第一章 无网格形函数

1.1 再生核无网格近似

无网格法通过如图所示的问题域 Ω 和边界 Γ 上布置一系列无网格节点 $\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{NP}$ 进行离散，其中 NP 表示无网格节点数量。每个无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的形函数为 $\Psi(\boldsymbol{x})$，影响域为 $supp(\boldsymbol{x}_I)$，每一个节点的影响域 $supp(\boldsymbol{x}_I)$ 满足 $\Omega \in_{I=1}^{NP} supp(\boldsymbol{x}_I)$。不失为一般性，考虑任意变量 $u(\boldsymbol{x})$，其对应的无网格近似函数 $u^h(\boldsymbol{x})$ 表示为：

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d_I \tag{1.1}$$

其中，d_I 表示与节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的系数

根据再生核近似理论 []，无网格形函数可以假设为：

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \tag{1.2}$$

式中，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 表示为 p 阶的多项式基函数向量，表达式为：

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \{1, x, y, \cdots, x^i y^i, \cdots, y^p\}.0 \leq i + j \leq p \tag{1.3}$$

而 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 是附属于节点 $\boldsymbol{x}_I$ 的核函数，其影响域的大小由影响域尺寸 s 决定，核函数以及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。对应二维问题，一般情况下核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 的影响域为圆形域或者矩形域，可由下列公式进行得到：

$$\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) = \phi_{s_x}(r_x)\phi_{s_y}(r_y)\; r_x = \frac{|x_I - x|}{s_x}, r_y = \frac{|y_I|}{s_y} \tag{1.4}$$

其中 s_x 和 s_y 分别为 x 和 y 方向上影响域的大小，计算时一般使得两个方向上的影响域大小相等即 $s_x = s_y = s$。选取核函数时一般遵循核函数阶次

m 大于等于基函数阶次 $p(m \geq p)$ 的原则。针对二阶势问题的弹性力学问题，无网格基函数一般选择二阶或者三阶，而核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 则选取三次样条函数：

$$\phi(r) = \frac{1}{3!}\begin{cases}(2-2r)^3 - 4(1-2r)^3 & r \leq \frac{1}{2} \\ (2-2r)^3 & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1\end{cases} \tag{1.5}$$

针对高阶薄板问题，无网格基函数一般选择三阶或者四阶，而核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 则选择五次样条函数：

$$\phi(r) = \frac{1}{5!}\begin{cases}(3-3r)^5 - 6(2-3r)^5 + 15(1-3r)^5 & r \leq \frac{1}{3} \\ (3-3r)^5 - 6(2-3r)^5 & \frac{1}{3} < r \leq \frac{2}{3} \\ (3-3r)^5 & \frac{2}{3} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1\end{cases} \tag{1.6}$$

无网格形函数表达式 (1.2) 中的 $\boldsymbol{c}$ 为待定系数向量，该表达式可以通过满足再生条件确定：

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{1.7}$$

将无网格形函数表达式 (1.2) 代入再生条件 (1.7) 中，可以得到：

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0}) \tag{1.8}$$

其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 表示矩量矩阵，表达式为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \tag{1.9}$$

将 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ 代入到式 (1.2) 中得到再生核无网格形函数的表达式：

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{0})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \tag{1.10}$$

无网格形函数 $\Psi_I(\boldsymbol{x})$ 的一阶和二阶导数分别为：

$$\Psi_{I,i}(x) = \begin{bmatrix} p_{,i}^{[p]T}(x_I - x)A^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +p^{[p]T}(x_I - x)A_{,i}^{-1}\phi_s(x_I - x) \\ +p^{[p]T}(x_I - x)A^{-1}(x)\phi_{s,i}(x_I - x) \end{bmatrix} p^{[p]}(0) \tag{1.11}$$

$$\Psi_{I,ij}(x) = \begin{bmatrix} p_{,ij}^{[p]T}(x_I - x)A^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +p_{,i}^{[p]T}(x_I - x)A_{,j}^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +p_{,i}^{[p]T}(x_I - x)A^{-1}(x)\phi_{s,j}(x_I - x) \\ +p^{[p]T}(x_I - x)A_{,ij}^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +p_{,j}^{[p]T}(x_I - x)A_{,i}^{-1}(x)\phi_s(x_I - x) \\ +p^{[p]T}(x_I - x)A_{,i}^{-1}(x)\phi_{s,j}(x_I - x) \\ +p^{[p]T}(x_I - x)A^{-1}(x)\phi_{s,ij}(x_I - x) \\ +p_{,j}^{[p]T}(x_I - x)A^{-1}(x)\phi_{s,i}(x_I - x) \\ +p^{[p]T}(x_I - x)A_{,j}^{-1}(x)\phi_{s,i}(x_I - x) \end{bmatrix} p^{[p]}(0) \tag{1.12}$$

式中 $A_{,i}^{-1} = -A^{-1}A_{,i}A^{-1}, A_{,ij}^{-1} = -A^{-1}(A_{,ij}A^{-1} + A_{,i}A_{,j}^{-1} + A_{,j}A_{,i}^{-1})$，可以看出无网格形函数及其导数的计算都较为复杂。

图一维无网格形函数及其导数

图二维无网格形函数及其导数

图。图。分别表示一维和二维情况下的无网格形函数及其导数图，从图中可以看出，无网格形函数在全域上连续光滑，但在无网格节点处，形函数不具有插值性，因此无法像有限元法一样直接施加本质边界条件。

第二章　伽辽金无网格法

2.1　势问题的控制方程及无网格离散

不失为一般性，考虑场变量为标量 $u(\boldsymbol{x})$ 的势问题的伽辽金无网格离散。这类问题的控制方程表达式为：

$$\begin{cases} u_{,ii} + b = 0 & \text{in}\Omega \\ u_{,i}n_{,i} = t & \text{on}\Gamma^t \\ u = g & \text{on}\Gamma^g \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $u(\boldsymbol{x})$ 为场变量，$b(\boldsymbol{x})$ 为源项，Ω 表示问题所在的空间区域，Γ^t Γ^g 分别表示为自然边界和强制边界，且 $\Gamma^t \cup \Gamma^g = \Gamma$ $\Gamma^t \cap \Gamma^g = \varnothing$，$t$ 和 g 分别为自然边界和强制边界上给定的边界条件，$\boldsymbol{n} = \{n_i\}$ 是 Γ 的外法线方向。

式 (2.1) 定义的势问题，存在以下势能泛函：

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\nabla u)(\nabla u)d\Omega - \int_{\Omega} ubd\Omega - \int_{\Gamma^t} utd\Gamma \tag{2.2}$$

式中 ∇ 为梯度算子。根据最小势能原理，式 (2.1) 的真实解对应式子 (2.2) 的泛函取极值也称为等效积分的弱形式，其表达式为：

$$\delta\Pi(u) = \int_{\Omega}(\nabla\delta u)(\nabla u)d\Omega - \int_{\Omega}\delta ubd\Omega - \int_{\Gamma^t}\delta utd\Gamma = 0 \tag{2.3}$$

在伽辽金无网格法中，场变量 $u(\boldsymbol{x})$ 和权函数 $\delta u(\boldsymbol{x})$ 的势问题的伽辽金无网格离散。这类问题的控制方程表达式为：

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP}\Psi_I(\boldsymbol{x})d_I, \delta u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP}\Psi_I(x_J)\delta d_J \tag{2.4}$$

对应的场变量梯度离散形式为：

$$\nabla u^h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} u^h_{,1}(\boldsymbol{x}) \\ u^h_{,2}(\boldsymbol{x}) \\ u^h_{,3}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) d_J, \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_{I,1} \\ \Psi_{I,2} \\ \Psi_{I,3} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

将式 (2.5) 和 (2.4) 代入到式 (2.3) 中，可以得到离散的控制方程为：

$$\delta \boldsymbol{d}^T(\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{f}) = 0 \tag{2.6}$$

式中 $\boldsymbol{d} = \{d_I\}$ 为无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 上的位移分量节点系数，$\boldsymbol{K} = \{K_{IJ}\}$ 和 $\boldsymbol{f} = \{f_I\}$ 分别表示刚度矩阵和力向量，具体表达式为：

$$\begin{aligned} K_{IJ} &= \int_\Omega \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{B}_J d\Omega \\ f_I &= \int_\Omega \Psi_I b d\Omega + \int_{\Gamma^t} \Psi_I t d\Gamma \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2 弹性力学问题的伽辽金无网格离散

不失为一般性，弹性力学问题的基本未知量为位移向量 $\boldsymbol{u} = \{u_i\}, i = 1, \cdots, n_{sd}$，其静力平衡方程为：

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{in}\Omega \\ \sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on}\Gamma^t \\ u_i = g_i & \text{on}\Gamma^g \end{cases} \tag{2.8}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ 为柯西应力，$\boldsymbol{b} = \{b_i\}$ 为体力，Γ^t Γ^g 分别表示为自然和强制边界条件，t_i 和 u_i 分别为自然边界和强制边界上给定的面力和位移，$\boldsymbol{n} = \{n_i\}$ 是 Γ^{t_i} 的外法线方向。

考虑经典的线弹性本构关系：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ &\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla), \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为四阶弹性张量，ε 为应变，∇ 为梯度算子，“:”为双点积张量缩并运算符号。根据最小势能原理，弹性力学问题 (2.8) 的势能泛函为：

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon : \boldsymbol{C} : \varepsilon d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{u}\boldsymbol{b} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \boldsymbol{u}\boldsymbol{t} d\Gamma \tag{2.10}$$

对式 (2.10) 取极值可以得到弹性力学问题 (2.8) 的泛函也称为等效积分的弱形式，其表达式为：

$$\delta\Pi(\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega} \delta\varepsilon : \boldsymbol{C} : \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{u}\boldsymbol{b} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta\boldsymbol{u}\boldsymbol{t} d\Gamma = 0 \tag{2.11}$$

在弹性力学问题中，一般将张量表示转换为矩阵和向量表示，引入位移向量 $\boldsymbol{u}$，应变向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$，应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$：

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

当考虑 xy 平面内的平面应变问题时，弹性本构关系的向量表达式为：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

当考虑 xy 平面内的平面应力问题时，弹性本构关系变为：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

当使用矩阵向量形式表达时，弹性力学问题的势能泛函和弱形式可以表示为：

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t} d\Gamma \tag{2.15}$$

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon^T \boldsymbol{C} \varepsilon \Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t} d\Gamma \tag{2.16}$$

引入无网格离散后，位移向量表示为：

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} u_1^h(\boldsymbol{x}) \\ u_2^h(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{d}_J, \boldsymbol{d}_J = \begin{Bmatrix} d_{J1} \\ d_{J2} \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

$$\delta\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}_J) \delta\boldsymbol{d}_J \tag{2.18}$$

将式 (2.17) 代入到式 (2.9) 可以得到离散的应变向量：

$$\varepsilon^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}_I, \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Psi_{I,y} \\ \Psi_{I,y} & \Psi_{I,x} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

将式 (2.17)(2.19) 代入到式 (2.15)，可以得到离散控制方程：

$$\delta \boldsymbol{d}^T(\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{f}) = 0 \tag{2.20}$$

式中 $\boldsymbol{d} = \{d_I\}$ 表示位移向量，$\boldsymbol{K} = \{K_{IJ}\}$ 和 $\boldsymbol{f} = \{f_I\}$ 分别表示刚度矩阵和力向量，具体表达式为：

$$\begin{aligned} K_{IJ} &= \int_\Omega \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_J d\Omega \\ f_I &= \int_\Omega \Psi_I \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \Psi_I \boldsymbol{t} d\Gamma \end{aligned} \tag{2.21}$$