg r_h$, 可以忽略对流换热热阻

当 $Bi \rightarrow 0$ 时, $\Rightarrow r_\lambda \ll r_h$, 可以忽略导热热阻

当 $Bi \approx 1$ 时, $\Rightarrow r_\lambda \approx r_h$, 需要同时考虑两种热阻

厚度 2δ 金属板
初始温度 t_0
外界温度 t_∞
表面传热系数 h
导热系数 λ





第12章 非稳态热传导

无量纲数的简要介绍

基本思想：当所研究的问题非常复杂，涉及到的参数很多，为了减少问题所涉及的参数，于是人们将这样一些参数组合起来，使之能**表征一类物理现象**，或物理过程的**主要特征，并且没有量纲**。

因此，毕渥数、雷诺数这样的无量纲数又被称为**特征数**，或者准则数，比如，毕渥数又称毕渥准则。以后会陆续遇到许多类似的准则数。特征数涉及到的**几何尺度**称为**特征长度**，一般用符号 l 表示。

对于一个**特征数**，应该掌握其**定义式+物理意义**，以及定义式中**各个参数的意义**。

第12章 非稳态热传导

12.2 零维问题的分析法——集中参数法

定义: 固体内部的导热热阻远小于其表面的换热热阻时，任何时刻固体内部的温度都趋于一致，以致可以认为整个固体在同一瞬间均处于同一温度下。(类比质心)

特点: 温度仅是时间 τ 的一元函数 $Bi \rightarrow 0$ 而与空间坐标无关 $t = f(\tau)$

应用: 物体导热系数极大；几何尺寸极小；表面传热系数极低。

方法: 忽略物体内部导热热阻的简化方法——集中参数法

12.2.1 集中参数法温度场的分析解

问题: 任意形状固体，体积 V ，表面积 A ，均匀初始温度 t_0 ，置于 $t_\infty < t_0$ 的流体中，表面传热系数 h 及其它物性保持常数。——集中参数法

导热微分方程重新写为：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{\phi}}{\rho c_p} \xrightarrow{\text{忽略热阻, 温度与空间无关}} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{\phi}}{\rho c_p}$$

第12章 非稳态热传导

导热微分方程推导：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{\phi} \leftarrow}{\rho c_p} - \dot{\phi} V = Ah(t - t_\infty)$$

体积热源折算

$$\rho V c \frac{dt}{d\tau} = -hA(t - t_\infty) \quad (12-5a)$$

零维问题的导热微分方程

零维问题的数学描述：

引入过余温度 $\theta = t - t_\infty$ ，则有

$$\begin{cases} \rho V c \frac{d\theta}{d\tau} = -hA\theta & (12-5b) \\ \theta(\tau = 0) = t_0 - t_\infty = \theta_0 & (12-5c) \end{cases}$$

导热微分方程

初始条件

零维问题完整数学描述

导热微分方程变为 $\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho V c} d\tau$

第12章 非稳态热传导

导热微分方程求解:

从0到 τ 积分

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho V c} d\tau \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\int_0^{\tau} \frac{hA}{\rho V c} d\tau$$

$$\ln \frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{hA}{\rho V c} \tau$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho V c} \tau\right) \quad (12-6)$$

$$V / A = l_c \quad (12-7)$$

过剩温度比

其中的指数: $\frac{hA}{\rho c V} \tau = \frac{hV}{\lambda A} \cdot \frac{\lambda A^2}{V^2 \rho c} \tau = \frac{h(V/A)}{\lambda} \cdot \frac{a \tau}{(V/A)^2} = Bi_v \cdot Fo_v \quad (12-8)$

$Bi_v = \frac{h(V/A)}{\lambda}$ 为毕渥数; $Fo_v = \frac{a \tau}{(V/A)^2}$ 为傅里叶数。

方程分析解变为:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho V c} \tau\right) = \exp(-Bi_v \cdot Fo_v) \quad (12-9)$$

物体中的温度
呈指数分布

第12章 非稳态热传导

12.2.2 导热计算式、时间常数与傅里叶数

1. 导热计算式

导热量：从初始时刻到某一瞬间为止的时间间隔内，物体与流体间所交换的热量。

问题求解：由**瞬时热流量**对时间做**积分**

$$\phi = -\rho c V \frac{dt}{d\tau} = -\rho c V (t_0 - t_\infty) \left(-\frac{hA}{\rho c V} \right) \exp \left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau \right) = (t_0 - t_\infty) hA \exp \left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau \right)$$

0- τ 时间内的总热量为：

$$Q_\tau = \int_0^\tau \phi d\tau = (t_0 - t_\infty) \int_0^\tau hA \exp \left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau \right) d\tau = (t_0 - t_\infty) \rho c V \left[1 - \exp \left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau \right) \right] \quad (12-10)$$

2. 时间常数

过剩温度随时间呈**指数曲线**关系，即：**开始**温度**变化快**，**后来**变化较**慢**

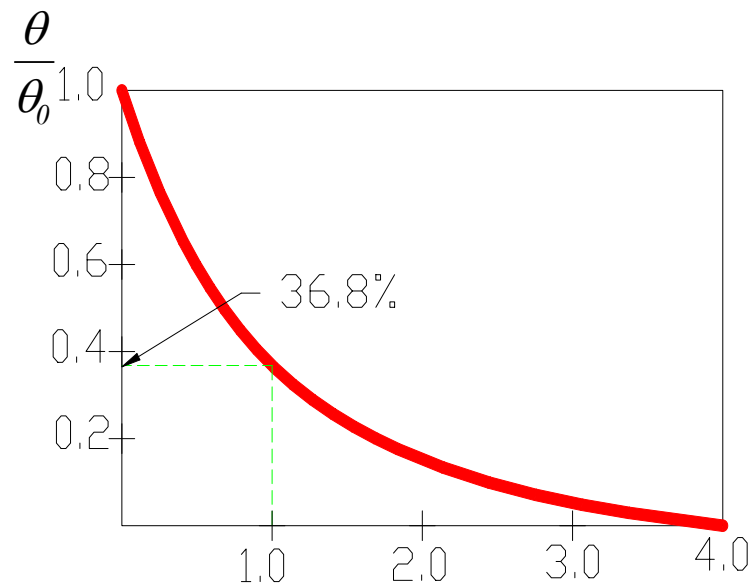
$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \exp \left(-\frac{hA}{\rho V c} \tau \right) \xrightarrow{\tau = \rho c V / (hA)} \frac{\theta}{\theta_0} = \exp(-1) = 38.6\%$$

第12章 非稳态热传导

$\rho cV / (hA)$ 称为时间常数，记为 τ_c

当传热时间 $\tau = \tau_c = \rho cV / (hA)$ 时，物体的
 过余温度达到初始过余温度的36.8%。

时间常数表示零维问题中物体在流体中
 温度变化响应快慢的指标。主要取决于
 其自身的热容量 ρcV 及表面换热条件 (hA)



3. 毕渥数及傅里叶数的物理意义

毕渥数

$$Bi = \frac{hl}{\lambda} = \frac{l/\lambda}{1/h}$$

物体内部导热热阻 物体表面对流换热热阻

无量纲热阻

傅里叶数

$$Fo = \frac{\tau}{l^2/a} = \frac{\text{换热时间}}{\text{边界热扰动扩散到} l^2 \text{面积上所需的时间}}$$

无量纲时间

毕渥数 越小，利用集中参数法分析结果越接近实际情况

傅里叶数 是表征非稳态过程进行深度的无量纲时间， Fo 越大，
 热扰动就能越深入地传播到物体内部。

第12章 非稳态热传导

12.2.3 集中参数法的适用范围及应用举例

毕渥数越小，越适合应用集中参数法，小到什么程度？

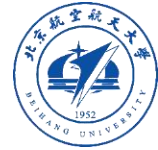
$$\text{如果特征长度} \begin{cases} l = \delta, & \text{厚度为} 2\delta \text{的平板} \\ l = R, & \text{圆柱} \\ l = R, & \text{圆球} \end{cases} \quad (12-11)$$

$$\text{那么 } Bi = \frac{hl}{\lambda} \leq 0.1 \quad (12-12)$$

最大最小过余温度之差小于5%。

$$\text{如果特征长度 } l_c = \frac{V}{A} = \begin{cases} \frac{A\delta}{A} = \delta, & \text{厚度为} 2\delta \text{的平板} \\ \frac{\pi R^2 \rho}{2\pi R \rho} = \frac{R}{2}, & \text{圆柱} \\ \frac{4\pi R^3 / 3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3}, & \text{圆球} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Bi = \frac{hl_c}{\lambda} \leq 0.1 \\ Bi = \frac{hl_c}{\lambda} \leq 0.05 \\ Bi = \frac{hl_c}{\lambda} \leq 0.033 \end{cases}$$

当传热系数计算精度要求20%~25%以内时，选择 $Bi = \frac{hl_c}{\lambda} \leq 0.1 \quad (12-13)$



第12章 非稳态热传导

例题12-1 一直径为5cm的钢球,初始温度为450°C,突然被置于温度为30 °C的空气中。设钢球表面与周围环境间的表面传热系数为24W/(m²K), 试计算钢球冷却到300 °C所需要的时间。已知钢球的 $c=0.48\text{kJ}/(\text{KgK})$, $\rho=7753\text{Kg}/\text{m}^3$, $\lambda=33\text{W}/(\text{mK})$ 。

假设: (1) 钢球冷却过程中与空气及四周冷表面发生对流和辐射传热, 随着表面温度的降低辐射换热量减少。这里取一个平均值, 表面传热系数按常熟处理; (2) 常物性。

计算: 首先检验是否可用集中参数法, 为此计算 Bi 数 $Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{hR/3}{\lambda} = 0.00606 < 0.0333$

可以选用集中参数法
$$\frac{hA}{\rho c V} = \frac{24\text{W}/(\text{m}^2\text{K}) \times 4\pi \times (0.025\text{m})^2}{7753\text{kg}/\text{m}^3 \times 48\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \times (0.025\text{m})^2} = 7.74 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$$

根据公式(12-6)有

$$\frac{t - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = \frac{300^{\circ}\text{C} - 30^{\circ}\text{C}}{450^{\circ}\text{C} - 30^{\circ}\text{C}} = \exp(-7.74 \times 10^{-4} \tau)$$

由此解得

$$\tau = 570\text{s} = 0.158\text{h}$$

第12章 非稳态热传导

12.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

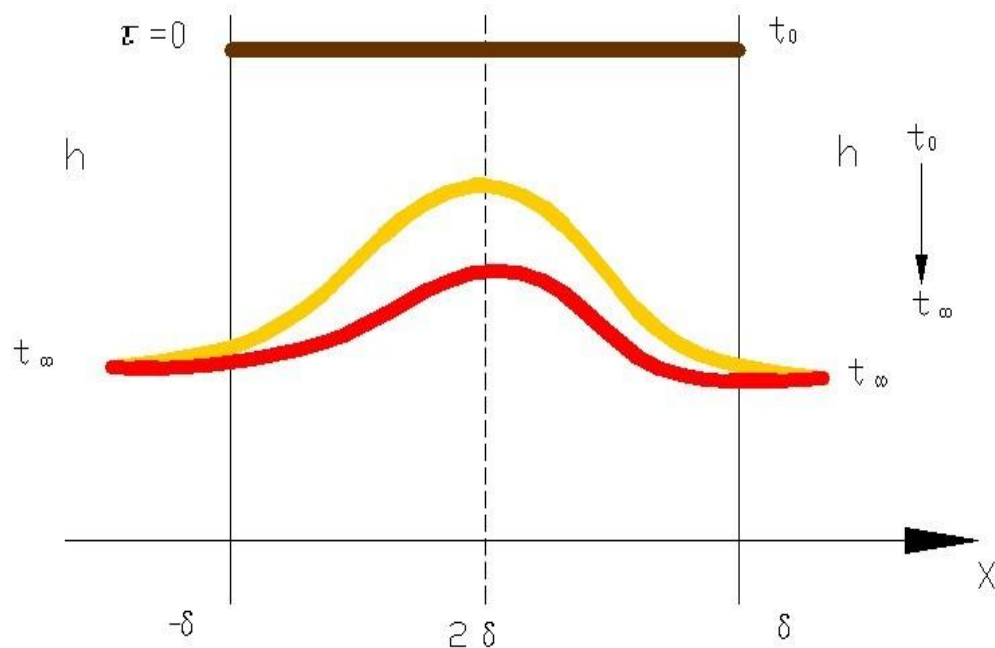
内容：介绍平板、圆柱与球的一维非稳态导热温度场的分析解。

重点：分析解的应用，了解求解过程，掌握公式中各部分表示的含义

12.3.1 三种几何形状物体的温度场分析解

1. 平板

厚度为 2δ 的无限大平板，
初始温度为 t_0 ，外部温度为 t_∞ ，
平板关于中心截面对称，因此
只研究 $x \geq 0$ 的半块平板



第12章 非稳态热传导

半块平板的数学描写:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (0 < x < \delta, \tau > 0) \\ t(x, 0) &= t_0 \quad (0 \leq x \leq \delta) \\ \left. \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \quad \text{—— (对称性)} \\ h[t(\delta, \tau) - t_\infty] &= \lambda \left. \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta} \end{aligned}$$

(12-14)

导热微分方程

(12-15)

初始条件

(12-16a)

边界条件

(12-16b)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad 0 < x < \delta, \tau > 0 \quad (12-18)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0 \quad 0 < x < \delta \quad (12-19)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (12-20a)$$

$$h\theta(\delta, \tau) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta} \quad (12-20b)$$

非稳态平板问题求解:

引入变量——**过余温度**

$$\text{令 } \theta(x, \tau) = t(x, \tau) - t_\infty$$

第12章 非稳态热传导

采用分离变量法得到分析解如下所示

$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_0) \cos(\mu_n \eta) \quad (12-21a)$$



其中, $F_0 = \frac{a\tau}{\delta^2}$, $\eta = \frac{x}{\delta}$, 系数 C_n 应该使上述无穷级数在 $\tau = 0$ 时满足初始条件, 由傅里叶级数理论可得:

$$C_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n} \quad (12-21b)$$

μ_n 是下列超越方程的根, 称为特征值

$$\tan \mu_n = \frac{Bi}{\mu_n}, n = 1, 2, \dots \quad (12-21c)$$

$$\text{其中, } Bi = \frac{h\delta}{\mu_n}$$

第12章 非稳态热传导

2. 圆柱

分析解为:

$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_0) J_0(\mu_n \eta) \quad (12-22a)$$

其中, $F_0 = \frac{a\tau}{R^2}$, $\eta = \frac{r}{R}$, 系数 C_n 应该使上述无穷级数在 $\tau = 0$ 时满足初始条件, 由傅里叶级数理论可得:

$$C_n = \frac{2}{\mu_n} \frac{J_0(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \quad (12-22b)$$

μ_n 是下列超越方程的根, 称为特征值

$$\mu_n \frac{J_1(\mu_n)}{J_0(\mu_n)} = Bi, n = 1, 2, \dots \quad (12-22c)$$

$$\text{其中, } Bi = \frac{hR}{\mu_n}$$

第12章 非稳态热传导

3. 圆球

分析解为:

$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_0) \frac{1}{\mu_n \eta} \sin(\mu_n \eta) \quad (12-23a)$$

其中, $F_0 = \frac{a\tau}{R^2}, \eta = \frac{r}{R}$, 系数 C_n 应该使上述无穷级数在 $\tau = 0$ 时满足初始条件, 由傅里叶级数理论可得:

$$C_n = 2 \frac{\sin(\mu_n) - \mu_n \cos(\mu_n)}{\mu_n - \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)} \quad (12-23b)$$

μ_n 是下列超越方程的根, 称为特征值

$$1 - \mu_n \cos(\mu_n) = Bi, n = 1, 2, \dots \quad (12-23c)$$

其中, $Bi = \frac{hR}{\mu_n}$

总结: 平板、圆柱和圆球中的无量纲过余温度与傅里叶数、毕渥数及无量纲距离有关, 即:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t(\eta, \tau) - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = f(F_0, Bi, \eta) \quad (12-24)$$



第12章 非稳态热传导

12.3.2 非稳态导热正规状况阶段分析解的简化

1. 正规状况阶段的物理概念与数学含义

非稳态导热过程 { 非正规状况阶段—与初始条件有关
正规状况阶段—与边界条件有关

正规状况阶段的数学含义：

1. 三个解的特征值都是 Bi 数的函数，在一定的 Bi 数下 μ_n 随着 n 的增加而迅速增加，完整表达非正规状况阶段和正规状况阶段。
2. 非稳态导热微分方程是一个傅里叶级数， $n \geq 2$ 之后的各项是为了满足初始条件而引进的。
3. 而当仅取 $n=1$ 时，且 F_0 数大于0.2时，计算结果与完整级数计算结果的偏差小于1%。

第12章 非稳态热传导

2. 正规状况阶段三个分析解的简化表达式(温度场分布)

平板
$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \cos \mu_1 \sin \mu_1} \exp(-\mu_1^2 F_0) \cos(\mu_1 \eta) \quad (12-25)$$

圆柱
$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \frac{2}{\mu_1} \frac{J_1(\mu_1)}{J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)} \exp(-\mu_1^2 F_0) J_0(\mu_1 \eta) \quad (12-26)$$

圆球
$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = 2 \frac{\sin(\mu_1) - \mu_1 \cos(\mu_1)}{\mu_1 - \sin(\mu_1) \cos(\mu_1)} \exp(-\mu_1^2 F_0) \frac{1}{\mu_1 \eta} \sin(\mu_1 \eta) \quad (12-27)$$

举例： 以平板的解式为例，正规状况阶段任意时刻下，平板中任意处与平板中心处的过余温度之比为：

$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta(0, \tau)} = \frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos(\mu_1 \eta) \quad (12-28)$$

结果与时间无关，也就是与非正规状况阶段无关，**仅取决于特征值，也就是取决于边界条件，**

第12章 非稳态热传导

3. 一段时间间隔内所传导的热量计算式

考察热量的传递: $Q_0 = \rho c V (t_0 - t_\infty)$ (12-29)

Q_0 --非稳态导热过程所能传递的最大热量(从初始阶段到热平衡)

若令 Q 为 $[0, \tau]$ 内所传递热量, 那么与最大热量之比为

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\rho c \int_V [t_0 - t(x, \tau)] dV}{\rho c V (t_0 - t_\infty)} = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \quad (12-30)$$

对于平板、圆柱和圆球而言, 当 $F_0 > 0.2$ 后, 正规状况阶段的热量比为:

平板 $\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin \mu_1}{\mu_1} \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \cos \mu_1 \sin \mu_1} \exp(-\mu_1^2 F_0)$ (12-31)

圆柱 $\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1} \frac{2}{\mu_1} \frac{J_1(\mu_1)}{J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)} \exp(-\mu_1^2 F_0)$ (12-32)

圆球 $\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3(\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1)}{\mu_1^3} \frac{2(\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1)}{\mu_1 - \sin(\mu_1) \cos(\mu_1)} \exp(-\mu_1^2 F_0)$ (12-33)

第12章 非稳态热传导

总结分析解(温度分布)及其导热量计算式, 可以将它们统一表示为:

$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = A \exp(-\mu_1^2 F_0) f(\mu_1 \eta) \quad (12-34)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - A \exp(-\mu_1^2 F_0) B \quad (12-35)$$



系数 A 、 B 及函数 $f(\mu_1 \eta)$ 的表达式

几何形状	A	B	$f(\mu_1 \eta)$
平 板	$2 \frac{\sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1}$	$\frac{\sin \mu_1}{\mu_1}$	$\cos(\mu_1 \eta)$
圆 柱	$2 \frac{J_1(\mu_1)}{\mu_1 [J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)]}$	$2 \frac{J_1(\mu_1)}{\mu_1}$	$J_0(\mu_1 \eta)$
球	$2 \frac{\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1}{\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1}$	$3 \frac{\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1}{\mu_1^3}$	$\frac{\sin(\mu_1 \eta)}{\mu_1 \eta}$

$J_0(\mu_1)$ 、 $J_1(\mu_1)$ 称为第一类贝塞尔函数, 其值可从附录中查出。圆柱和球在不同 Bi 数下的 μ_1 值可参见文献[8]。

第12章 非稳态热传导

12.3.3 非稳态导热正规状况阶段的工程计算方法

分析解主要用于科学计算，对内在特性及影响进行分析(理解)

工程计算方法直接用于计算出所需要的值(掌握)

方法 { **图线法**(海斯勒提出的诺谟图)
近似拟合公式法(campo)

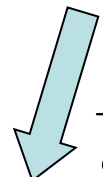
1. 图线法

以**无限大平板**为例， $F_0 > 0.2$ 时，取其级数第一项可得

$$\theta(x, \tau) = \theta_0 \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} e^{-\mu_1^2 F_0} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) = f(Fo, Bi, \frac{x}{\delta})$$

三个变量，因此，需要分开绘制

第一步：根据公式(12-25)，得到 $\frac{\theta_m}{\theta_0} = f(Fo, Bi)$

 $\frac{x}{\delta} = 0$

查无限大平板中心温度的诺谟图

第12章 非稳态热传导

第二步：根据公式(12-28)，得到

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) = f\left(Bi, \frac{x}{\delta}\right) \longrightarrow \text{无傅里叶数} F_0$$

查无限大平板 $\frac{\theta}{\theta_m}$ 图

第三步：平板中任一点的温度为
$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta}{\theta_m} \cdot \frac{\theta_m}{\theta_0} \quad (12-36)$$

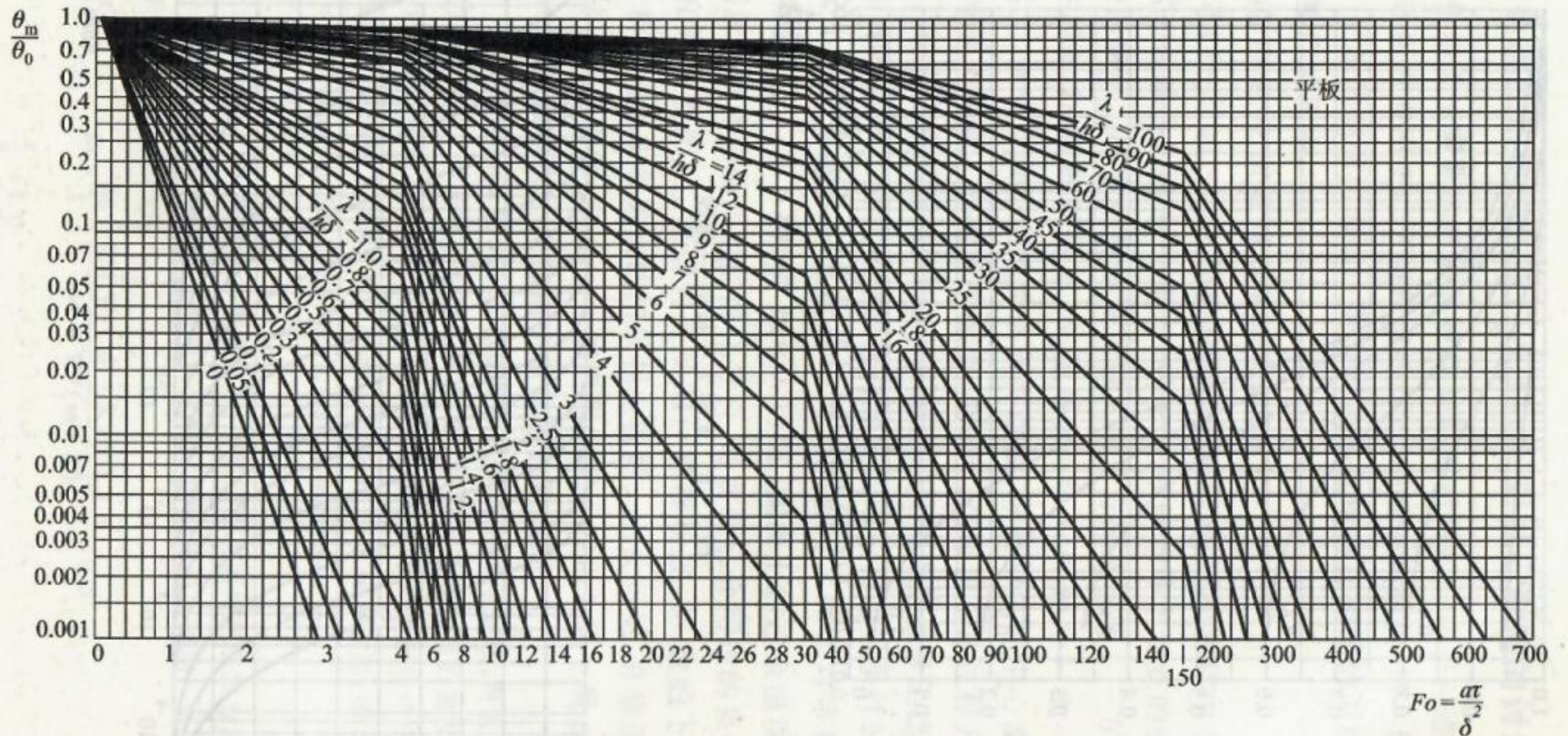
同理，非稳态换热过程中的交换热量可以利用(12-31)~(12-33)绘制。

查无限大平板 Q/Q_0 曲线图

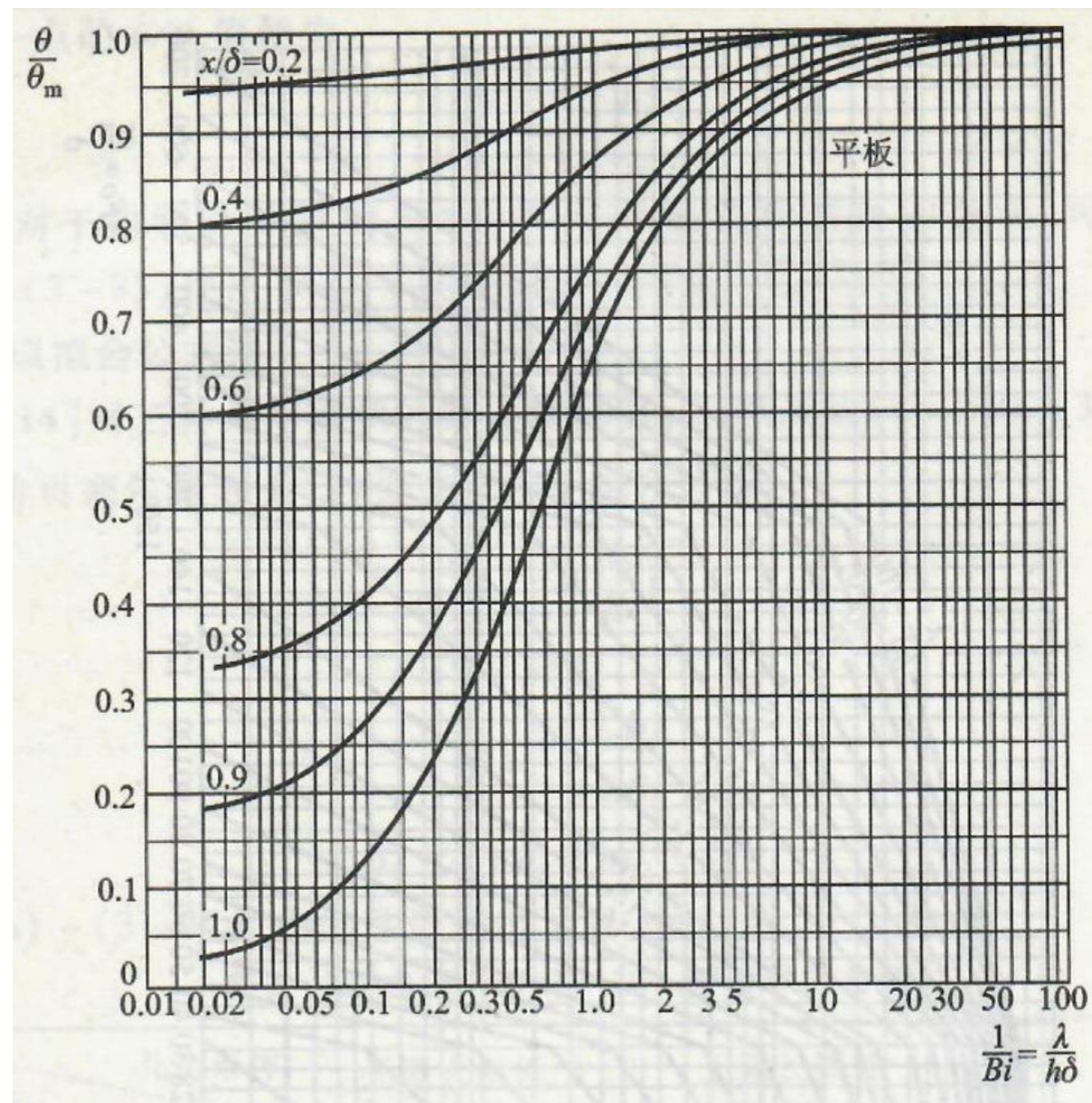
解的应用范围：

书中的诺谟图及下面的拟合函数仅适用恒温介质的第三类边界条件或第一类边界条件的加热及冷却过程，并且 $F_0 > 0.2$

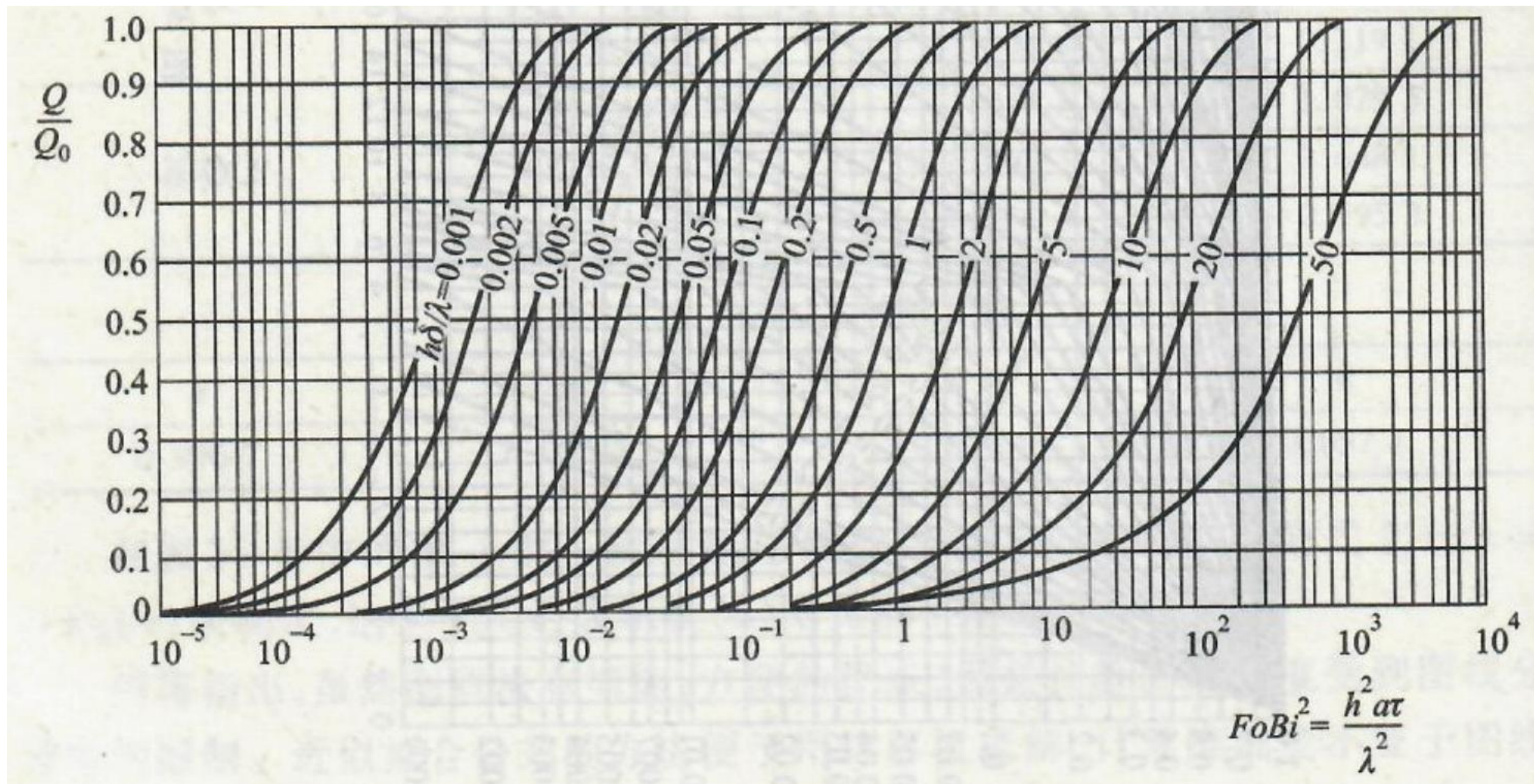
无限大平板中心温度的诺莫图



无限大平板的 $\frac{\theta}{\theta_m}$ 曲线



无限大平板的 Q/Q_0 曲线



第12章 非稳态热传导

2. 近似拟合公式法

对三种几何形状的第一特征值 μ_1 ，以及公式(12-34)、(12-35)中的A、B和贝塞尔函数提出了以下拟合公式

$$\mu_1^2 = \left(a + \frac{b}{Bi}\right)^{-1} \quad (12-37a)$$

$$A = a + b(1 - e^{-cBi}) \quad (12-37b)$$

$$B = \frac{a + cBi}{1 + bBi} \quad (12-37c)$$

$$J_0(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (12-37d)$$

左边公式中的常数见下页表格

$J_0(x)$ 的常数见下页表格

对圆柱和球体，公式(12-34)、(12-35)中的第一类一阶贝塞尔函数 $J_1(x)$ 可根据递推公式 $J_1(x) = -J'_0(x)$ ，这里 $J'_0(x)$ 表示 $J_0(x)$ 对 x 的一阶导数

优缺点：{ 图线法简洁方便，但是受到分辨率的限制，影响计算精度
近似拟合公式法便于计算机求解，可以免去迭代，计算量较大

式 (12-37a~c) 中的常数, 计算 $J_0(x)$ 的常数

式 (12-37a~c) 中的常数

几何形体		无限大平板	无限长圆柱	球
计算的量				
特征值 μ_i	a	0.402 2	0.170 0	0.098 8
	b	0.918 8	0.434 9	0.277 9
系数 A	a	1.010 1	1.004 2	1.000 3
	b	0.257 5	0.587 7	0.985 8
	c	0.427 1	0.403 8	0.319 1
系数 B	a	1.006 3	1.017 3	1.029 5
	b	0.547 5	0.598 3	0.648 1
	c	0.348 3	0.257 4	0.195 3

计算 $J_0(x)$ 的常数

a	b	c	d
0.996 7	0.035 4	-0.325 9	0.057 7

第12章 非稳态热传导

12.3.4 分析解应用范围的推广及傅里叶数和毕渥数对温度场的影响 应用范围：

1. 物体的被加热或者冷却都是用于该分析解；
2. 对于一维平板，还可应用于(1) 平板一侧绝热，另一侧为第三类边界条件；(2) 平板两侧均为第一类边界条件且维持相同温度。

傅里叶数和毕渥数对温度场的影响：

傅里叶数的影响：

傅里叶数 F_0 与时间 τ 呈正比，物体中各点的过余温度随时间 τ 增加而减少，因此各点的过余温度随傅里叶数 F_0 增加而减少

毕渥数的影响：

介质温度恒定的第三类边界条件下的分析解，在 $Bi \rightarrow \infty$ 的极限情况下转化为第一类边界条件下的解，而在 $Bi \rightarrow 0$ 的极限情况下则与集中参数法的解相同。

第12章 非稳态热传导

例题3-4 一块厚度为100mm的钢板放入温度为1000℃的炉中加热，钢板一面受热，另一面可近似认为是绝热的。钢板初始温度为 $t_0=20\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。求钢板受热表面的温度达到500℃所需要的时间，并计算此时剖面上的最大温差。取加热过程中的平均表面传热系数 $h=174\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ ，钢板的 $\lambda=34.8\text{W}/(\text{mK})$ ， $a=0.555\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 。已知： $Bi=0.1$ 时， $\mu_1=0.3111\text{rad}$ ； $Bi=0.5$ 时， $\mu_1=0.6533\text{rad}$ ； $Bi=1.0$ 时， $\mu_1=0.8603\text{rad}$ ；

假设：(1) 一维问题；(2) 热物性为常数；(3) 加热过程表面传热系数为常数。


分析：这一问题相当于厚200mm平板对称受热情况，故可以应用一维平板的分析解

计算：对于此平板

从图3-8查得，在平板表面上

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{174\text{W}/(\text{m}^2\text{K}) \times 0.1\text{m}}{34.8\text{W}/(\text{mK})} = 0.5$$

$$\frac{x}{\delta} = 1.0$$

 $\theta_w / \theta_m = 0.8$

第12章 非稳态热传导

另一方面，根据已知条件，表面上的无量纲过余温度为

$$\frac{\theta_w}{\theta_0} = \frac{t_w - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{500^\circ\text{C} - 1000^\circ\text{C}}{20^\circ\text{C} - 1000^\circ\text{C}} = 0.51$$

$$\frac{\theta_w}{\theta_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} \frac{\theta_w}{\theta_m} \quad \text{故得} \quad \frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{\theta_w}{\theta_0} / \frac{\theta_w}{\theta_m} = 0.51 / 0.8 = 0.637$$

根据 θ_m/θ_0 及Bi数之值，从图3-7查的 $F_0=1.2$ ，故得

$$\tau = 1.2\delta^2 / a = 2.16 \times 10^3 \text{ s} = 0.6 \text{ h}$$

另外，由 $\theta_m=0.637\theta_0$ 得

$$t_m = 0.637\theta_0 + t_\infty = 376^\circ\text{C}$$

故在剖面上的最大温差为

$$\Delta t_{\max} = 500^\circ\text{C} - 376^\circ\text{C} = 124^\circ\text{C}$$

讨论:下面根据公式(3-25)计算 F_0 的值，

由 $Bi=0.5$ 可知， $\mu_1=0.6533\text{rad}=37.43^\circ$

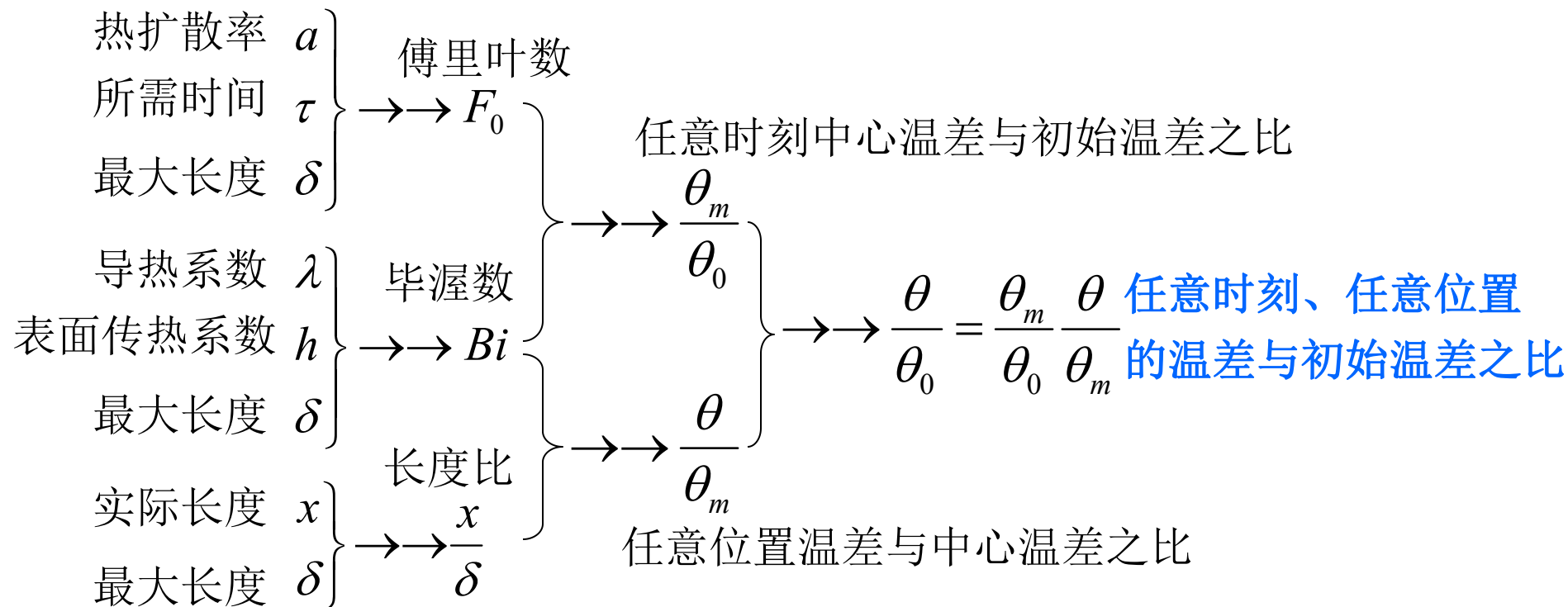
故： $0.51 = 1.0701 \times \exp(-0.4268F_0) \times 0.7981$

得到： $F_0 = 1.196$

可以看出，由图线法得到的结果与分析解相当一致

第12章 非稳态热传导

利用图表法求解非稳态导热问题方法总结



第12章 非稳态热传导

12.3 半无限大物体的非稳态导热

定义：半无限大物体可以看作是一维平板的一种特殊情况，就是从 $x=0$ 界面开始可以向正向以及上、下方向上无限延伸，而在每一个与 x 坐标垂直的界面上物体的温度都相等。

重点：分析解的应用
理解其所包含的物理概念。

应用范围：非稳态导热的初始阶段扰动的影响
仅局限在表面附近而未深入到平板内部中去时，可有条件地把该平板视为该问题

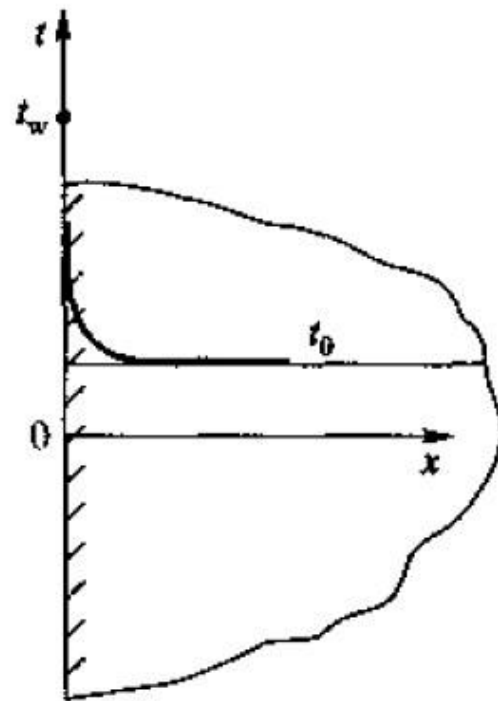


图 3 - 10 半无限大物体图示

第12章 非稳态热传导

12.4.1 三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

有一半无限大物体，初始温度为 t_0 ，在初始时刻 $x=0$ 侧面突然受到热扰动，分为以下三种边界条件：

1. 表面温度突然变为 t_w ，并保持不变(第一类)
2. 受到恒定的热流密度加热(第二类)
3. 与温度为 t_∞ 的流体进行热交换(第三类)

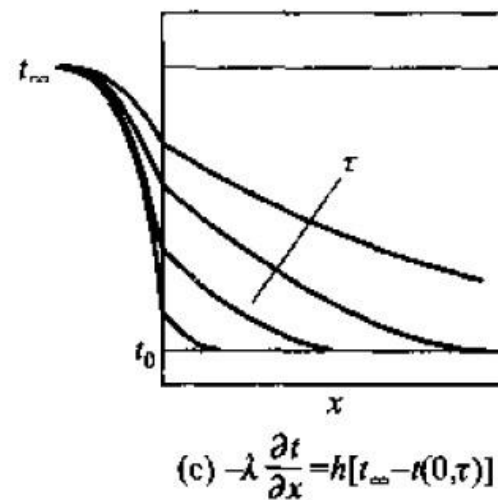
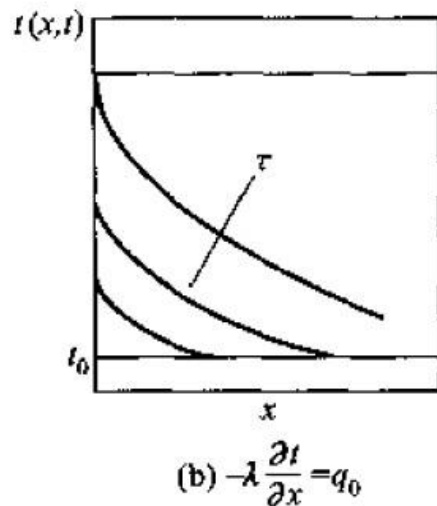
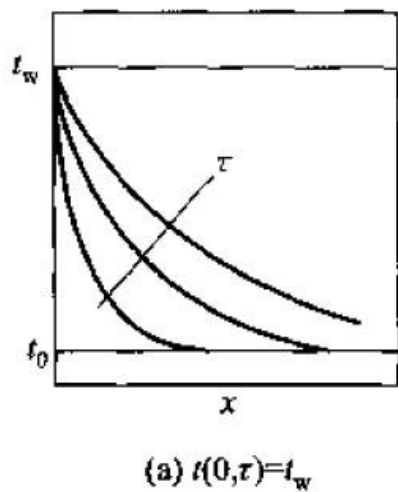


图 3-11 三种边界条件的图示

第12章 非稳态热传导

上述条件下，物体中温度的**控制方程**和**定界条件**为

控制方程 $\longrightarrow \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \infty$ (12-38)

定界条件 $\longrightarrow \begin{cases} \tau = 0, t(x, \tau) = t_0 \\ x = 0, \text{三种边界条件之一} \end{cases}$

三种边界条件下，温度场的**分析解**可以表示为

第一类边界条件 $\frac{t(x, \tau) - t_w}{t_0 - t_w} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$ (12-39)

第二类边界条件 $t(x, \tau) - t_0 = \frac{2q_0\sqrt{a\tau}}{\lambda} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) - \frac{q_0x}{\lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$ (12-40)

第三类边界条件 $\frac{t(x, \tau) - t_0}{t_\infty - t_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{\lambda} + \frac{h^2a\tau}{\lambda^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{h\sqrt{a\tau}}{\lambda}\right)$ (12-41)

其中， $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$ 为误差函数， $\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$ 为余误差函数

第12章 非稳态热传导

3.4.2 导热计算式

以第一类边界条件为例，推导从初始时刻到某一特定时刻 τ 之间，半无限大物体表面与外界的换热量

通过任意截面处的热流密度为

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = -\lambda(t_0 - t_\infty) \frac{\partial \operatorname{erf} \eta}{\partial x} = \lambda \frac{t_\infty - t_0}{\sqrt{\pi a \tau}} \exp\left[-x^2 / (4a\tau)\right] \quad (12-42)$$

表面的导热量为

$$Q = A \int_0^\tau q_w d\tau = A \int_0^\tau \frac{\lambda(t_w - t_0)}{\sqrt{\pi a \tau}} d\tau = 2A \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \sqrt{\rho c \lambda} (t_w - t_0) \quad (12-43)$$

从以上两式可知，表面上的热流密度与时间的平方根成反比，总的导热热量与时间的平方根成正比。此外，导热量还与物体的吸热系数 $\sqrt{\rho c \lambda}$ 成正比，吸热系数表示物体向与接触的高温物体吸热的能力。

第12章 非稳态热传导

3.4.3 分析解的讨论

以上三个边界条件下的解都包含有一个无量纲参数 $\eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$ 以及误差函数 $\text{erf}\eta$ ，误差函数 $\text{erf}\eta$ 随 η 的变化趋势如下图所示。

这是半无限大物体分析界的一个共同点。

从误差函数曲线图中可以得到两个重要结论：

1. 从几何位置来看，如果 $x/(2\sqrt{a\tau}) \geq 2$ ，则在 τ 时刻 x 处得温度可以认为尚未发生变化。
2. 从时间上来看，如果 $\tau \leq x^2/(16a)$ ，则此时 x 处的温度可认为完全不变，因此可以把 $x^2/(16a)$ 视为惰性时间，即惰性时间之内， x 处的温度可认为等于 t_0 。

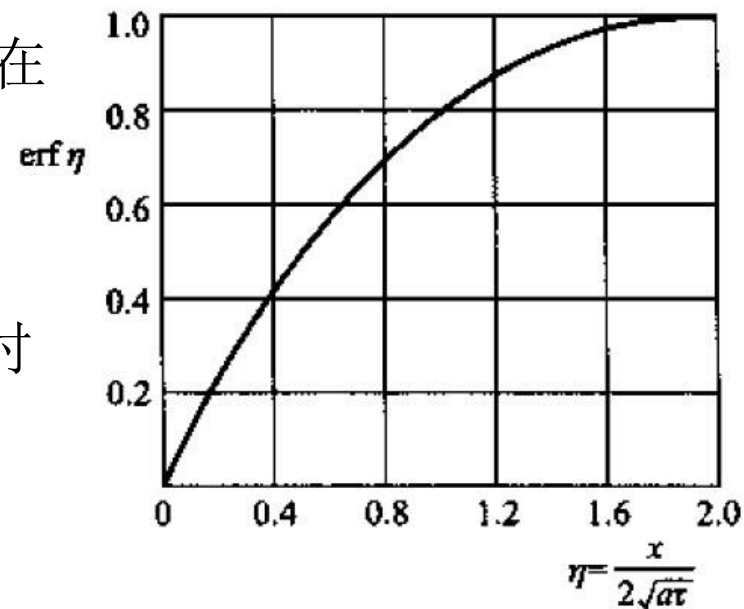


图 3 - 12 误差函数曲线

第12章 非稳态热传导

例题3-6 一块大平板型钢铸件在地坑中浇铸，浇铸前型砂温度为20 °C。设在很短的时间内浇铸完成，并且浇铸后铸件的表面温度一直维持在其凝结温度1450 °C，试计算离铸件底面80mm处浇铸后2h的温度。型砂的热扩散率 $a=0.89 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ 。

假设： (1)将铸件底面以下砂型中的非稳态导热按**第一种边界条件**的半无限大物体处理；(2)物性为常数。

计算： 首先计算无量纲参数 η

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} = 0.5$$

根据附录可得 $\text{erf}(0.5) = 0.5205$

所以 $t = t_w + \text{erf} 0.5(t_0 - t_w) = 705.7^\circ \text{C}$

第12章 非稳态热传导

本章小结

1. 掌握非稳态导热的基本概念，包括特点及类型；
了解导热微分方程的一般形式及其初始和边界条件；
掌握毕渥数的概念及其对温度分布的影响。
2. 零维问题的分析法中分析解(温度分布)及传热量计算公式表示的意义；
时间常数，傅里叶数及毕渥数的物理意义；
集中参数法的适用范围及计算例题。
3. 一维物体非稳态导热中，不同形状物体对温度分布的影响；
正规状况阶段及非正规状况阶段的区分及数学含义；
正规状况阶段的分析解简化及传热量计算式；
非稳态导热问题的工程计算方法 and 应用实例。



第12章 非稳态热传导

- 4. 三种边界条件下半无限大物体的温度场分析解;
半无限大物体导热量计算式;
分析解中关键变量参数及其含义。

重点:

掌握非稳态导热的概念及特点;
三种具体问题的分析解及其应用(温度场求解及传热量的计算)。

作业:

3-2, **3-14**(附录2, 质量、体积与密度之间的关系),
3-24(图线法, 比照例3-4), **3-41**(附录17),
3-48(与p115中的热扩散率有关)。