

Hellinger-Reissner的动力分析

1 薄板方程

根据Kirchhoff板假设原理，在板的中性面 Ω 内考虑厚度为 t 的薄板控制方程：

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q} = \rho h \ddot{w} & \text{in } \Omega \\ w = \bar{w} & \text{on } \Gamma_w \\ \theta_n = w_{,n} = \bar{\theta}_n & \text{on } \Gamma_\theta \\ V_n = Q_n + M_{ns,s} = \bar{V}_n & \text{on } \Gamma_V \\ M_{nn} = \bar{M}_{nn} & \text{on } \Gamma_M \\ w = \bar{w} & \text{at } c_w \\ P = -[[M_{ns}]]|_{c_P} = \bar{p} & \text{at } c_P \end{cases} \quad (1)$$

其中：

$$\begin{cases} w_{,n} = w_{,\alpha} n_\alpha \\ Q_n = n_\alpha M_{\alpha\beta,\beta} \\ M_{nn} = M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, M_{ns} = M_{\alpha\beta} n_\alpha s_\beta, M_{ns,s} = M_{\alpha\beta,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma \end{cases} \quad (2)$$

其中， $M_{\alpha\beta}$ 为矩量 M 的弯曲和扭转分量， \bar{q} 是表示分布荷载， ρ, h 分别表示板的密度，厚度。 w 表示薄板中心挠度的位移， w 上方两点表示两次微分。 $\Gamma_w, \Gamma_\theta, c_w$ 为强制边界边界条件上的挠度 \bar{w} 和转角 $\bar{\theta}_n$ ， Γ_V, Γ_M, c_P 为自然边界条件， V_n 表示的是等效剪力， M_{nn} 是法向弯矩， P 是集中力，同时，所有的边界条件都满足如下关系式：

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_w \cup \Gamma_V \cup \Gamma_\theta \cup \Gamma_M, c = c_w \cup c_P \\ \Gamma_w \cap \Gamma_V &= \Gamma_\theta \cap \Gamma_M = c_w \cap c_P = \emptyset \end{aligned} \quad (3)$$

并且 $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}^T, \mathbf{s} = \{s_x, s_y\}$ 分别表示所在边界方向上的外法线方向和切线方向的分量

考虑具有线弹性各同向性材料的均匀板，其本构方程为：

$$M_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\gamma\eta} k_{\gamma\eta} = -D_{\alpha\beta\gamma\eta} w_{,\gamma\eta} \quad (4)$$

其中

$$D_{\alpha\beta\gamma\eta} = \bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\eta} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\eta} + \delta_{\alpha\eta}\delta_{\beta\gamma})) \quad (5)$$

并且, $k_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ 为曲率张量 k 的分量, \bar{D}, E, ν 分别为抗弯刚度, 杨氏模量以及泊松比, 和板的厚度 t 具有以下关系式:

$$\bar{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

由于无网格形函数的非插值特点导致其无法像有限元法一直直接施加强制边界条件, 这里利用再生光滑梯度的内在特点, 采用 Hellinger-Ressiner 方法施加强制边界条件, 根据该方法, 矩量 M 的弯曲和扭转分量 $M_{\alpha\beta}$ 和挠度 w 为两个独立分量, 此时考虑引入边界条件的等效积分弱形式为:

$$\begin{aligned} \Pi(M_{\alpha\beta,w}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} w \rho h \ddot{w} d\Omega - \int_{\Gamma_w} V_n \bar{w} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{\theta}} M_{nn} \bar{\theta}_n d\Gamma - P \bar{w}|_{x \in c_w} + \int_{\Omega} w (M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q}) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_M} w_{,n} (M_{nn} - \bar{M}_{nn}) d\Gamma - \int_{\Gamma_V} w (V_n - \bar{V}_n) d\Gamma - w (P - \bar{P})|_{x \in c_P} \end{aligned} \quad (7)$$

同时:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(M_{\alpha\beta,w}) = & \int_{\Omega} \delta M_{\alpha\eta} C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega - \int_{\Gamma_w} \delta V_n \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\theta}} \delta M_{nn} \bar{\theta}_n d\Gamma \\ & - \delta P \bar{w}|_{x \in c_w} + \int_{\Omega} \delta w (M_{\alpha\beta,\alpha\beta}) w d\Omega + \int_{\Gamma_M} \delta M_{nn} w_{,n} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_V} \delta V_n w d\Gamma - \delta P w|_{x \in c_P} + \int_{\Omega} \delta w (M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q}) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_M} \delta w_{,n} (M_{nn} - \bar{M}_{nn}) d\Gamma - \int_{\Gamma_V} \delta w (V_n - \bar{V}_n) d\Gamma \\ & - \delta w (P - \bar{P})|_{x \in c_P} + \int_{\Omega} \delta w \rho h \ddot{w} d\Omega \\ = & 0 \end{aligned} \quad (8)$$

对 $\delta M_{\alpha\beta}$ 和 δw 通过上式可以得到以下式子:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1} M_{\gamma\eta} d\Omega = & \int_{\Gamma} \delta V_{\mathbf{n}} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta M_{\mathbf{nn}} w_{,\mathbf{n}} d\Gamma + \delta P w|_{\mathbf{x} \in c} - \int_{\Omega} \delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta} w d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_w} \delta V_{\mathbf{n}} w d\Gamma + \int_{\Gamma_{\theta}} \delta M_{\mathbf{nn}} w_{,\mathbf{n}} d\Gamma - \delta P w|_{\mathbf{x} \in c_w} \\ & + \int_{\Gamma_w} \delta V_{\mathbf{n}} \bar{w} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\theta}} \delta M_{\mathbf{nn}} \bar{\theta}_{\mathbf{n}} d\Gamma + \delta P \bar{w}|_{\mathbf{x} \in c_w} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \delta w V_{\mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta w_{,\mathbf{n}} M_{\mathbf{nn}} d\Gamma + \delta w P|_{\mathbf{x} \in c} - \int_{\Omega} \delta w M_{\alpha\beta,\alpha\beta} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_w} \delta w V_{\mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\theta}} \delta w_{,\mathbf{n}} M_{\mathbf{nn}} d\Gamma - \delta w P|_{\mathbf{x} \in c_w} + \int_{\Omega} \delta w \rho h \ddot{w} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_V} \delta w \bar{V}_{\mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_M} \delta w_{,\mathbf{n}} \bar{M}_{\mathbf{nn}} d\Gamma + \delta w \bar{P}|_{\mathbf{x} \in c_P} + \int_{\Omega} \delta w \bar{q} d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

2 挠度离散和再生核近似

在Hellinger-Ressiner变分原理的弱形式中，薄板的挠度和弯矩分别采用不同的近似方案进行离散。这里，挠度采用基于再生核近似的无网格形函数进行离散。在无网格近似中，板中性面 Ω 上布置一系列无网格节点 $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{n_p}$ ，板挠度 w 的近似表达式 w^h 可表示为：

$$w^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\mathbf{x}) d_I, \delta w^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\mathbf{x}) \delta d_I, \mathbf{x} \in \Omega \quad (11)$$

式中 $d_I, \delta d_I$ 为无网格节点 \mathbf{x}_I 上的节点系数和虚节点系数， Ψ_I 为与之相对应的无网格形函数，根据再生核近似理论，无网格形函数具有如下表达式：

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (12)$$

其中 \mathbf{c} 是待定系数向量， $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 为 p 阶单项式基函数向量：

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, \dots, x^2, xy, y^2, \dots, x^i y^j, \dots, y^p\}, 0 \leq i + j \leq p \quad (13)$$

而 $\phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ 为核函数，本研究采用基于五次样条函数作为核函数

$$\phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \phi(r_x) \phi(r_y), r_\alpha = \frac{x_{\alpha I} - x_\alpha}{s_{\alpha I}} \quad (14)$$

式中 $s_{\alpha I}$ 为空间方向上的影响域尺寸， ϕr_α 为五次样条函数：

$$\phi(r_\alpha) = \frac{1}{5!} \begin{cases} (3 - 3r)^5 - 6(2 - 3r)^5 + 15(1 - 3r)^5 & r \leq \frac{1}{3} \\ (3 - 3r)^5 - 6(2 - 3r)^5 & \frac{1}{3} < r \leq \frac{2}{3} \\ (3 - 3r)^5 & \frac{2}{3} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (15)$$

待定系数向量 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ 可以通过满足一致性条件得到，进而可以得到无网格形函数表达式为：

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) (0) \quad (16)$$

式中 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 为矩阵，且：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (17)$$

3 弯矩离散和再生光滑梯度近似

根据再生光滑梯度理论，如图所示，将求解域 Ω 划分为一系列背景积分单元 Ω_C ， $C = 1, 2, \dots, n_c$ ，并且 $\cup_{C=1}^{n_c} \Omega_C = \Omega$ ，在背景积分单元 Ω_C 内，将弯矩分量 $M_{\alpha\beta}$ 采用 $(p-2)$ 阶次进行离散，并记为 $M_{\alpha\beta}^h$

$$M_{\alpha\beta}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_{\alpha\beta}^T \mathbf{q}(\mathbf{x}), \delta M_{\alpha\beta}^h(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{a}_{\alpha\beta}^T \mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_C \quad (18)$$

其中, $\mathbf{a}_{\alpha\beta}, \delta\mathbf{a}_{\alpha\beta}$ 是常系数向量, \mathbf{q} 是比 \mathbf{p} 低两阶的单项式向量:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, \dots, x^2, xy, y^2, \dots, x^i y^j, \dots, y^{p-2}\}^T, 0 \leq i + j \leq p - 2 \quad (19)$$

根据式(7)可以得到常系数向量 $\mathbf{a}_{\alpha\beta}$:

$$a_{\gamma\eta} = -D_{\alpha\beta\gamma\eta} G^{-1} \left(\sum_{I=1}^{n_p} (\tilde{g}_{\alpha\beta I} - \bar{g}_{\alpha\beta I}) d_I + \hat{g}_{\alpha\beta} \right) \quad (20)$$

其中:

$$G = \int_{\Omega_C} \mathbf{q} \mathbf{q}^T d\Omega \quad (21)$$

$$\begin{cases} \tilde{g}_{\alpha\beta I} = \int_{\Gamma_C} \Psi_I \mathbf{n} \mathbf{q} n_\alpha n_\beta d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Psi_I (n_\alpha \mathbf{q}_{,\beta} + \mathbf{q}_{,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma) d\Gamma + \llbracket \Psi_I \mathbf{q} n_\alpha s_\beta \rrbracket_{x \in c_C} + \int_{\Omega_C} \Psi_I \mathbf{q}_{,\alpha\beta} d\Omega \\ \bar{g}_{\alpha\beta I} = \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \Psi_I \mathbf{n} \mathbf{q} n_\alpha n_\beta d\Gamma - \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} \Psi_I (n_\alpha \mathbf{q}_{,\beta} + \mathbf{q}_{,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma) d\Gamma + \llbracket \Psi_I \mathbf{q} n_\alpha s_\beta \rrbracket_{x \in c_w \cap c_C} \\ \hat{g}_{\alpha\beta} = \int_{\Gamma_\theta \cap \Gamma_C} \mathbf{q} n_\alpha n_\beta \bar{\theta}_{\mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_w \cap \Gamma_C} (n_\alpha \mathbf{q}_{,\beta} + \mathbf{q}_{,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma) \bar{w} d\Gamma + \llbracket \bar{w} \mathbf{q} n_\alpha s_\beta \rrbracket_{x \in c_w \cap c_C} \end{cases} \quad (22)$$

其中, Γ_C 是 Ω_C 的边界。

通过对挠度和弯矩进行混合离散, 得到离散控制方程:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{d} = \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{f}} \quad (23)$$

其中:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta} d\Omega \quad (24)$$

$$\mathbf{M}_{IJ} = \int_{\Omega} \Psi_I(\mathbf{x}) \rho h \Psi_J(\mathbf{x}) d\Omega \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{IJ} = & - \int_{\Gamma_w} \Psi_I \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \Psi_I \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta} d\Gamma + \llbracket \Psi_I \mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta} \rrbracket_{\mathbf{x} \in c_w} \\ & - \int_{\Gamma_w} (\mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \Psi_J d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} (\mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \Psi_{J,\mathbf{n}} d\Gamma + \llbracket (\mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \Psi_J \rrbracket_{\mathbf{x} \in c_w} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_I = & - \int_{\Gamma_w} (\mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} (\mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \bar{\theta}_{\mathbf{n}} d\Gamma + \llbracket (\mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \bar{w} \rrbracket_{\mathbf{x} \in c_w} \\ \bar{\mathbf{K}}_{IJ} = & \int_{\Gamma_w} (\mathcal{V}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \Psi_J d\Gamma - \int_{\Gamma_\theta} (\mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \Psi_{J,\mathbf{n}} d\Gamma - \llbracket (\mathcal{P}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \Psi_J \rrbracket_{\mathbf{x} \in c_w} \\ \bar{\mathbf{f}}_I = & \int_{\Gamma_w} (\mathcal{V}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \bar{w} d\Gamma - \int_{\Gamma_\theta} (\mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \bar{\theta}_{\mathbf{n}} d\Gamma - \llbracket (\mathcal{P}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}) \bar{w} \rrbracket_{\mathbf{x} \in c_w} \end{aligned} \quad (27)$$

4 时间域离散

本研究采用Newmark法对薄板控制方程离散方程进行时间离散:

预测阶段:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + (\Delta t_n) \mathbf{v}_n + \frac{\Delta(t_n)^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (\Delta t_n) (1 - \gamma) \mathbf{a}_n \end{cases} \quad (28)$$

的看出采用RKGSi方法的解精度最好，挠度误差几乎为0，而采用GI-2和GI-5方法的误差几乎相同，相较于RKGSi-HR方法的误差较大，充分说明了RKGSi方法在频率计算方法的精确性。

5.2 简支方板问题

如图5所示，二维简支方板在板心处受到正弦集中力的作用，其中几何和材料参数为：长度为 $a = 10$ ，厚度 $t = 0.05$ ，密度 $\rho = 2 \times 10^{11}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ，集中力 $F_0 = 1000$ ，频率 $\theta = \pi$ ，简支方板的精确解为：

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) \eta_{mn}(t) \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} W_{mn}(x, y) &= \frac{2}{a\sqrt{\rho t}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \\ \eta_{mn}(t) &= \frac{2F_0}{(\omega_{mn}^2 - \theta^2)a\sqrt{\rho t}} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \times \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t\right) \end{aligned} \quad (34)$$

简支方板的求解域根据图4所示的采用 11×11 的均匀间隔点进行离散分析，算例采

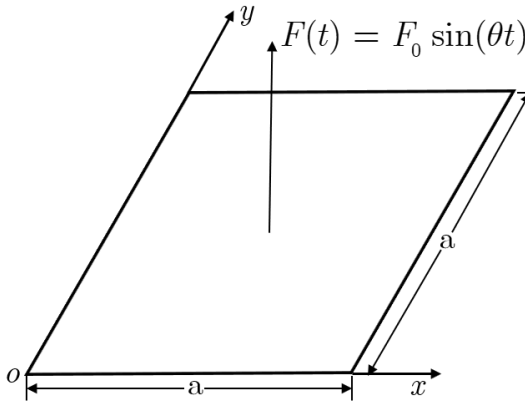


图 3: 简支方板问题模型

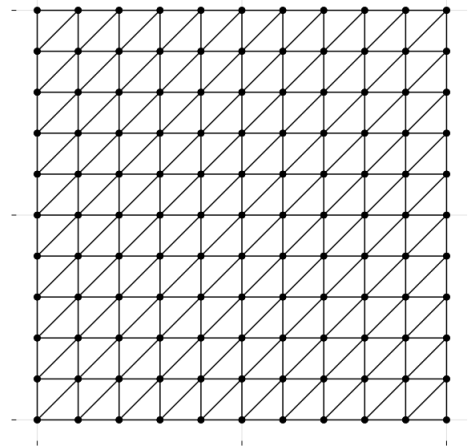


图 4: 简支方板问题离散

用具有三次和四次基函数的无网格近似计算，核函数相对应的影响域分别为3.5和4.5。时间设置步长为 $\Delta t = 0.01s$ 。图和图分别表示的是简支方板用三次和四次基函数时的中心点挠度的时间历程和挠度误差，结果表明在二维情况下采用RKGSi的方法中心挠度误差几乎为0，同时也小于采用高斯积分GI-2和GI-5所得出的挠度误差，进一步说明了RKGSi-HR方法在计算高阶薄板问题频率计算方面的准确性。