## 第1章 薄板问题

## 薄板控制方程 1.1

考虑厚度为 h 的薄板,根据 kirchhoff 薄板假设将薄板 x,y,z 方向上的总位移定义为  $\check{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ : 此时,位移  $\check{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$  可以表示为:

式中 $u_{\alpha}$ 表示薄板中面处x,y方向上的位移,w表示挠度。

考虑经典的线弹性本构关系:

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)$$
(1.2)

其中, $\sigma$  为柯西应力,C 为四阶弹性张量, $\varepsilon$  为应变, $\nabla$  为梯度算子,":"为双点积张量缩并运 算符号。

根据式 (1.2) 得出有关 kirchhoff 薄板假设的应变关系式如下:

$$\begin{cases}
\breve{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\breve{u}_{\alpha,\beta} + \breve{u}_{\beta,\alpha}) = \varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}x_3 & \alpha, \beta = 1, 2 \\
\breve{\varepsilon}_{3i} = \breve{\varepsilon}_{i3} = 0 & i = 1, 2, 3
\end{cases}$$
(1.3)

其中:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$$
(1.4)

式中, $\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$  为曲率张量  $\kappa$  的分量 通过式 (1.2)、(1.3) 得出有关 kirchhoff 薄板假设的应力关系式如下:

$$\breve{\sigma}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}\breve{\varepsilon}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}(\varepsilon_{\gamma\eta + x_3\kappa_{\gamma\eta}}) \tag{1.5}$$

根据最小势能原理得出的势能泛函关系为:

$$\Pi(\check{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\check{\Omega}} \check{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{C} : \check{\boldsymbol{\varepsilon}} d\check{\Omega} - \int_{\check{\Omega}} \check{\boldsymbol{u}} \, \boldsymbol{b} d\check{\Omega} - \int_{\Gamma^t} \check{\boldsymbol{u}} \, \boldsymbol{t} d\Gamma$$
(1.6)

将式 (1.5)、(1.3) 代入式 (1.6) 中的第一项可以得到:

$$\int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} d\Omega = \int_{\Omega} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} x_3) C_{\alpha\beta\gamma\eta} (\varepsilon_{\gamma\eta} + x_3 \kappa_{\gamma\eta}) dx_3 d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \varepsilon_{\gamma\eta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta} \frac{h^3}{12} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \kappa_{\gamma\eta} d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega$$
(1.7)

根据式 (1.7) 可以划分为两个独立的问题。即具有变量  $\check{u}_{\alpha}$  的传统弹性力学问题和具有变量 w 的薄板问题, 能量泛函关系式 (1.6) 拆分为:

$$\Pi(\mathbf{\breve{u}}) = \Pi^{E}(\mathbf{\breve{u}}) + \Pi^{P}(\mathbf{\breve{u}}) \tag{1.8}$$

## 1.2 弹性力学问题伽辽金弱形式

传统弹性力学问题的势能泛函的表达式为:

$$\Pi^{E}(\boldsymbol{\check{u}}) = \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\tilde{\Omega} - \int_{\tilde{\Omega}} \boldsymbol{\check{u}} \, \boldsymbol{b} d\tilde{\Omega} - \int_{\Gamma^{t}} \boldsymbol{\check{u}} \, \boldsymbol{t} d\Gamma$$
(1.9)

这里采用拉格朗日乘子法在伽辽金无网格法施加强制边界条件,即在弹性力学问题的势能泛函 (1.9) 中引入位移强制边界条件对应的约束项,相应的势能泛函为:

$$\bar{\Pi}^{E}(\boldsymbol{\check{u}},\lambda) = \Pi^{E}(\boldsymbol{\check{u}}) - \int_{\Gamma^{g}} \lambda(\boldsymbol{\check{u}} - \boldsymbol{g}) d\Gamma$$
(1.10)

其中  $\lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_{sd}}\}^T$  为拉格朗日乘子, $\Pi^E(\check{u})$  是式 (1.9) 定义的泛函。式 (1.10) 所表示的泛函的驻值条件为:

$$\delta \bar{\Pi}^{E}(\boldsymbol{\breve{u}}, \lambda) = \delta \Pi^{E}(\boldsymbol{\breve{u}}) - \int_{\Gamma^{u}} \delta \boldsymbol{\breve{u}} \, \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^{g}} \delta \lambda \, (\boldsymbol{\breve{u}} - \boldsymbol{g})$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\tilde{\Omega} - \int_{\tilde{\Omega}} \boldsymbol{\breve{u}} \, \boldsymbol{b} d\tilde{\Omega} - \int_{\Gamma^{t}} \boldsymbol{\breve{u}} \, \boldsymbol{t} d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma^{g}} \delta \boldsymbol{\breve{u}} \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma^{g}} \delta \lambda \, (\boldsymbol{\breve{u}} - \boldsymbol{g}) d\Gamma$$

$$= 0$$

$$(1.11)$$