第 1 章　薄板问题

1.1　薄板控制方程

考虑厚度为 h 的薄板，根据 kirchhoff 薄板假设将薄板 x,y,z 方向上的总位移定义为 $\breve{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$：此时，位移 $\breve{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ 可以表示为：

$$\begin{cases}\breve{u}_\alpha(\boldsymbol{x}) = u_\alpha(x_1,x_2) - x_3 w_{,\alpha} \quad \alpha = 1,2 \\ \breve{u}_3(\boldsymbol{x}) = w(x_1,x_2)\end{cases} \tag{1.1}$$

式中 u_α 表示薄板中面处 x,y 方向上的位移，w 表示挠度。

考虑经典的线弹性本构关系：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla\breve{\boldsymbol{u}} + \breve{\boldsymbol{u}}\nabla)\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力，$\boldsymbol{C}$ 为四阶弹性张量，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变，∇ 为梯度算子，“ $:$ ” 为双点积张量缩并运算符号。

根据式 (1.2) 得出有关 kirchhoff 薄板假设的应变关系式如下：

$$\begin{cases}\breve{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\breve{u}_{\alpha,\beta} + \breve{u}_{\beta,\alpha}) = \varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}x_3 \quad \alpha,\beta = 1,2 \\ \breve{\varepsilon}_{3i} = \breve{\varepsilon}_{i3} = 0 \quad i = 1,2,3\end{cases} \tag{1.3}$$

其中：

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \tag{1.4}$$

式中，$\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ 为曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的分量

通过式 (1.2)、(1.3) 得出有关 kirchhoff 薄板假设的应力关系式如下：

$$\breve{\sigma}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}\breve{\varepsilon}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}(\varepsilon_{\gamma\eta+x_3\kappa_{\gamma\eta}}) \tag{1.5}$$

根据最小势能原理得出的势能泛函关系为：

$$\Pi(\breve{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}\int_{\breve{\Omega}} \breve{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{C} : \breve{\boldsymbol{\varepsilon}} d\breve{\Omega} - \int_{\breve{\Omega}} \breve{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{b} d\breve{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \breve{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{t} d\Gamma \tag{1.6}$$

将式 (1.5)、(1.3) 代入式 (1.6) 中的第一项可以得到：

$$\begin{aligned}&\int_{\breve{\Omega}} \frac{1}{2}\breve{\varepsilon}_{\alpha\beta}\breve{\sigma}_{\alpha\beta} d\Omega = \int_\Omega \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}x_3)C_{\alpha\beta\gamma\eta}(\varepsilon_{\gamma\eta} + x_3\kappa_{\gamma\eta})dx_3 d\Omega \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta\gamma\eta}\varepsilon_{\gamma\eta} d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}\frac{h^3}{12}C_{\alpha\beta\gamma\eta}\kappa_{\gamma\eta} d\Omega \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} d\Omega\end{aligned} \tag{1.7}$$

根据式 (1.7) 可以划分为两个独立的问题。即具有变量 $\breve{u}_\alpha$ 的传统弹性力学问题和具有变量 w 的薄板问题，能量泛函关系式 (1.6) 拆分为：

$$\Pi(\breve{\boldsymbol{u}}) = \Pi^E(\breve{\boldsymbol{u}}) + \Pi^P(\breve{\boldsymbol{u}}) \tag{1.8}$$

1.2 弹性力学问题伽辽金弱形式

传统弹性力学问题的势能泛函的表达式为：

$$\Pi^E(\breve{\boldsymbol{u}}) = \int_{\breve{\Omega}} \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} d\breve{\Omega} - \int_{\breve{\Omega}} \breve{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{b} d\breve{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \breve{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{t} d\Gamma \tag{1.9}$$

这里采用拉格朗日乘子法在伽辽金无网格法施加强制边界条件，即在弹性力学问题的势能泛函 (1.9) 中引入位移强制边界条件对应的约束项，相应的势能泛函为：

$$\bar{\Pi}^E(\breve{\boldsymbol{u}}, \lambda) = \Pi^E(\breve{\boldsymbol{u}}) - \int_{\Gamma^g} \lambda(\breve{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{g}) d\Gamma \tag{1.10}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_{sd}}\}^T$ 为拉格朗日乘子，$\Pi^E(\breve{\boldsymbol{u}})$ 是式 (1.9) 定义的泛函。式 (1.10) 所表示的泛函的驻值条件为：

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\Pi}^E(\breve{\boldsymbol{u}}, \lambda) &= \delta\Pi^E(\breve{\boldsymbol{u}}) - \int_{\Gamma^u} \delta\breve{\boldsymbol{u}}\, \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta\lambda\, (\breve{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{g}) \\
&= \int_{\breve{\Omega}} \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} d\breve{\Omega} - \int_{\breve{\Omega}} \breve{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{b} d\breve{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \breve{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{t} d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma^g} \delta\breve{\boldsymbol{u}}\lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta\lambda\, (\breve{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{g}) d\Gamma \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.11}$$