



数学分析

作者: hapo

时间: December 19, 2022



目录

| | | |
|----------|------------------------|-----------|
| 1 | 集合与映射 | 2 |
| 2 | 实数的完备性 | 3 |
| 2.1 | 数列极限 | 4 |
| 2.2 | 无穷大量 | 7 |
| 2.2.1 | 无穷大的运算 | 8 |
| 2.3 | 收敛准则 | 9 |
| 3 | 函数极限与连续函数 | 16 |
| 3.1 | 函数极限和数列极限的关系 | 18 |
| 3.2 | 单侧极限 | 19 |
| 3.3 | 函数极限定义的扩充 | 19 |

记录本书的原因是因为我觉得自己的数学分析实在太烂了。因此我决定使用费曼学习法。这是一个链式反应，在我学习随机过程的时候，我发现自己的概率论太差了，而当我学习概率论的时候，我又发现我的测度论太差了，而我学习测度论的时候，我最终发现，我差的是数学分析。而这个最初始的问题是我并没有系统地学过数学分析。而在学习数学分析的过程中，我发现我对好多概念并不明晰，这使得学习的进度缓慢，并且经常容易在概念上卡壳，而卡壳结束后又很快忘记。因此，为了能够更好地记住，我决定使用费曼学习法。在此，我记录下我学习数学分析的过程。

第 1 章 集合与映射

定义 1.1 (集合)

是具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集的总体，其中的对象称为集合的元素。



集合通常记为 A, B, C, X, Y

元素通常记为 s, t, a, b, x, y

x 是集合 S 的元素，记为 $x \in S$

第2章 实数的完备性

内容提要

有理数的定义 2.2

在本章中，我们将介绍实数的完备性。在介绍实数之前，我们需要将实数定义或者说引入。而对于实数的定义是有很多的，而我在此介绍无穷十进制小数表示和戴德金(Dedekind)分割。这部分我将结合陈纪修教授的教材和Ayumu的讲义。

在引入实数之前，我们需要先介绍有理数，而在介绍有理数之前，我们需要规定一些常用集合的记号。而介绍常用集合，则需要先介绍集合(set)，在此我们并不介绍集合，我们暂时默认我们已经知道了集合的概念，将来我们会对该部分内容进行扩充。现在让我们来列举一些常用的集合。

定义 2.1 (常用集合表示)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{n | n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$$

在定义了以上的集合表示之后，我们就能以上的符号来表示有理数：

定义 2.2 (有理数)

若一个数 x 可以表示成 $\frac{q}{p}$ 的形式，其中 $q \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}^+$ ，则称 x 为有理数(rational number)。而由有理数组成的集合称为有理数集，有理数集常用 \mathbb{Q} 表示，其可以表示为：

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+\}$$

在这里，我们可以看到 p 只需要属于 \mathbb{Z}^+ ，这是因为若 x 为负的，我们总可以规定负号出现在分子上。

有理数对加减乘除都封闭，并且我们在有理数上定义了大小关系，即有理数也是良序的。但是它并不能满足研究所需。例如，存在长度无法用有理数表示。并且有理数之间存在“空隙”，即有理数不连续。而在我们之后的研究中，我们往往需要研究连续性，因此我们需要对有理数进行扩充。在这之前，我们先来证明确实有一些数无法用有理数表示。

命题 2.1

$\sqrt{2}$ 不是有理数。

证明 我们用反证法。假设 $\sqrt{2}$ 为有理数，那么存在 $q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$ ，使得 $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ 。

而且有的函数在实数域和有理数域上的表现完全不一样，比如狄利克雷(dirichlet)函数。

定理 2.1 (确界存在定理—实数系连续性定理)

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。

2.1 数列极限

定义 2.3 (数列极限的定义)

对于数列 $\{a_n\}$, 存在一个实常数 a , 对 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \epsilon$ 成立, 则称 $\{a_n\}$ 收敛(convengent)于 a 或者 $\{a_n\}$ 的极限(limit)为 a , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{或者} \quad a_n \rightarrow a (n \rightarrow +\infty)$$

若不存在实数 a , 满足上述性质, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散(divergent)。



一个数列收敛与否, 收敛的话, 收敛于哪个数, 这与数列的前有限项无关。

定义 2.4 (无穷小量的定义)

以零为极限的变量称为无穷小量。



命题 2.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1 (q < 1)$$



证明

命题 2.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$



证明

命题 2.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$



证明

命题 2.5

设 $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$



证明

定理 2.2 (数列极限的唯一性)

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

则

$$a = b$$



证明

定义 2.5

1. 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立 $x_n \leq M$, 则称 M 是 $\{x_n\}$ 的一个上界, 或称 $\{x_n\}$ 有上界。
 2. 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立 $x_n \geq m$, 则称 m 是 $\{x_n\}$ 的一个下界, 或称 $\{x_n\}$ 有下界。
- $\{x_n\}$ 既有上界又有下界, 则称 $\{x_n\}$ 有界。
 $\{x_n\}$ 有界的另一个定义: $\exists X \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{N}^+$, 成立 $|x_n| \leq X$



定理 2.3 (数列极限的有界性)

若 $\{x_n\}$ 的极限存在, 则 $\{x_n\}$ 有界。



证明

定理 2.4 (数列极限的保序性)

存在两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \quad \text{且} \quad a < b$$

则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $x_n < y_n$ 。



证明

引理 2.1 (数列极限的保序性逆命题)

对于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 若 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, x_n \leq y_n$, 则 $a \leq b$ 。



证明

引理 2.2

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n > \frac{b}{2} > 0$ 。
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b < 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n < \frac{b}{2} < 0$ 。



证明 利用数列极限的保序性证明。当 $b > 0$ 时, 取 $\{x_n = \frac{b}{2}\}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{2} < b$, 由数列极限的保序性可知, $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $y_n > x_n = \frac{b}{2}$, 证毕。

同理可证明 $b < 0$ 的情况。

以上推论可以合起来写为:

引理 2.3

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n| > \frac{|b|}{2} > 0$ 。



证明 除了上一个推论那样分开来证明, 还可以如下证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - b| < \epsilon$ 。

由三角不等式得:

$$|y_n - b| > ||y_n| - |b||$$

即:

$$||y_n| - |b|| < |y_n - b| < \epsilon$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = |b|$ 。之后的证明同上。

定理 2.5 (数列极限的夹逼性定理)

对于数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, 若 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 成立 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$



证明 $\forall \epsilon, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, |x_n - a| < \epsilon$, 即 $x_n - a > -\epsilon$ 。

同理, $\forall \epsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, |y_n - a| < \epsilon$, 即 $z_n - a < \epsilon$ 。

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则:

$$-\epsilon < x_n - a < y_n - a < z_n - a < \epsilon$$

即:

$$-\epsilon < y_n - a < \epsilon$$

即:

$$|y_n - a| < \epsilon$$

总结起来即为: $\forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - a| < \epsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, 证毕。

命题 2.6

求:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

定理 2.6 (数列极限的四则运算)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b} (b \neq 0)$

证明

命题 2.7

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - (-2)^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}$$

证明

命题 2.8

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

证明

命题 2.9

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$$

证明

命题 2.10

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$

证明

有限个

命题 2.11

设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$



证明

命题 2.12

若 $\{x_n\}$ 是无穷小量, $\{y_n\}$ 有界 ($|y_n| < 0$), 则 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷小量。



证明

2.2 无穷大量

定义 2.6 (无穷大量)

对于一个数列 $\{x_n\}$, 若对于任意给定的 $G > 0$, 可以找到正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $|x_n| > G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

若对于该数列 $\{x_n\}$, $|x_n| > G$ 可以恒表示为 $x_n > G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是正无穷大量, 记为 $+\infty$ 。

若对于该数列 $\{x_n\}$, $|x_n| > G$ 可以恒表示为 $x_n < -G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是负无穷大量, 记为 $-\infty$ 。



命题 2.13

设 $|q| > 1$, 证明 $\{q^n\}$ 是无穷大量。



证明

命题 2.14

证明 $\{\frac{n^2-1}{n+5}\}$ 是无穷大量。



证明

引理 2.4

若 $x_n \neq 0$, 则 $\{x_n\}$ 是无穷大量的充要条件是 $\{\frac{1}{x_n}\}$ 是无穷小量。



证明

引理 2.5

设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\{y_n\}$ 满足 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N_0$, 有 $|y_n| \geq \delta > 0$, 则 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷大量。



证明

引理 2.6

设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\{y_n\}$ 极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, 则 $\{x_n y_n\}$ 与 $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ 都是无穷大量。



证明

命题 2.15

$\{\frac{n}{\sin(n)}\}$ 和 $\{n \cdot \arctan(n)\}$ 是无穷大量。



证明

命题 2.16

讨论极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_l}$$

其中 $a_0, b_0 \neq 0, k, l \in \mathbb{Z}^+$



证明 从分子上提出 n^k , 分母上提出 n^l 次

2.2.1 无穷大的运算

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则记 $\{x_n\}$ 为“ $+\infty$ ”。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 则记 $\{y_n\}$ 为“ $+\infty$ ”。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, 则记 $\{z_n\}$ 为“ $+\infty$ ”。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$, 则记 $\{w_n\}$ 为“0”。

定理 2.7

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
3. $(+\infty) \pm (\text{有界量}) = +\infty$
4. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
5. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

**定义 2.7**

1. $(+\infty) - (+\infty) = ?$
2. $(+\infty) + (-\infty) = ?$
3. $0 \cdot \infty = ?$
4. $\frac{0}{0} = ?$
5. $\frac{\infty}{\infty} = ?$
6. ...

上述情况称为“待定型”

**定义 2.8**

若数列 $\{x_n\}$, 有 $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 则称数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 记为 $\{x_n\} \uparrow$ 。若有 $x_n < x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 严格单调增加, 记为 $\{x_n\}$ 严格 \uparrow 。

若数列 $\{x_n\}$, 有 $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 则称数列 $\{x_n\}$ 单调减少, 记为 $\{x_n\} \downarrow$ 。若有 $x_n > x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 严格单调减少, 记为 $\{x_n\}$ 严格 \downarrow 。

**定理 2.8 (Stolz定理)**

假设 $\{y_n\}$ 严格单调增加数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ 。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a (a \text{ 为有限数, } +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$$



证明

命题 2.17

用Stolz定理证明, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$



证明

命题 2.18

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$



证明

命题 2.19

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2}$$



证明

2.3 收敛准则

收敛数列一定有界, 但是收敛数列不一定有界。

1. 那么有界数列加什么条件收敛?
2. 有界数列不加条件的情况下, 可以得到什么弱一些的结论?

定理 2.9

单调有界数列必定收敛。



证明 不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加, 有上界。

定理意义: 从定义证明时, 我们需要知道极限 a , 相当于验证极限为 a , 而当极限未知时, 则无法证明。而定理则从数列本身的性质出发, 不需要知道极限是多少。

引理 2.7

若数列 $\{x_n\}$ 从第 N 项之后开始单调有界, 则数列 $\{x_n\}$ 依旧收敛。



证明 考虑 $n \geq N$ 后的数组成的数列, 设 $n_1 = n - N + 1$, 则 $\{x_{n_1}\}$ 单调有界。由于 $\{x_{n_1}\} (n_1 \geq 1)$ 单调有界, 则 $\{x_{n_1}\} (n_1 \geq 1)$ 收敛。即 $\exists a, \forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n_1 > N_1$, 有 $|x_{n_1} - a| < \epsilon$ 。那么我们可以取 $N_2 = N_1 + N - 1$, 此时 $\forall \epsilon, \exists N_2 = N_1 + N - 1, \forall n > N_2$, 有 $|x_n - a| < \epsilon$, 即数列 $\{x_n\}$ 极限存在。

命题 2.20

设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限。



证明

命题 2.21

设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), n = 1, 2, 3, \dots$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限。

**证明**

无穷小量的趋近速度。

命题 2.22

对于上题的 $\{x_n\}$, 求极限, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$

**证明****命题 2.23**

$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限。

**证明**

兔子

命题 2.24 (Fibonacci 数列)

$\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列, 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 讨论 $\{b_n\}$ 数列。

**证明**

接下来我们来研究 π 和 e

关于 π :

命题 2.25

证明 $\left\{L_n = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 收敛。求圆的面积公式。



证明 取 $t = \frac{180^\circ}{n(n+1)}$, 当 $n \geq 3$ 时, $nt \leq 45^\circ$ 。且由三角公式得:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]\tan(t)}$$

由于 $nt \leq 45^\circ$, 则 $\tan(kt) < 1 (k < n)$, 因此:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]\tan(t)} > \tan[(n-1)t] + \tan(t)$$

则:

$$\begin{aligned} \tan(nt) &> \tan[(n-1)t] + \tan(t) \\ \tan[(n-1)t] &> \tan[(n-2)t] + \tan(t) \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

则:

$$\tan(nt) > n \tan(t)$$

现在来考虑 $\sin[(n+1)t]$:

$$\begin{aligned}\sin[(n+1)t] &= \sin(nt)\cos(t) + \cos(nt)\sin(t) \\ &= \sin(nt)\cos(t) \left[1 + \frac{\tan(t)}{\tan(nt)} \right] \\ &< \sin(nt)\cos(t) \left[1 + \frac{1}{n} \right] \\ &< \sin(nt) \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

即:

$$n \sin[(n+1)t] < (n+1) \sin(nt)$$

将 $t = \frac{180^\circ}{n(n+1)}$ 代入得:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < (n+1) \sin\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right)$$

即该数列单调增加。

考虑到单位圆的面积:

$$S' > n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

并且单位圆的面积小于外接正方形的面积, 即:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < S' < 4$$

即:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < \frac{4}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

因为 $n \geq 3$, 所以:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 8$$

因此数列 $\left\{L_n = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 单调有界, 则该数列极限存在。

现在定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \pi$ 。

再来考虑单位圆的面积 S' , 设内接正多边形的面积为 S_1 , 外接正多边形的面积为 S_2 , 则 $S_1(n) < S' < S_2(n)$ 。

内接正多边形的面积为:

$$S_1(n) = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

外接正多边形的面积为:

$$S_2(n) = n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = n \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

并且根据数列极限的四则运算有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \pi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_2(n) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} = \pi$$

则根据夹逼性原理得:

$$S' = \pi$$

其中, 对于外接正多边形的面积, 考虑:

$$\begin{aligned}
 (n+1)\tan(nt) - n\tan[(n+1)t] &= (n+1)\frac{\sin(nt)}{\cos(nt)} - n\frac{\sin[(n+1)t]}{\cos[(n+1)t]} \\
 &= \frac{(n+1)\sin(nt)\cos[(n+1)t] - n\sin[(n+1)t]\cos(nt)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
 &= \frac{\sin(nt)\cos[(n+1)t] - n\sin(t)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
 &= \frac{\sin[(2n+1)t] - \sin(t) - 2n\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
 &= \frac{\sin[(2n+1)t] - (2n+1)\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]}
 \end{aligned}$$

并且当 $n \geq 3$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
 \sin[(2n+1)t] &= \sin(2nt)\cos(t) + \cos(2nt)\sin(t) < \sin(2nt) + \sin(t) \\
 \sin(2nt) &= \sin[(2n-1)t]\cos(t) + \cos[(2n-1)t]\sin(t) < \sin[(2n-1)t] + \sin(t) \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

因此:

$$\sin[(2n+1)t] < (2n+1)\sin(t)$$

因此:

$$(n+1)\tan(nt) < n\tan[(n+1)t]$$

即:

$$(n+1)\tan\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right) < n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

因此数列 $\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 单调递减。因为外接正多边形面积必然大于内接正方形, 因此:

$$n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) > 2$$

因此数列 $\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 单调有界, 则该数列极限存在。

关于 e :

命题 2.26

考虑两个数列:

$$\left\{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad \text{和} \quad \left\{y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

证明这两个数列极限存在且相等。

证明

定义 $\ln = \log_e$ 为自然对数, e 自然对数的底数。

命题 2.27

令 $a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$, ($p > 0$), 证明 $\{a_n\}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散。

证明

$p = 1$ 时, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ 为调和级数, 它是正无穷大量, 我们想知道它趋近无限的速度。

命题 2.28

证明

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

收敛。

**证明** 极限记为 γ , 称为欧拉常熟。 $\gamma > 0.577215$ **命题 2.29**

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$$

**证明** 除了夹逼准则, 还能用上一个数列相减计算。**命题 2.30**

$$d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

**证明**以上是与 e 相关的数列**定义 2.9 (闭区间套)**有一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足:

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \cdots$
2. $b_n - a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

则称这样的一列闭区间是一个闭区间套。

**定理 2.10 (闭区间套定理)**假如 $[a_n, b_n]$ 是一个闭区间套, 则存在唯一的实数 ξ , 它属于一切闭区间 $[a_n, b_n]$ 。且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$ 。**证明****定理 2.11**

实数集不可列。

**证明** 反证法

子列

定义 2.10

存在一个数列 $\{x_n\}$, 取一系列严格单调增加的正整数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$, 则 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$, 称为 $\{x_n\}$ 的一个子列, 记为 $\{x_{n_k}\}$, k 代表子列中的第 k 项, 又恰好是 $\{x_n\}$ 中的第 n_k 项。

其中 $n_k \geq k, \forall k, n_j > n_k, \forall j > k$ 。**定理 2.12**设 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则它的任何一个子列也收敛于 a 。即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ **证明**

可以用于证明数列不收敛。

命题 2.31

若 $\{x_n\}$ 存在两个子列收敛于不同的极限, 则 $\{x_n\}$ 发散。



证明

定理 2.13 (Bolzano-Weierstrass 定理)

有界数列必有收敛子列。



证明 设数列为 $\{x_n\}$, 因为数列有界, 所以 $\forall n > 0$, 存在 $a \leq x_n \leq b$, 则取 $[a_1, b_1] = [a, b]$ 。

将 $[a_1, b_1]$ 分为两个闭区间, 分别为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, 其中至少有一个区间包含无穷多个数列的元素, 因为若两个区间都有有限个数列元素, 则数列 $\{x_n\}$ 的元素有限。那么我们可以取包含无穷多个数列元素的区间为 $[a_2, b_2]$ 。

同理, 我们可以取出 $[a_3, b_3], [a_4, b_4], \dots$ 。每一个区间中都包含无穷多个数列元素。

对于这些区间, $\forall n > 0$, (1). $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, (2). $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$, 则这些闭区间组成了一个闭区间套。根据闭区间套定理, 存在唯一的实数 γ 属于一切闭区间 $[a_n, b_n]$ 。

则我们可以这样构造子列:

从 $[a_1, b_1]$ 中取 x_{n_1} , 使得 $n_1 > 0$, 这必然可以实现, 因为 $[a_1, b_1]$ 中有无限多个数列元素。

从 $[a_2, b_2]$ 中取 x_{n_2} , 使得 $n_2 > n_1$, 这必然可以实现, 因为 $[a_2, b_2]$ 中有无限多个数列元素, 即 $\forall n_1, \exists n_2 > n_1$ 。

从 $[a_3, b_3]$ 中取 x_{n_3} , 使得 $n_3 > n_2$, 这必然可以实现, 因为 $[a_3, b_3]$ 中有无限多个数列元素, 即 $\forall n_2, \exists n_3 > n_2$ 。

.....

对于子列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 取 $K = \max \{ [\log_2 (\frac{b-a}{\epsilon})] + 2, 1 \}$, $\forall k > K, b_k - a_k < \epsilon$, 同时 $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $\gamma \in [a_k, b_k]$, 则 $\forall k > K, |x_{n_k} - \gamma| < b_k - a_k < \epsilon$ 。

即 $\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+, \forall k > K, |a_{n_k} - \gamma| < \epsilon$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \gamma$, 该子列收敛于 γ 。

定理 2.14

假设 $\{x_n\}$ 是无界数列, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 它是无穷大量。



证明

Cauchy 收敛原理

定义 2.11

$\{x_n\}$ 满足:

$$\forall \xi > 0, \exists N, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \xi$$

则称 $\{x_n\}$ 为基本数列。



也可以是 $\forall m > n > N$

证明

命题 2.32

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

是否为基本数列。



证明

命题 2.33

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

是否为基本数列。

**证明****定理 2.15 (Cauchy收敛原理)** $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 是基本数列。**证明** 必要性:

充分性:

命题 2.34 $\{x_n\}$ 满足压缩性条件, 即

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k |x_n - x_{n-1}|, 0 < k < 1, \forall n = 2, 3, \dots$$

则 $\{x_n\}$ 是收敛的。**证明**

实数系的基本定理

1. 确界存在定理(实数系的连续性定理)
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Bolzano-Weierstrass定理
5. Cauchy收敛原理(实数系完备性)

以上都是在实数系中考虑, 实数系上的基本数列必然是收敛数列, 因此Cauchy收敛原理也被称为实数系的完备性定理。实数系有完备性, 有理数不具备完备性。例如 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 是有理数列, 但是它的极限是无理数。以上五个定理等价。我们需要证明这五个定理等价。从Cauchy收敛原理推出闭区间套定理, 再从闭区间套定理推出确界存在定理。

定理 2.16

实数系的完备性等价于实数系的连续性。

**证明** (1)Cauchy收敛原理 \Rightarrow 闭区间套定理。(2)闭区间套定理 \Rightarrow 确界存在定理。

第3章 函数极限与连续函数

函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

定义 3.1

$y = f(x)$ 在 $O(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ 上有定义, 如果存在一个数 A , 使得对任意给定的 $\epsilon > 0$, 可以找到 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 是 $f(x)$ 在 x_0 点的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或者 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$ 。如果不存在满足上述性质的 A , 则称 $f(x)$ 在 x_0 点极限不存在。



$O(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ 称为去心邻域。

命题 3.1

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$



证明

命题 3.2

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$



证明

命题 3.3

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$



证明

函数极限的性质

定理 3.1 (函数极限的唯一性)

设 A, B 都是 $f(x)$ 在 x_0 的极限, 则 $A = B$ 。



证明 证明类似证明数列极限的唯一性

定理 3.2 (函数极限的局部保序性)

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 x 有 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > g(x)$



证明 证明类似证明数列极限的保序性

引理 3.1

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, 则 $\exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta), |f(x)| > \frac{|A|}{2}$ 。



证明 请使用局部保序性证明

引理 3.2

假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 若 $\exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta)$, 有 $f(x) \geq g(x)$, 则 $A \geq B$



证明

定理 3.3 (函数极限的局部有界性)

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists \delta, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta), m \leq f(x) \leq M$, m, M 为固定实数。

若 $f(x)$ 在 x_0 有定义, 则在 x 满足 $|x - x_0| < \delta$ 的条件下, $\min\{m, f(x)\} \leq f(x) \leq \max\{M, f(x)\}$ 。



证明 请使用局部保序性证明

定理 3.4 (函数极限的夹逼性定理)

若 $\exists r > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < r)$, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$



证明

命题 3.4

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



证明 使用夹逼性证明。

再用数列逼近证明。

定理 3.5 (函数极限四则运算)

假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha A + \beta B$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$



证明

命题 3.5

求:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}$$

的极限。



证明

命题 3.6

求:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

的极限。



证明

3.1 函数极限和数列极限的关系

定理 3.6 (否定命题的分析表示)

$\{x_n\}$ 以 a 为极限: $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n - a| < \epsilon$ 。
 $\{x_n\}$ 不以 a 为极限: $\exists \epsilon > 0, \forall N, \exists n > N, |x_n - a| \geq \epsilon$



定理 3.7 (heine定理)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在的充分必要条件是: 对于任意的满足 $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的数列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛于 A 。



证明 证明必要性, 即证明:

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则对于任意的满足 $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的数列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛于 A 。

因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta)$, 成立 $|f(x) - A| < \epsilon$ 。

又因为对于 $\{x_n\}$, 有 $x_n \neq x_0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 即 $\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 成立 $0 < |x_n - x_0| < \delta$ 。

则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对于该 $\delta, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$, 且在该 δ 下有 $|f(x_n) - A| < \epsilon$ 。证明完毕。

证明充分性, 即证明:

若对于任意的满足 $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的数列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛于 A , 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

利用反证法, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$, 则 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x (0 < |x - x_0| < \delta)$, 使得 $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$

取 $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$, 则对于 ϵ_0 , 有:

$$\exists x_1 (0 < |x_1 - x_0| < 1), |f(x_1) - A| \geq \epsilon_0$$

$$\exists x_2 (0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}), |f(x_2) - A| \geq \epsilon_0$$

$$\exists x_3 (0 < |x_3 - x_0| < \frac{1}{3}), |f(x_3) - A| \geq \epsilon_0$$

.....

对于数列 $\{x_n\}$, 对于 $\epsilon_0, \forall n, |x_n - x_0| > \epsilon_0$ 恒成立。

即: $\exists \epsilon = \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N, |f(x_n) - A| > \epsilon$ 。则存在数列 $\{x_n\}$ 不收敛于 A 。这与条件矛盾, 则假设不成立。证明完毕。

命题 3.7

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处极限不存在。



证明

引理 3.3

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在并且有限(收敛)的充分必要条件是: 对任意满足 $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛。



证明

3.2 单侧极限

定义 3.2

假设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0)$ 有定义, 如果存在 $B, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (-\delta < x - x_0 < 0)$, 成立 $|f(x) - B| < \epsilon$, 则称 B 是 $f(x)$ 在 x_0 的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B$ ($f(x) \rightarrow B (x \rightarrow x_0^-)$)。

类似地, 假如存在 $C, \exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < x - x_0 < \delta)$, 成立 $|f(x) - C| < \epsilon$, 则称 C 是 $f(x)$ 在 x_0 的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = C$ ($f(x) \rightarrow C (x \rightarrow x_0^+)$)。

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$



命题 3.8

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



证明

命题 3.9

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ 2 \cos(x^2) & x \geq 0 \end{cases}$$



3.3 函数极限定义的扩充

可以将自变量 x 的趋向扩充成以下六种:

1. $x \rightarrow x_0$
2. $x \rightarrow x_0^+$
3. $x \rightarrow x_0^-$
4. $x \rightarrow +\infty$
5. $x \rightarrow -\infty$
6. $x \rightarrow \infty$

而应变量 $f(x)$ 的趋向可以扩充成以下四种:

1. $f(x) \rightarrow A$
2. $f(x) \rightarrow +\infty$
3. $f(x) \rightarrow -\infty$
4. $x \rightarrow \infty$

现在加上对应的分析表述, 对于自变量 x :

1. $x \rightarrow x_0 : \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta)$
2. $x \rightarrow x_0^+ : \exists \delta > 0, \forall x (0 < x - x_0 < \delta)$
3. $x \rightarrow x_0^- : \exists \delta > 0, \forall x (-\delta < x - x_0 < 0)$
4. $x \rightarrow +\infty : \exists X > 0, \forall x (x > X)$
5. $x \rightarrow -\infty : \exists X > 0, \forall x (x < -X)$
6. $x \rightarrow \infty : \exists X > 0, \forall x (|x| > X)$

对于应变量 $f(x)$:

1. $f(x) \rightarrow A : \forall \epsilon > 0, \dots, |f(x) - A| < \epsilon$
2. $f(x) \rightarrow +\infty : \forall G > 0, \dots, f(x) > G$
3. $f(x) \rightarrow -\infty : \forall G > 0, \dots, f(x) < -G$
4. $x \rightarrow \infty : \forall G > 0, \dots, |f(x)| > G$

命题 3.10

写出:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$$

的分析表述。



证明

命题 3.11

写出:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

的分析表述。



证明

命题 3.12

写出:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

的分析表述。



证明

命题 3.13

证明:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



证明

命题 3.14

证明

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$



证明

我们讲了函数极限的性质和函数极限的四则运算。讲函数极限的性质的时候是对于收敛函数来讨论的。对于扩充后的函数极限则不一定成立, 特别对于 ∞ 。性质要排除 ∞ , 四则运算要排除待定型。

对于扩充后的heine定理应该如何书写: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 充分必要条件: 对任意的满足 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ 的数列 $\{x_n\}$, 成立 $\{f(x_n)\}$ 收敛于A。

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且有限的充分必要条件是: 对任意满足 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ 的数列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛。