渡河问题

1. 问题分析

已知：

- 河宽：s1，s2，s3，……，sn
- 河流速度：v1，v2，v3，……，vn
- 渡河速度：v
- 渡河时间：T

求：

渡每条河时与沿河宽方向的夹角 a1，a2，a3，……，an 使得，沿河流方向的位移最大

2. 问题求解

即要在条件：

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{v \cdot cosa_i}$$

下，使得：

$$\mathrm{dH} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{v \cdot cosa_i}(v_i + v \cdot sina_i)$$

取得最大值，属于条件极值问题。

设：

$$\mathrm{F} = \mathrm{dh} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{v \cdot cosa_i} - T\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{v \cdot cosa_i}(v_i + v \cdot sina_i) - \lambda(\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{v \cdot cosa_i} - T)$$

即要：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_i} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{v} \cdot \frac{cos^2 a_i + (v_i + v \cdot sina_i - \lambda) sina_i}{cos^2 a_i} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

故：

$$cos^2 a_i + (v_i + v \cdot sina_i - \lambda) sina_i = 0$$

由此可求出：

$$cosa_i = f_i(\lambda)$$

带入：

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{v \cdot cosa_i}$$

求出λ；

继而求出：

$$a_i = \arccos\left(f_i(\lambda)\right)$$