学校代码： 10385　　　　　　　　　　分类号：＿＿＿＿＿＿

研究生学号：＿＿＿＿＿＿　　　　　　　密　集：＿＿＿＿＿＿

华侨大学
HUAQIAO UNIVERSITY

硕士专业学位论文

论文中文题目

English Thesis Title

作者姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

指导教师：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

合作教师：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

专业学位类别：＿＿＿＿＿＿＿＿

专业学位领域：＿＿＿＿＿＿＿＿

研究方向：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

所在学院：　土木工程学院

论文提交日期：二〇二三年五月二十八日

学 位 论 文 答 辩 委 员 会 决 议

根据《中华人民共和国学位条例》、《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》、《华侨大学学位授予工作细则》及《华侨大学研究生学位论文质量监控与评阅答辩的管理规定》的规定，学位论文答辩委员会经充分交换意见，对论文做出评价，并以无记名投票方式进行表决，同意该同学通过硕士学位论文答辩，同意授予硕士学位。

答辩委员会 (主席签字)：________________________

答辩时间：_________ 年____ 月____ 日

学位论文独创性声明

本人声明兹呈交的学位论文是本人在导师指导下完成的研究成果。论文写作中不包含其他人已经发表或撰写过的研究内容，如参考他人或集体的科研成果，均在论文中以明确的方式说明。本人依法享有和承担由此论文所产生的权利和责任。

论文作者签名：________________ 签名日期：____________

学位论文版权使用授权声明

本人同意授权华侨大学有权保留并向国家机关或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许学位论文被查阅和借阅。本人授权华侨大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

论文作者签名：____________ 指导老师签名：____________

签 名 日 期：____________ 签 名 日 期：____________

目　录

第 1 章　薄板问题

1.1　薄板控制方程

考虑厚度为 h 的薄板，根据 kirchhoff 薄板假设将薄板 x, y, z 方向上的总位移定义为 $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$：此时，位移 $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ 可以表示为：

$$\begin{cases} \hat{u}_\alpha(\boldsymbol{x}) = u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 w_{,\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \\ \hat{u}_3(\boldsymbol{x}) = w(x_1, x_2) \end{cases} \tag{1.1}$$

式中 u_α 表示薄板中面处 x, y 方向上的位移，w 表示挠度。

考虑经典的线弹性本构关系：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla\hat{\boldsymbol{u}} + \hat{\boldsymbol{u}}\nabla) \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力，$\boldsymbol{C}$ 为四阶弹性张量，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变，∇ 为梯度算子，“$\boldsymbol{:}$” 为双点积张量缩并运算符号。

根据式 (1.2) 得出有关 kirchhoff 薄板假设的应变关系式如下：

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{\alpha,\beta} + \hat{u}_{\beta,\alpha}) = \varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} x_3 \quad \alpha, \beta = 1, 2 \\ \hat{\varepsilon}_{3i} = \hat{\varepsilon}_{i3} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{1.3}$$

其中：

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \tag{1.4}$$

式中，$\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ 为曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的分量

通过式 (1.2)、(1.3) 得出有关 kirchhoff 薄板假设的应力关系式如下：

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}(\varepsilon_{\gamma\eta + x_3\kappa_{\gamma\eta}}) \tag{1.5}$$

根据最小势能原理得出的势能泛函关系为：

$$\Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}\int_{\hat{\Omega}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{C} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} \hat{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{b} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \hat{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{t} d\Gamma \tag{1.6}$$

将式 (1.5)、(1.3) 代入式 (1.6) 中的第一项可以得到：

$$\begin{aligned} &\int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\Omega = \int_{\Omega}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}x_3) C_{\alpha\beta\gamma\eta}(\varepsilon_{\gamma\eta} + x_3\kappa_{\gamma\eta}) dx_3 d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta}\varepsilon_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}\frac{h^3}{12} C_{\alpha\beta\gamma\eta}\kappa_{\gamma\eta} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega \end{aligned} \tag{1.7}$$

根据式 (1.7) 可以划分为两个独立的问题。即具有变量 $\hat{u}_\alpha$ 的传统弹性力学问题和具有变量 w 的薄板问题，能量泛函关系式 (1.6) 拆分为：

$$\Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \Pi^E(\hat{\boldsymbol{u}}) + \Pi^P(\hat{\boldsymbol{u}}) \tag{1.8}$$

1.2 弹性力学问题伽辽金弱形式

传统弹性力学问题的势能泛函的表达式为：

$$\Pi^E(\hat{\boldsymbol{u}}) = \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} \hat{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{b} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \hat{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{t} d\Gamma \tag{1.9}$$

这里采用拉格朗日乘子法在伽辽金无网格法施加强制边界条件，即在弹性力学问题的势能泛函 (1.9) 中引入位移强制边界条件对应的约束项，相应的势能泛函为：

$$\bar{\Pi}^E(\hat{\boldsymbol{u}}, \lambda) = \Pi^E(\hat{\boldsymbol{u}}) - \int_{\Gamma^g} \lambda(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{g}) d\Gamma \tag{1.10}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_{sd}}\}^T$ 为拉格朗日乘子，$\Pi^E(\hat{\boldsymbol{u}})$ 是式 (1.9) 定义的泛函。式 (1.10) 所表示的泛函的驻值条件为：

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\Pi}^E(\hat{\boldsymbol{u}}, \lambda) &= \delta\Pi^E(\hat{\boldsymbol{u}}) - \int_{\Gamma^u} \delta\hat{\boldsymbol{u}}\, \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta\lambda\, (\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{g}) \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} \hat{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{b} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \hat{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{t} d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma^g} \delta\hat{\boldsymbol{u}}\lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta\lambda\, (\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{g}) d\Gamma \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.11}$$