第 1 章 薄板问题

1.1 薄板控制方程

考虑厚度为 h 的薄板，根据 kirchhoff 薄板假设将薄板 x, y, z 方向上的位移并定义为 $\breve{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$：根据 kirchhoff 假设，$z$ 方向上中面位移 $\breve{u}_\alpha(\boldsymbol{x})$ 假设为线性方程：

$$\begin{aligned}\breve{u_\alpha}(\boldsymbol{x}) &= a_0 + a_1 x_z \\ &= u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 w_{,\alpha} \quad \alpha = 1, 2\end{aligned} \tag{1.1}$$

式中 $u_\alpha(x_1, x_2)$ 表示为薄板中面处 u 方向上的位移，$w_{,\alpha}$ 表示为 z 方向上沿中面的一阶导即为斜率

薄板的位移 $\breve{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ 可以表示为：

$$\begin{cases}\breve{u}_\alpha(\boldsymbol{x}) = u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 w_{,\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \\ \breve{u}_3(\boldsymbol{x}) = w(x_1, x_2)\end{cases} \tag{1.2}$$

考虑经典的线弹性本构关系：

$$\begin{aligned}\breve{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\breve{u}_{\alpha,\beta} + \breve{u}_{\beta,\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} - x_3 w_{,\alpha\beta} + u_{\beta,\alpha} - x_3 w_{,\beta\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - x_3 w_{,\alpha\beta} \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} x_3\end{aligned} \tag{1.3}$$

式中 $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$，$\varepsilon$ 为应变，$\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ 为曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的分量

$$\breve{\varepsilon}_{3i} = \breve{\varepsilon}_{i3} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.4}$$

由于垂直于薄板中性面的方向上的变形太小几乎等于 0，该方向上的位移是忽略不计的

考虑经典的线弹性本构关系：

$$\breve{\sigma}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta} \breve{\varepsilon}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}(\varepsilon_{\gamma\eta + x_3 \kappa_{\gamma\eta}}) \tag{1.5}$$

能量关系式 (?)：

$$\begin{aligned}&\int_{\breve{\Omega}} \frac{1}{2} \breve{\varepsilon}_{\alpha\beta} \breve{\sigma}_{\alpha\beta} d\Omega = \int_\Omega \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} x_3) C_{\alpha\beta\gamma\eta} (\varepsilon_{\gamma\eta} + x_3 \kappa_{\gamma\eta}) dx_3 d\Omega \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \varepsilon_{\gamma\eta} d\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega (\kappa_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \varepsilon_{\gamma\eta} + \varepsilon_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \kappa_{\gamma\eta} + \frac{h^3}{12} \kappa_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \kappa_{\gamma\eta}) d\Omega \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta} \frac{h^3}{12} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \kappa_{\gamma\eta} d\Omega\end{aligned} \tag{1.6}$$

(1.6) 分为弹性力学问题 + 四阶薄板问题

1.2 弹性力学问题伽辽金弱形式

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta,\beta} + b_{\alpha} = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} = t_{\alpha} & \text{on } \Gamma^{t} \\ u_{\alpha} = g_{\alpha} & \text{on } \Gamma^{g} \end{cases} \tag{1.8}$$