

学校代码: 10385

分类号: _____

研究生学号: _____

密 集: _____



华侨大学
HUAQIAO UNIVERSITY

硕士专业学位论文

论文学中文题目

English Thesis Title

作者姓名: _____

指导教师: _____

合作教师: _____

专业学位类别: _____

专业学位领域: _____

研究方向: _____

所在学院: 土木工程学院

论文提交日期: 二〇二三年五月二十八日

学 位 论 文 答 辩 委 员 会 决 议

根据《中华人民共和国学位条例》、《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》、《华侨大学学位授予工作细则》及《华侨大学研究生学位论文质量监控与评阅答辩的管理规定》的规定，学位论文答辩委员会经充分交换意见，对论文做出评价，并以无记名投票方式进行表决，同意该同学通过硕士学位论文答辩，同意授予硕士学位。

答辩委员会(主席签字): _____

答辩时间: _____ 年 ____ 月 ____ 日

学位论文独创性声明

本人声明兹呈交的学位论文是本人在导师指导下完成的研究成果。论文写作中不包含其他人已经发表或撰写过的研究内容，如参考他人或集体的科研成果，均在论文中以明确的方式说明。本人依法享有和承担由此论文所产生的权利和责任。

论文作者签名: _____ 签名日期: _____

学位论文版权使用授权声明

本人同意授权华侨大学有权保留并向国家机关或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许学位论文被查阅和借阅。本人授权华侨大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

论文作者签名: _____ 指导老师签名: _____
签名日期: _____ 签名日期: _____

目 录

第 1 章 薄板问题	3
1.1 薄板控制方程	3
1.2 弹性力学问题伽辽金弱形式	4
1.3 薄板问题伽辽金弱形式	4
第 2 章 伽辽金无网格法	7
2.1 势问题的伽辽金无网格离散	7
2.2 弹性力学问题的伽辽金无网格离散	8
2.3 强制边界条件施加方法	9
2.3.1 拉格朗日乘子法	9
2.3.2 修正变分原理法	10
2.3.3 罚函数法	11
2.3.4 Nistche 法	12
2.4 伽辽金无网格离散控制方程的数值积分方法	12
2.4.1 高斯积分法	12
2.4.2 再生光滑梯度积分法	14
第 3 章 弹性力学问题 HR 弱形式	17
3.1 Hellinger-Reissner 变分原理	17
3.2 位移离散和应力离散	18
3.2.1 位移离散与再生核近似	18
3.2.2 应力离散与再生光滑梯度近似	21
3.3 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法	23
3.4 数值算例	27
3.4.1 分片实验	27
3.4.2 悬臂梁问题	29
3.4.3 带孔无限大平板问题	32
第 4 章 薄板问题 HR 弱形式	39
4.1 Hellinger-Reissner 变分原理	39
4.2 挠度离散和弯矩离散	41
4.2.1 挠度离散和再生核近似	41
4.2.2 弯矩离散和再生光滑梯度近似	42
4.3 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法	44
4.4 数值算例	48
4.4.1 分片实验	48
4.4.2 简支方板问题	49
4.4.3 简支等边三角形板问题	53
4.4.4 简支环行板问题	57

第1章 薄板问题

1.1 薄板控制方程

考虑厚度为 h 的薄板，根据 Kirchhoff 薄板假设将薄板 x, y, z 方向上的总位移定义为 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ ：此时，位移 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ 可以表示为：

$$\begin{cases} \hat{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 w_{,\alpha} & \alpha = 1, 2 \\ \hat{u}_3(\mathbf{x}) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.1)$$

式中 u_α 表示薄板中面处 x, y 方向上的位移， w 表示挠度。

根据小变形假设关系式：

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{\alpha,\beta} + \hat{u}_{\beta,\alpha}) \quad (1.2)$$

其中， ε 为应变。

根据式 (1.2) 得出有关 Kirchhoff 薄板假设的应变关系式如下：

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{\alpha,\beta} + \hat{u}_{\beta,\alpha}) = \varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} x_3 & \alpha, \beta = 1, 2 \\ \hat{\varepsilon}_{3i} = \hat{\varepsilon}_{i3} = 0 & i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.3)$$

其中：

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \quad (1.4)$$

式中， $\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ 为曲率张量 κ 的分量

考虑经典的线弹性本构关系：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \hat{\sigma}_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\eta} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta} (\varepsilon_{\gamma\eta} + x_3 \kappa_{\gamma\eta}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中 $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ 为应力， $C_{\alpha\beta\gamma\eta}$ 为四阶弹性张量

根据最小势能原理得出的势能泛函关系为：

$$\Pi(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \hat{\varepsilon}_{\gamma\eta} d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (1.6)$$

将式 (1.5)、(3.4) 代入式 (1.6) 中的第一项可以得到：

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\Omega &= \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} x_3) C_{\alpha\beta\gamma\eta} (\varepsilon_{\gamma\eta} + x_3 \kappa_{\gamma\eta}) dx_3 d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} h \varepsilon_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \varepsilon_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta} \frac{h^3}{12} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \kappa_{\gamma\eta} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} h \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega \end{aligned} \quad (1.7)$$

根据式 (1.7) 可以划分为两个独立的问题。即具有变量 \hat{u}_α 的传统弹性力学问题和具有变量 w 的薄板问题，能量泛函关系式 (1.6) 拆分为：

$$\Pi(\hat{\mathbf{u}}) = \Pi_E(\hat{\mathbf{u}}) + \Pi_P(M_{\alpha\beta}, w) \quad (1.8)$$

1.2 弹性力学问题伽辽金弱形式

传统弹性力学问题的势能泛函的表达式为:

$$\Pi_E(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (1.9)$$

这里采用拉格朗日乘子法在伽辽金无网格法施加强制边界条件, 即在弹性力学问题的势能泛函(1.9)中引入位移强制边界条件对应的约束项, 相应的势能泛函为:

$$\bar{\Pi}_E(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi^E(\hat{\mathbf{u}}) - \int_{\Gamma^g} \boldsymbol{\lambda} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{g}) d\Gamma \quad (1.10)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_{sd}}\}^T$ 为拉格朗日乘子, $\Pi^E(\hat{\mathbf{u}})$ 是式(1.9)定义的泛函。式(1.10)所表示的泛函的驻值条件为:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi}^E(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}) &= \delta \Pi^E(\hat{\mathbf{u}}) - \int_{\Gamma^u} \delta \hat{\mathbf{u}} \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta \lambda (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{g}) \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\hat{\Omega} - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma^g} \delta \hat{\mathbf{u}} \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta \lambda (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{g}) d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.3 薄板问题伽辽金弱形式

薄板问题控制方程:

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q} = 0 & \text{in } \Omega \\ w = \bar{w} & \text{on } \Gamma^w \\ w_{,\mathbf{n}} = \bar{\theta}_{\mathbf{n}} & \text{on } \Gamma^\theta \\ M_{\mathbf{n}\mathbf{n}} = \bar{M}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} & \text{on } \Gamma^M \\ Q_{\mathbf{n}} + M_{\mathbf{n}\mathbf{s},\mathbf{s}} = \bar{V}_{\mathbf{n}} & \text{on } \Gamma^V \\ w_i = \bar{w}_i & i = 1, 2, 3 \dots \\ P_j = \bar{P}_j & j = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} w_{,\mathbf{n}} &= w_{,\alpha} n_\alpha \\ M_{\mathbf{n}\mathbf{n}} &= M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \\ Q_{\mathbf{n}} &= M_{\alpha\beta,\beta} n_\alpha \\ M_{\mathbf{n}\mathbf{s},\mathbf{s}} &= M_{\alpha\beta,\beta} n_\alpha \\ M_{\mathbf{n}\mathbf{s},\mathbf{s}} &= M_{\alpha\beta,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma \\ P_j &= M_{\alpha\beta} (s_\alpha^1 n_\beta^1 - s_\alpha^2 n_\beta^2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

薄板问题的势能泛函关系式:

$$\Pi_P(M_{\alpha\beta}, w) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} w q d\Omega - \int_{\Gamma_w} \bar{V}_{\mathbf{n}} w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \bar{M}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} \theta_{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (1.14)$$

引入拉格朗日乘子:

$$\begin{aligned}\Pi_P(M_{\alpha\beta}, w, \lambda) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} w q d\Omega + \int_{\Gamma_w} \lambda^w (w - \bar{w}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_\theta} \lambda^\theta (\theta_n - \bar{\theta}_n) d\Gamma - \int_{\Gamma_w} \bar{V}_n w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \bar{M}_{nn} \theta_n d\Gamma\end{aligned}\quad (1.15)$$

弱形式:

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} \delta M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} \delta w q d\Omega + \int_{\Gamma_w} \delta \lambda^w (w - \bar{w}) d\Gamma + \int_{\Gamma_w} \lambda^w \delta w d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_\theta} \delta \lambda^\theta (\theta_n - \bar{\theta}_n) d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \lambda^\theta \delta \theta_n d\Gamma - \int_{\Gamma_w} \delta \bar{V}_n w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \delta \bar{M}_{nn} \theta_n d\Gamma \\ & = 0\end{aligned}\quad (1.16)$$

第 2 章 伽辽金无网格法

2.1 势问题的伽辽金无网格离散

不失为一般性，考虑场变量为标量 $u(\mathbf{x})$ 的势问题的伽辽金无网格离散。这类问题的控制方程表达式为：

$$\begin{cases} u_{,ii} + b = 0 & \text{in } \Omega \\ u_{,i} n_{,i} = t & \text{on } \Gamma^t \\ u = g & \text{on } \Gamma^g \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $u(\mathbf{x})$ 为场变量， $b(\mathbf{x})$ 为源项， Ω 表示问题所在的空间区域， Γ^t 、 Γ^g 分别表示为自然边界和强制边界，且 $\Gamma^t \cup \Gamma^g = \Gamma$, $\Gamma^t \cap \Gamma^g = \emptyset$ ， t 和 g 分别为自然边界和强制边界上给定的边界条件， $\mathbf{n} = \{n_i\}$ 是 Γ 的外法线方向。

式(2.1)定义的势问题，存在以下势能泛函：

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla u) d\Omega - \int_{\Omega} u b d\Omega - \int_{\Gamma^t} u t d\Gamma \quad (2.2)$$

式中 ∇ 为梯度算子。根据最小势能原理，式(2.1)的真实解 u 对应式(2.2)的泛函取极值称为等效积分弱形式，其表达式为：

$$\delta \Pi(u) = \int_{\Omega} (\nabla \delta u) \cdot (\nabla u) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u b d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u t d\Gamma = 0 \quad (2.3)$$

在伽辽金无网格法中，场变量 $u(\mathbf{x})$ 和权函数 $\delta u(\mathbf{x})$ 的伽辽金无网格离散表达式为：

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) d_I, \delta u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}_J) \delta d_J \quad (2.4)$$

对应的场变量梯度离散形式为：

$$\nabla u^h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_{,1}^h(\mathbf{x}) \\ u_{,2}^h(\mathbf{x}) \\ u_{,3}^h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{B}_I(\mathbf{x}) d_J, \mathbf{B}_I(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_{I,1} \\ \Psi_{I,2} \\ \Psi_{I,3} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

将式(2.5)和(2.4)代入到式(2.3)中，可以得到离散的控制方程为：

$$\delta \mathbf{d}^T (\mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f}) = 0 \quad (2.6)$$

式中 $\mathbf{d} = \{d_I\}$ 为无网格节点 \mathbf{x}_I 上的位移分量节点系数， $\mathbf{K} = \{K_{IJ}\}$ 和 $\mathbf{f} = \{f_I\}$ 分别表示刚度矩阵和力向量，具体表达式为：

$$\begin{aligned} K_{IJ} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{B}_J d\Omega \\ f_I &= \int_{\Omega} \Psi_I b d\Omega + \int_{\Gamma^t} \Psi_I t d\Gamma \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2 弹性力学问题的伽辽金无网格离散

不失为一般性, 弹性力学问题的基本未知量为位移向量 $\mathbf{u} = \{u_i\}, i = 1, \dots, n_{sd}$, 其静力平衡方程为:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij}n_j = t_i & \text{on } \Gamma^t \\ u_i = g_i & \text{on } \Gamma^g \end{cases} \quad (2.8)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ 为柯西应力, $\mathbf{b} = \{b_i\}$ 为体力, Γ^t 、 Γ^g 分别表示为自然和强制边界条件, $\Gamma^t \cup \Gamma^g = \Gamma$, $\Gamma^t \cap \Gamma^g = \emptyset$, $\mathbf{t} = \{t_i\}$ 和 $\mathbf{g} = \{g_i\}$ 分别为自然边界和强制边界上给定的面力和位移, $\mathbf{n} = \{n_i\}$ 是 Γ^t 的外法线方向。

考虑经典的线弹性本构关系:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \varepsilon \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中 C_{ijkl} 为四阶弹性张量, ε 为应变, ∇ 为梯度算子, “ $:$ ” 为双点积张量缩并运算符号。根据最小势能原理, 式(2.8)的势能泛函表达式为:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega - \int_{\Omega} u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} u_i t_i d\Gamma \quad (2.10)$$

对式(2.10)取极值可以得到式(2.8)的等效积分弱形式, 其表达式为:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

此时引入位移向量 \mathbf{u} , 应变向量 ε , 应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的表达式:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

当考虑 xy 平面内的平面应变问题时, 弹性本构关系的向量表达式为:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

当考虑 xy 平面内的平面应力问题时, 弹性本构关系变为:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中 \mathbf{D} 为弹性张量 C_{ijkl} 的矩阵表达式, E 为杨氏模量, ν 为泊松比。

引入无网格离散后, 位移向量可表示为:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u_1^h(\mathbf{x}) \\ u_2^h(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{d}_J, \mathbf{d}_J = \begin{Bmatrix} d_{J1} \\ d_{J2} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

伽辽金法对应的无网格离散权函数为:

$$\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}_J) \delta \mathbf{d}_J \quad (2.16)$$

将式(2.15)-(2.17)代入式(2.9)可以得到离散的应变向量:

$$\varepsilon^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{B}_I(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I, \mathbf{B}_I(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Psi_{I,y} \\ \Psi_{I,y} & \Psi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

将式(2.15)-(2.17)代入到弱形式(2.11)中可以得到离散控制方程:

$$\delta \mathbf{d}^T (\mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f}) = 0 \quad (2.18)$$

式中 $\mathbf{d} = \{\mathbf{d}_I\}$ 表示位移向量, $\mathbf{K} = \{K_{IJ}\}$ 和 $\mathbf{f} = \{f_I\}$ 分别表示刚度矩阵和力向量, 具体表达式为:

$$\begin{aligned} K_{IJ} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_J d\Omega \\ f_I &= \int_{\Omega} \mathbf{I} \Psi_I \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \mathbf{I} \Psi_I \mathbf{t} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中 $\mathbf{1} = diag\{1, \dots, 1\}$ 是与空间维数相同的单位矩阵。由于无网格形函数不具有插值性质, 不能直接在弱形式中引入位移边界条件, 因此需要采用适当的方法施加强制边界条件。

2.3 强制边界条件施加方法

2.3.1 拉格朗日乘子法

Belytschko 等人采用拉格朗日乘子法施加本质边界条件, 即在原势能泛函中引入位移强制边界条件对应的约束项, 拉格朗日乘子法的势能泛函表达式为:

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi(\mathbf{u}) - \int_{\Gamma^g} \boldsymbol{\lambda}(u_i - g_i) d\Gamma \quad (2.20)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_{sd}}\}^T$ 为拉格朗日乘子, 对式(2.20)取极值为:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) &= \Pi(\mathbf{u}) - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \boldsymbol{\lambda} d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (u_i - g_i) d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \boldsymbol{\lambda} d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta \boldsymbol{\lambda} (u_i - g_i) d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

此时，对拉格朗日乘子 λ 进行离散可得到表达式为：

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x}) &= \sum_{K=1}^{NL} N_K(\mathbf{x}) \lambda_K \\ \delta\lambda(\mathbf{x}) &= \sum_{K=1}^{NL} N_K(\mathbf{x}) \delta\lambda_K\end{aligned}\quad (2.22)$$

其中 $\lambda_K = \{\lambda_{K1}, \dots, \lambda_{Kn_{sd}}\}^T$, $\delta\lambda_K = \{\delta\lambda_{K1}, \dots, \delta\lambda_{Kn_{sd}}\}^T$, NL 为离散拉格朗日乘子的个数, $N_K(\mathbf{x})$ 为拉格朗日乘子节点之间的插值函数。同时引入式(2.15)-(2.17)可以得到式(2.21)的离散控制方程表达式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\mathbf{d} \\ \delta\Lambda \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d} \\ \Lambda \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}^\lambda \end{array} \right\} \right\} = 0 \quad (2.23)$$

其中：

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{IK} &= -\mathbf{I} \int_{\Gamma_g} \Psi_I N_K d\Gamma \\ \Lambda &= [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{NL}^T]^T \\ \mathbf{f}_K^\lambda &= - \int_{\Gamma_g} N_K \mathbf{g} d\Gamma\end{aligned}\quad (2.24)$$

此时，弱形式(2.21)中引入了拉格朗日乘子法包含了强制边界条件，由于 $\delta\mathbf{d}$ 、 $\delta\Lambda^T$ 的任意性可以得到引入本质边界条件拉格朗日乘子法的伽辽金无网格法平衡方程的表达式为：

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d} \\ \Lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}^\lambda \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

采用拉格朗日乘子法进行施加本质边界条件增加了原有刚度矩阵的维数，并且使得修改后的刚度矩阵失去了正定性。

2.3.2 修正变分原理法

为了消除拉格朗日乘子法中增加的代求未知量，Lu 等人将拉格朗日乘子替换为相应位置的面力未知量，即 $\lambda = t_i = \sigma_{ij} n_i$ ，提出了施加位移边界条件的修正变分原理方法。在该方法中，将式(2.21)中的拉格朗日乘子用面力 $\sigma_{ij} n_i$ 进行替代从而得到：

$$\begin{aligned}\delta\bar{\Pi}(\mathbf{u}) &= \delta\Pi(\mathbf{u}) - \int_{\Gamma_g} \delta u_i n_i \sigma_{ij} d\Gamma - \int_{\Gamma_g} n_i \delta\sigma_{ij} (u_i - g_i) d\Gamma \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.26)$$

此时拉格朗日乘子项 λ 的无网格离散形式 λ^h 可以表示为：

$$\lambda^h = n_i \sigma_{ij} = \bar{n}_i^T \sigma_{ij} = \bar{n}_i^T C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^h = \sum_{I=1}^{NP} \bar{n}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I \mathbf{d}_I \quad (2.27)$$

其中 \bar{n}_i 在平面问题中表达式为：

$$\bar{n}_i = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

最后，修正变分原理法的无网格离散平衡方程为：

$$\delta \mathbf{d}^T \{(\mathbf{K} + \mathbf{K}^n) \mathbf{d} - (\mathbf{f} + \mathbf{f}^n)\} = 0 \quad (2.29)$$

存在：

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^n) \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^n \quad (2.30)$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_J d\Omega \\ \mathbf{f} &= \int_{\Omega} \mathbf{I} \Psi_I \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \mathbf{I} \Psi_I \mathbf{t} d\Gamma \\ \mathbf{K}^n &= - \int_{\Gamma^g} \Psi_I \bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{n}} \Psi_J d\Gamma \\ \mathbf{f}^n &= - \int_{\Gamma^g} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{n}} \mathbf{g} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.31)$$

采用修正的变分原理施加本质边界条件保持了刚度矩阵的对称性，并且整个求解过程不增加刚度矩阵的维数，但是该方法的计算精度一般低于拉格朗日乘子法。并且修正变分原理方法的离散控制方程中假定每个节点两个方向都是家里强制边界条件，实际在计算过程中只考虑受约束的方向。

2.3.3 罚函数法

罚函数法是在势能泛函中通过引入一个罚因子 α 引入强制边界条件的残值项：

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \alpha \int_{\Gamma^g} (u_i - g_i)(u_i - g_i) d\Gamma \quad (2.32)$$

对上式取值可以得到引入罚函数法的伽辽金弱形式为：

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi}(\mathbf{u}) &= \delta \Pi(\mathbf{u}) + \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i u_i d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i g_i d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

引入无网格离散得到：

$$\delta \mathbf{d}^T \{(\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha) \mathbf{d} - (\mathbf{f} + \mathbf{f}^\alpha)\} = 0 \quad (2.34)$$

存在：

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha) \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^\alpha \quad (2.35)$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^\alpha &= \alpha \mathbf{I} \int_{\Gamma^g} \Psi_I \Psi_J d\Gamma \\ \mathbf{f}^\alpha &= \alpha \int_{\Gamma^g} N_I \mathbf{g} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.36)$$

罚函数法具有简洁高效的特点，但由于引入了罚因子 α 其计算精度会随着罚因子的改变而改变，选择过大的罚因子会引起计算精度的不稳定，过小则会导致无法准确施加位移边界条件。

2.3.4 Nitsche 法

Nitsche 法是结合了拉格朗日乘子法、罚函数法和修正变分原理法，其泛函表达式为：

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) - \int_{\Gamma^g} n_i \sigma_{ij} (u_i - g_i) d\Gamma + \frac{1}{2} \alpha \int_{\Gamma^g} (u_i - g_i)(u_i - g_i) d\Gamma \quad (2.37)$$

上述 Nitsche 法泛函的变分弱形式为：

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi}(\mathbf{u}) &= \delta \Pi(\mathbf{u}) - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \sigma_{ij} n_i d\Gamma - \int_{\Gamma^g} n_i \delta \sigma_{ij} (u_i - g_i) d\Gamma \\ &\quad + \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i u_i d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i g_i d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

引入无网格离散得到：

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^n + \mathbf{K}^\alpha) \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^n + \mathbf{f}^\alpha \quad (2.39)$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_J d\Omega \\ \mathbf{K}^n &= - \int_{\Gamma^g} \Psi_I \bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{n}} \Psi_J d\Gamma \\ \mathbf{K}^\alpha &= \alpha \int_{\Gamma^g} \mathbf{I} \Psi_I \Psi_J d\Gamma \\ \mathbf{f} &= \int_{\Omega} \mathbf{I} \Psi_I \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \mathbf{I} \Psi_I \mathbf{t} d\Gamma \\ \mathbf{f}^n &= - \int_{\Gamma^g} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{n}} \mathbf{g} d\Gamma \\ \mathbf{f}^\alpha &= \alpha \int_{\Gamma^g} \mathbf{N}_I \mathbf{g} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.40)$$

在 Nitsche 法增加 \mathbf{K}^α 矩阵是为了使伽辽金无网格法满足正定性条件，Nitsche 法的刚度矩阵表达式仍为对称矩阵，但是在构造过程中相对其他本质边界条件施加方法比较复杂。

2.4 伽辽金无网格离散控制方程的数值积分方法

2.4.1 高斯积分法

高斯积分法是指将问题区域离散为一系列背景积分单元 $\Omega_C, C = 1, 2, \dots, NIC$ ，进行刚度矩阵和力向量的数值积分。高斯积分法的背景网格常采用四边形或三角形网格，如图 (2.1) 所示。在进行数值时需要将四边形或三角形积分域通过有限元插值函数映射到标准积分单元上具体表达式为：

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^{NI} N_I(\xi) \mathbf{x}_I \quad (2.41)$$

其中 NI 为背景积分网格节点个数，四边形网格个数为 4 三角形网格个数为 3。 $N_I(\xi)$ 为有限元插值函数，四边形背景积分网格表达式为：

$$N_I(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1 \xi)(1 + \eta_1 \eta), I = 1, 2, 3, 4 \quad (2.42)$$

三角形背景积分网格表达式为:

$$N_1(\xi) = \xi, N_2(\xi) = \eta, N_3(\xi) = \zeta = 1 - \xi - \eta \quad (2.43)$$

对刚度矩阵式 (2.19) 采用高斯积分法得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{IJ} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_I(\mathbf{x})^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}) d\Omega \\ &= \sum_{C=1}^{NIC} \int_{\Omega_C} \mathbf{B}_I(\mathbf{x})^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}) d\Omega \\ &= \sum_{C=1}^{NIC} \int_{\Omega_C} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_I(\mathbf{x})^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}) J d\xi d\eta \\ &= \sum_{C=1}^{NIC} \sum_{G=1}^{NG} \mathbf{B}_I(\mathbf{x})^T(\mathbf{x}_G) \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_G) J(\mathbf{x}_G) \bar{\omega}_G \end{aligned} \quad (2.44)$$

其中 NG 为每个积分子域积分点的个数, \mathbf{x}_G 为标准单元上高斯点 ξ_G 对应的物理坐标, $\bar{\omega}_G$ 为积分权重, J 的具体表达式为:

$$J = \vartheta \det(\mathbf{J}), \mathbf{J} = \frac{\varepsilon \mathbf{x}}{\varepsilon \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon x}{\varepsilon \xi} & \frac{\varepsilon x}{\varepsilon \eta} \\ \frac{\varepsilon y}{\varepsilon \xi} & \frac{\varepsilon y}{\varepsilon \eta} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{NI} \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon N_I}{\varepsilon \xi} x_I & \frac{\varepsilon N_I}{\varepsilon \eta} x_I \\ \frac{\varepsilon N_I}{\varepsilon \xi} y_I & \frac{\varepsilon N_I}{\varepsilon \eta} y_I \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

式中 ϑ 为形状参数, 四边形网格取为 1 三角形网格取为 0.5。针对三角形网格, 雅可比矩阵 \mathbf{J} 和其行列式 $\det(\mathbf{J})$ 存在以下显式表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \\ \det(\mathbf{J}) &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (2.46)$$

对力向量式 (2.19) 采用高斯积分法可以得到:

$$\mathbf{f} = \sum_{L=1}^{NL} \sum_{B=1}^{NB} \Psi_I(\mathbf{x}_B) \mathbf{g}(\mathbf{x}_B) J^B(\mathbf{x}_G) \bar{\omega}_B + \sum_{C=1}^{NIC} \sum_{G=1}^{NG} \Psi_I(\mathbf{x}_G) \mathbf{b}(\mathbf{x}_G) J(\mathbf{x}_G) \bar{\omega}_G \quad (2.47)$$

其中 \mathbf{x}_B 为积分域边界上的积分点, NL 为边界上积分域的个数, NB 为积分域边上的积分点个数。

高斯积分法能够在相对较少的积分点上达到较高的精度, 适用于光滑函数的积分方法。但在无网格法中应用高斯积分法时, 由于无网格形函数本身不是多项式, 无法像有限元根据形函数的多项式次数确定采用几个积分点为完全积分, 因此需要注意选择合适的插值方法和插值函数, 以及确定适当的积分点数来满足数值积分的精度要求。并且由于高斯积分点不满足积分约束条件, 所以一般需要采用高阶高斯积分来保证计算精度, 但随着积分点数的增加会导致计算效率的降低。

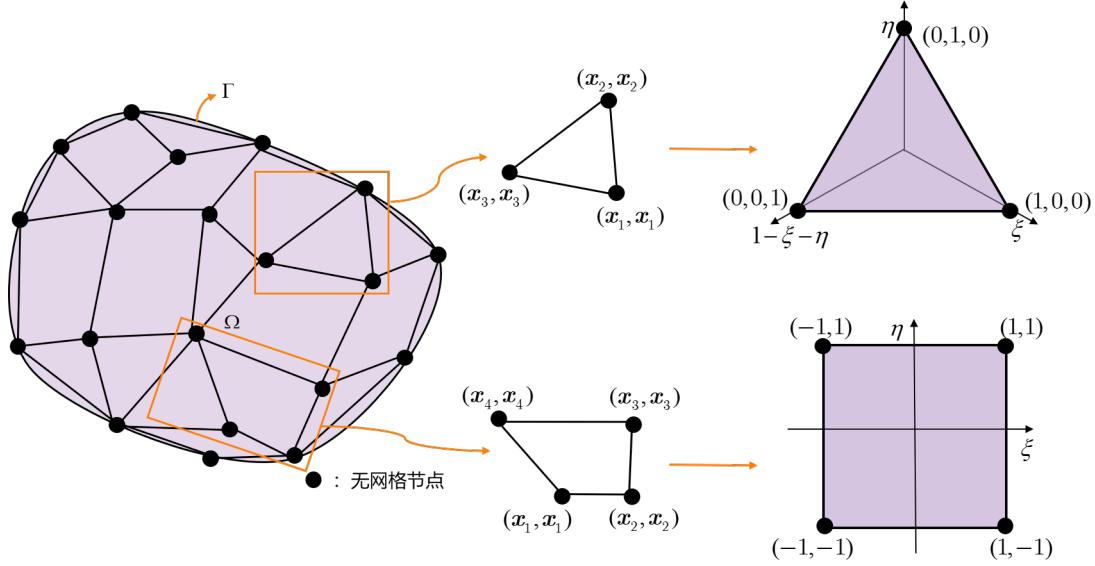


Figure 2.1: 高斯积分背景网格示意图

2.4.2 再生光滑梯度积分法

假设场变量 $u(\mathbf{x})$ 为任意的 p 阶多项式，则其梯度 $u_{,i}(\mathbf{x})$ 可以表示为：

$$u_{,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{q}(\mathbf{x}) \quad (2.48)$$

其中 \mathbf{a}_i 表示为任意系数向量； $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ 为 $(p-1)$ 阶的单项式基向量，即 $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{[p-1]}(\mathbf{x})$ ， $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 是无网格形函数理论中表示 p 阶的多项式基函数向量，根据文献可以知道 $(p-1)$ 阶积分约束条件为：

$$\int_{\Omega} \Psi_{I,i} \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Gamma} \Psi_I \mathbf{q} n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \Psi_I \mathbf{q}_{,i} d\Omega \quad (2.49)$$

根据式子可以看出，由于 p 次基函数，伽辽金弱形式所采用的数值积分方法只有满足 $(p-1)$ 阶积分约束条件，无网格数值解才能重现对应的多项式精确解。

根据再生光滑梯度理论，与再生核无网格形函数类似，无网格形函数 Ψ_I 的再生光滑梯度 $\tilde{\Psi}_{I,i}$ 可表示为如下形式：

$$\tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{c}_i(\mathbf{x}_I) \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (2.50)$$

其中 \mathbf{c}_i 为待定系数向量； $\tilde{\varphi}(\mathbf{x})$ 为核函数，这里取为

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_c \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_c \end{cases} \quad (2.51)$$

其中： Ω_C 为互相不重叠且 $\cup_{C=1}^{NC} \Omega_C = \Omega$ 的积分单元； NC 表示的是积分单元的总个数。图(2.2)给出了再生光滑梯度无网格法采用的三角形背景积分单元。不失为一般性，这里以三次基函数为例详细阐明再生光滑梯度构造过程。当采用三次基函数 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 时， $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ 的表达式为：

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (1, x, y, x^2, y^2, xy)^T \quad \mathbf{x} \in \Omega_C \quad (2.52)$$

将式(2.52)代入到积分约束条件式(2.49)中，可得到：

$$\int_{\Omega_C} \Psi_{I,i} \mathbf{q} d\Omega = \tilde{\mathbf{g}}_{iI}^C, I = 1, 2, \dots, NP \quad (2.53)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{iI}^C = \int_{\Gamma_C} \Psi_I \mathbf{q} n_i d\Gamma - \int_{\Omega_C} \Psi_I \mathbf{q}_{,i} d\Omega \quad (2.54)$$

再用式子(2.50)定义的光滑梯度 $\tilde{\Psi}_{I,i}$ 替换到式子(2.53)中的标准梯度 $\Psi_{I,i}$, 可以得到 $\mathbf{c}_i = \mathbf{G}_C^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_{iI}^C$ 其中 \mathbf{G}_C 为再生光滑梯度的矩阵矩阵, 其表达式为:

$$\mathbf{G}_C = \int_{\Omega_C} \mathbf{q} \mathbf{q}^T d\Omega \quad (2.55)$$

如图(2.2)所示, 为了方便数值积分再生光滑梯度积分法将三角形积分域投影至参数空间。在投影后的三角形积分域内采用高斯积分法求解得到 $\tilde{\mathbf{g}}_{iI}^C$, 具体表达式为:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_{iI}^C &= \sum_{C=1}^{NC} \sum_{GB=\mathbb{A}(\Gamma_C)} \Psi_I(\mathbf{x}_{GB}) \mathbf{q}(\mathbf{x}_{GB}) \mathbf{n}_i \mathbf{J}(\mathbf{x}_{GB}) \omega_{GB} \\ &\quad - \sum_{C=1}^{NC} \sum_{GI=\mathbb{A}(\Omega_C)} \Psi_I(x_{GI}) q_{,i}(x_{GI}) J(x_{GI}) \omega_{GI} \end{aligned} \quad (2.56)$$

其中 \mathbb{A} 为背景积分单元内部或者边界上的高斯积分点总数量; \mathbf{x}_{GB} 、 ω_{GB} 表示背景积分单元边界上的高斯积分点位置和相应的权重; x_{GI} 、 ω_{GI} 为背景积分单元内的高斯积分点位置与配套的权重; \mathbf{J} 表示背景积分单元联系物理和参数空间的雅可比矩阵行列式。值得注意的是式(2.55)中的 \mathbf{G}_C 不需要采用数值积分计算可以直接解析得到。

根据式(2.50)和式(2.56), 可以得到背景积分域内的再生光滑梯度积分表达式为:

$$\tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}_C^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_{iI}^C, \mathbf{x} \in \Omega_C \quad (2.57)$$

根据式(2.57)可以看出再生光滑梯度通过直接构造得到, 避免了标准无网格梯度的复杂计算, 有效的提高了计算精度和计算效率。值得注意的是, 再生光滑梯度仅用于刚度矩阵的构造, 对于弹性力学问题中的应力和应变计算, 仍然采用传统的无网格形函数及梯度的构造。这是由于再生光滑梯度并非全域连续函数, 是在局部背景积分域内满足积分约束条件进而全域上满足积分约束条件。

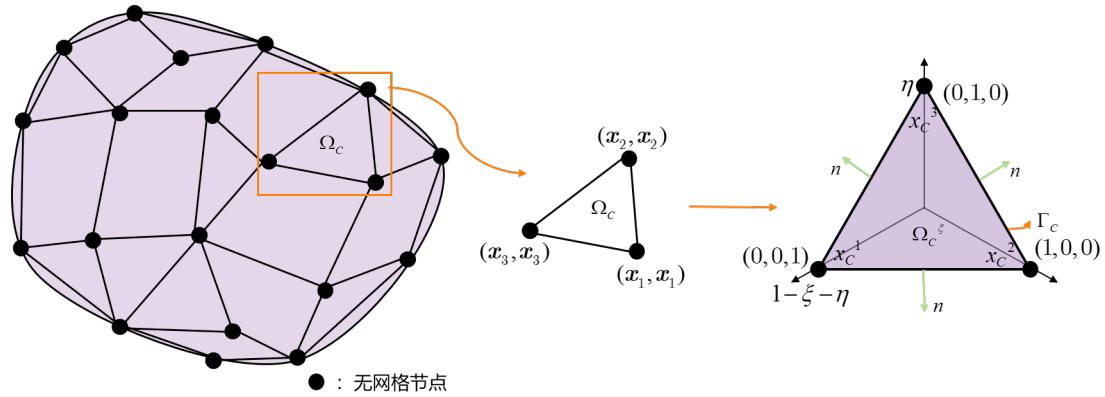


Figure 2.2: 三角形背景积分单元示意图

第3章 弹性力学问题 HR 弱形式

3.1 Hellinger-Reissner 变分原理

不失为一般性，在求解域 Ω 内考虑如下弹性力学控制方程：

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij}n_j = t_i & \text{on } \Gamma^t \\ u_i = g_i & \text{on } \Gamma^g \end{cases} \quad (3.1)$$

其中， u_i 和 σ_{ij} 为位移和应力分量， b_i 为求解域 Ω 上的体力分量。 t_i 和 g_i 分别为两类边界上已知的外力和位移分量， n_i 表示为所在边界的外法向量分量。 Γ^g 和 Γ^t 分别为本质边界条件和自然边界条件，并且存在如下几何关系式：

$$\Gamma^g \cup \Gamma^t = \partial\Omega, \Gamma^t \cap \Gamma^g = \emptyset \quad (3.2)$$

其中， $\partial\Omega$ 为求解域 Ω 的边界。

对于式(3.1)定义的弹性力学问题并根据 Hellinger-Reissner 原理 [1]，存在以下余能泛函：

$$\Pi_c = \int_{\Omega} W(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \quad (3.3)$$

其中 $W(\sigma_{ij})$ 为应变余能，其与应力和应变之间的关系式为：

$$\frac{\partial W(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} = \varepsilon_{ij} \quad (3.4)$$

式中 C_{ijkl} 为四阶弹性张量。

此时采用拉格朗日乘子法施加应力边界条件，建立新的变分泛函：

$$\begin{aligned} \Pi_c^* = & \int_{\Omega} W(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \lambda_i (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega + \int_{\Gamma^t} \eta_i (\sigma_{ij} n_j - t_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.5)$$

将式(3.5)进行一阶变分，同时引入拉格朗日乘子 λ_i 施加到求解域 Ω 和拉格朗日乘子 η_i 到自然边界条件中从而得到：

$$\begin{aligned} \delta \Pi_c^* = & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} + \delta \lambda_i (\sigma_{ij,j} + b_i) + \lambda_i \delta \sigma_{ij,j} \right) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma^g} \delta \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma + \int_{\Gamma^t} \delta \eta_i (\sigma_{ij} n_j - t_i) d\Gamma + \int_{\Gamma^t} \eta_i \delta \sigma_{ij} n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (3.6)$$

通过格林公式和 σ_{ij} 的对称性，存在如下公式：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda_i \delta \sigma_{ij,j} d\Omega &= \int_{\Gamma} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \lambda_{i,j} \delta \sigma_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma^g} \delta \sigma_{ij} n_j \lambda_i d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta \sigma_{ij} n_j \lambda_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \delta \sigma_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

将式(3.7)代入式(3.6)从而得到:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_c^* = & \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \right) \delta\sigma_{ij} + (\sigma_{ij,j} + b_i) \delta\lambda_i \right) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma^g} (\lambda_i - g_i) \delta\sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma^t} ((\sigma_{ij} n_j - t_i) \delta\eta_i + (\lambda_i + \eta_i) \delta\sigma_{ij} n_j) d\Gamma\end{aligned}\quad (3.8)$$

根据泛函驻值条件 $\delta\Pi_c^* = 0$ 得出:

$$\lambda_i = g_i = u_i, \eta_i = -u_i \quad (3.9)$$

将 $\lambda_i = u_i, \eta_i = -u_i$ 代入式(3.5)中得到根据存在双变量 (u_i, σ_{ij}) 的 Hellinger-Reissner 变分原理, 针对式(3.1)得到相对应的弱形式为:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) = & \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij} \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij,j} u_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij,j} n_j g_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma = 0\end{aligned}\quad (3.10)$$

对能量泛函 Π_{HR} 取极值时, 要求对于任意的 $\delta u_i, \delta\sigma_{ij}$ 关于 $\delta\Pi_{HR}$ 都要恒成立, 此时利用几何关系式(3.2)将弱形式(3.10)根据 $\delta u_i, \delta\sigma_{ij}$ 改写为下列两式:

$$\int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} \delta\sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij,j} u_i d\Omega - \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma + \int_{\Gamma^t} \delta\sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \quad (3.12)$$

3.2 位移离散和应力离散

3.2.1 位移离散与再生核近似

位移分量 u_i 采用基于再生核近似的无网格形函数进行离散。无网格法通过如图(3.1)所示的问题域 Ω 和边界 Γ 上布置一系列无网格节点 $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{NP}$ 进行离散, 其中 NP 表示无网格节点数量。每个无网格节点 \mathbf{x}_I 对应的形函数为 $\Psi(\mathbf{x})$, 影响域为 $supp(\mathbf{x}_I)$, 此时所有节点的影响域的总范围超过问题域 Ω , 即每一个节点的影响域 $supp(\mathbf{x}_I)$ 满足 $\Omega \subseteq_{I=1}^{NP} supp(\mathbf{x}_I)$ 。不失为一般性, 考虑任意位移分量 u_i , 其对应的无网格近似函数 u_i^h 表示为:

$$u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) d_{iI} \quad (3.13)$$

其中, d_{iI} 表示与无网格节点 \mathbf{x}_I 对应的系数

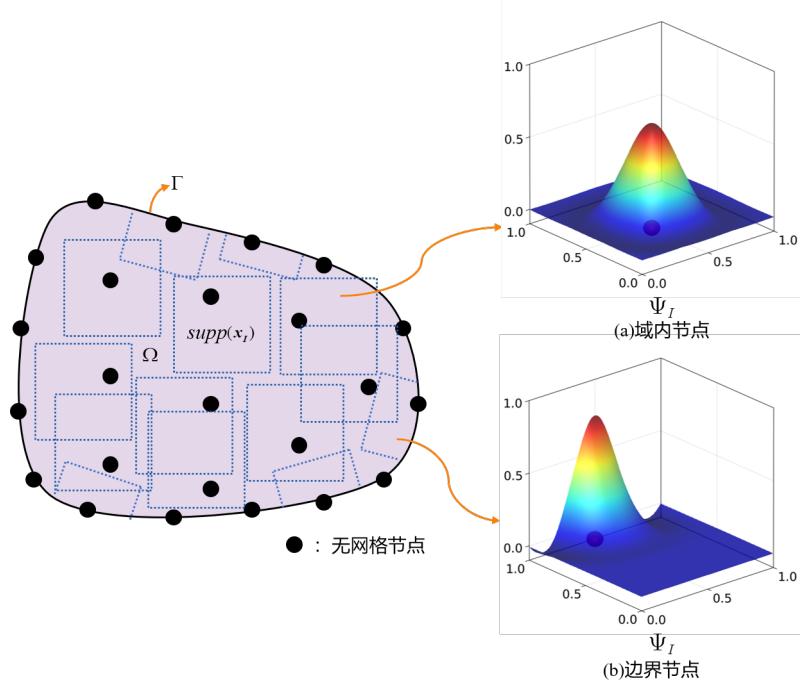


Figure 3.1: 二维无网格离散示意图

根据再生核近似理论 [1], 无网格形函数可以假设为:

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x}) \phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (3.14)$$

式中, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 表示为 p 阶的多项式基函数向量, 表达式为:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, \dots, x^i y^j, \dots, y^p\}, 0 \leq i + j \leq p \quad (3.15)$$

而 $\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ 是附属于节点 \mathbf{x}_I 的核函数, 其影响域的大小由影响域尺寸 s 决定, 核函数以及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。对于二维问题, 一般情况下核函数 $\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ 的影响域为圆形域或者矩形域, 可由下列公式得到:

$$\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \phi_{s_x}(r_x) \phi_{s_y}(r_y), r_x = \frac{|x_I - x|}{s_x}, r_y = \frac{|y_I - y|}{s_y} \quad (3.16)$$

其中 s_x 和 s_y 分别为 x 和 y 方向上影响域的大小, 计算时一般使得两个方向上的影响域大小相等即 $s_x = s_y = s$ 。选取核函数时一般遵循核函数阶次 m 大于等于基函数阶次 p ($m \geq p$) 的原则。针对二阶势问题的弹性力学问题, 无网格基函数一般选择二阶或者三阶, 而核函数 $\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ 则选取三次样条函数:

$$\phi(r) = \frac{1}{3!} \begin{cases} (2-2r)^3 - 4(1-2r)^3 & r \leq \frac{1}{2} \\ (2-2r)^3 & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

无网格形函数表达式 (3.14) 中的 \mathbf{c} 为待定系数向量, 该表达式可以通过满足再生条件确定:

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

将无网格形函数表达式 (3.14) 代入再生条件 (3.18) 中, 可以得到:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}(0) \quad (3.19)$$

其中 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 表示矩量矩阵, 表达式为:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (3.20)$$

将 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ 代入到式 (3.14) 中得到再生核无网格形函数的具体表达式为:

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(0) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (3.21)$$

无网格形函数 $\Psi_I(\mathbf{x})$ 的一阶和二阶导数分别为:

$$\Psi_{I,i}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{,i}^T(x_I - x) \mathbf{A}^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + \mathbf{p}^T(x_I - x) \mathbf{A}_{,i}^{-1} \phi_s(x_I - x) \\ + \mathbf{p}^T(x_I - x) \mathbf{A}^{-1}(x) \phi_{s,i}(x_I - x) \end{pmatrix} \mathbf{p}(0) \quad (3.22)$$

$$\Psi_{I,ij}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{,ij}^T(x_I - x) \mathbf{A}^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + \mathbf{p}_{,i}^T(x_I - x) \mathbf{A}_{,j}^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + \mathbf{p}_{,i}^T(x_I - x) \mathbf{A}_{,j}^{-1}(x) \phi_{s,j}(x_I - x) \\ + \mathbf{p}^T(x_I - x) \mathbf{A}_{,ij}^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + \mathbf{p}_{,j}^T(x_I - x) \mathbf{A}_{,i}^{-1}(x) \phi_s(x_I - x) \\ + \mathbf{p}^T(x_I - x) \mathbf{A}_{,i}^{-1}(x) \phi_{s,j}(x_I - x) \\ + \mathbf{p}^T(x_I - x) \mathbf{A}_{,j}^{-1}(x) \phi_{s,ij}(x_I - x) \\ + \mathbf{p}_{,j}^T(x_I - x) \mathbf{A}_{,i}^{-1}(x) \phi_{s,i}(x_I - x) \\ + \mathbf{p}_{,i}^T(x_I - x) \mathbf{A}_{,j}^{-1}(x) \phi_{s,i}(x_I - x) \end{pmatrix} \mathbf{p}(0) \quad (3.23)$$

式中 $\mathbf{A}_{,i}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,i} \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}_{,ij}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}_{,ij} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}_{,i} \mathbf{A}_{,j}^{-1} + \mathbf{A}_{,j} \mathbf{A}_{,i}^{-1})$, 可以看出无网格形函数及其导数的计算都较为复杂。

图 (3.2) 表示为二维情况下的无网格形函数导数图。根据图 (3.1)、(3.2) 可以看出无网格形函数在全域上连续光滑, 但在无网格节点处, 形函数不具有插值性, 因此无法像有限元法一样直接施加本质边界条件。

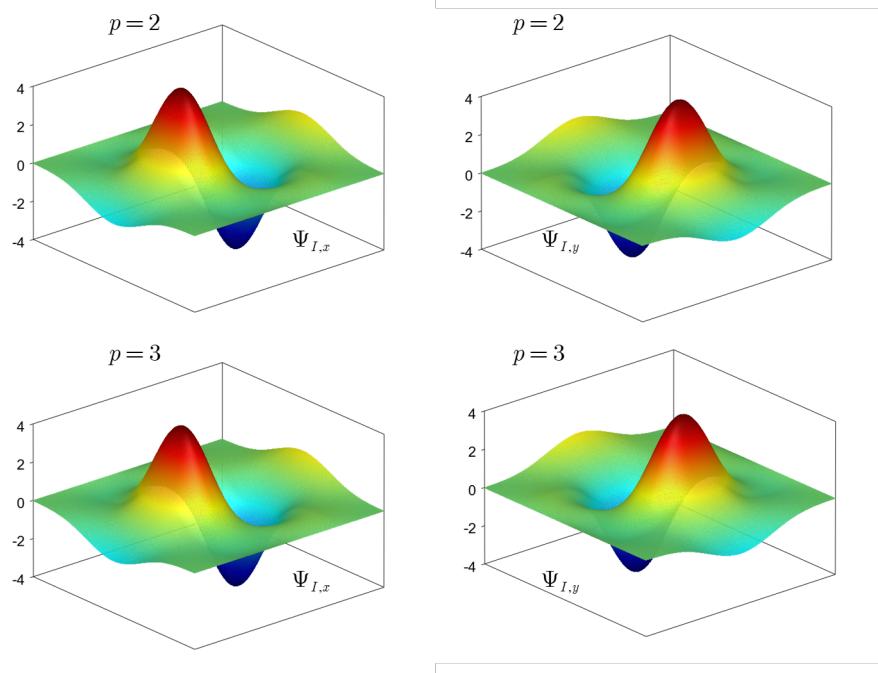


Figure 3.2: 二维无网格形函数导数图

3.2.2 应力离散与再生光滑梯度近似

应力分量 σ_{ij} 采用在每个背景积分单元内建立局部的多项式进行离散。考虑如图(3.3)所示二维三角形背景积分单元，将求解域 Ω 划分为一系列背景积分单元 Ω_C , $C = 1, 2, \dots, NC$ ，并且存在 $\cup_{C=1}^{NC} \Omega_C \approx \Omega$ 。在背景积分单元 Ω_C 内，假设应力分量 σ_{ij} 为任意的 p 阶多项式，则将离散后的应力分量 σ_{ij} 记为 σ_{ij}^h : 其中， $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ 为 $(p-1)$ 阶的单项式基向量，即 $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{[p-1]}(\mathbf{x})$ 。 \mathbf{a}_{ij} 为 $\sigma_{ij}^h(\mathbf{x})$ 在积分域 Ω_C 内的常系数向量。

$$\sigma_{ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{q}(\mathbf{x}), \quad \text{in } \Omega_C \quad (3.24)$$

此时，将(3.24)、(3.13)代入(3.12)中可以得到：

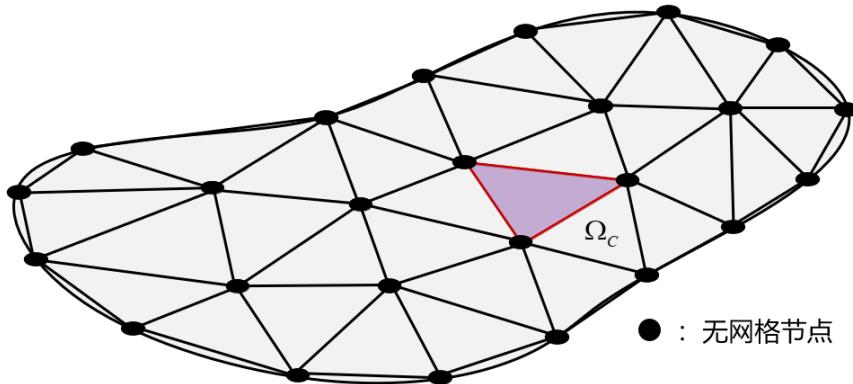


Figure 3.3: 背景积分单元示意图

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q} C_{ijkl}^{-1} \mathbf{a}_{kl} \mathbf{q}^T d\Omega &= \sum_{I=1}^{NP} \int_{\partial\Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q} n_j \Psi_I(\mathbf{x}) d\Gamma d_{iI} - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q}_{,j} \Psi_I(\mathbf{x}) d\Omega d_{iI} \\ &\quad - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q} n_j \Psi_I(\mathbf{x}) d\Gamma d_{iI} + \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \delta \mathbf{a}_{ij} \mathbf{q} n_j g_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.25)$$

等式两边同时消掉 $\delta \mathbf{a}_{ij}$, 进一步得到:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_C} \mathbf{q} C_{ijkl}^{-1} \mathbf{q}^T d\Omega \mathbf{a}_{kl} &= \sum_{I=1}^{NP} \int_{\partial\Omega_C} \mathbf{q} \Psi_I(\mathbf{x}) n_j d\Gamma d_{iI} - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Omega_C} \mathbf{q}_{,j} \Psi_I(\mathbf{x}) d\Omega d_{iI} \\ &\quad - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \mathbf{q} \Psi_I(\mathbf{x}) n_j d\Gamma d_{iI} + \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \mathbf{q} n_j g_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.26)$$

对式 (3.26) 进行移项从而可以得到常系数向量 \mathbf{a}_{ij} 的具体表达式为:

$$\mathbf{a}_{ij} = C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \left(\sum_{I=1}^{NP} (\tilde{g}_{iI} - \bar{g}_{iI}) d_{iI} + \hat{g}_{iI} \right) \quad (3.27)$$

其中:

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega_C} \mathbf{q} \mathbf{q}^T d\Omega \quad (3.28)$$

$$\tilde{g}_{iI} = \int_{\partial\Omega_C} \mathbf{q} \Psi_I(\mathbf{x}) n_j d\Gamma - \int_{\Omega_C} \mathbf{q}_{,j} \Psi_I(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.29)$$

$$\bar{g}_{iI} = \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \mathbf{q} \Psi_I(\mathbf{x}) n_j d\Gamma \quad (3.30)$$

$$\hat{g}_{iI} = \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \mathbf{q} n_j g_i d\Gamma \quad (3.31)$$

考虑经典的线弹性本构关系 $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ 并将 \mathbf{a}_{ij} 代入式 (3.24) 从而得到近似的应力分量 $\sigma_{ij}^h(\mathbf{x})$ 的具体表达式:

$$\sigma_{ij}^h(\mathbf{x}) = C_{ijkl} (\tilde{\varepsilon}_{kl}^h(\mathbf{x}) - \bar{\varepsilon}_{kl}^h(\mathbf{x})) + C_{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}^h(\mathbf{x}) \quad (3.32)$$

其中:

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \frac{1}{2} (\tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) d_{jI} + \tilde{\Psi}_{I,j}(\mathbf{x}) d_{iI}) \\ \tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{iI} \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) d_{jI} + \bar{\Psi}_{I,j}(\mathbf{x}) d_{iI}) \\ \bar{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{iI} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{ij} \quad (3.35)$$

此时, 应力分量表达式中的 $\tilde{\Psi}_{I,i}$ 为再生光滑梯度, 根据再生光滑梯度理论 [], 再生光滑梯度可以通过直接构造得到, 避免了传统无网格形函数梯度的复杂计算, 提高了梯度计算效率。并且, 再生光滑梯度内嵌局部积分约束条件 \tilde{g}_{iI} , 可满足全域积分约束条件, 从而保证算法的计算精度和误差收敛性。

为了方便起见，在实际计算分析中一般将张量表示转换为矩阵和向量表示，但两者完全等价。当考虑 xy 平面内的平面应力问题时，弹性本构关系为：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

此时，近似应力分量 $\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x})$ 式 (3.32) 采用矩阵向量形式可以改写为：

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{D} \sum_{I=1}^{NP} (\tilde{\mathbf{B}}_I - \bar{\mathbf{B}}_I) \mathbf{d}_I + \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.37)$$

其中：

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

而 $\mathbf{d}_I = \{d_{1I}, d_{2I}\}^T$ 为节点系数向量， $\tilde{\mathbf{B}}_I$ 、 $\bar{\mathbf{B}}_I$ 分别是由再生光滑梯度 $\tilde{\Psi}_{I,i}$ 和 $\bar{\Psi}_{I,i}$ 组成的梯度矩阵，表达式分别为：

$$\tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{I,x}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_{I,y}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\Psi}_{I,y}(\mathbf{x}) & \tilde{\Psi}_{I,x}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{I,x}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \bar{\Psi}_{I,y}(\mathbf{x}) \\ \bar{\Psi}_{I,y}(\mathbf{x}) & \bar{\Psi}_{I,x}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.3 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法

通过式 (3.10) 看出基于 Hellinger-Reissner 变分原理得到的弱形式已经考虑了本质边界条件 Γ^g 和自然边界条件 Γ^t 。为了进一步了解关于采用 Hellinger-Reissner 变分原理在伽辽金无网格法中的本质边界条件。此时将式 (3.13)、(3.24) 代入弱形式 (3.11) 中可以得到：

$$\begin{aligned} \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} \left(\int_{\partial\Omega_C} \Psi_I \mathbf{q}^T n_j d\Gamma - \int_{\Omega_C} \Psi_I \mathbf{q}_j^T d\Omega - \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \Psi_I \mathbf{q}^T n_j d\Gamma \right) \mathbf{a}_{ij} = \\ \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} \left(\int_{\Gamma^t} \Psi_I t_i d\Gamma + \int_{\Omega} \Psi_I b_i d\Omega \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

引入式 (3.29)、(3.30) 将上式改写为：

$$\sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} (\tilde{g}_{jI}^T - \bar{g}_{jI}^T) \mathbf{a}_{ij} = \sum_{I=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \mathbf{f}_I = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (3.42)$$

其中 $\delta \mathbf{d}$ 为位移变分节点系数向量， \mathbf{f} 为外力向量，元素表达式为：

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma^t} \Psi_I \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Psi_I \mathbf{b} d\Omega \quad (3.43)$$

式中 $\mathbf{t} = \{t_x, t_y\}^T$ 、 $\mathbf{b} = \{b_x, b_y\}^T$ 分别为外力向量和体力向量。进一步将式(3.27)中的 \mathbf{a}_{ij} 代入式(3.42)中从而得到:

$$\begin{aligned}
 \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} (\tilde{g}_{jI}^T - \bar{g}_{jI}^T) \mathbf{a}_{ij} &= \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} (\tilde{g}_{jI}^T - \bar{g}_{jI}^T) C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \left(\sum_{J=1}^{NP} (\tilde{g}_{kJ} - \bar{g}_{kJ}) d_{lJ} + \hat{g}_{kl} \right) \\
 &= \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \tilde{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d_{lJ} \\
 &\quad - \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \bar{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{kJ} d_{lJ} \\
 &\quad - \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \bar{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d_{lJ} \\
 &\quad + \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \bar{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{kJ} d_{lJ} \\
 &\quad - \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} \tilde{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{kl} \\
 &\quad + \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} \bar{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{kl}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

通过引入式(3.28)、(3.33)对式(3.44)中的第一项进行推导可得:

$$\begin{aligned}
 \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \tilde{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d_{lJ} &= \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \tilde{g}_{jI}^T C_{ijkl} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d_{lJ} \\
 &= \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \int_{\Omega_C} \tilde{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{q}(\mathbf{x}) C_{ijkl} \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d\Omega d_{lJ} \\
 &= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Omega_C} \sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,j} \delta d_{iI} C_{ijkl} \sum_{J=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,k} d_{lJ} d\Omega \\
 &= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Omega_C} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^h C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}^h d\Omega \\
 &= \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_J d\Omega \mathbf{d}_J \\
 &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

通过引入式(3.30)、(3.33)、(3.13)对式(3.44)中的第二、三项进行推导可得：

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} (\tilde{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} + \tilde{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{kJ}) d_{lJ} \\
 & = -\sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \left(\int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \Psi_I n_j C_{ijkl} \mathbf{q} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{kJ} d\Gamma + \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \mathbf{q} \mathbf{G}^{-1} \tilde{g}_{jI} n_k \Psi_J d\Gamma \right) d_{lJ} \\
 & = -\sum_{C=1}^{NC} \left(\int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \delta d_{iI} n_j C_{ijkl} \sum_{J=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{J,k} d_{lJ} d\Gamma + \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \sum_{J=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,J} \delta d_{iI} n_k \sum_{I=1}^{NP} \Psi_J d_{lJ} d\Gamma \right) \\
 & = -\sum_{C=1}^{NC} \left(\int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega} \delta u_i^h n_j C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}^h d\Gamma + \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^h C_{ijkl} n_k u_l^h d\Gamma \right) \\
 & = -\sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \left(\int_{\Gamma^g} \Psi_I \mathbf{N} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_J d\Gamma + \int_{\Gamma^g} \tilde{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{D} \mathbf{N}^T \Psi_J d\Gamma \right) \mathbf{d}_J \\
 & = \delta \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{d}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

其中 \mathbf{N} 为法向量矩阵：

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

通过引入式(3.30)、(3.34)对式(3.44)中的第四项进行推导可得：

$$\begin{aligned}
 & \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \tilde{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \bar{g}_{kJ} d_{lJ} = \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta d_{iI} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \tilde{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{q} \Psi_J n_k d\Gamma d_{lJ} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \sum_{J=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,j} \delta d_{iI} n_k \sum_{J=1}^{NP} \Psi_J d_{lJ} d\Gamma \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^h n_k u_l d\Gamma \\
 & = \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \tilde{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{D} \mathbf{N}^T \Psi_J d\Gamma \mathbf{d}_J \\
 & = \delta \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{d}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

通过引入式(3.31)、(3.33)对式(3.44)中的第五项进行推导可得：

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \tilde{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{kl} = -\sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \tilde{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \mathbf{q} n_l g_k d\Gamma \\
 & = -\sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,j} \delta d_{iI} n_l g_k d\Gamma \\
 & = -\sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^h n_l g_k d\Gamma \\
 & = -\sum_{I=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \tilde{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{D} \mathbf{N}^T \mathbf{g} d\Gamma \\
 & = \delta \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{f}}
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

通过引入式(3.31)、(3.34)对式(3.44)中的第六项进行推导可得:

$$\begin{aligned}
 \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \bar{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \hat{g}_{kl} &= \sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} C_{ijkl} \bar{g}_{jI}^T \mathbf{G}^{-1} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \mathbf{q} n_l g_k d\Gamma \\
 &= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,j} \delta d_{iI} n_l g_k d\Gamma \\
 &= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} C_{ijkl} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^h n_l g_k d\Gamma \\
 &= \sum_{I=1}^{NP} \delta \mathbf{d}_I^T \int_{\Gamma^g \cap \partial \Omega_C} \bar{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{D} \mathbf{N}^T \mathbf{g} d\Gamma \\
 &= \delta \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{f}}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

此时, 式(3.44)通过化简可以得到:

$$\sum_{C=1}^{NC} \sum_{I=1}^{NP} \delta d_{iI} (\bar{g}_{jI}^T - \bar{g}_{jI}^T) \mathbf{a}_{ij} = \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{d} - \delta \mathbf{d}^T (\tilde{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{f}}) \tag{3.51}$$

将式(3.51)代入到式(3.42)中从而得到离散的平衡方程:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{d} - \delta \mathbf{d}^T (\tilde{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{f}}) &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} \\
 (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{d} &= \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{f}}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

为了保证离散弱形式的变分一致性在求解式(3.52)的过程中, 引入的数值积分在求解的各个过程也需要保持一致。如图(3.4)所示, 基于 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法的本质边界条件施加方法需要两套数值积分点, \tilde{g} 和 \bar{g} 中的数值积分方案需要与 $\tilde{\mathbf{K}}$, $\bar{\mathbf{K}}$, \mathbf{f} , $\tilde{\mathbf{f}}$ 和 $\bar{\mathbf{f}}$ 保持一致。

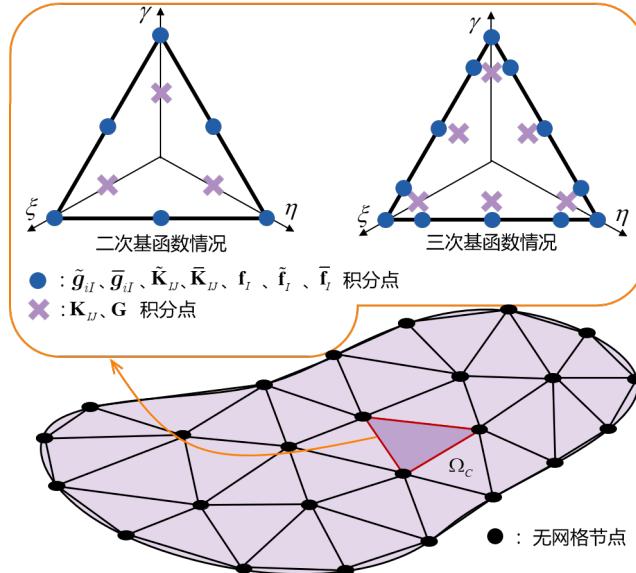


Figure 3.4: 优化的数值积分方案

同时，基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法中的再生光滑梯度构造过程中需要计算积分点处无网格形函数。采用无网格再生光滑梯度积分法，减小形函数的计算量、提高计算效率。利用积分点在背景积分单元间的共享特性，从全域上优化整体求解过程中积分点的数量，提高计算效率，具体数值积分方案如下表：

Table 3.1: 二次基函数无网格法优化的数值积分方案

数值积分点	ξ	η	γ	w	w_B
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	
	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Table 3.2: 三次基函数无网格法优化的数值积分方案

数值积分点	ξ	η	γ	w	w_B
	η_a	$\frac{1-\xi_a}{2}$	$\frac{1-\xi_a}{2}$	w_a	
	η_b	η_b	$\frac{1-\xi_b}{2}$	w_b	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$	
	1	0	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{135}$	$\frac{46}{180}$
	$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	0	$\frac{49}{540}$	$\frac{49}{180}$

$\xi_a = 0.10810301816870, w_a = 0.223381589678011$
 $\xi_b = 0.816847572980459, w_b = 0.109951743655322$

3.4 数值算例

3.4.1 分片实验

首先采用线性、二次和三次弹性力学分片实验验证采用传统高斯积分法和再生光滑梯度积分法的不同本质边界条件施加方法下是否满足积分约束条件的情况。分片实验考虑求解域为边长等于 1 的正方形，求解域的四边施加本质边界条件。其分片实验的精确解如下：

$$\begin{cases} u_x(x, y) = (1 + 2x + 3y)^n \\ u_y(x, y) = (4 + 5x + 6y)^n \end{cases} \quad (3.53)$$

其中， $n = 1, 2, 3$ 表示线性、二次和三次分片实验。如图 (3.5) 所示，分片实验采用 11×11 的非均匀节点离散求解域。针对二次基函数的无网格近似，采用线性和二次分片实验进行测试，核函数相对影响域在二次基函数情况下为 2.5；三次基函数的无网格近似采用二次和三次分片实验进行测试，核函数相对影响域在三次基函数情况下为 3.5。

分别采用位移误差 L_2 -Error 和能量误差 H_1 -Error 详细对比所提方法的计算精度

$$L_2\text{-Error} = \sqrt{\int_{\Omega} (u_i - u_i^h)(u_i - u_i^h) d\Omega} \quad (3.54)$$

$$H_1\text{-Error} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^h) C_{ijkl}^{-1} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^h) d\Omega} \quad (3.55)$$

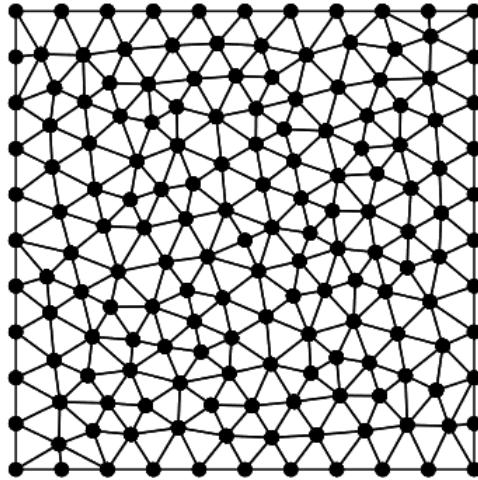


Figure 3.5: 分片实验无网格离散模型

在数值结果中，“GI”表示采用的是传统高斯积分法，“RKGSI”表示采用的是再生光滑梯度积分法。“Penalty”、“LM”和“Nitsche”分别表示罚函数法、拉格朗日乘子法和 Nitsche 法三种常见的本质边界条件施加方法。“RKGSI-HR”则表示的是本章提出的基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法。在以下的数值求解过程中，为了保证拉格朗日乘子法的稳定性，拉格朗日乘子统一采用线性有限元形函数进行离散。针对二次基函数的求解，高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 13 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 3 点高斯积分；针对三次基函数的求解，高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 16 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 5 点高斯积分。二次和三次基函数的无网格法分片试验结果如下：

Table 3.3: 二次基函数无网格法分片实验结果

	线性分片实验		二次分片实验	
	L_2 -Error	H_1 -Error	L_2 -Error	H_1 -Error
GI-Penalty	7.7×10^{-6}	2.7×10^{-4}	1.2×10^{-5}	2.6×10^{-4}
GI-LM	1.0×10^{-4}	4.7×10^{-3}	1.5×10^{-4}	4.3×10^{-3}
GI-Nitsche	8.1×10^{-6}	2.8×10^{-4}	1.3×10^{-5}	2.8×10^{-4}
RKGSI-Penalty	7.9×10^{-8}	2.0×10^{-6}	1.4×10^{-7}	2.1×10^{-6}
RKGSI-LM	8.6×10^{-5}	4.0×10^{-3}	1.4×10^{-4}	3.7×10^{-3}
RKGSI-Nitsche	2.1×10^{-15}	4.0×10^{-14}	2.2×10^{-15}	2.7×10^{-14}
RKGSI-HR	2.0×10^{-15}	3.2×10^{-14}	2.2×10^{-15}	2.1×10^{-14}

Table 3.4: 三次基函数无网格法分片实验结果

	二次分片实验		三次分片实验	
	L_2 -Error	H_1 -Error	L_2 -Error	H_1 -Error
GI-Penalty	9.1×10^{-6}	2.1×10^{-4}	1.2×10^{-5}	2.0×10^{-4}
GI-LM	2.9×10^{-4}	9.3×10^{-3}	4.0×10^{-4}	9.3×10^{-3}
GI-Nitsche	1.1×10^{-5}	2.8×10^{-4}	1.4×10^{-5}	2.7×10^{-4}
RKGSI-Penalty	1.4×10^{-7}	2.1×10^{-6}	2.0×10^{-7}	2.7×10^{-6}
RKGSI-LM	3.0×10^{-4}	9.8×10^{-3}	4.2×10^{-4}	9.8×10^{-3}
RKGSI-Nitsche	3.6×10^{-15}	1.0×10^{-13}	4.6×10^{-15}	9.5×10^{-14}
RKGSI-HR	3.1×10^{-15}	1.0×10^{-13}	3.5×10^{-15}	7.4×10^{-14}

表 3.3 和表 3.4 分别为具有二次、三次基函数无网格法的分片试验结果，从表中可以看出，由于传统高斯积分法不满足积分约束条件，所以即使采用高阶高斯积分的罚函数法(GI-Penalty)、拉格朗日乘子法(GI-LM)和 Nitsche 法(GI-Nitsche)均不能通过分片试验。当采用满足积分约束条件的再生光滑梯度积分法时，此时由于罚函数法(RKGSI-Penalty)不具有变分一致性，也无法通过分片试验；拉格朗日乘子法(RKGSI-LM)由于其拉格朗日乘子采用线性形函数进行离散，无法与再生光滑梯度相匹配，也无法通过分片试验；当采用 Nitsche 法(RKGSI-Nitsche)和基于 Hellinger-Reissner 变分原理(RKGSI-HR)的本质边界条件施加方法时，均可以通过分片试验，即满足积分约束条件。

3.4.2 悬臂梁问题

首先考虑经典弹性力学二维悬臂梁问题，如图(3.6)所示，悬臂梁的长和宽分别为 $L = 48$, $D = 12$ ，同时悬臂梁的左端为固定支座，右端沿着 y 轴正方向施加外部荷载 $P = 1000$ 。悬臂梁的材料系数为杨氏模量 $E = 3 \times 10^6$ 、泊松比 $\nu = 0.3$ 。根据圣维南原理和平面应力假设，悬臂梁问题的解析解为：

$$\begin{cases} u = -\frac{P_y}{6EI}[(6L - 3x)x + (2 + \nu)(y^2 - \frac{D^2}{4})] \\ v = \frac{P}{6EI}[3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu)\frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2] \end{cases} \quad (3.56)$$

与之相对应的应力分量为：

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{P(L-x)y}{I} \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = \frac{P}{2I}(\frac{D^2}{4} - y^2) \end{cases} \quad (3.57)$$

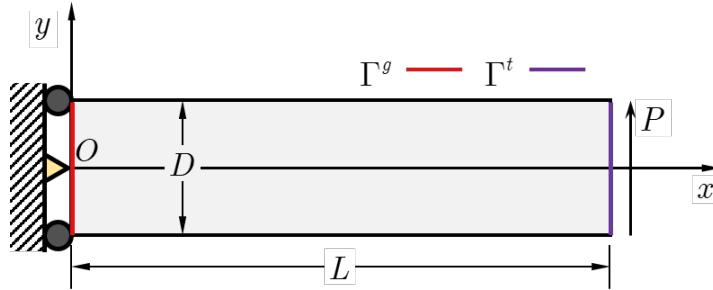


Figure 3.6: 悬臂梁问题模型

如图(3.6)所示,悬臂梁的左端施加自然边界条件 Γ^t ,右端施加强制边界条件 Γ^g 。悬臂梁求解域分别通过图(3.7)所示采用(a) 5×7 、(b) 9×33 、(c) 17×65 、(d) 33×129 的四个疏密不同的节点进行离散。对于采用二次基函数的悬臂梁算例问题,传统高斯积分法采用13点高斯积分,核函数的相对影响域为2.5。

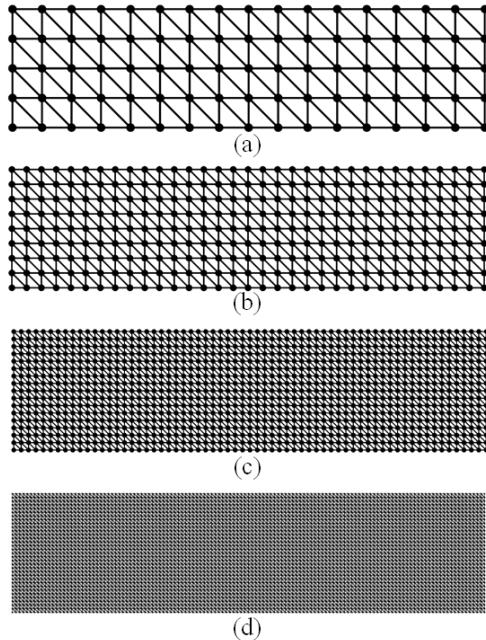


Figure 3.7: 悬臂梁问题节点模型

图(3.8)、(3.9)为悬臂梁问题的位移误差和能量误差对比图。从图中可以看出采用再生光滑梯度积分法(RKGSI)的本质边界条件施加方法的计算精度优于采用高斯积分法(GI)的本质条件施加方法,并且由于传统高斯积分法和采用再生光滑梯度积分法的罚函数法(RKGSI-Penalty)和拉格朗日乘子法(RKGSI-LM)不具有变分一致性,无法达到理论误差收敛率,而基于Hellinger-Reissner变分原理下的本质边界条件施加方法(RKGSI-HR)和Nitsche法(RKGSI-Nitsche)均可达到理论误差收敛率,但相较于RKGSI-Nitsche法,所提出的RKGSI-HR法无需引入人工参数。

图(3.10)为悬臂梁问题的节点数和计算时间的效率对比图。从整体来看采用再生光滑梯度积分法(RKGSI)的计算效率明显高于传统高斯积分法(GI)。

图(3.11)为悬臂梁问题的本质边界条件施加效率分析图。该图为施加强制边界 Γ^g 过程中计算形函数及梯度和组装相对应的刚度矩阵和力向量所用时间对比图。从图中可以看出,罚函数法和拉格朗日乘子法在计算形函数及其梯度所用的时间相同且所用时间最少,这是由于罚函数法和拉格朗日乘子法在计算过程中只需要计算无网格形函数本身,无需计算无网格形函数梯度,而Nitsche法和HR法也无需计算无网格形函数梯度,但需要计算再生光滑梯度,Nitsche法这部分所用的时间是罚函数法和拉格朗日乘子法的5.6倍,而HR法是1.6倍,HR法的计算效率高于Nitsche法。组装相应的刚度矩阵和力向量这部分所用的时间上,Nitsche法和HR法计算效率基本相同。从整体上来看,拉格朗日乘子法和罚函数法的效率优于HR法和Nitsche法,但拉格朗日乘子法和罚函数法不具有变分一致性无法达到理论误差收敛率。因此,总体来说,相较于传统的本质边界条件施加方法,基于Hellinger-Reissner变分原理的本质边界条件施加方法(RKGSI-HR)能够达到理论误差收敛率,有效提高计算精度,相较于Nitsche法而言计算效率也更高。

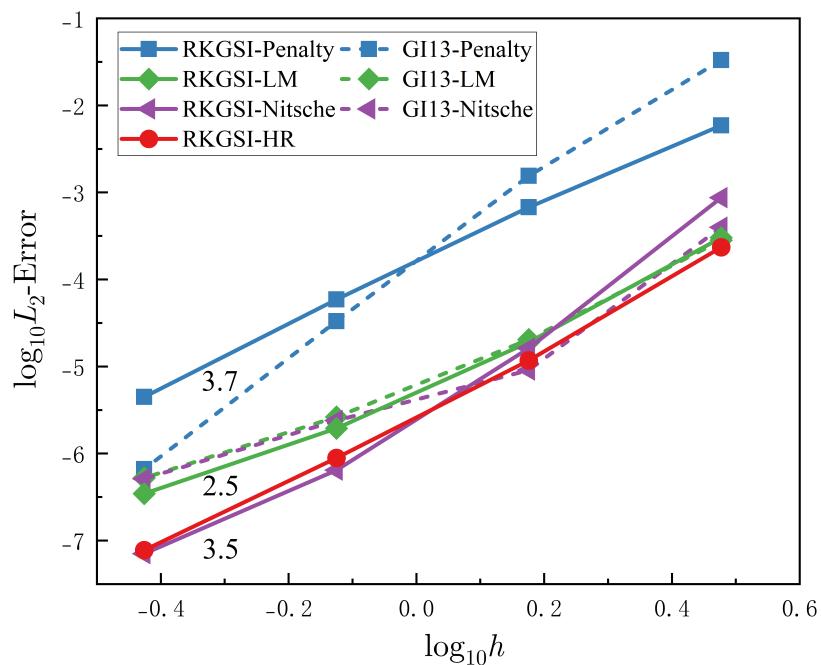


Figure 3.8: 悬臂梁问题位移误差对比

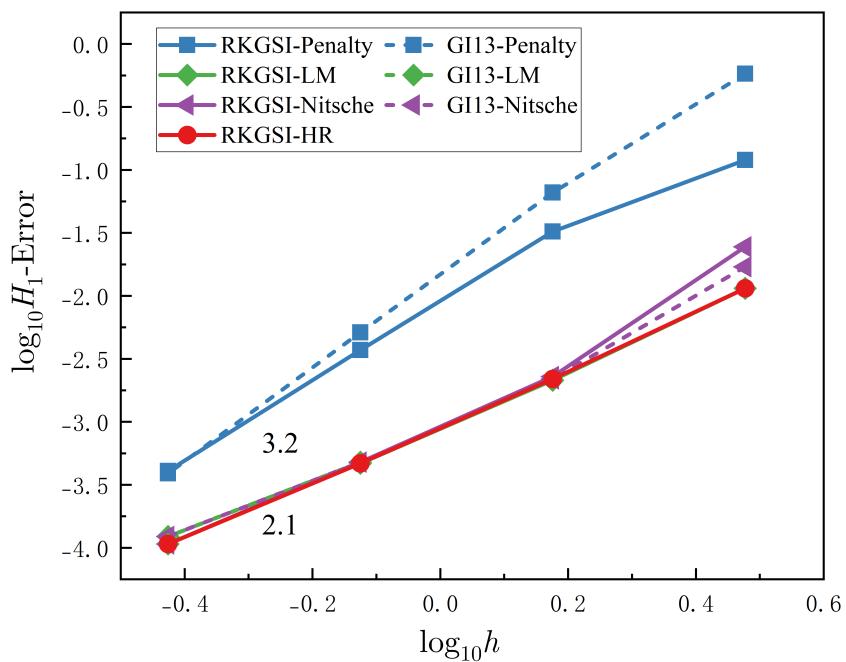


Figure 3.9: 悬臂梁问题能量误差对比

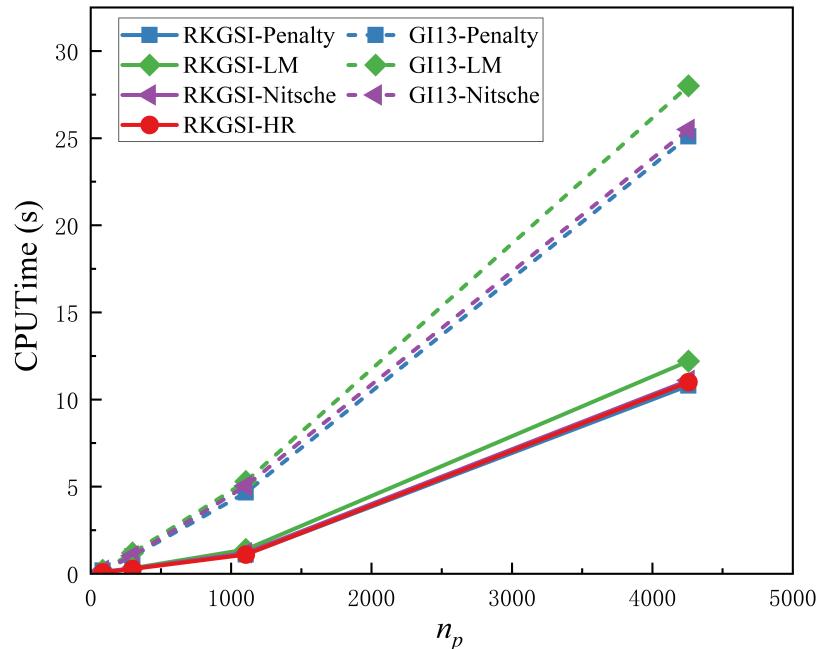


Figure 3.10: 计算时间与节点数的关系

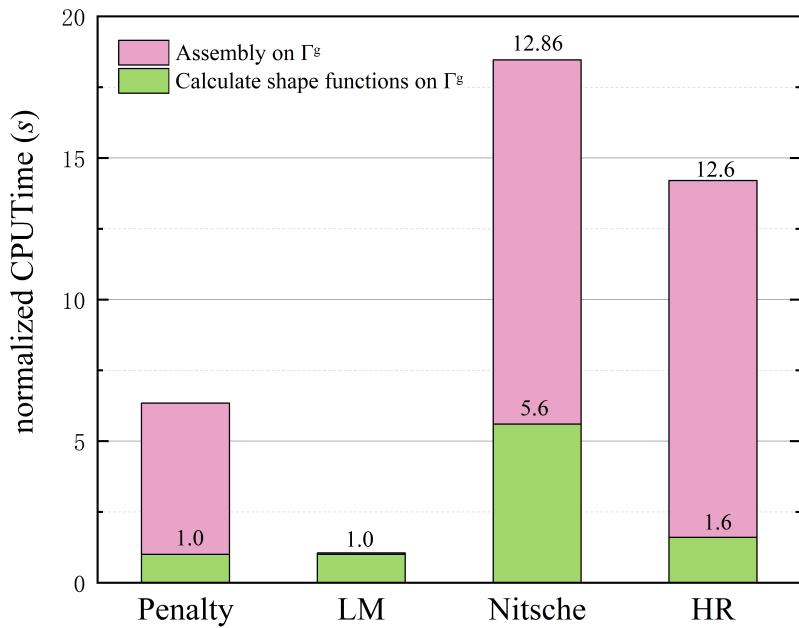


Figure 3.11: 本质边界条件施加效率分析

3.4.3 带孔无限大平板问题

考虑经典的带孔无限大平板问题，如图 (3.12) 所示，板的中心存在一半径为 $a = 1$ 的圆形小孔，同时平板的无穷远处沿 x 轴方向施加均布荷载 $T = 1000$ 。板的材料系数为杨氏模量

$E = 3 \times 10^6$ 、泊松比 $\nu = 0.3$ 。根据 Michell 解可以得到该带孔无限大平板问题的解析解为：

$$\begin{cases} u_x(r, \theta) = \frac{Ta}{8\mu} \left(\frac{r}{a} (k+1) \cos \theta - \frac{2a^3}{r^3} \cos 3\theta + \frac{2a}{r} ((1+k) \cos \theta + \cos 3\theta) \right) \\ u_y(r, \theta) = \frac{Ta}{8\mu} \left(\frac{r}{a} (k-3) \sin \theta - \frac{2a^3}{r^3} \sin 3\theta + \frac{2a}{r} ((1-k) \sin \theta + \sin 3\theta) \right) \end{cases} \quad (3.58)$$

其中， k 和 μ 分别为：

$$k = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.59)$$

与之相对应的应力分量为：

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right) \\ \sigma_{yy} = -T \left(\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right) \\ \sigma_{xy} = -T \left(\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \right) \end{cases} \quad (3.60)$$

如图 (3.12) 所示，根据带孔无限大平板的对称性，取边长 $b = 5$ 的四分之一的方形域作为研究对象。方形域的上端和右端以及圆孔的边界施加自然边界条件 Γ^t ，而方形域的左端和下端约束法向位移，施加强制边界条件 Γ^g 。该求解域分别通过图 (3.13) 所示采用 (a)112、(b)403、(c)1525、(d)5929 的四个疏密不同的节点进行离散。对于采用三次基函数的带孔无限大平板算例问题，传统高斯积分法采用 16 点高斯积分，核函数的相对影响域为 3.5。

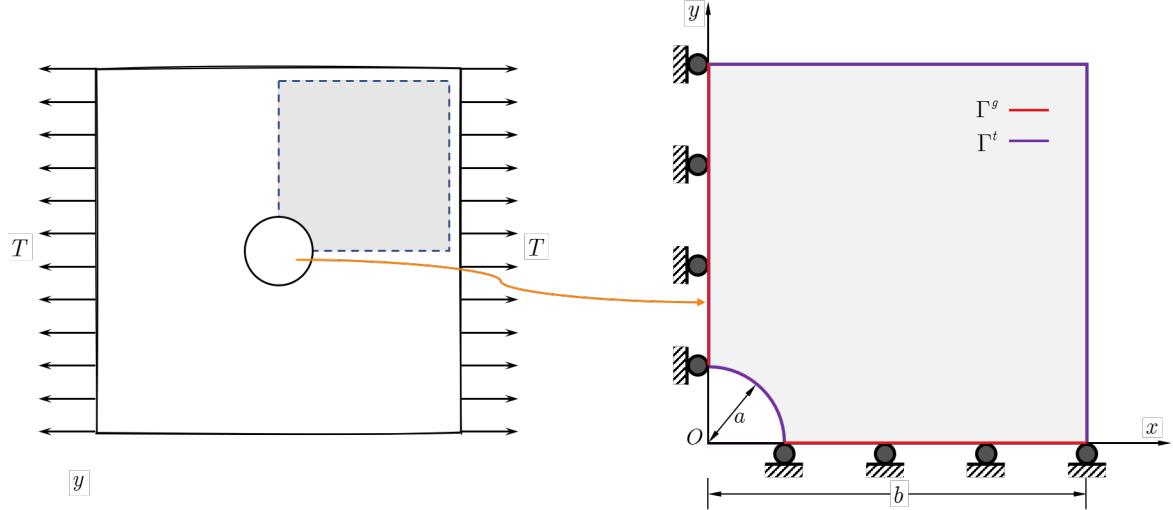


Figure 3.12: 带孔无限大平板问题模型

图 (3.14)、(3.15) 为带孔无限大平板问题的位移和能量误差对比图。从图中可以看出传统高斯积分法由于不具有变分一致性，导致 GI-Penalty 法、GI-LM 法、GI-Nitsche 法均无法达到理论误差收敛率。基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法 (RKGSI-HR) 和 RKGSI-Nitsche 法满足变分一致性能够达到理论误差收敛率。虽然 RKGSI-LM 法无法通过分片实验不满足变分一致性，但由于拉格朗日乘子法具有较高的精度也能达到理论误差收敛率。

图 (3.16)、(3.17) 为带孔无限大平板问题的效率对比图。从图中可以看出随着无网格节点数的增加，采用再生光滑梯度积分法 (RKGSI) 的效率明显高于传统高斯积分法 (GI)，在施加强制边界条件的过程中，HR 法不仅满足变分一致性同时计算效率还高于传统的 Nitsche 法。

最后，图 (3.18) 为带孔无限大平板问题的应力云图，从图中可以看出 RKGSI-Penalty 法和精确解之间是有差异的，而 RKGSI-Nitsche 法和 RKGSI-HR 法是和精确解几乎相同。但 Nitsche 法是需要依靠人工经验参数并且计算效率也低于 HR 法。

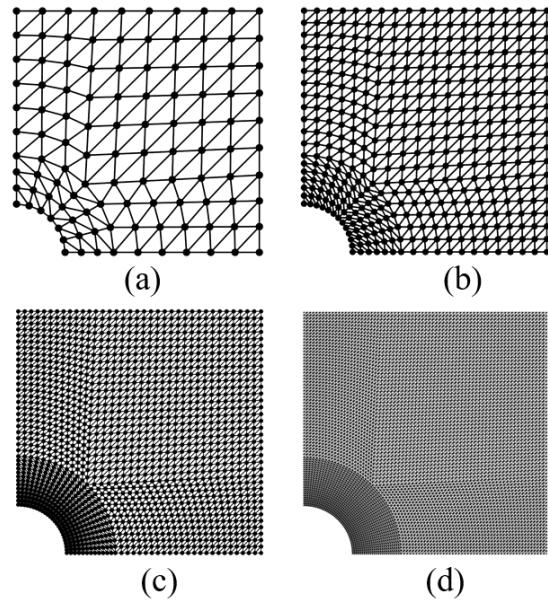


Figure 3.13: 带孔无限大平板问题无网格离散

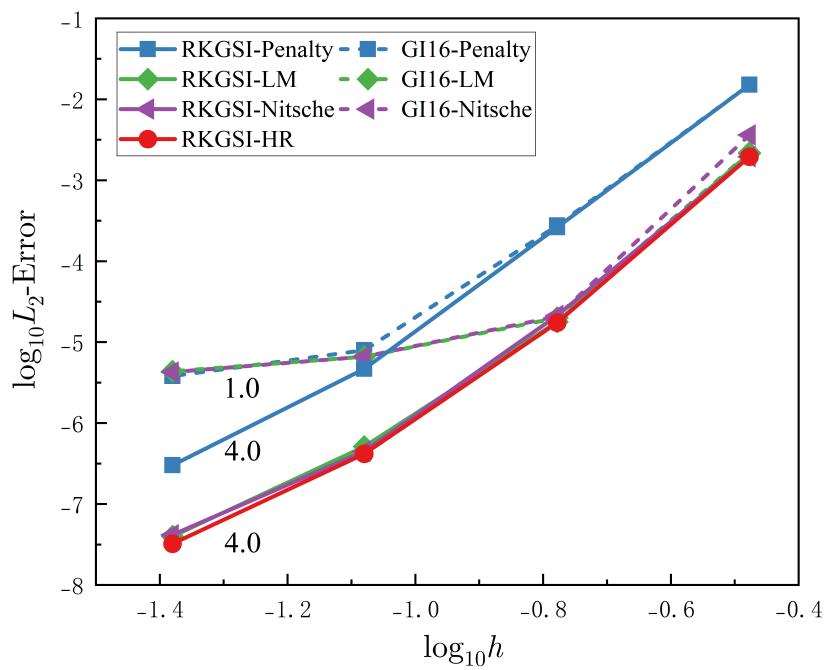


Figure 3.14: 带孔无限大平板问题位移误差对比

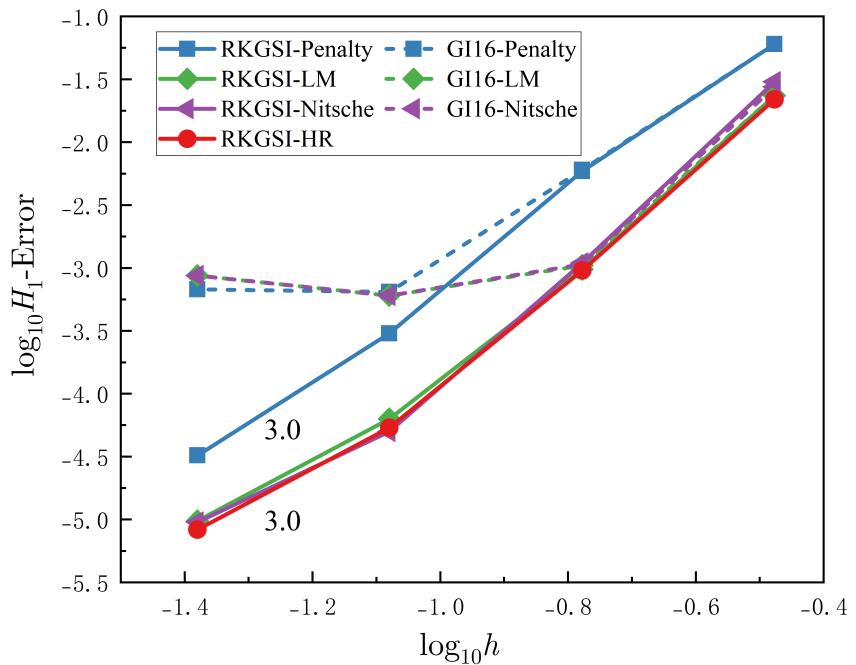


Figure 3.15: 带孔无限大平板问题能量误差对比

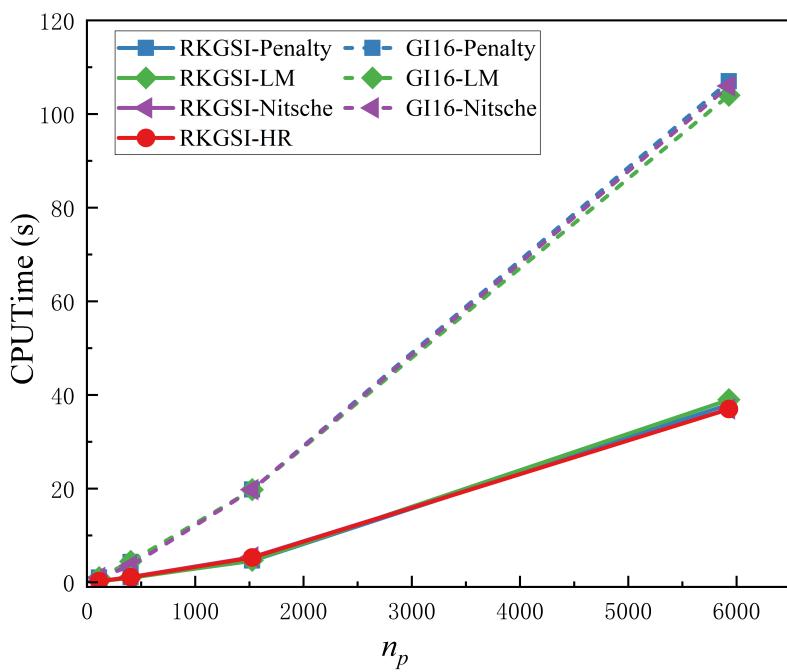


Figure 3.16: 带孔无限大平板问题计算时间与节点数关系

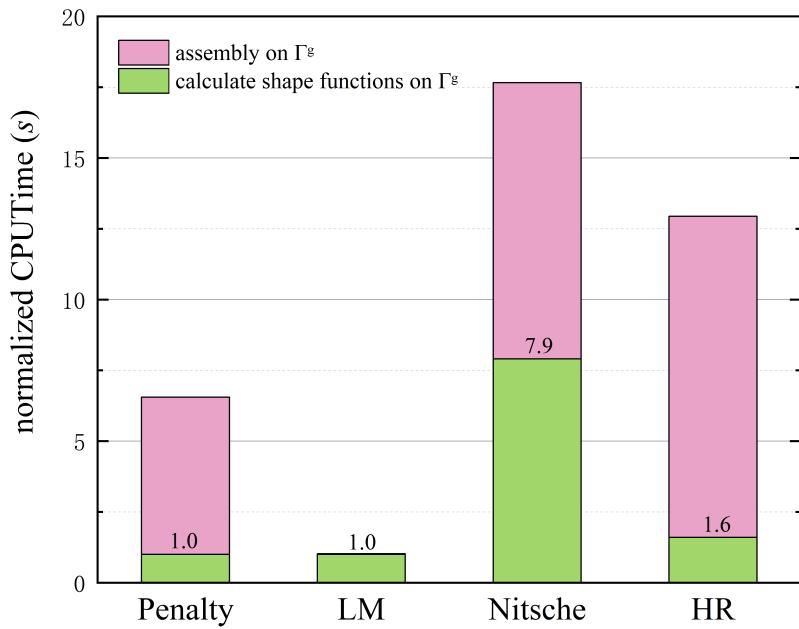


Figure 3.17: 带孔无限大平板问题本质边界条件施加效率分析

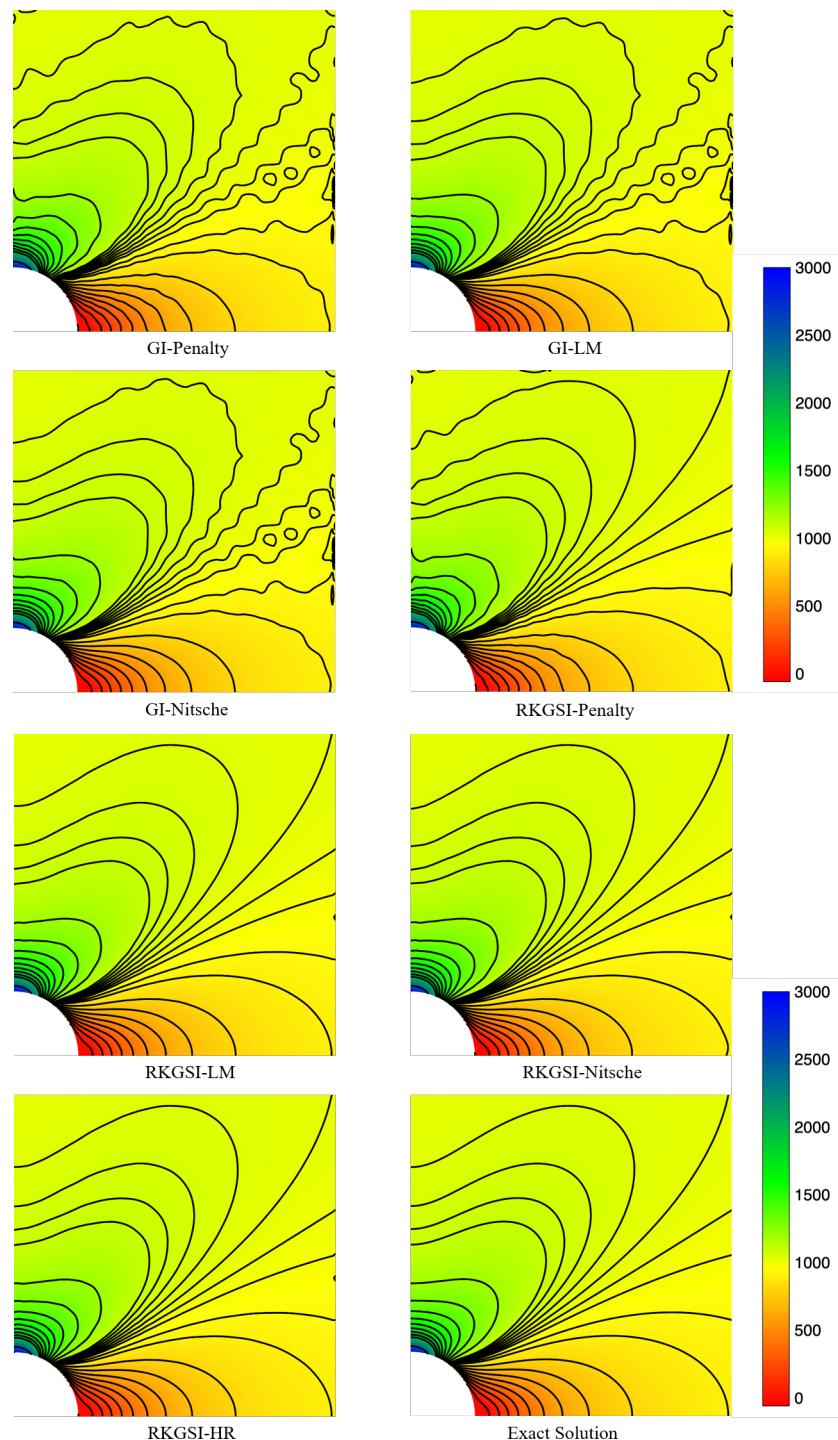


Figure 3.18: 带孔无限大平板问题应力云图

第4章 薄板问题 HR 弱形式

4.1 Hellinger-Reissner 变分原理

考虑如图(4.1)所示薄板区域 $\bar{\Omega}$, 其中板厚为 h , Ω 为薄板中面。根据 Kirchhoff 薄板假设原理 [], 在薄板中面 Ω 上的控制方程为:

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q} = 0 & \text{in } \Omega \\ w = \bar{w} & \text{on } \Gamma_w \\ \theta_{\mathbf{n}} = w_{,\mathbf{n}} = \bar{\theta}_{\mathbf{n}} & \text{on } \Gamma_{\theta} \\ V_{\mathbf{n}} = Q_{\mathbf{n}} + M_{\mathbf{n}\mathbf{s},\mathbf{s}} = \bar{V}_{\mathbf{n}} & \text{on } \Gamma_V \\ M_{\mathbf{n}\mathbf{n}} = \bar{M}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} & \text{on } \Gamma_M \\ w = \bar{w} & \text{at } c_w \\ P = -M_{\mathbf{n}\mathbf{s}}|_{c_p} = \bar{p} & \text{at } c_P \end{cases} \quad (4.1)$$

其中式(4.1)存在如下关系式:

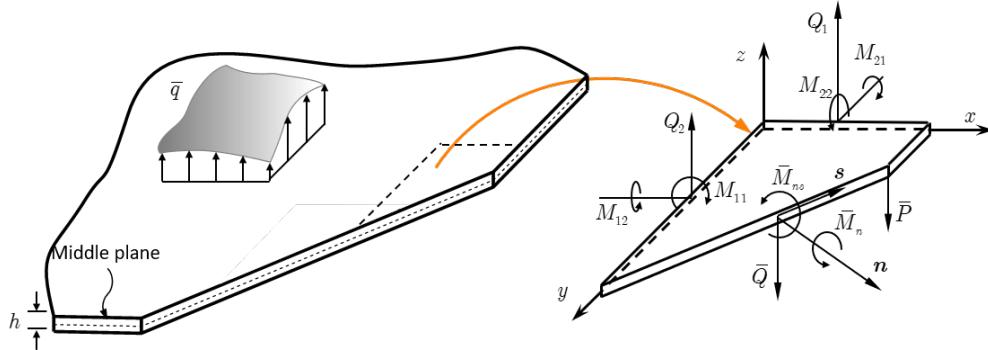


Figure 4.1: 薄板运动学及边界条件

$$w_{,\mathbf{n}} = w_{,\alpha} n_{\alpha} \quad (4.2)$$

$$Q_{\mathbf{n}} = n_{\alpha} M_{\alpha\beta,\beta} \quad (4.3)$$

$$M_{\mathbf{n}\mathbf{n}} = M_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta}, M_{\mathbf{n}\mathbf{s}} = M_{\alpha\beta} n_{\alpha} s_{\beta}, M_{\mathbf{s}\mathbf{s}} = M_{\alpha\beta,\gamma} s_{\alpha} s_{\beta} s_{\gamma} \quad (4.4)$$

式中 $M_{\alpha\beta}$ 为矩量 \mathbf{M} 的弯曲和扭转分量, \bar{q} 为垂直于薄板中面的分布荷载。 Γ_w 、 Γ_{θ} 和 c_w 为本质边界条件, \bar{w} 和 $\bar{\theta}_n$ 分别为本质边界条件下给定的挠度和转角。 Γ_V 、 Γ_M 和 c_P 为自然边界条件, V_n 、 M_{nn} 和 P 为自然边界上的等效剪力、法向弯矩和薄板角上的集中荷载。 $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}^T$, $\mathbf{s} = \{s_x, s_y\}^T$ 分别表示所在边界方向上的外法线方向和切方向的分量。所有的边界条件都满足如下关系式:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_w \cup \Gamma_V \cup \Gamma_{\theta} \cup \Gamma_M, c = c_w \cup c_P \\ \Gamma_w \cap \Gamma_V &= \Gamma_{\theta} \cap \Gamma_M = c_w \cap c_P = \emptyset \end{aligned} \quad (4.5)$$

当薄板为线弹性各向同性材料时, 其本构关系表达式如下:

$$M_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\gamma\eta} \kappa_{\gamma\eta} = -D_{\alpha\beta\gamma\eta} w_{,\gamma\eta} \quad (4.6)$$

其中

$$D_{\alpha\beta\gamma\eta} = \bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\eta} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\eta} + \delta_{\alpha\eta}\delta_{\beta\gamma})) \quad (4.7)$$

式中, $\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ 为曲率张量 κ 的分量。 $D_{\alpha\beta\gamma\eta}$ 为四阶弹性张量, \bar{D} 分为抗弯刚度, 其可采用杨氏模量 E 、泊松比 ν 和板厚 h 表示为:

$$\bar{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.8)$$

根据尺寸相关弹性 [], 此时将式 (4.3)、(4.4)、(4.6)、(4.7) 代入式 (4.1) 中可以得到自然边界上的法向弯矩 M_{nn} 、等效剪力 V_n 和薄板角上的集中荷载 P 的具体表达式为:

$$\begin{cases} M_{nn} = \mathcal{M}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -\bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta} + (1-\nu)n_\alpha n_\beta)w_{,\alpha\beta} \\ V_n = \mathcal{V}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -\bar{D}(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}n_\beta + (1-\nu)n_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\gamma}s_\alpha n_\beta s_\gamma)w_{,\alpha\beta} \\ P = \mathcal{P}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -[(\bar{D}(1-\nu)n_\alpha s_\beta)w_{,\alpha\beta}] \end{cases} \quad (4.9)$$

其中:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma n_\eta = -\bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta} + (1-\nu)n_\alpha n_\beta) \\ \mathcal{V}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -D_{\alpha\beta\gamma\eta}(n_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\eta} + s_\gamma n_\eta s_\xi \frac{\partial}{\partial x_\xi}) = -\bar{D}(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}n_\beta + (1-\nu)n_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\gamma}s_\alpha n_\beta s_\gamma) \\ \mathcal{P}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -[D_{\alpha\beta}n_\gamma s_\eta] = -[\bar{D}(1-\nu)n_\alpha s_\beta] \end{cases} \quad (4.10)$$

基于 Hellinger-Ressiner 变分原理 [], 得到薄板问题控制方程 (4.1) 的余能泛函表达式为:

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(M_{\alpha\beta}, w) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega - \int_{\Gamma_w} V_n \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} M_{nn} \bar{\theta}_n d\Gamma - p\bar{w}|_{x \in c_w} \\ &\quad + \int_{\Omega} w(M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q}) d\Omega + \int_{\Gamma_M} w_{,n}(M_{nn} - \bar{M}_{nn}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_V} w(V_n - \bar{V}_n) d\Gamma - w(P - \bar{P})|_{x \in c_P} \end{aligned} \quad (4.11)$$

对式 (4.11) 进行变分得到薄板问题控制方程的伽辽金弱形式为:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR}(M_{\alpha\beta}, w) &= \int_{\Omega} \delta M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega - \int_{\Gamma_w} \delta V_n \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \delta M_{nn} \bar{\theta}_n d\Gamma - \delta P \bar{w}|_{x \in c_w} \\ &\quad + \int_{\Omega} \delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta} w d\Omega + \int_{\Gamma_M} \delta M_{nn} w_{,n} d\Gamma - \int_{\Gamma_V} \delta V_n w d\Gamma - \delta P w|_{x \in c_P} \\ &\quad + \int_{\Omega} \delta w(M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q}) d\Omega + \int_{\Gamma_M} \delta w_{,n}(M_{nn} - \bar{M}_{nn}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_V} \delta w(V_n - \bar{V}_n) d\Gamma - \delta w(P - \bar{P})|_{x \in c_P} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

对能量泛函 Π_{HR} 取极值时, 要求对任意的 δw 、 $\delta M_{\alpha\beta}$ 关于 $\delta\Pi_{HR}$ 都要恒成立, 此时利用几何关系式 (4.5) 将弱形式 (4.12) 根据 δw 、 $\delta M_{\alpha\beta}$ 关于 $\delta\Pi_{HR}$ 改写为下列两式:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega &= \int_{\Gamma} \delta V_n w d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta M_{nn} w_{,n} d\Gamma + \delta P w|_{x \in c} - \int_{\Omega} \delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta} w d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_w} \delta V_n w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \delta M_{nn} w_{,n} d\Gamma - \delta P w|_{x \in c_w} \\ &\quad + \int_{\Gamma_w} \delta V_n \bar{w} d\Gamma - \int_{\Gamma_\theta} \delta M_{nn} \bar{\theta}_n d\Gamma + \delta P \bar{w}|_{x \in c_w} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \delta w V_{\mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta w_{,\mathbf{n}} M_{\mathbf{n}\mathbf{n}} d\Gamma + \delta w P|_{\mathbf{x} \in c} - \int_{\Omega} \delta w M_{\alpha\beta, \alpha\beta} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_w} \delta w V_{\mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \delta w_{,\mathbf{n}} M_{\mathbf{n}\mathbf{n}} d\Gamma - \delta w P|_{\mathbf{x} \in c_w} \\
& = \int_{\Gamma_V} \delta w \bar{V}_{\mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_M} \delta w_{,\mathbf{n}} \bar{M}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} d\Gamma + \delta w \bar{P}|_{\mathbf{x} \in c_P} + \int_{\Omega} \delta w \bar{q} d\Omega
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2 挠度离散和弯矩离散

4.2.1 挠度离散和再生核近似

板挠度 w 采用基于再生核近似的无网格形函数进行离散。无网格法通过如图(4.2)所示在薄板中面 Ω 和边界 Γ 上布置一系列无网格节点 $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{NP}$ 进行离散, 不失为一般性, 考虑任意薄板挠度 w 的近似表达式 w^h 及其虚位移 δw^h 可表示为:

$$w^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) d_I, \quad \delta w^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) \delta d_I \tag{4.15}$$

其中 NP 表示无网格节点数量, d_I 、 $\Psi_I(\mathbf{x})$ 为无网格节点 \mathbf{x}_I 上的节点系数和无网格形函数。

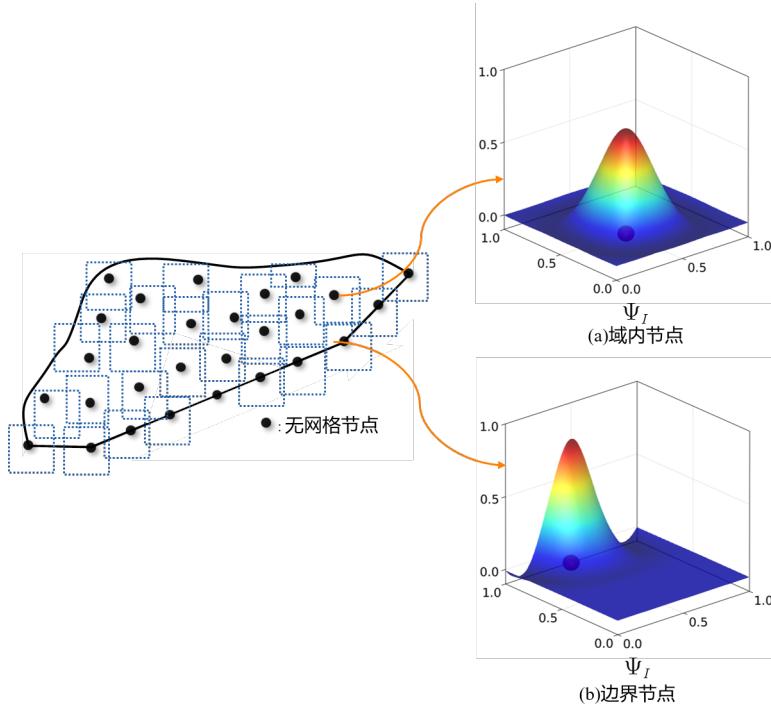


Figure 4.2: 薄板无网格离散

$\Psi_I(\mathbf{x})$ 的具体表达式与式(3.21)的求解思路相同, 不同的是针对四阶的薄板问题, 无网格形函数

一般选择三阶或四阶，此时核函数 $\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ 则选用如下的五次样条函数构造无网格形函数：

$$\phi(r) = \frac{1}{5!} \begin{cases} (3-3r)^5 - 6(2-3r)^5 + 15(1-3r)^5 & r \leq \frac{1}{3} \\ (3-3r)^5 - 6(2-3r)^5 & \frac{1}{3} < r \leq \frac{2}{3} \\ (3-3r)^5 & \frac{2}{3} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

4.2.2 弯矩离散和再生光滑梯度近似

如图所示 (4.3)，将薄板中面 Ω 划分为一系列背景积分单元 $\Omega_C, C = 1, 2, \dots, n_C$ ，并且存在 $\cup_{C=1}^{n_C} \Omega_C \approx \Omega$ 。在背景积分单元 Ω_C 内，弯矩分量 $M_{\alpha\beta}$ 的近似表达式 $M_{\alpha\beta}^h$ 和虚 0 的表达式 $\delta M_{\alpha\beta}^h$ 可表示为：

$$M_{\alpha\beta}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_{\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{x}), \delta M_{\alpha\beta}^h(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{a}_{\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.17)$$

其中 $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ 是比多阶基函数向量 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 低两阶的单项式向量，具体表达式为：

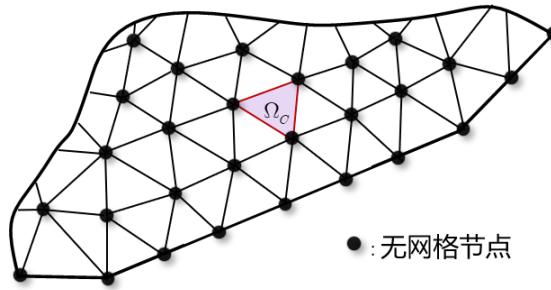


Figure 4.3: 背景积分单元示意图

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, \dots, x^i y^j, \dots, y^{p-2}\}^T, 0 \leq i + j \leq p - 2 \quad (4.18)$$

$\mathbf{a}_{\alpha\beta}$ 为弯矩分量 $M_{\alpha\beta}$ 在积分域 Ω_C 内的常系数向量，此时将近似的弯矩分量表达式 (4.4) 代入式 (4.13) 同时根据式 (4.9) 和线弹性本构关系式 (4.6) 可以得到：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \mathbf{a}_{\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathbf{a}_{\gamma\eta}^T \tilde{\mathbf{q}} d\Omega &= - \int_{\Gamma} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{a}_{,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} w d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{a}_{,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} w, \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad - D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{P}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{a}_{,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} w|_{x \in c} - \int_{\Omega} \delta \mathbf{a}_{\alpha\beta,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} w d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma_w} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{a}_{,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} d\Gamma - \int_{\Gamma_\theta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{a}_{,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} w, \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.19) \\ &\quad + D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{P}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{a}_{,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} w x|_{x \in c_w} - \int_{\Gamma_w} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{a}_{,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} \bar{w} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_\theta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{a}_{,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} \bar{\theta}, \mathbf{n} d\Gamma - D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{P}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{a}_{,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} \bar{w}|_{x \in c_w} \end{aligned}$$

此时，等式两边同时消去 $\delta \mathbf{a}_{\alpha\beta}^T$ 进一步得到：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{q}} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathbf{a}_{\gamma\eta}^T \tilde{\mathbf{q}} d\Omega &= - \int_{\Gamma} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{q}} w d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{q}} w, \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad - D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{q}} w|_{x \in c} - \int_{\Omega} \delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha\beta, \alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} w d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma_w} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{q}} d\Gamma - \int_{\Gamma_\theta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{q}} w, \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad + D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{q}} w x|_{x \in c_w} - \int_{\Gamma_w} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{q}} \bar{w} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_\theta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{q}} \bar{\theta}, \mathbf{n} d\Gamma - D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} \mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{q}} \bar{w}|_{x \in c_w} \end{aligned} \quad (4.20)$$

对上式进行移项可以得到常系数向量 $\mathbf{a}_{\alpha\beta}$ 的具体表达式为：

$$\mathbf{a}_{\gamma\eta} = -D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \left(\sum_{I=1}^{NP} (\tilde{g}_{\alpha\beta I} - \bar{g}_{\alpha\beta I}) d_I + \hat{g}_{\alpha\beta} \right) \quad (4.21)$$

其中：

$$\tilde{\mathbf{G}} = \int_{\Omega_C} \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T d\Omega \quad (4.22)$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta I} = \int_{\Gamma_C} \Psi_{I,n} \tilde{\mathbf{q}} n_\alpha n_\beta d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Psi_I (n_\alpha \tilde{\mathbf{q}}, \beta + \tilde{\mathbf{q}}, \gamma s_\alpha n_\beta s_\gamma) d\Gamma + [[\Psi_I \tilde{\mathbf{q}} n_\alpha s_\beta]]|_{x \in c_C} + \int_{\Omega_C} \Psi_I \tilde{\mathbf{q}}, \alpha \beta d\Omega \quad (4.23)$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta I} = \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \Psi_{I,n} \tilde{\mathbf{q}} n_\alpha n_\beta d\Gamma - \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} \Psi_I (n_\alpha \tilde{\mathbf{q}}, \beta + \tilde{\mathbf{q}}, \gamma s_\alpha n_\beta s_\gamma) d\Gamma + [[\Psi_I \tilde{\mathbf{q}} n_\alpha s_\beta]]|_{x \in c_w \cap c_C} \quad (4.24)$$

$$\hat{g}_{\alpha\beta I} = \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \tilde{\mathbf{q}} n_\alpha n_\beta \bar{\theta}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (n_\alpha \tilde{\mathbf{q}}, \beta + \tilde{\mathbf{q}}, \gamma s_\alpha n_\beta s_\gamma) \bar{w} d\Gamma + [[\bar{w} \tilde{\mathbf{q}} n_\alpha s_\beta]]|_{x \in c_w \cap c_C} \quad (4.25)$$

式中 Γ_C 是 Ω_C 的边界，此时将 $\mathbf{a}_{\alpha\beta}$ 代入到式 (4.4) 中可以得到近似的弯矩分量 $M_{\alpha\beta}^h(\mathbf{x})$ 的具体表达式为：

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^h(\mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{q}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{\alpha\beta} \\ &= -D_{\alpha\beta\gamma\eta} \left(\sum_{I=1}^{NP} (\tilde{\mathbf{q}}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta I} - \tilde{\mathbf{q}}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \bar{g}_{\gamma\eta I}) d_I + \tilde{\mathbf{q}}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \hat{g}_{\gamma\eta} \right) \\ &= -D_{\alpha\beta\gamma\eta} \left(\sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,\gamma\eta}(\mathbf{x}) d_I - \sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,\gamma\eta}(\mathbf{x}) d_I + \tilde{\mathbf{q}}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \hat{g}_{\gamma\eta} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

其中：

$$\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{q}}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\alpha\beta I} \quad (4.27)$$

$$\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{q}}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \bar{g}_{\alpha\beta I} \quad \mathbf{x} \in \Omega_C \quad (4.28)$$

此时，弯矩分量表达式中的 $\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}$ 是根据再生光滑梯度理论 [] 构造的二阶再生光滑梯度，可以避免传统无网格形函数梯度的复杂计算从而提高梯度计算效率，而 $\tilde{g}_{\alpha\beta I}$ 是满足 Galerkin 变分一致性的积分约束条件，进而保证算法的计算精度和误差收敛性。同时 $\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}$ 为在本质边界条件下求值的新型光滑梯度表达式。

如图 (4.4) 所示，求解薄板问题的优化数值积分方案的布置如图所示，具体布置方案根据 [文献]。

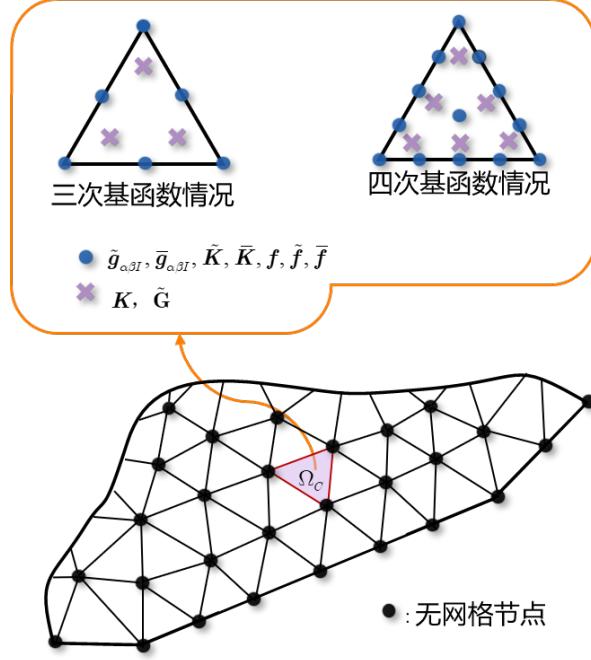


Figure 4.4: 优化的数值积分方案

4.3 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法

通过式(4.12)可以知道在四阶薄板问题上基于 Hellinger-Reissner 变分原理得到的弱形式已经考虑了本质边界条件和自然边界条件。为了更好的研究 Hellinger-Reissner 变分原理在求解薄板问题上的本质边界条件施加方法, 此时将挠度离散表达式(4.15)和弯矩离散表达式(4.4)代入到式(4.14)中从而得到:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \delta d_I \mathcal{V}_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} d\Gamma - \int_{\Gamma} \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,n} \delta d_I \mathcal{M}_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} d\Gamma + \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \delta d_I \mathcal{P}_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} |_{x \in c} \\
 & - \int_{\Omega} \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \delta d_I \mathbf{a}_{\alpha\beta,\alpha\beta}^T \tilde{\mathbf{q}} d\Omega - \int_{\Gamma_w} \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \delta d_I \mathcal{V}_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_\theta} \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,n} \delta d_I \mathcal{M}_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} d\Gamma - \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \delta d_I \mathcal{P}_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} |_{x \in c_w} \\
 & = \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Gamma_V} \Psi_I \delta d_I \bar{V}_n d\Gamma - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Gamma_M} \Psi_{I,n} \delta d_I \bar{M}_{nn} d\Gamma + \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I \delta d_I \bar{P} |_{x \in c_P} + \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Omega} \Psi_I \delta d_I \bar{q} d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

此时引入式(4.10)并根据薄板问题线弹性本构关系式(4.6)得出

$$- \sum_{C=1}^{NC} (\tilde{g}_{\alpha\beta I}^T - \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T) \mathbf{a}_{\alpha\beta} = \mathbf{f} \tag{4.30}$$

其中 \mathbf{f} 为外力向量, 具体表达式为:

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma_V} \Psi_I \bar{V}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_M} \Psi_{I,n} \bar{M}_{nn} d\Gamma + \Psi_I \bar{P} |_{x \in c_P} + \int_{\Omega} \Psi_I \bar{q} d\Omega \tag{4.31}$$

此时, 进一步将式(4.21)中的 $\mathbf{a}_{\alpha\beta}$ 代入到式(4.30)中可以得到:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{C=1}^{NC} (\tilde{g}_{\alpha\beta I}^T - \bar{g}_{\alpha\beta I}^T) a_{\alpha\beta} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} (\tilde{g}_{\alpha\beta I}^T - \bar{g}_{\alpha\beta I}^T) D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \left(\sum_{J=1}^{NP} (\tilde{g}_{\gamma\eta J} - \bar{g}_{\gamma\eta J}) d_J + \hat{g}_{\gamma\eta} \right) \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} \sum_{J=1}^{NP} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} d_J + \sum_{C=1}^{NC} \sum_{J=1}^{NP} D_{\alpha\beta\gamma\eta} (-\bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} - \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J}) d_J \\
 & - \left(- \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \hat{g}_{\gamma\eta} \right) + \sum_{C=1}^{NC} \sum_{J=1}^{NP} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} d_J - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \hat{g}_{\gamma\eta}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

通过引入式(4.22)、(4.27)对式(4.32)中的第一项进行推导可以得到:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \int_{\Omega_C} \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T d\Omega \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Omega_C} \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta} d\Omega \\
 & = \mathbf{K}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

通过引入式(4.27)、(4.10)对式(4.32)中的第二项进行推导可以得到:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} (\bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} + \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J}) \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} \Psi_I (n_\alpha \tilde{\mathbf{q}}_{,\beta}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} + \tilde{\mathbf{q}}_{,\xi}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} s_\alpha n_\beta s_\xi) d\Gamma \\
 & + \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (n_\gamma \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}},_\eta + \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}},_\xi s_\gamma n_\eta s_\xi) \Psi_J d\Gamma \\
 & - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \Psi_{I,n} \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} n_\alpha n_\beta d\Gamma - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} n_\gamma n_\eta \Psi_{J,n} d\Gamma \\
 & - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} [[\Psi_I \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} n_\alpha s_\beta]]_{x \in c_w \cap c_C} - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} [[\tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} n_\gamma s_\eta \Psi_J]]_{x \in c_w \cap c_C} \\
 & = - \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} \Psi_I (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} (n_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} + s_\alpha n_\beta s_\xi \frac{\partial}{\partial x_\xi})) \tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta} d\Gamma \\
 & - \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} (n_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\eta} + s_\gamma n_\eta s_\xi \frac{\partial}{\partial x_\xi})) \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J d\Gamma \\
 & + \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \Psi_{I,n} (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\alpha n_\beta) \tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta} d\Gamma + \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\gamma n_\eta) \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_{J,n} d\Gamma \\
 & + \sum_{C=1}^{NC} [[\Psi_I (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\gamma s_\eta) \tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta}]]_{x \in c_w \cap c_C} + \sum_{C=1}^{NC} [[(-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\gamma s_\eta) \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J]]_{x \in c_w \cap c_C} \\
 & = - \int_{\Gamma_w} \Psi_I \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \Psi_{I,n} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta} d\Gamma + [[\Psi_I \mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta}]]_{x \in c_w} \\
 & - \int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_{J,n} d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J]]_{x \in c_w} \\
 & = \tilde{\mathbf{K}}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

通过引入式(4.27)、(4.10)对式(4.32)中的第三项进行推导可以得到:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \hat{g}_{\gamma\eta} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (n_\gamma \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_{,\eta} + \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_{,\xi} s_\gamma n_\eta s_\xi) \bar{w} d\Gamma \\
 & - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} n_\gamma n_\eta \bar{\theta}_n d\Gamma - [[\tilde{g}_{\alpha\beta I} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} n_\gamma s_\eta \bar{w}]]_{x \in c_w \cap c_C} \\
 & = - \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} (n_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\eta} + s_\gamma n_\eta s_\xi \frac{\partial}{\partial x_\xi})) \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w} d\Gamma \\
 & + \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\gamma n_\eta) \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{\theta}_n d\Gamma - [[(-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\gamma s_\eta \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w})]]_{x \in c_w \cap c_C} \\
 & = \int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{\theta}_n d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w}]]_{x \in c_w} \\
 & = \tilde{\mathbf{f}}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

通过引入式(4.28)、(4.10)对式(4.32)中的第四项进行推导可以得到:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{g}_{\gamma\eta J} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (n_\gamma \bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_{,\eta} + \tilde{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_{,\xi} s_\gamma n_\eta s_\xi) \Psi_J d\Gamma \\
 & - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} n_\gamma n_\eta \Psi_{J,n} d\Gamma - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} [[\bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} n_\gamma s_\eta \Psi_J]]_{x \in c_w \cap c_C} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} (n_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\eta} + s_\gamma n_\eta s_\xi \frac{\partial}{\partial x_\xi})) \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J d\Gamma \\
 & - \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\gamma n_\eta) \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_{J,n} d\Gamma - [[(-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\gamma s_\eta) \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J]]_{x \in c_w \cap c_C} \\
 & = \int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J d\Gamma - \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_{J,n} d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J]]_{x \in c_w} \\
 & = \bar{\mathbf{K}}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

通过引入式(4.28)、(4.10)对式(4.32)中的第五项进行推导可以得到:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \hat{g}_{\gamma\eta} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (n_\eta \bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_{,\gamma} + \bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_{,\xi} s_\gamma n_\eta s_\xi) \bar{w} d\Gamma \\
 & - \sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \bar{g}_{\alpha\beta I}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_{n_\gamma n_\eta} \bar{\theta}_n d\Gamma - [[\bar{g}_{\alpha\beta I} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_{n_\gamma s_\eta} \bar{w}]]_{x \in c_w \cap c_C} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} (n_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\eta} + s_\gamma n_\eta s_\xi \frac{\partial}{\partial x_\xi})) \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w} d\Gamma \\
 & - \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} (-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\gamma n_\eta) \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{\theta}_n d\Gamma - [[(-D_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\gamma s_\eta) \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w}]]_{x \in c_w \cap c_C} \\
 & = \int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{\theta}_n d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w}]]_{x \in c_w} \\
 & = \bar{\mathbf{f}}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

通过上述所进行的推导, 式(4.32)通过化简可以得到:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{C=1}^{NC} (\tilde{g}_{\alpha\beta I}^T - \bar{g}_{\alpha\beta I}^T) a_{\alpha\beta} \\
 & = \sum_{C=1}^{NC} (\tilde{g}_{\alpha\beta I}^T - \bar{g}_{\alpha\beta I}^T) D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \left(\sum_{J=1}^{NP} (\tilde{g}_{\gamma\eta J} - \bar{g}_{\gamma\eta J}) d_J + \hat{g}_{\gamma\eta} \right) \\
 & = \sum_{J=1}^{NP} (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) d_J - \tilde{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

将上式带入到式(4.30)从而得到薄板问题的离散平衡方程为:

$$(\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{d} = \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{f}} \tag{4.39}$$

4.4 数值算例

4.4.1 分片实验

针对四阶薄板问题, 采用二次、三次和四次高阶薄板分片实验验证采用传统高斯积分法和再生光滑梯度积分法的不同本质边界条件施加方法是否和二阶弹性力学问题相同满足积分约束条件。此时分片实验考虑求解域为 $\Omega = (0, 1) \otimes (0, 1)$ 的正方形薄板, 求解域的四边施加本质边界条件。其分片实验的精确解如下:

$$w(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1^2 + 2x_1 x_2 & \text{二次分片实验} \\ x_1^3 + 2x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 & \text{三次分片实验} \\ x_1^4 + 2x_1^3 x_2 + 3x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2^3 & \text{四次分片实验} \end{cases} \tag{4.40}$$

如图所示(), 薄板问题的分片实验由 49 个无网格节点进行离散。针对三次基函数的无网格近似, 采用二次和三次分片实验进行测试, 核函数的相对影响域在三次基函数的情况下设为

3.5：而四次基函数的无网格近似采用三次和四次分片实验进行测试，核函数的相对影响域在四次基函数的情况下设为 4.5。

为了更好的对比所提方法的计算精度，针对四阶薄板问题分别采用如下位移误差 $L_2 - \text{ERROR}$ 和能量误差 $H_i - \text{ERROR}$ 进行分析：

$$L_2 - \text{ERROR} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (w - w^h)^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} w^2 d\Omega}} \quad (4.41)$$

$$H_i - \text{ERROR} = \frac{\sum_{j=0}^i \sqrt{\int_{\Omega} (w_{,\alpha_1 \dots \alpha_j} - w_{,\alpha_1 \dots \alpha_j})^2 d\Omega}}{\sum_{j=0}^i \sqrt{\int_{\Omega} w_{,\alpha_1 \dots \alpha_j} w_{,\alpha_1 \dots \alpha_j} d\Omega}}$$

针对薄板问题，三次基函数的求解计算时高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 13 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 3 点高斯积分；四次基函数的求解计算时高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 16 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 5 点高斯积分；再生光滑梯度积分法“RKGSI”计算时采用的积分点数和高斯积分法一致。三次和四次基函数的无网格分片试验结果如下表：

Table 4.1: 三次基函数无网格法分片实验结果

	二次分片实验		三次分片实验	
	L_2 -Error	H_2 -Error	L_2 -Error	H_2 -Error
GI-Penalty	4.27×10^{-2}	3.82×10^{-1}	9.54×10^{-2}	5.12×10^{-1}
GI-Nitsche	4.09×10^{-2}	3.75×10^{-1}	9.50×10^{-2}	5.05×10^{-1}
RKGSI-Penalty	4.60×10^{-2}	3.86×10^{-1}	1.07×10^{-1}	5.40×10^{-1}
RKGSI-Nitsche	5.67×10^{-14}	2.18×10^{-12}	5.21×10^{-14}	1.20×10^{-12}
RKGSI-HR	5.58×10^{-15}	4.56×10^{-13}	3.66×10^{-15}	2.70×10^{-13}

Table 4.2: 四次基函数无网格法分片实验结果

	三次分片实验		四次分片实验	
	L_2 -Error	H_1 -Error	L_2 -Error	H_1 -Error
GI-Penalty	1.08×10^{-1}	5.44×10^{-1}	1.84×10^{-1}	6.32×10^{-1}
GI-Nitsche	1.07×10^{-1}	5.45×10^{-1}	1.84×10^{-1}	6.34×10^{-1}
RKGSI-Penalty	1.06×10^{-1}	5.40×10^{-1}	1.84×10^{-1}	6.26×10^{-1}
RKGSI-Nitsche	2.82×10^{-13}	4.99×10^{-12}	3.03×10^{-13}	3.33×10^{-12}
RKGSI-HR	1.68×10^{-14}	2.33×10^{-12}	4.40×10^{-14}	1.57×10^{-12}

表 (4.4.1) 和表 (4.4.2) 分别表示具有三次、四次基函数无网格法的薄板分片试验结果，从表中可以明显的看出，由于缺乏变分一致性传统高斯积分法(GI-Penalty、GI-Nitsche) 和罚函数法(RKGSI-Penalty) 都无法通过分片试验。只有变分一致性的再生光滑梯度积分法的 Nitsche 法(RKGSI-Nitsche) 和提出的 Hellinger-Ressiner 变分的原理的积分法(RKGSI-HR) 可以通过分片试验，满足积分约束条件。

4.4.2 简支方板问题

如图 (4.5) 所示，一简支方板的中性面区域为 $\Omega = (0, 1) \otimes (0, 1)$ ，此时 Ω 的长为 $a = 1$ 宽为 $b = 1$ ，材料系数分别为弯曲刚度 $\bar{D} = 1$ 、 $\nu = 0.3$ 。板面内分布如图所示纵向荷载：

$$\bar{q} = -\bar{D}\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \quad (4.42)$$

该简支方板问题的精确解为:

$$w = -\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \quad (4.43)$$

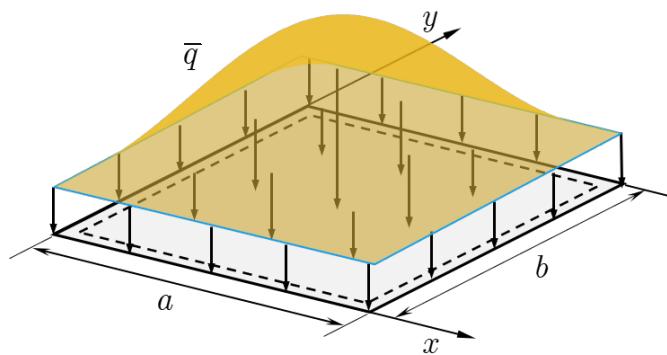


Figure 4.5: 简支方板问题模型

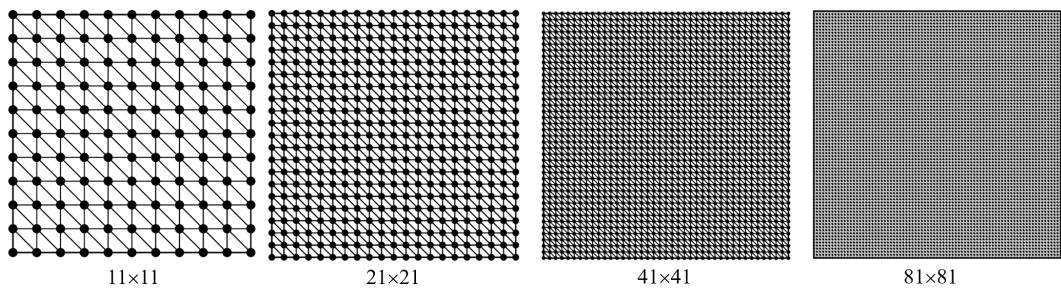


Figure 4.6: 简支方板问题节点离散

如图所示 (4.6), 简支方板求解域采用均布的 11×11 、 21×21 、 41×41 、 81×81 的四个疏密不同的节点进行离散。此时对于采用三次基函数的简支方板问题其相对影响域取为 3.5, 采用四次基函数时其相对影响域则取为 4.5。

图 (4.7) 和图 (4.8) 为简支方板问题的位移误差和能量误差对比图。从图中可以明显看出即使采用高阶高斯积分法 “GI” 如三次基函数的 13 点高斯积分法和四次基函数的 16 点高斯积分, 计算精度都低于再生光滑梯度法 “RKGSI”, 并且和同样不满足变分一致性的罚函数法一样都无法达到理论误差收敛率。而 “RKGSI-Nitsche” 和 “RKGSI-HR” 法不管是在三次基函数还是四次基函数时都达到了误差收敛率。图 (4.9) 是分别验证简支方板问题在三次基函数和四次基函数时带有人工经验参数的罚函数法和 Nitsche 法的敏感度分析。从图中可以明显的看出, 不同的经验参数对罚函数法的误差有着很大的影响, 并且它的最优误差只在一小部分。Nitsche 法的最优误差的人工经验参数的范围比较大, 但人工经验参数值的大小仍然会影响误差结果的变化, 并且随着网格的加密, 人工经验参数的最优结果是在发生改变的。此时, 提出的基于 Hellinger-Reissner

变分原理中由于内嵌了本质边界条件，无需人工经验参数来满足正定性，相较于同样满足积分约束条件的 RKGSI-Nitsche 法，提出的 RKGSI-HR 法的不因人工参数值的变化影响最优误差。图(4.10)是简支方板问题在三次基函数和四次基函数时分别计算节点数和与使用 GI 和 RKGSI 不同数值积分方法时的效率图。从整体来看采用“RKGSI”时的计算效率在三次基函数和四次基函数时都明显高于“GI”。

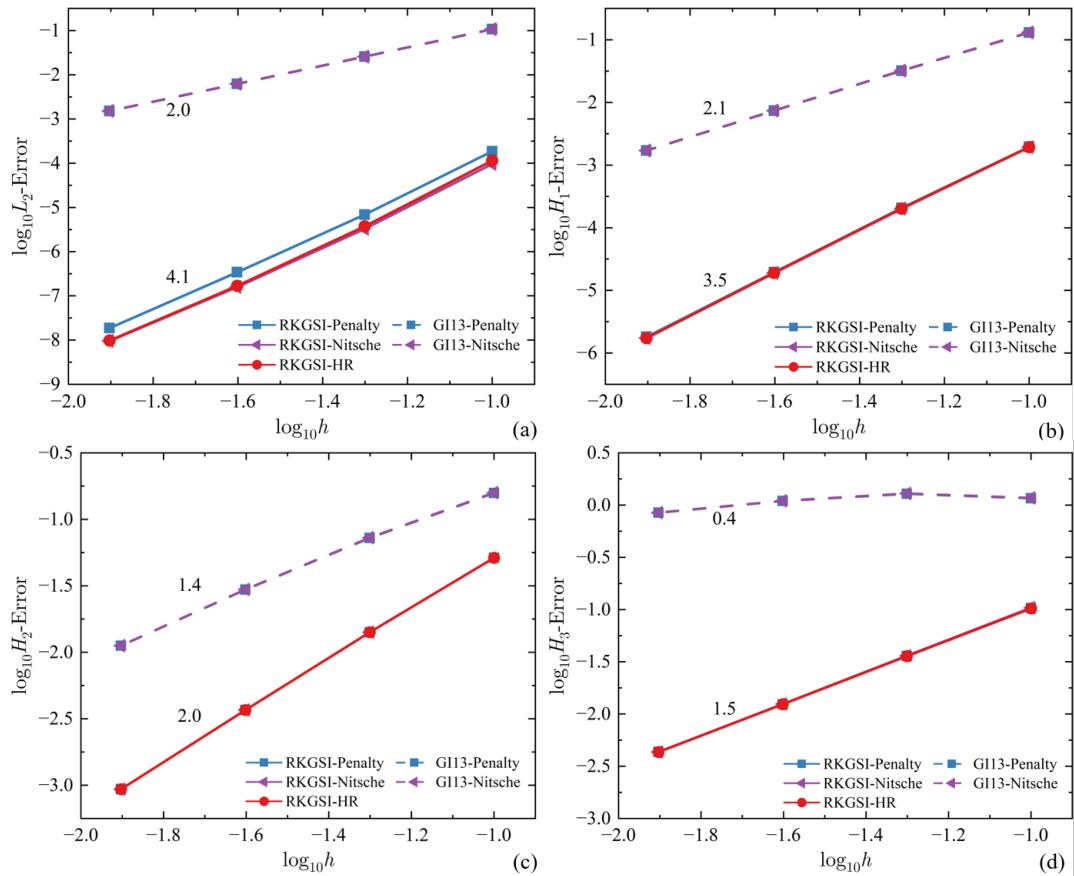


Figure 4.7: 简支方板问题三次基函数误差对比图: (a) L_2 -Error; (b) H_1 -Error; (c) H_2 -Error; (d) H_3 -Error

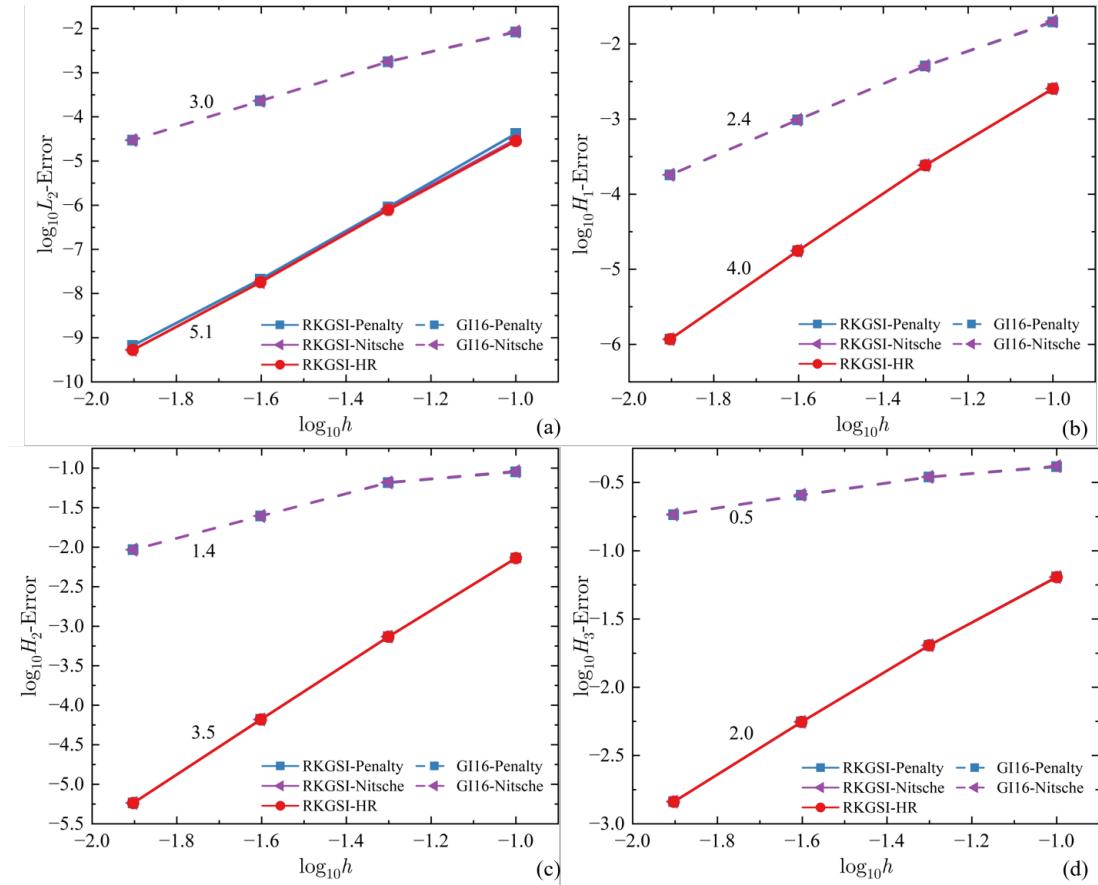


Figure 4.8: 简支方板问题四次基函数误差对比图: (a) L_2 -Error; (b) H_1 -Error; (c) H_2 -Error; (d) H_3 -Error

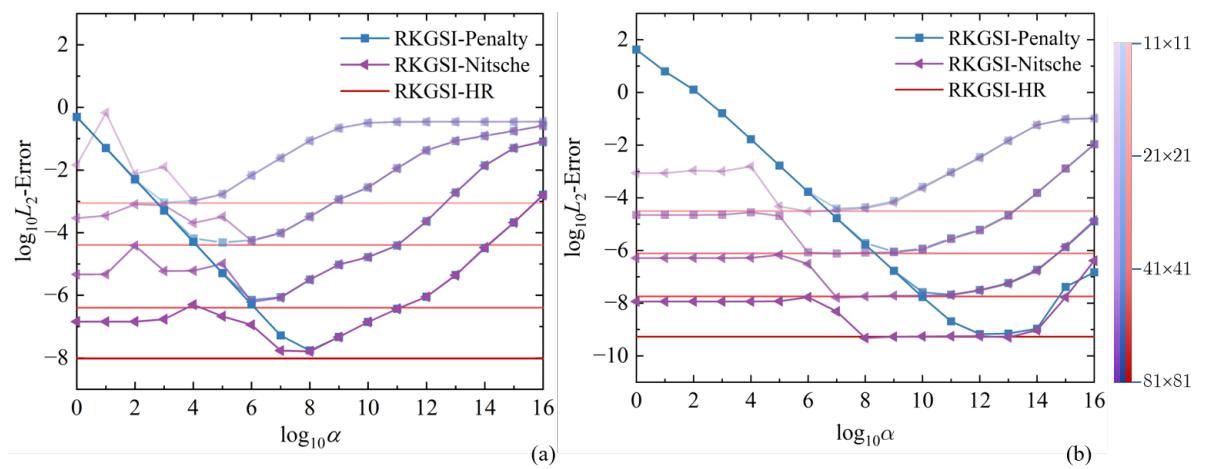


Figure 4.9: 人工经验参数 α 敏感度分析: (a) 三次基函数; (b) 四次基函数

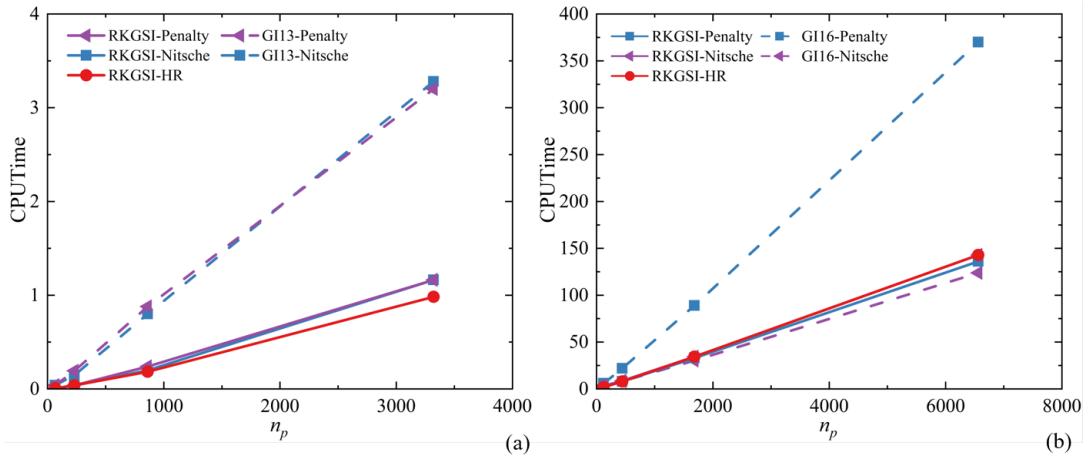


Figure 4.10: 简支方板问题计算时间和节点数的关系: (a) 三次基函数; (b) 四次基函数

4.4.3 简支等边三角形板问题

一简支等边三角形板如图(4.11)所示, 其中, 三角形板的高为 $a = 10$, 均布荷载作用在板面内为 $\bar{q} = 1$, 材料系数分别为弯曲刚度 $\bar{D} = 1$ 、泊松比 $\nu = 0.3$ 。该简支三角形板的精确解为:

$$w = \frac{\bar{q}}{64a\bar{D}}[x^3 - 3y^3x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3](\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2) \quad (4.44)$$

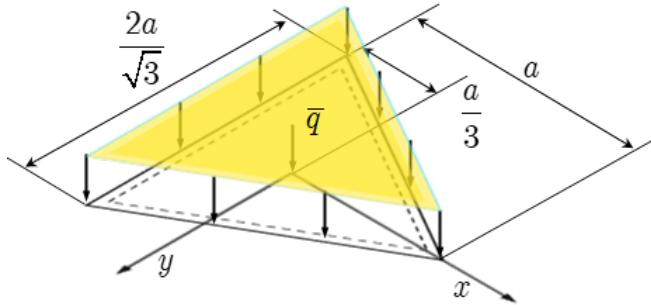


Figure 4.11: 简支等边三角形板问题模型

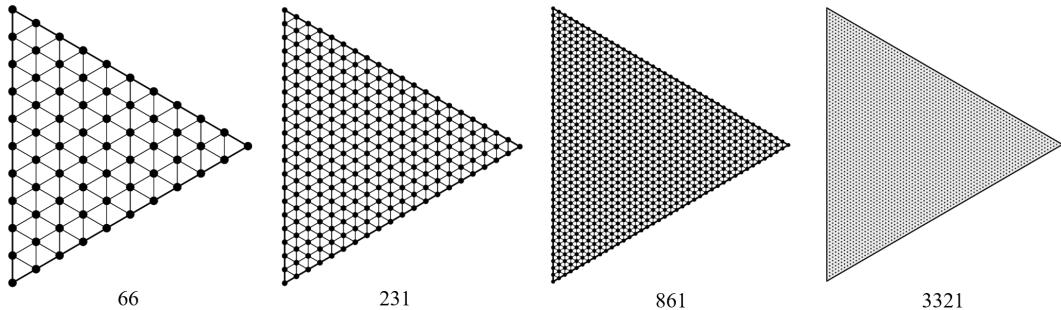


Figure 4.12: 简支等边三角形问题节点离散

如图(4.12)所示,简支等边三角形板求解域分布采用均布离散的66、231、861和3321的四个疏密不同的节点进行离散。同样采用三次基函数时,简支等边三角形板问题的相对影响域取为3.5,四次基函数时其相对应影响域取为4.5进行数值分析。

图(4.13)和图(4.14)为简支等边三角形板问题分别在三次基函数和四次基函数的位移误差和能量误差对比图。从图中可以明显看出采用“RKGSI”得出的计算精度优于“GI”法。并且不管是三次基函数还是四次基函数“RKGSI-Nitsche”、“RKGSI-HR”都能够达到理论误差收敛率,满足积分约束条件。图(4.15)、(4.16)分别为简支等边三角形板的效率对比图。和简支方板相同,采用“RKGSI”的计算效率明显高于“GI”。图(4.16)是简支等边三角形板的薄板中面和本质边界条件施加效率分析图,从图中可以看出在薄板中面施加过程中,“RKGSI”所用的时间都明显少于“GI”;而针对“RKGSI”在施加本质边界过程中计算形函数及梯度和组装相对应的刚度矩阵和力向量中可以明显看出“RKGSI-Nitsche”法所用的时间明显多于“RKGSI-HR”和“RKGSI-Penalty”,虽然“RKGSI-HR”和“RKGSI-Penalty”的计算效率相差不大,但“RKGSI-Penalty”由于不具有变分一致性无法达到理论误差收敛率。因此相较于传统的本质边界条件施加方法,“RKGSI-HR”不仅满足积分约束条件能够达到理论误差收敛率,提高计算精度,在计算时间上也用时较短,有效提高计算效率。图(4.17)为简支等边三角形板问题的弯矩云图。从图中可以看出“RKGSI-HR”、“RKGSI-Nitsche”和“RKGSI-Penalty”和精确解之间非常一致,进一步验证了所提方法能够有效提高计算精度。

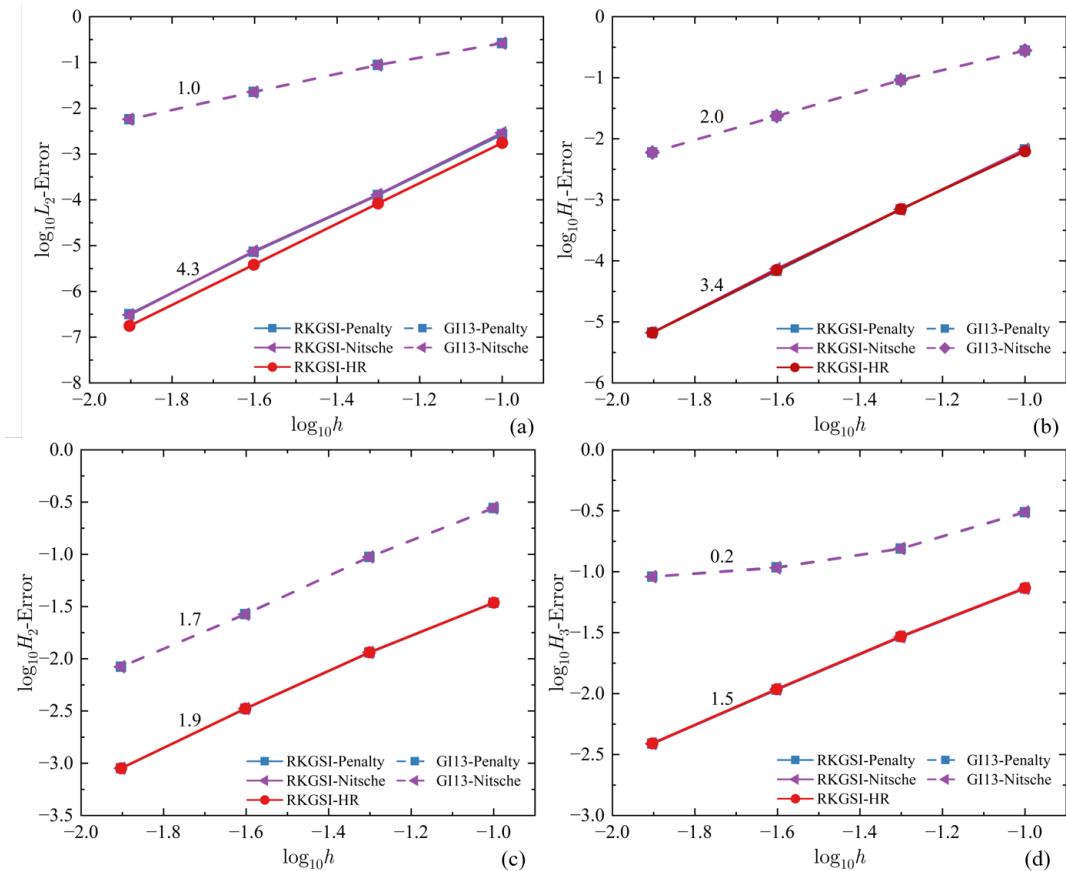


Figure 4.13: 简支等边三角形板问题三次基函数误差对比图

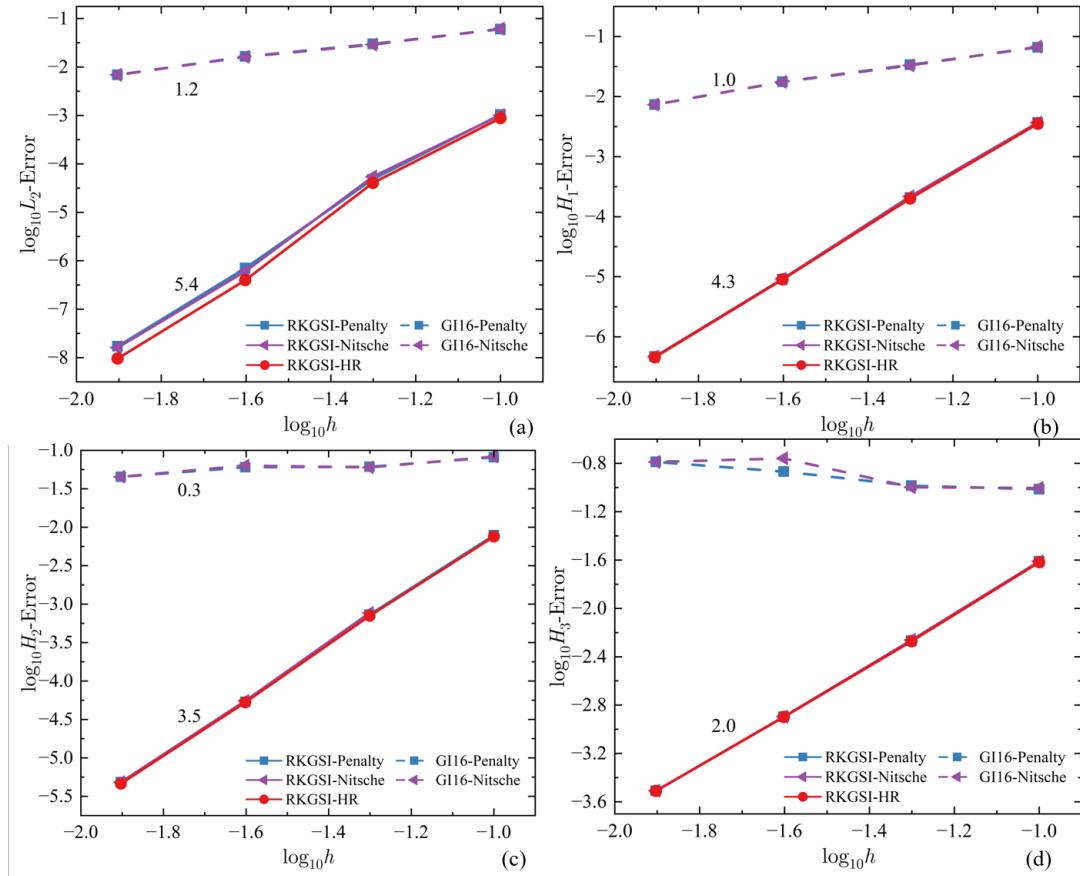


Figure 4.14: 简支等边三角形板问题四次基函数误差对比图

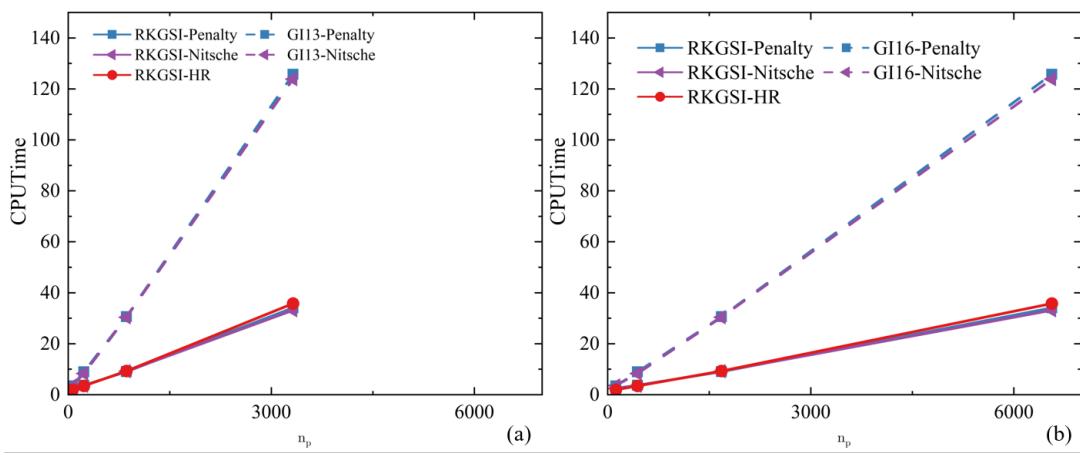


Figure 4.15: 简支等边三角形板问题计算时间和节点的关系: (a) 三次基函数; (b) 四次基函数

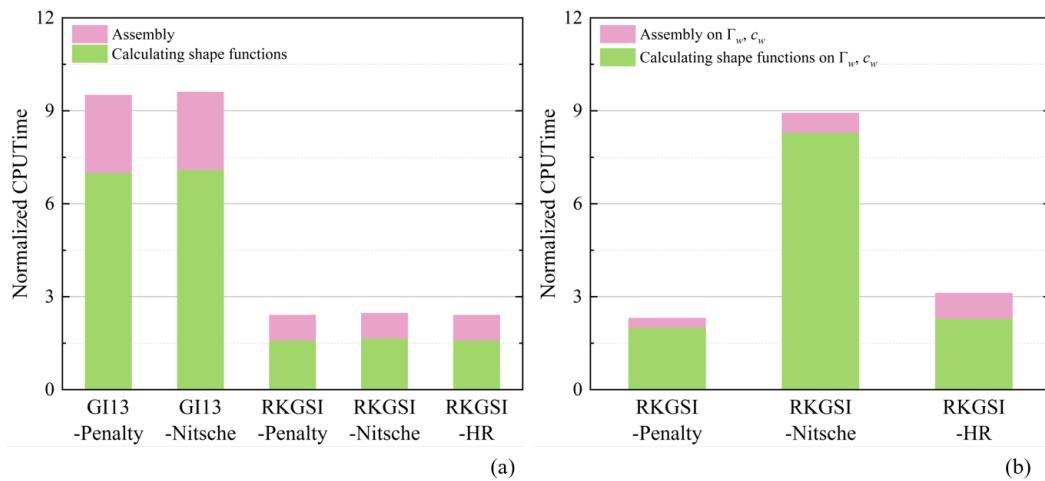


Figure 4.16: 简支等边三角形板问题效率对比: (a) 薄板中面 Ω ; (b) 本质边界条件 Γ_w, c_w

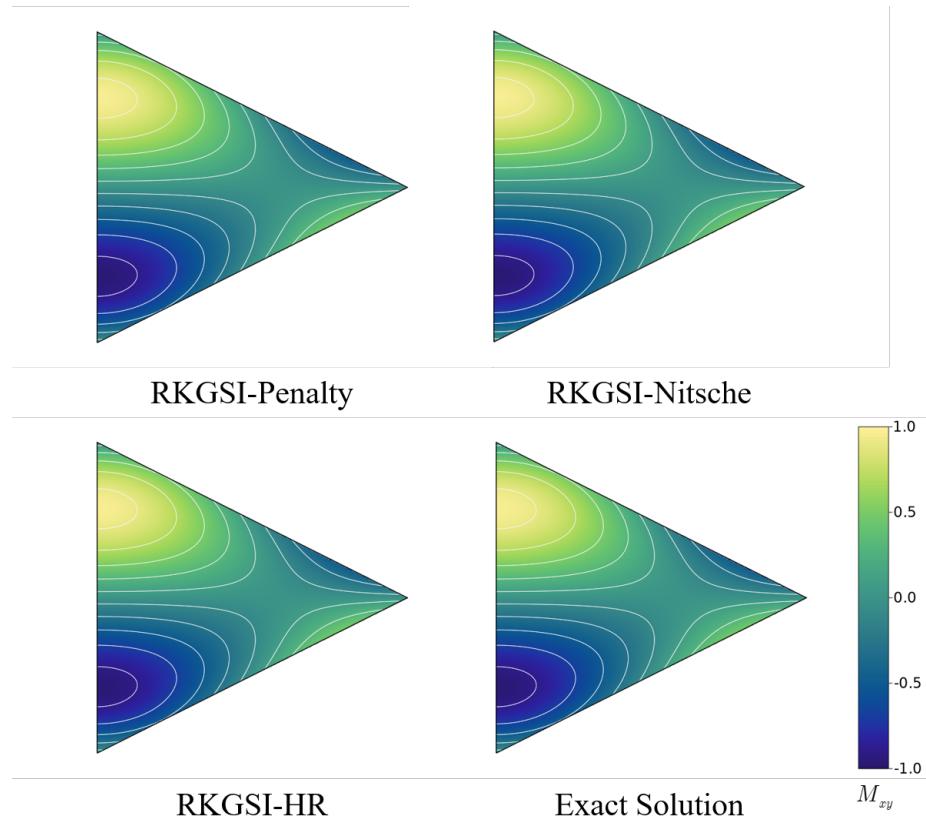


Figure 4.17: 简支等边三角形板问题弯矩云图

4.4.4 简支环行板问题

一简支环行板如图(4.18)所示，其中内外径分别为 $a = 2$ 、 $b = 1$ 。在环行板的内外径边缘处分别施加弯矩 $m_i = 2$ 、 $m_o = 1$ ，材料系数分别为抗弯刚度 $\bar{D} = 1$ 、泊松比为 $\nu = 0.3$ 。该简支环行板的精确解为：

$$w = \frac{(m_i - m_o)a^2 b^2}{\bar{D}(1 - \nu)(a^2 - b^2)} \ln \frac{r}{a} + \frac{m_i b^2 - m_o a^2}{2\bar{D}(1 + \nu)(a^2 - b^2)} (r^2 - a^2) \quad (4.45)$$

其中： $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是点 (x, y) 的极径。

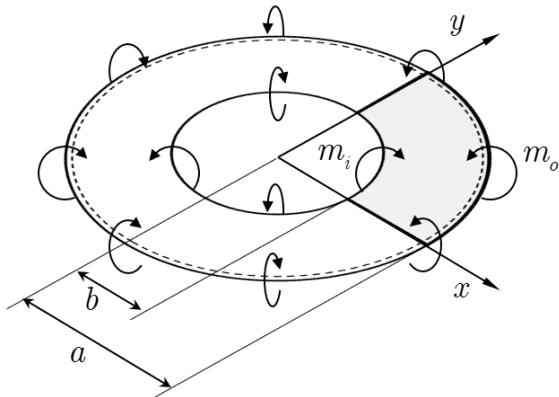


Figure 4.18: 简支环形板问题模型

如图(4.19)所示，简支环形问题求解域通过采用均匀的153、561、2145和8385四个疏密不同的节点进行离散，该简支环行板采用四次基函数，取相对影响域为4.5进行数值分析。

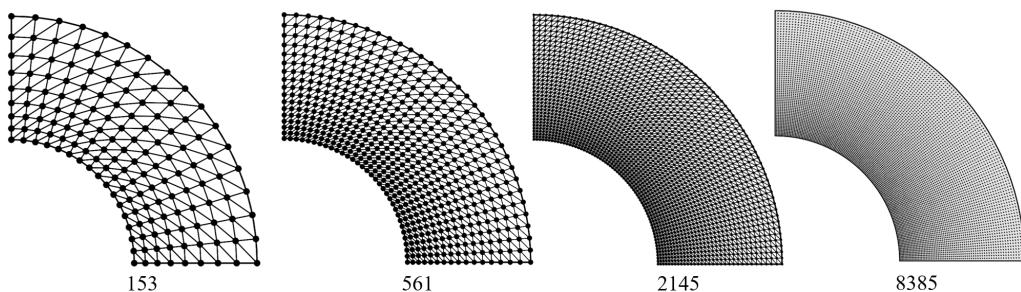


Figure 4.19: 简支环形板问题节点离散

图(4.20)为简支环行板问题的人工参数敏感度分析图。

图(4.21)为简支环行板问题的位移误差和能量误差对比图。从图中可以看出“RKGSI-HR”和“RKGSI-Nitsche”同样可以达到理论误差收敛率。同时根据简支环行板的弯矩云图(4.22)也可以更进一步说明在解决薄板问题上，基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法拥有着更高的计算精度。

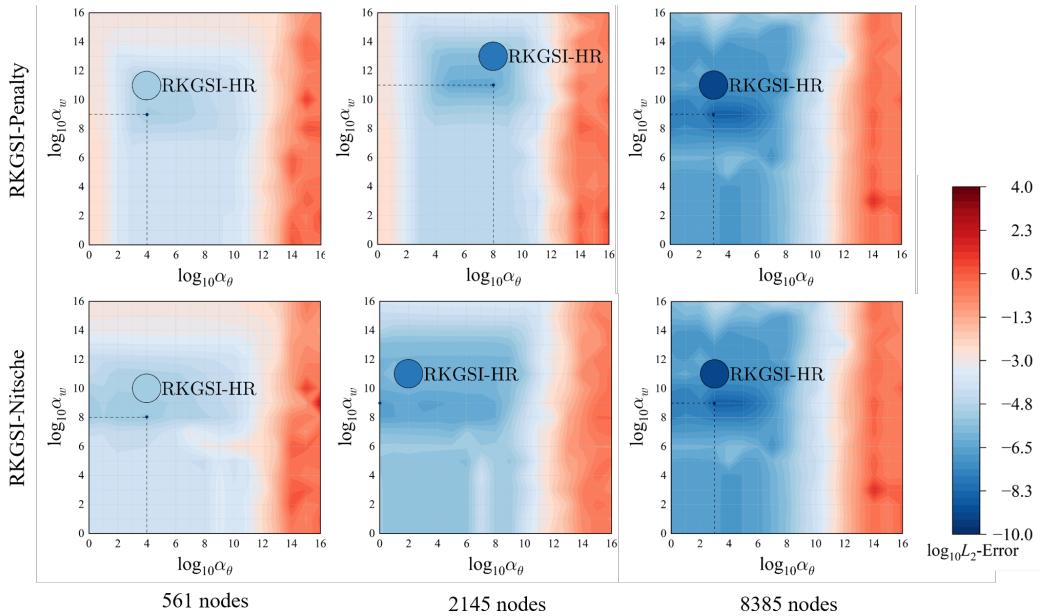
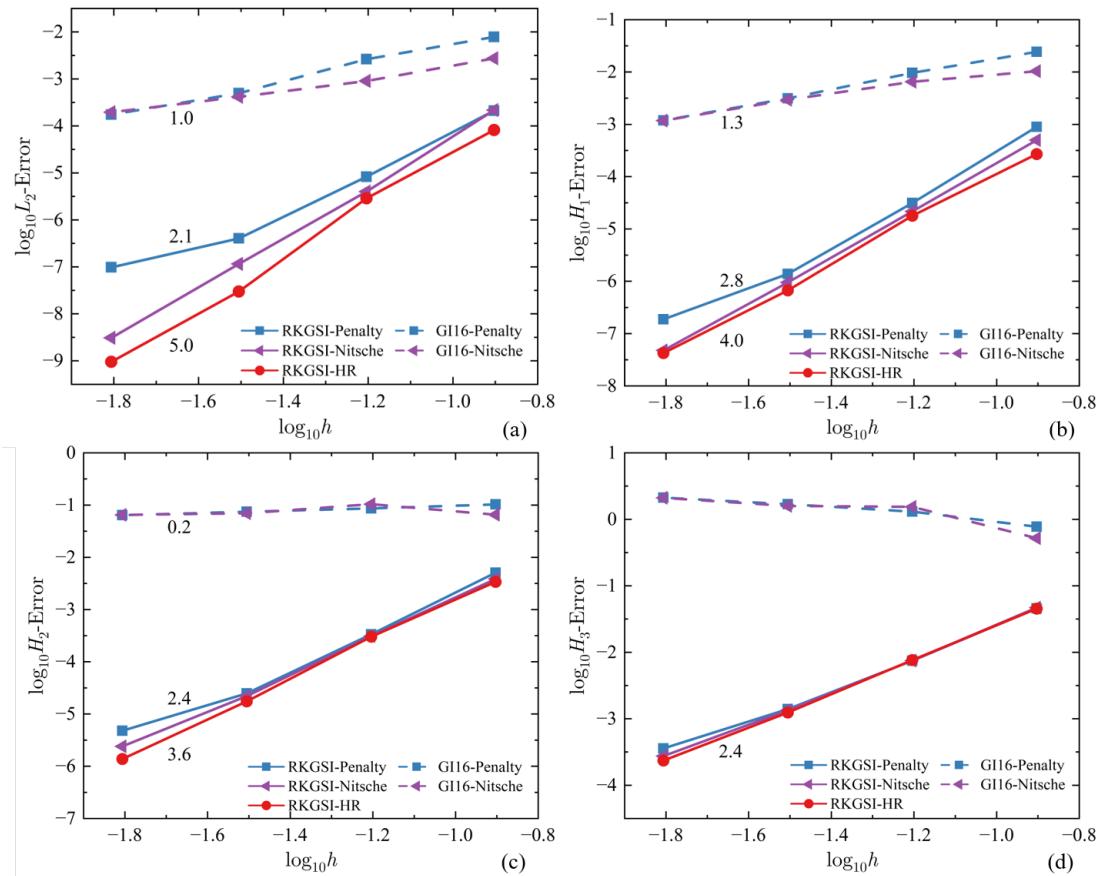


Figure 4.20: 简支环形板问题人工参数敏感度分析

Figure 4.21: 简支环形板问题误差对比: (a) L_2 -Error; (b) H_1 -Error; (c) H_2 -Error; (d) H_3 -Error

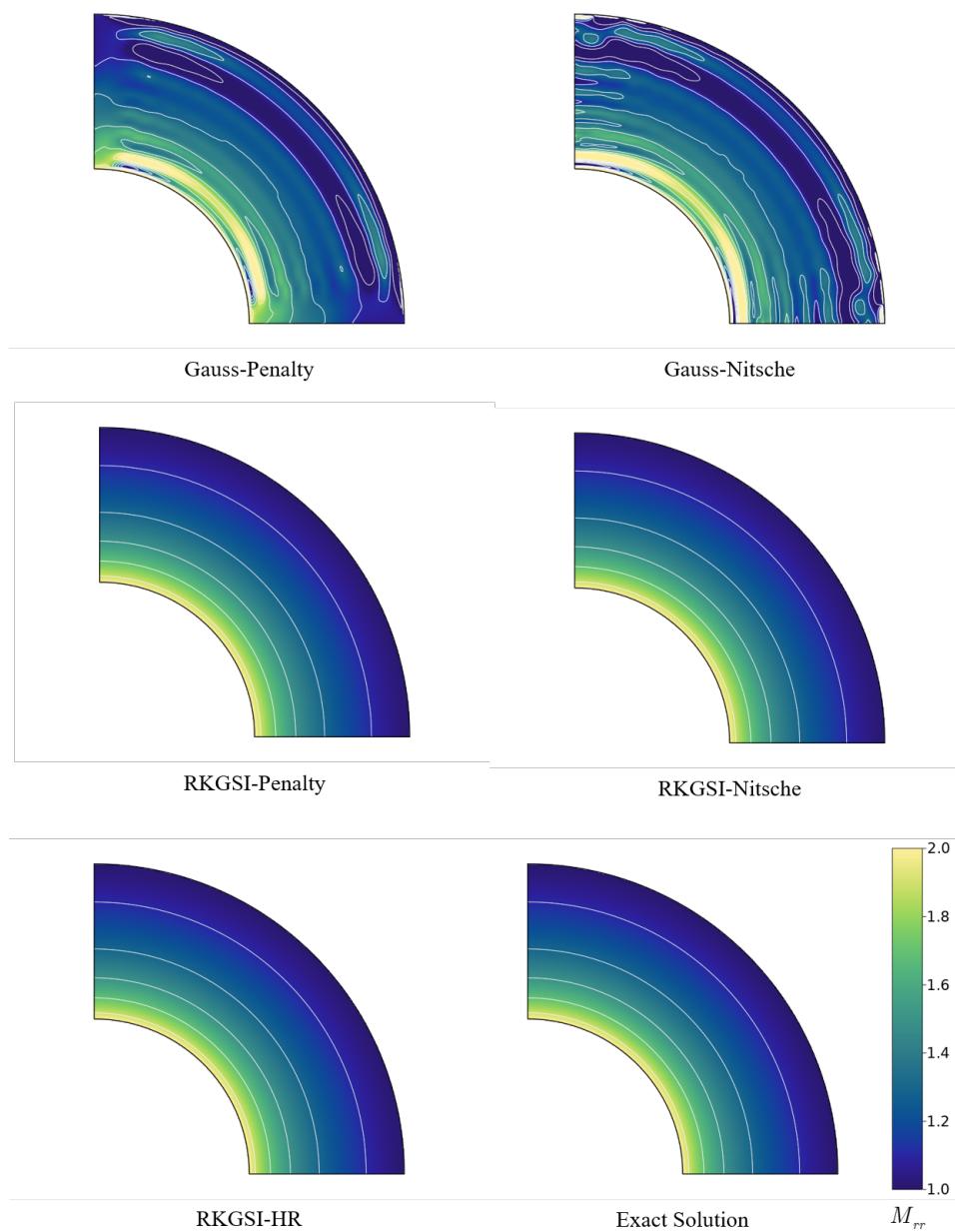


Figure 4.22: 简支环形板问题弯矩云图