

# 基于快速建立四面体网格的有限元心脏建模

肖 鹏飞, 黄 芳, 李显良

(中南大学信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 针对目前通过医学成像技术获得心脏序列图像来提取相关心脏结构参数, 判断心脏的功能的三维心脏建模技术的热点问题, 提出了一种基于快速建立四面体网格的有限元心脏建模的方法, 结合心脏这种形变模型的各种约束条件, 模拟心脏的动态形变, 利用有限元与生物力学原理构建心脏表面重建的有限元方程, 由心脏表面三角网格数据点快速构建一系列不相重叠的四面体网格单元, 以满足单元的应力矢量及单元节点位移矢量计算的需要, 为模拟重建心脏运动奠定基础。实验结果表明了有效性和可行性。

关键词: 心脏建模; 有限元方法; 形变模型; 四面体网格

中图分类号: TP391 文献标识码: A

## Heart Modeling of Finite Element Based on Rapid Generation of Tetrahedral Mesh

XIAO Peng-fei HUANG Fang LIXian-liang

(School of Information Science and Engineering Central South University Changsha Hunan 410083 China)

ABSTRACT: Focused on the heart 3D modeling through medical imaging technology to obtain the heart sequence of images for extracting relevant parameters of cardiac structure, a new method based on the rapid generation of tetrahedral mesh for heart modeling of the finite element is presented in this paper. Various restrictive conditions of deformable model are combined to simulate dynamic deformation of the heart. The finite element equation of the heart surface reconstruction is constructed by using biomechanics principle and finite element, and the non-overlap tetrahedral mesh cells are constructed rapidly by triangle mesh data points on heart surface to meet the requirement of calculating cell stress and displacement. The proposed method provides a foundation for reconstructing heart movement, and the experimental results also show its effectiveness and validity.

KEYWORDS: Heart modeling; Finite element method; Deformable model; Tetrahedral mesh

### 1 引言

近年来, 随着计算机技术的飞速发展, 医学图像的三维重构可为提高诊断精确度和进行各种手术方案的模拟提供便利。三维心脏建模是医学图像领域中正在研究的热点课题。通过目前新型医学成像技术所获得的心脏序列图像来提取相关心脏结构参数, 是判断心脏功能的重要依据<sup>[1]</sup>。而心脏的运动是非刚性的, 在周期性搏动中可能会发生形变, 包括位移、旋转、舒张与收缩等, 所以心脏的运动形态是影响其相关参数估计的不可避免的因素<sup>[2]</sup>。本文以从 CT 断层图像中抽取出的心脏表面离散的三维数据点为基础, 利用有限元方法的基本原理, 建立心脏表面力学形变模型, 为模拟心脏的运动奠定基础。

有限元模型在三维建模上的应用日益扩大, 许多研究展示了其优越的性能<sup>[3-4]</sup>。有限元法的基本原理是将连续的求解区域离散为一组有限个且按一定方式相互联结在一起的单元的组合物。由于单元能按不同的联结方式进行组合, 且单元本身又可以有不同形状, 因此可以模块化几何形状复杂的求解域。有限元法的另一个重要特点是利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数, 从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量, 就可以计算出各个单元内场函数的近似值, 从而得到整个求解域上的近似解<sup>[5]</sup>。

在基于有限元法的心脏建模过程中, 需要能够模拟心脏发生的动态形变, 这就需要建立心脏表面立体网格, 即要把三维数据点用网格连接起来, 这样当形变发生的时候, 数据点之间的相互作用就可以确定, 所以选择一种恰当的有限元

基金项目: 湖南省自然科学基金(05JJ40130)

收稿日期: 2007-08-27

网格结构是决定建模性能的关键。显然,平面的三角形网格并不适合用于三维空间结构,而六面体元的剖分处理算法是先作三角剖分,然后再两两合并相邻三角形,形成四边形,最后适当调整顶点位置以便使各个四边形更加匀称,这必然会出现过多的无法合并的三角形,需要采取一些特殊措施来对付,其难度与复杂度太大,同时还需要防止四边形的四个顶点落在同一平面上,使体单元退化为薄片,影响有限元计算的质量<sup>[9]</sup>。因此,既有局部坐标又有总体坐标的三维有限元的空间四面体元正好符合建立心脏表面的3D立体网格,其四面体剖分使得每个单元由四个三角形围成棱锥体,其难度与复杂度相对来说就小很多了,并且防止了单元的退化问题。

由表面三角形网格快速建立四面体网格,结合心脏这种形变模型的各种约束条件,建立心脏表面力学形变模型,以便满足空间四面体应用有限元法求心脏表面所有结点的位置矢量的需求,得到表面上任一点在载荷作用下的新位置,从而得到有限元方法的心脏表面重建模型。

## 2 动态有限元方程的建模

在动态表面重建过程中,使用的模型是一个由弹性物质构成的可形变的闭合表面模型,即这种形变模型可以弯曲、扭曲、压缩、拉伸成任意三维形状,表面重建的过程就是形变模型在载荷作用下朝物体表面变形的过程,当模型达到平衡时,该模型就需要重建的3D物体表面,将其表示为:

$$r(\mu, \nu, t) = (x(\mu, \nu, t), y(\mu, \nu, t), z(\mu, \nu, t)) \quad (1)$$

式(1)中 $(\mu, \nu) \in [0, 1]^2$ 是特征坐标,表示时间。边界条件: $r(0, \nu, t) = r(1, \nu, t), r(\mu, 0, t) = r(\mu, 1, t)$

初始条件 $r(\mu, \nu, 0) = r_0(\mu, \nu)$ 需重建的物体表面形状由下列点决定:

$$\dot{r}(\mu, \nu, t) = (\dot{x}(\mu, \nu, t), \dot{y}(\mu, \nu, t), \dot{z}(\mu, \nu, t)) \quad (2)$$

这里 $\dot{r}(\mu, \nu, t)$ 是物体表面点的3D坐标。由二维图像重建三维物体形状是一逆问题,该问题的解不具有唯一性,而且对噪声或离散化引起的误差极其敏感,为了解决这些问题,需要加上一些约束条件:光滑性、连续性等<sup>[7]</sup>,在本文的3D表面重建中,我们将这些约束转化成心脏形变模型的约束条件,来建立基于心脏3D表面重建的动态有限元方程模型。

### 2.1 基于形变模型的约束条件

心肌被视为是一种非刚性的、会发生形变的弹性体材料,心脏在收缩、舒张时必然会产生体力或表面力,由弹性力学可知,当心脏发生形变时必将产生反抗变形的形变势能 $U$ ,来保持它的表面的光滑性和内在特征,所以,其形变势能可以定义为<sup>[8]</sup>:

$$U(u(x, y), v(x, y)) = \frac{1}{2} \int_D \epsilon^T \sigma \, dx dy - \int_D (w_x u + w_y v) \, dx dy - \int_S (p_x u + p_y v) \, ds \quad (3)$$

式(3)中等号右边第一项为弹性体的应变能,第二项为

体力势能, $w_x, w_y$ 为体力分量,第三项为表面力的势能, $p_x, p_y$ 为表面力分量。用 $c_0$ 表示静力边界。

形变模型的动能为:

$$T = \frac{1}{2} \int_D \rho \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (4)$$

这里 $\rho$ 表示位于点 $(\mu, \nu)$ 处的质量密度。

### 2.2 心脏表面有限元模型的建立

将心脏的表面看成整个求解域,并对其进行剖分,剖分成有限个单元,在单元内定义函数,并且建立泛函表达式,即弹性体在表面力的作用下的势能表达式,用 $I^e$ 表示单元内的泛函,可得单元子域的泛函表达式:

$$I^e = \frac{1}{2} \delta^e T K^e \delta^e - \delta^e T F_{we} - \delta^e T F_p^e \\ = \frac{1}{2} \delta^e T K^e \delta^e - \delta^e T F^e \quad (5)$$

式(5)中, $K^e = \int_{e} B^T DB \, dx dy$ 为单元刚度矩阵; $F_{we} = \int_{e} B^T w \, dx dy$ 表示等效节点载荷;

$$F_p^e = \int_{e} N^T p \, ds \text{表示表面力等效节点载荷; } F^e = F_w^e + F_p^e$$

表示单元节点载荷列阵, $\delta^e$ 表示节点位移列阵。把各单元势函数进行叠加,就得到弹性体的总势能,于是总势能为<sup>[8]</sup>:

$$I = \frac{1}{2} \delta^T K \delta - \delta^T F \quad (6)$$

式(6)中 $K = \sum_{e=1}^n K^e$ 为弹性体总体刚度, $F = \sum_{e=1}^n F^e$ 为弹性体总载荷列阵, $\delta$ 为弹性体总的节点位移列阵。

### 2.3 基于3D表面重建的动态有限元方程

心脏的表面显然是运动的,力与位移都是时间的函数,且除了弹性向量外还增加惯性向量与阻尼向量,惯性向量与节点加速度有关,而阻尼向量与节点速度有关,用来消耗模型的运动能量使其最终达到静止状态。弹性力向量可用节点位移 $\{\delta\}$ 和刚度矩阵 $[K]$ 的乘积表示: $\{F\} = [K] \{\delta\}$ ;弹性力向量可用节点加速度 $\{\ddot{\delta}\}$ 和质点矩阵 $[M]$ 的乘积表示: $\{F\} = [M] \{\ddot{\delta}\}$ ;阻尼向量可用阻尼矩阵 $[C]$  $= \int \int \int N^T \eta [N] \, dv$ (其中 $\eta$ 为阻尼系数)和节点速度 $\{\dot{\delta}\}$ 的乘积表示: $\{F_d\} = [C] \{\dot{\delta}\}$ ,从而运动方程为<sup>[7]</sup>:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{F\} \quad (7)$$

式(7)中质量矩阵 $[M] = \int \int \int N^T \rho [N] \, dv$ , $\rho$ 为质量密度, $[N]$ 为形态函数矩阵。式中位移向量 $\{\delta\}$ 是时间的函数,速度向量 $\{\dot{\delta}\}$ 和加速度向量 $\{\ddot{\delta}\}$ 分别是位移向量对时间的一阶和二阶导数,载荷向量 $\{F\}$ 为时间的已知函数<sup>[8][9]</sup>。求解方程组(7)就可得到整个结构的所有节点的位置矢量,由形态函数可得到表面上任一点的位置。

## 3 常应变四面体网格的生成

### 3.1 有限元方法的四面体元的应用原理

线性四面体元是既有局部坐标又有总体坐标的三维有限元, 常被称为常应变四面体元。每个四面体称为一个单元, 每个单元有 4 个节点且每个节点有 3 个自由度。单元刚度矩阵:

$$[k] = [B]^T [D] [B] \quad (8)$$

式(8)中是  $V$  单元体积, 矩阵  $[B]$  由形态函数  $N_1, N_2, N_3, N_4$  分别对  $x, y$  的一阶导数组成的矩阵, 矩阵  $[D]$  是关于弹性模量与泊松比形成的矩阵, 很显然四面体元有 12 个自由度, 每个节点有三个自由度。因此, 对一个有  $n$  个节点的结构而言, 其整体刚度矩阵  $K$  是  $3n \times 3n$  的。可用高斯消去法和分解法求解方程组:  $[K] \{U\} = \{F\}$ ,  $U$  是结构节点位移矢量,  $F$  是结构节点载荷矢量。一旦求得未知的位移与支反力, 就可以用式(9)求得每个单元的应力矢量<sup>[10]</sup>:

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{u\} \quad (9)$$

式(9)中,  $\sigma$  是  $6 \times 1$  的单元应力矢量,  $u$  是  $12 \times 1$  的单元节点位移矢量, 每个单元的  $\sigma$  形式为  $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$ 。这些参数的选择将根据要解决的实际问题进行调整。其应用有限元法求节点位移矢量和单元应力的算法伪码如下:

```
Begin
    Initialize E, NU, Element, Node;
    Compute the length of the Element's cols and the length
    of the Node's cols;
    for t = 1 to the element_length
        Compute the coordinates of four vertexes for every tetra-
        hedral cell;
        Compute the temp k for the four vertexes;
        Integration all temp k for collectivity K;
    end- for- t;
    Load boundary condition and matrix to solve the linear e-
    quation;
    for i = 1 to element_length
        Calculate the element stress vector;
    end- for- i;
    Compute the new tetrahedral mesh vector;
    Terminate if tetrahedral mesh meets problem require-
    ments;
End
```

算法首先初始化心脏表面的弹性模量  $E$ 、泊松比  $\nu$  (NU)、节点、元素以及每个单元上的收缩、舒张的等效载荷, 其具体取值可参见人体血流动力学参数正常值<sup>[11]</sup>; 建立有限元单元和节点模型, 导入所有单元和节点, 初始化刚度矩阵为零。第二, 计算每个单元的刚度矩阵  $k$  再集成到总体刚度矩阵。第三, 导入边界条件矩阵, 求解线性方程组, 得到节点位移矢量与节点力矢量。最后, 由节点位移矢量, 计算得到单元应力矢量与每个单元在三个方向上的主应力。

### 3.2 快速四面体网格的生成算法设计

在三维模型重构时, Delaunay四面体化算法是经常用到的算法, Delaunay四面体化是 Delaunay三角化在三维情况下的扩展应用, Delaunay三角化在二维情况下得到了成功的应用, 其生成的三角形符合“最小角最大化”原则, 适合有限元计算, 但没有进行过改进的 Delaunay四面体化算法效率并不高, 且占内存大, 尤其是对面片进行的操作较多, 对边界的恢复比较困难, 很可能造成网格生成的失败, 更重要的是在进行心脏三维表面重建的过程中, Delaunay四面体元并不适合所需要的表面单元的有限元计算, 因此没有进行过改进的 Delaunay四面体化算法并不适合上述的有限元算法的计算<sup>[12-13]</sup>。

#### 3.2.1 快速四面体网格生成算法思路

利用已经生成的心脏表面三角网格数据, 快速构建一系列不相重叠的四面体单元, 其算法思想如下: 采用动态更新的三角面的链表控制整个建网的过程, 先把已找到的第一个四面体的四个三角面存储在链表中, 然后以它的各个面逐步建立四面体网格, 并存储在四面体网格链表中, 最后要保证没有空洞、没有重复的四面体网格的形成。整个建四面体单元网格共分为如下几步:

第一步, 利用前期处理过的三角网格化后的各顶点坐标, 以及形成每个三角网格的每三个顶点关系, 存储在三角网格的链表中并建立相应的链表关系。

第二步, 按形成的三角形网格单元进行排序, 选定起始三角形网格单元, 找出与它共边的其它三角形, 选择两个共线的三角形, 把非共线的两个顶点进行连结, 构成一个新的四面体网格单元, 并作为起始四面体网格单元存储进四面体网格的链表中。

第三步, 再选择与起始三角形网格单元相邻的三角形网格重新作为新的起始三角形网格单元, 找到相邻的各三角形网格单元, 重复第二步, 但要注意已经使用过的三角形网格单元不能再作为新的四面体网格单元的面了, 以去除重复生成的四面体网格单元, 这样再把找到的新的四面体单元, 存储进四面体单元链表中。

第四步, 为了使生成的四面体网格满足有限元法的计算, 必需调整有些生成的四面体网格的四个顶点顺序关系, 以使其符合右手法则, 且其  $V$  (体积) 不为负值, 必须对哪些四面体网格的四个顶点位置顺序进行调整, 以适应有限元法的计算。

第五步, 重复以上第三、四步, 直至找完所有三角网格单元, 最终使生成的所有四面体网格单元能够满足上述有限元方法的计算。

#### 3.2.2 四面体网格生成算法的实现

四面体单元网格算法的实现描述如下: 首先初始化选择的第一个三角形网格单元与其它所有三角形网格各顶点坐标及所有三角形网格单元, 再从第一个三角形网格单元开始初始化邻近的并且与其共边的三角形网格作为第一个四面体网格单元, 然后, 搜索其它相邻三角形网格单元, 找到与它们

共边的其它三角形网格单元,判断其是否已经作为过四面体网格单元的一个三角面,目的是保证其不会有重复的四面体网格单元的生成,最后,依次调整好四面体网格单元的各节点的位置顺序关系以满足四面体网格单元有限元法的应用,其四面体网格单元的生成算法伪码如下:

Begin

Initialize every triangle mesh vertex coordinates and triangle mesh cell

Select the first triangle face as the start triangle face

Found the neighboring triangle formaking the first tetrahedra

for  $t = 1$  to the length of triangle matrix s row

for  $i = t + 1$  to the length of next triangle matrix s row

if the triangle is used

Select the other neighboring triangle for tetrahedra

Delete the triangle in chain list

else if

Receive the triangle formaking the new tetrahedral chain mesh

end\_ if

end\_ for\_ ;i

for  $i = 1$  to the length of the new tetrahedral mesh rows

if the volume of new tetrahedral mesh is satisfy the righthand theorem

the new tetrahedral mesh is the wanted

else realign the four vertical sequence to make up the tetrahedral mesh

end\_ if

end\_ for\_ ;i

Terminate if the tetrahedral mesh meets problem requirements

end\_ for\_ ;t

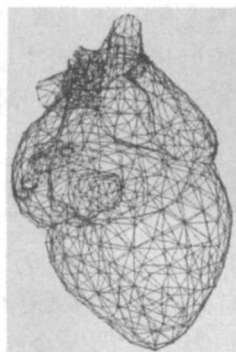
end

该四面体网格生成算法的目的是用较少的四面体个数来提高计算的速度,从而节省了大量处理时间,这样既提高了效率,又为后继的应用有限元法求心脏表面所有节点的新位置矢量与在时间上有效的重建心脏运动带来了很大的方便。

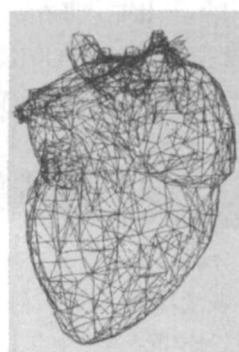
## 4 实验结果

在实验中,首先利用心脏表面三维数据点,采用三维三角网格单元方法重构心脏的表面模型,共计 961 个顶点,1712 个三角面,其生成的模型如图 1(a)所示。然后采用快速构建不相重叠的四面体网格单元算法,共生成了 801 个新的四面体单元,其生成的模型如图 1(b)所示。

快速四面体网格单元生成算法的实现是在结合 MATLAB 5 与 3DConvert 平台,采用 ply 文件格式共同实现的。



(a) 三角网格图形(1712个)



(b) 四面体单元(801个)

图 1 心脏的三维表面网格模型

在此基础上,就可以采用四面体网格,实现有限元常应变四面体网格单元的三维应力求解,从而得到整个心脏表面结构的所有节点的新位置矢量。结合心脏表面在每个单元上的缩张等效载荷与弹性力的共同作用下,向里收缩,向外膨胀时产生的形变势能 $J$ 及形变模型的动态有限元方程内、外部约束条件来得到整个结构的所有节点的位置矢量,再由形态函数可得到表面上任一点的新位置矢量,从而来构造心脏缩张后的表面三维重建的模型。

## 5 结论

本方提出一种基于快速四面体网格单元生成的有限元心脏建模方法,建立了 3D 表面重建的动态有限元方程,快速构建了一系列不相重叠的四面体单元,为有效实现四面体网格单元求三维应力及得到所有节点的新位置矢量的计算提供了方便。该方法具有快速简单、易于实现的特点,这种方法同样也可以生成其它形变物体表面的四面体网格单元。将来的工作是实现心脏表面上所有节点在载荷下的新位置矢量的计算,以及在新位置矢量下重建心脏表面形状,为今后在时间上有效的重建心脏的运动奠定基础。

## 参考文献:

- [1] Alejandro F Frangi, Wijn J Niessen, and Max A Viergever. Three—Dimensional Modeling for Functional Analysis of Cardiac Images: A Review [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, January 2001, 20(1): 2—25.
- [2] 王元全,等.带标记的心脏核磁共振图象分析综述[J].中国图象图形学报,2003,8(11): 1233—1241.
- [3] A Young, L Axel. Three—dimensional motion and deformation in the heart wall: Estimation from spatial modulation of magnetization—A model based approach [J]. Radiology, 1992, 185: 241—247.
- [4] M T Cîrîmăuș, D Terzopoulos. A Dynamic finite element surface model for segmentation and tracking in multidimensional medical images with application to cardiac 4D images analysis [J]. Computerized Medical Imaging and Graphics, 1995, 19(1): 69—83.

(下转第 230 页)

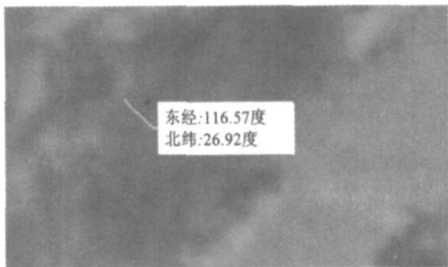


图 6 查询地理坐标信息

示, 不论顶点的计算还是绘制效率都比较高, 基本满足了实时建模和渲染的要求。

表 1 测试结果

模型数量	顶点计算时间 (us)	绘制时间 (us)
14	159	104

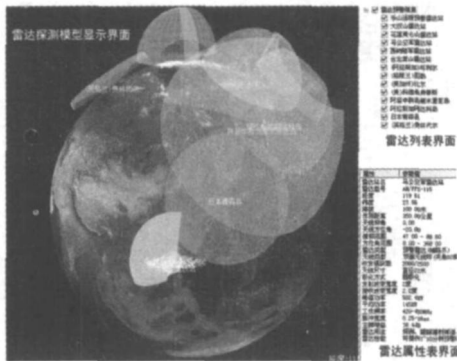


图 7 系统运行主要界面

系统运行主要界面如图 7 所示, 由此可见系统实现的雷达阵地的可视化效果逼真, 不仅可以快速定位敌方雷达的具体地理位置, 对单个雷达的可探测范围与盲区范围表现也非常直观, 而且可以查询各个雷达的详细参数, 对基础的地理信息也提供了一定的查询功能。特别是系统的全球地理信息显示平台可同时加载高清的卫星影像和高精度的地形数据, 具有其他三维平台无可比拟的优越性。系统扩展性能良好, 各种地形和影响数据的加载都非常容易, 对于新的雷达也可以很方便建模入库。

#### 参考文献:

- [1] David K Barton. 今日雷达 [J]. 空载雷达, 2005 25(3): 7—11
- [2] Alan Watt 著, 包宏译. 3D 计算机图形学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2005
- [3] 姚继权, 等. 计算机图形学人机交互中三维拾取方法的研究 [J]. 工程设计学报, 2006 13(3): 116—120
- [4] 韩振东, 等. 基于 Direct3D 多分辨率地形建模方法的研究 [J]. 测绘科学, 2006 31(6): 143—145
- [5] 郭齐胜, 等. 战场环境仿真 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005

#### [ 作者简介 ]



陈 弓 (1981—) 男 (汉族), 湖北黄冈人, 硕士研究生, 主要研究方向为环境工程、战场环境仿真;  
戴晨光 (1975—) 男 (汉族), 江苏丹徒人, 副教授, 主要研究方向为数字摄影测量和虚拟现实及其应用;

刘航冶 (1981—) 男 (汉族), 四川成都人, 硕士研究生, 主要研究方向为环境工程、战场环境仿真。

(上接第 226 页)

- [5] 王勰成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1996
- [6] 唐荣锡, 谭建荣, 齐东旭. 现代图形技术 [M]. 山东: 山东科学技术出版社, 2001—5
- [7] 夏利民, 谷士文, 沈新权. 基于形变模型的 3D 表面自适应重建 [J]. 中国图象图形学报, 2000—5 (5): 396~400
- [8] 荣先成, 王洪军. 有限元法 [M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2007—2
- [9] 谢贻权, 何福保. 弹性和塑性力学中的有限单元法 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1989
- [10] (德) P I Kattan 著, 韩来彬译. MATLAB 有限元分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004—4
- [11] 何素荣, 刘世斌. 临床脉图诊断学 [M]. 北京: 人民军医出版社, 2004—4

- [12] D F Watson. Computing the n—Dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes [J]. The Computer Journal 1981, 24(2): 167—172
- [13] 赵建军, 王启付. 边界一致的 Delaunay 四面体网格稳定生成算法 [J]. 机械工程学报, 2004 40(6): 100—106



#### [ 作者简介 ]

肖鹏飞 (1978—) 男 (汉族), 湖南隆回人, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机图象处理, 计算机视觉, 虚拟现实技术;

黄 芳 (1963—) 女 (汉族), 湖南长沙市人, 博士研究生, 副教授, 主要研究方向为虚拟现实技术, 计算机图形学, 演化计算;

李显良 (1980—) 男 (汉族), 湖南益阳人, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机图象处理, 虚拟现实技术。