北航宇航学院

空气动力学(32学时)

主讲：覃粒子　　陈　兵

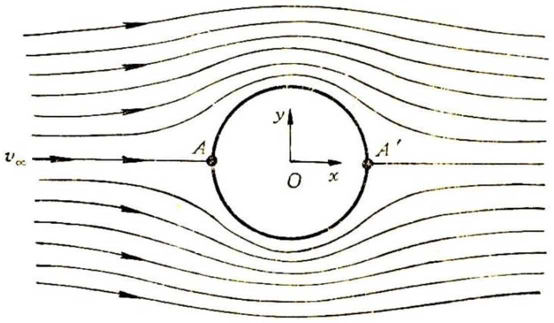
qlz@buaa.edu.cn　　Markchien@buaa.edu.cn

沙河主楼D510，13911744896　　沙河主楼D519，13683012881

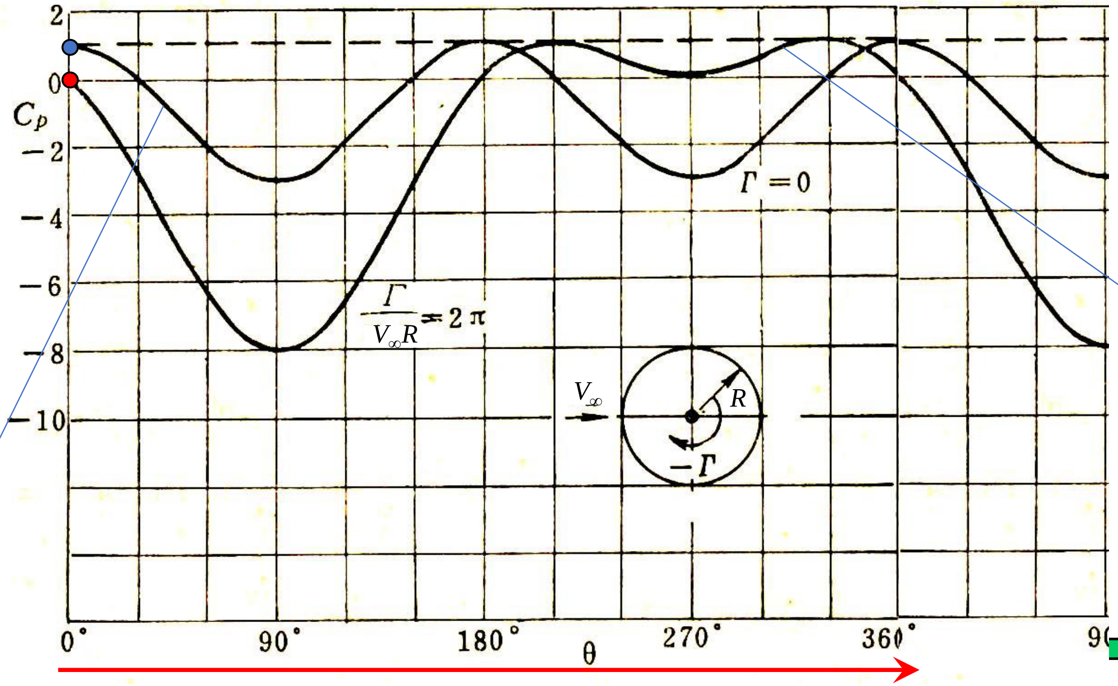
2024年 春季学期

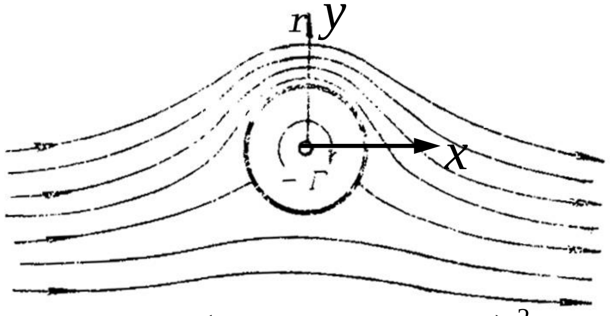
【回顾/总结】

圆柱绕流

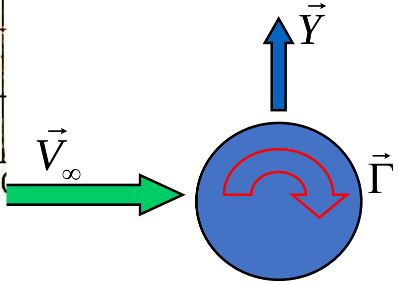


$$C_p = \frac{p_s - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta$$





$$C_p = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R V_\infty}\right)^2$$



$$\vec{Y} = \rho \vec{V}_\infty \times \vec{\Gamma}$$

■ **达朗培尔疑题**

达朗培尔（D’ Alembert，18世纪法国著名数学家）提出，在理想不可压流中，**任何一个封闭物体的绕流，其阻力都是零**。这个结论不符合事实。这个矛盾多少耽误了一点流体力学的发展，那时人们以为**用无粘的位流去处理实际流动是没有什么价值的**。

【回顾/总结】

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

- 后来才知道，这样撇开粘性来处理问题，是一种很有价值的合乎逻辑的抽象，它能使我们把影响流动的各种因素分开来看清楚。譬如，早期由经验得出来的良好翼型，最大的升阻比不过是几十比一，后来在位流理论指导下，设计出来的翼型的最大升阻比竟达三百比一。这就是无粘抽象的指导意义 。

- 事实上，物体的阻力不仅由压力流向不平衡构成，同时还包括流体与固体壁面之间的摩擦力。**要彻底的研究阻力问题，解决达朗贝尔疑题等类似问题，必须考虑流体的粘性。**这是**粘性流体力学**需要解决的问题。

第七章 粘性流体力学基础（1/2）

- 粘性流体中的作用力
- 粘性流体运动基本方程
- 雷诺方程与雷诺应力
- 附面层基础知识
- 管道内的流动损失与湍流

7.1 粘性流体中的作用力

- 粘性流体中的作用力
- 切应力互等定理
- 广义牛顿定律

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

7.1.1 粘性流体中的作用力

▫ 六面体微元表面力

第2章时,已经介绍过作用在流体上的力,取三个正交的面元,一点的应力状态由九个分量组成.

作用在正x面上的力表示为

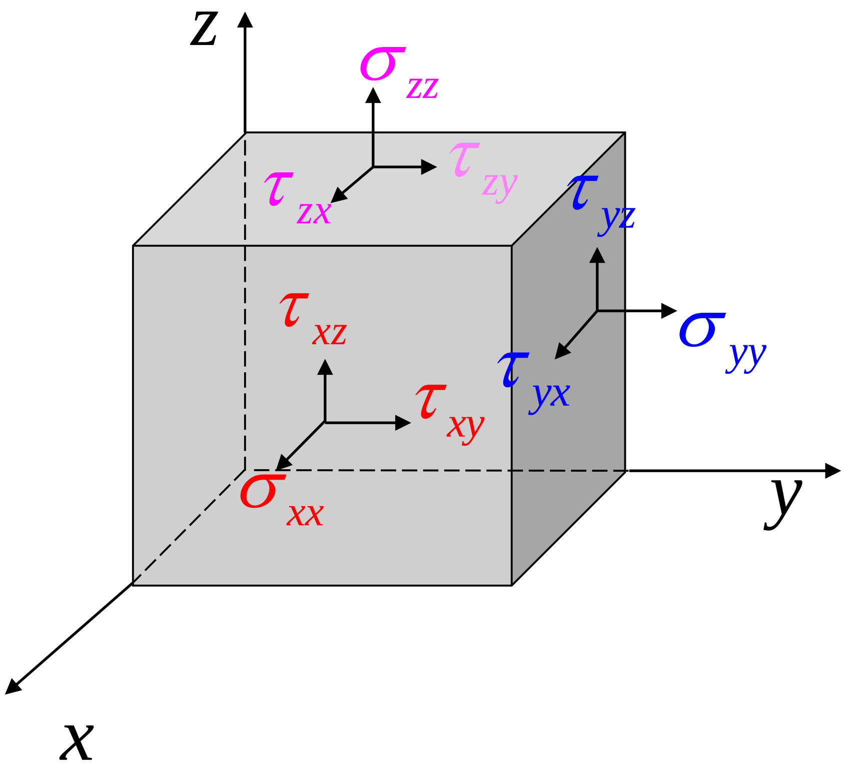
$\vec{p}_x = (\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})$

作用在正y面上的力表示为

$\vec{p}_y = (\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz})$

作用在正z面上的力表示为

$\vec{p}_z = (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz})$



把上述九个分量写成矩阵形式:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

τ_{ij}:第一个脚标i表示作用面的法向,第二个脚标j表示作用力的方向

在记法上:$\sigma_x, \sigma_{xx}, \tau_{xx}$都是指$x$面上的正压力

7.1 粘性流体中的作用力

7.1.1 粘性流体中的作用力

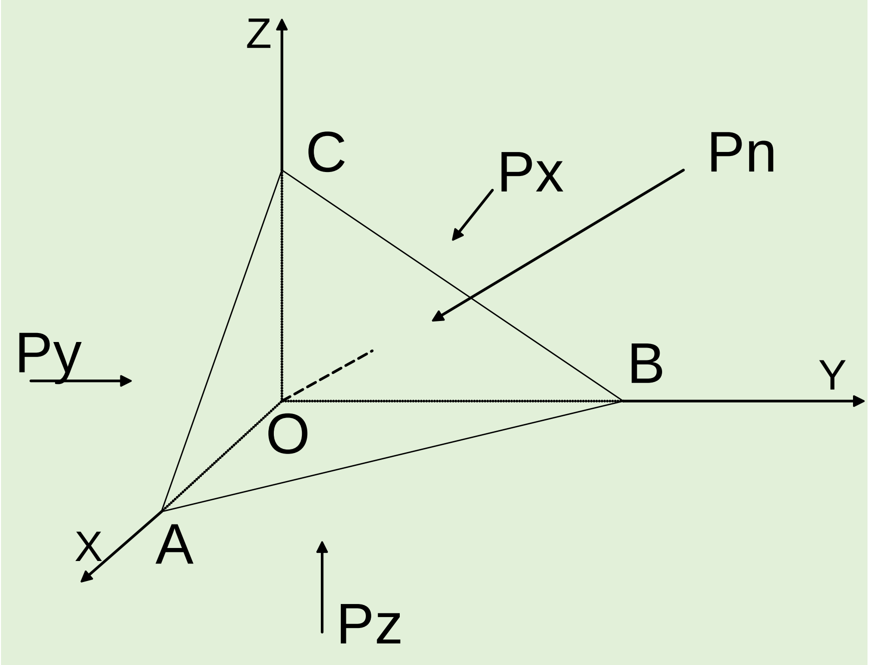
- 利用这九个应力分量可以表示任意面上的面力

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

面力$\vec{p}_n = (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz})$

面的方向为(n_x, n_y, n_z)

$${n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2 = 1$$



$$\begin{cases} p_{nx} = \tau_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z \\ p_{ny} = \tau_{xy}n_x + \tau_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z \\ p_{nz} = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \tau_{zz}n_z \end{cases}$$

7.1.2 切应力互等定理

在均质流体中, 这九个应力分量不是独立的:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

六个剪切应力分量只有三个独立 :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

即剪切应力互等定理.

7.1 粘性流体中的作用力

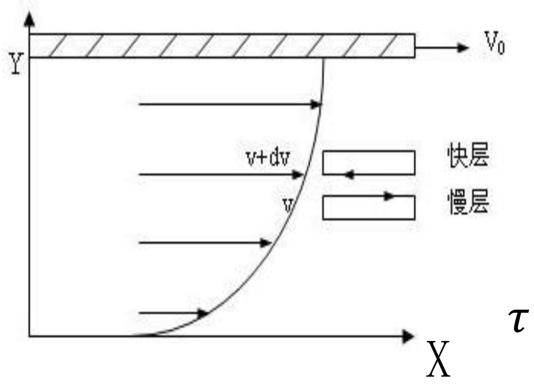
北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

7.1.3 广义牛顿定律

牛顿内摩擦定律：

$$\tau=\mu\frac{dV}{dy}$$

揭示了：切应力与角变形率成正比的关系.



$$\tau=\mu\frac{dV}{dy}$$

牛顿实验

将这一规律推广到多维中去，得多维流体切应力计算式

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)=2\mu\gamma_z$$

$$\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)=2\mu\gamma_y$$

$$\tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)=2\mu\gamma_x$$

4.3 流体微团运动分析

- **运动形式表示小结**

线变形率

$$\varepsilon_x=\frac{\partial V_x}{\partial x}\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial V_y}{\partial y}\qquad \varepsilon_z=\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

角变形率

$$\gamma_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\qquad \gamma_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)$$

旋转角速度

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\qquad \omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

直角坐标系

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

7.1.3 广义牛顿定律

接下来确定三个法向分量

在理想流体中，法向力就是压强p。

但由于有粘性作用,粘性流体中p与三个法向应力不完全一致。

定义法向应力为:

$$\tau_{xx} = -p + \tau'_{xx}$$

$$\tau_{yy} = -p + \tau'_{yy}$$

$$\tau_{zz} = -p + \tau'_{zz}$$

其方向与面元外法向方向一致.

$\tau'_{xx}, \tau'_{yy}, \tau'_{zz}$是粘性作用引起的附加法向应力,表示与流体静压的区别。

类似于切应力与角变形率成线性关系,**广义牛顿定律**认为，附加法向应力应与**线变形**相关。假设:

$$\tau'_{xx} = 2\mu\varepsilon_x + \lambda\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\tau'_{yy} = 2\mu\varepsilon_y + \lambda\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\tau'_{zz} = 2\mu\varepsilon_z + \lambda\nabla\cdot\vec{V}$$

其中:λ为比例系数

$\nabla\cdot\vec{V}$:是 相对体积膨胀率,

前面介绍过 $\nabla\cdot\vec{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

即认为附加的法向应力与三个线变线率都成线性关系。有两个比例系数表示不同方向的线变形率对附加应力的贡献不同.

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

7.1.3 广义牛顿定律

得法向应力为:

$$\tau_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\tau_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial V_y}{\partial y} + \lambda\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\tau_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z} + \lambda\nabla\cdot\vec{V}$$

平均法向应力为:

$$\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) = -p + (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\nabla\cdot\vec{V}$$

平均法向应力与静压p和体积膨胀率都有关.

$$\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) = -p + (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\nabla\cdot\vec{V}$$
$$= -p + \mu'\nabla\cdot\vec{V}$$

定义第二粘性系数: $\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu$

对于不可压流体, $\nabla\cdot\vec{V} = 0$, 第二粘性系数不起作用.

7.1.3 广义牛顿定律

▫ 斯托克斯假设

$$\frac{1}{3}(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}) = -p+(\lambda+\frac{2}{3}\mu)\nabla\cdot\vec{V}$$
$$= -p+\mu'\nabla\cdot\vec{V}$$

对于可压流体，引入斯托克斯假设：

认为平均法向应力不应既与p有关，又与体积膨胀率$\nabla\cdot\vec{V}$有关

平均法向应力等于流体静压强：

$$\frac{1}{3}(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}) = -p$$

即： $\mu' = 0$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

斯托克斯在1880年提出这一假设.

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

7.1.3 广义牛顿定律

▫ 表面应力最终结果

根据斯托克斯假设, 六个独立应力分量为:

$$\tau_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

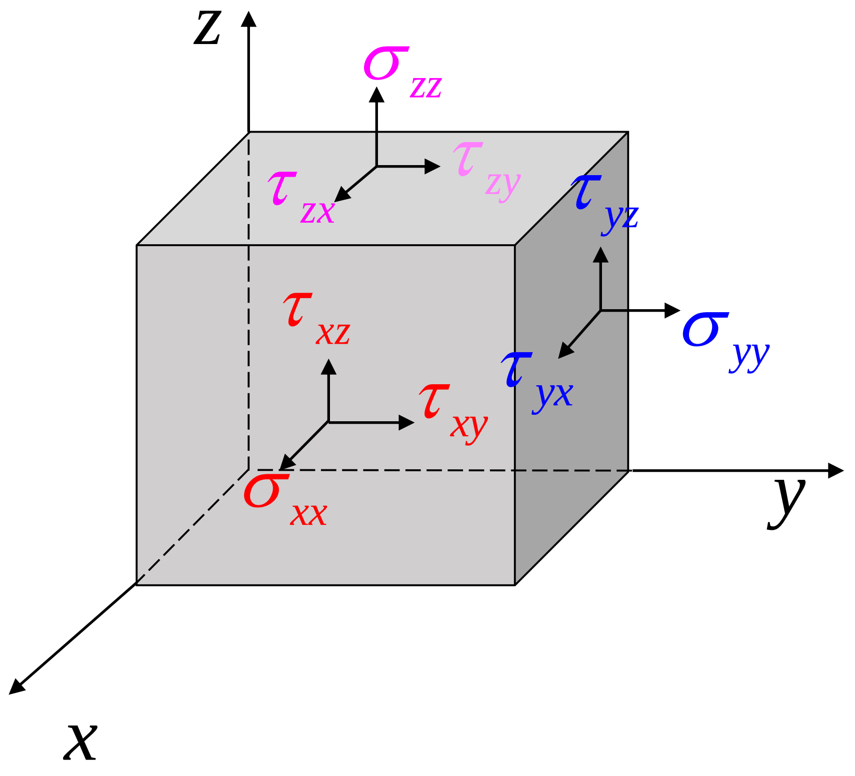
$$\tau_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\tau_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right)$$



$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

7.2 粘性流体运动基本方程

- 质量方程/连续方程
- 动量方程
- 能量方程
- 定解条件

7.2 粘性流体运动基本方程

7.2.1 质量方程

- 连续方程的推导过程与流体受力无关，因此粘性流体的连续方程与无粘流情形相同

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)=0$$

或：
$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial V_x}{\partial x}+\rho\frac{\partial V_y}{\partial y}+\rho\frac{\partial V_z}{\partial z}+V_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+V_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+V_z\frac{\partial \rho}{\partial z}=0$$

7.2.2 动量方程

理想流体微分形式动量方程【回顾】

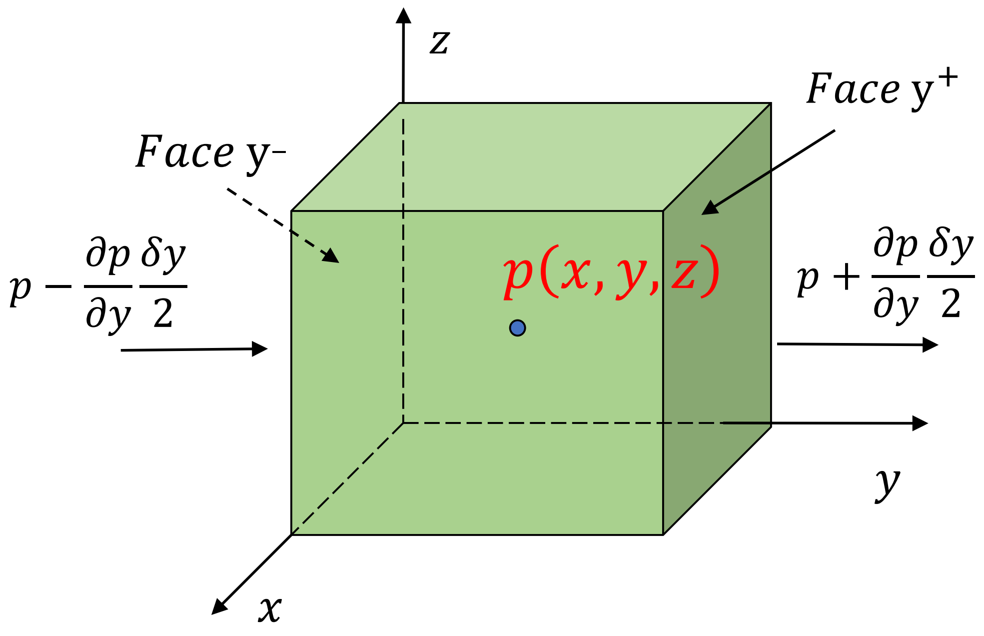
于是得到微分形式的动量方程（**欧拉方程**）：$\dfrac{D\vec{V}}{Dt}=\vec{R}-\dfrac{1}{\rho}\nabla p$

写成分量形式:

$$a_x=\frac{DV_x}{Dt}=\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$a_y=\frac{DV_y}{Dt}=\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$a_z=\frac{DV_z}{Dt}=\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$



流体微元体

柱坐标系下的**欧拉方程:**

$$a_r=\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+V_\theta\frac{\partial V_r}{r\partial\theta}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{{V_\theta}^2}{r}=R_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$a_\theta=\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+V_\theta\frac{\partial V_\theta}{r\partial\theta}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+\frac{V_rV_\theta}{r}=R_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}$$

$$a_z=\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+V_\theta\frac{\partial V_z}{r\partial\theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

其中: $-\dfrac{{V_\theta}^2}{r}$, $\dfrac{V_rV_\theta}{r}$ 分别与向心加速度和科氏加速度有关

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

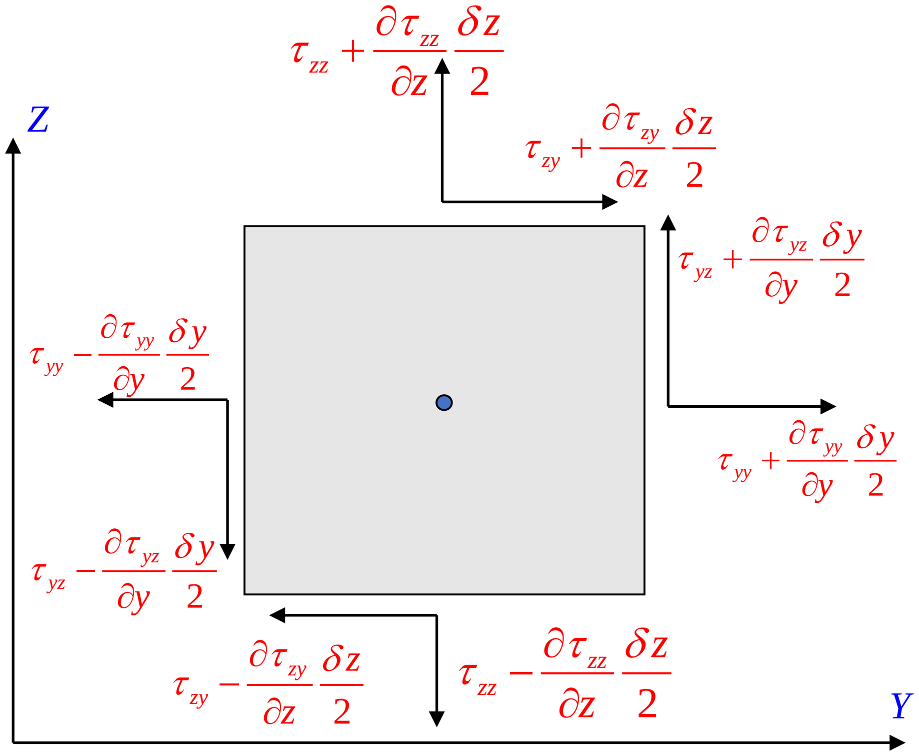
7.2.2 动量方程

理想流体微元的受力分析中没有考虑切应力，现加入切应力，并根据牛顿第二定律重新列解方程。

现在y方向上列方程。y方向受力情况如图。

图中未画出在x⁺和负x⁻，这两个面上沿Y向切应力分别:

$$\tau_{xy} \pm \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$



7.2.2 动量方程

各面面力对微元体的y-向合力为

x⁺和x⁻面:

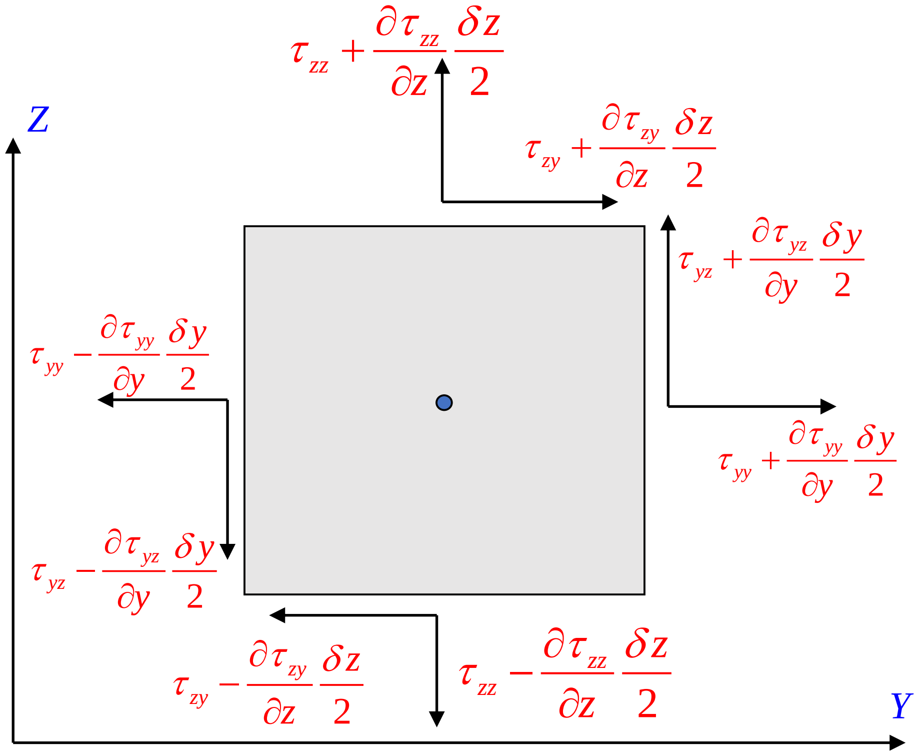
$$\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\delta z-\left(\tau_{xy}-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\delta z=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

y⁺和y⁻面:

$$\left(\tau_{yy}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z-\left(\tau_{yy}-\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z=\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$$

z⁺和z⁻面:

$$\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x\delta y-\left(\tau_{zy}-\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x\delta y=\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$



6个面力在y-方向总的合力:

$$\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

7.2.2 动量方程

y方向的牛顿定律为：

$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{DV_y}{Dt}=\rho Y\delta x\delta y\delta z+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z$$

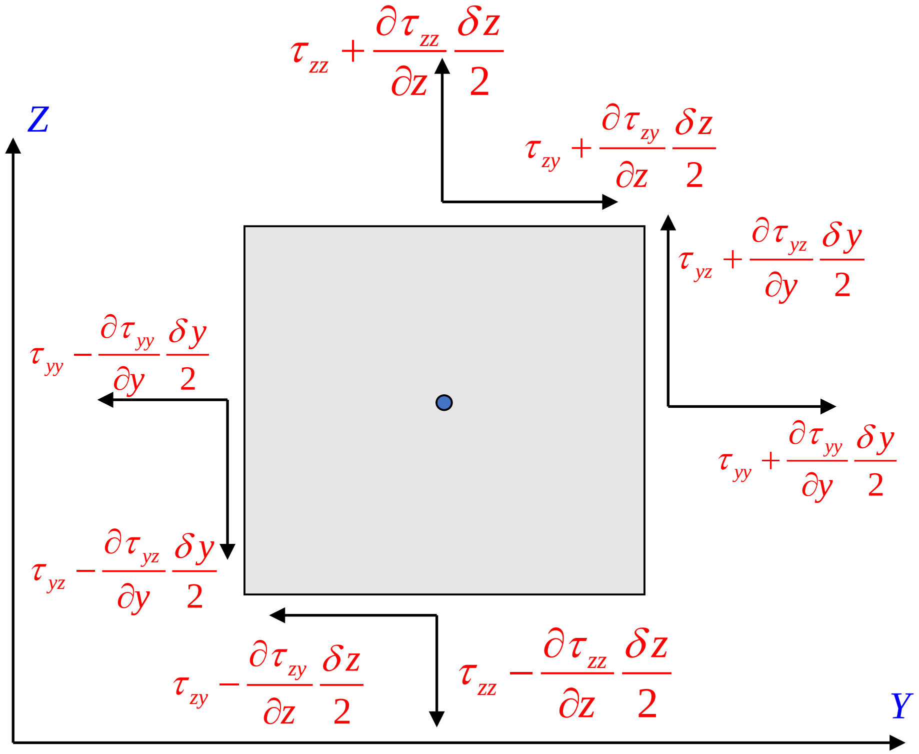
化简方程：

$$\rho\frac{DV_y}{Dt}=\rho Y+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}$$

其它两个方向的方程可类似得到：

$$\rho\frac{DV_x}{Dt}=\rho X+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho\frac{DV_z}{Dt}=\rho Z+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}$$



其中应力分量可以通过广义牛顿定律用速度的偏导数表示出来.

7.2 粘性流体运动基本方程

7.2.2 动量方程

表面应力为

$$\tau_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial V_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\tau_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial V_y}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\tau_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x})$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x})$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y})$$

三个动量方程为:

$$\frac{DV_x}{Dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right]$$

$$\frac{DV_y}{Dt}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\right]$$

$$\frac{DV_z}{Dt}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right]$$

这就是粘性流体的运动微分方程, 在流体力学中称为纳维尔-斯托克斯(Navier-Stokes)方程, 简称NS方程.

*NS*方程是一组偏微分方程组, 其求解构成了当今流体力学研究的主要内容.

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

7.2.3 能量方程

▫ 与理想流体能量方程的差别

(1) 前面介绍理想流体能量方程时，没有考虑粘性力的功；

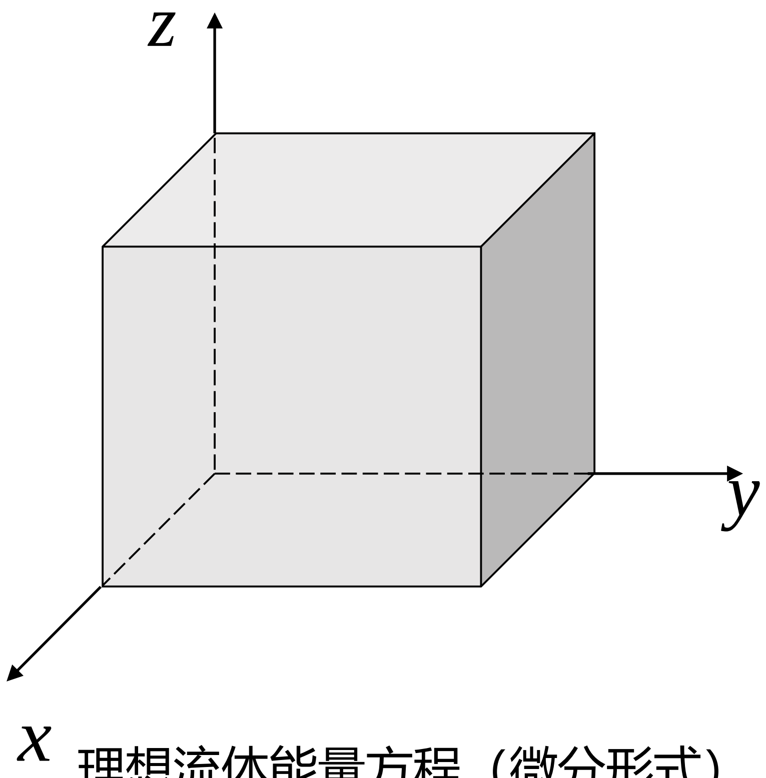
(2) 粘性力是摩擦力，会耗散微元体的动能；

(3) 另外，对于分子间的热传导。热传导是与分子扩散作用相关的，就象粘性是分子扩散的结果一样。在理想流体中，不考虑粘性，也不考虑热传导。

现在传热也要加以考虑.

7.2.3 能量方程

取长方体形微元体如图所示：



对于此微元体，热力学第一定律表示为：

$$\dot{q}=\frac{DE}{Dt}+\dot{W}$$

$\dot{q}=\dfrac{\delta Q}{dt}$：单位时间内外界传给微元体的热量

$\dfrac{DE}{Dt}$：微元体所含能量的变化率

$\dot{W}=\dfrac{\delta W}{dt}$：单位时间内微元体对外所做的功；

理想流体能量方程（微分形式）

$$\dot{q}=\frac{D}{Dt}\left(u+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

7.2.3 能量方程

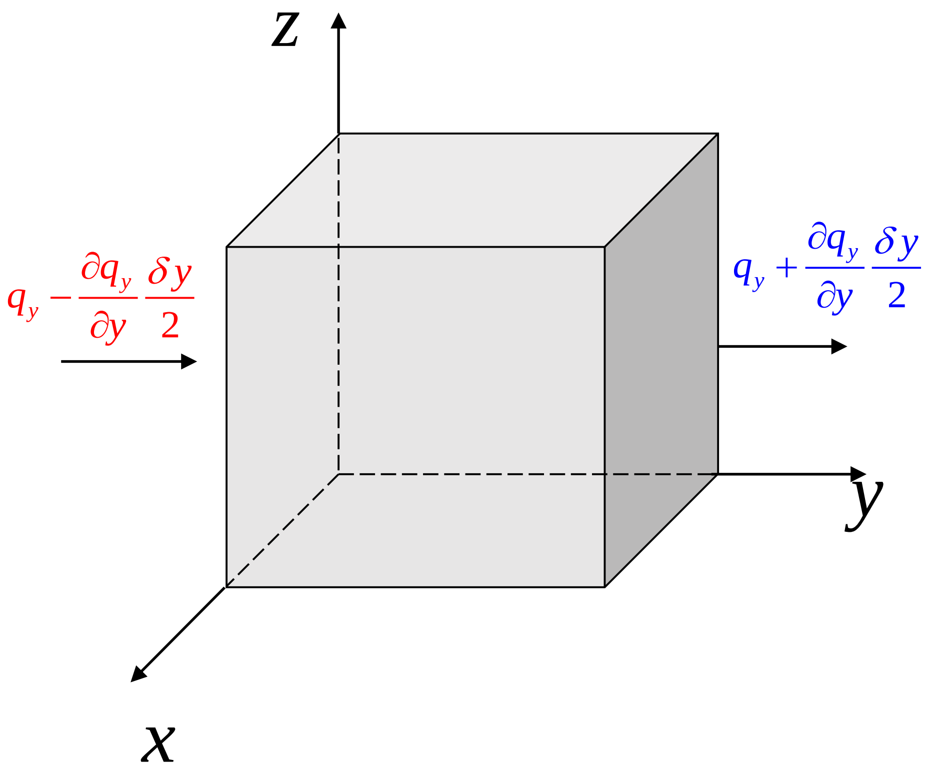
- 外界传给微元体的热量（单位时间）

$$\dot{q}=\frac{\delta Q}{dt}$$ 传导项 + 非传导项

根据傅利叶热传导定律： $q=-\lambda\nabla T$

在y方向上： $q_y=-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}$

在y向正、负面上的热流密度如图。



则进入控制体的热流为：

$$\left(-\frac{\partial q_y}{\partial y}\delta y\right)\delta x\delta z=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)\delta x\delta y\delta z$$

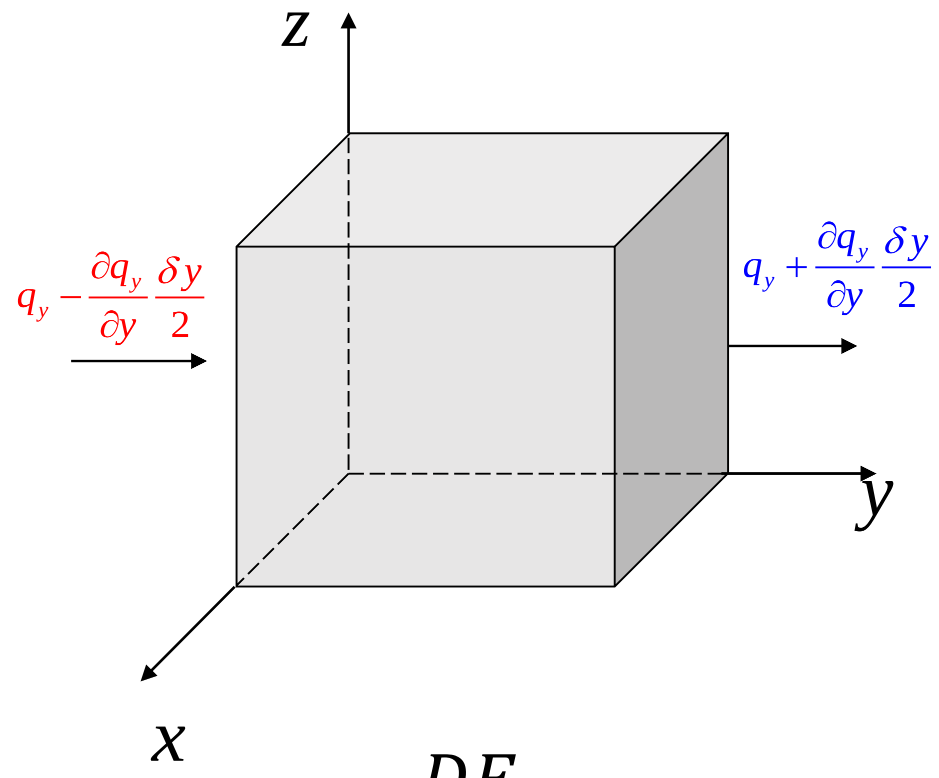
三个方向上总的传导热量为：

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]\delta x\delta y\delta z$$

7.2.3 能量方程

- **外界传给微元体的热量（单位时间）**

$$\dot{q} = \frac{\delta Q}{dt}$$ 传导项 + 非传导项



设非传导进入微元体的热量为:

$$\rho q \delta x \delta y \delta z$$

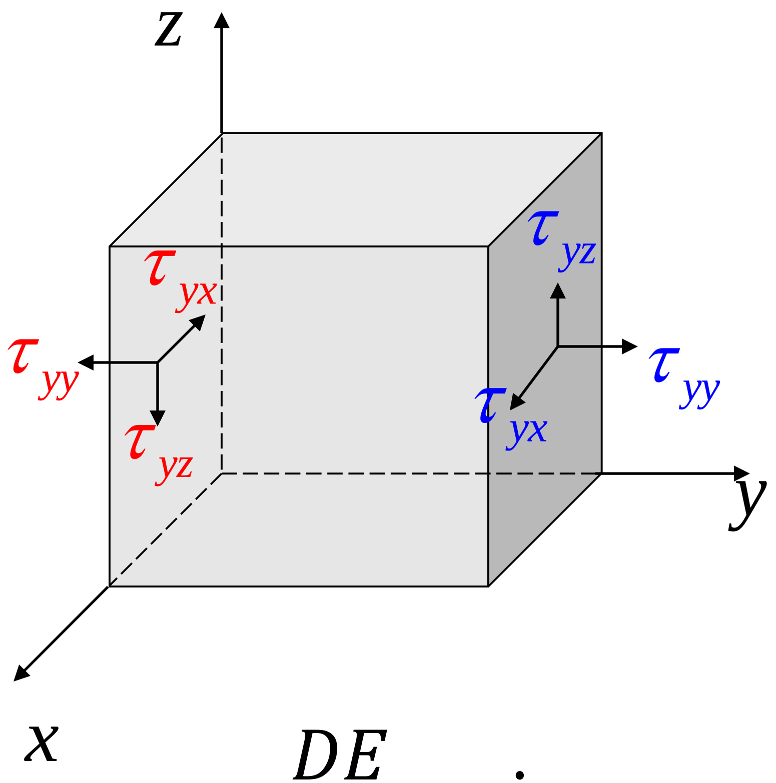
微元体从外界吸收的总的热量为:

$$\dot{q} = \frac{\delta Q}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]\delta x\delta y\delta z + \rho q \delta x\delta y\delta z$$

$$\dot{q} = \frac{DE}{Dt} + \dot{W}$$

7.2.3 能量方程

- 微元体对外所做的功（单位时间） $\dot{W}$ 体积力项 + 表面力项



以y方向为例:

作用在负y面上的力: $\vec{f}_y = -(\tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz})$

$$w_{y-} = (\vec{f}_{y-} \cdot \vec{V})(-\delta x \delta z)$$

$$= -(\tau_{yx}\vec{\imath} + \tau_{yy}\vec{\jmath} + \tau_{yz}\vec{k}) \cdot (V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k})(-\delta x \delta z)$$

$$= (\tau_{yx}V_x + \tau_{yy}V_y + \tau_{yz}V_z)\delta x \delta z$$

$$\dot{q} = \frac{DE}{Dt} + \dot{W}$$

作用在正y面上的力: $\vec{f}_y = (\tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz})$

$$w_{y+} = (\vec{f}_{y+} \cdot \vec{V})\delta x \delta z = -\left[(\vec{f}_{y-} \cdot \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{f}_{y-} \cdot \vec{V})\delta y\right]\delta x \delta z$$

$$= -(\tau_{yx}V_x + \tau_{yy}V_y + \tau_{yz}V_z)\delta x \delta z - \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}V_x + \tau_{yy}V_y + \tau_{yz}V_z)\delta x \delta y \delta z$$

7.2.3 能量方程

- **微元体对外所做的功（单位时间）** $\dot{W}$ 体积力项 + 表面力项

以y方向为例：

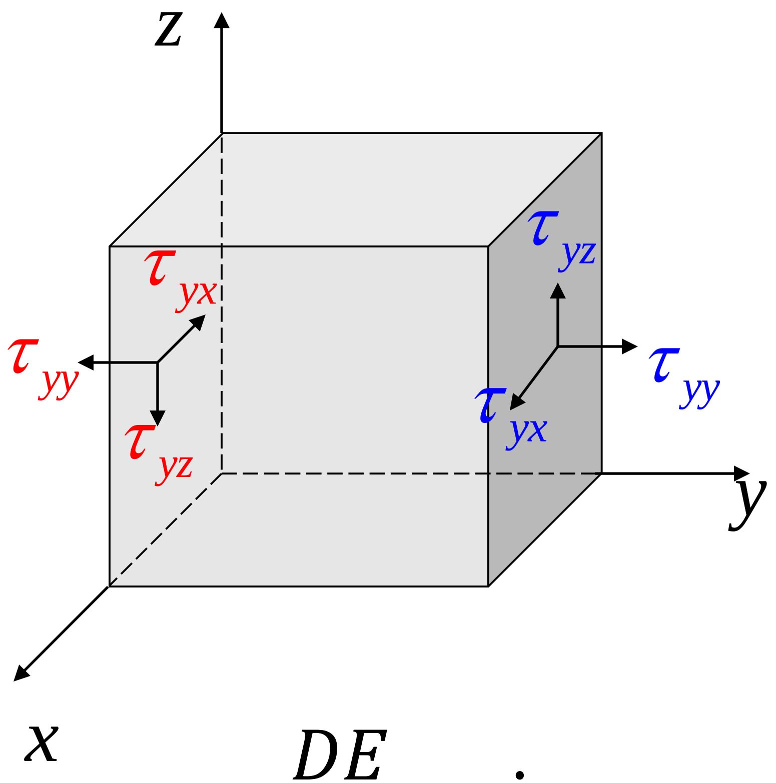
可得微元体表面力对外界做功为两功率之和.

$$w_{y-}+w_{y+}=-\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}V_x+\tau_{yy}V_y+\tau_{yz}V_z)\delta x\delta z\delta y$$

X,Z方向也有面力对外做功：

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}V_x+\tau_{xy}V_y+\tau_{xz}V_z)\delta x\delta z\delta y$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}V_x+\tau_{zy}V_y+\tau_{zz}V_z)\delta x\delta z\delta y$$



$$\dot{q}=\frac{DE}{Dt}+\dot{W}$$

总的面力功为：

$$\dot{W}=-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}V_x+\tau_{xy}V_y+\tau_{xz}V_z)+\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}V_x+\tau_{yy}V_y+\tau_{yz}V_z)+\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}V_x+\tau_{zy}V_y+\tau_{zz}V_z)\right]\delta x\delta z\delta y$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

7.2.3 能量方程

- **微元体对外所做的功（单位时间）** $\dot{W}$ 体积力项 + 表面力项

下面考虑质量力的功：

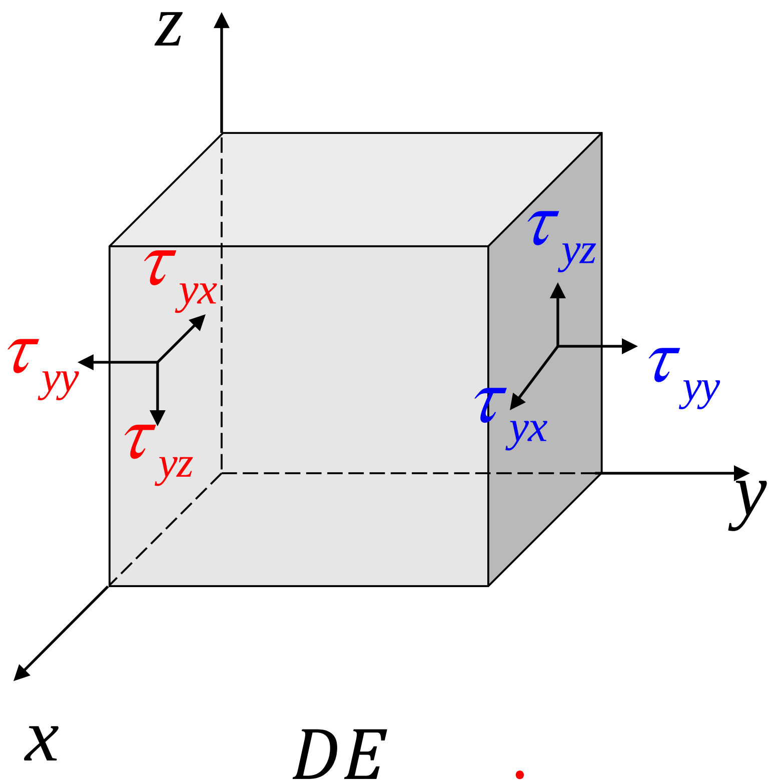
U：势能函数

$$\frac{DU}{Dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)U$$

势能取决微元所处的位置，与时间无关：

$$\frac{DU}{Dt}=\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)U=-\vec{V}\cdot\vec{R}=-XV_x-YV_y-ZV_z$$

此即为质量力的功率！

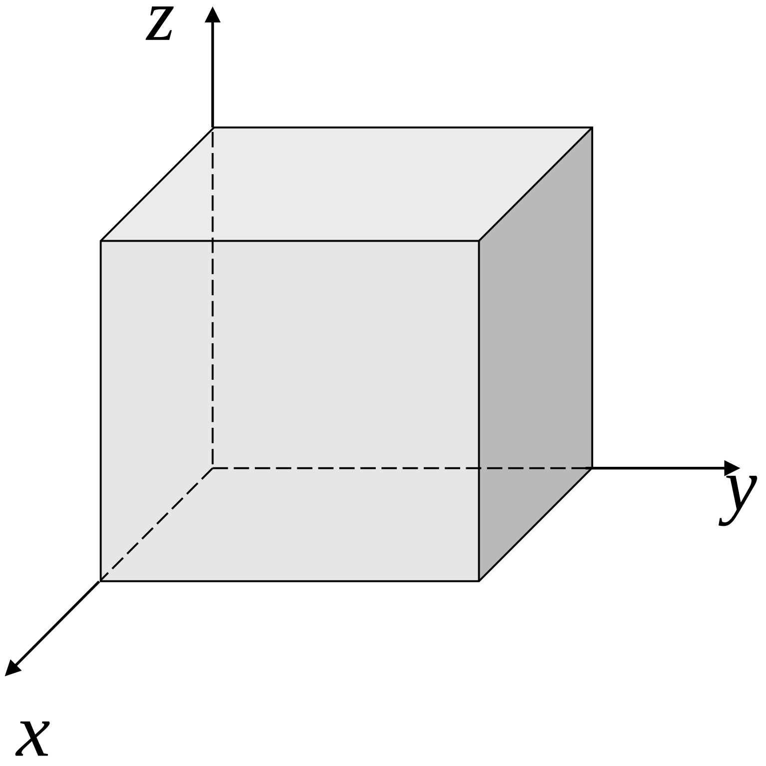


$$\dot{q}=\frac{DE}{Dt}+\dot{W}$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

7.2.3 能量方程

▫ 微元体内能量变化率



微元体内流体的能量包括：

内能：u

动能：$\dfrac{V^2}{2}$

势能：U

总的能量变化率为：$$\frac{DE}{Dt}=\delta x\delta y\delta z\frac{D}{Dt}\left[\rho\left(u+\frac{V^2}{2}+U\right)\right]$$

$$\dot{q}=\frac{DE}{Dt}+\dot{W}$$

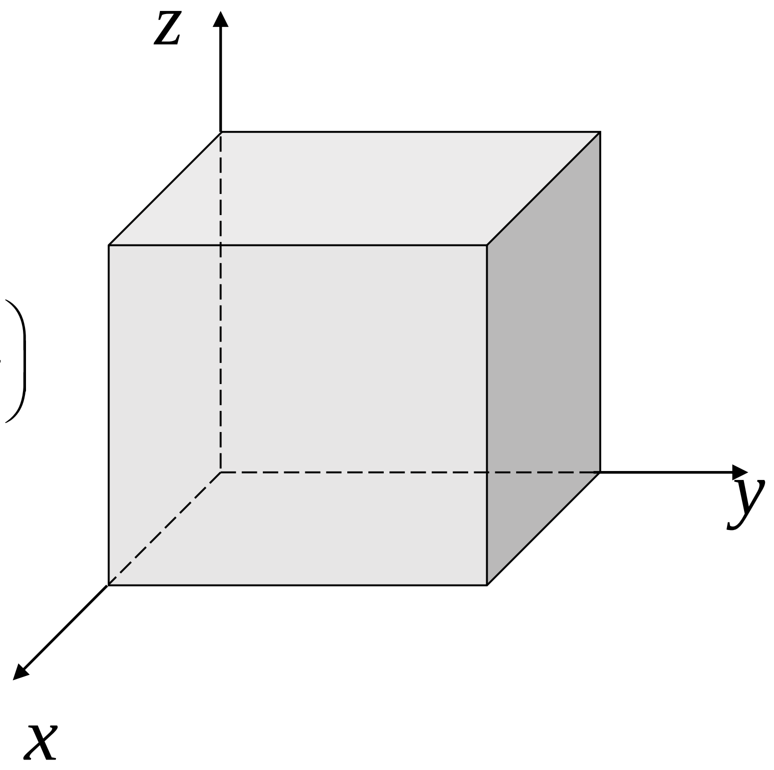
7.2.3 能量方程

□ 总能量形式方程

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(u+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\left(XV_x+YV_y+ZV_z\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xx}V_x+\tau_{xy}V_y+\tau_{xz}V_z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yx}V_x+\tau_{yy}V_y+\tau_{yz}V_z\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zx}V_x+\tau_{zy}V_y+\tau_{zz}V_z\right)\quad+\rho q$$



$$\dot{q}=\frac{DE}{Dt}+\dot{W}$$

能量变化= 质量力功 +传导热量 +粘性力的功 +非传导热量

7.2.3 能量方程

▫ 其他形式——动能方程

三式分别乘V_x,V_y,V_z,并相加, 得:

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho\frac{DV_x}{Dt} &= \rho X+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\\
\rho\frac{DV_y}{Dt} &= \rho Y+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\\
\rho\frac{DV_z}{Dt} &= \rho Z+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}
\right\}\longrightarrow
$$

$$
\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\rho\left(XV_x+YV_y+ZV_z\right)+V_x\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)
+V_y\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)+V_z\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)
$$

动能变化= 质量力功 +粘性力的功的一部分

从此式可见, 动能的变化与质量力做功以及表面力的不均布有关 而与对流体的加热无关!

7.2 粘性流体运动基本方程

7.2.3 能量方程

- **其他形式——内能方程：总能量方程减去动能方程**

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= \tau_{xx}\frac{\partial V_x}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial V_y}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial V_z}{\partial z}+\tau_{yx}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+\tau_{zx}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\rho q\\
&= -p\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \qquad (= -p\nabla\cdot\vec{V}\text{，第一部分：体积膨胀功})\\
&\quad-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2+2\mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2\right]\\
&\quad+\mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)^2\right] \quad +\text{传热}...
\end{aligned}
$$

（第二部分:体积和形状改变时, 克服粘性力所做的功）

7.2.3 能量方程

▫ 其他形式——内能方程

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-p\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2+2\mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$+\mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)^2\right]+\text{传热}...$$

取体积和形状改变时,克服粘性力所做的功为Φ,称为耗散函数.

$$\Phi=-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2+2\mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2\right]+\mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)^2\right]$$

将体积膨胀功, 耗散函数Φ代入内能方程, 得:

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-p\nabla\cdot\vec{V}+\Phi+\nabla\left(\lambda\nabla T\right)+\rho q$$

内能变化= 膨胀功 +粘性耗散 +传导热量 +非传导热量

7.2 粘性流体运动基本方程

7.2.3 能量方程

▫ 其他形式——内能方程

$$\Phi=-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2+2\mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2\right]+\mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\gamma_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)$$

$$\gamma_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial V_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial V_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\Phi=\frac{2}{3}\mu\left[\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right)^2+\left(\varepsilon_y-\varepsilon_z\right)^2+\left(\varepsilon_z-\varepsilon_x\right)^2\right]+4\mu\left(\gamma_x{}^2+\gamma_y{}^2+\gamma_z{}^2\right)$$

1. 耗散函数不会有负值，总是使流体内能增加；内能的增加来源于动能的损失。

2. 只有两种情况下耗散函数才会有零值:

   1) $\varepsilon_{x,y,z}=0,\gamma_{x,y,z}=0$, 即无变形的刚体运动情况；

   2) $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_y,\gamma_x=\gamma_y=\gamma_z=0$, 无剪切, 只有各向同性的膨胀和压缩。

7.2.3 能量方程

▫ 各种作用力对能量形式的影响

- **质量力**：只影响动能；
- **压力**：对动能、内能均有贡献；
- **加热**：只对内能有贡献，不影响动能；
- **粘性力**：使动能损失、内能增加；把机械能不可逆地转化为内能。

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{D}{Dt}\left(u+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\left(XV_x+YV_y+ZV_z\right)
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xx}V_x+\tau_{xy}V_y+\tau_{xz}V_z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yx}V_x+\tau_{yy}V_y+\tau_{yz}V_z\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zx}V_x+\tau_{zy}V_y+\tau_{zz}V_z\right)+\rho q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\rho\left(XV_x+YV_y+ZV_z\right)&+V_x\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\\
&+V_y\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)+V_z\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\rho\frac{Du}{Dt}=-p\nabla\cdot\vec{V}+\Phi+\nabla\left(\lambda\nabla T\right)+\rho q
$$

7.2.4 定解条件

将流体连续方程、动量方程、能量方程连立求解，就可得到任意流动的解，其间要用到初始条件和边界条件，称为**定解条件**。

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\vec{V}$$

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-p\nabla\vec{V}+\Phi+\nabla\left(\lambda\nabla T\right)+\rho q$$

初始条件就是给出初始瞬间流场各物理量的分布规律:

$$\vec{V}\left(x,y,z,0\right)=\vec{V}_0\left(x,y,z\right) \qquad T\left(x,y,z,0\right)=T_0\left(x,y,z\right)$$

$$p\left(x,y,z,0\right)=p_0\left(x,y,z\right) \qquad \rho\left(x,y,z,0\right)=\rho_0\left(x,y,z\right)$$

$\rho_0,T_0,\vec{V}_0,p_0$都是已知的　在解非定常运动时, 初始条件是必不可少的.

7.2.4 定解条件

边界条件是流场边界上方程组的解所应满足的条件

这里具体讲一下流体与固壁面上的边界条件.

1.无滑移条件

固壁面无渗流时,粘性流体质点将附于固壁面上,即无滑移条件

$$\vec{V}_f = \vec{V}_w$$

$\vec{V}_f$:固壁处流体质点速度;

$\vec{V}_w$:与流体接触的固壁面速度;

2. 温度边界条件:即无跳跃条件.

固壁与流体接触处温度相等.

$$T_f = T_w$$

流体与固壁间的热流密度:

$$-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_w = q_w$$

$\dfrac{\partial T}{\partial n}$是固壁面外法线方向上的温度梯度。

课后作业

- P289页，10.4， 10.7。

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

To be continued …