学校代码：10385　　　　　　　　　　　　　　　　分类号：________

研究生学号：________　　　　　　　　　　　　　　密　集：________

华侨大学

HUAQIAO UNIVERSITY

硕士专业学位论文

论文中文题目

English Thesis Title

作者姓名：________

指导教师：________

合作教师：________

专业学位类别：________

专业学位领域：________

研究方向：________

所在学院：土木工程学院

论文提交日期：二〇二三年五月二十八日

学 位 论 文 答 辩 委 员 会 决 议

根据《中华人民共和国学位条例》、《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》、《华侨大学学位授予工作细则》及《华侨大学研究生学位论文质量监控与评阅答辩的管理规定》的规定，学位论文答辩委员会经充分交换意见，对论文做出评价，并以无记名投票方式进行表决，同意该同学通过硕士学位论文答辩，同意授予硕士学位。

答辩委员会 (主席签字)：______________________

答辩时间：________ 年___ 月___ 日

学位论文独创性声明

本人声明兹呈交的学位论文是本人在导师指导下完成的研究成果。论文写作中不包含其他人已经发表或撰写过的研究内容，如参考他人或集体的科研成果，均在论文中以明确的方式说明。本人依法享有和承担由此论文所产生的权利和责任。

论文作者签名：__________________ 签名日期：____________

学位论文版权使用授权声明

本人同意授权华侨大学有权保留并向国家机关或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许学位论文被查阅和借阅。本人授权华侨大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

论文作者签名：______________ 指导老师签名：______________

签 名 日 期：______________ 签 名 日 期：______________

目　录

第 1 章　无网格近似理论

1.1　再生核无网格近似

无网格法通过如图 (1.1) 所示的问题域 Ω 和边界 Γ 上布置一系列无网格节点 $\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{NP}$ 进行离散，其中 NP 表示无网格节点数量。每个无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的形函数为 $\Psi_I(\boldsymbol{x})$，影响域为 $supp(\boldsymbol{x}_I)$，此时所有节点的影响域的总范围超过问题域 Ω，即每一个节点的影响域 $supp(\boldsymbol{x}_I)$ 满足 $\Omega \subseteq_{I=1}^{NP} supp(\boldsymbol{x}_I)$。考虑任意变量 $u(\boldsymbol{x})$，其对应的无网格近似函数 $u^h(\boldsymbol{x})$ 表示为：

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d_I \tag{1.1}$$

其中 d_I 表示与无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的系数。

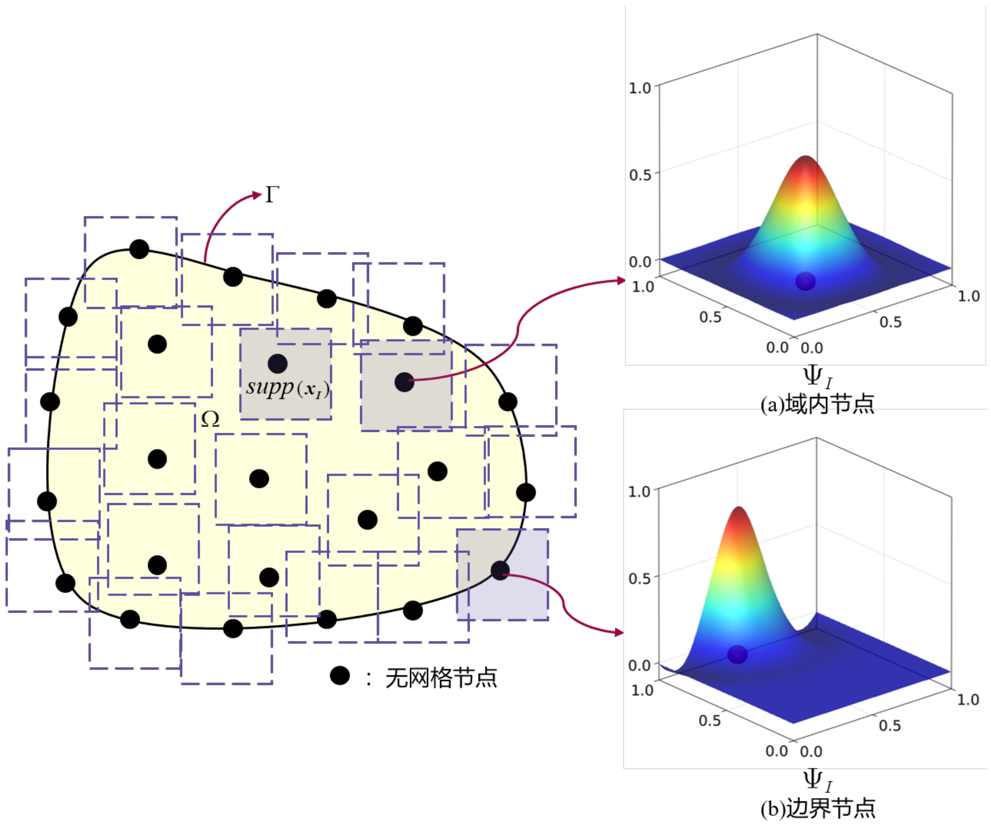

图 1.1　无网格离散示意图

根据再生核近似理论 [?]，无网格形函数可以假设为：

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \tag{1.2}$$

式中 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 表示为 p 阶的多项式基函数向量，具体表达式为：

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \{1, x, y, \cdots, x^i y^i, \cdots, y^p\}, 0 \leq i + j \leq p \tag{1.3}$$

而 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 为附属于节点 $\boldsymbol{x}_I$ 的核函数，其影响域的大小由影响域尺寸 s 决定，核函数以及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。对于二维问题，一般情况下核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 的影响域为圆形域或者矩形域，可由下列公式得到：

$$\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) = \varphi_{s_x}(r_x)\varphi_{s_y}(r_y), r_x = \frac{|x_I - x|}{s_x}, r_y = \frac{|y_I - y|}{s_y} \tag{1.4}$$

其中 s_x 和 s_y 分别为 x 和 y 方向上影响域的大小，计算时一般使得两个方向上的影响域大小相等即 $s_x = s_y = s$。选取核函数时一般遵循核函数阶次 m 大于等于基函数阶次 $p(m \geq p)$ 的原则。针对二阶的弹性力学问题，无网格基函数一般选择二阶或者三阶，核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 选取三次样条函数：

$$\varphi(r) = \frac{1}{3!}\begin{cases} (2-2r)^3 - 4(1-2r)^3 & r \leq \frac{1}{2} \\ (2-2r)^3 & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

针对四阶的薄板问题，无网格基函数一般选择三阶或四阶，核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 选取五次样条函数构造无网格形函数：

$$\varphi(r) = \frac{1}{5!}\begin{cases} (3-3r)^5 - 6(2-3r)^5 + 15(1-3r)^5 & r \leq \frac{1}{3} \\ (3-3r)^5 - 6(2-3r)^5 & \frac{1}{3} < r \leq \frac{2}{3} \\ (3-3r)^5 & \frac{2}{3} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

此外，无网格形函数满足多项式一致性条件：

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{1.7}$$

通过满足一致性条件，将式 (1.2) 代入到式 (1.7) 中得到待定系数向量 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ 的具体表达式：

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0}) \tag{1.8}$$

其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 表示矩量矩阵，表达式为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \tag{1.9}$$

将 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ 代入到式 (1.2) 中得到再生核无网格形函数的具体表达式为：

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{0})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \tag{1.10}$$

对无网格形函数 $\Psi_I(\boldsymbol{x})$ 分别求一阶梯度和二阶梯度得到：

$$\Psi_{I,i}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{,i}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +\boldsymbol{p}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}_{,i}^{-1}\phi_s(x_I - x) \\ \boldsymbol{p}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}^{-1}(x)\phi_{s,i}(x_I - x) \end{pmatrix}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0}) \tag{1.11}$$

$$\Psi_{I,ij}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{,ij}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +\boldsymbol{p}_{,i}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}_{,j}^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +\boldsymbol{p}_{,i}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}^{-1}(x)\phi_{s,j}(x_I - x) \\ +\boldsymbol{p}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}_{,ij}^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +\boldsymbol{p}_{,j}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}_{,i}^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +\boldsymbol{p}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}_{,i}^{-1}(x)\phi_{s,j}(x_I - x) \\ +\boldsymbol{p}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}^{-1}(x)\phi_{s,ij}(x_I - x) \\ +\boldsymbol{p}_{,j}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}^{-1}(x)\phi_{s,i}(x_I - x) \\ +\boldsymbol{p}^T(x_I - x)\boldsymbol{A}_{,j}^{-1}(x)\phi_{s,i}(x_I - x) \end{pmatrix}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0}) \tag{1.12}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{,i}^{-1} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}_{,i}\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}_{,ij}^{-1} = -\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}_{,ij}\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{A}_{,i}\boldsymbol{A}_{,j}^{-1} + \boldsymbol{A}_{,j}\boldsymbol{A}_{,i}^{-1})$。

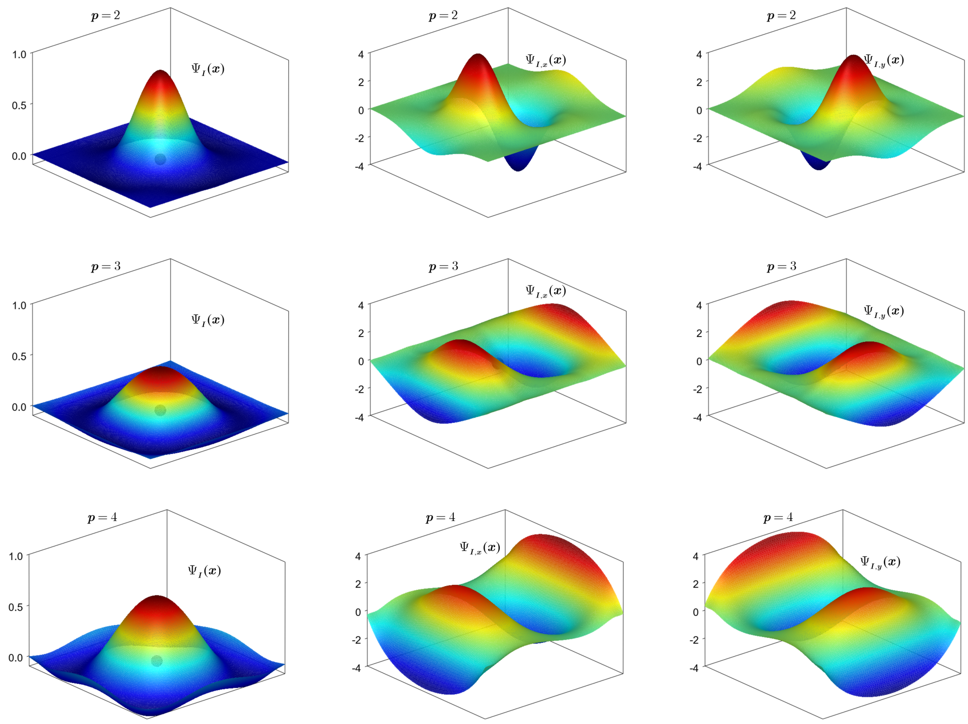

图 1.2　二维无网格形函数及其一阶导数

图 (1.2) 表示为二维无网格形函数及其一阶导数。从图中可以看出无网格形函数具有高阶连续光滑的特点，但无网格形函数一般不具有插值性，即 $\Psi_I(\boldsymbol{x}) \neq \delta_{IJ}$，因此无法像有限元法一样直接施加本质边界条件 (从图中怎么看出的？)

1.2　伽辽金无网格法

1.2.1　弹性力学问题的伽辽金无网格离散

不失为一般性，弹性力学问题的基本未知量为位移向量 $\boldsymbol{u} = \{u_i\}, i = 1, \cdots, n_{sd}$，其静力平衡方程为：

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on } \Gamma^t \\ u_i = g_i & \text{on } \Gamma^g \end{cases} \tag{1.13}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ 为柯西应力，$\boldsymbol{b} = \{b_i\}$ 为体力，Γ^t、Γ^g 分别表示为自然和强制边界条件，$\Gamma^t \cup \Gamma^g = \Gamma, \Gamma^t \cap \Gamma^g = \varnothing$，$\boldsymbol{t} = \{t_i\}$ 和 $\boldsymbol{g} = \{g_i\}$ 分别为自然边界和强制

边界上给定的面力和位移，$\boldsymbol{n} = \{n_i\}$ 是 Γ^t 的外法线方向。

考虑经典的线弹性本构关系：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\\&\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla), \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\end{aligned} \tag{1.14}$$

其中 C_{ijkl} 为四阶弹性张量，ε 为应变，∇ 为梯度算子，“:” 为双点积张量缩并运算符号。根据最小势能原理，弹性力学问题式 (1.13) 的势能泛函表达式为：

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon_{ij}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}d\Omega - \int_\Omega u_ib_id\Omega - \int_{\Gamma^t} u_it_id\Gamma \tag{1.15}$$

对式 (1.15) 进行变分可以得到式 (1.13) 的等效积分弱形式，其表达式为：

$$\begin{aligned}\delta\Pi(\boldsymbol{u}) &= \int_\Omega \delta\varepsilon_{ij}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}d\Omega - \int_\Omega \delta u_ib_id\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_it_id\Gamma\\&= 0\end{aligned} \tag{1.16}$$

此时引入位移向量 $\boldsymbol{u}$，应变向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$，应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的表达式：

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.17}$$

当考虑 xy 平面内的平面应变问题时，弹性本构关系的向量表达式为：

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\\&= \boldsymbol{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{1.18}$$

当考虑 xy 平面内的平面应力问题时，弹性本构关系的向量表达式为：

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\\&= \boldsymbol{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{1.19}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为弹性张量 $\boldsymbol{C}$ 的矩阵表达式，E 为杨氏模量，ν 为泊松比。

在无网格近似中，一般将求解域 Ω 用一组节点 $\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{NP}$ 进行离散，此时位移无网格离散的表达式为：

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} u_1^h(\boldsymbol{x}) \\ u_2^h(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}_I, \boldsymbol{d}_I = \begin{Bmatrix} d_{I1} \\ d_{I2} \end{Bmatrix} \tag{1.20}$$

伽辽金法对应的无网格离散权函数为：

$$\delta\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{d}_I \tag{1.21}$$

将式 (1.20) 代入式 (1.14) 可以得到离散的应变向量：

$$\varepsilon^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}_I, \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Psi_{I,y} \\ \Psi_{I,y} & \Psi_{I,x} \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

将式 (1.20)-(1.22) 代入到弱形式 (1.16) 中可以得到弹性力学问题离散平衡控制方程：

$$\begin{gathered} \delta\boldsymbol{d}^T(\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{f}) = 0 \\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \end{gathered} \tag{1.23}$$

式中 $\boldsymbol{d} = \{\boldsymbol{d}_I\}$ 表示位移向量，$\boldsymbol{K} = \{K_{IJ}\}$ 和 $\boldsymbol{f} = \{f_I\}$ 分别表示刚度矩阵和力向量，具体表达式为：

$$\begin{aligned} K_{IJ} &= \int_\Omega \boldsymbol{B}_I^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_J d\Omega \\ f_I &= \int_\Omega \Psi_I\boldsymbol{b}d\Omega + \int_{\Gamma^t} \Psi_I\boldsymbol{t}d\Gamma \end{aligned} \tag{1.24}$$

1.2.2 薄板问题的伽辽金无网格离散

考虑如图 (1.3) 所示薄板区域 $\bar{\Omega}$，其中板厚为 h，Ω 为薄板中面。根据 Kirchhoff 薄板假设原理 [?]，在薄板中面 Ω 上的控制方程为：

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q} = 0 & \text{in } \Omega \\ w = \bar{w} & \text{on } \Gamma_w \\ \theta_{\boldsymbol{n}} = w_{,\boldsymbol{n}} = \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}} & \text{on } \Gamma_\theta \\ V_{\boldsymbol{n}} = Q_{\boldsymbol{n}} + M_{\boldsymbol{ns},\boldsymbol{s}} = \bar{V}_{\boldsymbol{n}} & \text{on } \Gamma_V \\ M_{\boldsymbol{nn}} = \bar{M}_{\boldsymbol{nn}} & \text{on } \Gamma_M \\ w = \bar{w} & \text{at } c_w \\ P = -M_{ns}|_{c_p} = \bar{P} & \text{at } c_P \end{cases} \tag{1.25}$$

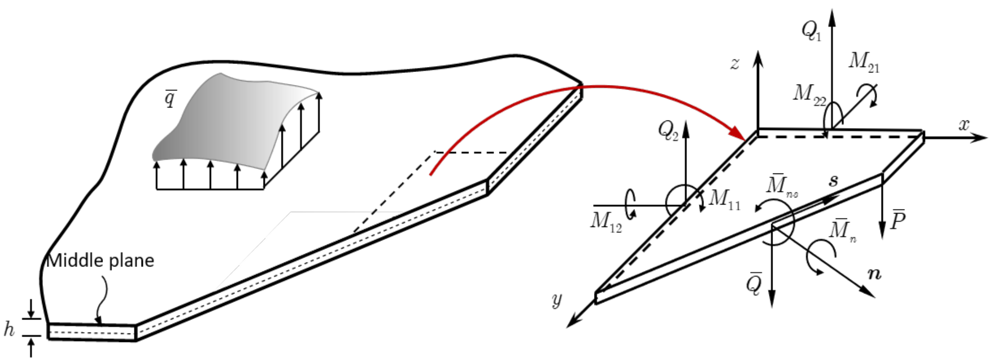

图 1.3　薄板运动学及边界条件

其中式 (1.25) 存在如下关系式：

$$w_{,\boldsymbol{n}} = w_{,\alpha} n_\alpha \tag{1.26}$$

$$Q_{\boldsymbol{n}} = n_\alpha M_{\alpha\beta,\beta} \tag{1.27}$$

$$M_{\boldsymbol{nn}} = M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, M_{\boldsymbol{ns}} = M_{\alpha\beta n_\alpha s_\beta}, M_{\boldsymbol{ns},\boldsymbol{s}} = M_{\alpha\beta,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma \tag{1.28}$$

式中 $M_{\alpha\beta}$ 为矩量 $\boldsymbol{M}$ 的弯曲和扭转分量，$\bar{q}$ 为垂直于薄板中面的分布荷载。Γ_w、Γ_θ 和 c_w 为本质边界条件，$\bar{w}$ 和 $\bar{\theta}_n$ 分别为本质边界条件上给定的挠度和转角。Γ_V、Γ_M 和 c_P 为自然边界条件，$V_{\boldsymbol{n}}$、$M_{\boldsymbol{nn}}$ 和 P 为自然边界上的等效剪力、法向弯矩和薄板角上的集中荷载。$\boldsymbol{n} = \{n_x,\ n_y\}^T$，$\boldsymbol{s} = \{s_x,\ s_y\}^T$ 分别表示所在边界

方向上的外法线方向和切方向的分量。所有的边界条件都满足如下关系式:

$$\begin{gathered}\Gamma=\Gamma_w\cup\Gamma_V\cup\Gamma_\theta\cup\Gamma_M, c=c_w\cup c_P\\ \Gamma_w\cap\Gamma_V=\Gamma_\theta\cap\Gamma_M=c_w\cap c_P=\varnothing\end{gathered}\tag{1.29}$$

当薄板为线弹性各同向性材料时，其本构关系表达式如下：

$$M_{\alpha\beta}=D_{\alpha\beta\gamma\eta}\kappa_{\gamma\eta}=-D_{\alpha\beta\gamma\eta}w_{,\gamma\eta}\tag{1.30}$$

其中：

$$D_{\alpha\beta\gamma\eta}=\bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\eta}+\frac{1}{2}(1-\nu)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\eta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma}))\tag{1.31}$$

式中，$\kappa_{\alpha\beta}=-w_{,\alpha\beta}$ 为曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的分量。$D_{\alpha\beta\gamma\eta}$ 为四阶弹性张量，$\bar{D}$ 为抗弯刚度，其可采用杨氏模量 E、泊松比 ν 和板厚 h 进行表示：

$$\bar{D}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\tag{1.32}$$

根据尺寸相关弹性 [?]，此时将式 (1.27)、(1.28)、(1.30)、(1.31) 代入式 (1.25) 中可以得到自然边界上的法向弯矩 $M_{\boldsymbol{nn}}$、等效剪力 $V_{\boldsymbol{n}}$ 和薄板角上的集中荷载 P 的具体表达式：

$$\begin{cases}M_{\boldsymbol{nn}}=\mathcal{M}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}=-\bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta}+(1-\nu)n_\alpha n_\beta)w_{,\alpha\beta}\\ V_{\boldsymbol{n}}=\mathcal{V}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}=-\bar{D}(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}n_\beta+(1-\nu)n_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\gamma}s_\alpha n_\beta s_\gamma)w_{,\alpha\beta}\\ P=\mathcal{P}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}=-[[(\bar{D}(1-\nu)n_\alpha s_\beta)w_{,\alpha\beta}]]\end{cases}\tag{1.33}$$

其中：

$$\begin{cases}\mathcal{M}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}=-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma n_\eta=-\bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta}+(1-\nu)n_\alpha n_\beta)\\ \mathcal{V}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}=-D_{\alpha\beta\gamma\eta}(n_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\eta}+s_\gamma n_\eta s_\xi\frac{\partial}{\partial x_\xi})=-\bar{D}(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}n_\beta+(1-\nu)n_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\gamma}s_\alpha n_\beta s_\gamma)\\ \mathcal{P}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}=-[[D_{\alpha\beta}n_\gamma s_\eta]]=-[[\bar{D}(1-\nu)n_\alpha s_\beta]]\end{cases}\tag{1.34}$$

根据最小势能原理，式 (1.25) 的势能泛函表达式为：

$$\begin{aligned}\Pi(w)=&\int_\Omega\frac{1}{2}\kappa_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega+\int_{\Gamma_M}\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma\\ &-\int_{\Gamma_V}w\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-w\bar{P}|_{x\in c_P}+\int_\Omega w\bar{q}d\Omega\end{aligned}\tag{1.35}$$

对式 (1.35) 进行变分得到四阶薄板问题的伽辽金弱形式：

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi(w) = &\int_{\Omega} \delta\kappa_{,\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Gamma_M} \delta\theta_{\boldsymbol{n}} \bar{M}_{\boldsymbol{nn}} d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_V} \delta w \bar{V}_{\boldsymbol{n}} d\Gamma - \delta w \bar{P}|_{x\in c_P} + \int_{\Omega} \delta w \bar{q} d\Omega
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

对挠度 w 引入无网格离散：

$$
w^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d_I \ \delta w^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) \delta d_I
\tag{1.37}
$$

将式 (1.37) 代入 $\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ 得到离散的曲率张量：

$$
\boldsymbol{\kappa} = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{d}_I \ \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_{I,xx} \\ \Psi_{I,yy} \\ 2\Psi_{I,xy} \end{bmatrix}
\tag{1.38}
$$

将式 (1.26)、(1.30) 和 (1.37) 代入到弱形式 (1.36) 中得到薄板问题伽辽金无网格法离散平衡控制方程：

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{d}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{f}) = 0 \\
\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

其中刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和力向量 $\boldsymbol{f}$ 的具体表达式为：

$$
\begin{aligned}
&K_{IJ} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_J d\Omega \\
&f_I = \int_{\Gamma_V} \Psi_I \bar{V}_{\boldsymbol{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_M} \Psi_{I,\boldsymbol{n}} \bar{M}_{\boldsymbol{nn}} d\Gamma + \Psi_I \bar{P}|_{x\in c_P} + \int_{\Omega} \Psi_I \bar{q} d\Omega
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

1.3 小结

本章首先系统地分析了再生核无网格近似理论，讨论再生核无网格形函数的一致性条件。接着以二阶弹性力学问题和四阶薄板问题为例，详细介绍了关于这两类问题的伽辽金无网格法的离散平衡控制方程。区别于有限元，无网格形函数通常在节点上不具备插值性，需要采用适当的方法施加强制边界条件。

第 2 章　强制边界条件施加方法

2.1　拉格朗日乘子法

Belytschko 等人 [?] 提出采用拉格朗日乘子法施加本质边界条件，是指在原势能泛函中引入位移强制边界条件对应的约束项。

针对弹性力学问题，拉格朗日乘子法的势能泛函表达式为：

$$\bar{\Pi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}) = \Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g} \boldsymbol{\lambda}(u_i - g_i) d\Gamma \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_{sd}}\}^T$ 为拉格朗日乘子，对式 (2.1) 进行变分得到伽辽金弱形式：

$$\begin{aligned}\delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}) &= \Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \boldsymbol{\lambda} d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta\boldsymbol{\lambda}(u_i - g_i) d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \delta\varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma^g} \delta u_i \boldsymbol{\lambda} d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta\boldsymbol{\lambda}(u_i - g_i) d\Gamma \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.2}$$

此时，对拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 进行离散：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{K=1}^{NL} N_K(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\lambda}_K \\ \delta\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{K=1}^{NL} N_K(\boldsymbol{x}) \delta\boldsymbol{\lambda}_K\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_K = \{\lambda_{K1}, \cdots, \lambda_{Kn_{sd}}\}^T$，$\delta\boldsymbol{\lambda}_K = \{\delta\lambda_{K1}, \cdots, \delta\lambda_{Kn_{sd}}\}^T$，$NL$ 为离散拉格朗日乘子的个数，$N_K(\boldsymbol{x})$ 为拉格朗日乘子节点之间的插值函数。同时引入式 (1.20)-(1.22) 可以得到式 (2.2) 的离散控制方程表达式为：

$$\begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{d} \\ \delta\boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f}^\lambda \end{Bmatrix} \right\} = 0 \tag{2.4}$$

此时，弱形式 (2.2) 中引入了拉格朗日乘子法包含了强制边界条件，由于 $\delta\boldsymbol{d}$、$\delta\boldsymbol{\Lambda}^T$ 的任意性可以得到引入本质边界条件拉格朗日乘子法的伽辽金无网格法平衡方

程的表达式为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f}^\lambda \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{f}$ 见式 (1.24)，G_{IK}、$\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{f}^\lambda$ 的具体表达式如下：

$$\begin{aligned} G_{IK} &= -\int_{\Gamma^g} \Psi_I N_K d\Gamma \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_{NL}^T \end{bmatrix}^T \\ f_K^\lambda &= -\int_{\Gamma^g} N_K \boldsymbol{g} d\Gamma \end{aligned} \tag{2.6}$$

针对薄板问题，拉格朗日乘子法的势能泛函表达式为：

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}(w,\lambda) = \Pi(w) &- \int_{\Gamma_w} \lambda(w-\bar{w}) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_\theta} \lambda(\theta_{\boldsymbol{n}} - \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}) d\Gamma - \lambda(w-\bar{w})|_{x\in c_w} \end{aligned} \tag{2.7}$$

对式 (2.7) 进行变分得到拉格朗日乘子法的伽辽金弱形式为：

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Pi}(w,\lambda) &= \delta\Pi(w) - \int_{\Gamma_w} (\delta\lambda w + \lambda\delta w) d\Gamma + \int_{\Gamma_w} \delta\lambda\bar{w} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_\theta} (\delta\lambda\theta_{\boldsymbol{n}} + \delta\theta_{\boldsymbol{n}}\lambda) d\Gamma - \int_{\Gamma_\theta} \delta\lambda\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}} d\Gamma + (\delta\lambda w - \lambda\delta w)|_{x\in c_w} - \delta\lambda\bar{w}|_{x\in c_w} \end{aligned} \tag{2.8}$$

引入拉格朗日乘子的离散式 (2.3), 并同时引入式 (1.26)、(1.30) 和 (1.37) 得到式 (2.8) 的离散平衡控制方程式：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f}^\lambda \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

其中 $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{f}$ 见式 (1.40)，G_{IK}、$\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{f}^\lambda$ 的具体表达式如下：

$$\begin{aligned} G_{IK} &= -\int_{\Gamma_w} N_K(x)\Psi_{I,\boldsymbol{n}} d\Gamma - N_K(x)\Psi_I|_{x\in c_w} \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_{NL}^T \end{bmatrix}^T \\ f_K^\lambda &= -\int_{\Gamma_w} N_K(x) d\Gamma \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2 修正变分原理法

为了消除拉格朗日乘子法中增加的代求未知量，Lu 等人 [?] 将拉格朗日乘子替换为相应位置的面力未知量，即 $\boldsymbol{\lambda} = t_i = \sigma_{ij} n_i$，提出了施加位移边界条件的修正变分原理方法。

针对弹性力学问题将式 (2.2) 中的拉格朗日乘子用面力 $\sigma_{ij} n_i$ 进行替代从而得到：

$$\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_i (u_i - g_i) d\Gamma \tag{2.11}$$

对式 (2.11) 进行变分可以得到伽辽金弱形式：

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) &= \delta\Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g} \delta u_i n_i \sigma_{ij} d\Gamma - \int_{\Gamma^g} n_i \delta\sigma_{ij} (u_i - g_i) d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

此时拉格朗日乘子项 $\boldsymbol{\lambda}$ 的无网格离散形式 $\boldsymbol{\lambda}^h$ 可以表示为：

$$\boldsymbol{\lambda}^h = n_i \sigma_{ij} = \bar{\boldsymbol{n}}^T \sigma_{ij} = \bar{\boldsymbol{n}}^T \boldsymbol{D} \varepsilon^h = \sum_{I=1}^{NP} \bar{\boldsymbol{n}}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_I \boldsymbol{d}_I \tag{2.13}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{n}}$ 在平面问题中表达式为：

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

引入无网格离散 (2.13) 以及式 (1.20)-(1.22) 得到修正变分原理法的无网格离散平衡方程：

$$\delta \boldsymbol{d}^T \{ (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^n) \boldsymbol{d} - (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^n) \} = 0 \tag{2.15}$$

根据 $\delta \boldsymbol{d}$ 的任意性可以得到：

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^n) \boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^n \tag{2.16}$$

其中：

$$\begin{aligned} K_{IJ}^n &= -\int_{\Gamma^g} \Psi_I \bar{\boldsymbol{n}}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_J d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{n}} \Psi_J d\Gamma \\ f_I^n &= -\int_{\Gamma^g} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{g} d\Gamma \end{aligned} \tag{2.17}$$

根据 [?] 修正变分原理法的薄板问题势能泛函表达式为：

$$
\begin{aligned}
\bar{\Pi}(w) = & \frac{1}{2}\int_{\Omega}\kappa_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega + \int_{\Gamma_M}\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma - \int_{\Gamma_V} w\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma - w\bar{P}|_{x\in c_P} + \int_{\Omega}w\bar{q}d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_w}V_{\boldsymbol{n}}(w-\bar{w})d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta}M_{\boldsymbol{nn}}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}})d\Gamma - P(w-\bar{w})|_{x\in c_w}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

对式 (2.18) 进行变分得到修正变分原理法的伽辽金弱形式为：

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega}\delta\kappa_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega - \int_{\Gamma_w}(\delta V_{\boldsymbol{n}}w + \delta w V_{\boldsymbol{n}})d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta}(\delta M_{\boldsymbol{nn}}\theta_{\boldsymbol{n}} + \delta\theta_{\boldsymbol{n}}M_{\boldsymbol{nn}})d\Gamma \\
& - (\delta P w + \delta w P)|_{x\in c_w} = \int_{\Gamma_M}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma - \int_{\Gamma_V}\delta w\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma - \delta w\bar{P}|_{x\in c_P} \\
& + \int_{\Omega}\delta w\bar{q}d\Omega - \int_{\Gamma_w}\delta V_{\boldsymbol{n}}\bar{w}d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta}\delta M_{\boldsymbol{nn}}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma - \delta P\bar{w}|_{x\in c_w}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

引入无网格离散式 (1.37) 和式 (1.26)-(1.34) 得到修正变分原理法伽辽金无网格离散平衡控制方程：

$$
(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^n)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^n \tag{2.20}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
K_{IJ}^n = & -\int_{\Gamma_w}\Psi_I\mathcal{V}_{\alpha\beta}\Psi_{J,\alpha\beta}d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta}\Psi_{I,n}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\Psi_{J,\alpha\beta}d\Gamma + [[\Psi_I\mathcal{P}_{\alpha\beta}\Psi_{J,\alpha\beta}]]_{x\in c_w} \\
& - \int_{\Gamma_w}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\Psi_J d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\Psi_{J,n}d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J]]_{x\in c_w} \\
f_I^n = & -\int_{\Gamma_w}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\bar{w}d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\bar{w}]]_{x\in c_w}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

2.3 罚函数法

罚函数法 [?] 是在势能泛函中通过引入一个罚因子 α 引入强制边界条件的残值项，针对弹性力学问题：

$$
\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \Pi(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}\alpha\int_{\Gamma^g}(u_i-g_i)(u_i-g_i)d\Gamma \tag{2.22}
$$

对式 (2.22) 进行变分可以得到引入罚函数法的伽辽金弱形式为：

$$
\begin{aligned}
\delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) &= \delta\Pi(\boldsymbol{u}) + \alpha\int_{\Gamma^g}\delta u_i u_i d\Gamma - \alpha\int_{\Gamma^g}\delta u_i g_i d\Gamma \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

引入无网格离散式 (1.20)-(1.22) 得到：

$$\delta \boldsymbol{d}^T\{(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^\alpha)\boldsymbol{d}-(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^\alpha)\}=0 \tag{2.24}$$

同样由于 $\delta\boldsymbol{d}$ 的任意性可以得到罚函数法的无网格离散平衡控制方程：

$$(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^\alpha)\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^\alpha \tag{2.25}$$

其中：

$$\begin{aligned} K_{IJ}^\alpha &= \alpha\int_{\Gamma^g}\Psi_I\Psi_J d\Gamma \\ f_I^\alpha &= \alpha\int_{\Gamma^g} N_I\boldsymbol{g}d\Gamma \end{aligned} \tag{2.26}$$

根据 [?] 通过引入罚因子 α 得到罚函数法薄板问题势能泛函表达式为：

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}(w) = &\frac{1}{2}\int_\Omega \kappa_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega + \int_{\Gamma_M}\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma - \int_{\Gamma_V} w\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma - w\bar{P}|_{x\in c_P} + \int_\Omega w\bar{q}d\Omega \\ &+\frac{\alpha_w}{2}\int_{\Gamma_w}(w-\bar{w})^2d\Gamma + \frac{\alpha_\theta}{2}\int_{\Gamma_\theta}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}})^2d\Gamma + \frac{\alpha_c}{2}(w-\bar{w})^2|_{x\in c_w} \end{aligned} \tag{2.27}$$

对式 (2.27) 进行变分得到罚函数法伽辽金弱形式为：

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \delta\kappa_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega + \alpha_w\int_{\Gamma_w}\delta w w d\Gamma + \alpha_\theta\int_{\Gamma_\theta}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}\theta_{\boldsymbol{n}}d\Gamma + \alpha_c\delta w w|_{x\in c_w} \\ =&\int_{\Gamma_M}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma - \int_{\Gamma_V}\delta w\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma - \delta w\bar{P}|_{x\in c_P} + \int_\Omega \delta w\bar{q}d\Omega \\ &+\alpha_w\int_{\Gamma_w}\delta w\bar{w}d\Gamma + \alpha_\theta\int_{\Gamma_\theta}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma + \alpha_c\delta w\bar{w}|_{x\in c_w} \end{aligned} \tag{2.28}$$

引入式 (1.26)、(1.30) 和 (1.37) 得到罚函数法伽辽金无网格离散平衡控制方程：

$$(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^\alpha)\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^\alpha \tag{2.29}$$

其中：

$$\begin{aligned} K_{IJ}^\alpha &= \alpha_w\int_{\Gamma_w}\Psi_I\Psi_J d\Gamma + \alpha_\theta\int_{\Gamma_\theta}\Psi_{I,\boldsymbol{n}}\Psi_{J,\boldsymbol{n}}d\Gamma + \alpha_c\Psi_I\Psi_J|_{x\in c_w} \\ f_I^\alpha &= \alpha_w\int_{\Gamma_w}\Psi_I\bar{w}d\Gamma + \alpha_\theta\int_{\Gamma_\theta}\Psi_{I,\boldsymbol{n}}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma + \alpha_c\Psi_I\bar{w}|_{x\in c_w} \end{aligned} \tag{2.30}$$

2.4 Nitsche 法

Nistche 法 [?] 是结合了罚函数法和修正变分原理法的一种满足变分一致性的本质边界条件施加方法。

弹性力学问题其泛函表达式为：

$$\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g} n_i \sigma_{ij}(u_i - g_i) d\Gamma + \frac{1}{2}\alpha \int_{\Gamma^g} (u_i - g_i)(u_i - g_i) d\Gamma \tag{2.31}$$

对式 (2.31) 进行变分得到 Nistche 法的伽辽金弱形式为：

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) &= \delta\Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \sigma_{ij} n_i d\Gamma - \int_{\Gamma^g} n_i \delta\sigma_{ij}(u_i - g_i) d\Gamma \\ &+ \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i u_i d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i g_i d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

根据修正变分原理法和罚函数法的无网格法离散平衡控制方程得到 Nitsche 法的无网格法离散平衡控制方程的表达式为：

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^n + \boldsymbol{K}^\alpha)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^n + \boldsymbol{f}^\alpha \tag{2.33}$$

其中：

$$\begin{aligned} K_{IJ} &= \int_\Omega \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_J d\Omega \\ K_{IJ}^n &= -\int_{\Gamma^g} \Psi_I \bar{\boldsymbol{n}}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_J d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{n}} \Psi_J d\Gamma \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} K_{IJ}^\alpha &= \alpha \int_{\Gamma^g} \Psi_I \Psi_J d\Gamma \\ f_I &= \int_\Omega \Psi_I \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \Psi_I \boldsymbol{t} d\Gamma \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} f_I^n &= -\int_{\Gamma^g} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{g} d\Gamma \\ f_I^\alpha &= \alpha \int_{\Gamma^g} N_I \boldsymbol{g} d\Gamma \end{aligned} \tag{2.36}$$

薄板问题 Nitsche 法的泛函表达式为：

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}(w)=&\frac{1}{2}\int_{\Omega}\kappa_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega+\int_{\Gamma_M}\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma-\int_{\Gamma_V}w\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-w\bar{P}|_{x\in c_P}+\int_{\Omega}w\bar{q}d\Omega\\&-\int_{\Gamma_w}V_{\boldsymbol{n}}(w-\bar{w})d\Gamma+\int_{\theta}M_{\boldsymbol{nn}}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}})d\Gamma-P(w-\bar{w})|_{x\in c_w}\\&+\frac{\alpha_w}{2}\int_{\Gamma_w}(w-\bar{w})^2d\Gamma+\frac{\alpha_\theta}{2}\int_{\Gamma_\theta}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}})^2d\Gamma+\frac{\alpha_c}{2}(w-\bar{w})^2|_{x\in c_w}\end{aligned}\tag{2.37}$$

对式 (2.37) 进行变分得到 Nitshce 法伽辽金弱形式为：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\delta\kappa_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega-\int_{\Gamma_w}(\delta V_{\boldsymbol{n}}w+\delta wV_{\boldsymbol{n}})d\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}(\delta M_{\boldsymbol{nn}}\theta_{\boldsymbol{n}}+\delta\theta_{\boldsymbol{n}}M_{\boldsymbol{nn}})d\Gamma\\&-(\delta Pw+\delta wP)|_{x\in c_w}+\alpha_w\int_{\Gamma_w}\delta wwd\Gamma+\alpha_\theta\int_{\Gamma_\theta}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}\theta_{\boldsymbol{n}}d\Gamma+\alpha_c\delta ww|_{x\in c_w}\\&=\int_{\Gamma_M}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma-\int_{\Gamma_V}\delta w\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-\delta w\bar{P}|_{x\in c_P}+\int_{\Omega}\delta w\bar{q}d\Omega-\int_{\Gamma_w}\delta V_{\boldsymbol{n}}\bar{w}d\Gamma\\&+\int_{\Gamma_\theta}\delta M_{\boldsymbol{nn}}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-\delta P\bar{w}|_{x\in c_w}+\alpha_w\int_{\Gamma_w}\delta w\bar{w}d\Gamma+\alpha_\theta\int_{\Gamma_\theta}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma+\alpha_c\delta w\bar{w}|_{x\in c_w}\end{aligned}\tag{2.38}$$

通过修正变分原理法和罚函数法的离散平衡控制方程可以得到 Nitsche 法的伽辽金无网格离散平衡控制方程：

$$(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^n+\boldsymbol{K}^\alpha)\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^n+\boldsymbol{f}^\alpha\tag{2.39}$$

其中：

$$\begin{aligned}K_{IJ}&=\int_{\Omega}\boldsymbol{B}_I^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_Jd\Omega\\f_I&=\int_{\Gamma_V}\Psi_I\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-\int_{\Gamma_M}\Psi_{I,\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma+\Psi_I\bar{P}|_{x\in C_P}+\int_{\Omega}\Psi_I\bar{q}d\Omega\end{aligned}\tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}K_{IJ}^n=&-\int_{\Gamma_w}\Psi_I\mathcal{V}_{\alpha\beta}\Psi_{J,\alpha\beta}d\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}\Psi_{I,n}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\Psi_{J,\alpha\beta}d\Gamma+[[\Psi_I\mathcal{P}_{\alpha\beta}\Psi_{J,\alpha\beta}]]_{x\in c_w}\\&-\int_{\Gamma_w}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\Psi_Jd\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\Psi_{J,n}d\Gamma+[[\mathcal{P}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J]]_{x\in c_w}\\f_I^n=&-\int_{\Gamma_w}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\bar{w}d\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma+[[\mathcal{P}_{\alpha\beta}\Psi_{I,\alpha\beta}\bar{w}]]_{x\in c_w}\end{aligned}\tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}K_{IJ}^\alpha&=\alpha_w\int_{\Gamma_w}\Psi_I\Psi_Jd\Gamma+\alpha_\theta\int_{\Gamma_\theta}\Psi_{I,\boldsymbol{n}}\Psi_{J,\boldsymbol{n}}d\Gamma+\alpha_c\Psi_I\Psi_J|_{x\in c_w}\\f_I^\alpha&=\alpha_w\int_{\Gamma_w}\Psi_I\bar{w}d\Gamma+\alpha_\theta\int_{\Gamma_\theta}\Psi_{I,\boldsymbol{n}}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma+\alpha_c\Psi_I\bar{w}|_{x\in c_w}\end{aligned}\tag{2.42}$$

2.5 小结

本章介绍了集中常用的边界条件施加方法。采用拉格朗日乘子法进行施加本质边界条件增加了原有刚度矩阵的维数，当过多的自由度 λ 会引起整体刚度矩阵的奇异性，不满足高阶的变分一致性。采用修正的变分原理施加本质边界条件保持了刚度矩阵的对称性，并且整个求解过程不增加刚度矩阵的维数，但是该方法的计算精度一般低于拉格朗日乘子法。罚函数法具有简洁高效的特点，但由于引入了罚因子 α 其计算精度会随着罚因子的改变而改变，选择过大的罚因子会引起计算精度的不稳定，过小则会导致无法准确施加位移边界条件。Nitsche 法是满足变分一致性，但在数值计算过程中引入了形函数高阶梯度，降低了计算效率，并且为了满足正定性也引入了人工参数。