Hellinger-Reissner的动力分析

1　Hellinger-Reissner变分原理

不失为一般性，在求解域Ω内考虑如下弹性力学问题控制方程

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & in\Omega \\ \sigma_{ij} n_j = t_i & on\Gamma^t \\ u_i = g_i & on\Gamma^g \end{cases} \tag{1}$$

其中，u_i和σ_{ij}为位移和应力分量，b_i为求解域Ω上的体力分量。Γ^g和Γ^t分别为本质边界条件和自然边界条件。并且$\Gamma^g \cup \Gamma^t = \partial\Omega, \Gamma^t \cap \Gamma^g =, \partial\Omega$ 为求解域Ω的边界。t_i和g_i分别为两类边界上已知的外力和位移分量，n_i表示为所在边界的外法向量分量。

根据Hellinger-Reissner原理，强形式(1)所对应的能量泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) = \int_\Omega W(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma + \\ \int_\Omega u_i(\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega - \int_{\Gamma^t} u_i(\sigma_{ij} n_j - t_i) d\Gamma \end{aligned} \tag{2}$$

式子中W为弹性体的余能密度函数，其与应力之间的关系式为：

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} = C^{-1}_{ijkl} \sigma_{kl} \tag{3}$$

其中C_{ijkl}为四阶弹性张量

对上述式子进行变分可以得到与之相对应的弱形式为：

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR} = \int_\Omega \delta\sigma_{ij} \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} d\Omega + \int_\Omega \delta\sigma_{ij,j} u_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma - \\ \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij,j} n_j g_i d\Gamma + \int_\Omega \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \\ \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

当对能量泛函Π_{HR}取极值，对于任意的$\delta u_i, \delta\sigma_{ij}$，式子(4)都恒成立。利用几何关系$\Gamma^t \cup \Gamma^g = \partial\Omega, \Gamma^t \cap \Gamma^g =$，将式子(4)改写为:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \delta\sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl} d\Omega = \int_\Gamma \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma - \int_\Omega \delta\sigma_{ij,j} u_i d\Omega \\ - \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma + \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_\Omega \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \\ = \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma + \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega\end{aligned} \tag{6}$$

2 再生核无网格形函数

无网格法通过在分析区域Ω和边界Γ上布置一系列节点$\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{NP}$实现空间离散，其中NP代表无网格节点数量。每个无网格节点$\boldsymbol{x}_I$对应的形函数为$\boldsymbol{\Psi}_I(x)$,影响域为$supp(\boldsymbol{x}_I)$。考虑任意变量$u(\boldsymbol{x}, t)$,其对应的无网格近似函数$u^h(\boldsymbol{x}, t)$为:

$$u^h(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{\Psi}_I(x) d_I(t) \tag{7}$$

其中,t为时间；d_I表示与节点$\boldsymbol{x}_I$对应的系数。

根据再生核近似理论，无网格形函数可以假设为如下形式:

$$\boldsymbol{\Psi}_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})\phi_{sI}(\boldsymbol{x}_I - x) \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$为待定系数向量；$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$为$p$阶单项式基向量，并且

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \{1, x, y, \cdots, x^i y^j, \cdots, y^p\}, 0 \le i + j \le p \tag{9}$$

其中$\psi_{sI}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$是附属于节点$x_I$的核函数，其影响域的大小由影响域的尺寸$s_I$确定，核函数及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。本研究分别采用三次和五次B样条核函数进行计算，二维问题的影响域为张量积形式矩形域。

将一致型条件引入式子(8)，即可得到位置系数$c(\boldsymbol{x})$，进一步得到无网格形函数表达式:

$$\boldsymbol{\Psi}_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^T(0)\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \tag{10}$$

式子中$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$为矩量矩阵，并且

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NP}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

对式(4)进行微分，可以得到无网格形函数的一阶梯度和二阶梯度表达式

$$\Psi_{I,i}(x)=\begin{bmatrix} p_{,i}^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi(x_I-x) \\ +p^{[p]T}(x_I-x)A_{,i}^{-1}\phi(x_I-x) \\ +p^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_{,i}(x_I-x) \end{bmatrix}p^{[p]}(0) \tag{12}$$

$$\Psi_{I,ij}(x)=\begin{bmatrix} p_{,ij}^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi(x_I-x) \\ +p_{,i}^{[p]T}(x_I-x)A_{,j}^{-1}(x)\phi(x_I-x) \\ +p_{,i}^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_{,j}(x_I-x) \\ +p^{[p]T}(x_I-x)A_{,ij}^{-1}(x)\phi(x_I-x) \\ +p_{,j}^{[p]T}(x_I-x)A_{,i}^{-1}(x)\phi(x_I-x) \\ +p^{[p]T}(x_I-x)A_{,i}^{-1}(x)\phi_{,j}(x_I-x) \\ +p^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_{,ij}(x_I-x) \\ +p_{,j}^{[p]T}(x_I-x)A^{-1}(x)\phi_{,i}(x_I-x) \\ +p^{[p]T}(x_I-x)A_{,j}^{-1}(x)\phi_{,i}(x_I-x) \end{bmatrix}p^{[p]}(0) \tag{13}$$

根据上述表达式可以看出，无网格形函数一般为有理式，因此其梯度计算复杂耗时。

3 再生光滑梯度理论

假设场变量$u(\boldsymbol{x},t)$为任意的p阶多项式，则其梯度$u_{,i}(\boldsymbol{x},t)$可以表示为：

$$u_{,i}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{a}_i^T(t)\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \tag{14}$$

其中:$\boldsymbol{a}_i$表示为任意系数向量；$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$为$(p-1)$阶的单项式基向量，即$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^{[p-1]}(\boldsymbol{x})$。根据文献可以知道$(p-1)$阶积分约束条件为:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\Psi}_{I,i}\boldsymbol{q}d\Omega=\int_\Gamma \boldsymbol{\Psi}_I\boldsymbol{q}n_id\Gamma-\int_\Omega \boldsymbol{\Psi}_I\boldsymbol{q}_{,i}d\Omega \tag{15}$$

根据式子可以看出，由于p次基函数，伽辽金弱形式所采用的数值积分方法只有满足$(p-1)$阶积分约束条件，无网格数值解才能重现对应的多项式精确解。

根据再生光滑梯度理论，与再生核无网格形函数类似，无网格形函数$\boldsymbol{\Psi}_I$的再生光滑梯度$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{I,i}$可表示为如下形式:

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{I,i}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}_i(\boldsymbol{x}_I)\tilde{\varphi}(x) \tag{16}$$

其中:$\boldsymbol{c}_i$为待定系数向量；$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x})$为核函数，这里取为

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in\Omega_c\\ 0, & \boldsymbol{x}\notin\Omega_c\end{cases}\tag{17}$$

其中：Ω_C为互相不重叠且$\cup_{C=1}^{N_C}\Omega_C=\Omega$的积分单元； N_C表示的是积分单元的总个数。图1给出了再生光滑梯度无网格法采用采用的三角形背景积分单元。不失为一般性，这里以三次基函数为例详细阐明再生光滑梯度构造过程。当采用三次基函数$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$时，$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$的表达式为:

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})=(1,x,y,x^2,y^2,xy)^T\quad \boldsymbol{x}\in\Omega_C\tag{18}$$

将式(18)代入到积分约束条件式(15)中，可得到:

$$\int_{\Omega_C}\boldsymbol{\Psi}_{I,i}\boldsymbol{q}d\Omega=\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}^C, I=1,2,\cdots,NP\tag{19}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}^C=\int_{\Gamma_C}\boldsymbol{\Psi}_I\boldsymbol{q}n_i d\Gamma-\int_{\Omega_C}\boldsymbol{\Psi}_I\boldsymbol{q}_{,i}d\Omega\tag{20}$$

再用式子(16)定义的光滑梯度$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{I,i}$替换到式子(19)中的标准梯度$\boldsymbol{\Psi}_{I,i}$，可以得到$\boldsymbol{c}_i=\boldsymbol{G}_C^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}^C$ 其中$\boldsymbol{G}_C$为再生光滑梯度的矩量矩阵，并且

$$\boldsymbol{G}_C=\int_{\Omega_C}\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T d\Omega\tag{21}$$