北航宇航学院

空气动力学(32学时)

主讲：覃粒子　　陈　兵

qlz@buaa.edu.cn
沙河主楼D510，13911744896

Markchien@buaa.edu.cn
沙河主楼D519，13683012881

2024年 春季学期

第二讲 流体静力学（I/2）

- ☐ 流体的特性
- ☐ 流体中的力
- ☐ 欧拉静平衡方程
- ☐ 流体的相对静止
- ☐ 流体对物体的作用力

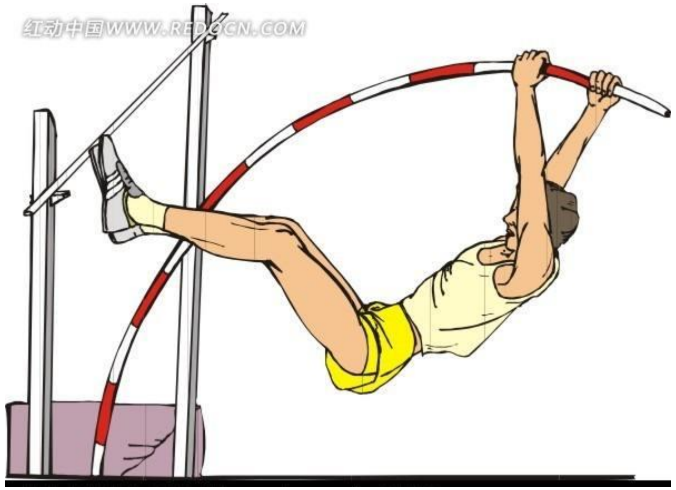
2.1 流体的特性

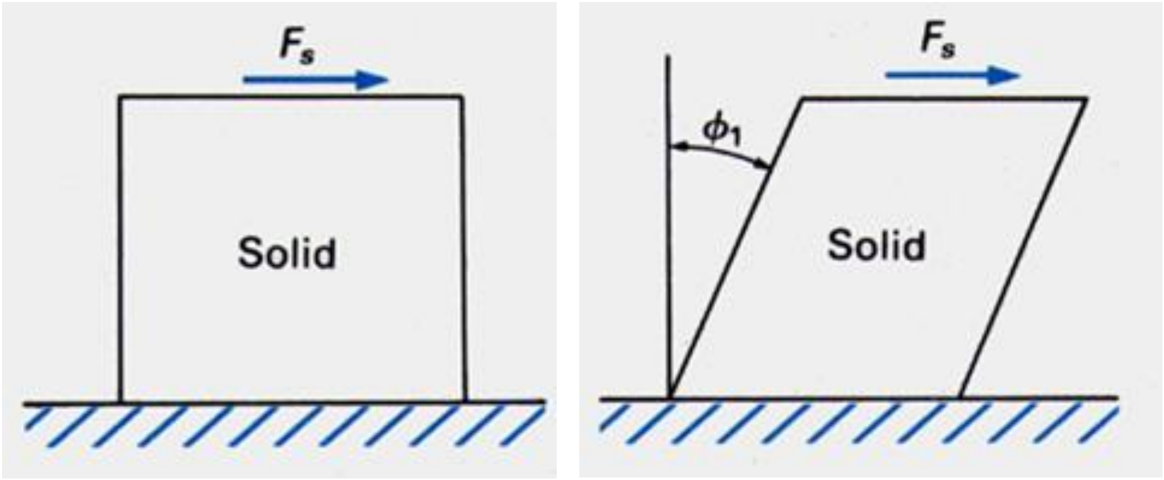
- 连续介质假说
- 流体的粘性
- 流体的导热性
- 流体的压缩性和膨胀性
- 流体的毛细现象（自学）

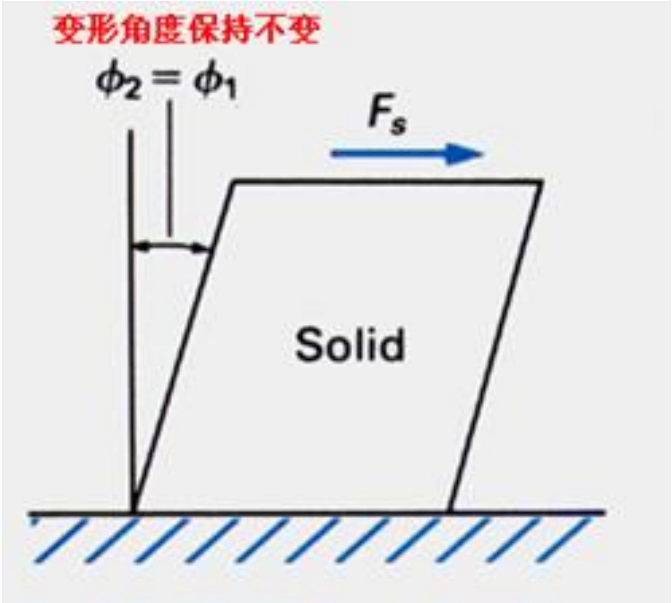
2.1 流体的特性

2.1.1 什么是流体?

- 先看一下固体:





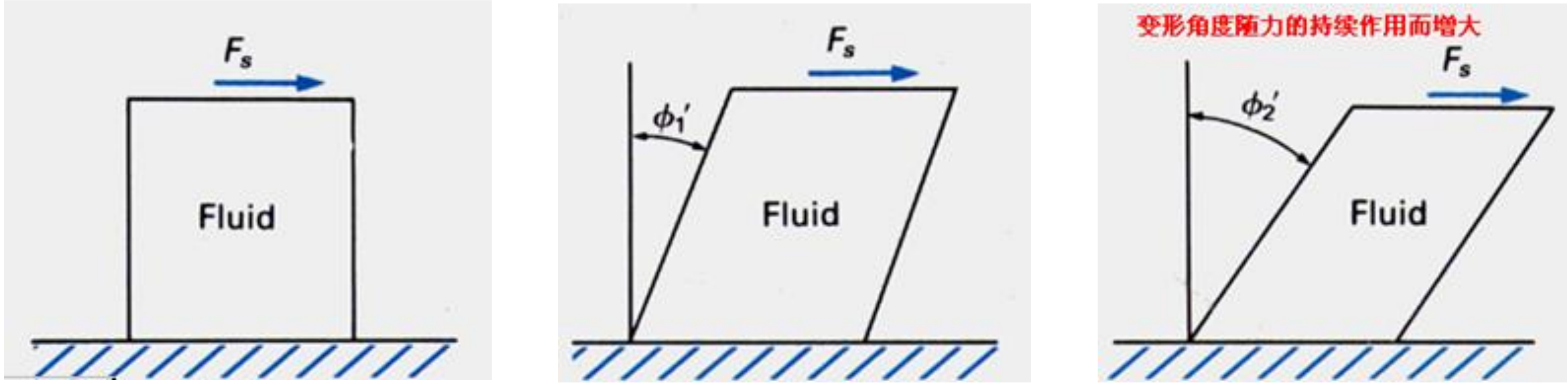


- 可以以一定的变形抵抗外力的作用。
- （剪切/切向）力不变，则变形量不变。

2.1 流体的特性

2.1.1 什么是流体?

- 流体在外部**剪切力/切向力**的作用下连续的变形



- 或者讲,流体只有在流动的情况下才能抵抗**剪切力**的作用

易流动性

流体在静止时不能承受**切向力**,不管多小的切向力,只要连续施加,都会使流体发生任意大的变形,叫易流动性。

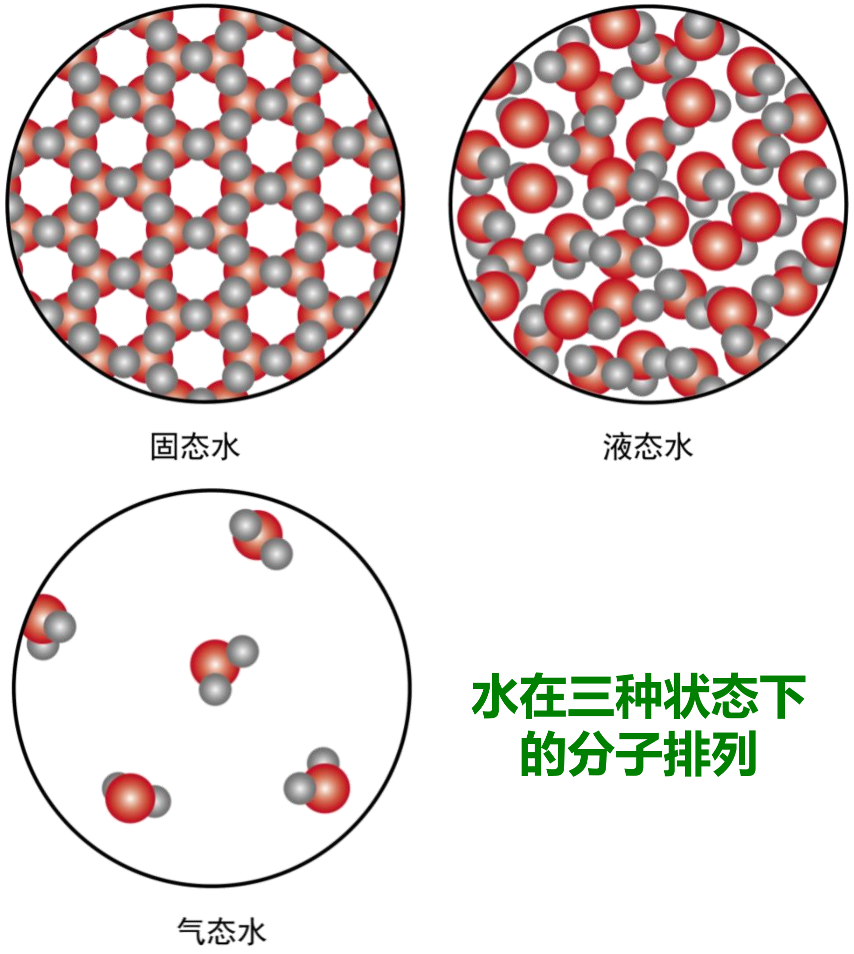
Why?

这主要是**分子力**的作用结果:

- 固体分子间的作用**较强**，当外界有力作用于固体时,它可以作**微小变形**，然后承受住切应力不再变形;
- 而在液体和气体中,分子间的作用**较弱或很弱**,只要**很小的切应力**,都可使它们产生**任意大的变形**。

2.1.1 什么是流体?

- 物质三态的力学特征



水在三种状态下的分子排列

流体和固体的力学性能区别：对外力抵抗的能力不同

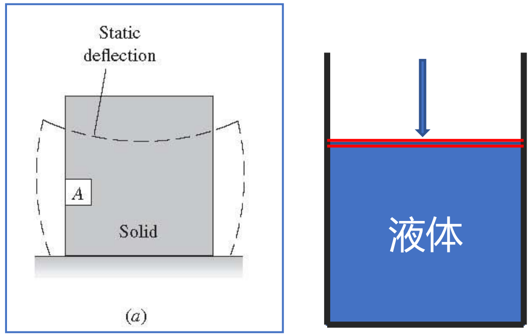
- 固体：既能承受压力，也能承受拉力和剪切力、抵抗拉伸和剪切变形。
- 流体：只能承受压力，不能承受拉力和剪切力,不能抵抗拉伸和剪切变形。

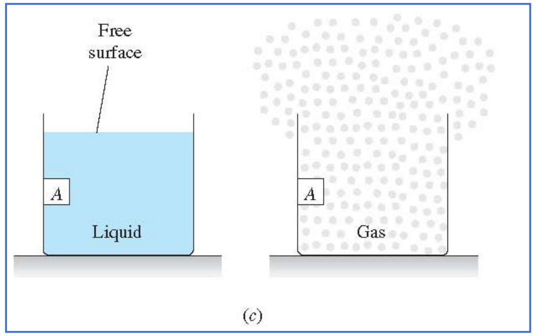
液体和气体的共同点：

两者均具有易流动性，即在任何微小切应力作用下都会发生变形（或称为流动），故二者统称为流体。

液体和气体的区别：

- 压缩性:
  气体易于压缩；
  而液体难于压缩；
- 体积:
  液体有一定的体积，存在一个自由液面；
  气体能充满任意形状的容器，无一定的体积，不存在自由界面。

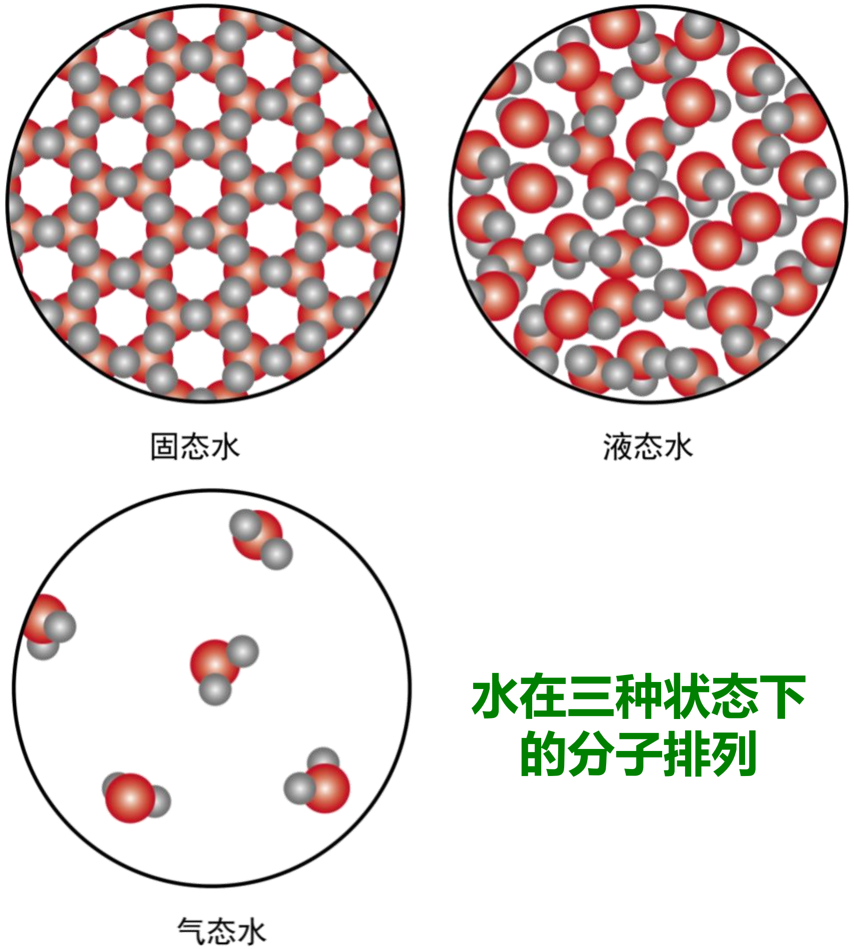




2.1 流体的特性

2.1.1 什么是流体?

- **物质三态的力学特征**



水在三种状态下的分子排列

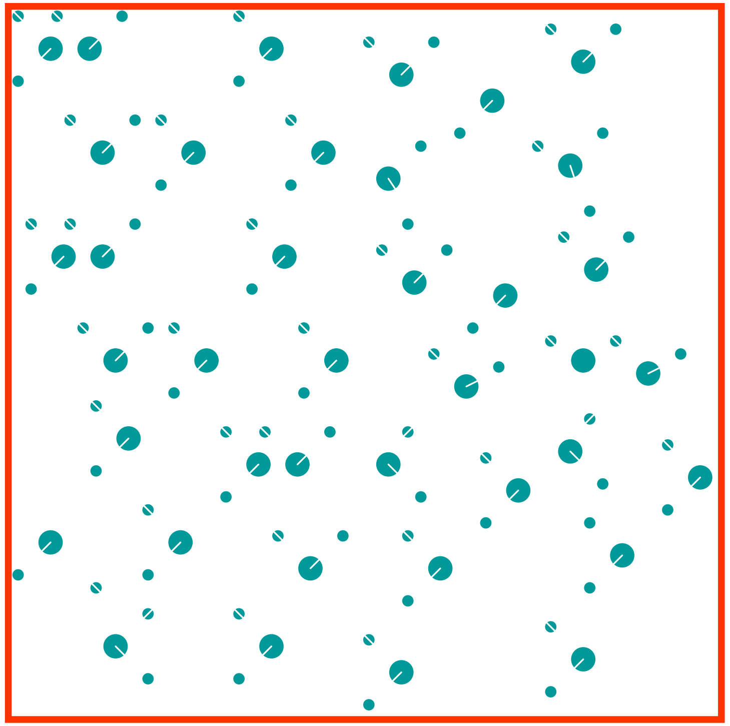
物质三态的力学特征对比表

	分子间距	分子力和分子位置	压缩性	形状	受力
固体	约为分子直径	引力斥力平衡束缚于晶格结构	很难	固定形状	压力;拉力;剪力
液体	约为分子直径	引力斥力平衡但平衡位置可动	难压缩	受容器限制	压力
气体	10倍分子直径	引力斥力都很小,无平衡位置	易被压缩	受容器限制	压力

2.1 流体的特性

2.1.2 连续介质假说

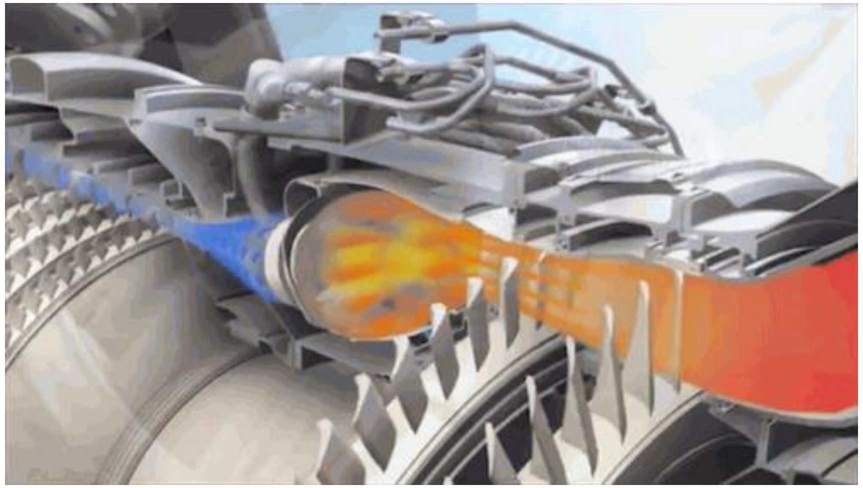
流体的宏观图景



流体的微观图景

- 微观：流体是由大量做无规则运动的分子组成的，分子之间存在空隙。
- 比如，$1cm^3$液体和气体里的分子数和分子间距是：
  - $1cm^3$水中含有3.3×10^{22}个左右的分子，相邻分子间的距离约为3.1×10^{-8}cm。
  - $1cm^3$空气中含有2.7×10^{19}个左右的分子，相邻分子间的距离约为3.2×10^{-7}cm。

2.1.2 连续介质假说



- **宏观**：

考虑宏观特性，在流动空间和时间上所采用的一切特征尺度和特征时间都比分子间距和分子碰撞时间大得多，没有必要深入到流体的微观领域研究问题。

两种研究途径

- **从微观角度出发，描述每个分子的运动，统计平均得到宏观流动情况**
- **从宏观角度出发，直接描述流体的宏观运动**

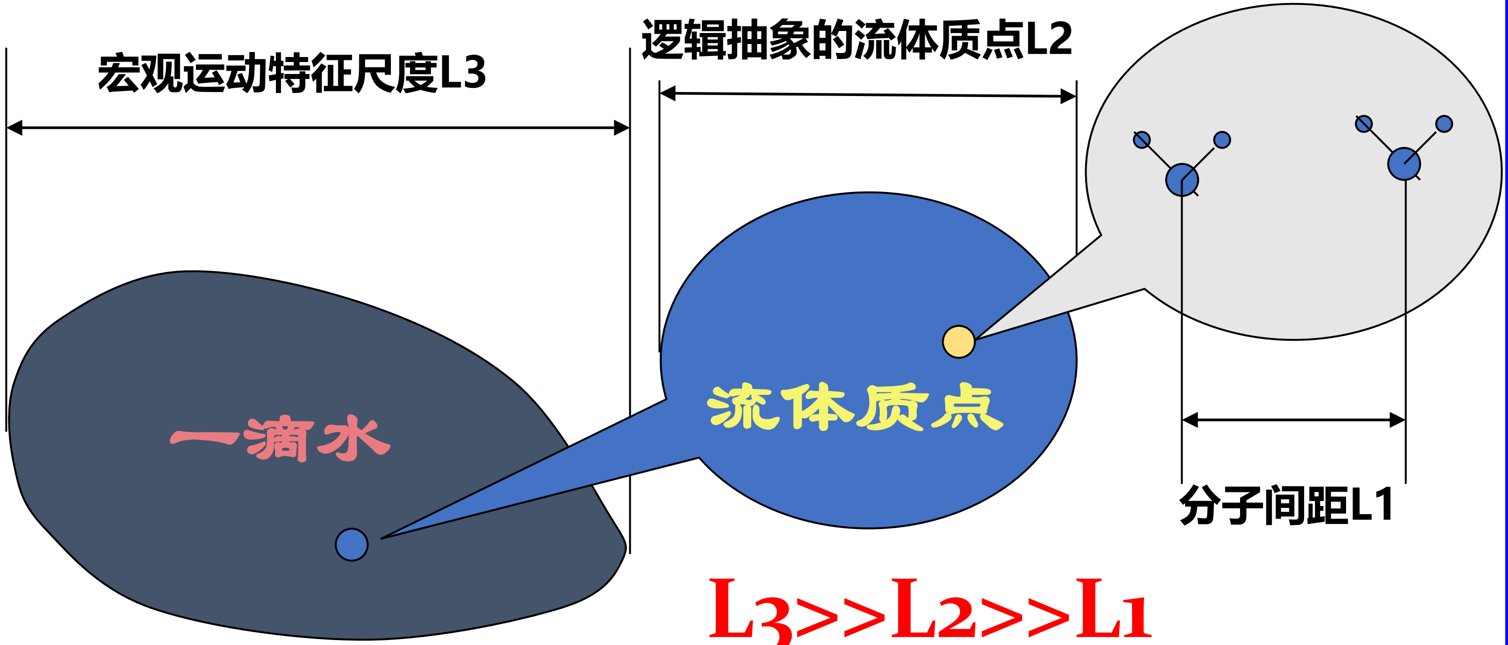
引入概念流体质点

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

2.1.2 连续介质假说

流体质点：

指的是微观上无穷大，宏观上充分小的**分子团**。



L3>>L2>>L1

L2>>L1

流体质点包含大量的分子，少数分子的进出不影响整个分子团各种参数的统计平均值

L3>>L2

可以把它近似地看成是几何上的一个点，每种物理量都可看成是均匀分布的常量

流体质点是流体力学中的无穷小

2.1.2 连续介质假说

- 采用连续介质理论模型来研究流体。
  - 连续介质模型：把流体视为由流体质点无间隙地充满它所占据的整个空间的一种连续介质，且其所有的物理量都是空间坐标和时间的连续函数的一种假设模型。
  - 1753年Euler提出
  - 有了这样的模型，就可以把数学上的微积分手段应用于流体上了。

优点

- 使人们从分子运动的复杂性中解放出来。
- 物理量作为时空连续函数，则可以利用连续函数微积分这一数学工具来研究问题。

2.1.2 连续介质假说

在某些特殊情况下，连续介质假定是不适用的

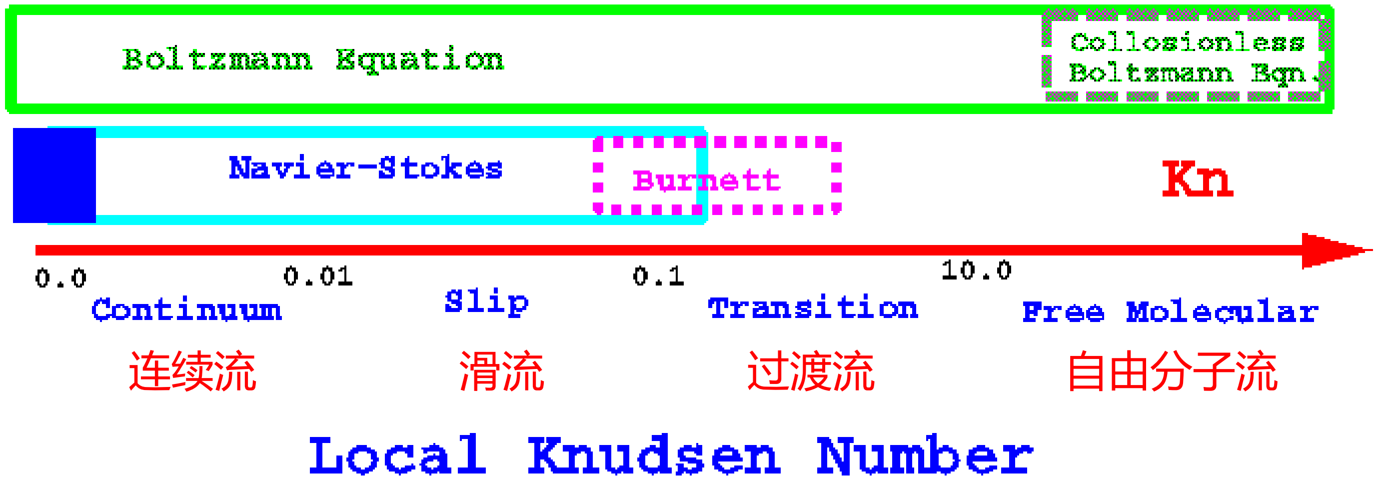
- 定义努森数(Knudsen)：

  $Kn = l/L$

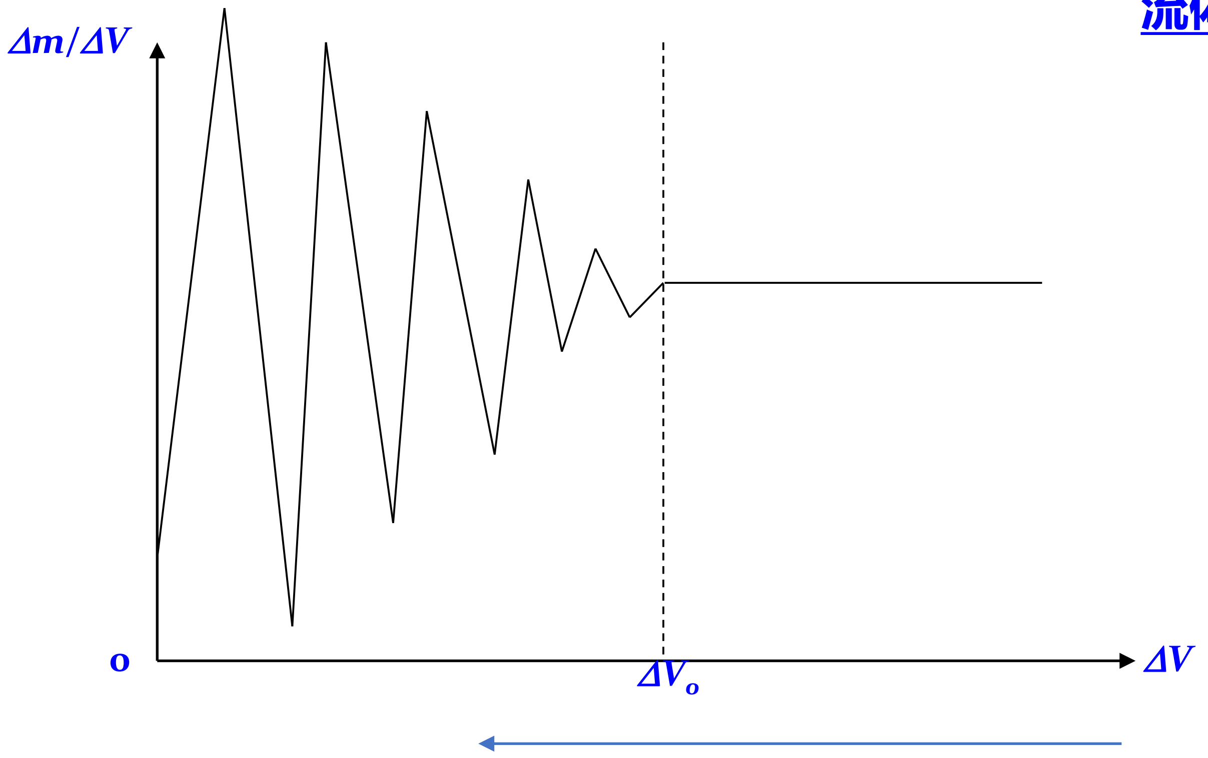
  l：分子间距（L1）；

  L：宏观运动特征尺寸（L3）.

- Kn>0.01，连续介质假设不成立。
- 如：273K时，真空泵中压力0.1Pa，分子间距4.5mm，不能看成连续介质。



2.1.3 描述流体的物理量



流体的所有物理量只有定义在流体质点上才有意义

定义密度:

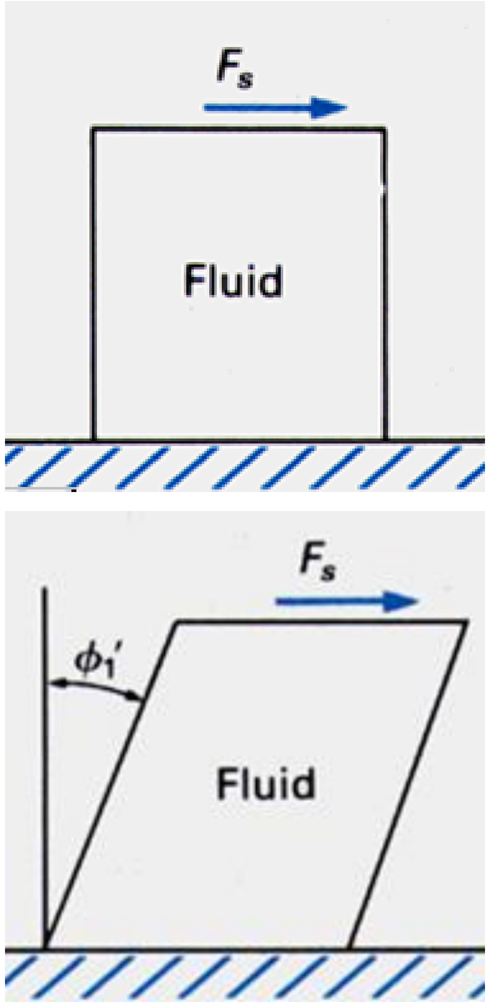
$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

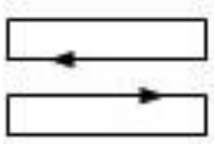
$$压强: p = \lim_{\Delta A -> 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A},$$

$$\Delta A \approx (\Delta V)^{2/3}$$

2.1 流体的特性

2.1.4 流体的粘性





快、慢两层流体之间存在两种作用：

- 相互“拖拽”作用，两层流体接触面上的分子
- 分子热运动造成动量交换

抵抗两层流体相对滑动

粘性： 流体所具有这种抵抗两层流体相对滑动的特性,或普遍讲抵抗变形的性质叫做粘性。

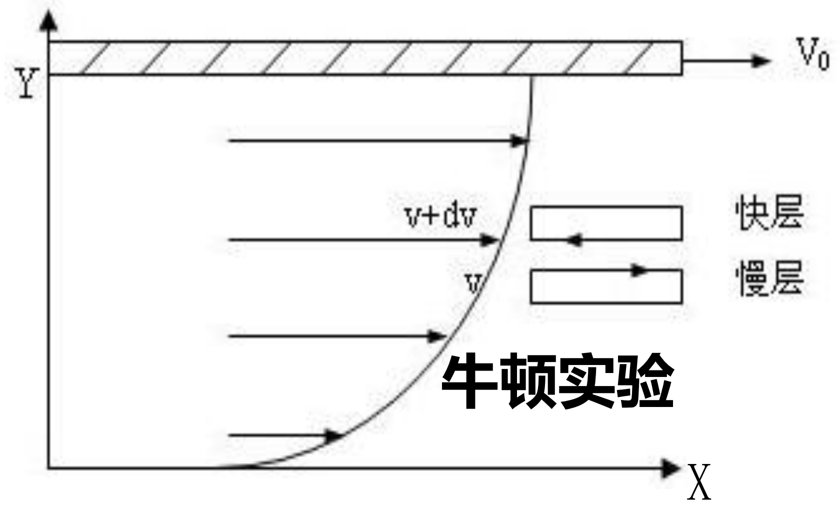
- **产生粘性的物理原因:**
  - 流体的粘性是由流动流体的内聚力和分子的动量交换所引起的
  - 分子间吸引力：分子间相互拖动(或称为内聚力)。
  - 分子不规则运动：分子迁移(引起分子动量交换)。
- **对于气体：**
  - 分子活动空间大，主要是不规则运动引起分子团间相互掺混；
- **对于液体：**
  - 分子间吸引力起主要作用，阻碍分子离开瞬时形成的平衡位置。

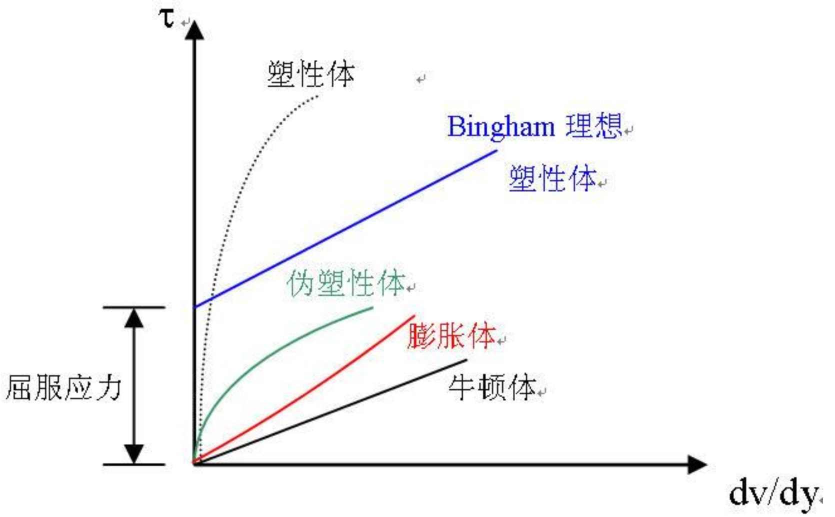
粘性大小的三大影响因素

- **压强：** 随压强变化不大
- **温度：**
  1）气体：随温度增大而增大
  2）液体：随温度增大而减小
- **流体种类：** 一般地，相同条件下，液体的粘度大于气体的粘度

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

2.1.5 牛顿内摩擦定律





- **牛顿摩擦力定律：流体相对运动时所引起的摩擦力：**
  - **与两层流体的速度梯度$\frac{dV}{dy}$成正比；**
  - **与两层流体的接触面积A成正比；**
  - **与流体物性有关：粘性系数μ**

$$F = \mu \frac{dV}{dy} A$$

写成剪应力形式

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$

τ：剪应力，Pa

μ，粘性系数（粘度）,单位：N•s/m^2（Pa.s）

理想流体：没有粘性的流体。

牛顿流体：
凡是剪应力与速度梯度符合牛顿内摩擦定律的流体均称为牛顿流体。否则，为非牛顿流体（比如浓稠的悬浊液）。

2.1.6 流体的导热性

- **传导:**
  - 当流体沿某个方向存在温度梯度时,热量就会从温度高的地方传向温度低的地方,这种热量传递方式叫热传导.
  - 传导的机理:不同温度时分子热运动的剧烈程度不同,动能大的分子通过热运动把热量传给动能小的分子,从面实现了热量传递.

傅立叶导热定律　单位时间内通过单位面积的热量与此面法向的温度梯度成正比

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \qquad (W/m^2)$$

n:面 的法线方向
$\frac{\partial T}{\partial n}$:温 度的方向导数
λ:导 热系数

- **对流:**
  - 流体的宏观运动把热量从一处带到另一处,实现热量传递.
- **辐射:**
  - 物体有温度就会辐射出热量;
  - 温度越高,辐射力越强.
- **一般的情况下,三种导热方式同时发生。但三者强弱有所不同.**

2.1.7 流体的压缩性和膨胀性

压缩性

- 压缩性 :流体质点的体积或密度在一定**压力**条件下发生改变的性质。也就是，作用在流体上的压强增加时，流体体积缩小的特性称流体的压缩性。
- 真实的流体是可压的,压缩程度决定于流体的种类和外界条件。气体的压缩性比液体大。

压缩系数：

在一定的温度下,升高一个单位的压强时,流体体积的相对缩小量

$$\beta = -\frac{dV/V}{dp} = -\frac{dv/v}{dp} = \frac{d\rho/\rho}{dp}$$

弹性模量:压缩系数的倒数

$$E = 1/\beta = \frac{dp}{d\rho/\rho}$$

常温下,水的弹性模量为$E = 2.1 \times 10^9 Pa$

膨胀性

流体**温度**升高时，流体体积增大的特性称流体的膨胀性。

温度膨胀系数

压强不变的条件下温度升高1°C时，流体体积的相对增加量

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

2.2 流体中的力

- 力的分类
- 质量力
- 表面力

2.2 流体中的力

2.2.1 力的分类

1）按物理性质的不同分类：重力、摩擦力、惯性力等

- 摩擦力: 如前面所讲的牛顿内摩擦力
- 惯性力: 因为非惯性运动而引起的力

力的三要素?

2）按作用方式分：质量力和表面力

- 质量力：外力场作用于流体微团质量中心，大小与微团质量成正比的非接触力，如重力和惯性力。
- 表面力：相邻流体或物体作用于所研究流体团块外表面，大小与流体团块表面积成正比的接触力，如大气压力。

2.2.2 质量力

1）质量力:

- 是指**作用于**隔离体内每一流体质点上的力，它的**大小**与质量成正比。
- 对于均质流体（各点密度相同），质量力与流体体积成正比，其质量力又称为**体积力**，或者**彻体力**。
- 单位：牛顿（N）。

2）单位质量力:

- 单位质量流体所受到的质量力。
- 单位：m/s²，与重力加速度单位相同。

单位质量力的数学表示：

$$\vec{R} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}\bigg|_{\text{对固定点}}$$

$$= \lim_{\Delta m \to 0} \left(\frac{\Delta F_x}{\Delta m}\vec{i} + \frac{\Delta F_y}{\Delta m}\vec{j} + \frac{\Delta F_z}{\Delta m}\vec{k} \right)\bigg|_{\text{对固定点}}$$

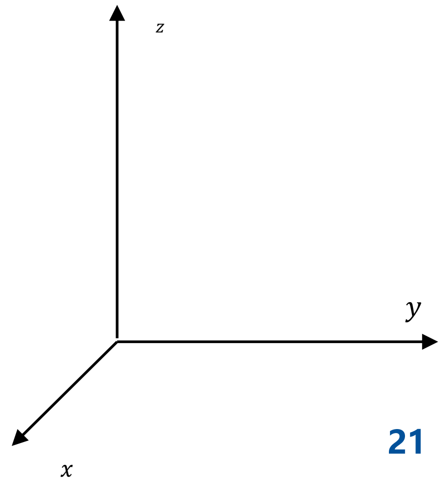
$$= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

对于重力

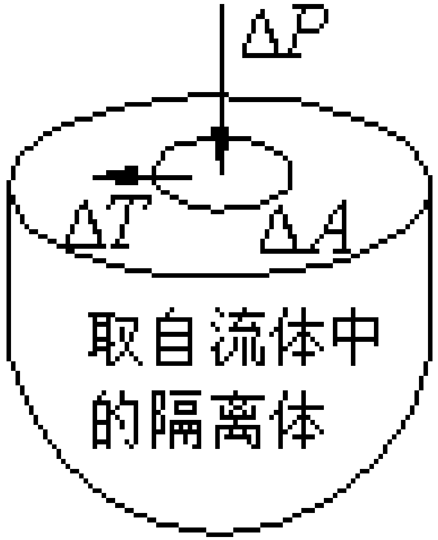
$$\vec{R} = -gk$$

对于惯性力

$$\vec{R} = -\vec{a}$$

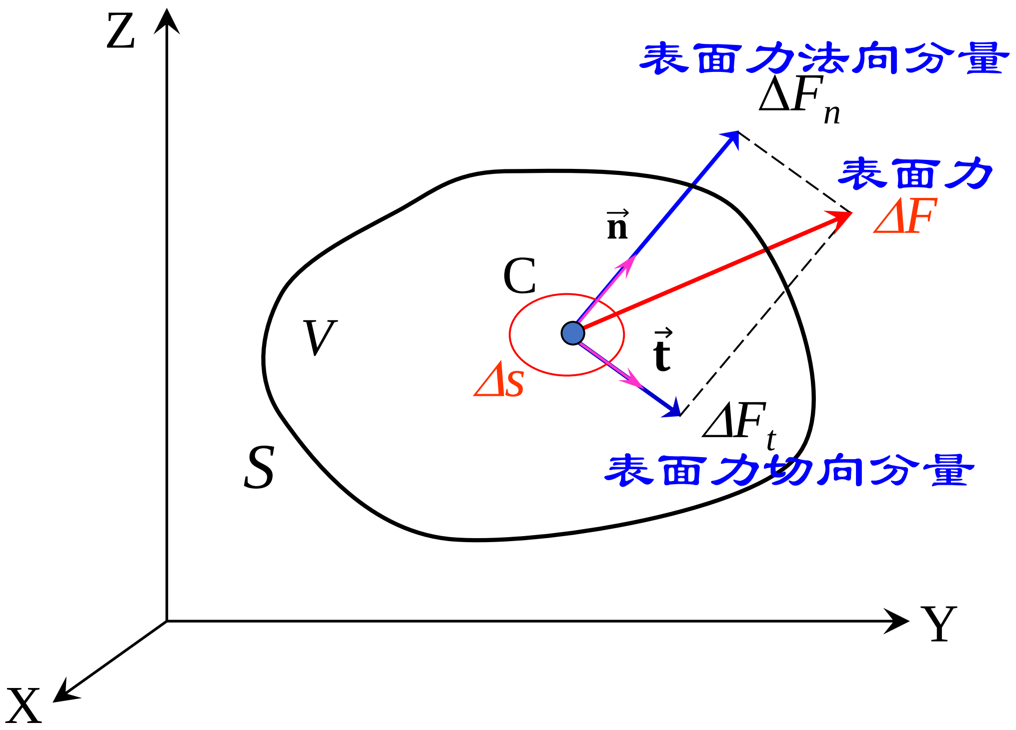


2.2.3 表面力



作用在流体上的表面力指的是：用物体表面或假想截面分割流体，物体或者一部分流体作用在另一部分流体上的力，其作用点在所截取的截面上

表面力的分解



$$(\Delta F)^2 = (\Delta F_n)^2 + (\Delta F_t)^2$$

且这种分解方式不依赖于坐标系的选择

表面应力

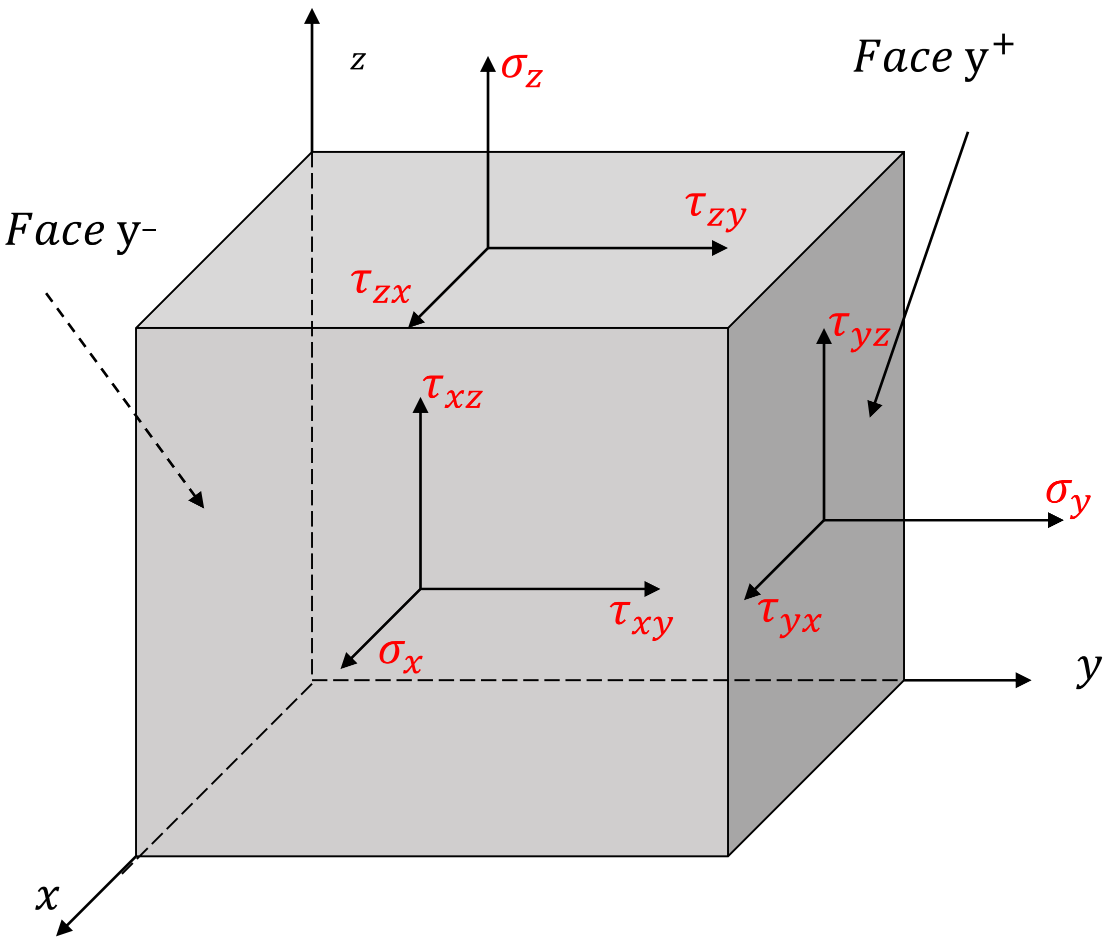
$$\boldsymbol{p} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta s}\bigg|_{C点}$$

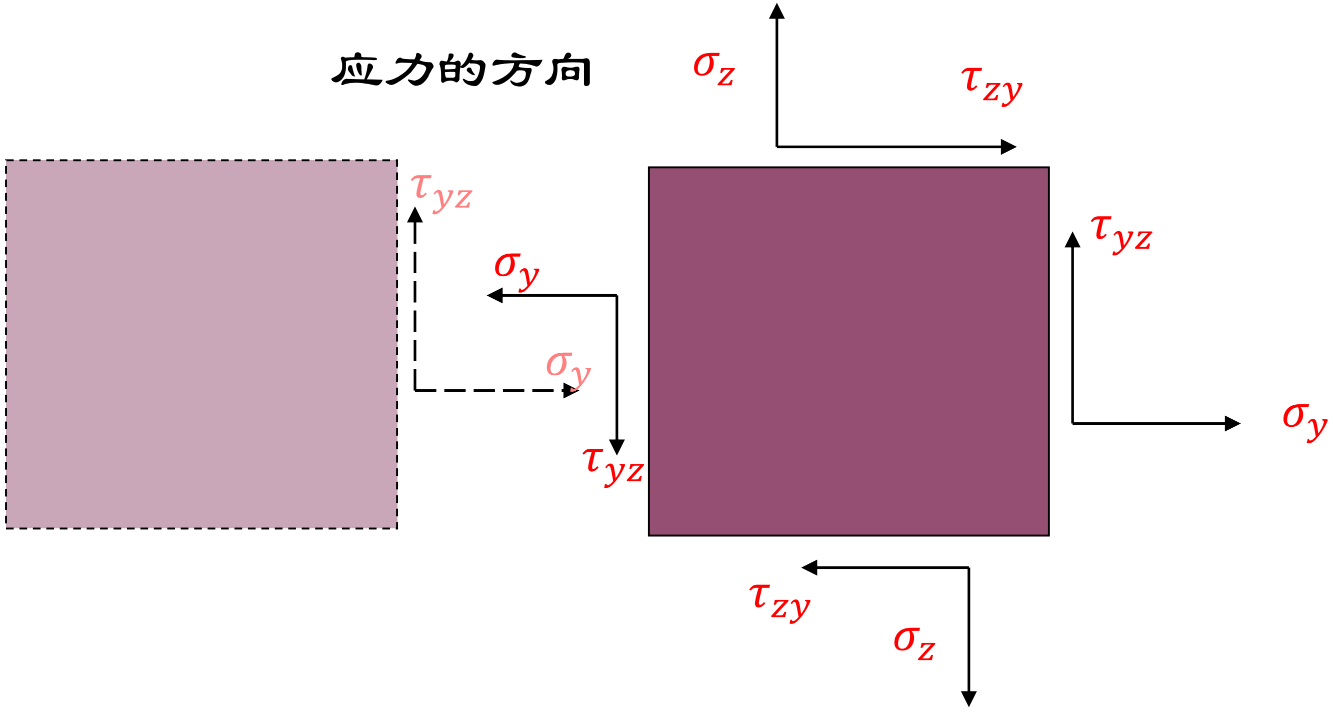
$$= \sigma\,\vec{n} + \tau\,\vec{t}$$

正应力　　切应力

2.2.4 流体微元上的应力

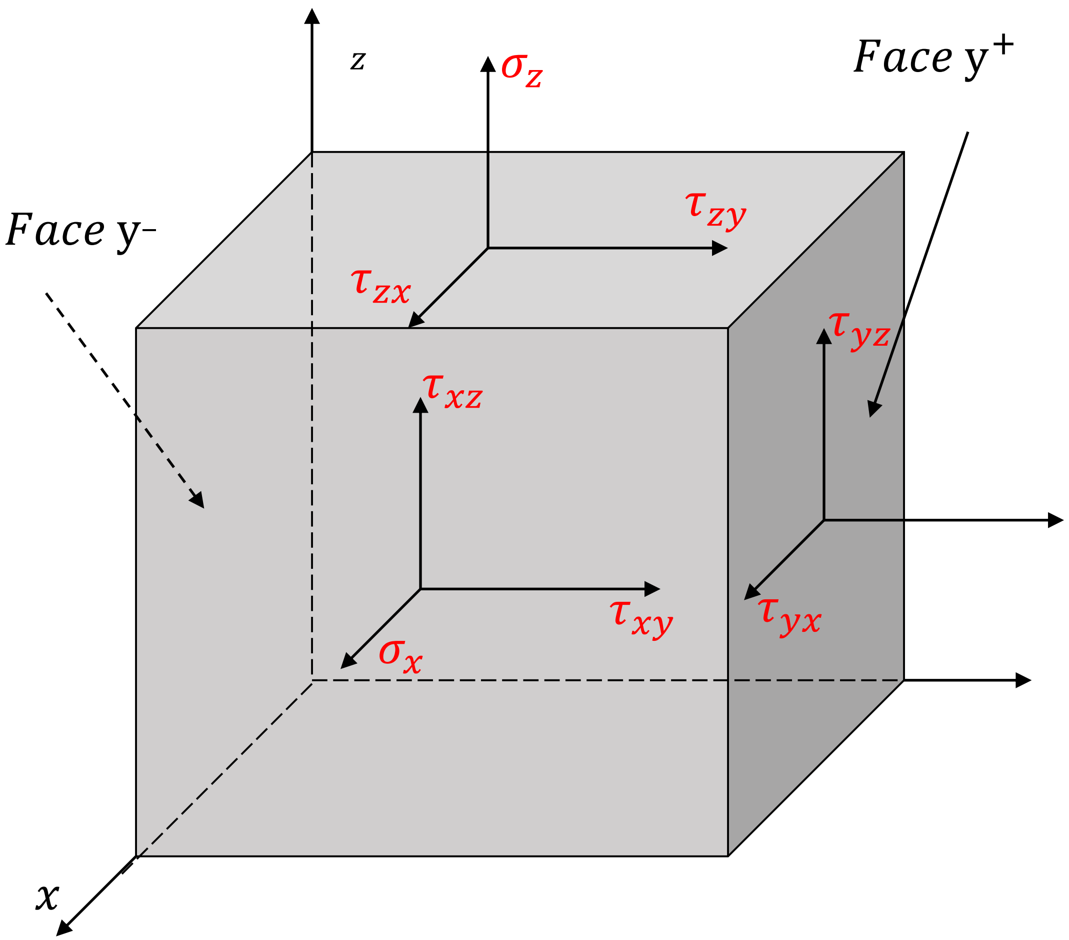
微元六面体有六个面，每个面上都有表面力作用，分别分解如图所示：





2.2.4 流体微元上的应力

微元六面体有六个面，每个面上都有表面力作用，分别分解如图所示：



应力张量

作用在正x面上的力表示为$\vec{p}_x = (\sigma_{xx}\ \tau_{xy}\ \tau_{xz})$

作用在正y面上的力表示为$\vec{p}_y = (\tau_{yx}\ \sigma_{yy}\ \tau_{yz})$

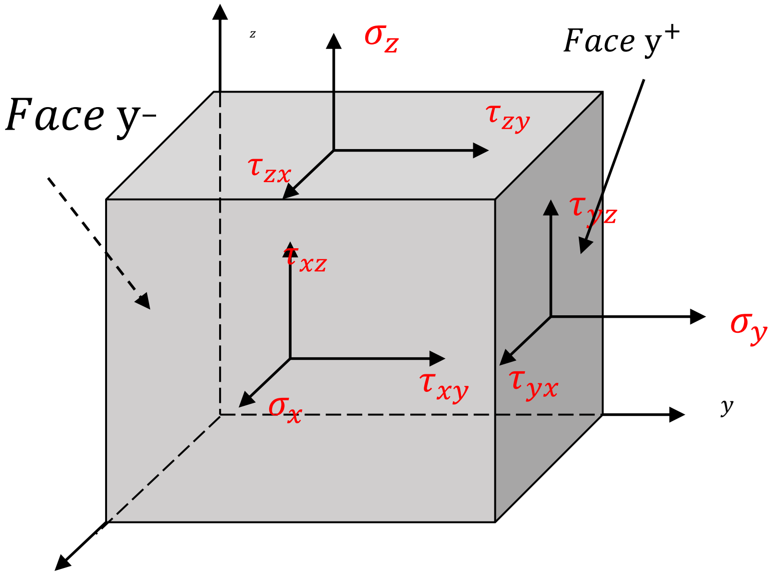
作用在正z面上的力表示为$\vec{p}_z = (\tau_{zx}\ \tau_{zy}\ \sigma_{zz})$

9个应力组成一个张量

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

2.2.5 流体的压强

微元六面体有六个面，每个面上都有表面力作用，分别分解如图所示：



应力张量

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

在静止流体或无粘流体中(理想流体), 切向力为零;

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

此时，作用在某点附近单位面积的应力只有法向应力，定义为该点的压强，以符号**p**表示，单位为Pa或N/m^2

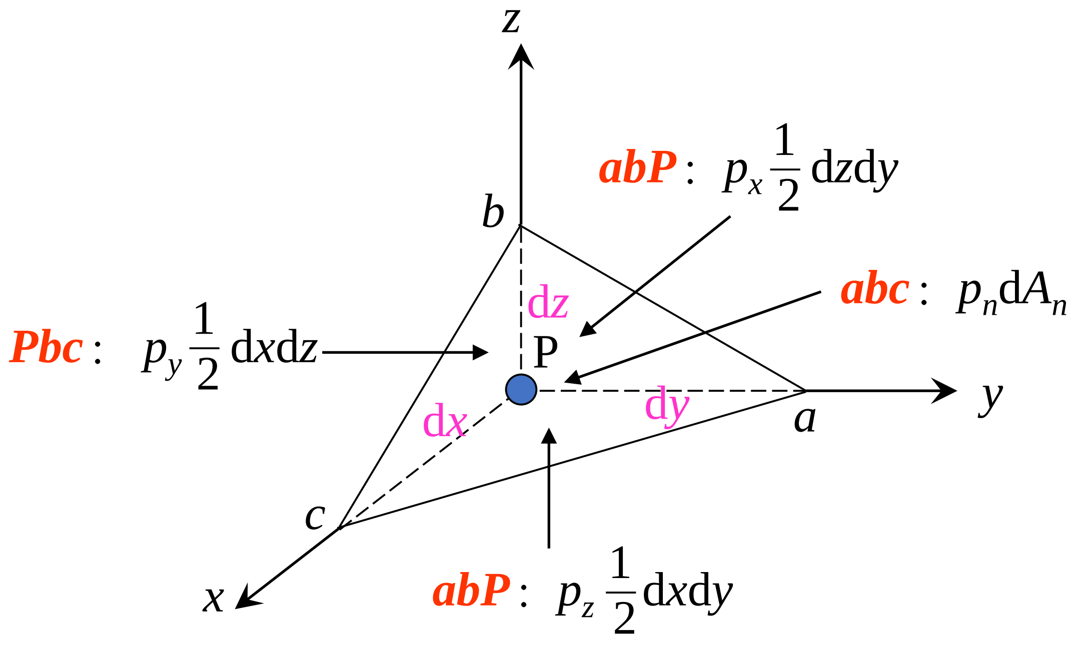
北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

2.2.5 流体的压强

压强的两个特性

- **压强的方向**：
因为流体分子间距比固体的大得多，一般流体抵抗拉伸的能力很小，故压强的方向永远沿着作用面的内法向，即压强的方向永远指向作用面。

- **压强的大小**：
在静止流体或运动的无粘流体中，某一点压强的数值与过该点所取的作用面在空间的方位无关，即**压强是各向同性的**。



$$p_x = p_y = p_z$$

正因为在静止流体和运动的无粘流中，压强各向同性，即流体内部一点的压强大小与该点所在作用面在空间的方位无关，因此可以**把压强看作标量**，即它只是空间点和时间的函数。

2.3 欧拉静平衡方程

- 欧拉静平衡方程
- 流体等压面
- 重力作用下流体内部压强分布

2.3.1 欧拉静平衡方程

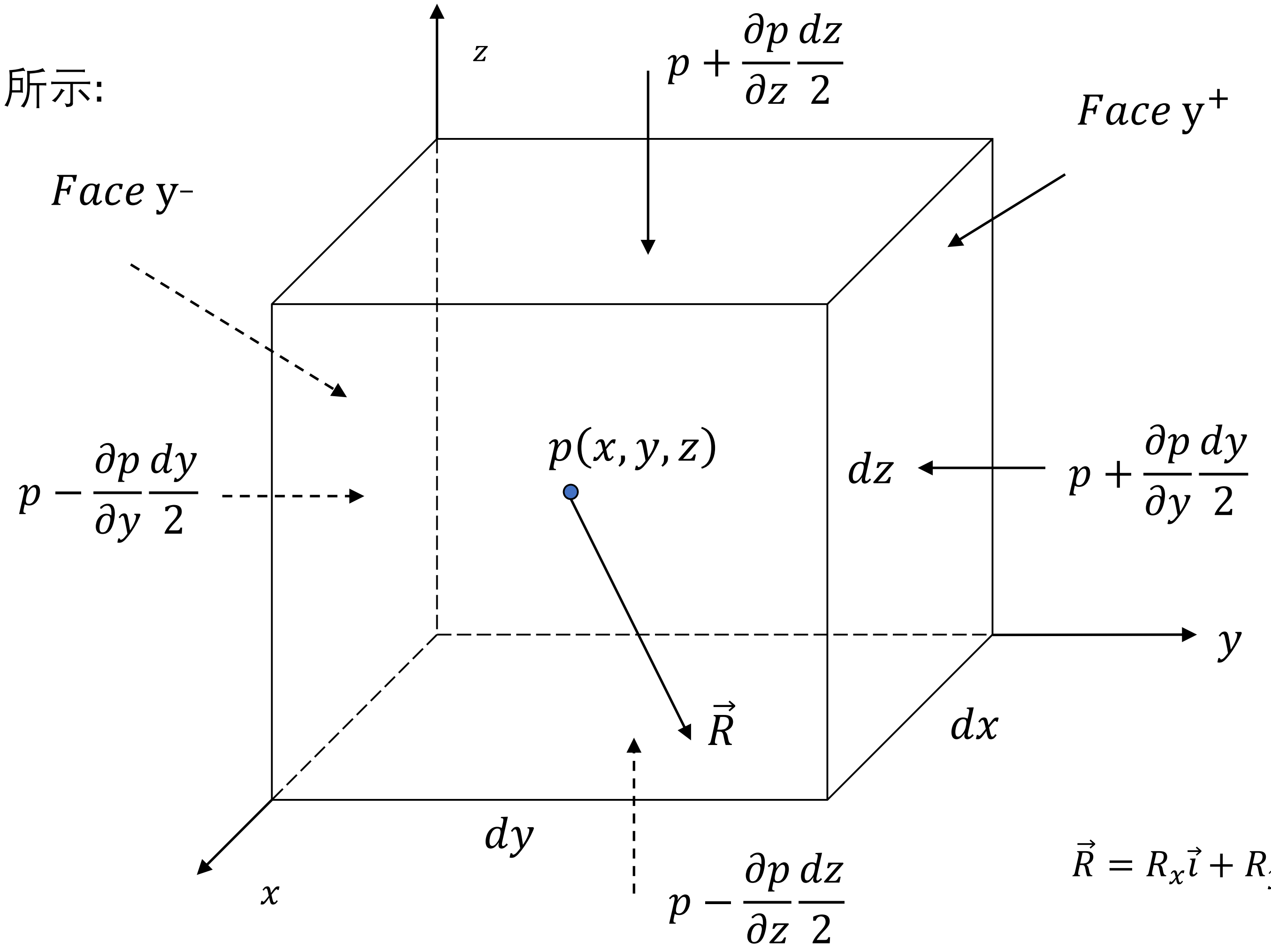
在静止流体中取流体微元体进行受力分析

取$dxdydz$的微元体如图所示:

单位质量体积力

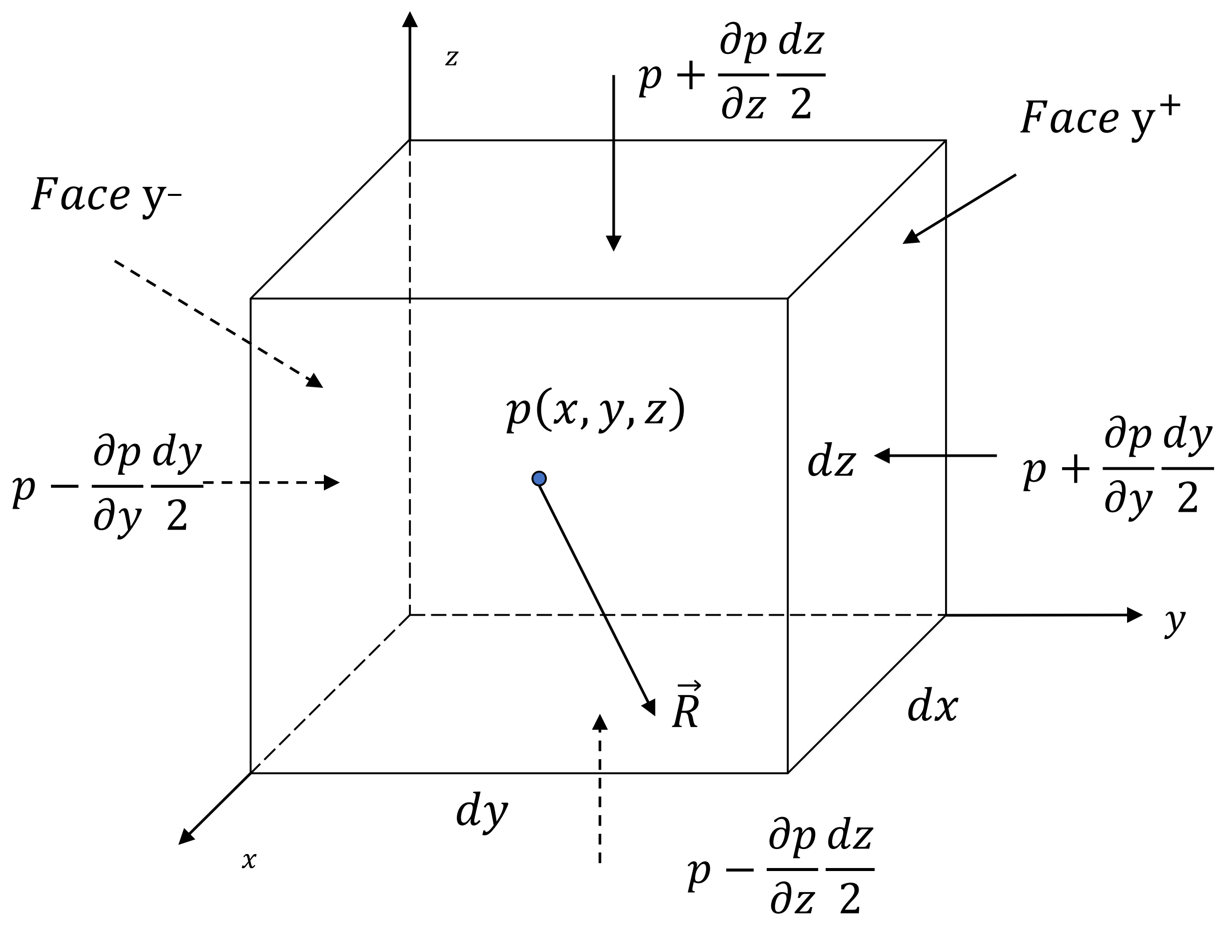
中心处压强

邻近流体作用
在微元面上的压力
($x-$向应力没有画出)



$$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}+R_z\vec{k}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$$

2.3.1 欧拉静平衡方程



$$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}+R_z\vec{k}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$$

微元体静止，据牛顿定理可得平衡方程

***y*方向上**

$$0=\left(\cancel{p}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz-\left(\cancel{p}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz+\rho R_y dxdydz$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}\cancel{dxdydz}+\rho R_y\cancel{dxdydz}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho R_y$$

类似得到其它方向上的平衡方程:

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left.\begin{aligned}0&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho R_x\\0&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho R_y\\0&=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho R_z\end{aligned}\right\}\quad 0=\rho\vec{R}-\nabla p$$

此式由欧拉于1775年最先得到，称为欧拉静平衡方程.

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

2.3.2 等压面——欧拉静平衡方程的应用1

等压面与等势面

$$0 = \rho\vec{R} - \nabla p$$

对方程两边点乘

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$0 = \rho\vec{R}\cdot d\vec{r} - \nabla p\cdot d\vec{r}$$

$$\nabla p\cdot d\vec{r} = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dp$$

$$dp = \rho\vec{R}\cdot d\vec{r}$$

如果流体不可压缩

$$dp = \rho dU$$

$$dU = \vec{R}\cdot d\vec{r} \Longrightarrow \vec{R} = \nabla U$$

定义：静止流体中静压强相等的点所组成的面称为**等压面**.

- **U是$\vec{R}$的势函数**
- **流体静止，则其所受到的体积力/质量力一定是有势力**
- **等压面与等势面重合**

2.3.3 重量作用下流体内部的压强分布——欧拉静平衡方程的应用2

重力作为质量力详细考虑, 代入欧拉静平衡方程

$$0 = \rho\vec{R} - \nabla p$$

$$\vec{R} = -g\vec{k}$$

$$\left(\rho\vec{R} - \nabla p\right)\cdot d\vec{r} = -\rho g dz - dp = 0$$

$$p = -\int_0^z \rho g dz + const$$

$z = z_0$时, $p = p_0$

$$p = -\int_{z0}^{z} \rho g dz + p_0$$

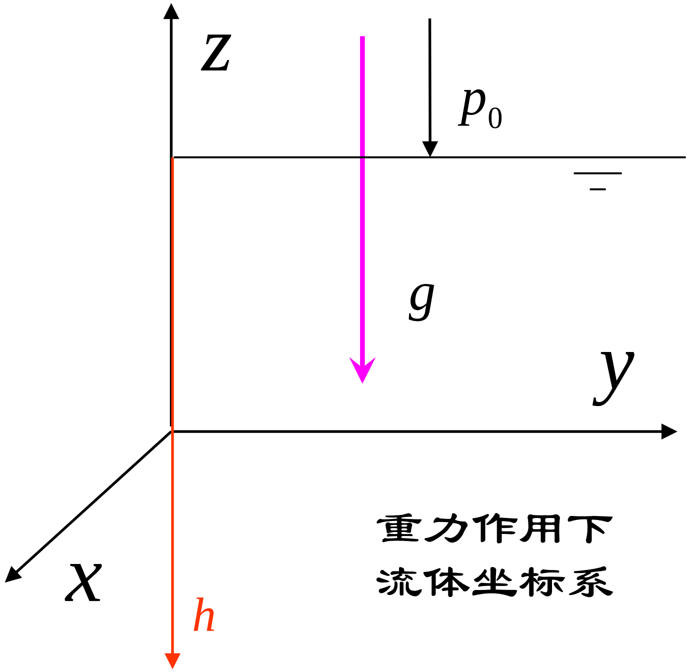
把密度视为常数

$$p = -\gamma\left(z - z_0\right) + p_0$$

写成压差形式

$$p - p_0 = -\gamma\left(z - z_0\right) = \gamma h$$

$$p = p_0 + \gamma h$$



重力作用下
流体坐标系

压强=自由液面压强+液柱压强

表示重力作用下，液体内部
压强随深度线性变化

2.4 流体中的相对静止

- 相对静止及平衡方程
- 在非惯性力作用时的等压面

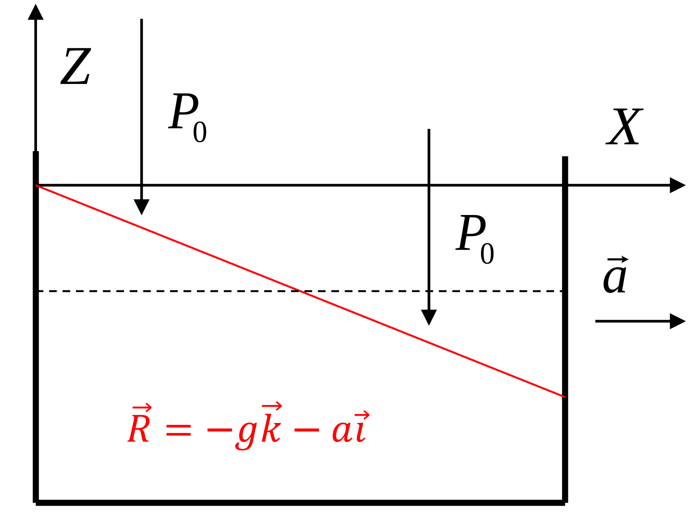
2.4.1 相对静止及平衡方程

流体相对静止：任意两个流体质点之间的相对位置不发生变化

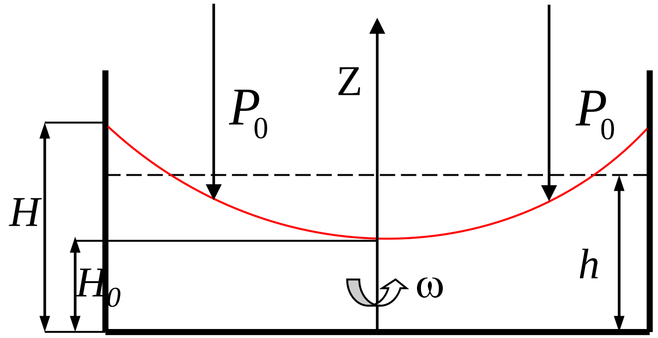
- 欧拉静平衡方程可以描述相对于地球静止的流体压强问题.
- 而实际上,只要流体质点间没有相对运动,平衡方程就可以成立.
- 如果流体相对于容器来讲是静止的,把坐标系固联在容器上,把流体相对于地球的加速度当做惯性力,就可以当做相对静止流体来处理.

其平衡方程，依然是欧拉静平衡方程，只不过质量力包含有惯性力

$$0 = \rho\vec{R} - \nabla p$$



容器有水平加速度$\vec{a}$



$\vec{R} = \omega^2 r\vec{r}_0 - g\vec{k}$

圆柱形容器以ω绕轴转动

2.4.2 在非惯性力作用时的等压面

不再区分具体的质量力是什么, 而直接由欧拉方程推导压强的分布情况.

积分欧拉方程:

$$0 = \rho\vec{R} - \nabla p$$

$$dp = \nabla p \cdot d\vec{r} = \rho\vec{R} \cdot d\vec{r}$$

$$p = \int \rho\vec{R} \cdot d\vec{r}$$

等压面的求得: $dp = \rho dU$

$$p = const \Leftrightarrow U = const$$

1. **自学流体的毛细现象，总结文档与作业一起上交助教（不少于1000字，或者整理5页左右ppt）。**
2. 名词解释：1）流体质点；2）连续介质假说
3. 上、下两平行圆盘，直径均为d，间隙厚度为δ，间隙中液体的动力粘度（即粘性系数）为μ。若下盘固定不动，上盘以角速度ω旋转。求所需力矩M的表达式。
4. 如图1，容器及水做向右的加速运动，加速度$\vec{a}$为常数。自由液面过坐标原点，且压强为P_0。PQ平行于x轴，OP平行于z轴。试完成：1）推导等压面方程；2）比较P、Q和O三点的压力大小。
5. 如图2，圆柱形容器及其内部的水做绕轴旋转，旋转角速度ω为常数。自由液面过坐标原点，且压强为P_0。试推导等压面方程。

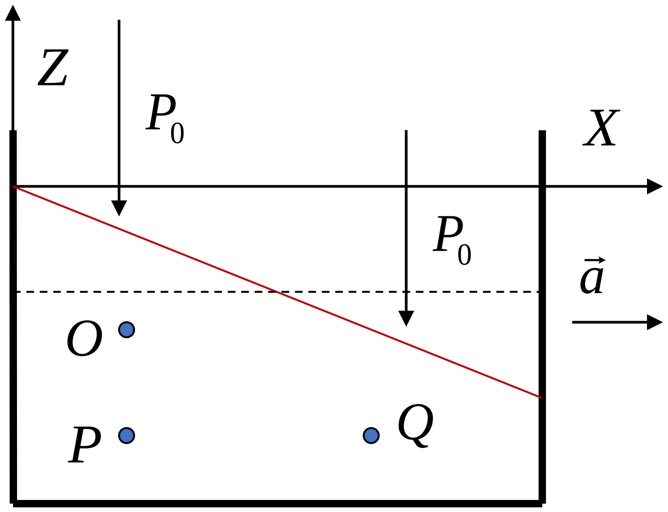


图1 水平加速度

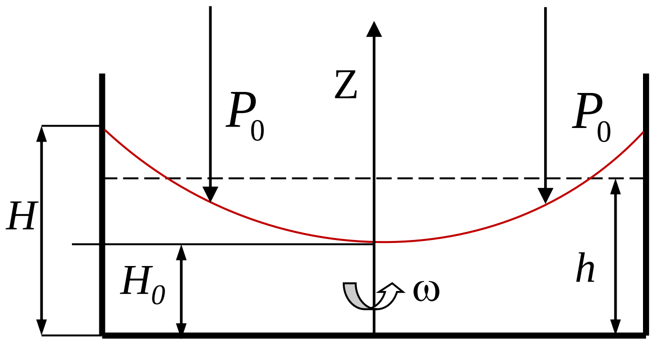


图2 绕轴旋转

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

To be continued ...