北航宇航学院

空气动力学(32学时)

主讲：覃粒子　　陈　兵

qlz@buaa.edu.cn
沙河主楼D510，13911744896

Markchien@buaa.edu.cn
沙河主楼D519，13683012881

2024年 春季学期

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

第五章 理想流体动力学（5/5）

- 连续方程
- 动量方程
- 动量矩方程
- 能量方程
- 动量方程的积分 —伯努利方程

5.5 动量方程的积分

- 动量方程的伯努利积分
- 一维不可压流伯努利方程

伯努利方程：动量方程的伯努利积分

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

【回顾】 理想流体的动量方程：

欧拉方程(欧拉运动微分方程)

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$$

$$\Downarrow\quad (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})$$

$$\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)+(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)+\vec{\xi}\times\vec{V}$$

葛罗米柯方程：流体运动=无旋运动+有旋运动

一种特殊情形：

当流体静止的时候，欧拉静平衡方程

$$0=\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p\quad\Rightarrow\quad 0=\rho\vec{R}-\nabla p$$

$$\Downarrow$$

积分得到：压力分布、等压面

$$\left.\begin{aligned}\frac{D\vec{V}}{Dt}&=\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p\\ \vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p&=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)+\vec{\xi}\times\vec{V}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\text{积分，会得到什么?}$$

下面讨论定常运动的伯努利积分。

5.5.1 动量方程的伯努利积分

葛罗米柯方程： $\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)+\vec{\xi}\times\vec{V}$

在**定常**流动的情况下，在**流线上**对欧拉方程积分：

（1）定常流动 $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=0$

（2）在流线上,$d\vec{r}$与$\vec{V}$速度平行 $\vec{V}\times d\vec{r}=0$

把定常条件代入葛罗米柯方程:

$$\nabla(\frac{1}{2}V^2)+\vec{\xi}\times\vec{V}=\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

在此式两边同时点乘$d\vec{r}$

$$\underline{\nabla(\frac{1}{2}V^2)\cdot d\vec{r}}+\underline{\vec{\xi}\times\vec{V}\cdot d\vec{r}}=\vec{R}\cdot d\vec{r}-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{r}$$

下面对每一项分析:

第一项

$$\nabla(\frac{1}{2}V^2)\cdot d\vec{r}=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}V^2\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}V^2\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}V^2\right)\vec{k}\right\}\cdot d\vec{r}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}V^2\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}V^2\right)dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}V^2\right)dz$$

$$=d\left(\frac{1}{2}V^2\right)$$

第二项

应用在流线上，$d\vec{r}$与$\vec{V}$速度平行条件： $\vec{V}\times d\vec{r}=0$

$$\vec{\xi}\times\vec{V}\cdot d\vec{r}=d\vec{r}\times\vec{\xi}\cdot\vec{V}$$

$$=\vec{V}\times d\vec{r}\cdot\vec{\xi}$$

$$=0$$

5.5.1 动量方程的伯努利积分

在**定常**流动的情况下，在**流线上**对欧拉方程积分：

$$\underline{\underline{\nabla(\frac{1}{2}V^2)\cdot d\vec{r}}}+\underline{\underline{\vec{\xi}\times\vec{V}\cdot d\vec{r}}}=\vec{R}\cdot d\vec{r}-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{r}$$

代入第一、二项得

$$d(\frac{1}{2}V^2)=\underline{\underline{\vec{R}\cdot d\vec{r}}}-\underline{\underline{\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{r}}}$$

方程右端项（即第三、四项）的讨论可以沿用欧拉静平衡方程积分时的思路。

下面对每一项分析:

第三项 如果质量力有势:

$$\vec{R}=-\nabla U$$

在此式两边同时点乘$d\vec{r}$

$$\vec{R}\cdot d\vec{r}=-\nabla U\cdot d\vec{r}$$

$$=-dU$$

第四项

可以写成全微分形式如下

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{r}=-\frac{1}{\rho}dp$$

把各项代入上式:

$$d\left(\frac{1}{2}V^2\right)+\frac{1}{\rho}dp+dU=0$$

5.5.1 动量方程的伯努利积分

欧拉方程：

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{R} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\Downarrow$$

葛罗米柯方程：

$$\vec{R} - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) + \vec{\xi} \times \vec{V}$$

定常流动 $\Downarrow$

$$\nabla(\frac{1}{2}V^2) \cdot d\vec{r} + \vec{\xi} \times \vec{V} \cdot d\vec{r} = \vec{R} \cdot d\vec{r} - \frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{r}$$

$\Downarrow$ **沿流线积分**

$$d(\frac{1}{2}V^2) = \vec{R} \cdot d\vec{r} - \frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{r}$$

$\Downarrow$ **质量力有势**

$$d\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{1}{\rho}dp + dU = 0$$

沿着流线L从1点积分到2点，可得

$$\frac{1}{2}V^2 + U + \int_L \frac{1}{\rho}dp = C$$

沿流线

或写成:

$$\frac{{V_2}^2 - {V_1}^2}{2} + U_2 - U_1 + \int_1^2 \frac{1}{\rho}dp = 0$$

这是**理想**流体**定常**运动**沿流线**的**伯努利方程.**

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

5.5.1 动量方程的伯努利积分

$$\frac{1}{2}V^2 + U + \int_L \frac{1}{\rho}dp = C \qquad \text{沿流线}$$

关于理想、定常流沿流线**伯努利方程**的**几点说明:**

1. 积分中为了消去$(\vec{\xi} \times \vec{V} \cdot d\vec{r})$，使用了在**流线上积分**的条件.
2. C是伯努利常数，对于不同的流线常数不同
3. 伯努利方程是一个**能量方程**

   $\frac{1}{2}V^2$ 代表单位质量流体的动能;

   $\int_L \frac{1}{\rho}dp$ 代表压力能;

   C 代表总能量。

4. 此式表明:

   理想流体在有位势的质量力场中作定常运动时，单位质量流体的总能量（动能、势能和压力能之和）沿任意流线保持不变，但各种形式的能量可以相互转化。

不同流线上流体的能量水平不同.

5.5.2 一维不可压流伯努利方程

$$\frac{1}{2}V^2 + U + \int_L \frac{1}{\rho} dp = C$$ 沿流线

如果流动是**一维**的，伯努利方程也就不再区分是**全流场**，还是在流线上了。

$$\frac{1}{2}V^2 + U + \int_L \frac{1}{\rho} dp = C$$ 全场

进一步，考虑重力场中的一维定常不可压流动

$$\rho = const$$

$$U = gz$$

代入伯努利方程中得:

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C$$

或是写成:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C$$

回忆一下：在介绍静力学平衡方程时,有欧拉静平衡方程,重力场中的平衡方程（即**等压面**）为:

$$\frac{p}{\rho} + gz = C$$

运动学方程和静力学方程只相差一个速度项，动力学方程包含着静力学方程的所有项!

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

5.5.2 一维不可压流伯努利方程

进一步，考虑重力场中的一维定常不可压流动伯努利方程

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}+gz=C \qquad \text{或} \qquad \frac{V^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z=C$$

gz: 代表位能（势能）

$\frac{p}{\rho}$: 表示压力能

$\frac{1}{2}V^2$: 表示动能

伯努利方程表示的是能量守恒，或者说是**动能**、**压力能**和**势能**的相互转化。

而重力场中，流体静止平衡时，只有**压力能**和**势能**的相互转化。

$$\frac{p}{\rho}+gz=C$$

北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

To be continued …