

学校代码: 10385

分类号: _____

研究生学号: _____

密 集: _____



华侨大学
HUAQIAO UNIVERSITY

硕士专业学位论文

论文学中文题目

English Thesis Title

作者姓名: _____

指导教师: _____

合作教师: _____

专业学位类别: _____

专业学位领域: _____

研究方向: _____

所在学院: 土木工程学院

论文提交日期: 二〇二三年五月二十八日

学 位 论 文 答 辩 委 员 会 决 议

根据《中华人民共和国学位条例》、《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》、《华侨大学学位授予工作细则》及《华侨大学研究生学位论文质量监控与评阅答辩的管理规定》的规定，学位论文答辩委员会经充分交换意见，对论文做出评价，并以无记名投票方式进行表决，同意该同学通过硕士学位论文答辩，同意授予硕士学位。

答辩委员会(主席签字): _____

答辩时间: _____ 年 ____ 月 ____ 日

学位论文独创性声明

本人声明兹呈交的学位论文是本人在导师指导下完成的研究成果。论文写作中不包含其他人已经发表或撰写过的研究内容，如参考他人或集体的科研成果，均在论文中以明确的方式说明。本人依法享有和承担由此论文所产生的权利和责任。

论文作者签名: _____ 签名日期: _____

学位论文版权使用授权声明

本人同意授权华侨大学有权保留并向国家机关或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许学位论文被查阅和借阅。本人授权华侨大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

论文作者签名: _____ 指导老师签名: _____
签名日期: _____ 签名日期: _____

目 录

第 1 章 薄板问题	3
1.1 薄板控制方程	3
1.2 弹性力学问题伽辽金弱形式	4
1.3 薄板问题伽辽金弱形式	4
第 2 章 伽辽金无网格法	7
第 3 章 弹性力学问题 HR 弱形式	9
3.1 Hellinger-Reissner 变分原理	9
3.2 位移离散和应力离散	10
3.2.1 位移离散与再生核近似	10
3.2.2 应力离散与再生光滑梯度近似	12
3.3 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法	14
3.4 数值算例	18
3.4.1 分片实验	18
3.4.2 悬臂梁问题	19
3.4.3 带孔无限大平板问题	24

第1章 薄板问题

1.1 薄板控制方程

考虑厚度为 h 的薄板，根据 Kirchhoff 薄板假设将薄板 x, y, z 方向上的总位移定义为 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ ：此时，位移 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ 可以表示为：

$$\begin{cases} \hat{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 w_{,\alpha} & \alpha = 1, 2 \\ \hat{u}_3(\mathbf{x}) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.1)$$

式中 u_α 表示薄板中面处 x, y 方向上的位移， w 表示挠度。

根据小变形假设关系式：

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{\alpha,\beta} + \hat{u}_{\beta,\alpha}) \quad (1.2)$$

其中， ε 为应变。

根据式 (1.2) 得出有关 Kirchhoff 薄板假设的应变关系式如下：

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{\alpha,\beta} + \hat{u}_{\beta,\alpha}) = \varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} x_3 & \alpha, \beta = 1, 2 \\ \hat{\varepsilon}_{3i} = \hat{\varepsilon}_{i3} = 0 & i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.3)$$

其中：

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \quad (1.4)$$

式中， $\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ 为曲率张量 κ 的分量

考虑经典的线弹性本构关系：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \hat{\sigma}_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\eta} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta} (\varepsilon_{\gamma\eta} + x_3 \kappa_{\gamma\eta}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中 $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ 为应力， $C_{\alpha\beta\gamma\eta}$ 为四阶弹性张量

根据最小势能原理得出的势能泛函关系为：

$$\Pi(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \hat{\varepsilon}_{\gamma\eta} d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (1.6)$$

将式 (1.5)、(3.2) 代入式 (1.6) 中的第一项可以得到：

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\Omega &= \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} x_3) C_{\alpha\beta\gamma\eta} (\varepsilon_{\gamma\eta} + x_3 \kappa_{\gamma\eta}) dx_3 d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} h \varepsilon_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \varepsilon_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta} \frac{h^3}{12} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \kappa_{\gamma\eta} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} h \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega \end{aligned} \quad (1.7)$$

根据式 (1.7) 可以划分为两个独立的问题。即具有变量 \hat{u}_α 的传统弹性力学问题和具有变量 w 的薄板问题，能量泛函关系式 (1.6) 拆分为：

$$\Pi(\hat{\mathbf{u}}) = \Pi_E(\hat{\mathbf{u}}) + \Pi_P(M_{\alpha\beta}, w) \quad (1.8)$$

1.2 弹性力学问题伽辽金弱形式

传统弹性力学问题的势能泛函的表达式为:

$$\Pi_E(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (1.9)$$

这里采用拉格朗日乘子法在伽辽金无网格法施加强制边界条件, 即在弹性力学问题的势能泛函(1.9)中引入位移强制边界条件对应的约束项, 相应的势能泛函为:

$$\bar{\Pi}_E(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi^E(\hat{\mathbf{u}}) - \int_{\Gamma^g} \boldsymbol{\lambda} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{g}) d\Gamma \quad (1.10)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_{sd}}\}^T$ 为拉格朗日乘子, $\Pi^E(\hat{\mathbf{u}})$ 是式(1.9)定义的泛函。式(1.10)所表示的泛函的驻值条件为:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi}^E(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}) &= \delta \Pi^E(\hat{\mathbf{u}}) - \int_{\Gamma^u} \delta \hat{\mathbf{u}} \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta \lambda (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{g}) \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\hat{\Omega} - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma^g} \delta \hat{\mathbf{u}} \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta \lambda (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{g}) d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.3 薄板问题伽辽金弱形式

薄板问题控制方程:

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q} = 0 & \text{in } \Omega \\ w = \bar{w} & \text{on } \Gamma^w \\ w_{,\mathbf{n}} = \bar{\theta}_{\mathbf{n}} & \text{on } \Gamma^\theta \\ M_{\mathbf{n}\mathbf{n}} = \bar{M}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} & \text{on } \Gamma^M \\ Q_{\mathbf{n}} + M_{\mathbf{n}\mathbf{s},\mathbf{s}} = \bar{V}_{\mathbf{n}} & \text{on } \Gamma^V \\ w_i = \bar{w}_i & i = 1, 2, 3 \dots \\ P_j = \bar{P}_j & j = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} w_{,\mathbf{n}} &= w_{,\alpha} n_\alpha \\ M_{\mathbf{n}\mathbf{n}} &= M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \\ Q_{\mathbf{n}} &= M_{\alpha\beta,\beta} n_\alpha \\ M_{\mathbf{n}\mathbf{s},\mathbf{s}} &= M_{\alpha\beta,\beta} n_\alpha \\ M_{\mathbf{n}\mathbf{s},\mathbf{s}} &= M_{\alpha\beta,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma \\ P_j &= M_{\alpha\beta} (s_\alpha^1 n_\beta^1 - s_\alpha^2 n_\beta^2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

薄板问题的势能泛函关系式:

$$\Pi_P(M_{\alpha\beta}, w) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} w q d\Omega - \int_{\Gamma_w} \bar{V}_{\mathbf{n}} w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \bar{M}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} \theta_{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (1.14)$$

引入拉格朗日乘子:

$$\begin{aligned}\Pi_P(M_{\alpha\beta}, w, \lambda) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} w q d\Omega + \int_{\Gamma_w} \lambda^w (w - \bar{w}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_\theta} \lambda^\theta (\theta_n - \bar{\theta}_n) d\Gamma - \int_{\Gamma_w} \bar{V}_n w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \bar{M}_{nn} \theta_n d\Gamma\end{aligned}\quad (1.15)$$

弱形式:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \delta M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} \delta w q d\Omega + \int_{\Gamma_w} \delta \lambda^w (w - \bar{w}) d\Gamma + \int_{\Gamma_w} \lambda^w \delta w d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_\theta} \delta \lambda^\theta (\theta_n - \bar{\theta}_n) d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \lambda^\theta \delta \theta_n d\Gamma - \int_{\Gamma_w} \delta \bar{V}_n w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \delta \bar{M}_{nn} \theta_n d\Gamma \\ = 0\end{aligned}\quad (1.16)$$

第 2 章 伽辽金无网格法

第3章 弹性力学问题 HR 弱形式

3.1 Hellinger-Reissner 变分原理

不失为一般性，在求解域 Ω 内考虑如下弹性力学控制方程：

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij}n_j = t_i & \text{on } \Gamma^t \\ u_i = g_i & \text{on } \Gamma^g \end{cases} \quad (3.1)$$

其中， u_i 和 σ_{ij} 为位移和应力分量， b_i 为求解域 Ω 上的体力分量。 Γ^g 和 Γ^t 分别为本质边界条件和自然边界条件，并且 $\Gamma^g \cup \Gamma^t = \partial\Omega$ ， $\Gamma^t \cap \Gamma^g = \emptyset$ ， $\partial\Omega$ 为求解域 Ω 的边界。 t_i 和 g_i 分别为两类边界上已知的外力和位移分量， n_i 表示为所在边界的外法向量分量。

对于式(3.1)定义的弹性力学问题，存在以下余能泛函：

$$\Pi_c = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{B}(\sigma_{ij})$ 为应变余能，其与应力和应变之间的关系式为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} &= \varepsilon_{ij} \\ &= C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \end{aligned} \quad (3.3)$$

式中 C_{ijkl} 为四阶弹性张量

此时用特定的拉格朗日乘子 λ_i 和 η_i ，建立新的变分泛函

$$\begin{aligned} \Pi_c^* &= \int_{\Omega} \mathbf{B}(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \lambda_i (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega + \int_{\Gamma^t} \eta_i (\sigma_{ij} n_j - t_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.4)$$

将式(3.4)进行一阶变分，同时把 σ_{ij} 和 λ_i, η_i 看作为独立变量，可以得到：

$$\begin{aligned} \delta\Pi_c^* &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} + \delta\lambda_i (\sigma_{ij,j} + b_i) + \lambda_i \delta\sigma_{ij,j} \right) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma + \int_{\Gamma^t} \delta\eta_i (\sigma_{ij} - t_i) d\Gamma + \int_{\Gamma^t} \eta_i \delta\sigma_{ij} n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (3.5)$$

通过格林公式和 σ_{ij} 的对称性，存在如下公式：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda_i \delta\sigma_{ij,j} d\Omega &= \int_{\Gamma} \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \lambda_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j \lambda_i d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta\sigma_{ij} n_j \lambda_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \delta\sigma_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (3.6)$$

将式(3.6)代入式(3.5)从而得到：

$$\begin{aligned} \delta\Pi_c^* &= \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \right) \delta\sigma_{ij} + (\sigma_{ij,j} + b_i) \delta\lambda_i \right) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma^g} (\lambda_i - g_i) \delta\sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma^t} ((\sigma_{ij} n_j - t_i) \delta\eta_i + (\lambda_i + \eta_i) \delta\sigma_{ij} n_j) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

根据泛函驻值条件 $\delta\Pi_c^* = 0$ 得出:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= g_i = u_i \\ \eta_i &= -u_i\end{aligned}\quad (3.8)$$

将 $\lambda_i = u_i, \eta_i = -u_i$ 代入式 (3.4) 中得到根据存在双变量 (u_i, σ_{ij}) 的 Hellinger-Reissner 变分原理, 从而强形式 (3.1) 所对应的能量泛函为:

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) &= \int_{\Omega} \mathbf{B}(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} u_i (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega - \int_{\Gamma^t} u_i (\sigma_{ij} n_j - t_i) d\Gamma\end{aligned}\quad (3.9)$$

对式 (3.9) 进行变分得到相对应的弱形式:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) &= \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \sigma_{ij}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij,j} u_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij,j} n_j g_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma = 0\end{aligned}\quad (3.10)$$

对能量泛函 Π_{HR} 取极值时, 要求对于任意的 $\delta u_i, \delta\sigma_{ij}$ 关于 $\delta\Pi_{HR}$ 都要恒成立, 此时将弱形式 (3.10) 根据 $\delta u_i, \delta\sigma_{ij}$ 改写为下列两式:

$$\int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} \delta\sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij,j} u_i d\Omega - \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma + \int_{\Gamma^t} \delta\sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \quad (3.12)$$

3.2 位移离散和应力离散

3.2.1 位移离散与再生核近似

位移分量 u_i 采用基于再生核近似的无网格形函数进行离散。无网格法通过如图 () 所示的问题域 Ω 和边界 Γ 上布置一系列无网格节点 $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{NP}$ 进行离散, 其中 NP 表示无网格节点数量。每个无网格节点 \mathbf{x}_I 对应的形函数为 $\Psi(\mathbf{x})$, 影响域为 $supp(\mathbf{x}_I)$, 每一个节点的影响域 $supp(\mathbf{x}_I)$ 满足 $\Omega \in_{I=1}^{NP} supp(\mathbf{x}_I)$ 。不失为一般性, 考虑任意位移分量 u_i , 其对应的无网格近似函数 u_i^h 表示为:

$$u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) d_{iI} \quad (3.13)$$

其中, d_{iI} 表示与无网格节点 \mathbf{x}_I 对应的系数

根据再生核近似理论 [], 无网格形函数可以假设为:

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x}) \phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (3.14)$$

式中, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 表示为 p 阶的多项式基函数向量, 表达式为:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, \dots, x^i y^j, \dots, y^p\}. 0 \leq i + j \leq p \quad (3.15)$$

而 $\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ 是附属于节点 \mathbf{x}_I 的核函数，其影响域的大小由影响域尺寸 s 决定，核函数以及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。对于二维问题，一般情况下核函数 $\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ 的影响域为圆形域或者矩形域，可由下列公式得到：

$$\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \phi_{s_x}(r_x)\phi_{s_y}(r_y), r_x = \frac{|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}|}{s_x}, r_y = \frac{|\mathbf{y}_I - \mathbf{y}|}{s_y} \quad (3.16)$$

其中 s_x 和 s_y 分别为 x 和 y 方向上影响域的大小，计算时一般使得两个方向上的影响域大小相等即 $s_x = s_y = s$ 。选取核函数时一般遵循核函数阶次 m 大于等于基函数阶次 p ($m \geq p$) 的原则。针对二阶势问题的弹性力学问题，无网格基函数一般选择二阶或者三阶，而核函数 $\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ 则选取三次样条函数：

$$\phi(r) = \frac{1}{3!} \begin{cases} (2-2r)^3 - 4(1-2r)^3 & r \leq \frac{1}{2} \\ (2-2r)^3 & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

无网格形函数表达式 (3.14) 中的 \mathbf{c} 为待定系数向量，该表达式可以通过满足再生条件确定：

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

将无网格形函数表达式 (3.14) 代入再生条件 (3.18) 中，可以得到：

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{0}) \quad (3.19)$$

其中 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 表示矩阵矩阵，表达式为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (3.20)$$

将 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ 代入到式 (3.14) 中得到再生核无网格形函数的具体表达式为：

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{0}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (3.21)$$

无网格形函数 $\Psi_I(\mathbf{x})$ 的一阶和二阶导数分别为：

$$\Psi_{I,i}(x) = \begin{bmatrix} p_{,i}^T(x_I - x) A^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + p_{,i}^T(x_I - x) A_{,i}^{-1} \phi_s(x_I - x) \\ + p_{,i}^T(x_I - x) A^{-1}(x) \phi_{s,i}(x_I - x) \end{bmatrix} p(0) \quad (3.22)$$

$$\Psi_{I,ij}(x) = \begin{bmatrix} p_{,ij}^T(x_I - x) A^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + p_{,ij}^T(x_I - x) A_{,i}^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + p_{,ij}^T(x_I - x) A_{,j}^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + p_{,ij}^T(x_I - x) A^{-1}(x) \phi_{s,j}(x_I - x) \\ + p_{,ij}^T(x_I - x) A_{,ij}^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + p_{,ij}^T(x_I - x) A_{,i}^{-1}(x) \phi_{s,j}(x_I - x) \\ + p_{,ij}^T(x_I - x) A^{-1}(x) \phi_{s,ij}(x_I - x) \\ + p_{,ij}^T(x_I - x) A_{,j}^{-1}(x) \phi_{s,i}(x_I - x) \\ + p_{,ij}^T(x_I - x) A_{,j}^{-1}(x) \phi_{s,i}(x_I - x) \end{bmatrix} p(0) \quad (3.23)$$

式中 $A_{,i}^{-1} = -A^{-1} A_{,i} A^{-1}$, $A_{,ij}^{-1} = -A^{-1} (A_{,ij} A^{-1} + A_{,i} A_{,j}^{-1} + A_{,j} A_{,i}^{-1})$ ，可以看出无网格形函数及其导数的计算都较为复杂。

图一维无网格形函数及其导数

图二维无网格形函数及其导数

图。图。分别表示一维和二维情况下的无网格形函数及其导数图，从图中可以看出，无网格形函数在全域上连续光滑，但在无网格节点处，形函数不具有插值性，因此无法像有限元法一样直接施加本质边界条件。

3.2.2 应力离散与再生光滑梯度近似

应力分量 σ_{ij} 采用在每个背景积分单元内建立局部的多项式进行离散。考虑如图 (3.1) 所示二维三角形背景积分单元，将求解域 Ω 划分为一系列背景积分单元 Ω_C , $C = 1, 2, \dots, n_c$, 并且 $\cup_{C=1}^{n_c} \Omega_C = \Omega$ 。在背景积分单元 Ω_C 内，假设应力分量 σ_{ij} 为任意的 p 阶多项式，则将离散后的应力分量 σ_{ij} 记为 σ_{ij}^h :

$$\sigma_{ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{q}(\mathbf{x}), \quad \text{in } \Omega_C \quad (3.24)$$

其中， $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ 为 $(p-1)$ 阶的单项式基向量，即 $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{[p-1]}(\mathbf{x})$ 。 \mathbf{a}_{ij} 为 $\sigma_{ij}^h(\mathbf{x})$ 在积分域 Ω_C 内的

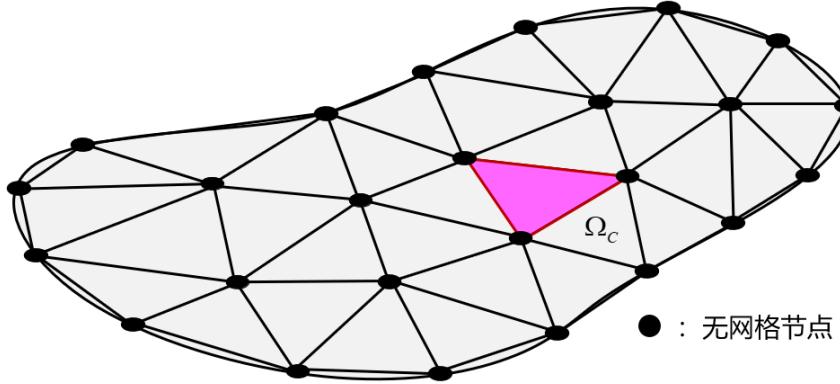


Figure 3.1: 背景积分单元示意图

常系数向量。

此时，将 (3.24)、(3.13) 代入 (3.12) 中可以得到：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q} C_{ijkl}^{-1} \mathbf{a}_{kl} \mathbf{q}^T d\Omega &= \sum_{I=1}^{NP} \int_{\partial \Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q} n_j \Psi_I(\mathbf{x}) d\Gamma d_{iI} - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q}_{,j} \Psi_I(\mathbf{x}) d\Omega d_{iI} \\ &\quad - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q} n_j \Psi_I(\mathbf{x}) d\Gamma d_{iI} + \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q} n_j g_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.25)$$

等式两边同时消掉 $\delta \mathbf{a}_{ij}$ ，进一步得到：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_C} \mathbf{q} C_{ijkl}^{-1} \mathbf{q}^T d\Omega \mathbf{a}_{kl} &= \sum_{I=1}^{NP} \int_{\partial \Omega_C} \mathbf{q} \Psi_I(\mathbf{x}) n_j d\Gamma d_{iI} - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Omega_C} \mathbf{q}_{,j} \Psi_I(\mathbf{x}) d\Omega d_{iI} \\ &\quad - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \mathbf{q} \Psi_I(\mathbf{x}) n_j d\Gamma d_{iI} + \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \mathbf{q} n_j g_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.26)$$

对式 (3.26) 进行移项从而可以得到常系数向量 \mathbf{a}_{ij} 的具体表达式为：

$$\mathbf{a}_{ij} = C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \left(\sum_{I=1}^{NP} (\tilde{g}_{iI} - \bar{g}_{iI}) d_{iI} + \hat{g}_{iI} \right) \quad (3.27)$$

其中：

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega_C} \mathbf{q} \mathbf{q}^T d\Omega \quad (3.28)$$

$$\tilde{g}_{iI} = \int_{\partial\Omega_C} \mathbf{q} \Psi_I(\mathbf{x}) n_j d\Gamma - \int_{\Omega_C} \mathbf{q}_{,j} \Psi_I(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.29)$$

$$\bar{g}_{iI} = \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \mathbf{q} \Psi_I(\mathbf{x}) n_j d\Gamma \quad (3.30)$$

$$\hat{g}_{iI} = \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \mathbf{q} n_j g_i d\Gamma \quad (3.31)$$

考虑经典的线弹性本构关系 $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ 并将 \mathbf{a}_{ij} 代入式 (3.24) 从而得到近似的应力分量 $\sigma_{ij}^h(\mathbf{x})$ 的具体表达式:

$$\sigma_{ij}^h(\mathbf{x}) = C_{ijkl} (\tilde{\varepsilon}_{kl}^h(\mathbf{x}) - \bar{\varepsilon}_{kl}^h(\mathbf{x})) + C_{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}^h(\mathbf{x}) \quad (3.32)$$

其中:

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \frac{1}{2} (\tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) d_{jI} + \tilde{\Psi}_{I,j}(\mathbf{x}) d_{iI}) \\ \tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{iI} \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) d_{jI} + \bar{\Psi}_{I,j}(\mathbf{x}) d_{iI}) \\ \bar{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{iI} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{ij} \quad (3.35)$$

此时, 应力分量表达式中的 $\tilde{\Psi}_{I,i}$ 为再生光滑梯度, 根据再生光滑梯度理论 [], 再生光滑梯度可以通过直接构造得到, 避免了传统无网格形函数梯度的复杂计算, 提高了梯度计算效率。并且, 再生光滑梯度内嵌局部积分约束条件 \tilde{g}_{iI} , 可满足全域积分约束条件, 从而保证算法的计算精度和误差收敛性。

为了方便起见, 在实际计算分析中一般将张量表示转换为矩阵和向量表示, 但两者完全等价。当考虑 xy 平面内的平面应力问题时, 弹性本构关系为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

此时, 近似应力分量 $\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x})$ 式 (3.32) 采用矩阵向量形式可以改写为:

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{D} \sum_{I=1}^{NP} (\tilde{\mathbf{N}}_I - \bar{\mathbf{N}}_I) \mathbf{d}_I + \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.37)$$

其中:

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-nu}{2} \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

而 $\mathbf{d}_I = \{d_{1I}, d_{2I}\}^T$ 为节点系数向量, $\tilde{\mathbf{N}}_I$ 、 $\bar{\mathbf{N}}_I$ 分别是由再生光滑梯度 $\tilde{\Psi}_{I,i}$ 和 $\bar{\Psi}_{I,i}$ 组成的梯度矩阵, 表达式分别为:

$$\tilde{\mathbf{N}}_I(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{I,x}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_{I,y}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\Psi}_{I,y}(\mathbf{x}) & \tilde{\Psi}_{I,x}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_I(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{I,x}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \bar{\Psi}_{I,y}(\mathbf{x}) \\ \bar{\Psi}_{I,y}(\mathbf{x}) & \bar{\Psi}_{I,x}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.3 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法

通过式(3.10)看出基于 Hellinger-Reissner 变分原理得到的弱形式已经考虑了本质边界条件 Γ^g 和自然边界条件 Γ^t 。为了进一步了解关于采用 Hellinger-Reissner 变分原理在伽辽金无网格法中的本质边界条件。此时将式(3.13)、(3.24)代入弱形式(3.11)中可以得到:

$$\sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} \left(\int_{\partial\Omega_C} \Psi_I \mathbf{q}^T n_j d\Gamma - \int_{\Omega_C} \Psi_I \mathbf{q}_{,j}^T d\Omega - \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \Psi_I \mathbf{q}^T n_j d\Gamma \right) \mathbf{a}_{ij} = \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} \left(\int_{\Gamma^t} \Psi_I t_i d\Gamma + \int_{\Omega} \Psi_I b_i d\Omega \right) \quad (3.41)$$

引入式(3.29)、(3.30)将上式改写为:

$$\sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} (\tilde{g}_{jI}^T - \bar{g}_{jI}^T) \mathbf{a}_{ij} = \sum_{I=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \mathbf{f}_I = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (3.42)$$

其中 $\delta \mathbf{d}$ 为位移变分节点系数向量, \mathbf{f} 为外力向量, 元素表达式为:

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma^t} \Psi_I \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Psi_I \mathbf{b} d\Omega \quad (3.43)$$

式中 $\mathbf{t} = \{t_x, t_y\}^T$ 、 $\mathbf{b} = \{b_x, b_y\}^T$ 分别为外力向量和体力向量。进一步将式(3.27)中的 \mathbf{a}_{ij} 代入式(3.42)中从而得到:

$$\begin{aligned} \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} (\tilde{g}_{jI}^T - \bar{g}_{jI}^T) \mathbf{a}_{ij} &= \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} (\tilde{g}_{jI}^T - \bar{g}_{jI}^T) C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \left(\sum_{J=1}^{NP} (\tilde{g}_{kJ} - \bar{g}_{kJ}) d_{lJ} + \hat{g}_{kl} \right) \\ &= \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \tilde{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d_{lJ} \\ &\quad - \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \tilde{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{kJ} d_{lJ} \\ &\quad - \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \bar{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d_{lJ} \\ &\quad + \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \bar{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{kJ} d_{lJ} \\ &\quad - \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} \tilde{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{kl} \\ &\quad + \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} \bar{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{kl} \end{aligned} \quad (3.44)$$

通过引入式(3.28)、(3.33)对式(3.44)中的第一项进行推导可得：

$$\begin{aligned}
 \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \tilde{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d_{lJ} &= \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \tilde{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d_{lJ} \\
 &= \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \int_{\Omega_C} \tilde{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{q}(\mathbf{x}) C_{ijkl} \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d\Omega d_{lJ} \\
 &= \sum_{C=1}^{n_C} \int_{\Omega_C} \sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,j} \delta d_{iI} C_{ijkl} \sum_{J=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,k} d_{lJ} d\Omega \\
 &= \sum_{C=1}^{n_C} \int_{\Omega_C} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^h C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}^h d\Omega \\
 &= \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}_I^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{N}}_J d\Omega \mathbf{d}_J \\
 &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

通过引入式(3.30)、(3.33)、(3.13)对式(3.44)中的第二、三项进行推导可得：

$$\begin{aligned}
 &- \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} (\bar{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} + \tilde{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{kJ}) d_{lJ} \\
 &= - \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \left(\int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \Psi_I n_j C_{ijkl} \mathbf{q} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d\Gamma + \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \mathbf{q} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{jI} n_k \Psi_J d\Gamma \right) d_{lJ} \\
 &= - \sum_{C=1}^{n_C} \left(\int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \delta d_{iI} n_j C_{ijkl} \sum_{J=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{J,k} d_{lJ} d\Gamma + \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \sum_{J=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,J} \delta d_{iI} n_k \sum_{I=1}^{NP} \Psi_J d_{lJ} d\Gamma \right) \\
 &= - \sum_{C=1}^{n_C} \left(\int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega} \delta u_i^h n_j C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}^h d\Gamma + \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^h C_{ijkl} n_k u_l^h d\Gamma \right) \\
 &= - \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \left(\int_{\Gamma^g} \Psi_I \mathbf{M} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{N}}_J d\Gamma + \int_{\Gamma^g} \tilde{\mathbf{N}}_I^T \mathbf{D} \mathbf{M}^T \Psi_J d\Gamma \right) \mathbf{d}_J \\
 &= \delta \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{d}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

其中 \mathbf{M} 为法向量矩阵：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

通过引入式(3.30)、(3.34)对式(3.44)中的第四项进行推导可得:

$$\begin{aligned}
 \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \bar{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{kJ} d_{lJ} &= \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \bar{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{q} \Psi_J n_k d\Gamma d_{lJ} \\
 &= \sum_{C=1}^{n_C} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \sum_{J=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,j} \delta d_{iI} n_k \sum_{J=1}^{NP} \Psi_J d_{lJ} d\Gamma \\
 &= \sum_{C=1}^{n_C} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^h n_k u_l d\Gamma \\
 &= \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \bar{\mathbf{N}}_I^T \mathbf{D} \mathbf{M}^T \Psi_J d\Gamma \mathbf{d}_J \\
 &= \delta \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{d}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

通过引入式(3.31)、(3.33)对式(3.44)中的第五项进行推导可得:

$$\begin{aligned}
 - \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \bar{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{kl} &= - \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \bar{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \mathbf{q} n_l g_k d\Gamma \\
 &= - \sum_{C=1}^{n_C} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,j} \delta d_{iI} n_l g_k d\Gamma \\
 &= - \sum_{C=1}^{n_C} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^h n_l g_k d\Gamma \\
 &= - \sum_{I=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \tilde{\mathbf{N}}_I^T \mathbf{D} \mathbf{M}^T \mathbf{g} d\Gamma \\
 &= \delta \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{f}}
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

通过引入式(3.31)、(3.34)对式(3.44)中的第六项进行推导可得:

$$\begin{aligned}
 \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \bar{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{kl} &= \sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \bar{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \mathbf{q} n_l g_k d\Gamma \\
 &= \sum_{C=1}^{n_C} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,j} \delta d_{iI} n_l g_k d\Gamma \\
 &= \sum_{C=1}^{n_C} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^h n_l g_k d\Gamma \\
 &= \sum_{I=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \bar{\mathbf{N}}_I^T \mathbf{D} \mathbf{M}^T \mathbf{g} d\Gamma \\
 &= \delta \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{f}}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

此时, 式(3.44)通过化简可以得到:

$$\sum_{C=1}^{n_C} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} (\bar{g}_{jI}^T - \bar{g}_{jI}^T) \mathbf{a}_{ij} = \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{d} - \delta \mathbf{d}^T (\tilde{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{f}}) \tag{3.51}$$

将式(3.51)代入到式(3.42)中从而得到离散的平衡方程:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{d} - \delta \mathbf{d}^T (\tilde{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{f}}) &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} \\
 (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{d} &= \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{f}}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

为了保证离散弱形式的变分一致性在求解式(3.52)的过程中，引入的数值积分在求解的各个过程也需要保持一致。如图(3.2)所示，基于 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法的本质边界条件施加方法需要两套数值积分点， \tilde{g} 和 \bar{g} 中的数值积分方案需要与 \mathbf{K} , $\bar{\mathbf{K}}$, \mathbf{f} , $\tilde{\mathbf{f}}$ 和 $\bar{\mathbf{f}}$ 保持一致。

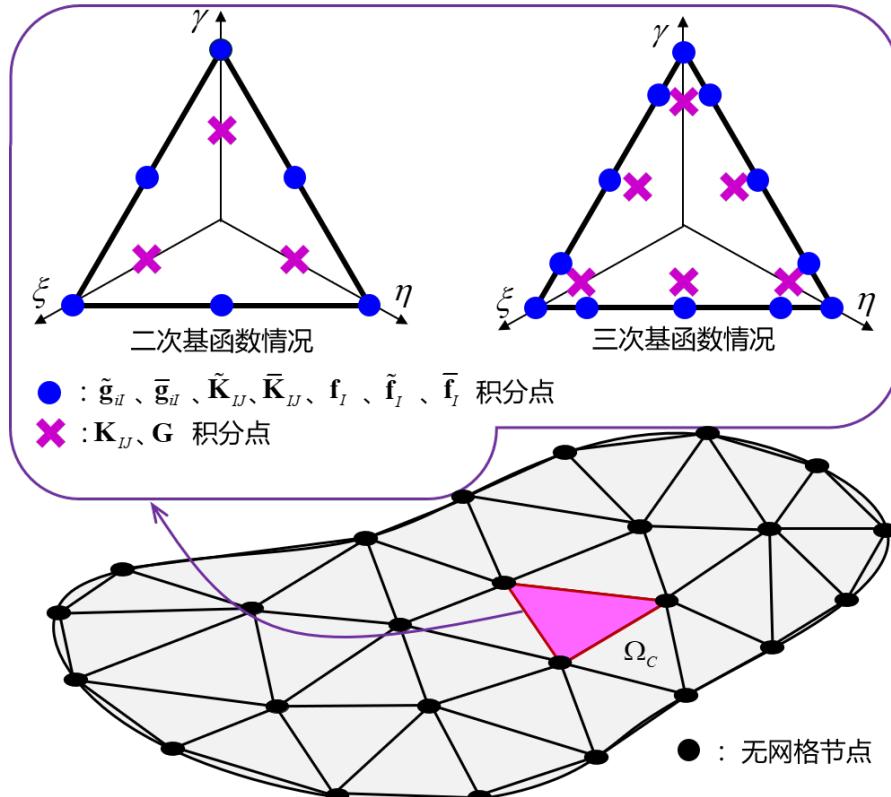


Figure 3.2: 优化的数值积分方案

同时，基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法中的再生光滑梯度构造过程中需要计算积分点处无网格形函数。采用无网格再生光滑梯度积分法，减小形函数的计算量、提高计算效率。利用积分点在背景积分单元间的共享特性，从全域上优化整体求解过程中积分点的数量，提高计算效率，具体数值积分方案如下表：

Table 3.1: 二次基函数无网格法优化的数值积分方案

数值积分点	ξ	η	γ	w	w_B
✕	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	
●	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	
	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

表 2：三次基函数无网格法优化的数值积分方案

Table 3.2: 三次基函数无网格法优化的数值积分方案

数值积分点	ξ	η	γ	w	w_B
X	η_a	$\frac{1-\xi_a}{2}$	$\frac{1-\xi_a}{2}$	w_a	
	η_b	η_b	$\frac{1-\xi_b}{2}$	w_b	
$\xi_a = 0.10810301816870, w_a = 0.223381589678011$					
$\xi_b = 0.816847572980459, w_b = 0.109951743655322$					
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$	
	1	0	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{135}{4}$	$\frac{46}{16}$
	$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	0	$\frac{49}{540}$	$\frac{49}{180}$

3.4 数值算例

3.4.1 分片实验

首先采用线性、二次和三次弹性力学分片实验验证采用传统高斯积分法和再生光滑梯度积分法的不同本质边界条件施加方法下是否满足积分约束条件的情况。分片实验考虑求解域为边长等于 1 的正方形，求解域的四边施加本质条件。其分片实验的精确解如下：

$$\begin{cases} u_x(x, y) = (1 + 2x + 3y)^n \\ u_y(x, y) = (4 + 5x + 6y)^n \end{cases} \quad (3.53)$$

其中， $n = 1, 2, 3$ 表示线性、二次和三次分片实验。如图 (3.3) 所示，分片实验采用 11×11 的非均匀节点离散求解域。针对二次基函数的无网格近似，采用线性 (Linear) 和二次 (Quadratic) 分片实验进行测试，核函数相对影响域在二次基函数情况下为 2.5；三次基函数的无网格近似采用二次 (Quadratic) 和三次 (Cubic) 分片实验进行测试，核函数相对影响域在三次基函数情况下为 3.5。

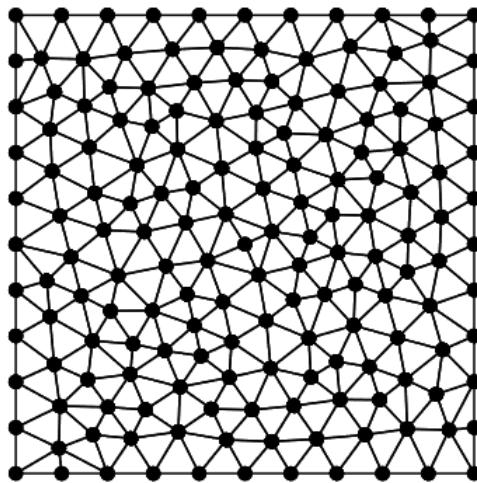


Figure 3.3: 分片实验无网格离散模型

分别采用位移误差 $L_2 - Error$ 和能量误差 $H_1 - Error$ 详细对比所提方法的计算精度

$$L_2 - Error = \sqrt{\int_{\Omega} (u_i - u_i^h)(u_i - u_i^h) d\Omega} \quad (3.54)$$

$$H_1 - \text{Error} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^h) C_{ijkl}^{-1} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^h) d\Omega} \quad (3.55)$$

在数值结果中，“GI”表示采用的是传统高斯积分法，“RKGSI”表示为采用的是再生光滑梯度积分法。“Penalty”、“LM”和“Nitsche”分别表示罚函数法、拉格朗日乘子法和 Nitsche 法三种常见的本质边界条件施加方法。“RKGSI-HR”则表示的是本章提出的基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法。在以下的数值求解过程中，为了保证拉格朗日乘子法的稳定性，拉格朗日乘子统一采用线性有限元形函数进行离散。针对二次基函数的求解，高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 13 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 3 点高斯积分；针对三次基函数的求解，高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 16 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 5 点高斯积分。二次和三次基函数的无网格法分片试验结果如下：

Table 3.3: 二次基函数无网格法分片实验结果

	Linear patch test		Quadratic patch test	
	$L_2 - \text{Error}$	$H_1 - \text{Error}$	$L_2 - \text{Error}$	$H_1 - \text{Error}$
GI-Penalty	7.7×10^{-6}	2.7×10^{-4}	1.2×10^{-5}	2.6×10^{-4}
GI-LM	1.0×10^{-4}	4.7×10^{-3}	1.5×10^{-4}	4.3×10^{-3}
GI-Nitsche	8.1×10^{-6}	2.8×10^{-4}	1.3×10^{-5}	2.8×10^{-4}
RKGSI-Penalty	7.9×10^{-8}	2.0×10^{-6}	1.4×10^{-7}	2.1×10^{-6}
RKGSI-LM	8.6×10^{-5}	4.0×10^{-3}	1.4×10^{-4}	3.7×10^{-3}
RKGSI-Nitsche	2.1×10^{-15}	4.0×10^{-14}	2.2×10^{-15}	2.7×10^{-14}
RKGSI-HR	2.0×10^{-15}	3.2×10^{-14}	2.2×10^{-15}	2.1×10^{-14}

Table 3.4: 三次基函数无网格法分片实验结果

	Quadratic patch test		Cubic patch test	
	$L_2 - \text{Error}$	$H_1 - \text{Error}$	$L_2 - \text{Error}$	$H_1 - \text{Error}$
GI-Penalty	9.1×10^{-6}	2.1×10^{-4}	1.2×10^{-5}	2.0×10^{-4}
GI-LM	2.9×10^{-4}	9.3×10^{-3}	4.0×10^{-4}	9.3×10^{-3}
GI-Nitsche	1.1×10^{-5}	2.8×10^{-4}	1.4×10^{-5}	2.7×10^{-4}
RKGSI-Penalty	1.4×10^{-7}	2.1×10^{-6}	2.0×10^{-7}	2.7×10^{-6}
RKGSI-LM	3.0×10^{-4}	9.8×10^{-3}	4.2×10^{-4}	9.8×10^{-3}
RKGSI-Nitsche	3.6×10^{-15}	1.0×10^{-13}	4.6×10^{-15}	9.5×10^{-14}
RKGSI-HR	3.1×10^{-15}	1.0×10^{-13}	3.5×10^{-15}	7.4×10^{-14}

表 3.3 和表 3.4 分别为具有二次、三次基函数无网格法的分片试验结果，从表中可以看出，由于传统高斯积分法不满足积分约束条件，所以即使采用高阶高斯积分的罚函数法(GI-Penalty)、拉格朗日乘子法(GI-LM)和 Nitsche 法(GI-Nitsche)均不能通过分片试验。当采用满足积分约束条件的再生光滑梯度积分法时，此时由于罚函数法(RKGSI-Penalty)不具有变分一致性，也无法通过分片试验；拉格朗日乘子法(RKGSI-LM)由于其拉格朗日乘子采用线性形函数进行离散，无法与再生光滑梯度相匹配，也无法通过分片试验；当采用 Nitsche 法(RKGSI-Nitsche)和基于 Hellinger-Reissner 变分原理(RKGSI-HR)的本质边界条件施加方法时，均可以通过分片试验，即满足积分约束条件。

3.4.2 悬臂梁问题

首先考虑经典弹性力学二维悬臂梁问题，如图(3.4)所示，悬臂梁的长和宽分别为 $L = 48$, $D = 12$ ，同时悬臂梁的左端为固定支座，右端沿着 y 轴正方向施加外部荷载 $P = 1000$ 。悬臂梁

的材料系数为杨氏模量 $E = 3 \times 10^6$ 、泊松比 $\nu = 0.3$ 。根据圣维南原理和平面应力假设，悬臂梁问题的解析解为：

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{6EI} [(6L - 3x)x + (2 + \nu)(y^2 - \frac{D^2}{4})] \\ v = \frac{P}{6EI} [3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu)\frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2] \end{cases} \quad (3.56)$$

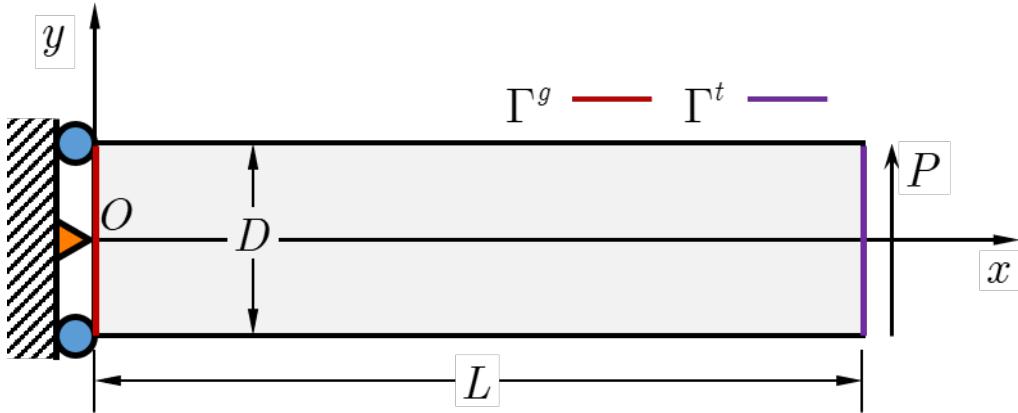


Figure 3.4: 悬臂梁问题模型

与之相对应的应力分量为：

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{P(L-x)y}{I} \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = \frac{P}{2I} (\frac{D^2}{4} - y^2) \end{cases} \quad (3.57)$$

如图(3.4)所示，悬臂梁的左端施加自然边界条件，右端施加强制边界条件。悬臂梁求解域分别通过图(3.5)所示采用(a)5×7、(b)9×33、(c)17×65、(d)33×129的四个疏密不同的节点进行离散。对于采用二次基函数的悬臂梁算例问题，传统高斯积分法采用13点高斯积分，核函数的相对影响域为2.5。

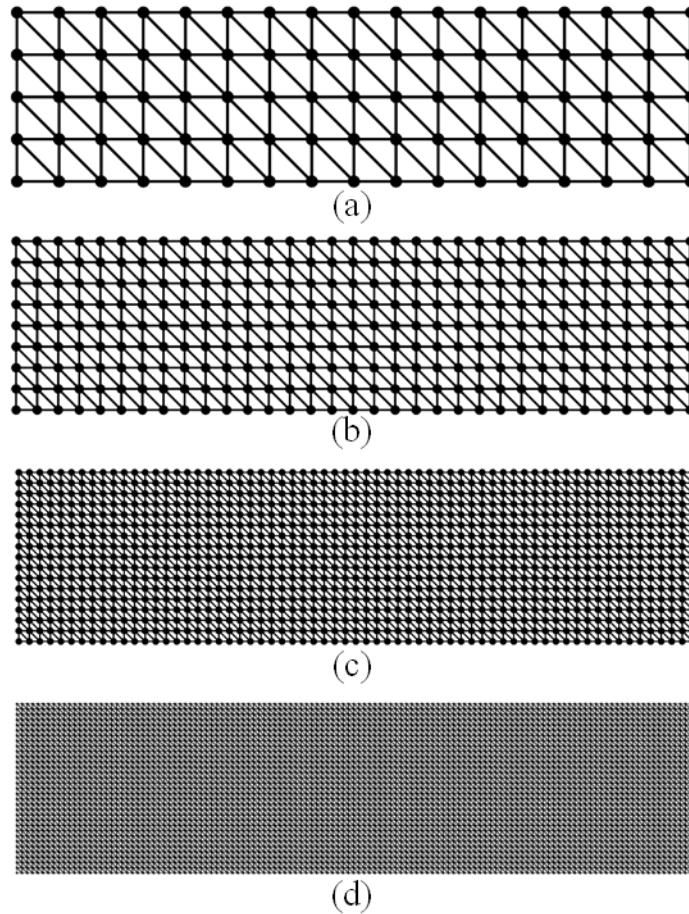


Figure 3.5: 悬臂梁问题节点模型

图(3.6)、(3.7)为悬臂梁问题的位移误差和能量误差对比图。从图中可以看出采用再生光滑梯度积分法(RKGSI)的本质边界条件施加方法的计算精度优于采用高斯积分法(GI)的本质条件施加方法，并且由于传统高斯积分法和采用再生光滑梯度积分法的罚函数法(RKGSI-Penalty)和拉格朗日乘子法(RKGSI-LM)不具有变分一致性，无法达到理论误差收敛率，而基于Hellinger-Reissner变分原理下的本质边界条件施加方法(RKGSI-HR)和Nitsche法(RKGSI-Nitsche)均可达到理论误差收敛率，但相较于RKGSI-Nitsche法，所提出的RKGSI-HR法无需引入人工参数。

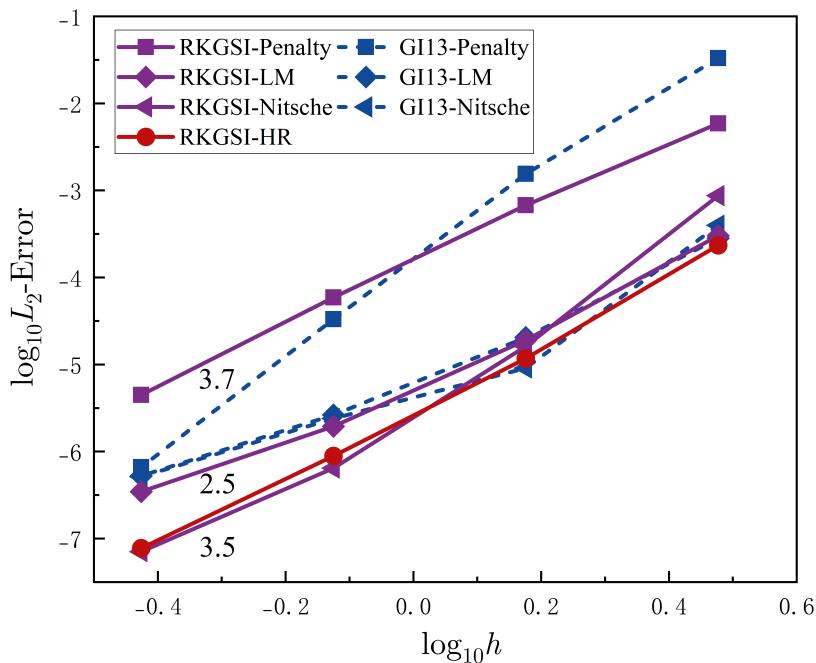


Figure 3.6: 悬臂梁问题位移误差对比

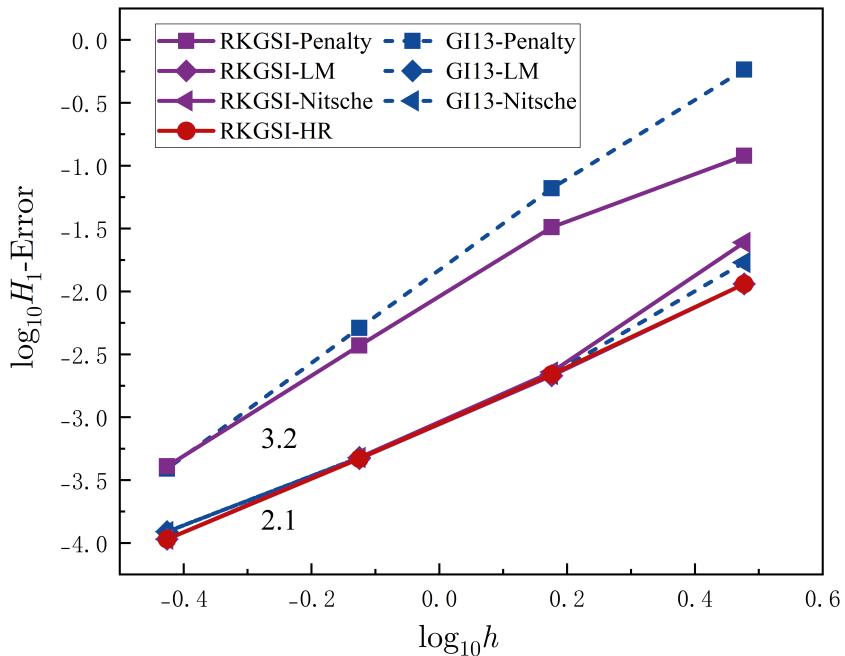


Figure 3.7: 悬臂梁问题能量误差对比

图(3.8)为悬臂梁问题的节点数和计算时间的效率对比图。从整体来看采用再生光滑梯度积分法(RKGSI)的计算效率明显高于传统高斯积分法(GI)。

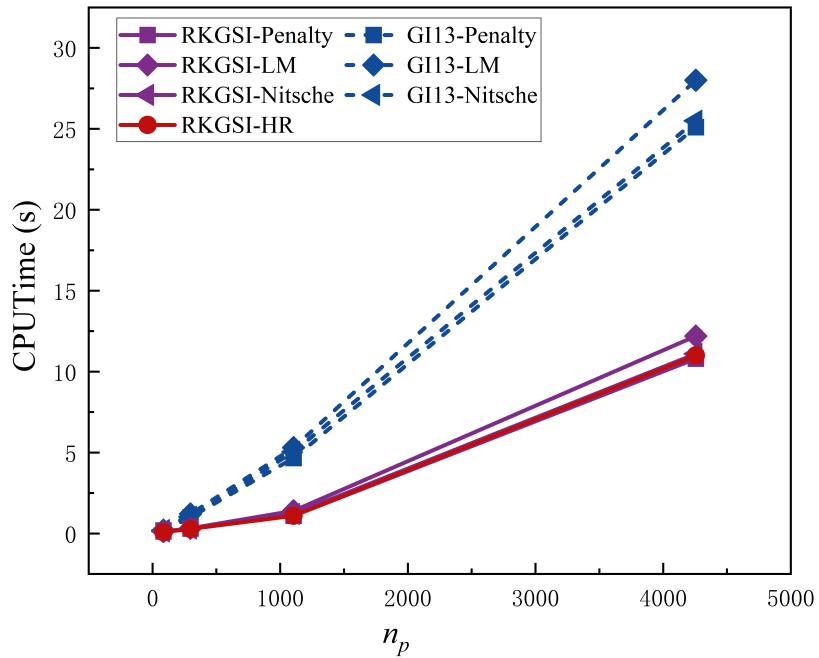


Figure 3.8: 计算时间与节点数的关系

图(3.9)为悬臂梁问题的本质边界条件施加效率分析图。该图为施加强制边界 Γ^g 过程中计算形函数及梯度和组装相对应的刚度矩阵和力向量所用时间对比图。从图中可以看出，罚函数法和拉格朗日乘子法在计算形函数及其梯度所用的时间相同且所用时间最少，这是由于罚函数法和拉格朗日乘子法在计算过程中只需要计算无网格形函数本身，无需计算无网格形函数梯度，而 Nitsche 法和 HR 法也无需计算无网格形函数梯度，但需要计算再生光滑梯度，Nitsche 法这部分所用的时间是罚函数法和拉格朗日乘子法的 5.6 倍，而 HR 法是 1.6 倍，HR 法的计算效率高于 Nitsche 法。组装相应的刚度矩阵和力向量这部分所用的时间上，Nitsche 法和 HR 法计算效率基本相同。从整体上来看，拉格朗日乘子法和罚函数法的效率优于 HR 法和 Nitsche 法，但拉格朗日乘子法和罚函数法不具有变分一致性无法达到理论误差收敛率。因此，总体来说，相较于传统的本质边界条件施加方法，基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法 (RKGSI-HR) 能够达到理论误差收敛率，有效提高计算精度，相较于 Nitsche 法而言计算效率也更高。

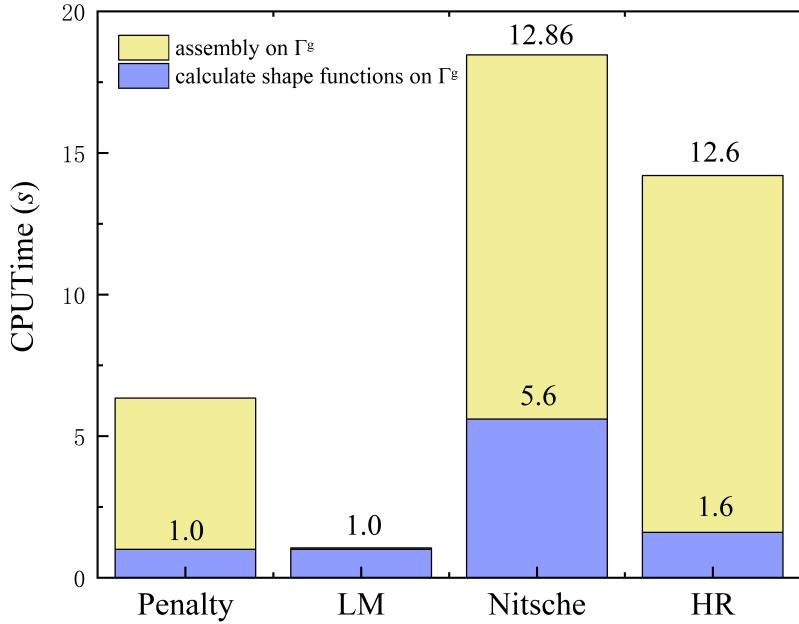


Figure 3.9: 本质边界条件施加效率分析

3.4.3 带孔无限大平板问题

考虑经典的带孔无限大平板问题，如图(3.10)所示，板的中心存在一半径为 $a = 1$ 的圆形小孔，同时平板的无穷远处沿 x 轴方向施加均布荷载 $T = 1000$ 。板的材料系数为杨氏模量 $E = 3 \times 10^6$ 、泊松比 $\nu = 0.3$ 。根据 Michell 解可以得到该带孔无限大平板问题的解析解为：

$$\begin{cases} u_x(r, \theta) = \frac{Ta}{8\mu} \left(\frac{r}{a} (k+1) \cos \theta - \frac{2a^3}{r^3} \cos 3\theta + \frac{2a}{r} ((1+k) \cos \theta + \cos 3\theta) \right) \\ u_y(r, \theta) = \frac{Ta}{8\mu} \left(\frac{r}{a} (k-3) \sin \theta - \frac{2a^3}{r^3} \sin 3\theta + \frac{2a}{r} ((1-k) \sin \theta + \sin 3\theta) \right) \end{cases} \quad (3.58)$$

其中， k 和 μ 分别为：

$$k = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.59)$$

与之相对应的应力分量为：

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right) \\ \sigma_{yy} = -T \left(\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right) \\ \sigma_{xy} = -T \left(\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \right) \end{cases} \quad (3.60)$$

如图(3.10)所示，根据带孔无限大平板的对称性，取边长 $b = 5$ 的四分之一的方形域作为研究对象。方形域的上端和右端以及圆孔的边界施加自然边界条件，而方形域的左端和下端约束法向位移，施加强制边界条件。该求解域分别通过图(3.11)所示采用(a)112、(b)403、(c)1525、(d)5929的四个疏密不同的节点进行离散。对于采用三次基函数的带孔无限大平板算例问题，传统高斯积分法采用16点高斯积分，核函数的相对影响域为3.5。

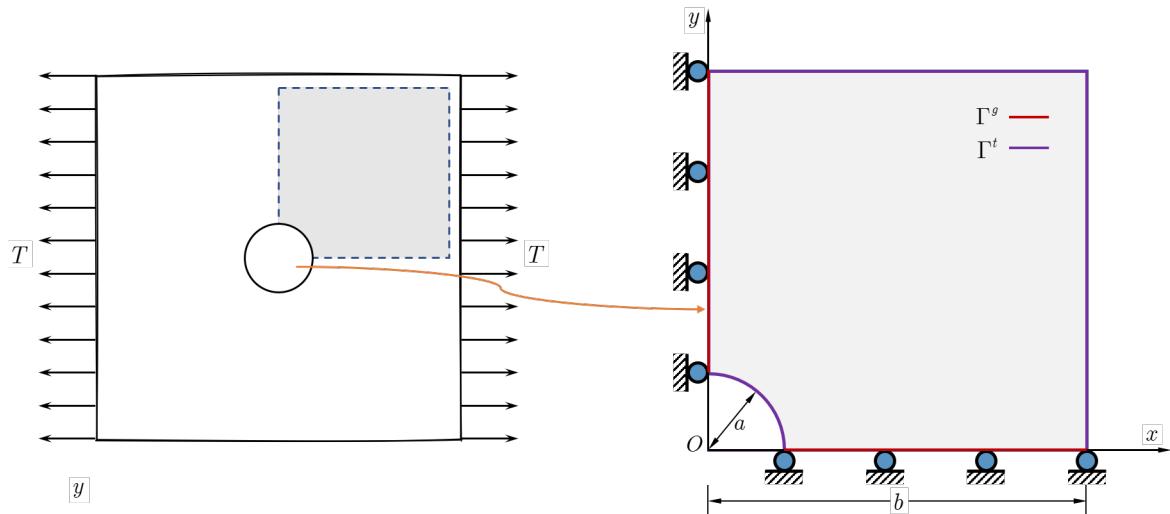


Figure 3.10: 带孔无限大平板问题模型

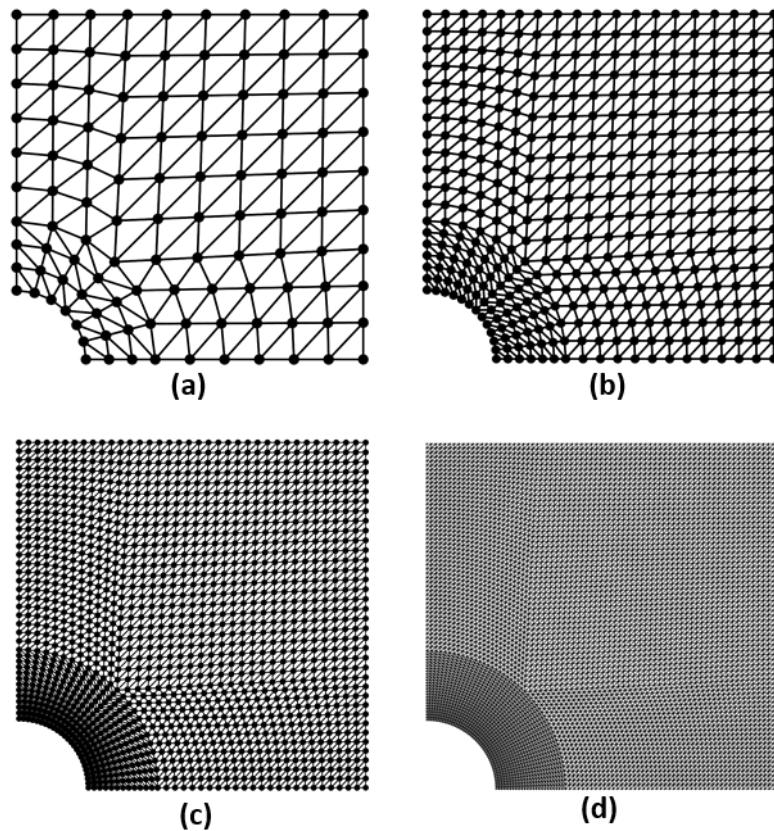


Figure 3.11: 带孔无限大平板问题无网格离散

图(3.12)、(3.13)为带孔无限大平板问题的位移和能量误差对比图。从图中可以看出传统高斯积分法由于不具有变分一致性，导致 GI-Penalty 法、GI-LM 法、GI-Nistche 法均无法达到理论误差收敛率。基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法 (RKGSI-HR) 和

RKGSI-Nitsche 法满足变分一致性能够达到理论误差收敛率。虽然 RKGSI-LM 法无法通过分片实验不满足变分一致性，但由于拉格朗日乘子法具有较高的精度也能达到理论误差收敛率。

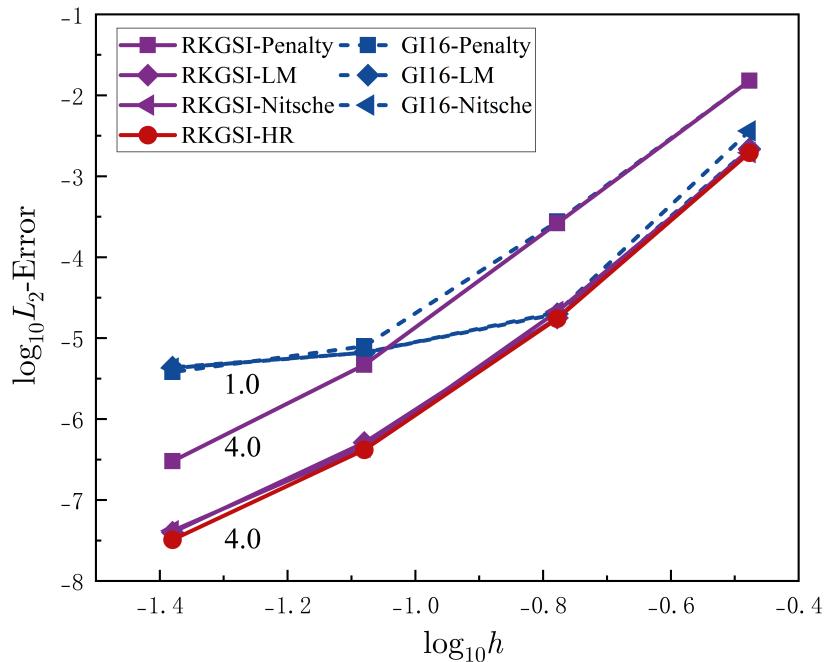


Figure 3.12: 带孔无限大平板问题位移误差对比

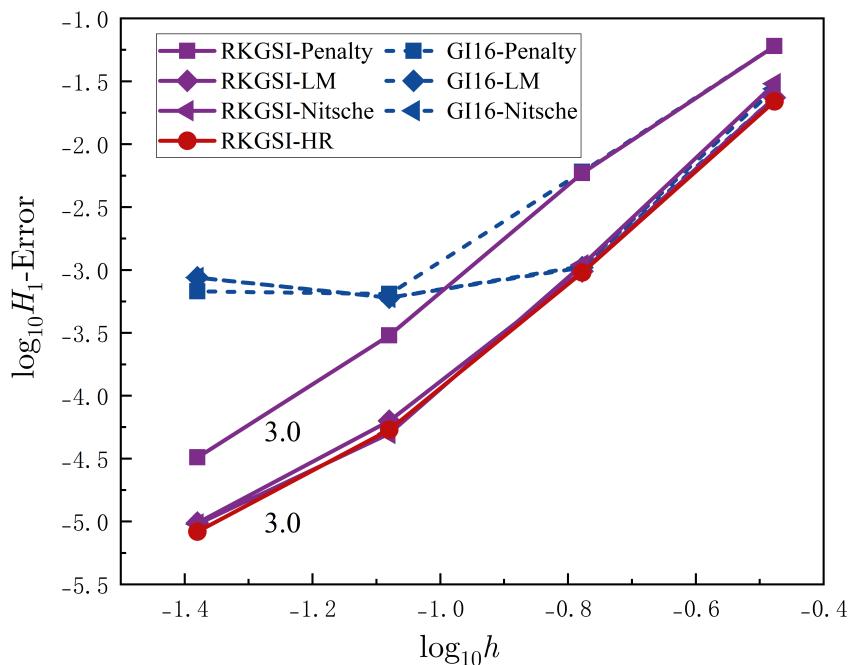


Figure 3.13: 带孔无限大平板问题能量误差对比

图(3.14)、(3.15)为带孔无限大平板问题的效率对比图。从图中可以看出随着无网格节点数的增加，采用再生光滑梯度积分法(RKGSI)的效率明显高于传统高斯积分法(GI)，在施加强制边界条件的过程中，HR法不仅满足变分一致性同时计算效率还高于传统的Nitsche法。

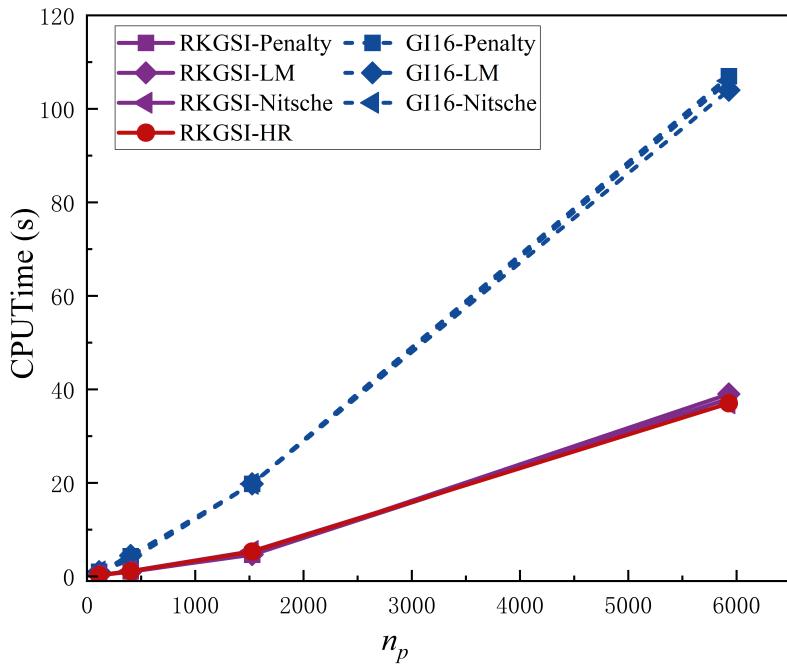


Figure 3.14: 带孔无限大平板问题计算时间与节点数关系

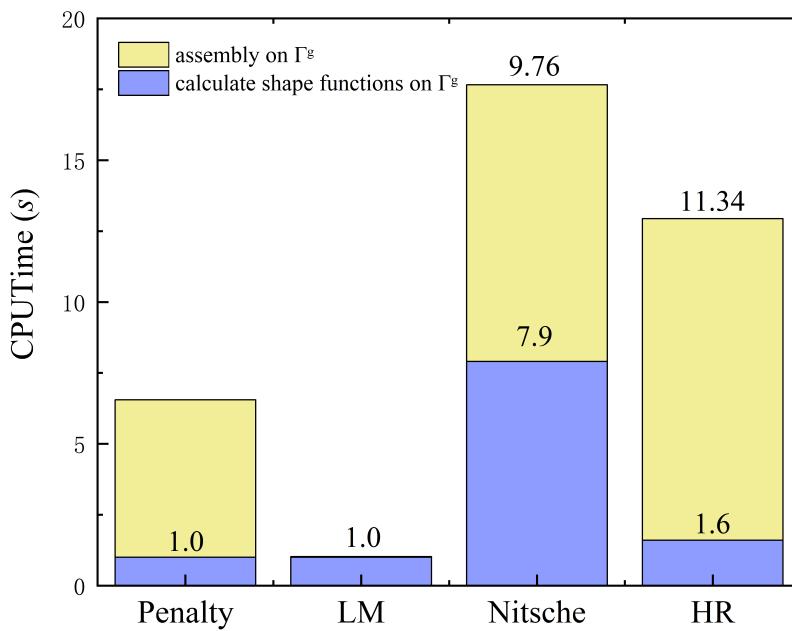


Figure 3.15: 带孔无限大平板问题本质边界条件施加效率分析

最后, 图(3.16)为带孔无限大平板问题的应力云图, 从图中可以看出 RKGSI-Penalty 法和精确解之间是有差异的, 而 RKGSI-Nitsche 法和 RKGSI-HR 法是和精确解几乎相同。但 Nitsche 法是需要依靠人工经验参数并且计算效率也低于 HR 法。

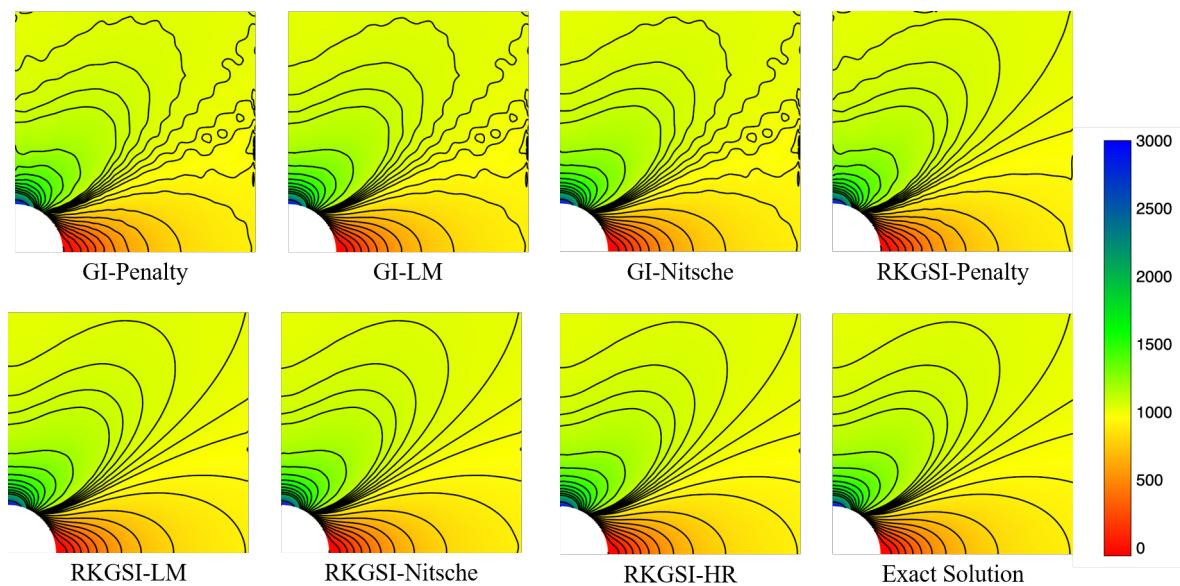


Figure 3.16: 带孔无限大平板问题应力云图