学校代码：　10385　　　　　　　　　　　　　　　　分类号：__________

研究生学号：__________　　　　　　　　　　　　　密　　集：__________

华侨大学
HUAQIAO UNIVERSITY

硕士专业学位论文

论文中文题目

English Thesis Title

作者姓名：__________

指导教师：__________

合作教师：__________

专业学位类别：__________

专业学位领域：__________

研究方向：__________

所在学院：　土木工程学院

论文提交日期：二〇二三年五月二十八日

学 位 论 文 答 辩 委 员 会 决 议

根据《中华人民共和国学位条例》、《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》、《华侨大学学位授予工作细则》及《华侨大学研究生学位论文质量监控与评阅答辩的管理规定》的规定，学位论文答辩委员会经充分交换意见，对论文做出评价，并以无记名投票方式进行表决，同意该同学通过硕士学位论文答辩，同意授予硕士学位。

答辩委员会 (主席签字)：________________________

答辩时间：_________ 年____ 月____ 日

学位论文独创性声明

本人声明兹呈交的学位论文是本人在导师指导下完成的研究成果。论文写作中不包含其他人已经发表或撰写过的研究内容，如参考他人或集体的科研成果，均在论文中以明确的方式说明。本人依法享有和承担由此论文所产生的权利和责任。

论文作者签名：__________________ 签名日期：____________

学位论文版权使用授权声明

本人同意授权华侨大学有权保留并向国家机关或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许学位论文被查阅和借阅。本人授权华侨大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

论文作者签名：______________ 指导老师签名：______________

签　名　日　期：______________ 签　名　日　期：______________

目　录

第 1 章　薄板问题

1.1　薄板控制方程

考虑厚度为 h 的薄板，根据 Kirchhoff 薄板假设将薄板 x,y,z 方向上的总位移定义为 $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$：此时，位移 $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ 可以表示为：

$$\begin{cases}\hat{u}_\alpha(\boldsymbol{x}) = u_\alpha(x_1,x_2) - x_3 w_{,\alpha} \quad \alpha = 1,2 \\ \hat{u}_3(\boldsymbol{x}) = w(x_1,x_2)\end{cases} \tag{1.1}$$

式中 u_α 表示薄板中面处 x,y 方向上的位移，w 表示挠度。

根据小变形假设关系式：

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{\alpha,\beta} + \hat{u}_{\beta,\alpha}) \tag{1.2}$$

其中，ε 为应变。

根据式 (1.2) 得出有关 Kirchhoff 薄板假设的应变关系式如下：

$$\begin{cases}\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{\alpha,\beta} + \hat{u}_{\beta,\alpha}) = \varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}x_3 \quad \alpha,\beta = 1,2 \\ \hat{\varepsilon}_{3i} = \hat{\varepsilon}_{i3} = 0 \quad i = 1,2,3\end{cases} \tag{1.3}$$

其中：

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \tag{1.4}$$

式中，$\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ 为曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的分量

考虑经典的线弹性本构关系：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}(\varepsilon_{\gamma\eta + x_3\kappa_{\gamma\eta}})\end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ 为应力，$C_{\alpha\beta\gamma\eta}$ 为四阶弹性张量

根据最小势能原理得出的势能泛函关系为：

$$\boldsymbol{\Pi}(\hat{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}\int_{\hat{\Omega}} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta\gamma\eta}\hat{\varepsilon}_{\gamma\eta}d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{b} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{t} d\Gamma \tag{1.6}$$

将式 (1.5)、(1.3) 代入式 (1.6) 中的第一项可以得到：

$$\begin{aligned}&\int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}d\Omega = \int_\Omega \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}x_3)C_{\alpha\beta\gamma\eta}(\varepsilon_{\gamma\eta} + x_3\kappa_{\gamma\eta})dx_3 d\Omega \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}h\varepsilon_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta\gamma\eta}\varepsilon_{\gamma\eta}d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}\frac{h^3}{12}C_{\alpha\beta\gamma\eta}\kappa_{\gamma\eta}d\Omega \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}h\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega\end{aligned} \tag{1.7}$$

根据式 (1.7) 可以划分为两个独立的问题。即具有变量 $\hat{u}_\alpha$ 的传统弹性力学问题和具有变量 w 的薄板问题，能量泛函关系式 (1.6) 拆分为：

$$\Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \Pi_E(\hat{\boldsymbol{u}}) + \Pi_P(M_{\alpha\beta}, w) \tag{1.8}$$

1.2 弹性力学问题伽辽金弱形式

传统弹性力学问题的势能泛函的表达式为：

$$\Pi_E(\hat{\boldsymbol{u}}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} d\Omega - \int_\Omega \hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{b} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{t} d\Gamma \tag{1.9}$$

这里采用拉格朗日乘子法在伽辽金无网格法施加强制边界条件，即在弹性力学问题的势能泛函 (1.9) 中引入位移强制边界条件对应的约束项，相应的势能泛函为：

$$\bar{\Pi}_E(\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\lambda}) = \Pi^E(\hat{\boldsymbol{u}}) - \int_{\Gamma^g} \boldsymbol{\lambda}(\hat{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{g}) d\Gamma \tag{1.10}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n_{sd}}\}^T$ 为拉格朗日乘子，$\Pi^E(\hat{\boldsymbol{u}})$ 是式 (1.9) 定义的泛函。式 (1.10) 所表示的泛函的驻值条件为：

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\Pi}^E(\hat{\boldsymbol{u}},\lambda) &= \delta\Pi^E(\hat{\boldsymbol{u}}) - \int_{\Gamma^u} \delta\hat{\boldsymbol{u}}\;\lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta\lambda\;(\hat{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{g}) \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} d\hat{\Omega} - \int_\Omega \hat{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{b} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \hat{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{t} d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma^g} \delta\hat{\boldsymbol{u}}\lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta\lambda\;(\hat{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{g}) d\Gamma \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.11}$$

1.3 薄板问题伽辽金弱形式

薄板问题控制方程：

$$\begin{cases}
M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q} = 0 & \text{in } \Omega \\
w = \bar{w} & \text{on } \Gamma^w \\
w_{,\boldsymbol{n}} = \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}} & \text{on } \Gamma^\theta \\
M_{\boldsymbol{nn}} = \bar{M}_{\boldsymbol{nn}} & \text{on } \Gamma^M \\
Q_{\boldsymbol{n}} + M_{\boldsymbol{ns},\boldsymbol{s}} = \bar{V}_{\boldsymbol{n}} & \text{on } \Gamma^V \\
w_i = \bar{w}_i & i = 1,2,3\cdots \\
P_j = \bar{P}_j & j = 1,2,3\cdots
\end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}
&w_{,\boldsymbol{n}} = w_{,\alpha} n_\alpha \\
&M_{\boldsymbol{nn}} = M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \\
&Q_{\boldsymbol{n}} = M_{\alpha\beta,\beta} n_\alpha \\
&M_{\boldsymbol{ns},\boldsymbol{s}} = M_{\alpha\beta,\beta} n_\alpha \\
&M_{\boldsymbol{ns},\boldsymbol{s}} = M_{\alpha\beta,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma \\
&P_j = M_{\alpha\beta}(s_\alpha^1 n_\beta^1 - s_\alpha^2 n_\beta^2)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

薄板问题的势能泛函关系式：

$$\Pi_P(M_{\alpha\beta},w) = \int_\Omega \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} D^{-1}_{\alpha\beta\gamma\eta} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_\Omega wq d\Omega - \int_{\Gamma_w} \bar{V}_{\boldsymbol{n}} w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \bar{M}_{\boldsymbol{nn}}\theta_{\boldsymbol{n}} d\Gamma \tag{1.14}$$

引入拉格朗日乘子：

$$\begin{aligned}\Pi_P(M_{\alpha\beta}, w, \lambda) = &\int_\Omega \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} D^{-1}_{\alpha\beta\gamma\eta} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_\Omega wq d\Omega + \int_{\Gamma_w} \lambda^w (w - \bar{w}) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_\theta} \lambda^\theta (\theta_{\boldsymbol{n}} - \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_w} \bar{V}_{\boldsymbol{n}} w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \bar{M}_{\boldsymbol{nn}} \theta_{\boldsymbol{n}} d\Gamma\end{aligned} \tag{1.15}$$

弱形式：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \delta M_{\alpha\beta} D^{-1}_{\alpha\beta\gamma\eta} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_\Omega \delta wq d\Omega + \int_{\Gamma_w} \delta\lambda^w (w - \bar{w}) d\Gamma + \int_{\Gamma_w} \lambda^w \delta w d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_\theta} \delta\lambda^\theta (\theta_{\boldsymbol{n}} - \bar{\theta_{\boldsymbol{n}}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \lambda^\theta \delta\theta_{\boldsymbol{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_w} \delta\bar{V}_{\boldsymbol{n}} w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \delta\bar{M}_{\boldsymbol{nn}} \theta_{\boldsymbol{n}} d\Gamma \\ &= 0\end{aligned} \tag{1.16}$$

第 2 章　弹性力学问题 HR 弱形式

2.1　Hellinger-Reissner 变分原理

不失为一般性，在求解域 Ω 内考虑如下弹性力学控制方程：

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{in}\Omega \\ \sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on}\Gamma^t \\ u_i = g_i & \text{on}\Gamma^g \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，u_i 和 σ_{ij} 为位移和应力分量，b_i 为求解域 Ω 上的体力分量。Γ^g 和 Γ^t 分别为本质边界条件和自然边界条件, 并且 $\Gamma^g \cup \Gamma^t = \partial\Omega, \Gamma^t \cap \Gamma^g = \varnothing, \partial\Omega$ 为求解域 Ω 的边界。t_i 和 g_i 分别为两类边界上已知的外力和位移分量，n_i 表示为所在边界的外法向量分量。

对于式 (2.1) 定义的弹性力学问题，存在以下余能泛函：

$$\mathbf{\Pi}_c = \int_\Omega \boldsymbol{B}(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{B}(\sigma_{ij})$ 为应变余能，其与应力和应变之间的关系式为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{B}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} &= \varepsilon_{ij} \\ &= C^{-1}_{ijkl} \sigma_{kl} \end{aligned} \tag{2.3}$$

式中 C_{ijkl} 为四阶弹性张量

此时用特定的拉格朗日乘子 λ_i 和 η_i，建立新的变分泛函

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}^*_c = &\int_\Omega \boldsymbol{B}(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \\ &+ \int_\Omega \lambda_i (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega + \int_{\Gamma^t} \eta_i (\sigma_{ij} n_j - t_i) d\Gamma \end{aligned} \tag{2.4}$$

将式 (2.4) 进行一阶变分，同时把 σ_{ij} 和 λ_i, η_i 看作为独立变量，可以得到：

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{\Pi}^*_c = &\int_\Omega (\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} + \delta\lambda_i(\sigma_{ij,j} + b_i) + \lambda_i \delta\sigma_{ij,j}) d\Omega \\ &- \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma + \int_{\Gamma^t} \delta\eta_i (\sigma_{ij} - t_i) d\Gamma + \int_{\Gamma^t} \eta_i \delta\sigma_{ij} n_j d\Gamma \end{aligned} \tag{2.5}$$

通过格林公式和 σ_{ij} 的对称性，存在如下公式：

$$\begin{aligned} \int_\Omega \lambda_i \delta\sigma_{ij,j} d\Omega &= \int_\Gamma \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_\Omega \lambda_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j \delta_i d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta\sigma_{ij} n_j \delta_i d\Omega - \int_\Omega \frac{1}{2}(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \delta\sigma_{ij} d\Omega \end{aligned} \tag{2.6}$$

将式 (2.6) 代入式 (2.5) 从而得到：

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{\Pi}^*_c = &\int_\Omega ((\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i})) \delta\sigma_{ij} + (\sigma_{ij,j} + b_i) \delta\lambda_i) d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma^g} (\lambda_i - g_i) \delta\sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma^t} ((\sigma_{ij} n_j - t_i) \delta\eta_i + (\lambda_i + \eta_i) \delta\sigma_{ij} n_j) d\Gamma \end{aligned} \tag{2.7}$$

根据泛函驻值条件 $\delta\Pi_c^* = 0$ 得出：

$$\begin{aligned}\lambda_i &= g_i = u_i \\ \eta_i &= -u_i\end{aligned} \tag{2.8}$$

将 $\lambda_i = u_i, \eta_i = -u_i$ 代入式 (2.4) 中得到根据存在双变量 (u_i, σ_{ij}) 的 Hellinger-Reissner 变分原理，从而强形式 (2.1) 所对应的能量泛函为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) = &\int_\Omega \boldsymbol{B}(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \\ &+ \int_\Omega u_i(\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega - \int_{\Gamma^t} u_i(\sigma_{ij} n_j - t_i) d\Gamma\end{aligned} \tag{2.9}$$

对式 (2.9) 进行变分得到相对应的弱形式：

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\Pi}_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) = &\int_\Omega \delta\sigma_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \sigma_{ij}} d\Omega + \int_\Omega \delta\sigma_{ij,j} u_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij,j} n_j g_i d\Gamma + \int_\Omega \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \\ &+ \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{2.10}$$

对能量泛函 $\boldsymbol{\Pi}_{HR}$ 取极值时，要求对于任意的 δu_i、$\delta\sigma_{ij}$ 关于 $\delta\boldsymbol{\Pi}_{HR}$ 都要恒成立，此时将弱形式 (2.10) 根据 δu_i、$\delta\sigma_{ij}$ 改写为下列两式：

$$\int_\Gamma \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_\Omega \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma + \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega \tag{2.11}$$

$$\int_\Omega \delta\sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} d\Omega = \int_\Gamma \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma - \int_\Omega \delta\sigma_{ij,j} u_i d\Omega - \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma + \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma \tag{2.12}$$

2.2 位移离散和应力离散

2.2.1 位移离散与再生核近似

位移分量 u_i 采用基于再生核近似的无网格形函数进行离散。无网格法通过如图所示的问题域 Ω 和边界 Γ 上布置一系列无网格节点 $\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{NP}$ 进行离散，其中 NP 表示无网格节点数量。每个无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的形函数为 $\Psi(\boldsymbol{x})$，影响域为 $supp(\boldsymbol{x}_I)$，每一个节点的影响域 $supp(\boldsymbol{x}_I)$ 满足 $\Omega \in_{I=1}^{NP} supp(\boldsymbol{x}_I)$。不失为一般性，考虑任意位移分量 u_i，其对应的无网格近似函数 u_i^h 表示为：

$$u_i^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d_{iI} \tag{2.13}$$

其中，d_{iI} 表示与无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的系数

根据再生核近似理论 []，无网格形函数可以假设为：

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) \phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \tag{2.14}$$

式中，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 表示为 p 阶的多项式基函数向量，表达式为：

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \{1, x, y, \cdots, x^i y^i, \cdots, y^p\}.0 \le i + j \le p \tag{2.15}$$

而 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})$ 是附属于节点 $\boldsymbol{x}_I$ 的核函数，其影响域的大小由影响域尺寸 s 决定，核函数以及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。对应二维问题，一般情况下核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})$ 的影响域为圆形域或者矩形域，可由下列公式得到：

$$\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})=\phi_{s_x}(r_x)\phi_{s_y}(r_y), r_x=\frac{|x_I-x|}{s_x}, r_y=\frac{|y_I-y|}{s_y} \tag{2.16}$$

其中 s_x 和 s_y 分别为 x 和 y 方向上影响域的大小，计算时一般使得两个方向上的影响域大小相等即 $s_x=s_y=s$。选取核函数时一般遵循核函数阶次 m 大于等于基函数阶次 $p(m\geq p)$ 的原则。针对二阶势问题的弹性力学问题，无网格基函数一般选择二阶或者三阶，而核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})$ 则选取三次样条函数：

$$\phi(r)=\frac{1}{3!}\begin{cases}(2-2r)^3-4(1-2r)^3 & r\leq\frac{1}{2}\\ (2-2r)^3 & \frac{1}{2}<r\leq 1\\ 0 & r>1\end{cases} \tag{2.17}$$

无网格形函数表达式 (2.14) 中的 $\boldsymbol{c}$ 为待定系数向量，该表达式可以通过满足再生条件确定：

$$\sum_{I=1}^{NP}\Psi_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} \tag{2.18}$$

将无网格形函数表达式 (2.14) 代入再生条件 (2.18) 中，可以得到：

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0}) \tag{2.19}$$

其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 表示矩量矩阵，表达式为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NP}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x}) \tag{2.20}$$

将 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ 代入到式 (2.14) 中得到再生核无网格形函数的表达式：

$$\Psi_I(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{0})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x}\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x}) \tag{2.21}$$

无网格形函数 $\Psi_I(\boldsymbol{x})$ 的一阶和二阶导数分别为：

$$\Psi_{I,i}(x)=\begin{bmatrix}p_{,i}^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_s(x_I-x)\\ +p^{[p]T}(x_I-x)A_{,i}^{-1}\phi_s(x_I-x)\\ +p^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_{s,i}(x_I-x)\end{bmatrix}p^{[p]}(0) \tag{2.22}$$

$$\Psi_{I,ij}(x)=\begin{bmatrix}p_{,ij}^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_s(x_I-x)\\ +p_{,i}^{[p]T}(x_I-x)A_{,j}^{-1}(x)\phi_s(x_I-x)\\ +p_{,i}^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_{s,j}(x_I-x)\\ +p^{[p]T}(x_I-x)A_{,ij}^{-1}(x)\phi_s(x_I-x)\\ +p_{,j}^{[p]T}(x_I-x)A_{,i}^{-1}(x)\phi_s(x_I-x)\\ +p^{[p]T}(x_I-x)A_{,i}^{-1}(x)\phi_{s,j}(x_I-x)\\ +p^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_{s,ij}(x_I-x)\\ +p_{,j}^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_{s,i}(x_I-x)\\ +p^{[p]T}(x_I-x)A_{,j}^{-1}(x)\phi_{s,i}(x_I-x)\end{bmatrix}p^{[p]}(0) \tag{2.23}$$

式中 $A_{,i}^{-1}=-A^{-1}A_{,i}A^{-1}, A_{,ij}^{-1}=-A^{-1}(A_{,ij}A^{-1}+A_{,i}A_{,j}^{-1}+A_{,j}A_{,i}^{-1})$，可以看出无网格形函数及其导数的计算都较为复杂。

图一维无网格形函数及其导数

图二维无网格形函数及其导数

图。图。分别表示一维和二维情况下的无网格形函数及其导数图，从图中可以看出，无网格形函数在全域上连续光滑，但在无网格节点处，形函数不具有插值性，因此无法像有限元法一样直接施加本质边界条件。

2.2.2 应力离散与再生光滑梯度近似

应力分量 σ_{ij} 采用在每个背景积分单元内建立局部的多项式进行离散。考虑如图所示二维三角形背景积分单元，将求解域 Ω 划分为一系列背景积分单元 Ω_C，$C=1,2,\cdots,n_c$，并且 $\cup_{C=1}^{n_c}\Omega_C=\Omega$。在背景积分单元 ω_C 内，假设应力分量 σ_{ij} 为任意的 p 阶多项式