学校代码： 10385　　　　　　　　　　　　　　　　　　分类号：

研究生学号： 21014086095　　　　　　　　　　　　　密　集：

华侨大学

HUAQIAO UNIVERSITY

硕士专业学位论文

基于 Hellinger-Reissner 原理的变分一致型伽辽金无网格法

Variational consistent Galerkin meshless method based on the Hellinger-Reissner principle

作者姓名： 吴新瑜

指导教师： 赵珧冰

合作教师： 吴俊超

专业学位类别： 全日制专业学位硕士

专业学位领域： 全日制专业学位硕士

研究方向： 结构体系创新与应用

所在学院： 土木工程学院

论文提交日期：二〇二四年三月十六日

学 位 论 文 答 辩 委 员 会 决 议

根据《中华人民共和国学位条例》、《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》、《华侨大学学位授予工作细则》及《华侨大学研究生学位论文质量监控与评阅答辩的管理规定》的规定，学位论文答辩委员会经充分交换意见，对论文做出评价，并以无记名投票方式进行表决，同意该同学通过硕士学位论文答辩，同意授予硕士学位。

答辩委员会 (主席签字)：________________________

答辩时间：_________ 年____ 月____ 日

学位论文独创性声明

本人声明兹呈交的学位论文是本人在导师指导下完成的研究成果。论文写作中不包含其他人已经发表或撰写过的研究内容，如参考他人或集体的科研成果，均在论文中以明确的方式说明。本人依法享有和承担由此论文所产生的权利和责任。

论文作者签名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 签名日期：＿＿＿＿＿＿

学位论文版权使用授权声明

本人同意授权华侨大学有权保留并向国家机关或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许学位论文被查阅和借阅。本人授权华侨大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

论文作者签名：＿＿＿＿＿＿＿ 指导老师签名：＿＿＿＿＿＿＿

签 名 日 期：＿＿＿＿＿＿＿ 签 名 日 期：＿＿＿＿＿＿＿

摘 要

无网格法是一类根据离散节点信息直接建立形函数的方法，其形函数具有高阶光滑的特点，适用于薄板等高阶问题。本论文讨论的是具有变分一致性的伽辽金无网格法，目前具有变分一致性的伽辽金无网格法主要是通过假定应变理论构造匹配的光滑梯度，再生光滑梯度理论框架为假定应变的光滑梯度提供了一个通用的表达式，并在伽辽金弱形式中直接将光滑梯度替换成传统无网格形函数梯度。但光滑梯度并不等于传统无网格形函数梯度，该过程缺乏完备的变分原理理论基础。为了满足全域的变分一致性，满足积分约束条件的无网格数值积分方案需要配合具有变分一致性的本质边界条件施加方案，现有的本质边界条件施加方法还存在诸多问题，亟待发展一种全新变分一致本质边界条件施加方案。

首先，基于 Hellinger-Reissner 变分原理推导余能泛函，分别对位移和应力变分可以得到 Hellinger-Reissner 原理弱形式。其中位移采用传统无网格形函数进行离散，而应力采用在每个积分域中假设为多项式，以满足局部的变分一致性。随后，根据 Hellinger-Reissner 变分原理弱形式中内嵌本质边界条件的特点，以 Hellinger-Reissner 变分原理弱形式为基础系统推导本质边界条件施加过程中的离散控制方程。此时的无网格离散方程可看作为一种新型的 Nitsche 法施加本质边界条件，其中修正变分项采用再生光滑梯度和无网格形函数进行混合离散，稳定项则内嵌于 Hellinger-Reissner 变分原理弱形式中，无需额外增加稳定项。最后，详细分析该方法的变分一致性，并详细对比所提方法和传统 Nitsche 法、罚函数法、拉格朗日乘子法之间的差别，并通过传统弹性力学问题和薄板问题验证所提方法的计算精度和效率。该方法消除了对人工参数的依赖性，也无需计算复杂耗时的形函数梯度，并满足积分约束条件，有效的提高计算精度和计算效率。

关键词：无网格法；Hellinger-Reissner 变分原理；本质边界条件；再生光滑梯度；变分一致性

Abstract

Meshless methods are a class of methods that directly construct shape functions based on discrete node information. These shape functions possess high-order smoothness characteristics, making them suitable for high-order problems such as thin plates. The paper discusses the Galerkin meshless method with variational consistency. Currently, the Galerkin meshless method with variational consistency is mainly achieved by assuming strain theory to construct matching smooth gradients. The regenerative smooth gradient theory provides a universal expression for the smooth gradient of the assumed strain and directly replaces the smooth gradient with the gradient of traditional meshless shape functions in the Galerkin weak form. However, the smooth gradient is not equivalent to the gradient of traditional meshless shape functions, and this process lacks a complete theoretical foundation based on variational principles. In order to achieve global variational consistency, meshless numerical integration schemes that satisfy the integral constraint need to be combined with essential boundary condition enforcement schemes that have variational consistency. Existing methods for enforcing essential boundary conditions still have several issues, highlighting the urgent need for the development of a novel variational-consistent essential boundary condition enforcement scheme.

Firstly, by deriving the complementary energy functional based on the Hellinger-Reissner variational principle, the weak form of the Hellinger-Reissner principle can be obtained through separate variations of displacement and stress. In this approach, the displacement is discretized using traditional meshless shape functions, while the stress is assumed to be polynomial within each integration domain to satisfy local variational consistency. Subsequently, based on the embedded essential boundary condition characteristics in the weak form of the Hellinger-Reissner variational principle, the discrete control equations for enforcing essential boundary conditions are systematically derived using the weak form of the Hellinger-Reissner variational principle as a foundation. The meshless discretization equations at this stage can be regarded as a novel form of enforcing essential boundary conditions, resembling a Nitsche method. In this approach, the modified variational term is discretized using a combination of regenerative smooth gradients and meshless shape functions, while the stabilization term is embedded within the weak form of the Hellinger-Reissner variational principle, eliminating the need for additional stabilization terms. Finally, the variational consistency of this method is analyzed in detail. A comprehensive comparison is made between the proposed method and traditional Nitsche method, penalty function method, and Lagrange multiplier method, highlighting the differences between them. The proposed method is then validated for computational accuracy and efficiency through traditional elasticity problems and thin plate problems. This method eliminates the reliance on artificial parameters and avoids the computation of complex and time-consuming shape function gradients. It also satisfies integral constraint conditions, effectively enhancing both computational accuracy and efficiency.

Keywords: Meshless method;Hellinger-Reissner variational principle;essential boundary condition;regenerative smooth gradient;variational consistency

目　录

第 1 章　绪论

1.1　引言

由于实际工程中的结构通常具有复杂的几何形状、材料是非线性以及多样化的荷载情况，从而使得经典的解析方法难以直接应用于工程实际中进行计算和分析，需要借助数值计算分析方法进行求解。有限元法[1-4] 是目前最常采用的数值分析方法，是通过将复杂的结构问题离散化为许多小的有限元单元，并在每个单元上建立近似的数学模型，进而将复杂的问题转化为求解一系列简化的局部问题。这种离散化的方法使得有限元法能够有效地处理各种复杂的几何结构模型，有限元法还可以通过划分网格数量，调整网格密度灵活地处理各种几何形状，进一步提高计算精度。虽然有限元法是一种广泛应用于解决复杂工程问题的数值方法，但有限元的计算结果在很大程度上依赖于网格的划分。对于复杂的薄板几何形状，需要细致划分网格才能获得准确的解，网格密度增加会引起计算增加，降低计算效率，并且使用有限元法处理薄板的剪切变形存在一定的困难，会导致数值计算结果有一定的误差。值得注意的是，基于单元插值的有限元法通常只有 C^0 联系，难以构造整体协调的 C^1 单元，无法直接求解要求 C^1 是连续的薄板等高阶问题。

无网格法[5-6] 是一类能够有效解决高阶薄板问题的数值分析方法，该方法是根据离散节点位置信息直接建立形函数的方法，其形函数具有高阶光滑的特点，不依赖于网格单元信息构造形函数，有效的避免了网格划分，网格畸变等问题，使得无网格法在处理薄板问题[7] 中的几何变化具有更好的适应性，稳定性和可靠性。无网格法可以直接考虑薄板的厚度变化，能够准确地捕捉薄板的弯曲和扭转状态。根据无网格形函数构造不依赖于网格的特点，该方法也适用于其它复杂的几何结构模型的离散，如大变形分析[8]、裂纹扩展模拟[9]，有效的提高因为网格划分因素所引起的计算精度下降的问题。

1.2　伽辽金无网格法研究历史及现状

上个世纪七十年代，由 Lucy[10]、Gingold 和 Monaghan[11] 提出的光滑水动力学法 (SPH，Smoothed Particle Hydrodynamics) 开启了众多学者对无网格法的

关注，该方法是采用核函数的近似方法通过对求解域进行离散化，并使用强形式进行数值求解的近似方法，该方法属于配点型无网格法。该方法具有构造简单，无需数值积分等优势被广泛应用于进行数值计算分析，但由于配点型无网格法是通过核近似的离散方式一般不满足一致性条件，使得该方法无法准确保证数值计算的稳定性及计算精度[12-15]。1992 年 Nayroles 等人[16] 使用移动最小二乘近似形函数并通过伽辽金弱形式提出了散射元法。1994 年 Belytschko 等人[17] 指出了散射近似（Scattered Data Approximation）实质上等同于移动最小二乘近似（Moving Least Squares, MLS）。通过对移动最小二乘近似函数进行精确求导，引入背景网格和高阶高斯积分方法改善数值积分的精度，通过引入拉格朗日乘子，可以在伽辽金无单元法中有效的施加边界条件，从而提高计算精度和稳定性。在这些改进的基础上，Belytschko 等人将方法命名为伽辽金无单元法（Element Free Galerkin Method, EFG）。值得注意的是，在采用伽辽金法进行求解的时候，由于无网格形函数一般不是多项式，计算时需要采用建立高阶高斯积分法或其他数值积分方法[18-20]，从而会导致计算效率降低[21-22]。为了提高伽辽金无网格法的计算效率，众多学者进行了相关研究工作致力于解决伽辽金无网格法在计算过程中的效率问题[23-28]。1995 年 Liu 等人[29] 在光滑水动力学（Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH）核近似方法的基础上进行了改进。他们引入了核近似的多项式再生条件和校正函数，提出了再生核近似（Reproducing Kernel Approximation, RK）和再生核质点法（Reproducing Kernel Particle Method, RKPM）。1997 年 Babuška 和 Melenk[21, 30] 将系数矩阵表示为单位矩阵加上一个低秩矩阵的形式，使得原始线性方程组表示为多个规模较小的子问题的组合，每个子问题可以被独立的求解，进而求解出整个方程组的解，该方法称为单位分解法 (PUM, Partition of unity method) 也称为广义有限元法[31]。1998 年 Sukumar 等人[32] 提出了自然单元法，该方法通过将计算域划分为多个自然单元来离散化问题，通过使用自然领域形函数来近似解，并通过插值技术在整个计算域中进行扩展，该方法的形函数只具有 C^0 连续性，难以求解高阶薄板问题。为了更好利用无网格法求解薄板问题，2002 年 Long S 等人[33] 利用局部加权函数构建近似函数，并在控制方程中使用高斯积分法进行数值积分提出伽辽金局部无网格法 (Meshless Local Petrov−Galerkin)。2006 年 Liu 等人[34] 利用径向基函数构建近似函数，并使用 Hermite 插值获得薄板的位移和旋转的连续性提出了 Hermite 径向点插值 (Hermite Radial Point Interpolation)。2011 年 Mill´an D 等人[35] 利用最大

熵原理构建一个最大熵函数，通过最大化信息熵确定最优的近似解提出了最大熵无网格法 (Maximum-entropy Meshfree Method)，通过这种方式从散点数据中生成连续的薄壳几何形状和应力场。2012 年 Oh H 等人[36] 通过将薄板离散为一组粒子，并利用粒子间的相互作用进行计算提出了单元划分方法。随后 2015 年 Chen 等人[37] 提出了复变量 (complex variable RKPM) 方法，该方法基于粒子离散化，通过复变再生核函数近似求解数值分析。2016 年 Thai 等人[38] 利用移动 Kriging 插值构建近似函数，使用细化板理论进行描述薄板的受力状态提出了移动 Kriging 无网格法 (Moving Kriging Meshfree Method)，进而直接计算出薄板的位移和应力场。王东东，王莉华等人[14, 39] 提出了一种无网格配置方法，通过利用梯度再生核函数进行构建近似函数，并通过引入梯度项提高数值计算的稳定性和精度，可以准确计算弹性梁和薄板的位移和应力分析，并进行相应的静态和动态分析。为了更好的利用无网格法解决不同类型的问题，现如今已经提出了各式各样的无网格方法[40-44]，关于更多目前无网格法的研究进展见文献[45-57]

本论文讨论的是具有变分一致性的伽辽金无网格法[58-59]。无网格形函数及其梯度通常为有理式，并且形函数的影响域具有高度重叠的特点导致无网格形函数在背景积分单元上为分段的有理式。在伽辽金法的求解过程中，传统基于多项式完备性建立的高斯积分法无法进行准确数值积分过程，导数伽辽金无网格法无法准确求解与其基函数阶次相同的解析解，即不满足变分一致性[60]。为了解决该问题，建立具有变分一致性的伽辽金无网格法成为无网格研究领域的热门问题。目前具有变分一致性的伽辽金无网格法主要是通过假定应变理论构造匹配的光滑梯度，光滑梯度为低阶多项式，采用低阶高斯积分法既能准确进行数值积分，保证计算误差的收敛性。同时，光滑梯度的构造过程仅需要计算传统无网格形函数，避免复杂耗时的形函数梯度计算，提高传统伽辽金无网格法的计算效率。为了满足积分约束条件，Chen 等人从伽辽金法的线性准确性条件出发，提出了线性积分约束条件[25]。段庆林等人[8, 27] 将线性积分约束条件推广至高阶情况，并通过高阶积分约束条件计算高斯点处光滑梯度值，使得传统高斯积分法满足变分一致性，该方法称为一致性无单元伽辽金法。王东东和吴俊超提出了再生光滑梯度理论框架[24]，该框架具有与传统无网格形函数相类似的表达式，光滑梯度构造过程中可重新合理优化数值积分点采样点位置和权重，减少无网格形函数的计算量，提高计算效率。Wang 和 Ren[61] 提出了一致投影积分法，以投影形函数为基础建立替代传统形函数空间，通过将投影形函数代入

原始无网格形函数中近似计算伽辽金弱形式，利用具有高阶高斯正交规则的相应阶三角形有限元形函数，进而满足任意阶积分约束条件。

除了以假定应变理论为基础的变分一致型无网格法外，Chen 等人[62] 提出了修正变分积分法，该方法通过对基函数的变分导数进行近似，并在积分过程中考虑变分一致性，通过选择适当的积分点和积分权重，从而实现任意阶数的数值积分，该方法能够准确的模拟大变形问题、非线性问题和冲击破坏问题，提高伽辽金无网格法中数值积分的准确性和一致性，保证数值计算精度提高计算效率。但使用伽辽金无网格法求解偏微分方程通常会使用试函数和权函数进行构建离散形式的方程，在伽辽金无网格法中，试函数和权函数通常属于相同的函数空间，从而确保离散形式的刚度矩阵是对称的，而修正变分积分法中修正后的权函数和试函数不属于同一空间，导数刚度矩阵的非对称性，非刚度矩阵会引起数值解的误差，无法保证数值求解的稳定性和精确性。王东东和吴俊超提出了嵌套子域积分法[23]，该方法利用子域划分和梯度平滑技术提高数值积分的准确性，通过将计算域划分为多个子域，并在每个子域内采用光滑应变，利用两层次积分域得到的刚度矩阵进行合理组合，消除二阶误差项进而满足二次变分一致性，但嵌套子域积分法中，确保各层次的嵌套子域完全相似是构造光滑梯度的一个要求，这意味着每个子域在几何形状或大小上都与其他子域完全相同，使得该方法难以推广至三维及高阶情况。

与传统有限元法相比，无网格方法具有高阶连续光滑的特点。然而，这种连续性导致无网格形函数在离散节点上通常不具有插值性，这在求解过程中使得施加本质边界条件变得困难。为了克服这个问题，许多学者提出了各种具有插值性的无网格近似方法，以便能够直接施加本质边界条件[63-64]，如奇异权函数法[65]、插值最小二乘法[66-67]、复变量移动最小二乘法[40]、广义移动最小二乘法[68]、变换法[69] 等。然而，这类方法不是建立在变分原理基础上，无法保证节点之间位移边界条件施加精度和无网格法的变分一致性。对于满足积分约束条件的无网格数值积分方法，如稳定节点积分法[25]、一致性积分法[8, 27]、变分一致积分法[26]、嵌套子域积分法[23]、再生光滑梯度积分法[24] 等，在计算过程中采用形函数的光滑梯度替换传统无网格形函数导数，在保证无网格法的计算精度和最优误差收敛率的同时提高了计算效率，但其本质边界条件仍需要具有变分一致性的方法进行施加[22, 70]。

1.3 本文选题背景

变分一致型伽辽金无网格法可追溯到 2004 年 Chen 等人[25] 提出的稳定节点积分法，该方法从伽辽金法的线性准确性条件出发，提出了线性积分条件。伽辽金数值积分方法需要从满足积分约束条件，才能求解线性问题，即满足线性的变分一致性。该方法通过在节点周围引入额外的稳定项，改善对梯度突变和奇点的逼近，通过修改形函数和积分权重，构造一种稳定的节点积分方案，节点处的积分权重与节点处的梯度信息相关联，假设光滑梯度为常数，通过满足线性积分约束条件建立光滑梯度实现对数值解的稳定性。尽管稳定节点积分法在提高数值解稳定性和准确性具有一定的优势，但稳定节点积分法需要在节点周围引入额外的稳定项，会降低计算效率，并且额外稳定项的效果很大程度上依赖于参数的选择，选择不当的参数可能会引起数值解的不稳定性。段庆林等人[8, 27] 将线性积分约束条件推广至高阶情况，通过对无网格方法中的形函数进行修正和优化，通过与修正的形函数结合实现对积分的二阶精确性。通过使用高阶 RBF 函数计算高斯积分点处光滑梯度值，使得传统高斯积分法满足变分一致性，提高几何非线性分析的计算精度和效率。但该一致性积分法在计算过程中选取的高斯点数需要与积分约束条件数保持一致，这导致在处理高阶问题时会降低计算效率。并且一致性积分法无法完全消除数值误差，数值误差在计算高阶导数的过程中会逐渐积累和传播，可能会降低计算精度。王东东和吴俊超提出了再生光滑梯度理论框架[24]，该框架具有与传统无网格形函数相类似的表达式，统一了以假定应变为基础的变分一致型光滑梯度构造方案。在该理论框架下，光滑梯度构造过程可重新合理优化数值积分采样点位置和权重，从而减少无网格形函数的计算量，提高计算效率。**目前，再生光滑梯度理论框架为假定应变的光滑梯度提供了一个通用的表达式，并在伽辽金弱形式中直接将光滑梯度替换成传统无网格形函数梯度。但该光滑梯度并不直接等于传统无网格形函数梯度，该过程缺乏完备的变分原理理论基础。**

为了满足全域的变分一致性，满足积分约束条件的无网格数值积分方案需要配合具有变分一致性的本质边界条件施加方案，传统无网格形函数在自身节点处不具有插值性，Belytschko 等人[17] 最早采用拉格朗日乘子法施加本质边界条件，该方法需要引入额外自由度离散拉格朗日乘子，当采用变分一致型无网格数值积分方案时，拉格朗日乘子的自由度需要和光滑梯度构造过程中积分点的位置保持一致，以满足变分一致性。采用过多自由度离散拉格朗日乘子将导

致整体刚度矩阵出现奇异，以致于该方法不适合高阶的变分一致型伽辽金无网格法。罚函数法[71] 施加本质边界条件无需额外增加自由度，数值实现简单。广泛应用于伽辽金无网格法。但该方法的计算误差依赖于人工经验参数，且不具有变分一致性，不能保证计算精度。Nitshce 法[64] 是目前变分一致型无网格法主要采用的本质边界条件施加方法，该方法在修正变分原理的基础上引入罚函数法作为保证刚度矩阵的正定性。但是在积分一致的数值积分方案中已经不需要的无网格高阶梯度被重新引入，降低了无网格分析的计算效率。同时，Nitsche 法中的稳定性还是需要人工经验参数，过大或过小的人工参数都将导致计算精度的降低。另一类无网格施加本质边界条件的方法是试图恢复无网格形函数的插值性。Fernández-Méndez 与 Huerta[64] 通过修改无网格形函数构造过程中核函数的权重，使得无网格形函数在边界处具有插值性，但该方法无法满足积分约束条件。Hillman 和 Lin[70] 在修正变分法中引入具有插值性无网格近似，但该方法改变了解的空间。Chen 等人[62] 采用转换矩阵，将无网格法中的节点系数重新与物理值建立联系，从而直接施加本质边界条件，并称该方法为变换法。王东东[72] 将变换法引入稳定节点积分法中，并对其进行了修正，以保证数值积分的一致性。然而，变换法中转换矩阵需作用于整体刚度矩阵，计算量大，不适用于大规模计算。**Nitsche 法作为最适合变分一致型伽辽金无网格法的本质边界条件施加方法还存在诸多问题，如人工参数的依赖性，需要计算复杂耗时的形函数高阶梯度等，亟待发展一种全新变分一致型本质边界条件施加方案。**

1.4 本文主要内容

论文研究将发展基于 Hellinger-Reissner 原理的变分一致型伽辽金无网格法，并依托于 Hellinger-Reissner 原理内嵌本质边界条件的特点，建立具有变分一致性且不依赖于人工经验参数的本质边界条件施加方法，具体内容如下：

(1) **通过 Hellinger-Reissner 变分原理完善变分一致型伽辽金无网格数值积分方法的基础理论框架**。首先，基于 Hellinger-Reissner(HR) 变分原理推导余能泛函，分别对位移和应力变分可以得到 HR 原理弱形式。其中位移采用传统无网格形函数进行离散，而应力采用在每个积分域中假设为多项式，以满足局部的变分一致性。最后，通过分片实验验证该方法的变分一致性；

(2) 以 **Hellinger-Reissner 原理为基础建立具有变分一致性且不依赖人工参数的本质边界条件施加方法**。首先，HR 变分原理弱形式中内嵌本质边界条件，

以 HR 变分原理弱形式为基础系统推导本质边界条件施加过程中的离散控制方程，详细分析该方法的变分一致性。并详细对比所提方法和传统 Nitsche 法，罚函数法，拉格朗日乘子法之间的差别，并通过传统弹性力学问题和薄板问题验证所提方法的计算精度和效率。

第 2 章　无网格近似理论

本章以再生核无网格法为例对伽辽金无网格法进行介绍，详细说明无网格形函数及其导数的构造过程，讨论无网格形函数的插值性。同时，介绍伽辽金无网格法在弹性力学问题和薄板问题上的应用。

2.1　再生核无网格近似

如图 (2.1) 所示的问题为例，无网格近似将求解域 Ω 及其边界 Γ 离散为一系列无网格节点 $\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{NP}$，$NP$ 表示无网格节点数量。每个无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的形函数为 $\Psi_I(\boldsymbol{x})$，形函数影响域为 $supp(\boldsymbol{x}_I)$，并要求影响域的覆盖域需包含求解域 Ω，即 $\Omega \subseteq_{I=1}^{NP} supp(\boldsymbol{x}_I)$。考虑求解域 Ω 内的一个变量 $u(\boldsymbol{x})$，其对应的无网格近似函数 $u^h(\boldsymbol{x})$ 可表示为：

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d_I \tag{2.1}$$

其中 d_I 表示与无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的节点系数。

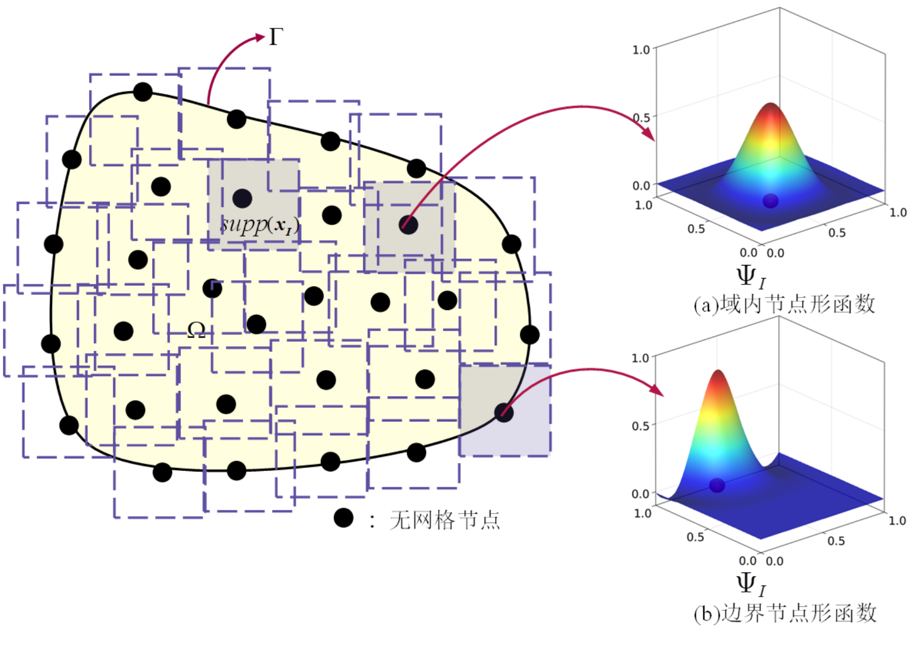

图 2.1　无网格离散示意图

根据再生核近似理论[29]，无网格形函数可以假设为如下再生核形式：

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{p}^{[p]}(\boldsymbol{x})$ 为 p 阶的多项式基函数向量，其表达式为：

$$\boldsymbol{p}^{[p]}(\boldsymbol{x}) = \{1,\ x,\ y,\ \cdots,\ x^i y^i,\ \cdots,\ y^p\}, \quad 0 \le i+j \le p \tag{2.3}$$

而 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 为附属于节点 $\boldsymbol{x}_I$ 的核函数，其影响域的大小由影响域尺寸 s 决定，核函数及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。在二维情况下，核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 的影响域通常为圆形域或者矩形域。本文的影响域形状均为矩形，矩形影响域的核函数可由下列公式计算得到：

$$\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) = \varphi(r_x)\varphi(r_y), \quad r_x = \frac{|x_I - x|}{s_x}, r_y = \frac{|y_I - y|}{s_y} \tag{2.4}$$

其中 s_x 和 s_y 分别为 x 和 y 方向上影响域尺寸的大小，在均匀布置的节点下，计算时一般使得两个方向上的影响域大小相等即 $s_x = s_y = s$。为保证紧支性和光滑性，φ 通常取为阶次大于 p 的紧支函数。本文针对弹性力学问题，无网格基函数一般选择二阶或者三阶多项式基函数，核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 取为三次样条函数：

$$\varphi(r) = \frac{1}{3!}\begin{cases} (2-2r)^3 - 4(1-2r)^3 & r \le \frac{1}{2} \\ (2-2r)^3 & \frac{1}{2} < r \le 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

针对薄板问题，无网格基函数一般选择三阶或四阶多项式基函数，核函数 $\phi_s(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 取为五次样条函数：

$$\varphi(r) = \frac{1}{5!}\begin{cases} (3-3r)^5 - 6(2-3r)^5 + 15(1-3r)^5 & r \le \frac{1}{3} \\ (3-3r)^5 - 6(2-3r)^5 & \frac{1}{3} < r \le \frac{2}{3} \\ (3-3r)^5 & \frac{2}{3} < r \le 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

最后，无网格形函数表达式 (2.2) 中 $\boldsymbol{c}$ 为待定系数向量，该待定系数通过满足下列一致性条件确定：

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}^{[p]}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{2.7}$$

将式 (2.2) 代入到式 (2.7) 中即可得到待定系数向量 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ 的具体表达式：

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}^{[p]}(\mathbf{0}) \tag{2.8}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为矩量矩阵：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NP}\boldsymbol{p}^{[p]}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x}) \tag{2.9}$$

将 (2.8) 代入到式 (2.2) 中得到最终的再生核无网格形函数的表达式：

$$\Psi_I(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^{[p]T}(\mathbf{0})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}^{[p]}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x}) \tag{2.10}$$

无网格形函数的一阶梯度可通过对无网格形函数 Ψ_I 求导得到：

$$\Psi_{I,i}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_{,i}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_{,i}^{-1}\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_{s,i}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\boldsymbol{p}^{[p]}(\mathbf{0}) \tag{2.11}$$

其中，下标“$,i$”表示对坐标 x_i 求导。进一步对上式再求一次导数可得形函数的二阶梯度为：

$$\Psi_{I,ij}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_{,ij}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}_{,i}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_{,j}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}_{,i}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_{s,j}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_{,ij}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}_{,j}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_{,i}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_s(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_{,i}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_{s,j}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_{s,ij}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}_{,j}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_{s,i}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\\+\boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_{,j}^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_{s,i}(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\boldsymbol{p}^{[p]}(\mathbf{0}) \tag{2.12}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{,i}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}_{,i}\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}_{,ij}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}_{,ij}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}_{,i}\boldsymbol{A}_{,j}^{-1}+\boldsymbol{A}_{,j}\boldsymbol{A}_{,i}^{-1})$。

图 (2.2)、(2.3) 中分别为内部节点和边界点处的无网格形函数及其导数图，从图中可知，无网格形函数具有全域高阶连续光滑的特点。但其无论是内部节点或边界点上的形函数在本点处均不具备插值性，即 $\Psi_I(\boldsymbol{x}_J)\neq\delta_{IJ}$。这将导致无网格法无法像有限元一样直接施加本质边界条件，需通过弱形式施加本质边界条件。

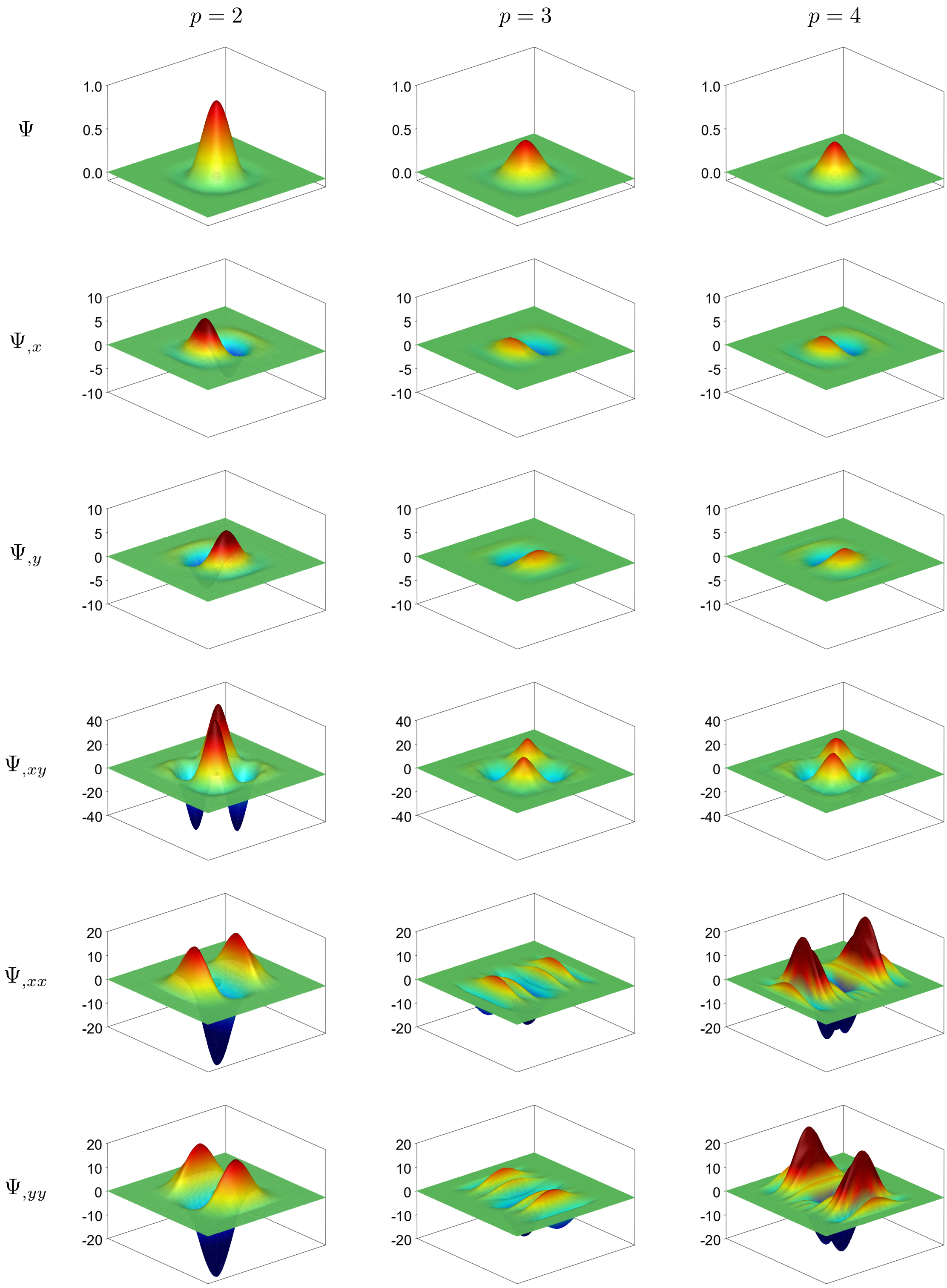

图 2.2　二维内部节点无网格形函数及其导数图

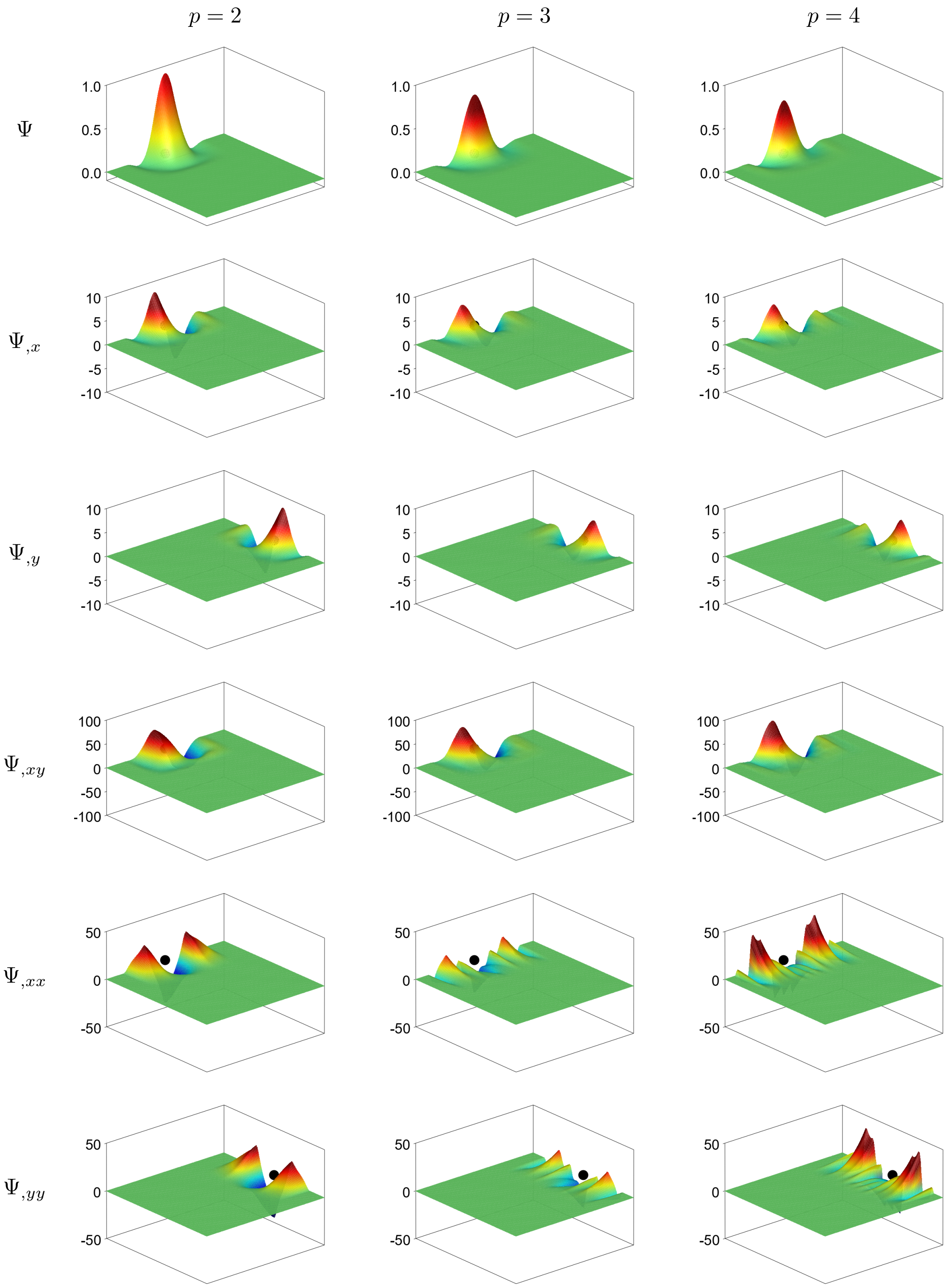

图 2.3　二维边界点无网格形函数及其导数图

2.2 伽辽金无网格法

2.2.1 弹性力学问题

不失为一般性，弹性力学问题的平衡微分方程为：

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on } \Gamma^t \\ u_i = g_i & \text{on } \Gamma^g \end{cases} \tag{2.13}$$

其中 σ_{ij} 为应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的分量，u_i 为位移张量 $\boldsymbol{u}$ 的分量，b_i 为体力张量 $\boldsymbol{b}$ 的分量。Γ^t、Γ^g 分别表示自然和本质边界条件，并满足下列关系式：

$$\Gamma^t \cup \Gamma^g = \Gamma, \Gamma^t \cap \Gamma^g = \varnothing \tag{2.14}$$

在自然和本质边界上具有给定的面力 $\boldsymbol{t}$ 和位移 $\boldsymbol{g}$，其分量分别为 t_i 和 g_i。n_i 为 Γ^t 上外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的分量。

对于线弹性各向同性材料，其本构关系为：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{2.15}$$

其中 C_{ijkl} 为四阶弹性张量，ε_{ij} 为应变张量的分量，根据小变形假设，应变 ε_{ij} 为：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.16}$$

根据最小势能原理，强形式 (2.13) 所对应的势能泛函表达式为：

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega - \int_{\Omega} u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} u_i t_i d\Gamma \tag{2.17}$$

对式 (2.17) 进行变分可以得到式 (2.13) 的等效积分弱形式：

$$\delta\Pi(\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega} \delta\varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \tag{2.18}$$

在伽辽金无网格法中，引入无网格近似离散位移 $\boldsymbol{u}$ 及其变分 $\delta\boldsymbol{u}$，其近似函数 $\boldsymbol{u}^h$ 和 $\delta\boldsymbol{u}^h$ 的分量为：

$$u_i^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d_{iI}, \quad \delta u_i^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) \delta d_{iI} \tag{2.19}$$

式中 d_{iI}、δd_{iI} 分别为近似位移分量 u_i^h、δu_i^h 在 $\boldsymbol{x}_I$ 处的节点系数。进一步将位移表达式 (2.19) 代入应变表达式 (2.16) 中可得：

$$\varepsilon_{ij}^h = \sum_{I=1}^{NP} (\Psi_{I,i} d_{jI} + \Psi_{I,j} d_{iI}) \tag{2.20}$$

将式 (2.19)、(2.20) 代入到弱形式 (2.18) 中可以得到弹性力学问题离散控制方程式：

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \tag{2.21}$$

其中 $\boldsymbol{d} = \{d_{iI}\}$ 表示位移节点系数向量，$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{K}_{IJ}\}$ 和 $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_I\}$ 分别表示刚度矩阵和力向量，其分量具有表达式为：

$$\boldsymbol{K}_{IJ} = \int_\Omega \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_J d\Omega \tag{2.22a}$$

$$\boldsymbol{f}_I = \int_\Omega \Psi_I \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \Psi_I \boldsymbol{t} d\Gamma \tag{2.22b}$$

式中 $\boldsymbol{B}_I$ 为形函数梯度矩阵，$\boldsymbol{D}$ 为材料系数矩阵。在二维平面应力和平面应变问题中，$\boldsymbol{B}_I$ 和 $\boldsymbol{D}$ 具有如下表达式：

$$\boldsymbol{B}_I = \begin{bmatrix} \Psi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Psi_{I,y} \\ \Psi_{I,y} & \Psi_{I,x} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

- 平面应力问题

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

- 平面应变问题

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

2.2.2 薄板问题

考虑如图 (2.4) 所示薄板区域 $\bar{\Omega}$，其中板厚为 h，Ω 为薄板中面。在 Kirchhoff 薄板假设下[73]，薄板中面的剪切变形可忽略不计，此时平衡微分方程可退化为

如下形式：

$$
\begin{cases}
M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q} = 0 & \text{in } \Omega \\
w = \bar{w} & \text{on } \Gamma_w \\
\theta_{\boldsymbol{n}} = w_{,\boldsymbol{n}} = \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}} & \text{on } \Gamma_\theta \\
V_{\boldsymbol{n}} = Q_{\boldsymbol{n}} + M_{\boldsymbol{ns},\boldsymbol{s}} = \bar{V}_{\boldsymbol{n}} & \text{on } \Gamma_V \\
M_{\boldsymbol{nn}} = \bar{M}_{\boldsymbol{nn}} & \text{on } \Gamma_M \\
w = \bar{w} & \text{at } c_w \\
P = -\left. M_{ns}\right|_{c_p} = \bar{P} & \text{at } c_P
\end{cases}
\tag{2.26}
$$

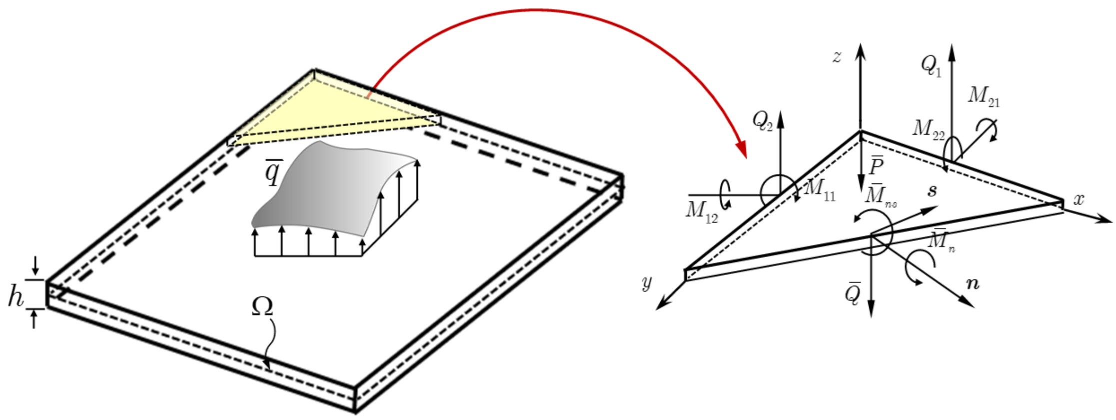

图 2.4 薄板运动学及边界条件

其中

$$w_{,\boldsymbol{n}} = w_{,\alpha} n_\alpha \tag{2.27a}$$

$$Q_{\boldsymbol{n}} = n_\alpha M_{\alpha\beta,\beta} \tag{2.27b}$$

$$M_{\boldsymbol{nn}} = M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, M_{\boldsymbol{ns}} = M_{\alpha\beta n_\alpha s_\beta}, M_{\boldsymbol{ns},\boldsymbol{s}} = M_{\alpha\beta,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma \tag{2.27c}$$

式中 $M_{\alpha\beta}$ 可表示弯矩张量 $\boldsymbol{M}$ 的弯曲和扭转部分的分量，$\bar{q}$ 为垂直于薄板中面的分布荷载。Γ_w、Γ_θ 和 c_w 为本质边界条件，$\bar{w}$ 和 $\bar{\theta}_n$ 分别为本质边界条件上给定的挠度和转角。Γ_V、Γ_M 和 c_P 为自然边界条件，$V_{\boldsymbol{n}}$、$M_{\boldsymbol{nn}}$ 和 P 为自然边界上的等效剪力、法向弯矩和薄板角上的集中荷载。n_α 和 s_α 分别为边界上外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 和切方向 $\boldsymbol{s}$ 的分量。所有的边界条件都满足如下关系式:

$$
\begin{gathered}
\Gamma = \Gamma_w \cup \Gamma_V \cup \Gamma_\theta \cup \Gamma_M, c = c_w \cup c_P \\
\Gamma_w \cap \Gamma_V = \Gamma_\theta \cap \Gamma_M = c_w \cap c_P = \varnothing
\end{gathered}
\tag{2.28}
$$

当薄板为线弹性各同向性材料时，其本构关系为：

$$M_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\gamma\eta}\kappa_{\gamma\eta} = -D_{\alpha\beta\gamma\eta}w_{,\gamma\eta} \tag{2.29}$$

其中 $\kappa_{\alpha\beta}$ 为曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的分量，表达式如下：

$$\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \tag{2.30}$$

式中 $D_{\alpha\beta\gamma\eta}$ 为薄板问题四阶弹性张量的分量，表达式如下：

$$D_{\alpha\beta\gamma\eta} = \bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\eta} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\eta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma})) \tag{2.31}$$

其中 $\bar{D}$ 为抗弯刚度，抗弯刚度可由杨氏模量 E、泊松比 ν 和板厚 h 计算得到：

$$\bar{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.32}$$

根据最小势能原理，强形式 (2.26) 所对应的的势能泛函表达式为：

$$\Pi(w) = \int_\Omega \frac{1}{2}\kappa_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega + \int_{\Gamma_M}\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma - \int_{\Gamma_V} w\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma - w\bar{P}|_{x\in c_P} + \int_\Omega w\bar{q}d\Omega \tag{2.33}$$

对式 (2.33) 进行变分可以得到式 (2.26) 的等效积分弱形式：

$$\begin{aligned} \delta\Pi(w) = &\int_\Omega \delta\kappa_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta}d\Omega + \int_{\Gamma_M}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_V}\delta w\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma - \delta w\bar{P}|_{x\in c_P} + \int_\Omega \delta w\bar{q}d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

在伽辽金无网格法中，引入无网格近似离散挠度 w 及其变分 δw，其近似函数 w^h 和 δw^h 的分量为：

$$w^h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP}\Psi_I(\boldsymbol{x})d_I, \quad \delta w^h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP}\Psi_I(\boldsymbol{x})\delta d_I \tag{2.35}$$

式中 d_I、δd_I 分别为近似挠度分量 $w^h_{\alpha\beta}$、$\delta w^h_{\alpha\beta}$ 在 w 处的节点系数。进一步将挠度表达式 (2.35) 代入曲率张量表达式 (2.30) 中可得：

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\sum_{I=1}^{NP}\Psi_{I,\alpha\beta}d_I \tag{2.36}$$

将式 (2.27a)、(2.29) 和 (2.35) 代入到伽辽金弱形式 (2.34) 中得到薄板问题离散平衡控制方程：

$$\boldsymbol{Kd} = \boldsymbol{f} \tag{2.37}$$

其中刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和力向量 $\boldsymbol{f}$ 的分量 K_{IJ}、f_I 分别为：

$$K_{IJ} = \frac{h^3}{12}\int_{\Omega} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_J d\Omega \tag{2.38a}$$

$$f_I = \int_{\Gamma_V} \Psi_I \bar{V}_{\boldsymbol{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_M} \Psi_{I,\boldsymbol{n}} \bar{M}_{\boldsymbol{nn}} d\Gamma + \Psi_I \bar{P}|_{x\in c_P} + \int_{\Omega} \Psi_I \bar{q} d\Omega \tag{2.38b}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 为式 (2.24) 中的材料系数矩阵，$\boldsymbol{B}_I$ 为形函数梯度向量，其形函数梯度矩阵具有如下表达式：

$$\boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} \Psi_{I,xx} \\ \Psi_{I,yy} \\ 2\Psi_{I,xy} \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

2.3 小结

本章首先对再生核无网格近似理论进行了系统讨论，详细说明了无网格形函数及其梯度的构造过程，验证了再生核近似形函数的一致性条件。与传统有限元形函数不同，无论是内部节点还是边界节点，再生核无网格形函数通常不具备插值性。在伽辽金法的求解过程中，无法直接施加本质边界条件，需采用弱形式的途径进行施加。最后，以弹性力学问题和薄板问题为例，详细介绍了伽辽金无网格法在这两类问题上的离散控制方程。下一章节将以这两类问题为例，介绍主要的无网格本质边界施加方案。

第 3 章　本质边界条件施加方法

由于无网格形函数通常不具备插值特性，因此伽辽金无网格法需要通过弱形式施加本质边界条件。在本章中，将以弹性力学问题和薄板问题为例，对常见的 3 种无网格法本质边界条件施加方法进行详细讨论，包括拉格朗日乘子法、罚函数法、Nitsche 法。

3.1　拉格朗日乘子法

拉格朗日乘子法最早由 Belytschko 等人[17] 引入伽辽金无网格法中施加本质边界条件，该方法在原有的势能泛函的基础上引入拉格朗日乘子项施加本质边界条件。在弹性力学问题中，在势能泛函 (2.17) 的基础上增加拉格朗日乘子项有：

$$\bar{\Pi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})=\Pi(\boldsymbol{u})-\int_{\Gamma^g}\lambda_i(u_i-g_i)d\Gamma \tag{3.1}$$

对式 (3.1) 进行变分可以得到拉格朗日乘子法的等效积分弱形式：

$$\delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})=\Pi(\boldsymbol{u})-\int_{\Gamma^g}\delta u_i\lambda_i d\Gamma-\int_{\Gamma^g}\delta\lambda_i(u_i-g_i)d\Gamma=0 \tag{3.2}$$

通常情况下拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 及其变分 $\delta\boldsymbol{\lambda}$ 可采用有限元形函数进行离散，相应的分量为：

$$\lambda_i(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NL}N_I(\boldsymbol{x})\lambda_{iI},\quad \delta\lambda_i(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NL}N_I(\boldsymbol{x})\delta\lambda_{iI} \tag{3.3}$$

其中 NL 表示离散拉格朗日乘子的个数，$N_I(\boldsymbol{x})$ 为有限元函数。

将式 (2.19)、(2.20)、(2.23) 和 (3.3) 代入到弱形式 (3.2) 中得弹性力学问题的离散平衡控制方程式：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{K}^{(u\lambda)}\\ \boldsymbol{K}^{(u\lambda)T} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{f}^{\lambda}\end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

其中 $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{f}$ 为传统的刚度矩阵和力向量，其表达式见式 (2.22)。$\boldsymbol{K}^{(u\lambda)}$ 和 $\boldsymbol{f}^{\lambda}$ 的分

量具体表达式如下：

$$\boldsymbol{K}_{IJ}^{u\lambda} = -\int_{\Gamma^g} \Psi_I N_J \mathbf{1} d\Gamma \tag{3.5a}$$

$$\boldsymbol{f}_I^{\lambda} = -\int_{\Gamma^g} N_I \boldsymbol{g} d\Gamma \tag{3.5b}$$

式中 $\mathbf{1}$ 为 2×2 单位矩阵。

同样地在薄板问题势能泛函中 (2.33) 引入拉格朗日乘子 λ_w、λ_θ、λ_c 施加本质边界条件，可得到如下表达式：

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}(w, \lambda_w, \lambda_\theta, \lambda_c) &= \Pi(w) \\ &- \int_{\Gamma_w} \lambda_w (w - \bar{w}) d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \lambda_\theta (\theta_{\boldsymbol{n}} - \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}) d\Gamma - \lambda_c (w - \bar{w})|_{x \in c_w}\end{aligned} \tag{3.6}$$

对式 (3.6) 进行变分可以得到相应的等效积分弱形式：

$$\begin{aligned}\delta\bar{\Pi}(w, \lambda_w, \lambda_\theta, \lambda_c) &= \delta\Pi(w) \\ &- \int_{\Gamma_w} \delta w \lambda_w d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \delta\theta_{\boldsymbol{n}} \lambda_\theta d\Gamma - \delta w \lambda_c|_{x \in c_w} \\ &- \int_{\Gamma_w} \delta\lambda_w (w - \bar{w}) d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \delta\lambda_\theta (\theta_{\boldsymbol{n}} - \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}) d\Gamma - \delta\lambda_c (w - \bar{w})|_{x \in c_w} \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.7}$$

进一步采用有限元形函数离散拉格朗日乘子 λ_w、λ_θ 和 λ_c：

$$\lambda_w(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NL} N_I(\boldsymbol{x}) \lambda_{wI}, \quad \lambda_\theta(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NL} N_I(\boldsymbol{x}) \lambda_{\theta I}, \quad \lambda_c(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NL} N_I(\boldsymbol{x}) \lambda_{cI} \tag{3.8}$$

将式 (2.27a)、(2.29)、(2.35) 和 (3.8) 代入到弱形式 (3.7) 中可得薄板问题拉格朗日乘子法的离散控制方程式：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{K}^{w\lambda_w} & \boldsymbol{K}^{w\lambda_\theta} & \boldsymbol{K}^{w\lambda_c} \\ \boldsymbol{K}^{w\lambda_w T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{K}^{w\lambda\theta T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{K}^{w\lambda_c T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\lambda}_w \\ \boldsymbol{\lambda}_\theta \\ \boldsymbol{\lambda}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f}^{\lambda_w} \\ \boldsymbol{f}^{\lambda_\theta} \\ \boldsymbol{f}^{\lambda_c} \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

其中刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$、力向量 $\boldsymbol{f}$ 表达式见式 (2.38)。$\boldsymbol{K}^{w\lambda_w}$、$\boldsymbol{K}^{w\lambda_\theta}$、$\boldsymbol{K}^{w\lambda_c}$、$\boldsymbol{f}^{\lambda_w}$、$\boldsymbol{f}^{\lambda_\theta}$、

$\boldsymbol{f}^{\lambda_c}$ 分量的表达式分别为：

$$K_{IJ}^{w\lambda_w} = -\int_{\Gamma_w} \Psi_I N_J^{\lambda_w} d\Gamma \tag{3.10a}$$

$$K_{IJ}^{w\lambda_\theta} = \int_{\Gamma_\theta} \Psi_{I,\alpha} n_\alpha(\boldsymbol{x}) N_J^{\lambda_\theta} d\Gamma \tag{3.10b}$$

$$K_{IJ}^{w\lambda_c} = -\Psi_I(\boldsymbol{x}) N_J^{\lambda_c}|_{c\in c_w} \tag{3.10c}$$

$$f_I^{\lambda_w} = \int_{\Gamma_w} N_I^{\lambda_w} \bar{w} d\Gamma \tag{3.10d}$$

$$f_I^{\lambda_\theta} = -\int_{\Gamma_\theta} N_I^{\lambda_\theta} \bar{\theta}_n d\Gamma \tag{3.10e}$$

$$f_I^{\lambda_c} = -N_I^{\lambda_c} \bar{w}|_{c\in c_w} \tag{3.10f}$$

拉格朗日乘子法在数值计算中广泛应用，特别适用于处理约束条件，在伽辽金无网格法求解过程中应用广泛，可满足变分的一致性。然而，拉格朗日乘子法需引入额外自由度离散拉格朗日乘子，其刚度矩阵也变成了奇异矩阵。当拉格朗日乘子自由度过多时，将增加整体刚度矩阵的奇异性，导致计算精度下降。尤其在薄板问题中通常涉及大量的自由度和约束条件，刚度矩阵奇异性问题更为显著。

3.2 罚函数法

罚函数法[71] 是在势能泛函中通过引入罚函数项进行本质边界条件的施加，罚函数项为罚因子 α 乘以边界条件残差的平方。在弹性力学问题势能泛函表达式 (2.17) 中引入罚函数项有：

$$\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \Pi(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}\alpha \int_{\Gamma^g} (u_i - g_i)(u_i - g_i) d\Gamma \tag{3.11}$$

对式 (3.11) 进行变分可以得到施加本质边界条件罚函数法的等效积分弱形式：

$$\delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \delta\Pi(\boldsymbol{u}) + \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i u_i d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i g_i d\Gamma = 0 \tag{3.12}$$

引入无网格离散式 (2.19)、(2.20) 和 (2.23) 代入到弱形式 (3.12) 中得到弹性力学问题施加本质边界条件罚函数法的离散平衡控制方程式：

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^s)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^s \tag{3.13}$$

其中 $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{f}$ 见式 (2.22)，$\boldsymbol{K}^s_{IJ}$ 和 $\boldsymbol{f}^s_I$ 的具体表达式为：

$$\boldsymbol{K}^s_{IJ} = \alpha \int_{\Gamma^g} \Psi_I \Psi_J \mathbf{1} d\Gamma \tag{3.14a}$$

$$\boldsymbol{f}^s_I = \alpha \int_{\Gamma^g} N_I \boldsymbol{g} d\Gamma \tag{3.14b}$$

薄板问题势能泛函表达式 (2.33) 通过引入 3 个不通的罚因子 α_w、α_θ 和 α_c 施加本质边界条件，其表达式为：

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}(w) &= \Pi(w) \\ &\quad + \frac{\alpha_w}{2}\int_{\Gamma_w}(w-\bar{w})^2 d\Gamma + \frac{\alpha_\theta}{2}\int_{\Gamma_\theta}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}})^2 d\Gamma + \frac{\alpha_c}{2}(w-\bar{w})^2|_{x\in c_w}\end{aligned} \tag{3.15}$$

对式 (3.15) 进行变分可以得到施加本质边界条件罚函数法的等效积分弱形式：

$$\begin{aligned}\delta\bar{\Pi}(w) &= \delta\Pi(w) \\ &\quad + \alpha_w \int_{\Gamma_w} \delta w(w-\bar{w}) d\Gamma + \alpha_\theta \int_{\Gamma_\theta} \delta\theta_{\boldsymbol{n}}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}) d\Gamma + \alpha_c (w-\bar{w})|_{x\in c_w} \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.16}$$

引入式 (2.27a)、(2.29) 和 (2.35) 代入到弱形式 (3.16) 中得到薄板问题施加本质边界条件罚函数法的离散平衡控制方程式：

$$(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^s)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^s \tag{3.17}$$

其中刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$、力向量 $\boldsymbol{f}$ 见式 (2.38)，$\boldsymbol{K}^s_{IJ}$ 和 $\boldsymbol{f}^s_I$ 的具体表达式为：

$$K^s_{IJ} = \alpha_w \int_{\Gamma_w} \Psi_I \Psi_J d\Gamma + \alpha_\theta \int_{\Gamma_\theta} \Psi_{I,\boldsymbol{n}} \Psi_{J,\boldsymbol{n}} d\Gamma + \alpha_c \Psi_I \Psi_J|_{x\in c_w} \tag{3.18a}$$

$$f^s_I = \alpha_w \int_{\Gamma_w} \Psi_I \bar{w} d\Gamma + \alpha_\theta \int_{\Gamma_\theta} \Psi_{I,\boldsymbol{n}} \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}} d\Gamma + \alpha_c \Psi_I \bar{w}|_{x\in c_w} \tag{3.18b}$$

值得注意的是，罚函数法不满足变分一致性，并且在使用过程中罚因子大小决定了伽辽金法的计算精度。较大的罚因子可能会导致数值不稳定或者收敛困难，而较小的罚因子可能会导致边界条件无法满足。尤其在薄板问题中，最优的罚因子取值跟节点离散尺寸相关，且 3 种罚因子跟节点离散尺寸的相关性不同，难以保证计算精度。

3.3 Nitsche 法

Nitsche 法[64] 是目前变分一致型无网格法最常采用的本质边界条件施加方法，其可视为拉格朗日乘子法与罚函数法相结合。首先将拉格朗日乘子采用相

对应的物理意义表示，此时拉格朗日乘子可用传统位移节点进行离散，无需引入额外自由度，保证了变分一致性和刚度矩阵对称性。然而，此时刚度矩阵通常不具有正定性，需引入罚函数项进行稳定，保证计算精度。

在弹性力学问题中，拉格朗日乘子的物理意义为约束反力，即 $\lambda_i = \sigma_{ij} n_i$。并引入罚函数法，此时等效积分弱形式 (3.2) 中可改写为：

$$\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g} \sigma_{ij} n_j (u_i - g_i) d\Gamma + \frac{1}{2}\alpha \int_{\Gamma^g} (u_i - g_i)(u_i - g_i) d\Gamma \tag{3.19}$$

对式 (3.19) 进行变分得到相对应的等效积分弱形式：

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) &= \delta\Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \delta\sigma_{ij} n_j (u_i - g_i) d\Gamma \\ &+ \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i u_i d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma^g} \delta u_i g_i d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

引入无网格离散式 (2.19)、式 (2.20) 和 (2.23) 代入到弱形式 (3.20) 中得到弹性力学问题施加本质边界条件 Nitsche 法的离散控制方程式：

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^v + \boldsymbol{K}^s)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^v + \boldsymbol{f}^s \tag{3.21}$$

其中刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和力向量 $\boldsymbol{f}$ 见式 (2.22)，通过罚函数法满足正定性得到的稳定项 $\boldsymbol{K}^s$ 和 $\boldsymbol{f}^s$ 见式 (3.14)，结合拉格朗日乘子法满足变分一致性的修正变分项 $\boldsymbol{K}^v$ 和 $\boldsymbol{f}^v$，其具体表达式如下：

$$\boldsymbol{K}^v_{IJ} = -\int_{\Gamma^g} \Psi_I \bar{\boldsymbol{n}}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_J d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{n}} \Psi_J d\Gamma \tag{3.22a}$$

$$\boldsymbol{f}^v_I = -\int_{\Gamma^g} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{g} d\Gamma \tag{3.22b}$$

式中矩阵 $\bar{\boldsymbol{n}}$ 为法向量矩阵，在平面问题中的表达式为：

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

同样地在薄板问题中，拉格朗日乘子 λ_w、λ_θ 和 λ_c 分别用等效剪力 $V_{\boldsymbol{n}}$、法向弯矩 $M_{\boldsymbol{nn}}$ 和薄板角上的集中荷载 P 进行替换，并通过罚函数法引入三个不同

的罚因子 α_w、α_θ 和 α_c，此时等效积分弱形式 (2.34) 可改写：

$$
\begin{aligned}
\bar{\Pi}(w) &= \Pi(w) \\
&\quad - \int_{\Gamma_w} V_{\boldsymbol{n}}(w-\bar{w})d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} M_{\boldsymbol{nn}}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}})d\Gamma - P(w-\bar{w})|_{x\in c_w} \\
&\quad + \frac{\alpha_w}{2}\int_{\Gamma_w}(w-\bar{w})^2 d\Gamma + \frac{\alpha_\theta}{2}\int_{\Gamma_\theta}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}})^2 d\Gamma + \frac{\alpha_c}{2}(w-\bar{w})^2|_{x\in c_w}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

将式 (2.27b)、(2.27c)、(2.29)、(2.31) 代入式 (2.26) 中，从而将 $M_{\boldsymbol{nn}}$、$V_{\boldsymbol{n}}$ 和 P 采用挠度 w 表示为：

$$
\begin{cases}
M_{\boldsymbol{nn}} = \mathcal{M}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -\bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta}+(1-\nu)n_\alpha n_\beta)w_{,\alpha\beta} \\
V_{\boldsymbol{n}} = \mathcal{V}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -\bar{D}(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}n_\beta + (1-\nu)n_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\gamma}s_\alpha n_\beta s_\gamma)w_{,\alpha\beta} \\
P = \mathcal{P}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -[[(\bar{D}(1-\nu)n_\alpha s_\beta)w_{,\alpha\beta}]]
\end{cases}
\tag{3.25}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\mathcal{M}_{\alpha\beta} = -D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma n_\eta = -\bar{D}(\nu\delta_{\alpha\beta}+(1-\nu)n_\alpha n_\beta) \\
\mathcal{V}_{\alpha\beta} = -D_{\alpha\beta\gamma\eta}(n_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\eta} + s_\gamma n_\eta s_\xi\frac{\partial}{\partial x_\xi}) = -\bar{D}(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}n_\beta + (1-\nu)n_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\gamma}s_\alpha n_\beta s_\gamma) \\
\mathcal{P}_{\alpha\beta} = -[[D_{\alpha\beta}n_\gamma s_\eta]] = -[[\bar{D}(1-\nu)n_\alpha s_\beta]]
\end{cases}
\tag{3.26}
$$

对式 (3.24) 进行变分得到薄板问题施加本质边界条件 Nitshce 法的等效积分弱形式为：

$$
\begin{aligned}
\delta\bar{\Pi}(w) &= \delta\Pi(w) \\
&\quad - \int_{\Gamma_w}\delta V_{\boldsymbol{n}}(w-\bar{w})d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta}\delta M_{\boldsymbol{nn}}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}})d\Gamma - \delta P(w-\bar{w})|_{x\in c_w} \\
&\quad - \int_{\Gamma_w}\delta w V_{\boldsymbol{n}}d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}M_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma - \delta w P|_{x\in c_w} \\
&\quad + \alpha_w\int_{\Gamma_w}\delta w(w-\bar{w})d\Gamma + \alpha_\theta\int_{\Gamma_\theta}\delta\theta_{\boldsymbol{n}}(\theta_{\boldsymbol{n}}-\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}})d\Gamma + \alpha_c(w-\bar{w})|_{x\in c_w}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

进一步引入无网格离散式 (2.35)、式 (2.27a)-(2.32) 和式 (3.25)、(3.26) 得到薄板问题施加本质边界条件 Nitsche 法的离散控制方程式：

$$
(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^v+\boldsymbol{K}^s)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^v+\boldsymbol{f}^s \tag{3.28}
$$

其中刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和力向量 $\boldsymbol{f}$ 见式 (2.38)。$\boldsymbol{K}^s$ 和 $\boldsymbol{f}^s$ 的表达式与罚函数法式 (3.18) 相同，该项使得伽辽金弱形式 (3.27) 满足正定性条件，稳定求解精度，故称之为

稳定项。$\boldsymbol{K}^v$ 和 $\boldsymbol{f}^v$ 可使伽辽金弱形式整体满足变分一致性，故称之为**修正变分项**，修正变分项的具体表达式如下：

$$\begin{aligned} K_{IJ}^v = &-\int_{\Gamma_w} \Psi_I \mathcal{V}_{\alpha\beta} \Psi_{J,\alpha\beta} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \Psi_{I,n} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \Psi_{J,\alpha\beta} d\Gamma + [[\Psi_I \mathcal{P}_{\alpha\beta} \Psi_{J,\alpha\beta}]]_{x\in c_w} \\ &- \int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \Psi_{I,\alpha\beta} \Psi_J d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \Psi_{I,\alpha\beta} \Psi_{J,n} d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \Psi_{I,\alpha\beta} \Psi_J]]_{x\in c_w} \end{aligned} \tag{3.29a}$$

$$f_I^v = -\int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \Psi_{I,\alpha\beta} \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \Psi_{I,\alpha\beta} \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}} d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \Psi_{I,\alpha\beta} \bar{w}]]_{x\in c_w} \tag{3.29b}$$

值得注意的是，Nische 法作为目前伽辽金无网格法常采用的满足变分一致性的本质边界条件施加方法，但 Nistche 法的稳定项中包含罚因子，选择不当的罚因子可能会导致数值不稳定性，同时修正变分项中需要计算无网格形函数梯度，特别是薄板问题 Nitsche 法中的修正变分项需要原本不需要计算的形函数三阶导数。形函数高阶导数计算复杂耗时，将引起计算效率的降低。

3.4 小结

本章介绍了 3 种伽辽金无网格法本质边界条件施加方法，包括拉格朗日乘子法、罚函数法和 Nitsche 法，并对这些方法的特点进行了总结。首先是拉格朗日乘子法，拉格朗日乘子法通过引入拉格朗日乘子来处理本质边界条件，满足刚度矩阵的对称性和变分一致性。然而，该方法需引入额外自由度离散拉格朗日乘子，当自由度过多时，可能导致整体刚度矩阵的奇异性增加。其次是罚函数法。罚函数法通过在变分原理中引入一个罚因子，将边界条件约束项转化为一个惩罚项，从而实现边界条件的施加。罚函数法具有简洁高效的特点，但需要选择合适的罚因子，过大或过小的罚因子都会影响计算精度的稳定性，并且该方法无法满足变分一致性。最后是 Nitsche 法，Nitsche 法是一种满足变分一致性的本质边界条件施加方法，通过结合拉格朗日乘子法和罚函数法施加边界条件，既能满足变分一致性又可保证正定性。然而，该方法引入了形函数高阶梯度导致计算效率相对较低，并且该方法中存在人工经验参数，该参数选取不当将引起计算精度下降。

第 4 章 基于 Hellinger-Reissner 变分原理求解弹性力学问题

本章针对弹性力学问题，基于 Hellinger-Reissner 变分原理提出了一种新型满足变分一致性的伽辽金无网格法。首先介绍 Hellinger-Reissner 变分原理及其所提方法的混合离散过程，其次介绍该方法的本质边界条件施加过程并与传统 Nitsche 法进行对比，最后通过典型弹性力学算例验证该方法的有效性。

4.1 Hellinger-Reissner 变分原理

Hellinger-Ressiner 变分原理[74] 是基于最小余能原理提出的，弹性力学问题强形式 (2.13) 所对应的余能泛函表达式为：

$$\Pi_C(\sigma_{ij}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\sigma_{ij}C^{-1}_{ijkl}\sigma_{kl}d\Omega - \int_{\Gamma^g}\sigma_{ij}n_jg_id\Gamma \tag{4.1}$$

式中 C^{-1}_{ijkl} 为四阶弹性张量 (2.31) 的逆。从式中可知，本质边界条件已存在能量泛函中。而外力边界条件则通过拉格朗日乘子法进行施加，包括体力项 $\boldsymbol{b}$ 和外力项 $\boldsymbol{t}$，此时 Hellinger-Reissner 的能量泛函为：

$$\Pi_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) = \Pi_C(\sigma_{ij}) + \int_\Omega u_i(\sigma_{ij,j} + b_i)d\Omega - \int_{\Gamma^t} u_i(\sigma_{ij}n_j - t_i)d\Gamma \tag{4.2}$$

需要注意的是，Π_{HR} 中包含 σ_{ij} 和 u_i 双变量。式 (4.2) 分别对 σ_{ij} 和 u_i 进行变分得到的伽辽金弱形式：

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) &= \delta\Pi_C(\sigma_{ij}) + \int_\Omega \delta\sigma_{ij,j}u_id\Omega - \int_{\Gamma^t}\delta\sigma_{ij}n_ju_id\Gamma \\ &+ \int_\Omega \delta u_i\sigma_{ij,j}d\Omega - \int_{\Gamma^t}\delta u_i\sigma_{ij}n_jd\Gamma \\ &+ \int_\Omega \delta u_ib_id\Omega + \int_{\Gamma^t}\delta u_it_id\Gamma \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.3}$$

根据变分项 $\delta\sigma_{ij}$ 和 δu_i 的任意性和几何关系式 (2.14)，可将上式改写为下面

两式：

$$\int_{\Omega}\delta\sigma_{ij}C_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl}d\Omega-\int_{\Gamma}\delta\sigma_{ij}n_ju_id\Gamma+\int_{\Omega}\delta\sigma_{ij,j}u_id\Omega+\int_{\Gamma^g}\delta\sigma_{ij}n_ju_id\Gamma=\int_{\Gamma^g}\delta\sigma_{ij}n_jg_id\Gamma \tag{4.4a}$$

$$\int_{\Gamma}\delta u_i\sigma_{ij}n_jd\Gamma-\int_{\Omega}\delta u_i\sigma_{ij,j}d\Omega-\int_{\Gamma^g}\delta u_i\sigma_{ij}n_jd\Gamma=\int_{\Gamma^t}\delta u_it_id\Gamma+\int_{\Omega}\delta u_ib_id\Omega \tag{4.4b}$$

4.2 位移-应力混合离散

Hellinger-Reissner 变分原理弱形式中的位移和应力采用混合离散的方式进行近似。首先，位移分量 u_i 通过无网格形函数 (2.10) 进行近似，近似的位移 u_i^h 可表示为：

$$u_i^h(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NP}\Psi_I(\boldsymbol{x})d_{iI} \tag{4.5}$$

其中 d_{iI} 表示与无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的节点系数。

其次，应力 σ_{ij} 在每个背景积分域内假设为 $(p-1)$ 阶多项式。在二维情况下，如图 (4.1) 所示，将求解域 Ω 划分为一系列背景积分域 Ω_C，$C=1,2,\cdots,NC$，$\cup_{C=1}^{NC}\Omega_C\approx\Omega$。在背景积分域 Ω_C 内，应力分量 σ_{ij} 的近似应力分量表达式 σ_{ij}^h 可表示为：

$$\sigma_{ij}^h(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NP}\boldsymbol{a}_{ij}^T\boldsymbol{p}^{[p-1]}(\boldsymbol{x}),\quad \text{in } \Omega_C \tag{4.6}$$

其中 $\boldsymbol{p}^{[p-1]}$ 为 $(p-1)$ 阶的单项式基向量，$\boldsymbol{a}_{ij}$ 为 $\sigma_{ij}^h(\boldsymbol{x})$ 在积分域 Ω_C 内的常系数向量。为了得到常系数向量 $\boldsymbol{a}_{ij}$ 的具体表达式，首先将式 (4.6) 和 (4.5) 代入式 (4.4a) 中可以得到：

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_C} \delta \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{p}^{[p-1]} C_{ijkl}^{-1} \boldsymbol{a}_{kl} \boldsymbol{p}^{[p-1]T} d\Omega = & \sum_{I=1}^{NP} \int_{\partial\Omega_C} \delta \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{p}^{[p-1]} n_j \Psi_I(\boldsymbol{x}) d\Gamma d_{iI} \\
& - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Omega_C} \delta \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{p}_{,j}^{[p-1]} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d\Omega d_{iI} \\
& - \sum_{I=1}^{NP} \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \delta \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{p}^{[p-1]} n_j \Psi_I(\boldsymbol{x}) d\Gamma d_{iI} \\
& + \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \delta \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{p}^{[p-1]} n_j g_i d\Gamma
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

进一步将等式两边同时消掉 $\delta \boldsymbol{a}_{ij}$ 得到：

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_C} \boldsymbol{p}^{[p-1]} C_{ijkl}^{-1} \boldsymbol{p}^{[p-1]T} d\Omega \boldsymbol{a}_{kl} = & \sum_{I=1}^{NP} \begin{pmatrix} \int_{\partial\Omega_C} \boldsymbol{p}^{[p-1]} \Psi_I(\boldsymbol{x}) n_j d\Gamma d_{iI} \\ - \int_{\Omega_C} \boldsymbol{p}_{,j}^{[p-1]} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d\Omega d_{iI} \\ - \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \boldsymbol{p}^{[p-1]} \Psi_I(\boldsymbol{x}) n_j d\Gamma d_{iI} \end{pmatrix} \\
& + \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \boldsymbol{p}^{[p-1]} n_j g_i d\Gamma
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

再对式 (4.8) 进行移项得到常系数向量 $\boldsymbol{a}_{ij}$ 的具体表达式：

$$
\boldsymbol{a}_{ij} = C_{ijkl} \boldsymbol{G}^{-1} (\sum_{I=1}^{NP} (\tilde{g}_{iI} - \bar{g}_{iI}) d_{iI} + \hat{g}_{iI})
\tag{4.9}
$$

其中

$$
\boldsymbol{G} = \int_{\Omega_C} \boldsymbol{p}^{[p-1]} \boldsymbol{p}^{[p-1]T} d\Omega
\tag{4.10a}
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI} = \int_{\partial\Omega_C} \boldsymbol{p}^{[p-1]} \Psi_I(\boldsymbol{x}) n_i d\Gamma - \int_{\Omega_C} \boldsymbol{p}_{,i}^{[p-1]} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d\Omega
\tag{4.10b}
$$

$$
\bar{\boldsymbol{g}}_{iI} = \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \boldsymbol{p}^{[p-1]} \Psi_I(\boldsymbol{x}) n_i d\Gamma
\tag{4.10c}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{g}}_{iI} = \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \boldsymbol{p}^{[p-1]} n_j g_i d\Gamma
\tag{4.10d}
$$

将常系数向量 $\boldsymbol{a}_{ij}$ 的表达式 (4.9) 代入到式 (4.6) 中，同时根据线弹性本构关系式 (2.15) 和小变形假设 (2.16) 可以得到 Hellinger-Reissner 变分原理弱形式中的近似应力分量 σ_{ij}^h，其具体表达式为：

$$
\sigma_{ij}^h(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}(\tilde{\varepsilon}_{kl}^h(\boldsymbol{x}) - \bar{\varepsilon}_{kl}^h(\boldsymbol{x})) + C_{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}^h(\boldsymbol{x})
\tag{4.11}
$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}_{ij}^{h}(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NP}\frac{1}{2}(\tilde{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x})d_{jI}+\tilde{\Psi}_{I,j}(\boldsymbol{x})d_{iI})\\ \tilde{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^{[p-1]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}\end{cases}\tag{4.12}$$

$$\begin{cases}\bar{\varepsilon}_{ij}^{h}(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NP}\frac{1}{2}(\bar{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x})d_{jI}+\bar{\Psi}_{I,j}(\boldsymbol{x})d_{iI})\\ \bar{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^{[p-1]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^{-1}\bar{\boldsymbol{g}}_{iI}\end{cases}\tag{4.13}$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{[p-1]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^{-1}(\hat{\boldsymbol{g}}_{ij}+\hat{\boldsymbol{g}}_{ji})\tag{4.14}$$

值得注意的是，式中 $\tilde{\Psi}_{I,i}$ 即为再生光滑梯度[24]。根据再生光滑梯度理论框架，可以直接通过无网格形函数显式构造再生光滑梯度，从而避免了传统无网格形函数导数的复杂计算，提高了梯度计算效率。并且再生光滑梯度内嵌局部积分约束条件 $\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}$，从而保证算法的计算精度和误差收敛性。这意味着通过构造再生光滑梯度，可以确保在进行全域积分时满足积分约束条件，从而得到准确的结果，并保证算法的计算精度和误差收敛性。反之，Hellinger-Reissner 变分原理的混合离散框架也完备了再生光滑梯度法的变分理论基础。

4.3 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法

基于 Hellinger-Reissner 变分原理得到的弱形式 (4.3) 中的积分项包括了在本质边界条件下的位移和应力的约束项，以及在自然边界条件下的外力和强制位移项。此时，通过对位移采用再生核近似，应力通过局部多项式近似的混合离散方式对 Hellinger-Reissner 变分原理的等效积分弱形式进行组装刚度矩阵。首先，将式 (4.5)、(4.6) 代入弱形式 (4.4b) 中得到：

$$\sum_{C=1}^{NC}\sum_{I=1}^{NP}\delta d_{iI}\begin{pmatrix}\int_{\partial\Omega_C}\Psi_I\boldsymbol{p}^{[p-1]T}n_j d\Gamma\\ -\int_{\Omega_C}\Psi_I\boldsymbol{p}_{,j}^{[p-1]T}d\Omega\\ -\int_{\Gamma^g\cap\partial\Omega_C}\Psi_I\boldsymbol{p}^{[p-1]T}n_j d\Gamma\end{pmatrix}\boldsymbol{a}_{ij}=\sum_{I=1}^{NP}\delta d_{iI}(\int_{\Gamma^t}\Psi_I t_i d\Gamma+\int_{\Omega}\Psi_I b_i d\Omega)\tag{4.15}$$

其次通过式 (4.10b) 和 (4.10c) 可以将式 (4.15) 改写为：

$$\sum_{C=1}^{NC}\sum_{I=1}^{NP}\delta d_{iI}(\tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^{T}-\bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^{T})\boldsymbol{a}_{ij}=\sum_{I=1}^{NP}\delta\boldsymbol{d}_I^T\boldsymbol{f}_I\tag{4.16}$$

进一步将式 (4.9) 中的 $\boldsymbol{a}_{ij}$ 代入式 (4.16) 等式左边可得到：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{C=1}^{NC}\sum_{I=1}^{NP}\delta d_{iI}(\tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^T-\bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^T)\boldsymbol{a}_{ij}\\
&=\sum_{C=1}^{NC}\sum_{I=1}^{NP}\delta d_{iI}(\tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^T-\bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^T)C_{ijkl}\boldsymbol{G}^{-1}(\sum_{J=1}^{NP}(\tilde{\boldsymbol{g}}_{kJ}-\bar{\boldsymbol{g}}_{kJ})d_{lJ}+\hat{\boldsymbol{g}}_{kl})\\
&=\sum_{C=1}^{NC}\left(\begin{aligned}
&\sum_{I=1}^{NP}\sum_{J=1}^{NP}\delta d_{iI}\underbrace{\tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^T C_{ijkl}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{kJ}}_{\boldsymbol{K}}d_{lJ}\\
&-\sum_{I=1}^{NP}\sum_{J=1}^{NP}\delta d_{iI}\underbrace{(\tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^T C_{ijkl}\boldsymbol{G}^{-1}\bar{\boldsymbol{g}}_{kJ}+\bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^T C_{ijkl}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{kJ})}_{\tilde{\boldsymbol{K}}}d_{lJ}\\
&+\sum_{I=1}^{NP}\sum_{J=1}^{NP}\delta d_{iI}\underbrace{\bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^T C_{ijkl}\boldsymbol{G}^{-1}\bar{\boldsymbol{g}}_{kJ}}_{\bar{\boldsymbol{K}}}d_{lJ}\\
&-\sum_{I=1}^{NP}\delta d_{iI}\underbrace{\tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^T C_{ijkl}\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{kl}}_{\tilde{\boldsymbol{f}}}\\
&+\sum_{I=1}^{NP}\delta d_{iI}\underbrace{\bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^T C_{ijkl}\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{kl}}_{\bar{\boldsymbol{f}}}
\end{aligned}\right)\\
&=\delta\boldsymbol{d}^T(\boldsymbol{K}+\tilde{\boldsymbol{K}}+\bar{\boldsymbol{K}})\boldsymbol{d}-\delta\boldsymbol{d}^T(\tilde{\boldsymbol{f}}+\bar{\boldsymbol{f}})
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

式中的最后一个等式通过引入式 (4.10a)-(4.13) 进行化简得到，具体详细的推导过程可参考弹性力学问题 HR 变分原理的本质边界条件施加方法推导过程。根据式 (4.16) 和 (4.17) 代入到式 (4.15) 中可得到 Hellinger-Reissner 变分原理下的弹性力学问题离散控制方程：

$$
(\boldsymbol{K}+\tilde{\boldsymbol{K}}+\bar{\boldsymbol{K}})\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}+\tilde{\boldsymbol{f}}+\bar{\boldsymbol{f}}
\tag{4.18}
$$

其中刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$、$\tilde{\boldsymbol{K}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{K}}$ 和力向量 $\boldsymbol{f}$、$\tilde{\boldsymbol{f}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{f}}$ 的具体表达式如下：

$$
\boldsymbol{K}_{IJ}=\int_\Omega\tilde{\boldsymbol{B}}_I^T\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}_J d\Omega
\tag{4.19a}
$$

$$
\boldsymbol{f}_I=\int_\Omega\Psi_I\boldsymbol{b}d\Omega+\int_{\Gamma^t}\Psi_I\boldsymbol{t}d\Gamma
\tag{4.19b}
$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_{IJ} = -\int_{\Gamma^g} \Psi_I \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{D} \tilde{\boldsymbol{B}}_J d\Gamma - \int_{\Gamma^g} \bar{\boldsymbol{B}}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{N} \Psi_J d\Gamma \tag{4.20a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_I = -\int_{\Gamma^g} \tilde{\boldsymbol{B}}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{N} \boldsymbol{g} d\Gamma \tag{4.20b}$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{IJ} = \int_{\Gamma^g} \bar{\boldsymbol{B}}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{N} \Psi_J d\Gamma \tag{4.21a}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}_I = \int_{\Gamma^g} \bar{\boldsymbol{B}}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{N} \boldsymbol{g} d\Gamma \tag{4.21b}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{B}}_I$ 和 $\bar{\boldsymbol{B}}_I$ 分别由再生光滑梯度 $\tilde{\Psi}_{I,i}$ 和 $\bar{\Psi}_{I,i}$ 组成的梯度矩阵，在弹性力学问题中，$\tilde{\boldsymbol{B}}_I$、$\bar{\boldsymbol{B}}_I$ 具有如下表达式：

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_I(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{I,x}(\boldsymbol{x}) & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_{I,y}(\boldsymbol{x}) \\ \tilde{\Psi}_{I,y}(\boldsymbol{x}) & \tilde{\Psi}_{I,x}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{B}}_I(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{I,x}(\boldsymbol{x}) & 0 \\ 0 & \bar{\Psi}_{I,y}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{\Psi}_{I,y}(\boldsymbol{x}) & \bar{\Psi}_{I,x}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$\boldsymbol{N}$ 为法向量矩阵，其表达式为：

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 0 & n_x \\ n_y & 0 \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

值得注意的是，Hellinger-Reissner 变分原理离散控制方程式 (4.20) 中的修正变分项 $\tilde{\boldsymbol{K}}$、$\tilde{\boldsymbol{f}}$ 和弹性力学问题 Nitsche 法 (3.22) 中的修正变分项 $\boldsymbol{K}^v$、$\boldsymbol{f}^v$ 具有相类似的表达式，同样都是为了满足变分一致性，但在 Hellinger-Reissner 变分原理离散平衡过程中，用再生光滑梯度 $\tilde{\Psi}_I$ 替代 Nitsche 法中的传统无网格形函数梯度 $\boldsymbol{B}_I$，从而无需计算复杂耗时的无网格形函数梯度，相较于传统的 Nistche 法能够有效的提高计算效率。更重要的是，Hellinger-Reissner 变分原理离散控制方程式 (4.21) 中的稳定项 $\bar{\boldsymbol{K}}$、$\bar{\boldsymbol{f}}$ 和传统的 Nitshche 法 (3.14) 中的稳定项 $\boldsymbol{K}^s$、$\boldsymbol{f}^s$ 相比，无需引入罚函数项来满足正定性，不会因为人工参数的存在继而影响计算精度。

4.4 优化的数值积分方案

根据 Hellinger-Reissner 变分原理在求解数值问题过程中是有一套优化过后的数值积分方案[24]，该数值积分方案是通过两个原则来优化的：(1) 通过

优化全局数值积分采样点总数确定局部背景积分域内积分采样点的数量；(2) 通过满足变分一致性确定数值积分采样点位置和权重。如图 (4.1) 所示，基于 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法需要两套数值积分点，$\tilde{\boldsymbol{g}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 需要与 $\tilde{\boldsymbol{K}}$，$\bar{\boldsymbol{K}}$，$\boldsymbol{f}$，$\tilde{\boldsymbol{f}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{f}}$ 采用相同的一套数值积分点，式 (4.10a) 中的 $\boldsymbol{G}$ 和式 (4.18) 中 $\boldsymbol{K}$ 采用相同的数值积分方案。

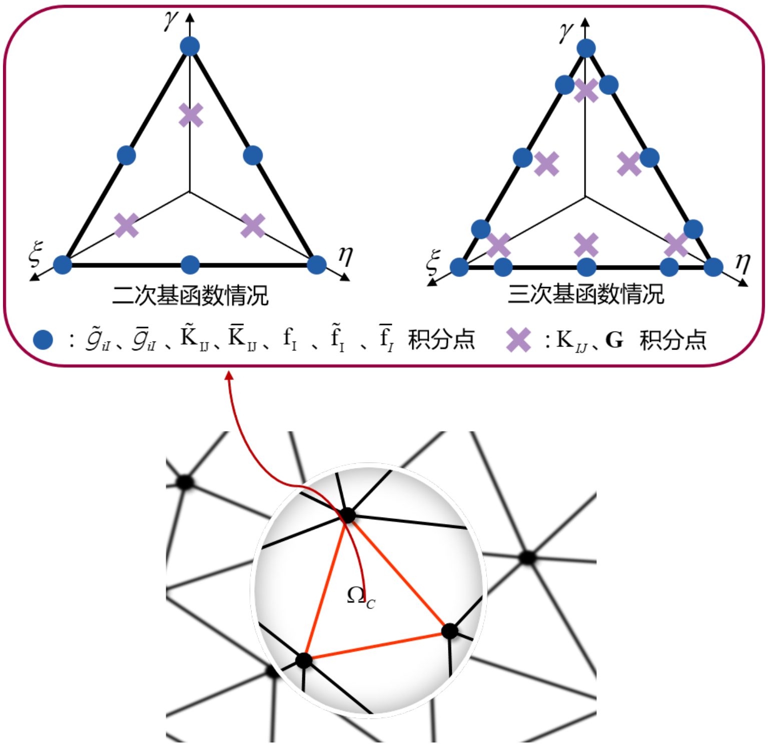

图 4.1　优化的数值积分方案

基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法中，再生光滑梯度的构造过程需要计算积分点处的无网格形函数，此时为了减少形函数的计算量提高计算效率，采用无网格再生核光滑梯度积分法。无网格再生核光滑梯度积分法利用积分点在背景积分单元间的共享特性，优化整体求解数值过程中积分点的数量，从而提高计算效率。再生核光滑梯度积分法通过在背景积分单元上选择合适的积分点分布，使得积分点在不同单元之间共享，减少需要计算的积分点数量，进而保证计算精度的前提下进一步提高计算效率，具体的数值积分方案见无网格法优化的数值积分方案。

4.5 数值算例

4.5.1 分片实验

首先采用线性、二次和三次弹性力学分片实验验证采用传统高斯积分法和再生光滑梯度积分法的不同本质边界条件施加方法下是否满足积分约束条件的情况。分片实验考虑求解域为边长等于 1 的正方形，求解域的四边施加本质边界条件。其分片实验的精确解如下：

$$\begin{cases} u_x(x,y) = (1+2x+3y)^n \\ u_y(x,y) = (4+5x+6y)^n \end{cases} \tag{4.24}$$

其中，$n=1,2,3$ 表示线性、二次和三次分片实验。如图 (4.2) 所示，分片实验采用 11×11 的非均匀节点离散求解域。针对二次基函数的无网格近似，采用线性和二次分片实验进行测试，核函数相对影响域在二次基函数情况下为 2.5；三次基函数的无网格近似采用二次和三次分片实验进行测试，核函数相对影响域在三次基函数情况下为 3.5。

分别采用位移误差 L_2-Error 和能量误差 H_1-Error 详细对比所提方法的计算精度

$$L_2\text{-Error} = \sqrt{\int_\Omega (u_i - u_i^h)(u_i - u_i^h) d\Omega} \tag{4.25}$$

$$H_1\text{-Error} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_\Omega (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^h) C_{ijkl}^{-1} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^h) d\Omega} \tag{4.26}$$

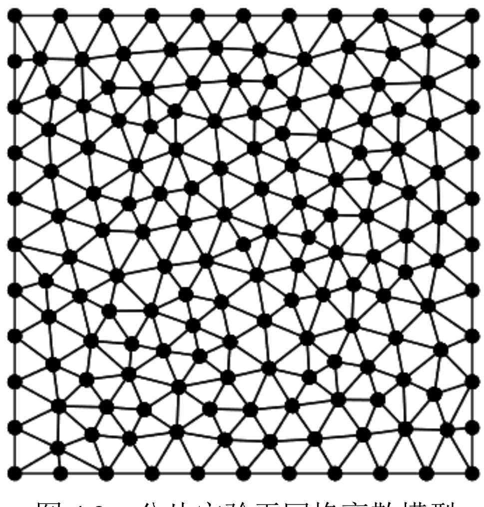

图 4.2　分片实验无网格离散模型

在数值结果中，“GI”表示采用的是传统高斯积分法，“RKGSI”表示采用的是再生光滑梯度积分法。“Penalty”、“LM”和“Nitsche”分别表示罚函数法、拉格朗日乘子法和 Nitsche 法三种常见的本质边界条件施加方法。“RKGSI-HR”则表示的是本章提出的基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法。

在数值求解过程中，为了保证拉格朗日乘子法的稳定性，拉格朗日乘子统一采用线性有限元形函数进行离散。针对二次基函数的求解，高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 13 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 3 点高斯积分；针对三次基函数的求解，高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 16 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 5 点高斯积分。二次和三次基函数的无网格法分片试验结果如下：

表 4.1　二次基函数无网格法分片实验结果

	线性分片实验		二次分片实验	
	L_2-Error	H_1-Error	L_2-Error	H_1-Error
GI-Penalty	7.7×10^{-6}	2.7×10^{-4}	1.2×10^{-5}	2.6×10^{-4}
GI-LM	1.0×10^{-4}	4.7×10^{-3}	1.5×10^{-4}	4.3×10^{-3}
GI-Nitsche	8.1×10^{-6}	2.8×10^{-4}	1.3×10^{-5}	2.8×10^{-4}
RKGSI-Penalty	7.9×10^{-8}	2.0×10^{-6}	1.4×10^{-7}	2.1×10^{-6}
RKGSI-LM	8.6×10^{-5}	4.0×10^{-3}	1.4×10^{-4}	3.7×10^{-3}
RKGSI-Nitsche	2.1×10^{-15}	4.0×10^{-14}	2.2×10^{-15}	2.7×10^{-14}
RKGSI-HR	2.0×10^{-15}	3.2×10^{-14}	2.2×10^{-15}	2.1×10^{-14}

表 4.2　三次基函数无网格法分片实验结果

	二次分片实验		三次分片实验	
	L_2-Error	H_1-Error	L_2-Error	H_1-Error
GI-Penalty	9.1×10^{-6}	2.1×10^{-4}	1.2×10^{-5}	2.0×10^{-4}
GI-LM	2.9×10^{-4}	9.3×10^{-3}	4.0×10^{-4}	9.3×10^{-3}
GI-Nitsche	1.1×10^{-5}	2.8×10^{-4}	1.4×10^{-5}	2.7×10^{-4}
RKGSI-Penalty	1.4×10^{-7}	2.1×10^{-6}	2.0×10^{-7}	2.7×10^{-6}
RKGSI-LM	3.0×10^{-4}	9.8×10^{-3}	4.2×10^{-4}	9.8×10^{-3}
RKGSI-Nitsche	3.6×10^{-15}	1.0×10^{-13}	4.6×10^{-15}	9.5×10^{-14}
RKGSI-HR	3.1×10^{-15}	1.0×10^{-13}	3.5×10^{-15}	7.4×10^{-14}

表 3.3 和表 3.4 分别为具有二次、三次基函数无网格法的分片试验结果，从表中可以看出，由于传统高斯积分法不满足积分约束条件，所以即使采用高阶高斯积分的罚函数法“GI-Penalty”、拉格朗日乘子法“GI-LM”和 Nitsche 法“GI-Nitsche”均不能通过分片试验。当采用满足积分约束条件的再生光滑梯度积分法时，此时由于罚函数法“RKGSI-Penalty”不具有变分一致性，也无法通过分片试验；拉格朗日乘子法“RKGSI-LM”由于其拉格朗日乘子采用线性形函数

进行离散，无法与再生光滑梯度相匹配，也无法通过分片试验；当采用 Nitsche 法“RKGSI-Nitsche”和基于 Hellinger-Reissner 变分原理“RKGSI-HR”的本质边界条件施加方法时，均可以通过分片试验，即满足积分约束条件。

4.5.2 悬臂梁问题

首先考虑经典弹性力学二维悬臂梁问题，如图 (4.3) 所示，悬臂梁的长和宽分别为 $L = 48$，$D = 12$，同时悬臂梁的左端为固定支座，右端沿着 y 轴正方向施加外部荷载 $P = 1000$。悬臂梁的材料系数为杨氏模量 $E = 3 \times 10^6$、泊松比 $\nu = 0.3$。根据圣维南原理和平面应力假设，悬臂梁问题的解析解为：

$$\begin{cases} u = -\frac{Py}{6EI}[(6L-3x)x + (2+\nu)(y^2 - \frac{D^2}{4})] \\ v = \frac{P}{6EI}[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu)\frac{D^2x}{4} + (3L-x)x^2] \end{cases} \tag{4.27}$$

与之相对应的应力分量为：

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{P(L-x)y}{I} \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = \frac{P}{2I}(\frac{D^2}{4} - y^2) \end{cases} \tag{4.28}$$

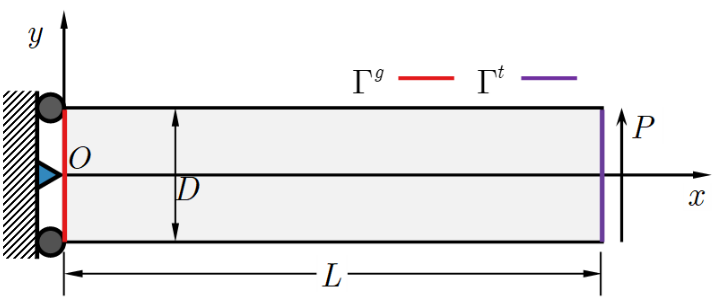

图 4.3　悬臂梁问题模型

如图 (4.3) 所示，悬臂梁的左端施加自然边界条件 Γ^t，右端施加本质边界条件 Γ^g。悬臂梁求解域分别通过图 (4.4) 所示采用四个疏密不同的节点进行离散。对于采用二次基函数的悬臂梁算例问题，传统高斯积分法采用 13 点高斯积分，核函数的相对影响域为 2.5。

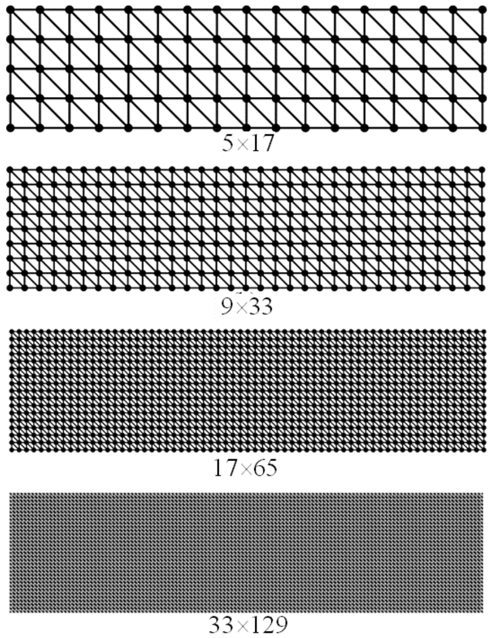

图 4.4　悬臂梁问题节点模型

图 (4.5) 为悬臂梁问题的位移误差和能量误差对比图。从图中可以看出采用再生光滑梯度积分法“RKGSI”的本质边界条件施加方法的计算精度优于采用高斯积分法“GI”的本质条件施加方法，并且由于传统高斯积分法和采用再生光滑梯度积分法的罚函数法“RKGSI-Penalty”和拉格朗日乘子法“RKGSI-LM”不具有变分一致性，无法达到理论误差收敛率，而基于 Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法“RKGSI-HR”和 Nitshce 法“RKGSI-Nitsche”均可达到理论误差收敛率，但相较于“RKGSI-Nitsche”法，所提出的“RKGSI-HR”法无需引入人工参数。

图 (4.6a) 为悬臂梁问题的节点数和计算时间的效率对比和本质边界条件施加效率对比图。从整体来看采用再生光滑梯度积分法“RKGSI”的计算效率明显高于传统高斯积分法“GI”。图 (4.6b) 为悬臂梁问题的本质边界条件施加效率分析图。该图为施加本质边界 Γ^g 过程中计算形函数及梯度和组装相对应的刚度矩阵和力向量所用时间对比图。从图中可以看出，罚函数法和拉格朗日乘子法在计算形函数及其梯度所用的时间相同且所用时间最少，这是由于罚函数法和拉格朗日乘子法在计算过程中只需要计算无网格形函数本身，无需计算无网格形函数梯度，而“RKGSI-HR”法也无需计算无网格形函数梯度，但需要计算再生光滑梯度，“RKGSI-Nitsche”法这部分所用的时间是罚函数法和拉格

朗日乘子法的 5.6 倍，而“RKGSI-HR”法是 1.6 倍，“RKGSI-HR”法的计算效率高于“RKGSI-Nitsche”法。组装相应的刚度矩阵和力向量这部分所用的时间上，“RKGSI-Nitsche”法和“RKGSI-HR”法计算效率基本相同。从整体上来看，拉格朗日乘子法和罚函数法的效率优于“HR”法和“Nitsche”法，但拉格朗日乘子法和罚函数法不具有变分一致性无法达到理论误差收敛率。因此，总体来说，相较于传统的本质边界条件施加方法，基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法“RKGSI-HR”能够达到理论误差收敛率，有效提高计算精度，相较于“RKGSI-Nitsche”法而言计算效率也更高。

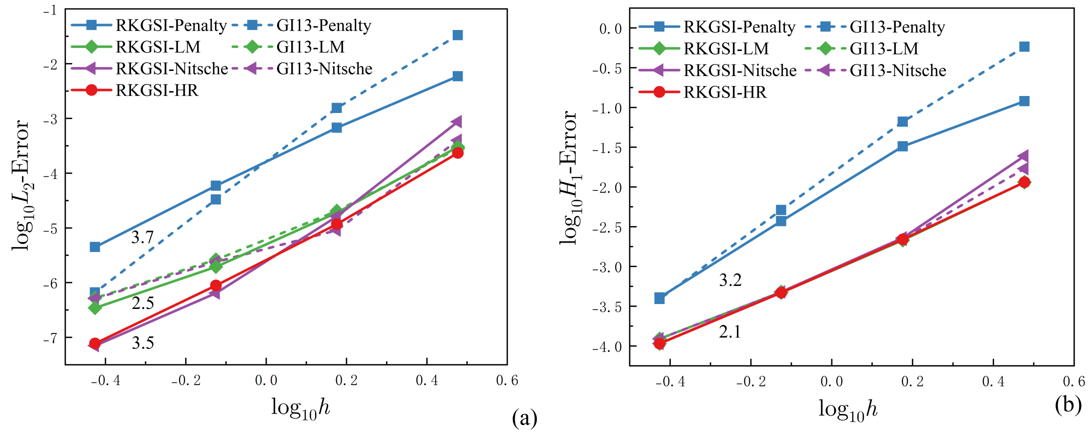

图 4.5　悬臂梁问题误差对比：(a) L_2 误差；(b) H_1 误差

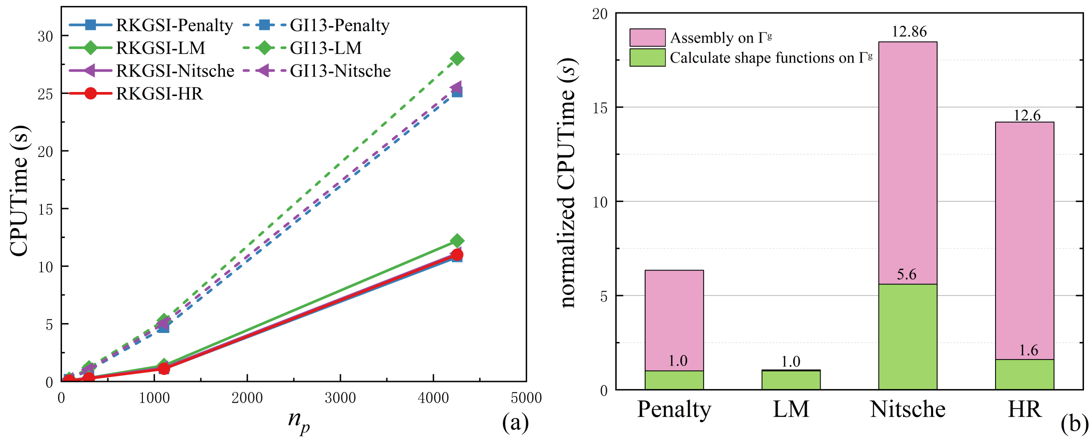

图 4.6　悬臂梁问题效率对比：(a) 计算时间与节点数的关系；(b) 边界条件施加效率分析

4.5.3　带孔无限大平板问题

考虑经典的带孔无限大平板问题，如图 (4.7) 所示，板的的中心存在一半径为 $a = 1$ 的圆形小孔，同时平板的无穷远处沿 x 轴方向施加均布荷载 $T = 1000$。

板的材料系数为杨氏模量 $E = 3 \times 10^6$、泊松比 $\nu = 0.3$。根据 Michell 解可以得到该带孔无限大平板问题的解析解为：

$$\begin{cases} u_x(r,\theta) = \frac{Ta}{8\mu}(\frac{r}{a}(k+1)cos\theta - \frac{2a^3}{r^3}cos3\theta + \frac{2a}{r}((1+k)cos\theta + cos3\theta)) \\ u_y(r,\theta) = \frac{Ta}{8\mu}(\frac{r}{a}(k-3)sin\theta - \frac{2a^3}{r^3}sin3\theta + \frac{2a}{r}((1-k)sin\theta + sin3\theta)) \end{cases} \tag{4.29}$$

其中，k 和 μ 分别为：

$$k = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad , \ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.30}$$

与之相对应的应力分量为：

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = T(1 - \frac{a^2}{r^2}(\frac{3}{2}cos2\theta + cos4\theta) + \frac{3a^4}{2r^4}cos4\theta) \\ \sigma_{yy} = -T(\frac{a^2}{r^2}(\frac{1}{2}cos2\theta - cos4\theta) + \frac{3a^4}{2r^4}cos4\theta) \\ \sigma_{xy} = -T(\frac{a^2}{r^2}(\frac{1}{2}sin2\theta + sin4\theta) - \frac{3a^4}{2r^4}sin4\theta) \end{cases} \tag{4.31}$$

如图 (4.7) 所示，根据带孔无限大平板的对称性，取边长 $b = 5$ 的四分之一的方形域作为研究对象。方形域的上端和右端以及圆孔的边界施加自然边界条件 Γ^t，而方形域的左端和下端约束法向位移，施加本质边界条件 Γ^g。

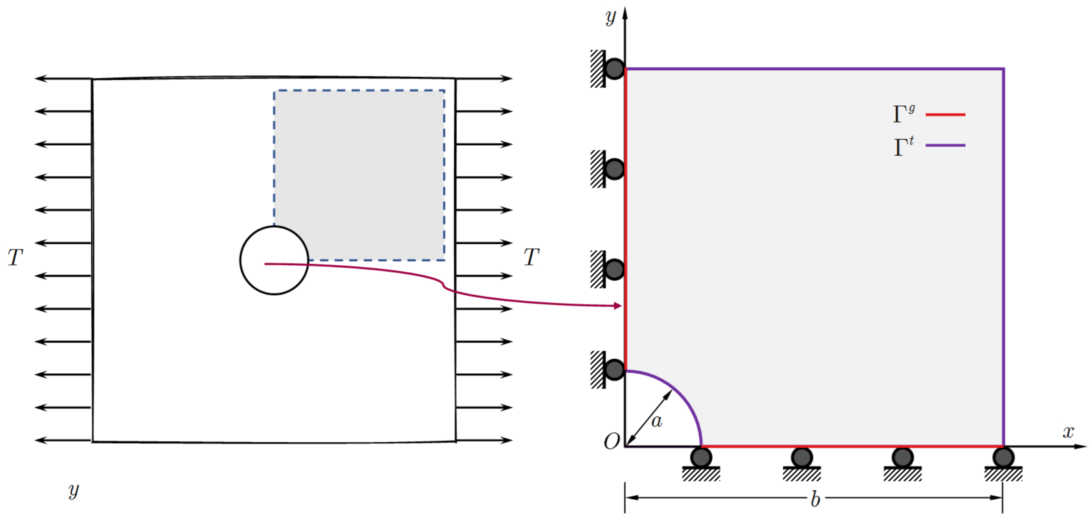

图 4.7　带孔无限大平板问题模型

该求解域分别通过图 (4.8) 所示采用的四个疏密不同的节点进行离散。对于采用三次基函数的带孔无限大平板算例问题，传统高斯积分法采用 16 点高斯积分，核函数的相对影响域为 3.5。

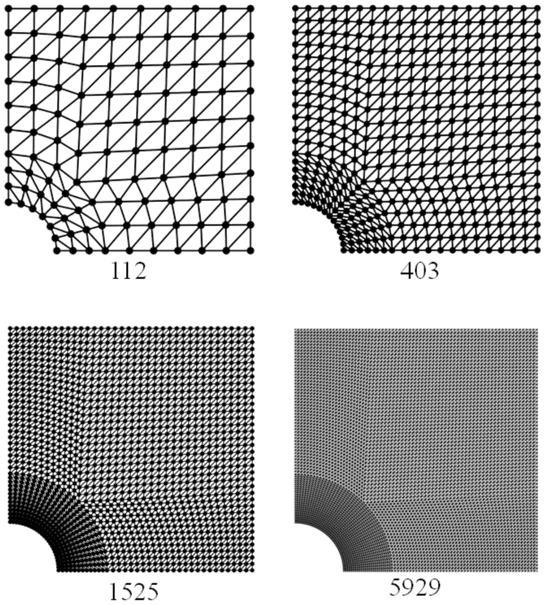

图 4.8　带孔无限大平板问题无网格离散

图 (4.9) 为带孔无限大平板问题的位移和能量误差对比图。从图中可以看出传统高斯积分法由于不具有变分一致性，导致“GI-Penalty”法、“GI-LM”法、“GI-Nitsche”法均无法达到理论误差收敛率。基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法“RKGSI-HR”和“RKGSI-Nitsche”法满足变分一致性能够达到理论误差收敛率。虽然“RKGSI-LM”法无法通过分片实验不满足变分一致性，但由于拉格朗日乘子法具有较高的精度也能达到理论误差收敛率。图 (4.10a)、(4.10b) 为带孔无限大平板问题的效率对比图。从图中可以看出随着无网格节点数的增加，采用再生光滑梯度积分法“RKGSI”的效率明显高于传统高斯积分法“GI”, 在施加本质边界条件的过程中，“HR”法不仅满足变分一致性同时计算效率还高于传统的“Nitsche”法。最后，图 (4.11) 为带孔无限大平板问题的应力云图，从图中可以看出“RKGSI-Penalty”法和精确解之间是有差异的，而“RKGSI-Nitsche”法和“RKGSI-HR”法是和精确解几乎相同。但“Nitsche”法是需要依靠人工经验参数并且计算效率也低于“HR”法。

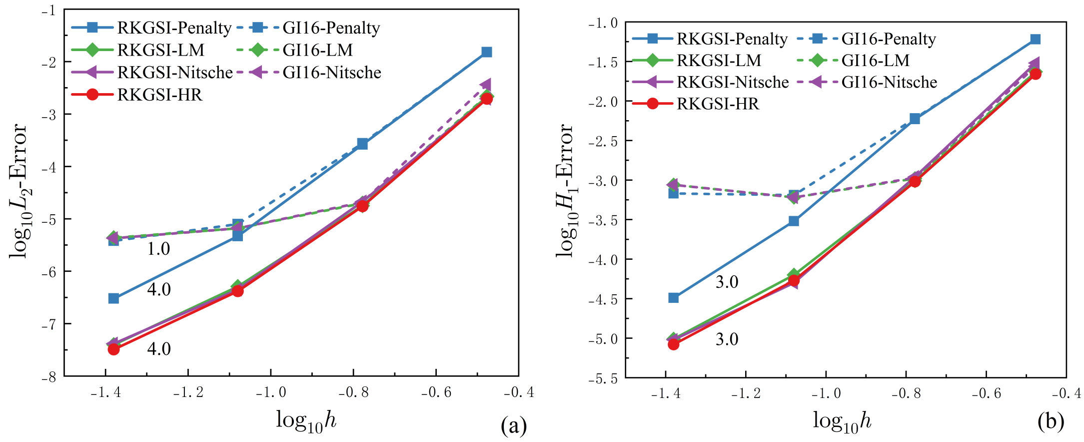

图 4.9　带孔无限大平板问题误差对比：(a) L_2 误差；(b) H_1 误差

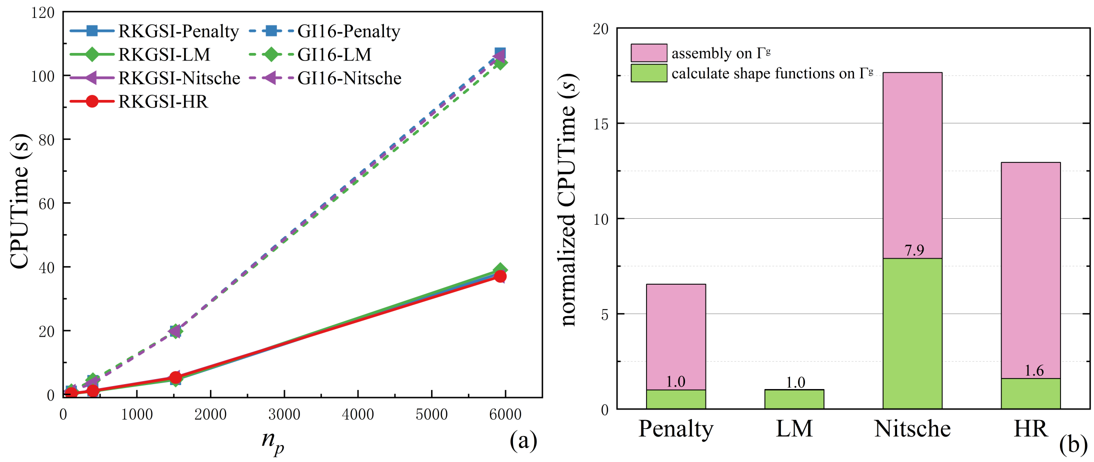

图 4.10　带孔无限大平板问题效率对比：(a) 计算时间与节点数的关系；(b) 边界条件施加效率分析

4.6　小结

本章介绍了一种基于 Hellinger-Reissner 变分原理的变分一致性本质边界条件施加方法，用于求解弹性力学问题。该方法通过采用混合离散近似 Hellinger-Reissner 变分原理弱形式中的位移和应力，实现了满足积分约束条件的一种本质边界条件施加方法。具体来说，该方法在离散平衡方程中，采用传统无网格形函数对位移进行离散，而将应力在每个背景积分域上近似为对应阶次的多项式。在 Hellinger-Reissner 变分原理的框架下，该方法的离散平衡方程具有类似传统 Nitsche 法的格式，可以视为再生光滑梯度积分法的一种新型 Nitsche 法。相较于传统 Nitsche 法，该方法的修正变分项采用了无网格形函数和再生光滑梯度的

混合离散，从而在确保变分一致性的同时避免了复杂且耗时的形函数导数计算，明显提高了计算效率。与此同时该方法中的稳定项直接源于 Hellinger-Reissner 变分原理的弱形式，无需额外增加稳定项，并且稳定项中不包含任何人工参数。这有效消除了传统 Nitsche 法中人工参数依赖性的问题。之后进一步通过典型算例的系统验证所提方法基于 Hellinger-Reissner 变分原理施加本质边界条件的变分一致性、计算精度和计算效率。结果表明，该方法在保持变分一致性的同时，能够提供较高的计算精度，并且相比传统 Nitsche 法也有效的提高了计算效率。

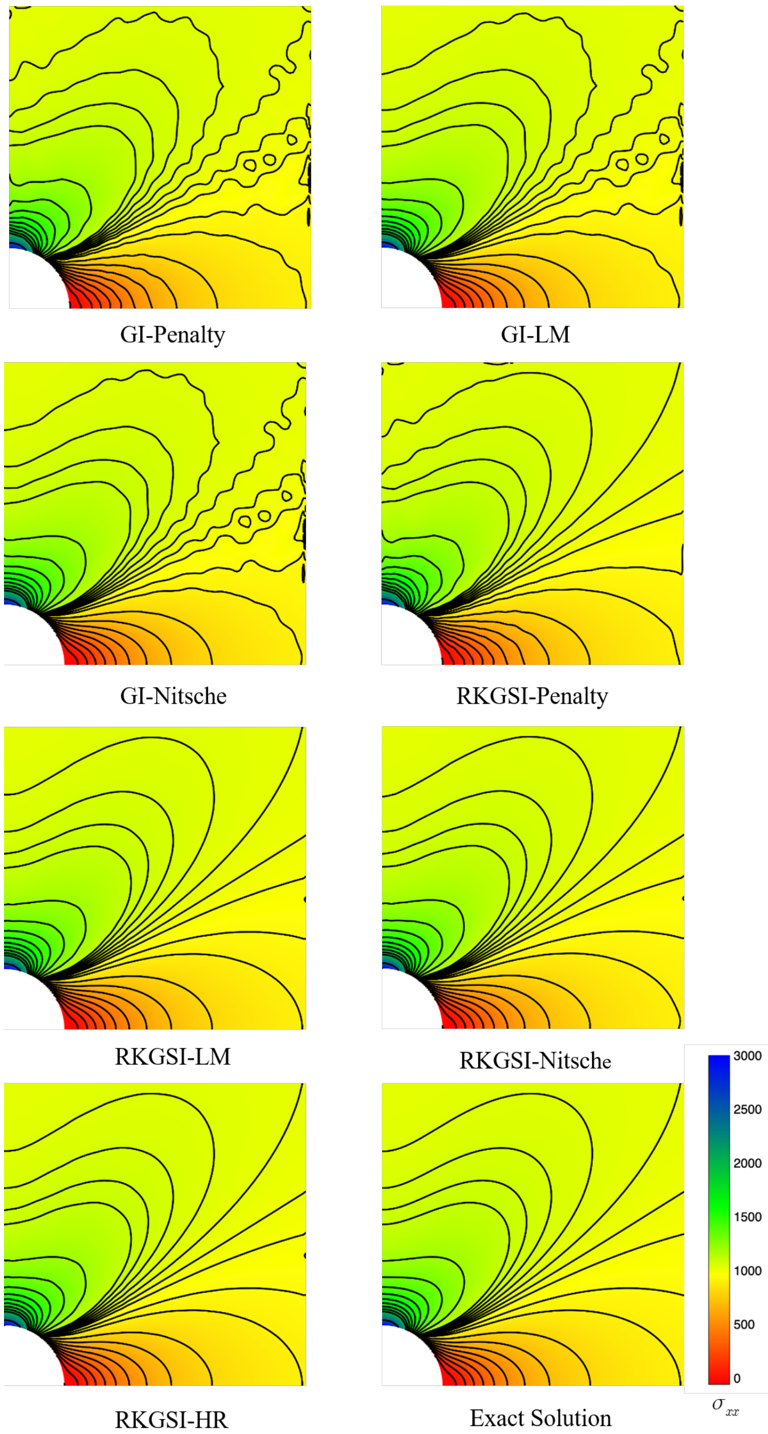

图 4.11　带孔无限大平板问题 σ_{xx} 应力云图

第 5 章 基于 Hellinger-Reissner 变分原理求解薄板问题

本章进一步针对薄板问题，基于 Hellinger-Reissner 变分原理提出了一种满足变分一致性的伽辽金无网格法。首先介绍了薄板问题时 Hellinger-Reissner 变分原理及其所提方法的混合离散过程，其次介绍该方法的本质边界条件施加过程并与传统 Nitsche 法进行对比，最后通过薄板算例验证该方法的变分一致性、计算精度和计算效率

5.1 Hellinger-Reissner 变分原理

根据最小余能原理，薄板问题强形式 (2.26) 所对应的余能泛函表达式为：

$$\Pi_C(M_{\alpha\beta}) = \int_\Omega \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} C^{-1}_{\alpha\beta\gamma\eta} M_{\gamma\eta} d\Omega - \int_{\Gamma_w} V_{\boldsymbol{n}} \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} M_{\boldsymbol{nn}} \bar{\theta}_n d\Gamma - p\bar{w}|_{x\in c_w} \tag{5.1}$$

与弹性力学问题类似，薄板问题的 Hellinger-Reissner 变分原理余能泛函具有挠度和弯矩两个变量，四阶薄板问题控制方程式 (2.26) 对应的余能泛函表达式为：

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}(M_{\alpha\beta}, w) = \Pi_C(M_{\alpha\beta}) &+ \int_\Omega w(M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q}) d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_M} w_{,\boldsymbol{n}}(M_{\boldsymbol{nn}} - \bar{M}_{\boldsymbol{nn}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_V} w(V_{\boldsymbol{n}} - \bar{V}_{\boldsymbol{n}}) d\Gamma - w(P - \bar{P})|_{x\in c_P}\end{aligned} \tag{5.2}$$

式 (5.2) 分别对 $M_{\alpha\beta}$ 和 w 进行变分得到薄板问题 Hellinger-Reissner 变分原理的伽辽金弱形式：

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HR}(M_{\alpha\beta,w}) =& \delta\Pi_C(M_{\alpha\beta}) \\ &+ \int_\Omega \delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta} w d\Omega + \int_{\Gamma_M} \delta M_{\boldsymbol{nn}} w_{,\boldsymbol{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_V} \delta V_{\boldsymbol{n}} w d\Gamma - \delta P w|_{x\in c_P} \\ &+ \int_\Omega \delta w(M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{q}) d\Omega + \int_{\Gamma_M} \delta w_{,n}(M_{nn} - \bar{M}_{nn}) d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_V} \delta w(V_{\boldsymbol{n}} - \bar{V}_{\boldsymbol{n}}) d\Gamma - \delta w(P - \bar{P})|_{x\in c_P} \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.3}$$

根据变分项 $\delta M_{\alpha\beta}$ 和 δw 的任意性和几何关系式 (2.28) 进一步将上式改写为以下两式：

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\delta M_{\alpha\beta}D^{-1}_{\alpha\beta\gamma\eta}M_{\gamma\eta}d\Omega=&\int_{\Gamma}\delta V_{\mathbf{n}}wd\Gamma-\int_{\Gamma}\delta M_{\mathbf{nn}}w_{,\mathbf{n}}d\Gamma+\delta Pw|_{\mathbf{x}\in c}-\int_{\Omega}\delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta}wd\Omega\\&-\int_{\Gamma_w}\delta V_{\mathbf{n}}wd\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}\delta M_{\mathbf{nn}}w_{,\mathbf{n}}d\Gamma-\delta Pw|_{\mathbf{x}\in c_w}\\&+\int_{\Gamma_w}\delta V_{\mathbf{n}}\bar{w}d\Gamma-\int_{\Gamma_\theta}\delta M_{\mathbf{nn}}\bar{\theta}_{\mathbf{n}}d\Gamma+\delta P\bar{w}|_{\mathbf{x}\in c_w}\end{aligned}\tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma}\delta wV_{\mathbf{n}}d\Gamma-\int_{\Gamma}\delta w_{,\mathbf{n}}M_{\mathbf{nn}}d\Gamma+\delta wP|_{\mathbf{x}\in c}-\int_{\Omega}\delta wM_{\alpha\beta,\alpha\beta}d\Omega\\&-\int_{\Gamma_w}\delta wV_{\mathbf{n}}d\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}\delta w_{,\mathbf{n}}M_{\mathbf{nn}}d\Gamma-\delta wP|_{\mathbf{x}\in c_w}\\&=\int_{\Gamma_V}\delta w\bar{V}_{\mathbf{n}}d\Gamma-\int_{\Gamma_M}\delta w_{,\mathbf{n}}\bar{M}_{\mathbf{nn}}d\Gamma+\delta w\bar{P}|_{\mathbf{x}\in c_P}+\int_{\Omega}\delta w\bar{q}d\Omega\end{aligned}\tag{5.5}$$

5.2 挠度-弯矩混合离散

Hellinger-Reissner 变分原理薄板弱形式中的挠度和弯矩采用混合离散进行近似。首先，薄板挠度 w 采用无网格形函数 (2.10) 进行近似离散，近似的挠度 w^h 表达式可表示为：

$$w^h(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{NP}\Psi_I(\boldsymbol{x})d_I\tag{5.6}$$

其中 d_I 表示与无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的节点系数。

其次，弯矩分量 $M_{\alpha\beta}$ 在每个背景积分域内假设为 $(p-2)$ 阶多项式。如图 (5.1) 所示，将薄板中面 Ω 划分为一系列背景积分域 $\Omega_C, C=1,2,\cdots,n_C$，并且存在 $\cup_{C=1}^{NC}\Omega_C\approx\Omega$。在背景积分单元 Ω_C 内，假定弯矩分量 $M_{\alpha\beta}$ 为多项式，近似的弯矩分量 $M^h_{\alpha\beta}$：

$$M^h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}^T_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}(\boldsymbol{x})\tag{5.7}$$

其中 $\boldsymbol{p}^{[p-2]}(\boldsymbol{x})$ 是 $(p-2)$ 阶的单项式向量，$\boldsymbol{a}_{\alpha\beta}$ 为弯矩分量 $M_{\alpha\beta}$ 在积分域 Ω_C 内的常系数向量。此时将离散的弯矩分量表达式 (5.7) 代入式 (5.4) 同时根据式 (3.25)

和线弹性本构关系式 (2.29) 可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{a}_{\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\boldsymbol{a}_{\gamma\eta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}d\Omega= \\
&-\int_{\Gamma}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\delta\boldsymbol{a}_{,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}wd\Gamma+\int_{\Gamma}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\delta\boldsymbol{a}_{,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}w_{,\boldsymbol{n}}d\Gamma \\
&-D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{P}_{\alpha\beta}\delta\boldsymbol{a}_{,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}w|_{x\in c}-\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{a}_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}wd\Omega \\
&+\int_{\Gamma_{w}}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\delta\boldsymbol{a}_{,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}d\Gamma-\int_{\Gamma_{\theta}}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\delta\boldsymbol{a}_{,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}w_{,\boldsymbol{n}}d\Gamma \\
&+D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{P}_{\alpha\beta}\delta\boldsymbol{a}_{,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}wx|_{x\in c_{w}}-\int_{\Gamma_{w}}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\delta\boldsymbol{a}_{,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}\bar{w}d\Gamma \\
&+\int_{\Gamma_{\theta}}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\delta\boldsymbol{a}_{,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{P}_{\alpha\beta}\delta\boldsymbol{a}_{,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}\bar{w}|_{x\in c_{w}}
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

进一步将等式两边同时消去 $\delta\boldsymbol{a}_{\alpha\beta}^{T}$ 得到：

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\boldsymbol{p}^{[p-2]}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\boldsymbol{a}_{\gamma\eta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}d\Omega= \\
&-\int_{\Gamma}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}wd\Gamma+\int_{\Gamma}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}w_{,\boldsymbol{n}}d\Gamma \\
&-D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{P}_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}w|_{x\in c}-\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{a}_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{T}\boldsymbol{p}^{[p-2]}wd\Omega \\
&+\int_{\Gamma_{w}}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}d\Gamma-\int_{\Gamma_{\theta}}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}w_{,\boldsymbol{n}}d\Gamma \\
&+D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{P}_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}wx|_{x\in c_{w}}-\int_{\Gamma_{w}}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}\bar{w}d\Gamma \\
&+\int_{\Gamma_{\theta}}D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-D_{\alpha\beta\gamma\eta}^{-1}\mathcal{P}_{\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}\bar{w}|_{x\in c_{w}}
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

对上式进行移项可以得到常系数向量 $\boldsymbol{a}_{\alpha\beta}$ 的具体表达式：

$$
\boldsymbol{a}_{\gamma\eta}=-D_{\alpha\beta\gamma\eta}\boldsymbol{G}^{-1}(\sum_{I=1}^{NP}(\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}-\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I})d_{I}+\hat{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta})
\tag{5.10}
$$

其中

$$\boldsymbol{G} = \int_{\Omega_C} \boldsymbol{p}^{[p-2]}\boldsymbol{p}^{[p-2]T} d\Omega \tag{5.11a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I} = &\int_{\Gamma_C} \Psi_{I,n}\boldsymbol{p}^{[p-2]} n_\alpha n_\beta d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Psi_I (n_\alpha \boldsymbol{p}^{[p-2]}_{,\beta} + \boldsymbol{p}^{[p-2]}_{,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma) d\Gamma \\ &+ [[\Psi_I \boldsymbol{p}^{[p-2]} n_\alpha s_\beta]]|_{x\in c_C} + \int_{\Omega_C} \Psi_I \boldsymbol{p}^{[p-2]}_{,\alpha\beta} d\Omega\end{aligned} \tag{5.11b}$$

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I} = &\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C} \Psi_{I,n}\boldsymbol{p}^{[p-2]} n_\alpha n_\beta d\Gamma - \int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C} \Psi_I (n_\alpha \boldsymbol{p}^{[p-2]}_{,\beta} + \boldsymbol{p}^{[p-2]}_{,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma) d\Gamma \\ &+ [[\Psi_I \boldsymbol{p}^{[p-2]} n_\alpha s_\beta]]|_{x\in c_w\cap c_C}\end{aligned} \tag{5.11c}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I} = &\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C} \boldsymbol{p}^{[p-2]} n_\alpha n_\beta \bar{\theta}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C} (n_\alpha \boldsymbol{p}^{[p-2]}_{,\beta} + \boldsymbol{p}^{[p-2]}_{,\gamma} s_\alpha n_\beta s_\gamma) \bar{w} d\Gamma \\ &+ [[\bar{w}\boldsymbol{p}^{[p-2]} n_\alpha s_\beta]]|_{x\in c_w\cap c_C}\end{aligned} \tag{5.11d}$$

式中 Γ_C 是 Ω_C 的边界，此时将 $\boldsymbol{a}_{\alpha\beta}$ 代入到式 (5.7) 中得到近似的弯矩分量 $M^h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})$ 的表达式：

$$\begin{aligned}M^h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{p}^{[p-2]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_{\alpha\beta} \\ &= -D_{\alpha\beta\gamma\eta}(\sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{p}^{[p-2]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta I} - \boldsymbol{p}^{[p-2]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^{-1}\bar{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta I})d_I + \boldsymbol{p}^{[p-2]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta}) \\ &= -D_{\alpha\beta\gamma\eta}(\sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,\gamma\eta}(\boldsymbol{x})d_I - \sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,\gamma\eta}(\boldsymbol{x})d_I + \boldsymbol{p}^{[p-2]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta})\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中

$$\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} = \boldsymbol{p}^{[p-2]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I} \tag{5.13}$$

$$\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} = \boldsymbol{p}^{[p-2]T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^{-1}\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I} \tag{5.14}$$

此时，弯矩分量表达式中的 $\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}$ 是根据再生光滑梯度理论[24] 构造的二阶再生光滑梯度。根据再生光滑梯度理论框架，直接通过无网格形函数显式构造再生光滑梯度，可以避免传统无网格形函数梯度的复杂计算从而提高梯度计算效率。$\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}$ 是指在薄板问题中由再生光滑梯度法内嵌的局部积分约束条件，在求解高阶薄板问题时可以保证算法的计算精度和误差收敛性。表示在求解薄板问题时，可以通过构造再生光滑梯度，保证误差收敛性提高计算精度。

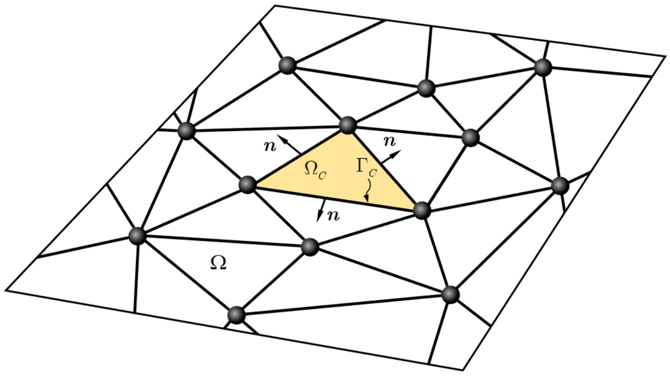

图 5.1　背景积分域示意图

5.3　Hellinger-Reissner 变分原理下的本质边界条件施加方法

基于 Hellinger-Reissner 变分原理的薄板问题伽辽金弱形式 (2.34) 中的积分项包括了在本质边界条件下的弯矩的约束项，以及在自然边界条件下的挠度和集中荷载外力项。此时，通过对挠度采用再生核近似，弯矩通过局部多项式近似的混合离散方式对 Hellinger-Reissner 变分原理的薄板问题等效积分弱形式进行组装刚度矩阵。首先，将挠度离散表达式 (5.6) 和弯矩离散表达式 (5.7) 代入到弱形式 (5.5) 中得到：

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma}\sum_{I=1}^{NP}\Psi_I\delta d_I\mathcal{V}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}d\Gamma-\int_{\Gamma}\sum_{I=1}^{NP}\Psi_{I,n}\delta d_I\mathcal{M}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}d\Gamma+\sum_{I=1}^{NP}\Psi_I\delta d_I\mathcal{P}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}|_{x\in c}\\
&-\int_{\Omega}\sum_{I=1}^{NP}\Psi_I\delta d_I\boldsymbol{a}^T_{\alpha\beta,\alpha\beta}\boldsymbol{p}^{[p-2]}d\Omega-\int_{\Gamma_w}\sum_{I=1}^{NP}\Psi_I\delta d_I\mathcal{V}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}d\Gamma\\
&+\int_{\Gamma_\theta}\sum_{I=1}^{NP}\Psi_{I,n}\delta d_I\mathcal{M}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}d\Gamma-\sum_{I=1}^{NP}\Psi_I\delta d_I\mathcal{P}_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}|_{x\in c_w}\\
&=\sum_{I=1}^{NP}\int_{\Gamma_V}\Psi_I\delta d_I\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-\sum_{I=1}^{NP}\int_{\Gamma_M}\Psi_{I,n}\delta d_I\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma+\sum_{I=1}^{NP}\Psi_I\delta d_I\bar{P}|_{x\in c_P}+\sum_{I=1}^{NP}\int_{\Omega}\Psi_I\delta d_I\bar{q}d\Omega
\end{aligned}\tag{5.15}$$

其次引入式 (3.26) 并根据薄板问题线弹性本构关系式 (2.29) 将上式改写为：

$$-\sum_{C=1}^{NC}(\tilde{\boldsymbol{g}}^T_{\alpha\beta I}-\bar{\boldsymbol{g}}^T_{\alpha\beta I})\boldsymbol{a}_{\alpha\beta}=\boldsymbol{f}\tag{5.16}$$

进一步再将式 (5.10) 中的 $\boldsymbol{a}_{\alpha\beta}$ 代入到式 (5.16) 中进而得到：

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{C=1}^{NC}(\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}-\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T})\boldsymbol{a}_{\alpha\beta} \\
&=\sum_{C=1}^{NC}(\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}-\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T})D_{\alpha\beta\gamma\eta}\boldsymbol{G}^{-1}(\sum_{J=1}^{NP}(\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}-\bar{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J})d_I+\hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta}) \\
&=\sum_{C=1}^{NC}\left(\begin{aligned}
&\sum_{J=1}^{NP}\underbrace{D_{\alpha\beta\gamma\eta}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}}_{\boldsymbol{K}}d_J \\
&+\sum_{J=1}^{NP}\underbrace{D_{\alpha\beta\gamma\eta}(-\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}-\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\bar{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J})}_{\tilde{\boldsymbol{K}}}d_J \\
&+\sum_{J=1}^{NP}\underbrace{D_{\alpha\beta\gamma\eta}\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}}_{\bar{\boldsymbol{K}}}d_J \\
&-\underbrace{(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta})}_{\tilde{\boldsymbol{f}}} \\
&-\underbrace{D_{\alpha\beta\gamma\eta}\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta}}_{\bar{\boldsymbol{f}}}
\end{aligned}\right) \\
&=\sum_{J=1}^{NP}(\boldsymbol{K}+\tilde{\boldsymbol{K}}+\bar{\boldsymbol{K}})\boldsymbol{d}_J-\tilde{\boldsymbol{f}}-\bar{\boldsymbol{f}}
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

式中的最后一个等式通过引入式 (5.11a)-(5.14) 和 (3.25) 进行化简得到，具体详细的推导可参考薄板问题 HR 变分原理的本质边界条件施加方法推导过程。根据式 (5.16) 和 (5.17) 代入到式 (5.15) 中可得到 Hellinger-Reissner 变分原理下的薄板问题离散控制方程：

$$
(\boldsymbol{K}+\tilde{\boldsymbol{K}}+\bar{\boldsymbol{K}})\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}+\tilde{\boldsymbol{f}}+\bar{\boldsymbol{f}} \tag{5.18}
$$

其中刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$、$\tilde{\boldsymbol{K}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{K}}$，力向量 $\boldsymbol{f}$、$\tilde{\boldsymbol{f}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{f}}$ 的具体表达式如下：

$$
K_{IJ}=\int_{\Omega}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}D_{\alpha\beta\gamma\eta}\tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta}d\Omega \tag{5.19a}
$$

$$
f_I=\int_{\Gamma_V}\Psi_I\bar{V}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-\int_{\Gamma_M}\Psi_{I,\boldsymbol{n}}\bar{M}_{\boldsymbol{nn}}d\Gamma+\Psi_I\bar{P}|_{x\in c_P}+\int_{\Omega}\Psi_I\bar{q}d\Omega \tag{5.19b}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}_{IJ} = & -\int_{\Gamma_w} \Psi_I \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \Psi_{I,n} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta} d\Gamma + [[\Psi_I \mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta}]]_{x\in c_w} \\
& - \int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_{J,n} d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J]]_{x\in c_w} \quad (5.20a)
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{f}_I = \int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}} d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w}]]_{x\in c_w} \quad (5.20b)
$$

$$
\bar{K}_{IJ} = \int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J d\Gamma - \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_{J,n} d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \Psi_J]]_{x\in c_w} \quad (5.21a)
$$

$$
\bar{f}_I = \int_{\Gamma_w} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{\theta}_{\boldsymbol{n}} d\Gamma + [[\mathcal{P}_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{I,\alpha\beta} \bar{w}]]_{x\in c_w} \quad (5.21b)
$$

Hellinger-Reissner 变分原理下的薄板问题离散控制方程式 (5.20) 中的修正变分项 $\tilde{K}_{IJ}$、$\tilde{f}_I$ 和常用于解决薄板问题的满足变分一致性的本质边界条件施加方案 Nitsche 法 (3.29) 中的 K^n_{IJ}、f^n_I 相比，具有相类似的表达式，同样都满足变分一致性，不同的是在 Hellinger-Reissner 变分原理离散过程中，用再生光滑梯度 $\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}$ 替换传统无网格形函数梯度 $\Psi_{I,\alpha\beta}$，使得该方法无需计算复杂耗时的无网格形函数梯度，在处理薄板问题时有效提高计算效率。同样，基于 Hellinger-Reissner 变分原理的特点，薄板的离散控制方程式 (5.21) 中的稳定项 $\bar{K}_{IJ}$、$\bar{f}_I$ 中已经内嵌，相较于 Nistche 法 (3.18) 中的稳定项 K^s_{IJ}、f^s_I 而言不需要引入罚函数项，不会因为人工参数的存在继而影响计算精度。同样，根据 Hellinger-Reissner 变分原理在求解薄板问题过程中也用到了优化的数值积分方案见无网格法优化的数值积分方案。

5.4 数值算例

5.4.1 分片实验

关于薄板问题，采用二次、三次和四次高阶薄板分片实验验证采用传统高斯积分法和再生光滑梯度积分法的不同本质边界条件施加方法是否和二阶弹性力学问题相同满足积分约束条件。此时分片实验考虑求解域为 $\Omega = (0,1) \otimes (0,1)$

的正方形薄板，求解域的四边施加本质边界条件。其分片实验的精确解如下：

$$w(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 & \text{二次分片实验} \\ x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 & \text{三次分片实验} \\ x_1^4 + 2x_1^3x_2 + 3x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 & \text{四次分片实验} \end{cases} \tag{5.22}$$

如图所示 (5.2)，薄板问题的分片实验由 49 个无网格节点进行离散。针对三次基函数的无网格近似，采用二次和三次分片实验进行测试，核函数的相对影响域在三次基函数的情况下设为 3.5；而四次基函数的无网格近似采用三次和四次分片实验进行测试，核函数的相对影响域在四次基函数的情况下设为 4.5。

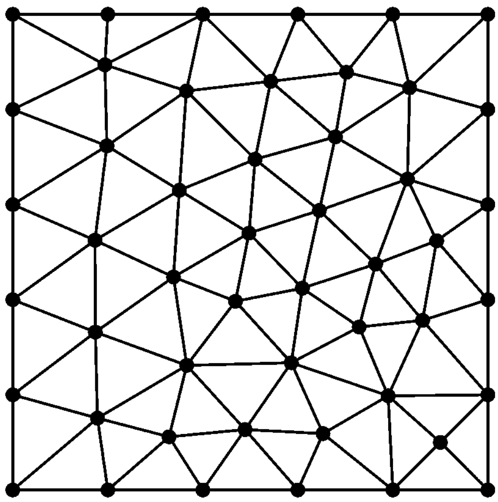

图 5.2　分片实验无网格离散模型

为了更好的对比所提方法的计算精度，针对四阶薄板问题分别采用如下位移误差 $L_2-\text{Error}$ 和能量误差 $H_i-\text{Error}$ 进行分析：

$$\begin{aligned} L_2-\text{Error} &= \frac{\sqrt{\int_\Omega (w-w^h)^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_\Omega w^2 d\Omega}} \\ H_i-\text{Error} &= \frac{\sum_{j=0}^{i} \sqrt{\int_\Omega (w_{,\alpha_1\cdots\alpha_j} - w_{,\alpha_1\cdots\alpha_j})^2 d\Omega}}{\sum_{j=0}^{i} \sqrt{\int_\Omega w_{,\alpha_1\cdots\alpha_j} w_{,\alpha_1\cdots\alpha_j} d\Omega}} \end{aligned} \tag{5.23}$$

针对薄板问题，三次基函数的求解计算时高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 13 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 3 点高斯积分；四次基函数的求解计

算时高斯积分法“GI”的求解域 Ω 的积分采用 16 点高斯积分，边界 Γ 积分采用 5 点高斯积分；再生光滑梯度积分法“RKGSI”计算时采用的积分点数和高斯积分法一致。三次和四次基函数的无网格分片试验结果如下表：

表 5.1　三次基函数无网格法分片实验结果

	二次分片实验		三次分片实验	
	L_2-Error	H_1-Error	L_2-Error	H_1-Error
GI-Penalty	4.27×10^{-2}	3.82×10^{-1}	9.54×10^{-2}	5.12×10^{-1}
GI-Nitsche	4.09×10^{-2}	3.75×10^{-1}	9.50×10^{-2}	5.05×10^{-1}
RKGSI-Penalty	4.60×10^{-2}	3.86×10^{-1}	1.07×10^{-1}	5.40×10^{-1}
RKGSI-Nitsche	5.67×10^{-14}	2.18×10^{-12}	5.21×10^{-14}	1.20×10^{-12}
RKGSI-HR	5.58×10^{-15}	4.56×10^{-13}	3.66×10^{-15}	2.70×10^{-13}

表 5.2　四次基函数无网格法分片实验结果

	三次分片实验		四次分片实验	
	L_2-Error	H_1-Error	L_2-Error	H_1-Error
GI-Penalty	1.08×10^{-1}	5.44×10^{-1}	1.84×10^{-1}	6.32×10^{-1}
GI-Nitsche	1.07×10^{-1}	5.45×10^{-1}	1.84×10^{-1}	6.34×10^{-1}
RKGSI-Penalty	1.06×10^{-1}	5.40×10^{-1}	1.84×10^{-1}	6.26×10^{-1}
RKGSI-Nitsche	2.82×10^{-13}	4.99×10^{-12}	3.03×10^{-13}	3.33×10^{-12}
RKGSI-HR	1.68×10^{-14}	2.33×10^{-12}	4.40×10^{-14}	1.57×10^{-12}

表 (5.1) 和表 (5.2) 分别表示具有三次、四次基函数无网格法的薄板分片试验结果，从表中可以明显的看出，由于缺乏变分一致性传统高斯积分法“GI-Penalty”、“GI-Nitsche”和罚函数法“RKGSI-Penalty”都无法通过分片试验。只有满足变分一致性的再生光滑梯度积分法的“RKGSI-Nitsche”法和本章提出的 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方案“RKGSI-HR”法可以通过分片试验，满足积分约束条件。

5.4.2　简支方板问题

如图 (5.3) 所示，一简支方板的中性面区域为 $\Omega=(0,1)\otimes(0,1)$，此时 Ω 的长为 $a=1$ 宽为 $b=1$，材料系数分别为弯曲刚度 $\bar{D}=1$、$\nu=0.3$。板面内分布如图所示纵向荷载:

$$\bar{q}=-\bar{D}(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2})\sin(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{b}y) \tag{5.24}$$

该简支方板问题的精确解为：

$$w=-\sin(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{b}y) \tag{5.25}$$

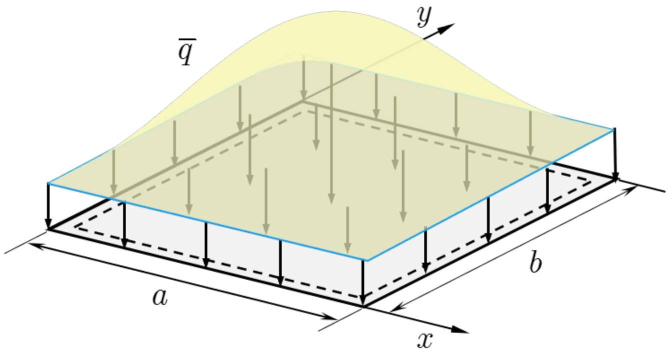

图 5.3　简支方板问题模型

如图所示 (5.4)，简支方板求解域采用均布的 11×11、21×21、41×41、81×81 的四个疏密不同的节点进行离散。此时对于采用三次基函数的简支方板问题其相对影响域取为 3.5，采用四次基函数时其相对影响域则取为 4.5。

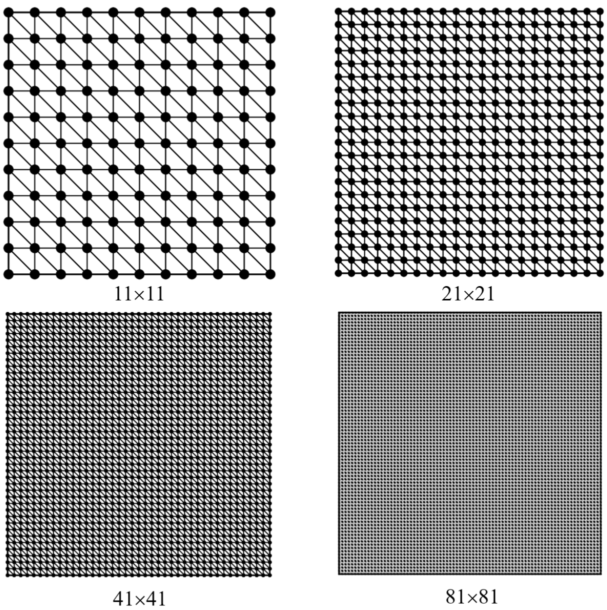

图 5.4　简支方板问题节点离散

图 (5.5)、图 (5.6) 分别为简支方板问题在三次基函数和四次基函数时的位移误差和能量误差对比图。从图中可以明显看出即使采用高阶高斯积分法“GI”如三次基函数的 13 点高斯积分法和四次基函数的 16 点高斯积分，计算精度都低于再生光滑梯度法“RKGSI”，并且和同样不满足变分一致性的罚函数法一样都无法达到理论误差收敛率。而“RKGSI-Nitsche”和“RKGSI-HR”法不管是在三次基函数还是四次基函数时都达到了误差收敛率。图 (5.7)、图 (5.8) 是简支方板问题在三次基函数和四次基函数时分别计算节点数和与使用“GI”和“RKGSI”不同数值积分方法时的效率图。从整体来看采用“RKGSI”时的计算效率在三次基函数和四次基函数时都明显高于“GI”。

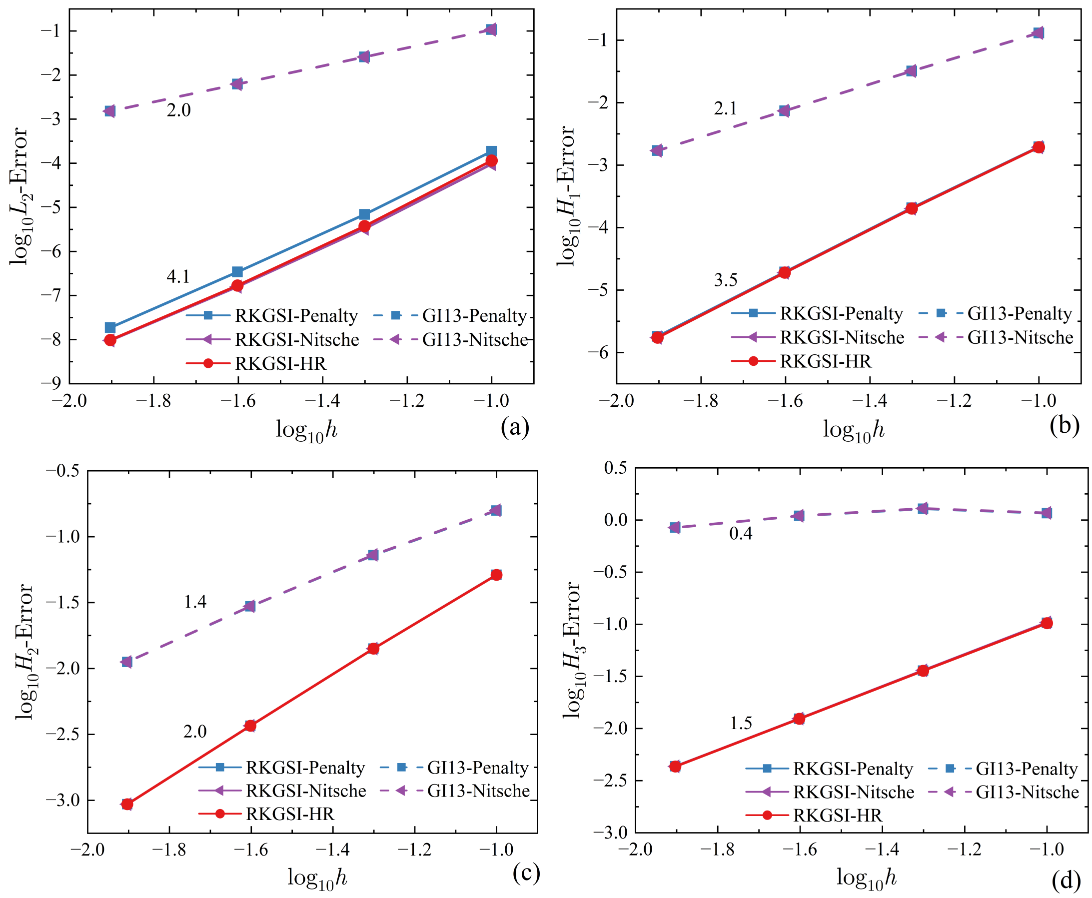

图 5.5　简支方板问题三次基函数误差对比：(a) L_2 误差；(b) H_1 误差；(c)H_2 误差；(d) H_3 误差

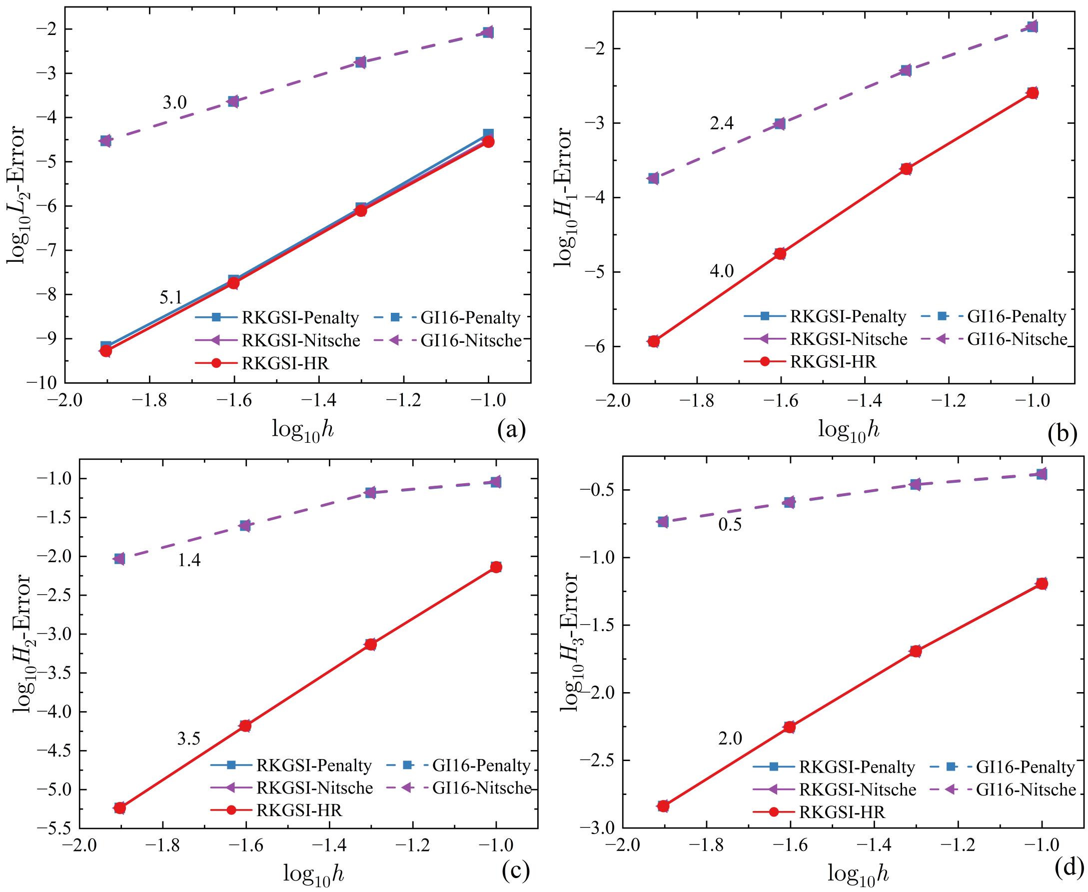

图 5.6　简支方板问题四次基函数误差对比：(a) L_2 误差；(b) H_1 误差；(c)H_2 误差；(d) H_3 误差

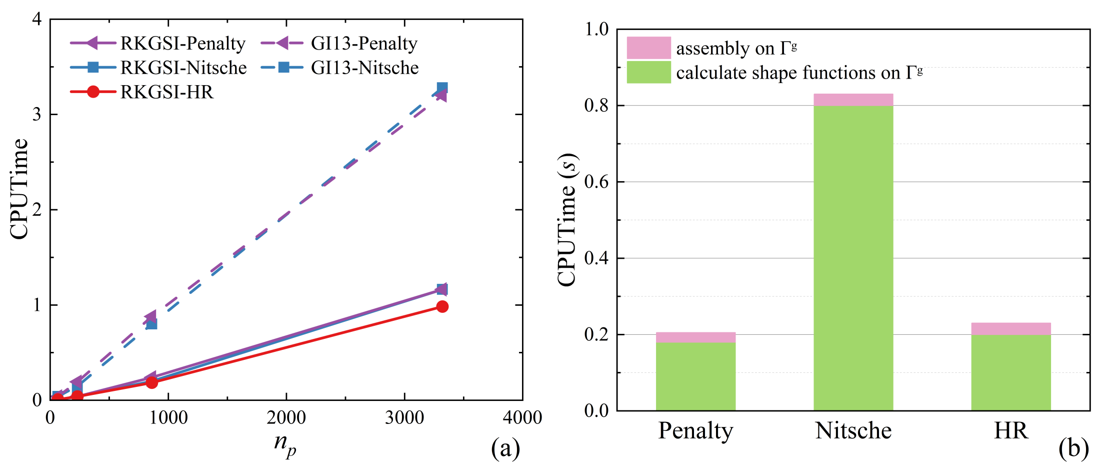

图 5.7　简支方板问题三次基函数效率对比：(a)计算时间与节点数的关系；(b)本质边界条件施加效率分析

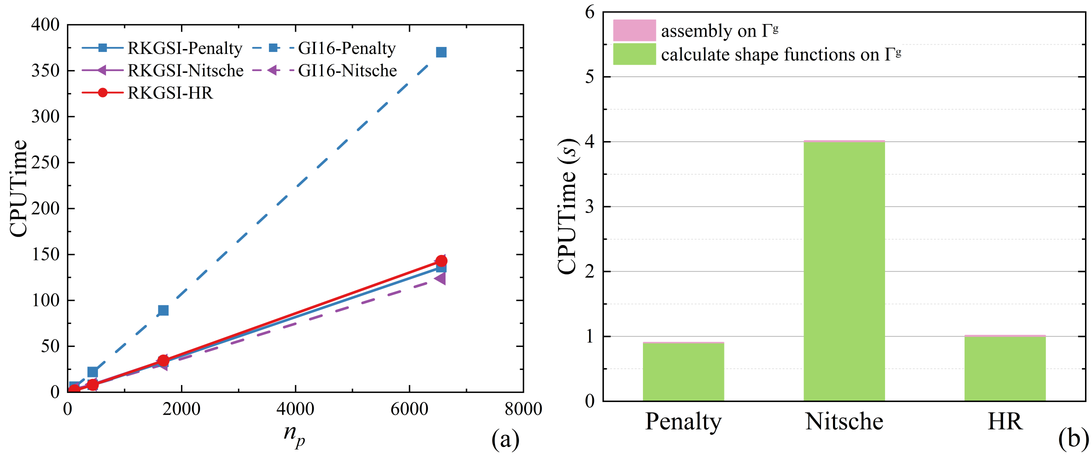

图 5.8 简支方板问题四次基函数效率对比：(a)计算时间与节点数的关系；(b)本质边界条件施加效率分析

图 (5.9) 是分别验证简支方板问题在三次基函数和四次基函数时带有人工经验参数的罚函数法和 Nitsche 法的敏感度分析。从图中可以明显的看出，不同的经验参数对罚函数法的误差有着很大的影响，并且它的最优误差只在一小部分。Nitsche 法的最优误差的人工经验参数的范围比较大，但人工经验参数值的大小仍然会影响误差结果的变化，并且随着网格的加密，人工经验参数的最优结果是在发生改变的。此时，提出的基于 Hellinger-Reissner 变分原理中由于内嵌了本质边界条件，无需人工经验参数来满足正定性，相较于同样满足积分约束条件的“RKGSI-Nitsche”法，提出的“RKGSI-HR”法的不因人工参数值的变化影响最优误差。

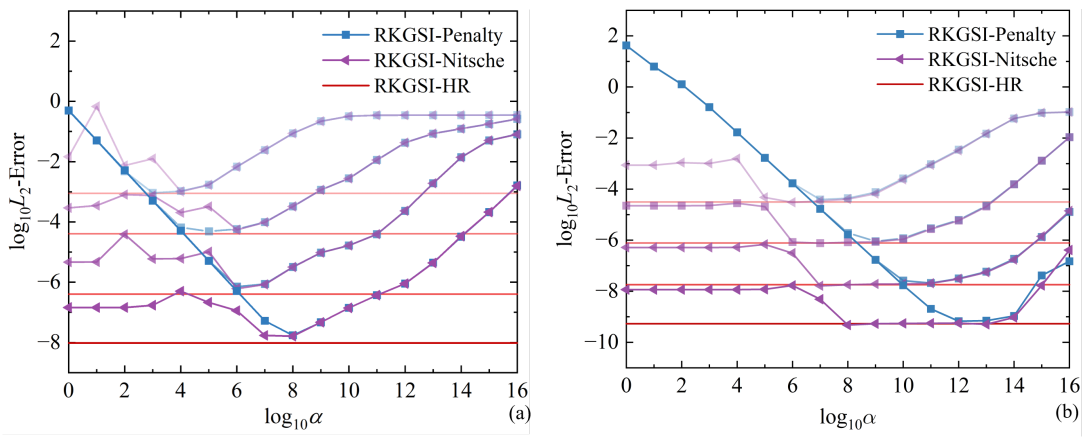

图 5.9 人工参数 α 敏感度分析：(a)三次基函数；(b)四次基函数

5.4.3 简支等边三角形板问题

考虑如图 (5.10) 所示简支等边三角形板，其中三角形板的高为 $a=10$，均布荷载作用在板面内为 $\bar{q}=1$，材料系数分别为弯曲刚度 $\bar{D}=1$、泊松比 $\nu=0.3$。该简支三角形板的精确解为：

$$w=\frac{\bar{q}}{64a\bar{D}}[x^3-3y^3x-a(x^2+y^2)+\frac{4}{27}a^3](\frac{4}{9}a^2-x^2-y^2) \tag{5.26}$$

如图 (5.11) 所示，简支等边三角形板求解域分布采用均布离散的 66、231、861 和 3321 的四个疏密不同的节点进行离散。同样采用三次基函数时，简支等边三角形板问题的相对影响域取为 3.5，四次基函数时其相对应影响域取为 4.5 进行数值分析。

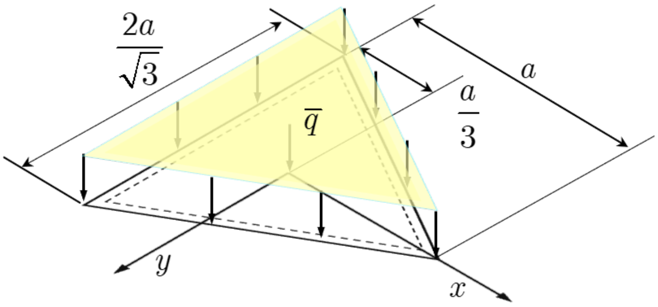

图 5.10　简支等边三角形板问题模型

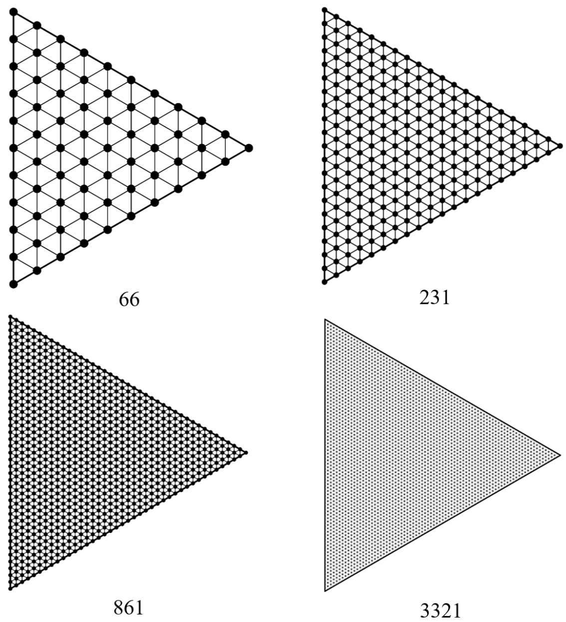

图 5.11　简支等边三角形问题节点离散

图 (5.12)、图 (5.13) 为简支等边三角形板问题分别在三次基函数和四次基函数的位移误差和能量误差对比图。从图中可以明显看出采用“RKGSI”得出的计算精度优于“GI”法，并且“RKGSI-HR”法都能够达到理论误差收敛率，满足积分约束条件。图 (5.14) 是简支等边三角形板的薄板中面和本质边界条件施加效率分析图，从图中可以看出在薄板中面施加过程中，“RKGSI”所用的时间都明显少于“GI”；而针对“RKGSI”在施加本质边界过程中计算形函数及梯度和组装相对应的刚度矩阵和力向量中可以明显看出“RKGSI-Nistche”法所用的时间明显多于“RKGSI-HR”法，图 (5.15) 为简支等边三角形板问题的弯矩云图。从图中可以看出“RKGSI-HR”、“RKGSI-Nitsche”和“RKGSI-Penalty”和精确解之间几乎一致，进一步验证了所提方法能够有效提高计算精度。

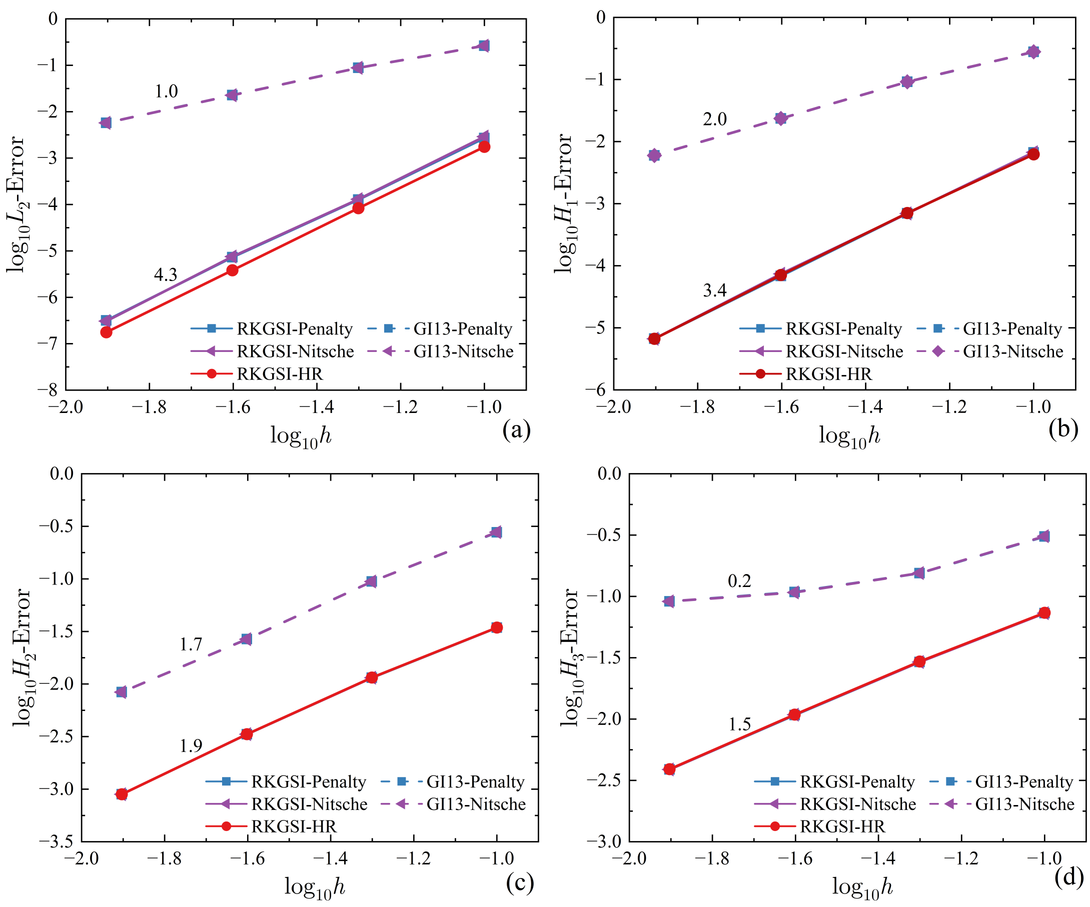

图 5.12　简支等边三角形板问题三次基函数误差对比：(a) L_2 误差；(b) H_1 误差；(c)H_2 误差；(d) H_3 误差

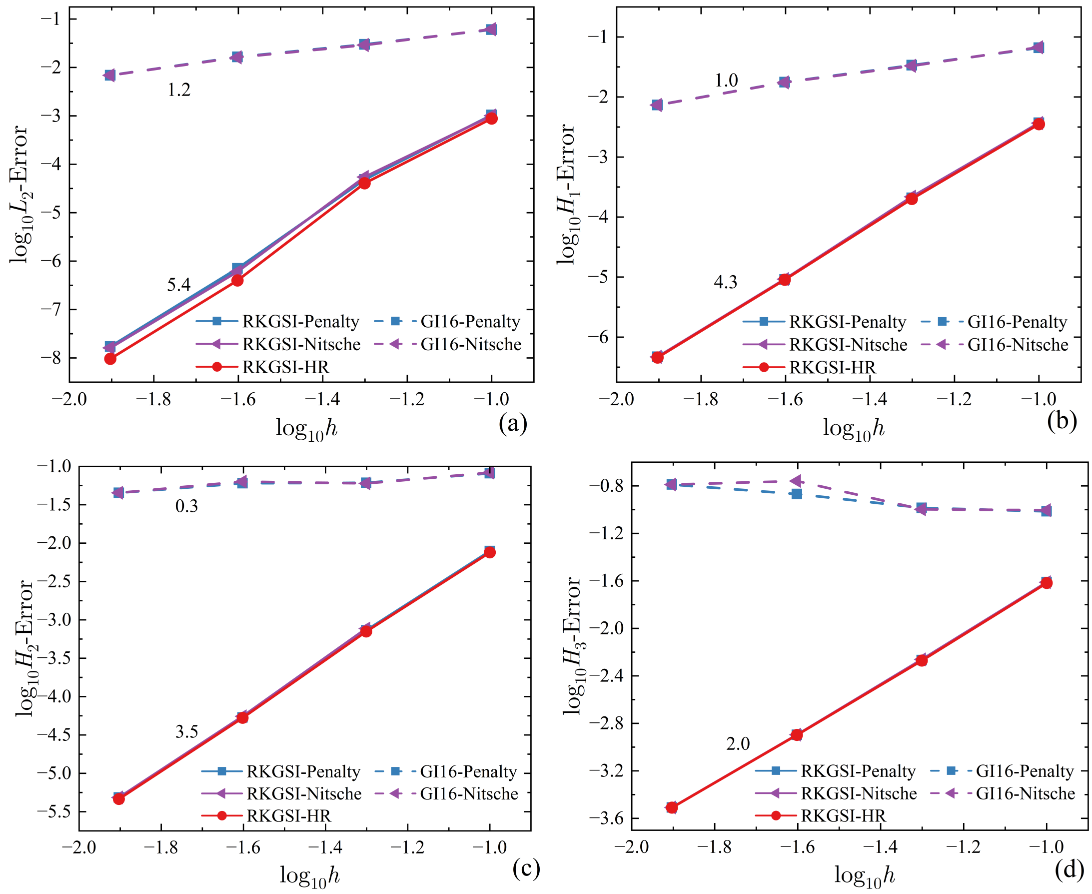

图 5.13　简支等边三角形板问题四次基函数误差对比：(a) L_2 误差；(b) H_1 误差；(c)H_2 误差；(d) H_3 误差

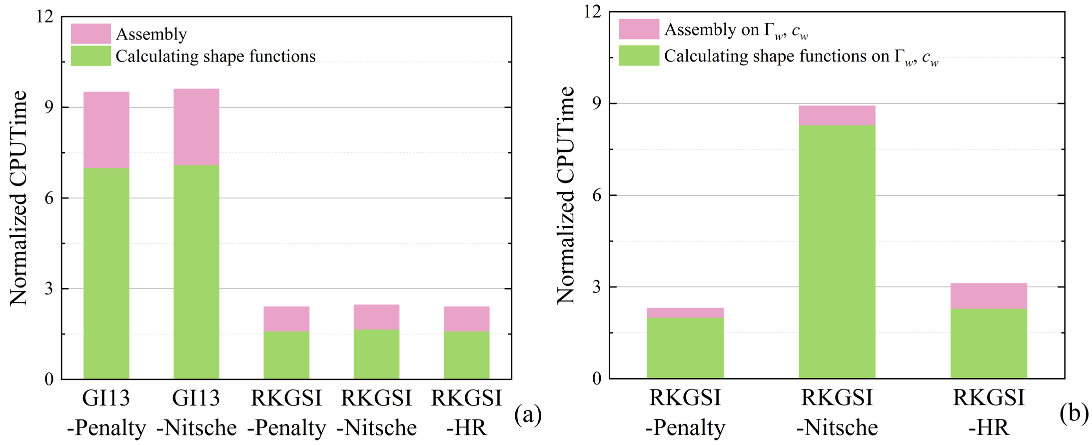

图 5.14　简支等边三角形问题效率对比：(a)薄板中面 Ω；(b)本质边界条件 Γ_w, c_w

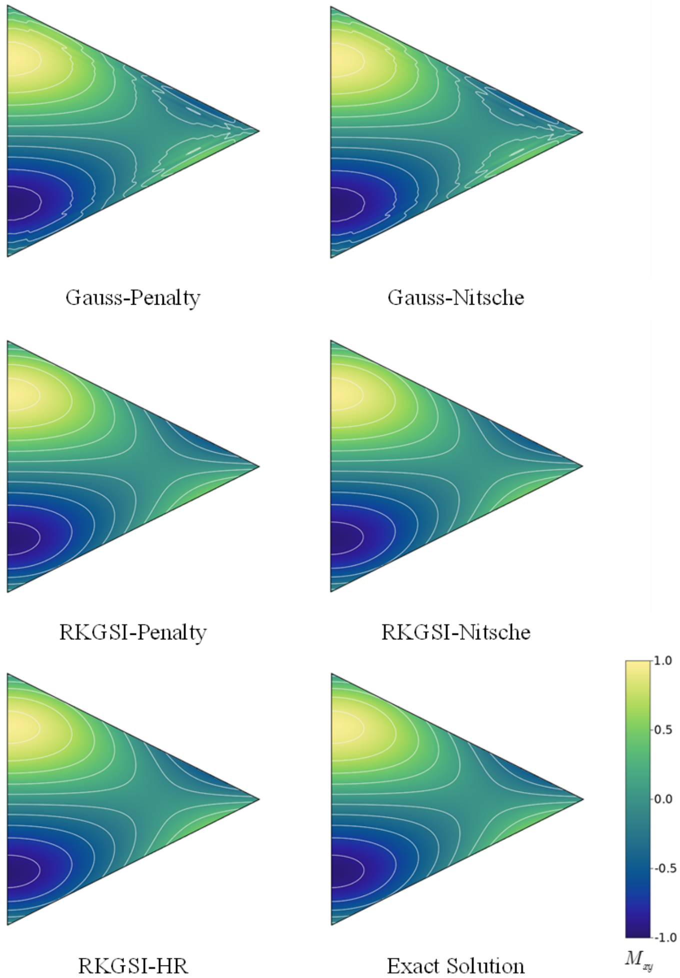

图 5.15　简支等边三角形板问题弯矩云图 σ_{xx} 应力云图

5.4.4　简支环行板问题

一简支环行板如图 (5.16) 所示，其中内外径分别为 $a=2$、$b=1$。在环行板的内外径边缘处分别施加弯矩 $m_i=2$、$m_0=1$，材料系数分别为抗弯刚度 $\bar{D}=1$、泊松比为 $\nu=0.3$。该简支环行板的精确解为：

$$w=\frac{(m_i-m_0)a^2b^2}{\bar{D}(1-\nu)(a^2-b^2)}ln\frac{r}{a}+\frac{m_ib^2-m_oa^2}{2\bar{D}(1+\nu)(a^2-b^2)}(r^2-a^2) \tag{5.27}$$

其中：$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 是点 (x,y) 的极径。

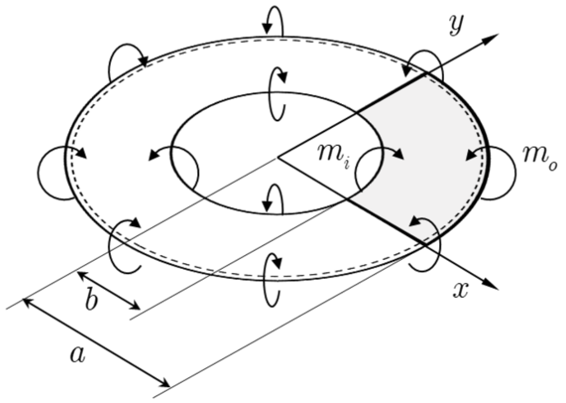

图 5.16　简支环形板问题模型

如图 (5.17) 所示，简支环形问题求解域通过采用均布的 153、561、2145 和 8385 四个疏密不同的节点进行离散，该简支环行板采用四次基函数，取相对影响域为 4.5 进行数值分析。

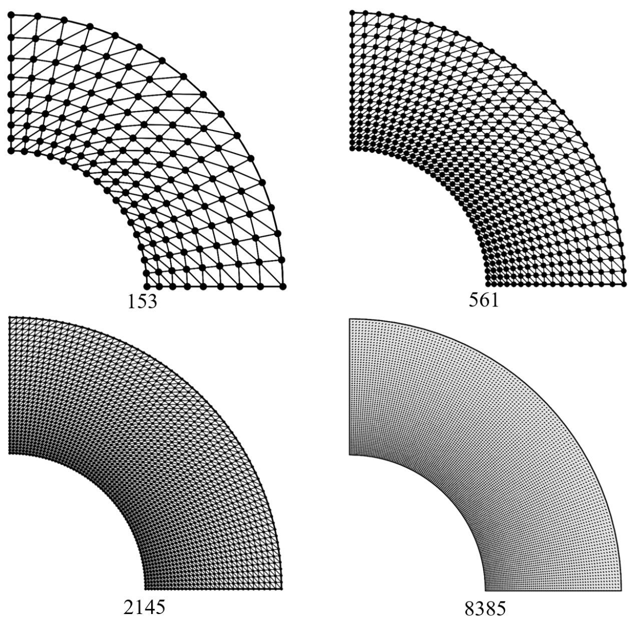

图 5.17　简支环形板问题节点离散

图 (5.18) 为简支环行板问题的位移误差和能量误差对比图，从图中可以看出“RKGSI-HR”和“RKGSI-Nitsche”同样可以达到理论误差收敛率。图 (5.19) 为简支环行板问题在计算时间节点数和施加不同本质边界条件上的效率对比，从图中可以看出采用“RKGSI”时的效率明显高于“GI”法，与同样满足变分一致性的“RKGSI-Nitsche”法相比，“RKGSI-HR”法在施加过程中效率明显更

高。同样根据简支环行板的弯矩云图 (5.20) 也可以更进一步说明在解决薄板问题上，基于 Hellinger-Reissner 变分原理的本质边界条件施加方法拥有着更高的计算精度。在简支环行板问题中，存在两个人工参数影响计算精度。从图 (5.21) 中可以看出，随着节点数的变化“RKGSI-Nitsche”法和“RKGSI-Penalty”法在达到最优精度时的人工参数值也在发生变化。而“RKGSI-HR”法中不涉及人工参数，因此随着节点数的增加，计算精度不会受到人工参数的影响，从而提高了一种更稳定和高效的计算方法。

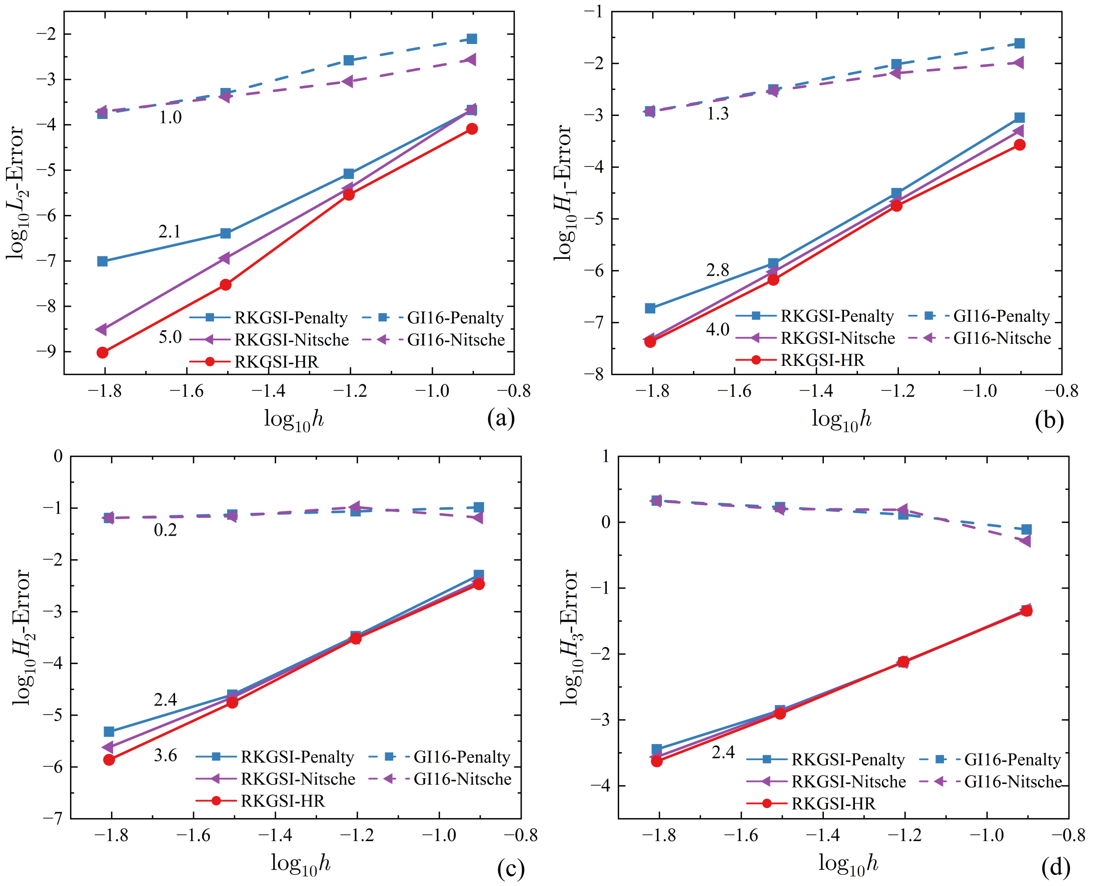

图 5.18　简支环行板问题四次基函数误差对比：(a) L_2 误差；(b) H_1 误差；(c)H_2 误差；(d) H_3 误差

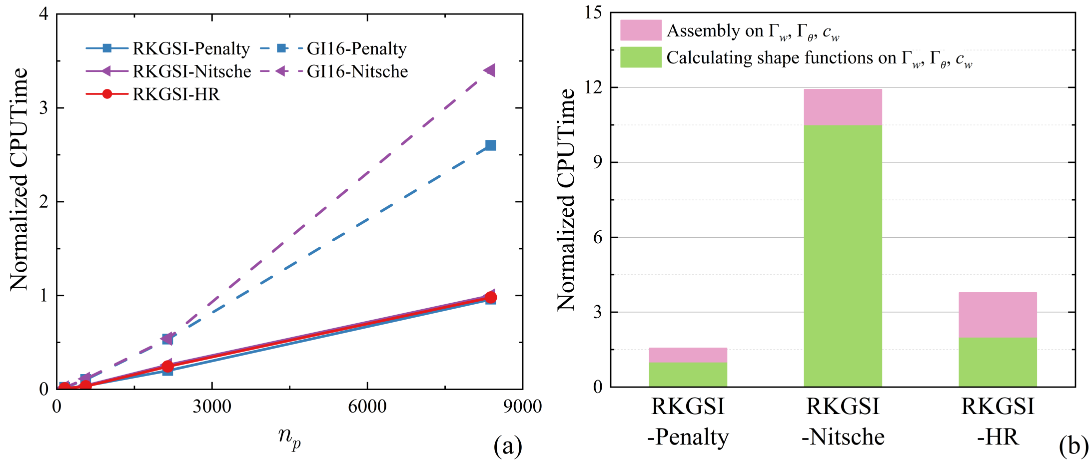

图 5.19　简支环形板问题四次基函数效率对比：(a)计算时间与节点数的关系；(b)本质边界条件施加效率分析

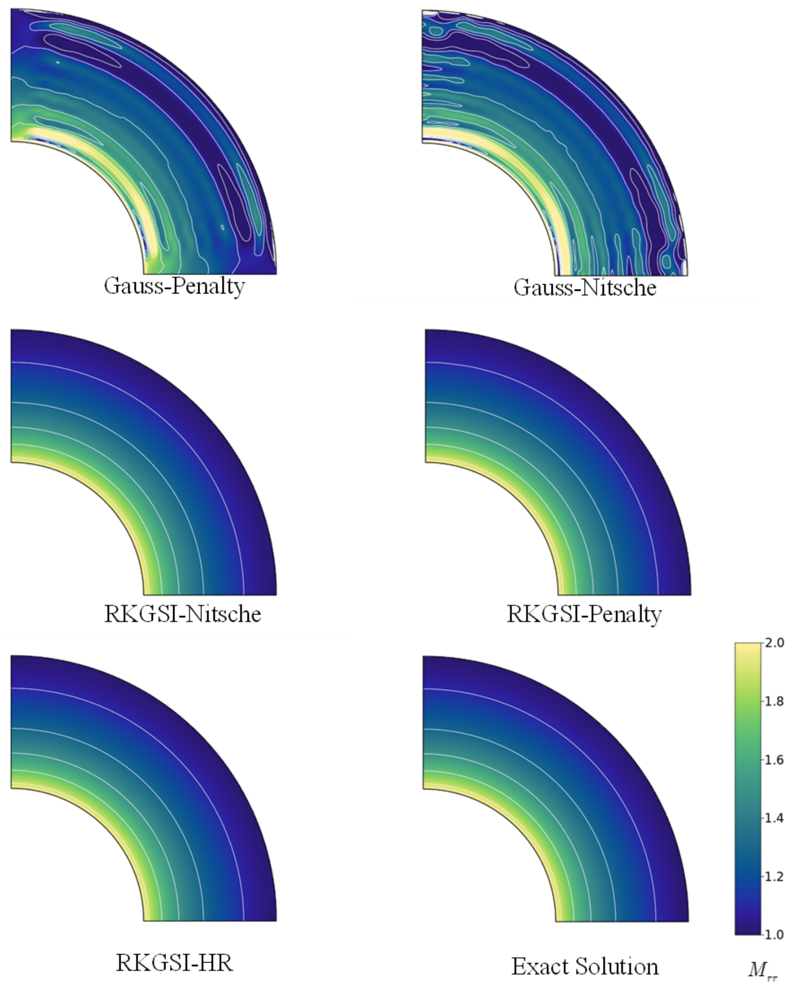

图 5.20　简支环形板问题弯矩云图

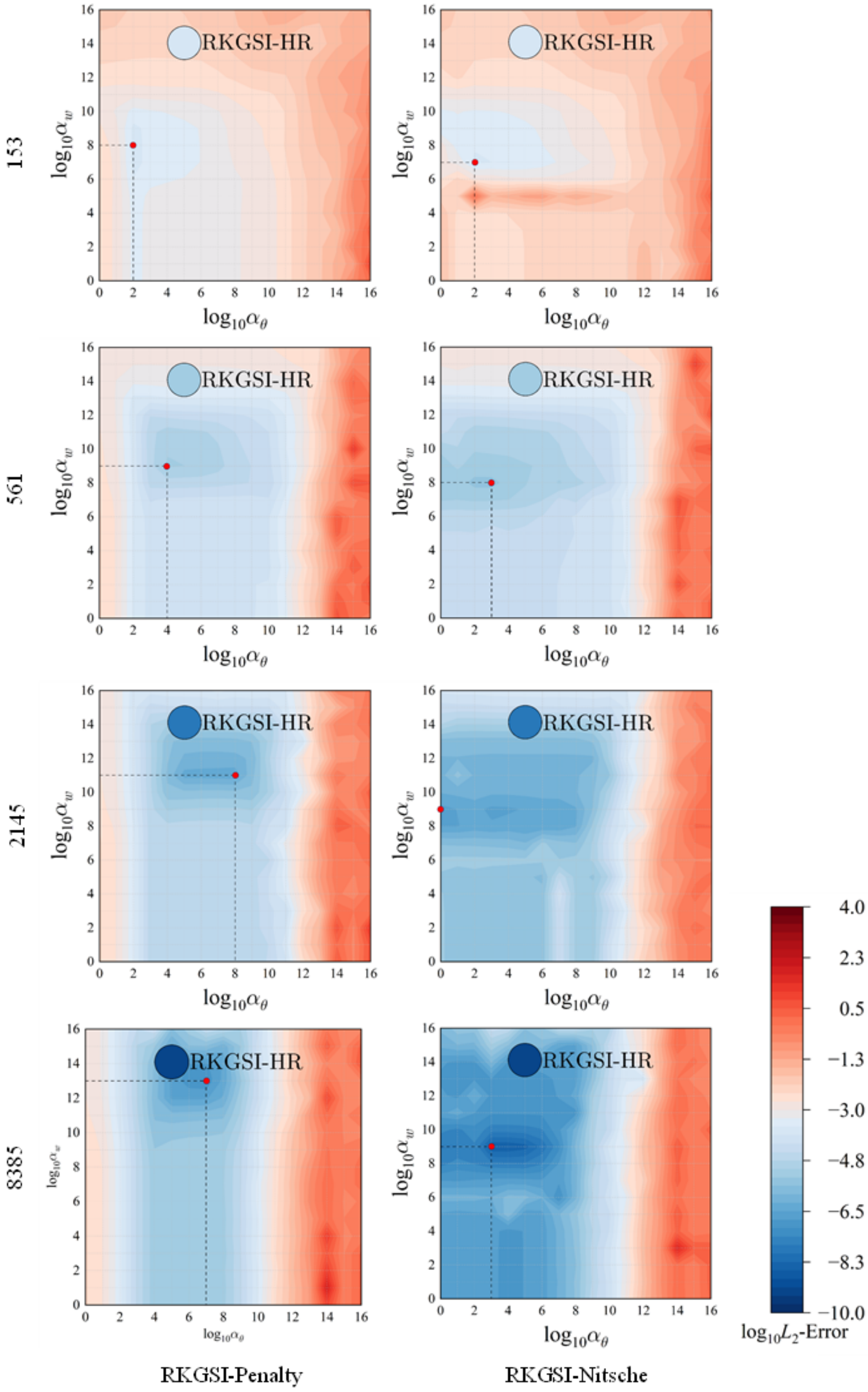

图 5.21　简支环形板问题人工参数敏感性分析

5.4.5 TADAS 阻尼器

在建筑和工程结构中，振动是一个常见的问题，其可能会导致结构的疲劳破坏等问题，传统方法中通过采用增加结构的刚度或使用液体阻尼器、摩擦阻尼器减小结构的振动响应，然而在传统方法中或多或少的存在有效性不高，经济适用性低等问题。为了克服传统方法的限制，三角板减振刚度阻尼器被引入(TADAS)，TADAS 阻尼器是一种基于能量耗散原理的被动控制装置，通过在结构中引入附加的阻尼力来吸收和耗散结构的振动能量，能够有效地减小结构地的振动幅值和振动周期，从而显著改善结构的振动响应，并且 TADAS 阻尼器的设计相对简单，通常由一块或多块金属材料制成，安装简易、价格低廉，是一种在结构工程中广泛应用于减震和控制结构的被动控制装置。

图 (5.22) 为一个带有 TADAS 阻尼器的实验装置[75-76]，为常在道路、住房和城市中心建造的一层框架大比例模型，该框架高 3 米，跨度 4 米，框架柱采用标准的双 IPE180 型钢材，梁的工字截面由三块 4000*200*12mm 的钢板连续焊接而成。支撑体系统一采用双 100*100*20mm 角度，柱基座使用销连接。如图 (5.23) 所示，TADAS 阻尼器中的三角形板的上端设为简支固定，下端施加 $P = 100000$ 的力。三角形钢板的材料系数为杨氏模量 $E = 2 \times 10^{11}$、泊松比 $\nu = 0.3$。

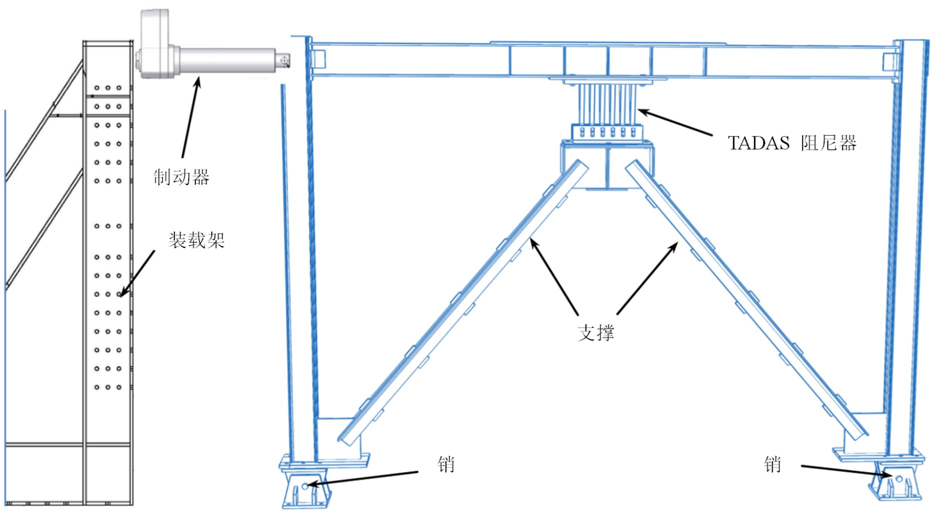

图 5.22　实验装置示意图

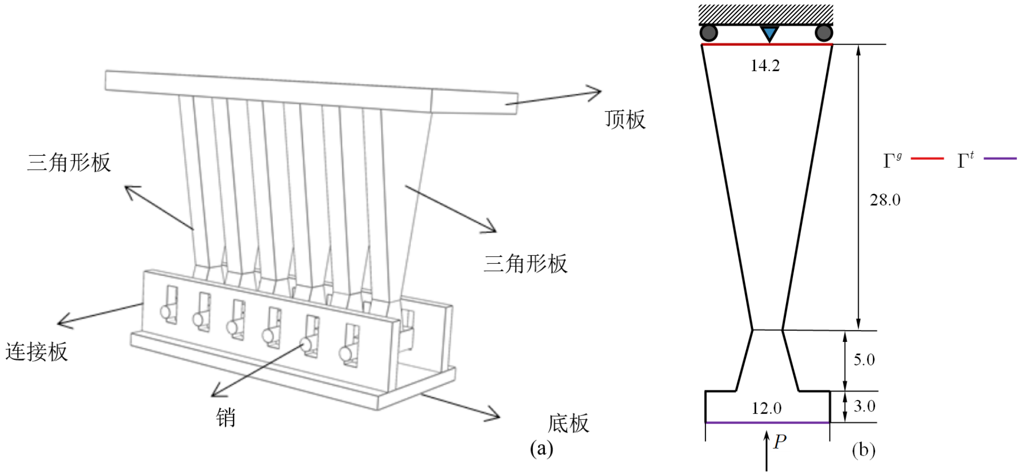

图 5.23　TADAS 阻尼器示意图：(a) 钢板焊接 TADAS 装置详图；(b) 三角形钢板横截面图

图 () 为使用 RKGSI-HR 方法得到的受压云图。

5.5　小结

本章进一步介绍了基于 Hellinger-Reissner 变分原理的变分一致性本质边界条件施加方法，用于求解薄板问题。该方法通过采用混合离散近似 Hellinger-Reissner 变分原理弱形式中的挠度和弯矩，实现了满足积分约束条件用于求解高阶薄板问题的一种本质边界条件施加方法。其中，在离散平衡控制方程中，采用传统无网格形函数对挠度进行离散，弯矩则在每个背景积分域上近似为对应阶次的多项式。同样，在 Hellinger-Reissner 变分原理的框架下，该方法的离散平衡控制方程具有类似传统 Nitsche 法的表达式，可以可以视为再生光滑梯度积分法的一种新型 Nitsche 法。相较于传统 Nitsche 法，该方法的修正变分项采用了无网格形函数和再生光滑梯度的混合离散，从而在确保变分一致性的同时避免了复杂且耗时的形函数导数计算，明显提高了计算效率，稳定项直接源于 Hellinger-Reissner 变分原理的弱形式，无需额外引入人工参数，有效提高无网格法在求解薄板问题的的计算精度。之后进一步通过分片实验和薄板典型算例验证所提方法基于 Hellinger-Reissner 变分原理施加本质边界条件的变分一致性、计算精度和计算效率。

第 6 章　结论与展望

6.1　结论

本文研究以 Hellinger-Reissner 变分原理为基础，依托于 Hellinger-Reissner 原理内嵌本质边界条件的特点，完善了缺乏完备理论基础的再生光滑梯度数值分析方法，为具有变分一致性的无网格分析方法提供了新思路，提出了一种具有高效、鲁棒的具有变分一致性的本质边界施加方案的新方法，能够有效提高传统无网格法的计算精度和效率。具体结论如下：

(1) 以 Hellinger-Reissner 变分原理为基础，提出了一种满足积分约束条件的变分一致高效本质边界条件施加方法。该方法采用混合离散近似 Hellinger-Reissner 变分原理弱形式中位移和应力，其中位移采用传统无网格形函数进行离散，而应力则在每个背景积分域上近似为对应阶次的多项式，满足局部的变分一致性。通过 Hellinger-Reissner 变分原理完善变分一致型伽辽金无网格数值积分方法的基础理论框架。

(2) 在 Hellinger-Reissner 变分原理的框架下，该方法的离散平衡方程中具有与传统 Nitsche 法相类似的表达式，可视为与再生光滑梯度积分法相配套的新型 Nitsche 法。与传统 Nitsche 法相比，所提方法的修正变分项采用传统无网格形函数和再生光滑梯度进行混合离散，在保证了变分一致性的同时避免了复杂耗时的形函数导数计算，明显提高了计算效率；而对于 Nitsche 法中的稳定项则直接源于 Hellinger-Reissner 变分原理弱形式中，无需额外增加稳定项，更重要的是稳定项中不包含任何人工参数，有效消除了 Nitsche 法中的人工参数依赖性。在该论文中通过对弹性力学问题典型算例和薄板问题典型算例系统的验证了所提方法基于 Hellinger-Reissner 变分原理施加本质边界条件方法的变分一致性、计算精度和计算效率。

6.2　展望

本文仅是对弹性力学问题和薄板问题的典型算例进行验证所提方法的变分一致性、计算精度和计算效率，在本论文的典型算例中均是属于静力学问题，于是后续的研究工作有以下两点考虑：

(1) 研究更为复杂的壳体问题基于 Hellinger-Reissner 变分原理的变分一致型伽辽金无网格法的变分一致性、计算精度和计算效率。本论文着重探讨基于 Kirchhoff 薄板假设理论进行推导，所以后续可以研究无法忽略剪切变形的壳体问题。

(2) 研究动力学问题的算例在基于 Hellinger-Reissner 变分原理的挠度、频散特性。本论文着重探讨的算例验证均是属于静力学问题，所以后续研究可以探讨关于动力学的算例问题进一步验证所提方法的计算效果。

附录 A　弹性力学问题 HR 变分原理的本质边界条件施加方法推导过程

通过引入式 (4.10a)、(4.12) 对式 (4.17) 中的第一项进行推导得到：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{C=1}^{NC} \tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^{T} C_{ijkl} \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{g}}_{kJ} \\
&= \sum_{C=1}^{NC} \tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^{T} C_{ijkl} \boldsymbol{G}^{-1} \boldsymbol{G} \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{g}}_{kJ} \\
&= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Omega_C} \tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^{T} \boldsymbol{G}^{-1} \boldsymbol{p}^{[p-1]}(\boldsymbol{x}) C_{ijkl} \boldsymbol{p}^{[p-1]T}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{g}}_{kJ} d\Omega \\
&= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Omega_C} \tilde{\Psi}_{I,j} C_{ijkl} \tilde{\Psi}_{I,k} d\Omega \\
&= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Omega_C} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^{h} C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}^{h} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{B}}_{I}^{T} \boldsymbol{D} \tilde{\boldsymbol{B}}_{J} d\Omega \\
&= \boldsymbol{K}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

通过引入式 (4.10c)、(4.12)、(4.5) 对式 (4.17) 中的第二、三项进行推导得到：

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{C=1}^{NC} C_{ijkl}(\bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^T \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{g}}_{kJ} + \tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^T \boldsymbol{G}^{-1} \bar{\boldsymbol{g}}_{kJ}) \\
&= -\sum_{C=1}^{NC} (\int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \Psi_I n_j C_{ijkl} \boldsymbol{p}^{[p-1]} \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{g}}_{kJ} d\Gamma + \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} C_{ijkl} \boldsymbol{p}^{[p-1]} \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{g}}_{jI} n_k \Psi_J d\Gamma) \\
&= -\sum_{C=1}^{NC} (\int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \Psi_I n_j C_{ijkl} \tilde{\Psi}_{J,k} d\Gamma + \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} C_{ijkl} \sum_{J=1}^{NP} \tilde{\Psi}_{I,j} \delta d_{iI} n_k \sum_{I=1}^{NP} \Psi_J d\Gamma) \\
&= -\sum_{C=1}^{NC} (\int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega} \delta u_i^h n_j C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}^h d\Gamma + \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^h C_{ijkl} n_k u_l^h d\Gamma) \\
&= -(\int_{\Gamma^g} \Psi_I \boldsymbol{N} \boldsymbol{D} \tilde{\boldsymbol{B}}_J d\Gamma + \int_{\Gamma^g} \tilde{\boldsymbol{B}}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{N}^T \Psi_J d\Gamma) \\
&= \tilde{\boldsymbol{K}}
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

通过引入式 (4.10c)、(4.13) 对式 (4.17) 中的第四项进行推导得到：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{C=1}^{NC} C_{ijkl} \bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^T \boldsymbol{G}^{-1} \bar{\boldsymbol{g}}_{kJ} \\
&= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} C_{ijkl} \bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^T \boldsymbol{G}^{-1} \boldsymbol{p}^{[p-1]} \Psi_J n_k d\Gamma \\
&= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} C_{ijkl} \bar{\Psi}_{I,j} n_k \Psi_J d\Gamma \\
&= \sum_{C=1}^{NC} \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} C_{ijkl} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^h n_k u_l d\Gamma \\
&= \delta \boldsymbol{d}_I^T \int_{\Gamma^g \cap \partial\Omega_C} \bar{\boldsymbol{B}}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{N}^T \Psi_J d\Gamma \\
&= \bar{\boldsymbol{K}}
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

通过引入式 (4.10d)、(4.12) 对式 (4.17) 中的第五项进行推导得到：

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{C=1}^{NC} C_{ijkl}\tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{kl} \\
&=-\sum_{C=1}^{NC} C_{ijkl}\tilde{\boldsymbol{g}}_{jI}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\int_{\Gamma^{g}\cap\partial\Omega_{C}}\boldsymbol{p}^{[p-1]}n_{l}g_{k}d\Gamma \\
&=-\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma^{g}\cap\partial\Omega_{C}} C_{ijkl}\tilde{\Psi}_{I,j}n_{l}g_{k}d\Gamma \\
&=-\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma^{g}\cap\partial\Omega_{C}} C_{ijkl}\delta\tilde{\varepsilon}_{ij}^{h}n_{l}g_{k}d\Gamma \\
&=-\int_{\Gamma^{g}\cap\partial\Omega_{C}}\tilde{\boldsymbol{B}}_{I}^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{g}d\Gamma \\
&=\tilde{\boldsymbol{f}}
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

通过引入式 (4.10d)、(4.13) 对式 (4.17) 中的第六项进行推导得到：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{C=1}^{NC} C_{ijkl}\bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{kl} \\
&=\sum_{C=1}^{NC} C_{ijkl}\bar{\boldsymbol{g}}_{jI}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\int_{\Gamma^{g}\cap\partial\Omega_{C}}\boldsymbol{p}^{[p-1]}n_{l}g_{k}d\Gamma \\
&=\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma^{g}\cap\partial\Omega_{C}} C_{ijkl}\bar{\Psi}_{I,j}n_{l}g_{k}d\Gamma \\
&=\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma^{g}\cap\partial\Omega_{C}} C_{ijkl}\delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{h}n_{l}g_{k}d\Gamma \\
&=\int_{\Gamma^{g}\cap\partial\Omega_{C}}\bar{\boldsymbol{B}}_{I}^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{g}d\Gamma \\
&=\bar{\boldsymbol{f}}
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

附录 B　薄板问题 HR 变分原理的本质边界条件施加方法推导过程

通过引入式 (5.11a)、(5.13) 对式 (5.17) 中的第一项进行推导可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J} \\
&=\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\int_{\Omega_C}\boldsymbol{p}^{[p-2]}\boldsymbol{p}^{[p-2]T}d\Omega\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J} \\
&=\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Omega_C}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}^{[p-2]}\boldsymbol{p}^{[p-2]T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}d\Omega \\
&=\int_{\Omega}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}D_{\alpha\beta\gamma\eta}\tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta}d\Omega \\
&=\boldsymbol{K}
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

通过引入式 (5.13)、(3.26) 对式 (5.17) 中的第二项进行推导可以得到：

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}(\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}+\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J})\\
&=\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}\Psi_I(n_\alpha\boldsymbol{p}_{,\beta}^{[p-2]T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}+\boldsymbol{p}_{,\xi}^{[p-2]T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}s_\alpha n_\beta s_\xi)d\Gamma\\
&+\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}(n_\gamma\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}_{,\eta}^{[p-2]}+\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}_{,\xi}^{[p-2]}s_\gamma n_\eta s_\xi)\Psi_J d\Gamma\\
&-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}\Psi_{I,n}\boldsymbol{p}^{[p-2]T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}n_\alpha n_\beta d\Gamma-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}^{[p-2]}n_\gamma n_\eta\Psi_{J,n}d\Gamma\\
&-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}[[\Psi_I\boldsymbol{p}^{[p-2]T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}n_\alpha s_\beta]]_{x\in c_w\cap c_C}-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}[[\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}^{[p-2]}n_\gamma s_\eta\Psi_J]]_{x\in c_w\cap c_C}\\
&=-\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}\Psi_I(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}(n_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\beta}+s_\alpha n_\beta s_\xi\frac{\partial}{\partial x_\xi}))\tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta}d\Gamma\\
&-\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}(n_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\eta}+s_\gamma n_\eta s_\xi\frac{\partial}{\partial x_\xi}))\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J d\Gamma\\
&+\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}\Psi_{I,n}(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\alpha n_\beta)\tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta}d\Gamma+\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma n_\eta)\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_{J,n}d\Gamma\\
&+\sum_{C=1}^{NC}[[\Psi_I(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma s_\eta)\tilde{\Psi}_{J,\gamma\eta}]]_{x\in c_w\cap c_C}+\sum_{C=1}^{NC}[[(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma s_\eta)\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J]]_{x\in c_w\cap c_C}\\
&=-\int_{\Gamma_w}\Psi_I\mathcal{V}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta}d\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}\Psi_{I,n}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta}d\Gamma+[[\Psi_I\mathcal{P}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{J,\alpha\beta}]]_{x\in c_w}\\
&-\int_{\Gamma_w}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J d\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_{J,n}d\Gamma+[[\mathcal{P}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J]]_{x\in c_w}\\
&=\tilde{\boldsymbol{K}}
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

通过引入式 (5.14)、(3.26) 对式 (5.17) 中的第三项进行推导可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta J}\\
&=\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}(n_\gamma\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}_{,\eta}^{[p-2]}+\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}_{,\xi}^{[p-2]}s_\gamma n_\eta s_\xi)\Psi_J d\Gamma\\
&-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}^{[p-2]}n_\gamma n_\eta\Psi_{J,n}d\Gamma-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}[[\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}^{[p-2]}n_\gamma s_\eta\Psi_J]]_{x\in c_w\cap c_C}\\
&=\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}(n_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\eta}+s_\gamma n_\eta s_\xi\frac{\partial}{\partial x_\xi}))\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J d\Gamma\\
&-\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma n_\eta)\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_{J,n}d\Gamma-[[(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma s_\eta)\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J]]_{x\in c_w\cap c_C}\\
&=\int_{\Gamma_w}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J d\Gamma-\int_{\Gamma_\theta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_{J,n}d\Gamma+[[\mathcal{P}_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\Psi_J]]_{x\in c_w}\\
&=\bar{\boldsymbol{K}}
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

通过引入式 (5.13)、(3.26) 对式 (5.17) 中的第四项进行推导可以得到：

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta}\\
&=\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}(n_\gamma\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}_{,\eta}^{[p-2]}+\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}_{,\xi}^{[p-2]}s_\gamma n_\eta s_\xi)\bar{w}d\Gamma\\
&-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}^{[p-2]}n_\gamma n_\eta\bar{\theta}_n d\Gamma-[[\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}^{[p-2]}n_\gamma s_\eta\bar{w}]]_{x\in c_w\cap c_C}\\
&=-\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}(n_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\eta}+s_\gamma n_\eta s_\xi\frac{\partial}{\partial x_\xi}))\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{w}d\Gamma\\
&+\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma n_\eta)\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-[[(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma s_\eta\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{w})]]_{x\in c_w\cap c_C}\\
&=\int_{\Gamma_w}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{w}d\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma+[[\mathcal{P}_{\alpha\beta}\tilde{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{w}]]_{x\in c_w}\\
&=\tilde{\boldsymbol{f}}
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

通过引入式 (5.14)、(3.26) 对式 (5.17) 中的第五项进行推导可以得到：

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma\eta}\\
&=\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}(n_\eta\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}_{,\gamma}^{[p-2]}+\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}_{,\xi}^{[p-2]}s_\gamma n_\eta s_\xi)\bar{w}d\Gamma\\
&-\sum_{C=1}^{NC} D_{\alpha\beta\gamma\eta}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}^{T}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}^{[p-2]}n_\gamma n_\eta\bar{\theta}_n d\Gamma-[[\bar{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta I}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{p}^{[p-2]}n_\gamma s_\eta\bar{w}]]_{x\in c_w\cap c_C}\\
&=\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_w\cap\Gamma_C}(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}(n_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\eta}+s_\gamma n_\eta s_\xi\frac{\partial}{\partial x_\xi}))\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{w}d\Gamma\\
&-\sum_{C=1}^{NC}\int_{\Gamma_\theta\cap\Gamma_C}(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma n_\eta)\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma-[[(-D_{\alpha\beta\gamma\eta}n_\gamma s_\eta\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{w})]]_{x\in c_w\cap c_C}\\
&=\int_{\Gamma_w}\mathcal{V}_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{w}d\Gamma+\int_{\Gamma_\theta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{\theta}_{\boldsymbol{n}}d\Gamma+[[\mathcal{P}_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{I,\alpha\beta}\bar{w}]]_{x\in c_w}\\
&=\bar{\boldsymbol{f}}
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

附录 C　无网格法优化的数值积分方案

表 C.1　无网格法优化的数值积分方案——二次梯度

数值积分点	ξ	η	γ	w	w_B
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	
	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

表 C.2　无网格法优化的数值积分方案——四次梯度

数值积分点	ξ	η	γ	w	w_B
	η_a	$\frac{1-\xi_a}{2}$	$\frac{1-\xi_a}{2}$	w_a	
	η_b	η_b	$\frac{1-\xi_b}{2}$	w_b	
$\xi_a = 0.10810301816870, w_a = 0.223381589678011$ $\xi_b = 0.816847572980459, w_b = 0.109951743655322$					
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$	
	1	0	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{135}$	$\frac{16}{46}$
	$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	0	$\frac{49}{540}$	$\frac{49}{180}$

参考文献

[1] Hughes T J. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis[M]. Mineola, New York: Dover Publications, 2000.

[2] Zienkiewicz O C, Taylor R L, Fox D. Computer procedures for finite element analysis[M]. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, 2014.

[3] Stein E, de Borst R, Hughes T J R. Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition || Identification of Material Parameters for Constitutive Equations [Z]. 2018: 1-21.

[4] Bessa M, Elkhodary K I, Liu W K, et al. Nonlinear finite elements for continua and structures, second edition. Solution manual[M]. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, 2013.

[5] Chen J S, Hillman M, Chi S W. Meshfree methods: Progress made after 20 Years [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2017, 143(4): 04017001.

[6] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4): 3-47.

[7] 邓立克, 王东东, 王家睿, 等. 薄板分析的线性基梯度光滑伽辽金无网格法[J]. 力学学报, 2019(3): 13.

[8] 陈嵩涛, 段庆林, 马今伟. 几何非线性分析的高效高阶无网格法[J]. 计算力学学报, 2020(006): 037.

[9] 高欣, 段庆林, 李书卉, 等. 裂纹问题的一致性高阶无网格法[J]. 计算力学学报, 2018(3): 275-282.

[10] Lucy L. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. Astrophys Journal, 1977, 82.

[11] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181(3): 375-389.

[12] Auricchio F, Da Veiga L B, Hughes T J R, et al. Isogeometric collocation methods [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2010, 20(11): 2075-2107.

[13] Wang D, Wang J, Wu J. Superconvergent gradient smoothing meshfree collocation method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 340: 728-766.

[14] Wang D, Wang J, Wu J. Arbitrary order recursive formulation of meshfree gradients with application to superconvergent collocation analysis of Kirchhoff plates [J]. Computational Mechanics, 2020, 65(3): 877-903.

[15] Gomez H, Lorenzis L D. The variational collocation method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 309: 152-181.

[16] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements[J]. Computational Mechanics, 1992, 10(5): 307-318.

[17] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229-256.

[18] De S, Bathe K J. The method of finite spheres with improved numerical integration [J]. Computers & Structures, 2001, 79(22): 2183-2196.

[19] Carpinteri A, Ferro G, Ventura G. The partition of unity quadrature in meshless methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 54: 987-1006.

[20] 王冰冰, 段庆林, 李书卉, 等. 薄板弯曲分析的节点积分高阶无网格法[J]. 计算力学学报, 2019, 36(1): 103-109.

[21] Melenk J M, Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory

and applications[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1): 289-314.

[22] 吴俊超, 邓俊俊, 王家睿, 等. 伽辽金型无网格法的数值积分方法[J]. 固体力学学报, 2016, 37(3): 208-233.

[23] Wang D, Wu J. An efficient nesting sub-domain gradient smoothing integration algorithm with quadratic exactness for Galerkin meshfree methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 298: 485-519.

[24] Wang D, Wu J. An inherently consistent reproducing kernel gradient smoothing framework toward efficient Galerkin meshfree formulation with explicit quadrature[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 349: 628-672.

[25] Chen J S, Wu C T, Yoon S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(2): 435-466.

[26] Chen J S, Hillman M, Rüter M. An arbitrary order variationally consistent integration for Galerkin meshfree methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2013, 95(5): 387-418.

[27] Duan Q, Li X, Zhang H, et al. Second-order accurate derivatives and integration schemes for meshfree methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012, 92(4): 399-424.

[28] Duan Q, Gao X, Wang B, et al. Consistent element-free Galerkin method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014, 99(2): 79-101.

[29] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, 20(8-9): 1081-1106.

[30] Babuška I, Melenk J M. The partition of unity method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(4): 727-758.

[31] Strouboulis T, Copps K, Babuška I. The generalized finite element method[J].

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(32): 4081-4193.

[32] Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43 (5): 839-887.

[33] Long S, Atluri S N. A Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Solving the Bending Problem of a Thin Plate[Z]. 2002.

[34] Liu Y, Hon Y C, Liew K M. A meshfree Hermite-type radial point interpolation method for Kirchhoff plate problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66(7): 1153-1178.

[35] Millán D, Rosolen A, Arroyo M. Thin shell analysis from scattered points with maximum-entropy approximants[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 85(6): 723-751.

[36] Oh H S, Davis C, Jeong J W. Meshfree particle methods for thin plates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 209–212: 156-171.

[37] Chen L, Cheng Y M, Ma H P. The complex variable reproducing kernel particle method for the analysis of Kirchhoff plates[J]. Computational Mechanics, 2015, 55(3): 591-602.

[38] Thai C H, Nguyen T N, Rabczuk T, et al. An improved moving Kriging meshfree method for plate analysis using a refined plate theory[J]. Computers & Structures, 2016, 176: 34-49.

[39] Wang L, Liu Y, Zhou Y, et al. A gradient reproducing kernel based stabilized collocation method for the static and dynamic problems of thin elastic beams and plates[J]. Computational Mechanics, 2021, 68(4): 709-739.

[40] 程玉民, 彭妙娟, 李九红. 复变量移动最小二乘法及其应用[J]. 力学学报, Fri Nov 18 00:00:00 CST 2005, 37(6): 719-723.

[41] 覃先云, 张见明, 李光耀, 等. 边界面法分析三维实体线弹性问题[J]. 固体力学学报, Fri Oct 28 00:00:00 CST 2011, 32(5): 500-506.

[42] 廉艳平, 张帆, 刘岩, 等. 物质点法的理论和应用[J]. 力学进展, Mon Mar 25 00:00:00 CST 2013, 43(2): 237-264.

[43] 张雄, 刘岩, 张帆, 等. 极端变形问题的物质点法研究进展
Recent progress of material point method for extreme deformation problems[J]. 计算力学学报, 2017(1): 1-16.

[44] 高效伟, 徐兵兵, 吕军, 等. 自由单元法及其在结构分析中的应用[J]. 力学学报, Sat May 18 00:00:00 CST 2019, 51(3): 703-713.

[45] Nguyen V P, Rabczuk T, Bordas S, et al. Meshless methods: A review and computer implementation aspects[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2008, 79(3): 763-813.

[46] Liu G R. Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, Second Edition[M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2009.

[47] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展, 2009(1): 36.

[48] Wang D, Zhang H. A consistently coupled isogeometric–meshfree method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 268: 843-870.

[49] Yreux E, Chen J S. A quasi-linear reproducing kernel particle method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2017, 109(7): 1045-1064.

[50] Koester J J, Chen J S. Conforming window functions for meshfree methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 347: 588-621.

[51] Rohit G, Prajapati J, Patel V. Coupling of Finite Element and Meshfree Method for Structure Mechanics Application: A Review[J]. International Journal of Computational Methods, 2018, 17.

[52] 王莉华, 阮剑武. 配点型无网格法理论和研究进展[J]. 力学季刊, 2021, 42(4): 20.

[53] 刘宇翔, 王东东, 樊礼恒, 等. 基于卷积神经网络的无网格形函数影响域优化研究[J]. 固体力学学报, Mon Jun 28 00:00:00 CST 2021, 42(3): 302-319.

[54] 朱志辉, 冯乾朔, 肖权清, 等. 基于 DIC 技术和无网格法的裂尖应变场分析方法[J]. 土木工程学报, 2021, 54(6): 11.

[55] Sriram V, Ma Q W. Review on the local weak form-based meshless method (MLPG): Developments and Applications in Ocean Engineering[J]. Applied Ocean Research, 2021, 116: 102883.

[56] 陈健, 王东东, 刘宇翔, 等. 无网格动力分析的循环卷积神经网络代理模型[J]. 力学学报, 2022, 54(3): 732-745.

[57] 李煜冬, 傅卓佳, 汤卓超. 功能梯度碳纳米管增强复合材料板弯曲和模态的广义有限差分法[J]. 力学学报, Fri Feb 18 00:00:00 CST 2022, 54(2): 414-424.

[58] Babuška I, Banerjee U, Osborn J E, et al. Quadrature for meshless methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 76(9): 1434-1470.

[59] Wu J, Wang D. An accuracy analysis of Galerkin meshfree methods accounting for numerical integration[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 375: 113631.

[60] Dolbow J, Belytschko T. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods[J]. Computational Mechanics, 1999, 23(3): 219-230.

[61] Wang J, Ren X. A consistent projection integration for Galerkin meshfree methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 414: 116143.

[62] Chen J S, Pan C, Wu C T, et al. Reproducing Kernel Particle Methods for large deformation analysis of non-linear structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1): 195-227.

[63] 曹阳, 陈莹婷, 姚林泉. 无单元 Galerkin 方法施加本质边界条件研究进展[J]. 力学季刊, 2020, 41(4): 591-612.

[64] Fernández-Méndez S, Huerta A. Imposing essential boundary conditions in meshfree methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(12): 1257-1275.

[65] Kaljević I, Saigal S. An improved element free Galerkin formulation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(16): 2953-2974.

[66] Liu D, Cheng Y M. The interpolating element-free Galerkin (IEFG) method for three-dimensional potential problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2019, 108: 115-123.

[67] 陈莘莘, 周文博, 胡常福. 基于插值型无单元 Galerkin 法的复合材料层合板自由振动分析[J]. 应用力学学报, 2021, 38(3): 1280-1285.

[68] 黄娟, 姚林泉. 改进广义移动最小二乘近似的无网格法[J]. 力学季刊, 2007, 28(3): 461-470.

[69] Chen J S, Wang H P. New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 187(3): 441-468.

[70] Hillman M, Lin K C. Consistent weak forms for meshfree methods: Full realization of h-refinement, p-refinement, and a-refinement in strong-type essential boundary condition enforcement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 373: 113448.

[71] Zhu T, Atluri S. A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method [J]. Computational Mechanics, 1998, 21: 211-222.

[72] Wang D, Sun M, Xie P. A Boundary Enhancement for the Stabilized Conforming Nodal Integration of Galerkin Meshfree Methods[J]. International Journal of Computational Methods, 2015, 12(02): 1550009.

[73] Ventsel E, Krauthammer T, Carrera E. Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications[M]. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2002.

[74] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 广义变分原理, 1985.

[75] Mohammadi R K, Nasri A, Ghaffary A. TADAS dampers in very large deformations[J]. International Journal of Steel Structures, 2017, 17(2): 515-524.

[76] Kim Y J, Ahn T S, Bae J H, et al. Experimental study of using cantilever type steel plates for passive energy dissipation[J]. International Journal of Steel Structures, 2016, 16(3): 959-974.

致谢

时光荏苒，岁月如梭，三年的研究生生活一晃而过，收获良多。在这三年间，我认识到了学习的能力至关重要，懂得了怎么去寻找信息，怎么提出问题，怎么更好的提升效率，把工作做得更完善；在人际交往方面，也成长得更为落落大方。

在这三年间，所遇皆良人。首先，很感谢赵珧冰老师，吴俊超老师在这三年研究生生涯中给予我的照顾和悉心指导，不管是学习上还是生活中，您都给予了我很大帮助和鼓励，我很荣幸成为您课题组中的一员。对待科研，您教会了我严谨细致，条理清晰，态度很重要，细节之处不可忽视，您的专业知识和丰富的经验带给了我很大的影响，生活中，我们亦师亦友，这三年的经历对我而言是一段珍贵的历程。其次，我也很感谢师弟徐洋涛，在我完成硕士论文期间给予我的帮助和解惑，感谢我舍友，陪伴我度过了很美好的三年。最后我很感谢我父母对我的支持和爱护，一直以来给予我无微不至的关怀，永远都是我最有力的后盾。

再次表达我深切的谢意，感谢在我完成这篇论文的过程给予指导和帮助的众人。

作者攻读硕士学位期间的科研成果