Wzory na OF-a

Maciej Ziobro

Spis treści

1 Kinematyka

1.1 Wektor położenia

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1.1}$$

1.2 Wektor przemieszczenia

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \tag{1.2}$$

1.3 Prędkość średnia

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.3}$$

1.4 Prędkość chwilowa

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k} \tag{1.4.2}$$

1.5 Przyspieszenie średnia

$$a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1.5}$$

1.6 Przyspieszenie chwilowe

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.6}$$

1.7 Ruch jednostajnie przyspieszony (a = const)

$$v = v_0 + at \tag{1.7}$$

$$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.7.2}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{1.7.3}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \tag{1.7.4}$$

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2 \tag{1.7.5}$$

1.8 Ruch jednostajny po okręgu

$$a_d = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \tag{1.8}$$

$$F_d = m\frac{v^2}{R} \tag{1.8.2}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} \tag{1.8.3}$$

1.9 Obroty

θ to miara łukowa kąta

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{1.9}$$

Δt to średnia prędkość kątowa

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta}{\theta} \tag{1.9.2}$$

chwilowa prędkość kątowa

$$\omega = dv\theta t \tag{1.9.3}$$

średnie przyspieszenie kątowa

$$\alpha_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.9.4}$$

chwilowe przyspieszenie kątowe

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{1.9.5}$$

$\theta \rightarrow rad$

$$s = \theta r \tag{1.9.6}$$

$\omega \rightarrow$ odnosi się do kąta w radianach

$$v = \omega r \tag{1.9.7}$$

$$T = \frac{\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.9.8}$$

przypieszenie kątowe w mierze łukowej

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.9.9}$$

miara łukowa, $a_{rad} \rightarrow$ składowa radialna

$$a_{rad} = \frac{v_2}{r} = \omega^2 r \tag{1.9.10}$$

$I \rightarrow$ moment bezwładności

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i = \Big(\sum \frac{1}{2} m_i r_i^2\Big)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{1.9.11}$$

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm \tag{1.9.12}$$

$$M = (r)(F\sin(\phi)) = rF_{st} \tag{1.9.13}$$

M $\rightarrow$ Moment bezwładności; F_{st} $\rightarrow$ składowa styczna siły

$$M = (r)(F\sin\phi) = rF_{st} \tag{1.9.14}$$

układ cząstek

$$L = I\omega = const \tag{1.9.15}$$

$$M_{wyp} = I\alpha \tag{1.9.16}$$

$r_\perp$ $\rightarrow$ Odległość osi obrotu od prostej wzdłuż, której leży $\vec{F}$

$$M = (r\sin\phi)(F) = (r_\perp)(F) \tag{1.9.17}$$

Twierdzenie Steinera, I_{SM} $\rightarrow$ moment bezwładności ciała względem osi równoległej do danej i przechodzącej przez śM

$$I = I_{SM} + mh^2 \tag{1.9.18}$$

1.10 Praca i energia w ruchu obrotowym; przyjmując, że zmienia siętylko energia kinetyczna

$\theta \rightarrow$ położenie kątowe

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} I(\Delta\omega)^2 = \int_{\theta_{pocz}}^{\theta_{konc}} M d\theta \tag{1.10}$$

$$P = M\omega \tag{1.10.2}$$

Dla stałego M

$$\Delta E_k = M(\theta_{konc} - \theta_{pocz}) \tag{1.10.3}$$

1.11 Obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{1.11}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{1.11.2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \tag{1.11.3}$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \tag{1.11.4}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{1.11.5}$$

1.12 Toczenie

$$v_{SM} = \omega R \tag{1.12}$$

$$E_k = \frac{1}{2}I_{SM}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{SM}^2 \tag{1.12.2}$$

$$E_{k\ ruchu\ obrotowego} = \frac{1}{2}I_{SM}\omega^2 \tag{1.12.3}$$

$$E_{k\ ruchu\ postepowego} = \frac{1}{2}mv_{SM}^2 \tag{1.12.4}$$

Toczenie się bez poślizgu

$$a_{SM} = \alpha R \tag{1.12.5}$$

1.13 Toczenie po równi pochyłej

$$a_{SM,x} = \frac{g\ \sin\alpha}{1 + \frac{I_{SM}}{mR^2}} \tag{1.13}$$

1.14 Moment siły → M, Moment pędu → l i II z.d. dla ruchu obrotowego

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1.14}$$

$$M = rF\sin\phi = r_\perp F = rF_\perp \tag{1.14.2}$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \tag{1.14.3}$$

$$l = rmv\sin\phi = rp_\perp = rmv_\perp = r_\perp p = r_\perp mv \tag{1.14.4}$$

$$\vec{M_{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} \tag{1.14.5}$$

$L \rightarrow$ układ cząstek

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l_i} \tag{1.14.6}$$

$$\vec{M_{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{1.14.7}$$

układ cząstek

$$L = I\omega = const \tag{1.14.8}$$

$$I_{pocz}\omega_{pocz} = I_{konc}\omega_{konc} \tag{1.14.9}$$

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \Delta L_z = 0 \tag{1.14.10}$$

1.15 Rzut pionowy

$$y = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \tag{1.15}$$

1.16 Rzut poziomy

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{1.16}$$

$$v_x = const = v_0 \cos\alpha \tag{1.16.2}$$

$$v_{0y} = 0 \tag{1.16.3}$$

$$v_y = gt \tag{1.16.4}$$

1.17 Rzut ukośny

$$v_x = v_0 \cos\alpha \tag{1.17}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha \tag{1.17.2}$$

$$t_w = \frac{v_{0y}}{g} \tag{1.17.3}$$

$$t_c = 2t_w = 2\frac{v_{0y}}{g} \tag{1.17.4}$$

$$h_{max} = v_{0y}t_w = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \tag{1.17.5}$$

$$l = v_x t_c \tag{1.17.6}$$

$$y = h_0 + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_x^2} \tag{1.17.7}$$

2 Dynamika

$$a_{SM,x} = \frac{g\ \sin\alpha}{1 + \frac{I_{SM}}{mR^2}} \tag{2.0}$$

2.1 II Zasada Dynamiki Newtona

$$F_{wyp} = ma \tag{2.1}$$

$$F_{wyp\ x} = ma_x \tag{2.1.2}$$

$$F_{wyp\ y} = ma_y \tag{2.1.3}$$

$$F_{wyp\ z} = ma_z \tag{2.1.4}$$

2.2 II Zasada Dynamiki Newtona w układzie nieinercjalnym

wypadkowa sił rzeczywistych

$$\vec{F_{wyp_{rz}}} + \vec{F_b} = m\vec{a} \left(\vec{F_{wyp_{rz}}}\right) \tag{2.2}$$

2.3 I Zasada Dynamiki Newtona w układzie nieinercjalnym

$$\vec{F_{wyp_{rz}}} + \vec{F_b} = 0 \tag{2.3}$$

2.4 Siła Tarcia i Opór Powietrza

$C \rightarrow$ *współczynnik oporu*; $\mu \rightarrow$ *wspłczynnik tarcia*; $\rho \rightarrow$gęstość

$$f_{s\ max} = \mu_s N \tag{2.4}$$

$$f_k = \mu_k N \tag{2.4.2}$$

$$D = \frac{1}{2} C \rho S v^2 \tag{2.4.3}$$

Siła Bezwładności

$$F_b = -ma \tag{2.4.4}$$

Siła Coriolisa, $\omega \rightarrow$ prędkość kątowa

$$F_C = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega}) \tag{2.4.5}$$

2.5 Pęd i Popęd

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.5}$$

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{F_{sr}} = \int_{t_0}^{t_k} \vec{F}(t)dt\Delta t \tag{2.5.2}$$

$$\vec{F_{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{2.5.3}$$

2.6 Ciąg zderzeń np. pocisków z nieruchomą ścianą

$n \rightarrow$ liczba zderzeń

$$J = -n\Delta p \tag{2.6}$$

$$F_{sr} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n\Delta p}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t} m\Delta = -\frac{nm}{\Delta t}\Delta v \tag{2.6.2}$$

3 Praca, Moc, Energia

$$_k = \frac{1}{2} mv^2 \tag{3.0}$$

$$W = \Delta E = \vec{F}\vec{d} = Fd\ \cos\alpha = F_x d \tag{3.0.2}$$

$W_g \rightarrow$ praca siły grawitacji

$$W_g = mgd\cos\alpha = -\Delta E_p \tag{3.0.3}$$

praca siły zachowawczej

$$\Delta E_p = -W_{F_z} = -\int_{x_0}^{x_1} F_z(x)dx(W_{F_z}) \tag{3.0.4}$$

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} \tag{3.0.5}$$

$\vec{F_s}$ →siła sprężystości; k → współczynnik sprężystości

$$\vec{F_s} = -k\vec{d} \tag{3.0.6}$$

$$W_s = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx_k^2 \tag{3.0.7}$$

$$W_s = \int_{x_0}^{x_1} F_x(x)dx + \int_{y_0}^{y_1} F_y(x)dy + \int_{z_0}^{z_1} F_z(x)dz \tag{3.0.8}$$

Praca wykonana nad układem w obecności siły tarcia

$$W = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term} = \Delta E_{mech} + \vec{f}kd \tag{3.0.9}$$

moc średnia

$$P_{sr} = \frac{W}{\Delta t} \tag{3.0.10}$$

moc chwilowa

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v} \tag{3.0.11}$$

3.1 Zamiana energii wewnętrznej na mechaniczną przez siłę zewnętrzną

d → przemieszczenie środka masy

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_k + \Delta E_p = Fd\cos\alpha \tag{3.1}$$

3.2 Zderzenia - ogólnie

$$\vec{p} = const \tag{3.2}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} \tag{3.2.2}$$

$$m_1v_{1pocz} + m_2v_{2pocz} = m_1v_{1konc} + m_2v_{2konc} \tag{3.2.3}$$

3.3 Zderzenie całkowicie niesprężyste

$$m_1v_{1pocz} + m_2v_{2pocz} = m_1v_{1konc} + m_2v_{2konc} \tag{3.3}$$

3.4 Zderzenie sprężyste

$$\Delta E = 0 \tag{3.4}$$

$$v_{1konc} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1pocz} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2pocz} \tag{3.4.2}$$

$$v_{2konc} = + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1pocz} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2pocz} \tag{3.4.3}$$

3.5 Zderzenie w dwóch wymiarach

$\alpha \rightarrow$ kąt początkowy; $\theta \rightarrow$ kąt końcowy
analiza w osi x

$$m_1 v_{1pocz} \cos \alpha_1 + m_2 v_{2pocz} \cos \alpha_1 = m_1 v_{1konc} \cos \theta_1 + m_2 v_{2konc} \cos \theta_2 \tag{3.5}$$

analiza w osi y

$$m_1 v_{1pocz} \sin \alpha_1 + m_2 v_{2pocz} \sin \alpha_1 = m_1 v_{1konc} \sin \theta_1 + m_2 v_{2konc} \sin \theta_2 \tag{3.5.2}$$

4 Układy cząstek

4.1 środek masy układu kilku cząstek

środek masy ciała jednorodnego, $n \rightarrow$ liczba cząstek

$$x_{SM} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} x_i m_i; \quad y_{SM} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{i=1} y_i m_i; \quad z_{SM} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} z_i m_i \tag{4.1}$$

4.2 II Zasada Dynamiki Newtona dla układu cząstek

$$\vec{F}_{wyp} = m_u \vec{a}_{SM} \tag{4.2}$$

4.3 Pęd i zachowanie pędu dla układu cząstek, w układzie izolowanym

$$\vec{p} = m_u \vec{a_{SM}} \tag{4.3}$$

$$\vec{p} = const \tag{4.3.2}$$

$$\vec{F_{wyp,x}} = 0 \implies \vec{p_x} = const \tag{4.3.3}$$

4.4 Rakieta

siła ciągu silnika, $R \rightarrow$ spalanie paliwa; $v_{wzgl} \rightarrow$ szybkość gazów względem rakiety

$$T = Rv_{wzgl} = m_u a \tag{4.4}$$

$$v_k - v_p = \Delta v = v_{wzgl}\ ln \frac{m_{u\ pocz}}{m_{u\ konc}} \tag{4.4.2}$$

5 Równowaga

warunki równowagi statycznej ciała, gdy $v = 0 \wedge \omega = 0$

$$\vec{P} = 0 oraz \vec{L} = 0 \tag{5.0}$$

warunki równowagi ciała

$$\vec{M_w} yp = 0 \wedge \vec{F_w} yp = 0 \tag{5.0.2}$$

gdy $\vec{g_i} = \vec{g_j}$ dla każdego$i$ i j

$$X_{SM} = x_{SC} \tag{5.0.3}$$

6 Sprężystość

Rozciąganie i ściskanie, $F \rightarrow$ wartość siły, $S \rightarrow$ pole przekroju prostopadłego do kierunku, $E \rightarrow$ moduł Younga, $frac \Delta L L$ $\rightarrow$ względna zmiana długości $\vec{F}$

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L} \tag{6.0}$$

Ścinanie, $F \rightarrow$ wartość siły, $S \rightarrow$ pole przekroju równoległego do kierunku $\vec{F}$, $G \rightarrow$ moduł ścinania, $\Delta x \rightarrow$ przemieszczenie częsci ciała w kierunku działania sił $L \rightarrow$ długość prostopadła do kierunku siły

$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta x}{L} \tag{6.0.2}$$

Naprężenie objętościowe, $p \rightarrow$ wartość siły, $S \rightarrow$ pole przekroju równoległego do kierunku $\vec{F}$, $K \rightarrow$ moduł ścinania, $\dfrac{\Delta V}{V} \rightarrow$ względna zmiana objętości

$$p = K\frac{\Delta V}{V} \tag{6.0.3}$$

7 Grawitacja

Gdzie stała grawitacyjna $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N\frac{m^2}{kg^2}$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{7.0}$$

Ciało w kształcie jednorodnej kulistej powłkoki przyciąga cząstke znajdującą na zewnątrz powłoki, tak jakby masa powłokibyła w jej środku masy

$$a_g = \frac{GM}{r^2} \tag{7.0.2}$$

$$g = a_g - \omega^2 R \tag{7.0.3}$$

Siła ciązenia wewnątrz kuli, $R \rightarrow$ promień kuli, $r \rightarrow$ odległość ciała od środka kuli

$$F = \frac{GmM}{R^3}r \tag{7.0.4}$$

grawitacyjna energia potencjalna

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \tag{7.0.5}$$

grawitacyjna energia potencjalna

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r} - \frac{Gm_2m_3}{r} - \frac{Gm_1m_3}{r} \tag{7.0.6}$$

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \tag{7.0.7}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{7.0.8}$$

I Prawo Keplera: Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsie, w której ognisku jest słońce
II Prawo Keplera: Linia łącząca planetę ze słońcem zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni w płaszczyźnie orbity, czyli:

$$const = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{L}{2m} \tag{7.0.9}$$

III Prawo Keplera: $T \rightarrow$ okres ruchu każdej planety na orbicie słońca, $M \rightarrow$ masa ciała wokół, którego krąży planeta $r \rightarrow$ promień albo półoś wielka - a. Dla satelity o masie m orbitującej wokół ciała niebieskiego o masie M na orbicie o promieniu r, w przypadku orbity eliptycznej o półosi wilkiej a

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \tag{7.0.10}$$

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \tag{7.0.11}$$

$$E_k = \frac{GMm}{2r} \tag{7.0.12}$$

dla orbity kołowej $E_m = -E_k$

$$E_m = -\frac{GMm}{2r} \tag{7.0.13}$$

8 Płyny

gęstość próbki o stałej gęstości

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{8.0}$$

$$p = \frac{F}{S} \tag{8.0.2}$$

p_2 i p_1 to ciśnienia na odpowiednio y_2 i y_1, gdzie $y_1 > y_2$

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2) \tag{8.0.3}$$

8.1 Podnośnik/Prasa hydrauliczna

$$\Delta p = \frac{F_{wej}}{S_{wej}} = \frac{F_{wyj}}{S_{wyj}} \tag{8.1}$$

$$V = S_{wej} d_{wej} = S_{wyj} d_{wyj} \tag{8.1.2}$$

$$W = F_{wej} d_{wej} = F_{wyj} d_{wyj} \tag{8.1.3}$$

Prawo Archimedesa

$$F_w = m_{wp} g = V_c \rho_{wp} g \tag{8.1.4}$$

$$F_{ciezar\ pozorny} = F_{ciezar} - F_w \tag{8.1.5}$$

8.2 Płyny Doskonałe

R_V *to* szybkość przepływu objętości, równanie ciągłości, strumień objętościowy

$$R_V = Sv = const \tag{8.2}$$

Strumień masy

$$R_m = \rho R_V = \rho S v = const \tag{8.2.2}$$

Równanie Bernoulliego, $y, v, p \;\rightarrow$ poziom, prędkość, ciśnienie

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = const \tag{8.2.3}$$

9 Drgania

9.1 Ruch Harmoniczny

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi f \tag{9.1}$$

częstość kołowa

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{9.1.2}$$

położenie od czasu, $x_m \rightarrow$ amplituda, $\omega t + \phi \rightarrow$ faza drgań, $\omega \rightarrow$ częstość kołowa, $\phi \rightarrow$ faza początkowa, $\rightarrow$ gdy $t_0 = 0$: $x_0 = x_m \;\rightarrow\; \phi = 0$

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \tag{9.1.3}$$

$$x_0 = -x_m \rightarrow \phi = \pi rad \tag{9.1.4}$$

$$v(t) = x'(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \tag{9.1.5}$$

$$a(t) = v(t)' = x''(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t) \tag{9.1.6}$$

amplituda zmian prędkości

$$v_m = \omega x_m \tag{9.1.7}$$

ampltuda zmian przyspieszenia

$$a_m = \omega^2 x_m \tag{9.1.8}$$

$$x(t) = x(t + kT) \tag{9.1.9}$$

$$F = -\left(m\omega^2\right)x \tag{9.1.10}$$

prawo Hooke'a

$$F = -kx \tag{9.1.11}$$

$$k = m\omega^2 \tag{9.1.12}$$

$$\omega = sqrt\frac{k}{n} \tag{9.1.13}$$

$$T = 2\pi sqrt\frac{k}{n} \tag{9.1.14}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{9.1.15}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \tag{9.1.16}$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kx_m^2 \tag{9.1.17}$$

9.2 Wahadło Torsyjne

$\kappa \rightarrow$ moment kierujący

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \tag{9.2}$$

$$M = -\kappa\theta \tag{9.2.2}$$

9.3 Wahadła, Ruch po okręgu

Wahadła matematycznego przy małym kącie

$$T = \sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{9.3}$$

wahadło fizyczne, przy małym kącie, $h \rightarrow$ odległość środka masy od osi obrotu

$$T = \sqrt{\frac{I}{mgh}} \tag{9.3.2}$$

9.4 Ruch Harmoniczny Tłumiony

$b \rightarrow$ stała tłumienia

$$\vec{F_o} = -b\vec{v} \tag{9.4}$$

częstość kołowa oscylatora tłumionego

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{9.4.2}$$

$$x(t) = x_m e^{\frac{-bt}{2m}} \cos(\omega' t + \phi) \tag{9.4.3}$$

Dla małego b

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{\frac{-bt}{2m}} \tag{9.4.4}$$

9.5 Drgania Wymuszone i Rezonans

Drgania wymuszone

$$x(t) = x_m \cos(\omega_{wym} t + \phi) \tag{9.5}$$

Rezonans

$$\omega = \omega_{wym} \tag{9.5.2}$$

$$v_m,\ a_m,\ x_m\ jest\ najwieksze\ gdy\ \omega = \omega_{wym} \tag{9.5.3}$$

10 Fale I

Fale sinusoidalne, $y_m \rightarrow$ amplituda

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{10.0}$$

Fala przeciwna do danej wyżej

$$y(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t + \phi) \tag{10.0.2}$$

Wzór ogólny, $k \rightarrow$ liczba falowa, $x \rightarrow$ położenie, $y(x,t) \rightarrow$ przemieszczenie

$$y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi) \tag{10.0.3}$$

Liczba falowa, $\lambda \rightarrow$ długość fali

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.0.4}$$

Częstość kołowa

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{10.0.5}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{10.0.6}$$

$$kx - \omega t = const \tag{10.0.7}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \tag{10.0.8}$$

10.1 Fala w Napiętej Linie

$\mu \rightarrow$ gęstość liniowa liny, $T \rightarrow$ wartość siły naprężenia w linie

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{10.1}$$

$$\mu = \frac{m}{l} \tag{10.1.2}$$

$$P_{sr} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \tag{10.1.3}$$

Prędkość poprzeczna elementu

$$u = -\omega y_m \cos(kx - \omega t) \tag{10.1.4}$$

$$dE_k = \frac{1}{2} dm u^2 \tag{10.1.5}$$

10.2 Równanie Falowe

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{10.2}$$

10.3 Interferencja fal

Zasada superpozycji fal

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \tag{10.3}$$

Fala wypadkowa dla dwóch fal w których,
$k_1 = k_2,\ \omega_1 = \omega_2,\ f_1 = f_2,\ y_{m1} = y_{m2}$. Ponad to: $(2y_m \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right)) \rightarrow$ amplituda, oraz $\sin\left(kc - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right) \rightarrow$ czynnik oscylacyjny

$$y(x,t) = \left(2y_m \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right)\right) \sin\left(kc - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right) \tag{10.3.2}$$

10.4 Wskazy

Dana jest fala $y_1(x,t) = y_{m1}\sin(kx - \omega t)$. Długość wskazu wynosi y_m, a jego prędkość kątowa wynosi ω. Długość składowej y wskazu jestrówna przemieszczeniu punktu w danej chwili. Dana jest fala $y_2(x,t) = y_{m2}\sin(kx - \omega t + \phi)$ kąt miedzy wskazami fali 1 i fali 2 to ϕ. Sumą tych fal jest fala: $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \beta)$ $\rightarrow$ fala wypadkowa, gdzie β to faza poczatkowa. Ponad to wskazem fali wypadkowej jest suma wskazów fal składowych

10.5 Fale Stojące i Rezonans

Fala stojąca w linie umocowanej na obu końcach

$$y(x,t) = 2y_m \sin(kx)\ \cos(\omega t) \tag{10.5}$$

Amplituda w puncie x

$$2y_m \sin(kx) \tag{10.5.2}$$

Dla dowolnego $n \neq 0$ dla $n = 1$ drganie podstawowe, dla $n = 2$ druga harmoniczna itd.D

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L} \tag{10.5.3}$$

11 Fale II

11.1 Fala Dźwiękowa

Prędkość dźwięku, $B \rightarrow$ moduł ściśliwości ośrodka

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{11.1}$$

Względna zmiana objętości $\Delta V/V$ wywoływana przez zmiane ciśnienia Δp

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \tag{11.1.2}$$

przemieszczenie podłużne s elementu masy, $s_m \rightarrow$ amplituda, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi f$

$$s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t) \tag{11.1.3}$$

Zmiana ciśnienia względem ciśnienia równowagi

$$\Delta p = \Delta p_m \sin(kx - \omega t) \tag{11.1.4}$$

Amplituda zmian ciśnienia

$$\Delta p_m = v\rho\omega s_m \tag{11.1.5}$$

Fale wysłane w tych samych fazach i w podobnych kierunkach, gdzie ΔL to różnica dróg przebytych

$$\phi = \frac{\Delta L}{\lambda}2\pi \tag{11.1.6}$$

Warunek całkowcie konstruktywnej interferencji dla każdego $m \in \mathbb{N}$

$$\phi = m(2\pi)\ lub\ \frac{\Delta L}{\lambda} = m \tag{11.1.7}$$

Natęrzenie fali, $P \rightarrow$ moc fali, $S \rightarrow$ pole powierzchni do której dociera fala

$$I = \frac{P}{S} \tag{11.1.8}$$

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 a_m^2 \tag{11.1.9}$$

W odeległości r o źródła o mocy P_{zr}

$$I = \frac{P_{zr}}{4\pi r^2} \tag{11.1.10}$$

Głośność dźwięku, gdzie I_0 jest standardowym natężeniem dźwięku

$$\beta = (10\ dB)\log\frac{I}{I_0} \tag{11.1.11}$$

$$I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2} \tag{11.1.12}$$

Natężenie dźwięku pochodzące ze źródła liniowego, jak iskra przeskakująca o L

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P_{zr}}{2\pi rL} \tag{11.1.13}$$

11.2 Źródła dźwięku w muzyce

$v \rightarrow$ prędkość dzwięku w ośrodku będącym w środku rury, $L \rightarrow$ długość rury

Rura obustronnie otwarta, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$

$$f = \frac{nv}{2L} \tag{11.2}$$

Rura jednostronnie otwarta, dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$f = \frac{(2n+1)v}{4L} \tag{11.2.2}$$

Struna, n-ta harmoniczna

$$L = \frac{n\lambda}{2} \tag{11.2.3}$$

11.3 Dudnienia

Powstaja gdy odbieramy dwie fale o nieznacznie róniacych sie częstotliwościach f_1 i f_2
Częstotliwość docierania dźwiękuów dudnienia

$$f_{ddudn} = f_1 - f_2 \tag{11.3}$$

Częstotliwość dźwięku dudnienia

$$f_d = \frac{f_1 + f_2}{2} \tag{11.3.2}$$

11.4 Efekt Dopplera

Częstetliwość fali rejestrowanej przez detektor, gdy źródło przemieszcza się z prędkością v_S a detektor z prędkością v_D,gdzie $v \rightarrow$ prędkość dźwięku w ośrodku. Gdy detektor ze źródłem zbliżają się do siebie $f' > f$,a gdy oddalają się $f' < f$ i tak należy dobrać znaki

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} \tag{11.4}$$

11.5 Prędkości Nadźwiękowe, Fale Uderzeniowe

$v_S \rightarrow$ prędkość ciała, $v \rightarrow$ prędkość dźwięku w ośrodku
Kąt Macha (połowa kąta wierzchołkowego stożka Macha)

$$\sin\theta = \frac{v}{v_S} \tag{11.5}$$

Liczba Macha

$$\frac{v_S}{v} \tag{11.5.2}$$

12 Termodynamika

Termometr gazowy

$$T = (273,16K)\left(\lim_{ilosc\ gazu\ \rightarrow\ 0}\ \frac{p}{p_3}\right) \tag{12.0}$$

Punkt potrójny wody

$$T_3 = 273,16K \tag{12.0.2}$$

Przliczanie z K na ^oC

$$T_C = (T - 273,15)^oC \tag{12.0.3}$$

Przliczanie z ^oC na ^oC

$$T_F = \left(\frac{9}{5}T_C + 32\right)^o F \tag{12.0.4}$$

Zmiana objętości V przy zmianie temperatury o ΔV

$$\Delta V = V\beta\Delta T \tag{12.0.5}$$

Współczynnik rozszerzalnosci cieplnej liniowej i objętościowej

$$\beta = 3\alpha \tag{12.0.6}$$

Zmiana objętości L przy zmianie temperatury o ΔL

$$\Delta L = L\alpha\Delta T \tag{12.0.7}$$

$$1\ cal = 4,1868\ J \tag{12.0.8}$$

Związek zmiany tempertauryz pochłonietym ciepłem,gdzie $Q \rightarrow$ pochłoniete ciepło, $C \rightarrow$ pojemność cieplna, $c \rightarrow$ ciepło własciwe

$$Q = C(T_k - T_p) = cm(T_k - T_p) = cm\Delta T \tag{12.0.9}$$

ciepło, które trzeba dostarczyć ciału o masie m i cieple przemiany c aby nastąpiła zmianna stanu skupienia

$$q = c_p m \tag{12.0.10}$$

$$Q > 0 \rightarrow T_O > T_U \tag{12.0.11}$$

Praca gazu który zwiększa i zmiejsza swoją objętość

$$W = \int_{V_p}^{V_k} pdV \tag{12.0.12}$$

I Zasada Termodynamiki, $W_u,\ W_o\ \rightarrow$ praca układu i wykonana nad układem

$$\Delta E_w = Q - W_u + W_o \tag{12.0.13}$$

12.1 Niektóre szćzególne przypadki I Zasady Termodynamiki

Przemiana adiabatyczna

$$Q = 0 \ \Rightarrow\ \Delta E_W = -W \tag{12.1}$$

Przemiana ze stałą objętością

$$W = 0 \ \Rightarrow\ \Delta E_W = Q \tag{12.1.2}$$

Przemiana - cykl zamknięty

$$\Delta E_W = 0 \ \Rightarrow\ Q = W \tag{12.1.3}$$

Przemiana - rozprężanie swobodne

$$Q = W = 0 \;\Rightarrow\; \Delta E_W = 0 \tag{12.1.4}$$

Strumień ciepła przepływającego przez płytke, gdzie S i L toPole powierzchni oraz grubość płytki, a k to przwodność cieplna materiału

$$P_{prze} = \frac{Q}{t} = kS\frac{T_G - T_Z}{L} \tag{12.1.5}$$

moc promieniowania cieplnego, gdzie $\sigma = 5,6704\ 10^{-8}\ \frac{W}{m^2K^4} \rightarrow$ stała Stefana-Boltzmanna, $\varepsilon \rightarrow$ zdolność emisyjna powierzchni ciała, $T \rightarrow$ jego temperatura bezwzględna

$$P_{prze} = \sigma\varepsilon ST^4 \tag{12.1.6}$$

Moc absorbowania z otoczenia o temperaturze T_O

$$P_{abs} = \sigma\varepsilon ST_O^4 \tag{12.1.7}$$

Opór cieplny

$$R = \frac{L}{kS} \tag{12.1.8}$$

Strumień ciepła przepływającego przez i płytek

$$P_{prze} = S\frac{T_G - T_Z}{\sum L_i/k_i} \tag{12.1.9}$$

13 Kinetyczna Teoria Gazów

Liczba Avogarda

$$N_A = 6,02\dot{}10^{23} mol^{-1} \tag{13.0}$$

Masa molowa, $m \rightarrow$ masa cząsteczek

$$M = mN_A \tag{13.0.2}$$

Próbka substancji o masie M_{pr}, złożona z N cząsteczek, zawiera n moli substancji

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{M_p r}{M} = \frac{M_{pr}}{mN_A} \tag{13.0.3}$$

Rówananie stanu gazu doskonałego, $n \rightarrow$ liczba moli gazu

$$pV = nRT \tag{13.0.4}$$

Stała gazowa

$$R = 8,31\frac{J}{mol \cdot K} \tag{13.0.5}$$

Stała Boltzmanna

$$pV = NkT \ \rightarrow k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \tag{13.0.6}$$

Praca gazu wykonana w wyniku przemiany izotermicznej

$$W = nRT \ \ln \frac{V_k}{V_p} \tag{13.0.7}$$

Praca gazu przy stałej objętości i ciśnieniu

$$W = 0 \tag{13.0.8}$$

Praca gazu, dopuszczając zmiane temperatury

$$W = \int_{V_p}^{V_k} p dV \tag{13.0.9}$$

$$p = \frac{nMv^2_{sr.kw.}}{3V} = \frac{nMv^2_{x\ sr.kw.}}{3V} \tag{13.0.10}$$

$$v^2_{sr.kw.} = \sqrt{(v^2)_{sr}} \tag{13.0.11}$$

$$v^2_{sr.kw.} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \tag{13.0.12}$$

$$E_{k\ sr} = \frac{1}{2} m v^2 sr.kw. \tag{13.0.13}$$

Średnia energia ruchu postepowego na cząsteczke, w zależności od T

$$E_{k\ sr} = \frac{3}{2} k T^2 \tag{13.0.14}$$

Średnia droga swobodna λ, czyli odległość pokonywana średnio przez cząsteczke między kolejnymi zderzeniami, gdzie: $\frac{N}{V} = \frac{p}{kT}$ $\rightarrow$ liczba cząsteczek na jednostke objętości, d $\rightarrow$ średnica cząstek

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \ N/V} \tag{13.0.15}$$

Rozkład prędkości Maxwella

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{\left(-Mv^2\right)/(2RT)} \tag{13.0.16}$$

$$v_{sr} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \tag{13.0.17}$$

Prędkości najbardziej prawdopodobna

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \tag{13.0.18}$$

$$v^2_{sr.kw.} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \tag{13.0.19}$$

Ułamek czastek o predkości od v_1 do v_2

$$\int_{v_1}^{v_2} P(v)dv \tag{13.0.20}$$

Ułamek cząstek o prędkości z przeciału dv o środku w v

$$P(v)dv \tag{13.0.21}$$

Energia wewnętrzna dowolnego gazu doskonałego

$$E_w = nC_VT \tag{13.0.22}$$

13.1 Dla stałej objętości

$$\Delta E_w = Q = nC_V\Delta T \tag{13.1}$$

gaz jednoatomowy, gdzie C_V to molowe ciepło własciwe przy stałym V

$$C_V = \frac{3}{2}R = 12,5J/(mol \cdot K) \tag{13.1.2}$$

13.2 Dla stałego cisnienia

Molowe ciepło własciwe C_p przy stałym p

$$Q = nC_p\Delta T \tag{13.2}$$

$$W = p\Delta V = nR\Delta T \tag{13.2.2}$$

$$C_p = C_V + R \tag{13.2.3}$$

Dla dowolnego gazu jednoatomowego

$$C_p = \frac{5}{2}R \tag{13.2.4}$$

Każdy rodzaj cząstek charakteryzuje pewna ilość stopni swobody f, które dają cząsteczce niezależne sposoby przechowywania energii. Na każdy stopień swobody przypada średnio energia równa $\frac{1}{2}kT$ na cząsteczke, lub $\frac{1}{2}RT$ w przeliczeniu na mol

$$C_V = \frac{f}{2}R \tag{13.2.5}$$

$$E_w = \frac{f}{2}nRT \tag{13.2.6}$$

Dla gazu jednoatomowego

$$f = 3 \tag{13.2.7}$$

Dla gazu dwuatomowego

$$f = 5 \tag{13.2.8}$$

Dla gazu wieloatomowego, gdzie wynik jest niedoszacowany

$$f = 6 \tag{13.2.9}$$

Rozprężanie adiabatyczne

$$pV^{\gamma} = const \tag{13.2.10}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \tag{13.2.11}$$

14 Entropia i II Zasada Termodynamiki

Rozprężanie swobodne

$$pV = const \tag{14.0}$$

$$TV^{\gamma-1} = const \tag{14.0.2}$$

Definicja zmiany entropi

$$\Delta S = \int_{pocz}^{konc} \frac{dQ}{T} \tag{14.0.3}$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \tag{14.0.4}$$

Zmiana entropii w przmianie izotermicznej rzy małej zmianie temperatury

$$\Delta S = \frac{Q}{T_{sr}} \tag{14.0.5}$$

Entropia układu zamkniętego wzrasa w przemianach nieodwracalnych i nie zmiania się w odwracalnych
Druga Zasada Termodynamiki

$$\Delta S \geqslant 0 \tag{14.0.6}$$

14.1 Silnik Carnota

Sprawność dowolnego silnika

$$\eta = \frac{W}{Q_G} \tag{14.1}$$

Sprawność silnika Carnota

$$\eta = 1 - \frac{Q_Z}{Q_W} = 1 - \frac{T_Z}{T_W} \tag{14.1.2}$$

14.2 Chłodziarki

Współczynnik wydajności dowolnej chłodziarki

$$K = \frac{Q_Z}{W} \tag{14.2}$$

Współczynnik wydajności chłodziarki Carnota

$$K_C = \frac{T_Z}{T_G - T_Z} \tag{14.2.2}$$

15 Elektrodynamika

15.1 Prawo Coulomba

Prawo Coulomba

$$\vec{F_C} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \tag{15.1}$$

Stała elektryczna

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,9910^9\frac{Nm^2}{C^2} \tag{15.1.2}$$

Przenikalność elektryczna próżni

$$\varepsilon_0 = 8,8510^{-12}\frac{C^2}{Nm^2} \tag{15.1.3}$$

$$C = A * s \tag{15.1.4}$$

Natężenie prądu

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{15.1.5}$$

Wartość ładunku elementarnego

$$e = 1,60210^{-19}C \tag{15.1.6}$$

15.2 Pole Elektryczne

Natężenie pola elektrycznego w danym punkcie, czyli stosunek siły działającej na ładunek próbny q_0 do tego ładunku

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \tag{15.2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{15.2.2}$$

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2} \tag{15.2.3}$$

$$\vec{E_{wyp}} = \frac{\vec{F_{wyp}}}{q_0} = \int_{i=1}^{n} \vec{E_n} \tag{15.2.4}$$

Dipol elektryczny względem punktu P na osi o odległości z od środka dipola i o odległosci d między cząstkami

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \frac{d}{\left(1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2} \tag{15.2.5}$$

Dipol elektryczny dla dużych odległości

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{z^3} \tag{15.2.6}$$

Elektryczny moment dipolowy

$$\vec{p} = qd \tag{15.2.7}$$

Pole naładowanego pierścienia na jego osi

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \tag{15.2.8}$$

Pole naładowanego pierścienia daleko od niego

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{z^2} \tag{15.2.9}$$

Pole naładowanej tarczy o promieniu R, na jej osi w odległości z

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \tag{15.2.10}$$

Pole naładowanej tarczy o promieniu R, gdzie $R \to \infty$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{15.2.11}$$

Ładunek w polu elektrycznym

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{15.2.12}$$

Moment siły działający na dipol

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{15.2.13}$$

Wartość momentu siły działającego na dipol

$$M = pE \sin\theta \tag{15.2.14}$$

Energia potencjalna dipola

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\ \cos\ \theta \tag{15.2.15}$$

15.3 Prawo Gaussa

Całkowity strumień elektryczny

$$\varPhi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{15.3}$$

Jednorodne pole, płaska powierzchnia

$$\varPhi = (E \ \cos\ \theta)S \tag{15.3.2}$$

Wypadkowy strumień (kółko oznacza całkowanie po wszytkich powierchniach płaszczyzny)

$$\varPhi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{15.3.3}$$

Prawo Gaussa, spełnione w próżni i w przybliżeniu w powietrzu

$$q_{wewn} = \varepsilon_0 \varPhi = \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{15.3.4}$$

Pole elektryczne na powierzchni przewodnika na małe powierchni przewodnika walcowego (na tyle małej aby uznac ja za płaską)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{15.3.5}$$

Naładowana linia prosta, gdzie r to odległość od lini

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{15.3.6}$$

Naładowana płaszczyzna pomijając zakrzywienie pola na brzegach

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{15.3.7}$$

Naładowna powłoka kulista, gdzie $r \leqslant R \rightarrow$ odległość od środka powłoki

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{15.3.8}$$

Naładowana powłkoa kulista, gdzie $r < R$

$$E = 0 \tag{15.3.9}$$

Jendorody rozkład sferyczny ładunek, gdzie $r < R$, $r \rightarrow$ promień powierzchni Gaussa, $R \rightarrow$ Promień rozkładu ładunku, $q \rightarrow$ cały ładunek

$$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r \tag{15.3.10}$$

15.4 Potnecjał Elektryczny

Elektryczna energia potencjalna

$$E_p = qV \tag{15.4}$$

Przenesienie cząstki z punktu o potnecjale V_p do punktu o potencjale V_k

$$\Delta E_p = q\Delta V = q(V_k - V_p) \tag{15.4.2}$$

Zmiana energi kinetycznej w związku z pokoniem różnicy potencjałów

$$\Delta E_k = -q\Delta V = -q(V_k - V_p) \tag{15.4.3}$$

Praca siły zewnątrznej

$$\Delta E_k = -\Delta E_p + W_{zew} = -q\Delta V + W_{zew} \tag{15.4.4}$$

Elektronowolty - energia

$$1eV = 1,602 \cdot 10^{-19} J \tag{15.4.5}$$

Obliczanie potencjału na podstawie pola, całka po drodze cząstki

$$\Delta V = -\int_p^k \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{15.4.6}$$

Pole jednorodene

$$\Delta V = -E\Delta x \tag{15.4.7}$$

Potencjał elektryczny naładowanej cząstki

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{15.4.8}$$

Dla n naładowanych cząstek

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q}{r} \tag{15.4.9}$$

Potencjał elektryczny dipolu

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\ \cos\theta}{r^2} \tag{15.4.10}$$

Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} \tag{15.4.11}$$

Potencjał elektryczny naładowanej lini w oległości d o długości L

$$V = \int dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ \ln\left[\frac{L + (L^2 + d^2)^{1/2}}{d}\right] \tag{15.4.12}$$

Potencjał elektryczny naładowanej tarczy w punkcie na protsej przechodzącej przez środek tarczy i do niej prostopadłej w odległości z

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right) \tag{15.4.13}$$

Składowa natężenia pola w kierunku x na podstawie potencjału

$$\vec{E_x} = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{15.4.14}$$

Całkowita energia potencjalna układu czastek jest sumą energi potencjalnych każdej pary naładowanych cząstek

Elektryczna energia potencjalna układu dwuch czastek

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} \tag{15.4.15}$$

Nadmiar ładunku umieszczony na izolowanym przewodniku rozkłada się na powierzchni tego przewodnika w tak, że wszytkie punkty tego przewodnikauzyskują ten sam potencjałnawet jeśli przewodnik posiada wnęke

15.5 Pojemność elektryczna

Pojemnośc elektryczna - proporcja ładunku i napięcia

$$q = UC \tag{15.5}$$

Związek pola elektrycznego z ładunkiem na okładkach kondensatora

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \tag{15.5.2}$$

Związek zmiany potencjału z ładunkiem na okładkach kondensatora, całka po dowolnej drodze z jednej okładki kondensatora na drugą

$$V_k - V_p = -\int_p^k \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{15.5.3}$$

Pojemność elektryczna kondensatora płaskiego, gdzie d to odległość między okładkami a S to ich powierzchnia

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{15.5.4}$$

Pojemność elektryczna kondensatora walcowego

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln{(b/a)}} \tag{15.5.5}$$

Pojemność elektryczna kondensatora kulistego

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \tag{15.5.6}$$

Izolowana kula jako kondensator

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{15.5.7}$$

Kondensatory połączone równolegle

$$C_{rw} = \sum_{j=1}^{n} C_j \tag{15.5.8}$$

Kondensatory połączone szeregowo

$$\frac{1}{C_{rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \tag{15.5.9}$$

Energia potencjalna naładowanego kondensatora

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 \tag{15.5.10}$$

Gęstość energi, czyli energia na jednostke objętości w polu elektrycznym

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{15.5.11}$$

Prawo Gaussa w dielektryku

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \tag{15.5.12}$$

15.6 Prąd i opór elektryczny

Defnicja natężenia prądu

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{15.6}$$

Gęstość prądu $\vec{J}$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{15.6.2}$$

Gęstość prądu, gdy przepływ prądu przez powierzchnię jest stały

$$J = \frac{I}{S} \tag{15.6.3}$$

Prędkość unoszenia dryftu, gdzie n to liczba nośników na jednostke objętości w przewodniku o długości L i polu powierzchni S

$$\vec{J} = (ne)\vec{v_d} \tag{15.6.4}$$

Opór elektryczny

$$R = \frac{U}{I} \tag{15.6.5}$$

Opór elektryczny właściwy materiału

$$\rho = \frac{E}{J} \tag{15.6.6}$$

Opór elektryczny właściwy materiału w postaci wektorowej

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \tag{15.6.7}$$

Przewodność elektryczna właściwa

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{15.6.8}$$

Opór elektryczny

$$R = \rho\frac{L}{s} \tag{15.6.9}$$

Opór własciwy ρ w zależności z temperaturą, gdzie T_0 to temperatura odniesienia a ρ_0 to ρ w T_0, a α to współczynnik temperaturowy oporu własciwego materiału

$$\rho - \rho_0 = \rho_0\alpha(T - T_0) \tag{15.6.10}$$

Moc elektryczna

$$P = IU \tag{15.6.11}$$

Rozpraszanie energi termcznej w oporniku

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \tag{15.6.12}$$

Zakładając, że elektrony przewodnictwa w metalu są swobodne i mogą poruszać się jak czasteczki w gazie możemy wyprowadzić wyrażnie opisujące opór własciwy metalu, gdzie n to liczba elektronów swobodnych w jednostce objętości i τ jest średnim czasem między zdeżeniami elektronów, a m to masa elektronu

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau} \tag{15.6.13}$$

15.7 Obwody elektryczne

Definicja SEM, gdzie dW to praca nad ładunkiem jednostkowym prezenosząc go z jednego bieguna na drugi

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q} \tag{15.7}$$

I w zależności od $\mathcal{E}$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \tag{15.7.2}$$

Pierwsze prawo Kirchhoffa. Suma natężeń wpływających do dowolnego węzła musić być sumą natężeń wypływających z tego węzła
Drugie prawo Kirchhoffa. Algebraiczna suma zmian potencjałów napotykanych przy pełnym przejściu oczka musi być 0
N oporników połączonych szeregowo

$$R_{rw} = \sum_{j=1}^{n} R_j \tag{15.7.3}$$

Moc źródła SEM

$$P_{SEM} = I\mathcal{E} \tag{15.7.4}$$

N oporników połączonych szeregowo

$$\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} \tag{15.7.5}$$

Ładowanie kondensatora

$$q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) \tag{15.7.6}$$

Ładowanie kondensatora

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-t/RC} \tag{15.7.7}$$

Ładownay kondensator upływie długiego czasu zachowuje się jak przerwa w obwodzie a poczatkowo jak przewodnik bez oporu

Napięcie - Ładowanie kondensatora

$$U_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) \tag{15.7.8}$$

Stała czasowa kondensatora - w ciągu czasu τ ładunek na kondensatorze wzrasta z 0 do do 63% końcowej wartości $C\mathcal{E}$

$$\tau = RC \tag{15.7.9}$$

Rozładowanie kondensatora

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC} \tag{15.7.10}$$

Rozładowywanie kondensatora

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/RC} \tag{15.7.11}$$

15.8 Pole magnetyczne

Wektor inducki magnetycznej

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{15.8}$$

Wartość inducki magnetycznej

$$F_B = |q|vB\sin\theta \tag{15.8.2}$$

$$1T = \frac{N}{A \cdot m} \tag{15.8.3}$$

Pole magnetyczne ziemii

$$B_Z = 10^{-4}T \tag{15.8.4}$$

Czątka naładowana o masie m i ładunku $|q|$ o prędkości $\vec{v}$ prostopadłej do $\vec{B}$ będzie porszać się po okręgu o promieniu r

$$r = \frac{mv}{|q|B} \tag{15.8.5}$$

Częstotliwość f i częstość kołowa ω oraz okres T tego ruchu

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m} \tag{15.8.6}$$

Częstotliwość cyklotronu

$$\pi = \pi_{gen} \tag{15.8.7}$$

Siła działając an przewodnik z prądem

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} \tag{15.8.8}$$

Zakrzywiony przewodnik z prądem

$$d\vec{F}_B = Id\vec{L} \times \vec{B} \tag{15.8.9}$$

Na cewke w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$ o N zwojach i polu przekroju S przez którą płynie prąd I działa moment siły M

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{15.8.10}$$

Moment magnetyczny cewki

$$\mu = NIS \tag{15.8.11}$$

Energia potencjalna

$$E_p(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{15.8.12}$$

Stała magnetyczna w próżni

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \tag{15.8.13}$$

prawo Biota-Savarta

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \tag{15.8.14}$$

Długi przewód prostoliniowy

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{15.8.15}$$

Prostoliniowy przewód ograniczony z jednej strony

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \tag{15.8.16}$$

W środku łuku okręgu

$$B = \frac{\mu_0 I \phi}{2\pi R} \tag{15.8.17}$$

Siła działająca na dwa przewody równoległe, gdzie d to odległość

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d} \tag{15.8.18}$$

Prawo Ampère'a, gdzie I_p to natęzenie prądu przepływajace przez powierzchnię objęta konturem całkowania

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \tag{15.8.19}$$

Solenoid idealny gdzie n to liczba zwojów na jednostke długości

$$B = \mu_0 I n \tag{15.8.20}$$

Toroid, gdzie N to liczba zwojów

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{1}{2} \tag{15.8.21}$$

15.9 Zjawisko indukcji i indukcyjności

Strumień magnetyczny

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{15.9}$$

$\vec{B} \perp S$, $\vec{B}$ jednorodne

$$\Phi_B = BS \tag{15.9.2}$$

Prawo Faradaya, $\mathcal{E}$ to indukowana SEM

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{15.9.3}$$

Cewka o N zwojach

$$\mathcal{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{15.9.4}$$

Reguła Lenza. Prąd indukowany płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia magnetycznego, która ten prąd indukuje

Prawa Faradaya 2

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{15.9.5}$$

Defincja indukcyjności cewki, gdzie N to liczba zwojów

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \tag{15.9.6}$$

Indukcyjność solenoidu na jednostke długości

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \tag{15.9.7}$$

Indukcyjność solenoidu

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \tag{15.9.8}$$

SEM samoindukcji

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{15.9.9}$$

Obwód RL

$$\mathcal{E} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI \tag{15.9.10}$$

Wzrost natężenia prądu w RL

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \tag{15.9.11}$$

Stała czasowa

$$\tau_L \tag{15.9.12}$$

Zmniejszanie się natężenia prądu gdy nagle zostanie odpięte źródło

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-t/\tau_L} = I_0 e^{-t/\tau_L} \tag{15.9.13}$$

Energia magnetyczna

$$E_B = \frac{1}{2} L I^2 \tag{15.9.14}$$

Gęstość energii matgnetycznej

$$\mu_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{15.9.15}$$

Indukcja wzajemna dwóch cewek gdzie M to indukcjyjność wzajemna

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{15.9.16}$$

$$M_{21} = M_{12} = M \tag{15.9.17}$$

15.10 Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

15.10.1 Drgania obwodu LC

$$E_E = \frac{q^2}{2C} \tag{15.10}$$

$$E_B = \frac{LI^2}{2} \tag{15.10.2}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{15.10.3}$$

$$L \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{C} = 0 \tag{15.10.4}$$

$$q = q_{max} \cos(\omega t + \phi) \tag{15.10.5}$$

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega q_{max} \sin(\omega t + \phi) = -I_{max} \sin(\omega t + \phi) \tag{15.10.6}$$

$$I_{max} = \omega q_{max} \tag{15.10.7}$$

$$E_E = \frac{q_{max}^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi) \tag{15.10.8}$$

$$E_B = \frac{q_{max}^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi) \tag{15.10.9}$$

15.10.2 Drgania tłumione w obwodzie RLC

Częstość kołowa drgań tłumionych

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2} \tag{15.10.10}$$

$$E = E_B + E_E = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \tag{15.10.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -I^2 R \tag{15.10.12}$$

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{c} \tag{15.10.13}$$

$$q = q_{max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi) \tag{15.10.14}$$

$$E_E = \frac{q_{max}^2}{2C} e^{-Rt/L} \cos^2(\omega' t + \phi) \tag{15.10.15}$$

Drgania w szeregowym obwodzie RLC wymuszone przez zewnętrzną $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin(\omega_w t) \tag{15.10.16}$$

Natężenie pradu płynące w takim obwodzie

$$I = I_{max} \sin(\omega_w t - \phi) \tag{15.10.17}$$

15.10.3 Obciążenie czysto oporowe

$$U_{Rmax} = I_{Rmax} R \tag{15.10.18}$$

$$U_R = U_{Rmax} \sin(\omega_w t) = \mathcal{E}_{Rmax} \sin(\omega_w t) \tag{15.10.19}$$

$$I_R = I_{Rmax} \sin(\omega_w t - \psi) \tag{15.10.20}$$

$$\psi = 0 \tag{15.10.21}$$

15.10.4 Obciążenie czysto pojemnościowe

Rektancja pojemnościowa

$$X_C = \frac{1}{\omega_w C} \tag{15.10.22}$$

$$U_C = U_{Cmax} \sin(\omega_w t) \tag{15.10.23}$$

$$I_C = \omega_w C U_{maxC} \cos(\omega_w t) \tag{15.10.24}$$

$$I_C = I_{Cmax} \sin(\omega_w t - \phi) \tag{15.10.25}$$

$$U_{cmax} = I_{Cmax} X_C \tag{15.10.26}$$

$$\phi = -90^\circ = \pi/2\ rad \tag{15.10.27}$$

15.10.5 Obciążenie czysto indukcyjne

Rektancja indukcyjna

$$X_L = \omega_w L \tag{15.10.28}$$

$$U_L = U_{Lmax} \sin(\omega_w t) \tag{15.10.29}$$

$$I_L = -\left(\frac{U_{Lmax}}{\omega_w L}\right) \cos(\omega_w t) \tag{15.10.30}$$

$$I_L = I_{Lmax} \sin(\omega_w t - \phi) \tag{15.10.31}$$

$$U_{Lmax} = I_{Lmax} X_L \tag{15.10.32}$$

$$\phi = 90^\circ = \pi/2\ rad \tag{15.10.33}$$

15.10.6 Podsumowanie trzech obwodów

Natężenie I_R w takiej samej fazie jak napięcie U_R
Natężenie I_C wyprzedza napięcie U_C o 90°
Natężenie I_C opóźnia się względem napięcia U_C o 90°

15.10.7 Obwód szeregowy RLC

Przyłożona SEM

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin(\omega_w t) \tag{15.10.34}$$

$$I = I_{max} \sin(\omega_2 t - \phi) \tag{15.10.35}$$

Impendancja obwodu

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{15.10.36}$$

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{Z} \tag{15.10.37}$$

Faza początkowa, kąt między wskazami

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \tag{15.10.38}$$

Obwód o charakterze indukcyjnym, I_{max} wiruje za wskazem $\mathcal{E}_{max}$

$$X_L > X_C,\ \ \phi > 0 \tag{15.10.39}$$

Obwód o charakterze pojemnościowym, I_{max} wiruje przed wskazem $\mathcal{E}_{max}$

$$X_L < X_C,\ \ \phi < 0 \tag{15.10.40}$$

Obwód w rezonansie, I_{max} wiruje razem ze wskazem $\mathcal{E}_{max}$

$$X_L = X_C,\ \ \phi = 0 \tag{15.10.41}$$

Rezonans w obwodzie RLC, maksymalne I

$$\omega_w = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{15.10.42}$$

15.10.8 Moc w obwodach prądu zmiennego

Moc chwilowa

$$P = I_{max}^2 \sin^2(\omega_w t - \phi) \tag{15.10.43}$$

Moc średnia

$$P_{sr} = \left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right) = I_{sk}^2 R = \mathcal{E}_{sk} U_{sk} \cos\phi \tag{15.10.44}$$

Wartość skuteczna natężenia

$$I_{sk} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \tag{15.10.45}$$

Wartość skuteczna prądu

$$U_{sk} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \tag{15.10.46}$$

Wartość skuteczna SEM

$$\mathcal{E}_{sk} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{\sqrt{2}} \tag{15.10.47}$$

Współczynnik mocy $\rightarrow \cos\phi$

15.10.9 Transformatory

Transformacja napięcia

$$U_w = U_p \frac{N_w}{N_p} \tag{15.10.48}$$

Transformacja prądu

$$I_w = I_p \frac{N_p}{N_w} \tag{15.10.49}$$

15.11 Równania Maxwella: magnetyzm materii

Natężenie prądu przesunięcia

$$I_{prz} = \varepsilon_0 \tag{15.11}$$

15.11.1 Równania Maxwella

Prawo Gaussa dla elektryczności

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{wewn}}{\varepsilon_0} \tag{15.11.2}$$

Prawo Gaussa dla magnetyczności

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{15.11.3}$$

Prawo Faradaya

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{15.11.4}$$

Prawo Ampère'a - uogulnione

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + \mu_0 I_p \tag{15.11.5}$$

15.11.2 Magneztyzm materii

Zależność spinowego momentu pędu (zwanego spinem)$\vec{S}$ oraz spinowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}_s$

$$\vec{\mu}_S = -\frac{e}{m}\vec{S} \tag{15.11.6}$$

Składowa spinu $\vec{S}_x$ może przyjmować tylko dwie wartości, gdzie h to stała plancka

$$\vec{S}_z = m_s \frac{h}{2\pi} \quad m_s = \pm\frac{1}{2} \tag{15.11.7}$$

Z faktu poniżej wynika podobna zależność dla spinowego momentu magnetycznego

$$\mu_{s,z} = \pm\frac{eh}{4\pi m} = \pm\mu_B \tag{15.11.8}$$

Magneton Bohra

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} \tag{15.11.9}$$

Energia elektronu w pol magnetycznym $\vec{B}$

$$E_p = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} \tag{15.11.10}$$

Zależność orbitalnego momentu pędu $\vec{L}_{orb}$ oraz orbitalnego momentu magnetycznego $\vec{\mu}_{orb}$ elektronu w atomie

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{orb} \tag{15.11.11}$$

Orbitalny moment pędu

$$\vec{L}_{orb} = m_l \frac{h}{2\pi} \quad m_l = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm max \tag{15.11.12}$$

Diamagnetyzm.

Diamagnetyki przejawiają własciwości magnetyczne tylko w zewnętrznym polu magnetycznym stają się one wtedy dipolami skierowanymi przeciwnie do pola, znajdujące się w niejednorodnym polu magnetycznym wypychanę są do obszarów słabszego pola

Paramagnetyzm.

Paramagnetyki przejawiają własności magnetyczne w zalęzności od stopnia namagnesowania M, znajdujące się w niejednorodnym polu magnetycznym przyciągane są do obszarów silniejszego pola

$$M = \frac{zmierzony\ moment\ magnetyczny}{V} \tag{15.11.13}$$

Dla małych wartości B_{zew}/T , gdzie T jest temperaturą, a C stałą Curie

$$M = C\frac{B_{zew}}{T} \tag{15.11.14}$$

Ferromagnetyzm.

Ferromagnetyki to materiały o silnych i trwałych własciwościach magnetycznych, znajdujące się w niejednorodnym polu magnetycznym przyciągane są do obszarów silniejszego pola

Ferromagnetyzm znika gdy temperatura przekroczy Temperature Curie

$$T_{C\ Fe} = 1043K \tag{15.11.15}$$

Pierścień Rowlanda

$$B_0 = \mu_0 I_P n \tag{15.11.16}$$

$$B = B_0 + B_M \tag{15.11.17}$$