
# 数学分析

作者：hapo

时间：December 31, 2022

# 目录

记录本书的原因是因为我觉得自己的数学分析实在太烂了。因此我决定使用费曼学习法。这是一个链式反应，在我学习随机过程的时候，我发现自己的概率论太差了，而当我学习概率论的时候，我又发现我的测度论太差了，而我学习测度论的时候，我最终发现，我差的是数学分析。而这个最初始的问题是我并没有系统地学过数学分析。而在学习数学分析的过程中，我发现我对好多概念并不明晰，这使得学习的进度缓慢，并且经常容易在概念上卡壳，而卡壳结束后又很快忘记。因此，为了能够更好地记住，我决定使用费曼学习法。在此，我记录下我学习数学分析的过程。

# 第 1 章 集合与映射

**定义 1.1 (集合)**

是具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集的总体，其中的对象称为集合的元素。

集合通常记为A, B, C, X, Y
元素通常记为s, t, a, b, x, y
x是集合S的元素, 记为$x \in S$

# 第 2 章 实数的完备性

内容提要



在本章中，我们将介绍实数的完备性。在介绍实数之前，我们需要将实数定义或者说引入。而对于实数的定义是有很多的，而我在此介绍无穷十进制小数表示和戴德金(Dedekind)分割。这部分我将结合陈纪修教授的教材和Ayumu的讲义。

在引入实数之前，我们需要先介绍有理数，而在介绍有理数之前，我们需要规定一些常用集合的记号。而介绍常用集合，则需要先介绍集合(set)，在此我们并不介绍集合，我们暂时默认我们已经知道了集合的概念，将来我们会对该部分内容进行扩充。现在让我们来列举一些常用的集合。

**定义 2.1 (常用集合表示)**

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, \pm n, \cdots\}$

$\mathbb{Z}^+ = \{n | n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$

♣

在定义了以上的集合表示之后，我们就能以上的符号来表示有理数：

**定义 2.2 (有理数)**

若一个数x可以表示成$\frac{q}{p}$的形式，其中$q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$，则称x为**有理数**(rational number)。而由有理数组成的集合称为**有理数集**，有理数集常用$\mathbb{Q}$表示，其可以表示为：

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+\}$$

在这里，我们可以看到p只需要属于$\mathbb{Z}^+$，这是因为若x为负的，我们总可以规定负号出现在分子上。

♣

有理数对加减乘除都封闭，并且我们在有理数上定义了大小关系，即有理数也是良序的。但是它并不能满足研究所需。例如，存在长度无法用有理数表示。并且有理数之间存在“空隙”，即有理数不连续。而在我们之后的研究中，我们往往需要研究连续性，因此我们需要对有理数进行扩充。在这之前，我们先来证明确实有一些数无法用有理数表示。

**命题 2.1**

$\sqrt{2}$不是有理数。

♠

**证明** 我们用反证法。假设$\sqrt{2}$为有理数，那么存在$q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$，$p, q$互质，使得$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$，即$q^2 = 2p^2$。因为$q^2$可以被2整除，即$q^2$为偶数，则$q$为偶数。那么$q$可以表示为$q = 2m, m \in \mathbb{Z}$。代入上式中，得$p^2 = 2m^2$，即$p$也为偶数。这与互质矛盾，因此假设不成立，$\sqrt{2}$不是有理数。

**命题 2.2**

若n不是完全平方数，则$\sqrt{n}$不是有理数。

♠

**证明**

除了有些数无法用有理数表示外，有的函数在实数域和有理数域上的表现完全不一样,比如狄利克雷(dirichlet)函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x\text{是有理数} \\ 0 & x\text{是无理数} \end{cases}$$

**定理 2.1 (确界存在定理—实数系连续性定理)**

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。

证明

## 2.1 数列极限

**定义 2.3 (数列极限的定义)**

对于数列$\{a_n\}$, 存在一个实常数a, 对$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}^+$，使得当$n>N$时，$|a_n-a|<\epsilon$成立，则称$\{a_n\}$**收敛**(convengent)于a或者$\{a_n\}$的**极限**(limit)为a, 记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\quad \text{或者}\quad a_n\to a(n\to+\infty)$$

若不存在实数a, 满足上述性质, 则称数列$\{a_n\}$**发散**(divergent)。

在这里定义邻域的概念:$a$的$\epsilon$邻域$O(a,\epsilon)$为:$(a-\epsilon,a+\epsilon)$。

一个数列收敛与否，收敛的话，收敛于哪个数，这与数列的前有限项无关。

$\epsilon$可以先取一个固定值。

$N$可以先取一个大值。

**定义 2.4 (无穷小量的定义)**

以零为极限的变量称为**无穷小量**。

**命题 2.3**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=1$$

证明

**命题 2.4**

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0(0<|q|<1)$$

证明 因为$0<|q|<1$, 则$|q^n|=|q|^n<\epsilon$, 则:

$$n>\frac{\lg(\epsilon)}{\lg(|q|)}$$

因为$N\in\mathbb{N}^+$, 所以取$N=\max\left\{1,\left[\frac{\lg(\epsilon)}{\lg(|q|)}\right]\right\}$, 当$n>N$时, $|q^n-0|<\epsilon$, 即:

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0(0<|q|<1)$$

**命题 2.5**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

证明

**命题 2.6**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证明

**命题 2.7**

设$a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

证明

**定理 2.2 (数列极限的唯一性)**

若

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$$

则

$$a = b$$

证明

**定义 2.5**

1. 对于数列$\{x_n\}$, 若$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立$x_n \le M$, 则称M是$\{x_n\}$的一个上界, 或称$\{x_n\}$有上界。
2. 对于数列$\{x_n\}$, 若$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立$x_n \ge m$, 则称m是$\{x_n\}$的一个下界, 或称$\{x_n\}$有下界。

$\{x_n\}$既有上界又有下界, 则称$\{x_n\}$有界。

$\{x_n\}$有界的另一个定义：$\exists X \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{N}^+$, 成立$|x_n| \le X$

**定理 2.3 (数列极限的有界性)**

若$\{x_n\}$的极限存在，则$\{x_n\}$有界。

证明

**定理 2.4 (数列极限的保序性)**

存在两个数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, \quad \text{且} \quad a < b$$

则$\exists N \in \mathbb{Z}^+$，当$n > N$时，$x_n < y_n$。

证明

**引理 2.1 (数列极限的保序性逆命题)**

对于$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$, 若$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, x_n \le y_n$, 则$a \le b$。

证明

**引理 2.2**

1. 若$\lim_{n\to\infty} y_n = b > 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n > \frac{b}{2} > 0$。
2. 若$\lim_{n\to\infty} y_n = b < 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n < \frac{b}{2} < 0$。

证明　利用数列极限的保序性证明。当$b > 0$时，取$\{x_n = \frac{b}{2}\}$, 则$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{2} < b$, 由数列极限的保序性可知，$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有$y_n > x_n = \frac{b}{2}$, 证毕。

同理可证明$b < 0$的情况。

以上推论可以合起来写为:

**引理 2.3**

若$\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n| > \frac{|b|}{2} > 0$。

**证明** 除了上一个推论那样分开来证明，还可以如下证明：$\lim_{n\to\infty} y_n = b$，即$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $|y_n - b| < \epsilon$。

由三角不等式得：

$$|y_n - b| > ||y_n| - |b||$$

即:

$$||y_n| - |b|| < |y_n - b| < \epsilon$$

因此$\lim_{n\to\infty} |y_n| = |b|$。之后的证明同上。

**定理 2.5 (数列极限的夹逼性定理)**

对于数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, 若$\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, 成立$x_n \leq y_n \leq z_n$, 且$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, 则$\lim_{n\to\infty} y_n = a$

**证明** $\forall \epsilon, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, |x_n - a| < \epsilon$, 即$x_n - a > -\epsilon$。

同理, $\forall \epsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, |y_n - a| < \epsilon$, 即$z_n - a < \epsilon$。

取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 则:

$$-\epsilon < x_n - a < y_n - a < z_n - a < \epsilon$$

即：

$$-\epsilon < y_n - a < \epsilon$$

即：

$$|y_n - a| < \epsilon$$

总结起来即为：$\forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - a| < \epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty} y_n = a$, 证毕。

**命题 2.8**

求：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

**定理 2.6 (数列极限的四则运算)**

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b} (b \neq 0)$

**证明**

**命题 2.9**

$$求 \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} - (-2)^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}$$

**证明**

**命题 2.10**

$$当a > 0时，\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

证明

**命题 2.11**

$$求\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$$

证明

**命题 2.12**

$$求\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

证明

有限个

**命题 2.13**

设$a_n > 0, \lim_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$

证明

**命题 2.14**

若$\{x_n\}$是无穷小量，$\{y_n\}$有界($|y_n| < 0$)，则$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

证明

## 2.2 无穷大量

**定义 2.6 (无穷大量)**

对于一个数列$\{x_n\}$，若对于任意给定的$G > 0$, 可以找到正整数N, 使得当$n > N$时，$|x_n| > G$，则称数列$\{x_n\}$是无穷大量，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

若对于该数列$\{x_n\}$, $|x_n| > G$可以恒表示为$x_n > G$，则称数列$\{x_n\}$是正无穷大量，记为$+\infty$。
若对于该数列$\{x_n\}$, $|x_n| > G$可以恒表示为$x_n < -G$，则称数列$\{x_n\}$是负无穷大量，记为$-\infty$。

**命题 2.15**

设$|q| > 1$，证明$\{q^n\}$是无穷大量。

证明

**命题 2.16**

证明$\{\frac{n^2-1}{n+5}\}$是无穷大量。

证明

**引理 2.4**

若$x_n \neq 0$，则$\{x_n\}$是无穷大量的充要条件是$\{\frac{1}{x_n}\}$是无穷小量。

**证明**

**引理 2.5**

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$满足$\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N_0$，有$|y_n| \geq \delta > 0$，则$\{x_n y_n\}$也是无穷大量。

**证明**

**引理 2.6**

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$，则$\{x_n y_n\}$与$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

**证明**

**命题 2.17**

$\{\frac{n}{\sin(n)}\}$和$\{n \cdot \arctan(n)\}$是无穷大量。

**证明**

**命题 2.18**

讨论极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_k}$$

其中$a_0, b_0 \neq 0, k, l \in \mathbb{Z}^+$

**证明** 从分子上提出$n^k$，分母上提出$n^l$次

### 2.2.1 无穷大的运算

若$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$，则记$\{x_n\}$为“+∞”。
若$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$，则记$\{y_n\}$为“+∞”。
若$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$，则记$\{z_n\}$为“+∞”。
若$\lim_{n\to\infty} w_n = 0$，则记$\{z_n\}$为“0”。

**定理 2.7**

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
3. $(+\infty) \pm (\text{有界量}) = +\infty$
4. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
5. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

**定义 2.7**

1. $(+\infty) - (+\infty) = ?$
2. $(+\infty) + (-\infty) = ?$
3. $0 \cdot \infty = ?$
4. $\frac{0}{0} = ?$
5. $\frac{\infty}{\infty} = ?$

6. $\cdots$

上述情况称为“待定型”

**定义 2.8**

若数列$\{x_n\}$，有$x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调增加，记为$\{x_n\} \uparrow$。若有$x_n < x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调增加，记为$\{x_n\}$严格$\uparrow$。

若数列$\{x_n\}$，有$x_n \ge x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调减少，记为$\{x_n\} \downarrow$。若有$x_n > x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调减少，记为$\{x_n\}$严格$\downarrow$。

**定理 2.8 (Stolz定理)**

假设$\{y_n\}$严格单调增加数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$。若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a(a\text{为有限数}, +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$$

**证明** 因为陈老的证明简介明了,我们先写陈老的证明:

当a = 0时: 因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 则$\exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, y_n > 0$。

又因为$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, 则$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right| < \frac{\epsilon}{2}$。

取$N_3 = \max\{N_1, N_2\}, \forall n > N_3$:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2} |y_n - y_{n-1}|$$

又因为$\{y_n\}$严格单调增加,则上式可以化为:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2} (y_n - y_{n-1})$$

根据三角不等式:

$$|x_n - x_{N_3}| \le |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{N_3+1} - x_{N_3}|$$

根据上两式,我们可以得出:

$$|x_n - x_{N_3}| < \frac{\epsilon}{2} (y_n - y_{N_3})$$

两边同除以$y_n$得:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{N_3}}{y_n}\right| < \frac{\epsilon}{2}(1 - \frac{y_{N_3}}{y_n}) < \frac{\epsilon}{2}$$

则根据三角不等式:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{\epsilon}{2} + \left|\frac{x_{N_3}}{y_n}\right|$$

因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty, \exists N_4 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_4, y_n > \frac{2|x_{N_3}|}{\epsilon}$

则可以取$N = \max\{N_3, N_4\}, \forall n > N_4$:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \epsilon$$

则对于$a = 0$时:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

当$a \ne 0$时:

取$z_n=x_n-ay_n$, 则

$$\frac{z_n-z_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a$$

因此:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n-z_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\right)=0$$

根据以上证明的$a=0$的情况可知:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{y_n}=0$$

又因为:

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{z_n}{y_n}+a$$

所以当$a\neq 0$时:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$$

当$a=+\infty$时:

因为$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$, 则$\exists N_1\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_1,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}>1$, 即:

$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}$$

因为$\{y_n\}$严格单调增加, 则

$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}>0$$

即$\{x_n\}$**严格单调增加**。

同时, 同其他情况的证明, 我们有:

$$x_n-x_N>y_n-y_N$$

又因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 则$\forall G>\max\{0,y_N-x_N\},\exists N_2\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_2,y_n>2G$。

则

$$x_n>y_n-y_N+x_N>G$$

即$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\{x_n\}$趋向于$+\infty$。

此时考虑$\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$, 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$, 则$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$(引理 2.4)。根据$a=0$的情况得: $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$, 因此$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$, 即$\forall G>0,\exists N_3\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_3,\left|\frac{x_n}{y_n}\right|>G$。

又因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 则$\exists N_4\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_4,y_n>0$, 同理$\exists N_5\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_5,x_n>0$。

则当$n>\max\{N_4,N_5\}$时, $\frac{x_n}{y_n}>0$。

即$\forall G>0,\exists N=\max\{N_3,N_4,N_5\}\in\mathbb{N}^+,\forall n>N,\frac{x_n}{y_n}>G$, 即$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$。$a=+\infty$时也成立。同理, 也能证明$a=-\infty$的情况。

现在用定义证明:

当a为有限数时:

因为$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$, 则$\forall\epsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_1,\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\right|<\frac{\epsilon}{2}$。

又因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 则$\exists N_2\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_2,y_n>0$。

则$\forall n>N_3=\max\{N_1,N_2\}$, 结合三角不等式, 我们有:

$$\frac{x_n}{y_n}-a<\frac{\epsilon}{2}\left(1-\frac{y_{N_3}}{y_n}\right)+\frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n}<\frac{\epsilon}{2}+\frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n}$$

因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 所以$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n}=0$, 即$\exists N_4\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_4,\left|\frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n}\right|<\frac{\epsilon}{2}$。

即$\forall\epsilon>0,\exists N_5=\max\{N_3,N_4\},\forall n>N_5,\frac{x_n}{y_n}-a<\epsilon$。

同理可以证明:$\forall n>N_5,\frac{x_n}{y_n}-a>-\epsilon$。因此$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$。

**命题 2.19**

用Stolz定理证明, 若$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

证明

**命题 2.20**

$$求\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

证明

**命题 2.21**

$$设\lim_{n\to\infty}a_n=a，求\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}$$

证明

## 2.3 收敛准则

收敛数列一定有界，但是收敛数列不一定有界。

1. 那么有界数列加什么条件收敛？
2. 有界数列不加条件的情况下，可以得到什么弱一些的结论？

**定理 2.9**

单调有界数列必定收敛。

证明 不妨设$\{x_n\}$单调增加，有上界。

定理意义: 从定义证明时, 我们需要知道极限a, 相当于验证极限为a, 而当极限未知时, 则无法证明。而定理则从数列本身的性质出发, 不需要知道极限是多少。

**引理 2.7**

若数列$\{x_n\}$从第N项之后开始单调有界, 则数列$\{x_n\}$依旧收敛。

证明 考虑$n \geq N$后的数组成的数列, 设$n_1 = n - N + 1$, 则$\{x_{n_1}\}$单调有界。由于$\{x_{n_1}\}(n_1 \geq 1)$单调有界, 则$\{x_{n_1}\}(n_1 \geq 1)$收敛。即$\exists a, \forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n_1 > N_1$, 有$|x_{n_1} - a| < \epsilon$。那么我们可以取$N_2 = N_1 + N - 1$, 此时$\forall \epsilon, \exists N_2 = N_1 + N - 1, \forall n > N_2$, 有$|x_n - a| < \epsilon$, 即数列$\{x_n\}$极限存在。

**命题 2.22**

设$x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

**命题 2.23**

设$0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), n = 1, 2, 3, \cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

无穷小量的趋近速度。

**命题 2.24**

对于上题的 $\{x_n\}$, 求极限, $\lim_{n\to\infty} nx_n$

**证明**

**命题 2.25**

$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$, 证明$\{x_n\}$收敛, 并求极限。

**证明**

兔子

**命题 2.26 (Fibonacci数列)**

$\{a_n\}$为Fibonacci数列, 令$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 讨论$\{b_n\}$数列。

**证明**

接下来我们来研究$\pi$和$e$

关于$\pi$:

**命题 2.27**

证明$\left\{L_n = n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$收敛。求圆的面积公式。

**证明** 取$t = \frac{180^\circ}{n(n+1)}$, 当$n \geq 3$时, $nt \leq 45^\circ$。且由三角公式得:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]tan(t)}$$

由于$nt \leq 45^\circ$, 则$tan(kt) < 1(k < n)$, 因此:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]tan(t)} > \tan[(n-1)t] + \tan(t)$$

则:

$$\tan(nt) > \tan[(n-1)t] + \tan(t)$$
$$\tan[(n-1)t] > \tan[(n-2)t] + \tan(t)$$
$$\cdots\cdots$$

则:

$$\tan(nt) > n\tan(t)$$

现在来考虑$\sin[(n+1)t]$:

$$\begin{aligned}\sin[(n+1)t] &= \sin(nt)\cos(t) + \cos(nt)\sin(t) \\ &= \sin(nt)\cos(t)\left[1 + \frac{\tan(t)}{\tan(nt)}\right] \\ &< \sin(nt)\cos(t)\left[1 + \frac{1}{n}\right] \\ &< \sin(nt)\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

即:

$$n\sin[(n+1)t] < (n+1)\sin(nt)$$

将$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$代入得:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)<(n+1)\sin\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right)$$

即该数列单调增加。

考虑到单位圆的面积:

$$S'>n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

并且单位圆的面积小于外接正方形的面积, 即:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)<S'<4$$

即:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)<\frac{4}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

因为$n\geq 3$, 所以:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)<8$$

因此数列$\left\{L_n=n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调有界, 则该数列极限存在。

现在定义$\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=\pi$。

再来考虑单位圆的面积$S'$, 设内接正多边形的面积为$S_1$, 外接正多边形的面积为$S_2$, 则$S_1(n)<S'<S_2(n)$。内接正多边形的面积为:

$$S_1(n)=n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

外接正多边形的面积为:

$$S_2(n)=n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=n\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

并且根据数列极限的四则运算有:

$$\lim_{n\to\infty}S_1(n)=\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}S_2(n)=\frac{\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}=\pi$$

则根据夹逼性原理得:

$$S'=\pi$$

其中, 对于外接正多边形的面积, 考虑:

$$\begin{aligned}(n+1)\tan(nt)-n\tan[(n+1)t]&=(n+1)\frac{\sin(nt)}{\cos(nt)}-n\frac{\sin[(n+1)t]}{\cos[(n+1)t]}\\&=\frac{(n+1)\sin(nt)\cos[(n+1)t]-n\sin[(n+1)t]\cos(nt)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]}\\&=\frac{\sin(nt)\cos[(n+1)t]-n\sin(t)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]}\\&=\frac{\sin[(2n+1)t]-\sin(t)-2n\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]}\\&=\frac{\sin[(2n+1)t]-(2n+1)\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]}\end{aligned}$$

并且当$n \geq 3$时, 有:

$$\sin[(2n+1)t] = \sin(2nt)\cos(t) + \cos(2nt)\sin(t) < \sin(2nt) + \sin(t)$$
$$\sin(2nt) = \sin[(2n-1)t]\cos(t) + \cos[(2n-1)t]\sin(t) < \sin[(2n-1)t] + \sin(t)$$
$$\cdots\cdots$$

因此:

$$sin[(2n+1)t] < (2n+1)\sin(t)$$

因此:

$$(n+1)\tan(nt) < n\tan[(n+1)t]$$

即:

$$(n+1)\tan\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right) < n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

因此数列$\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调递减。因为外接正多边形面积必然大于内接正方形, 因此:

$$n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) > 2$$

因此数列$\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调有界, 则该数列极限存在。

关于$e$:

**命题 2.28**
考虑两个数列:

$$\left\{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad 和 \quad \left\{y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

证明这两个数列极限存在且相等。

**证明**

定义$\ln = \log_e$为自然对数，$e$自然对数的底数。

**命题 2.29**
令$a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, (p > 0)$，证明$\{a_n\}$当$p > 1$时收敛，当$p \leq 1$时发散。

**证明**

$p = 1$时，$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$为调和级数，它是正无穷大量，我们想知道它趋近无限的速度。

**命题 2.30**
证明

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

收敛。

**证明** 极限记为$\gamma$，称为欧拉常熟。$\gamma >= 0.577215$

**命题 2.31**
证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$$

**证明** 除了夹逼准则，还能用上一个数列相减计算。

**命题 2.32**

$$d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+}\frac{1}{n}$$

**证明**

以上是与$e$相关的数列

**定义 2.9 (闭区间套)**

有一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$，满足：

1. $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]\,, n=1,2,3,\cdots$
2. $b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$

则称这样的一列闭区间是一个闭区间套。

**定理 2.10 (闭区间套定理)**

假如$[a_n,b_n]$是一个闭区间套，则存在唯一的实数$\xi$，它属于一切闭区间$[a_n,b_n]$。且$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$。

**证明**

**定理 2.11**

实数集不可列。

**证明** 反证法

子列

**定义 2.10**

存在一个数列$\{x_n\}$，取一列严格单调增加的正整数$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$，则$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdot$称为$\{x_n\}$的一个子列，记为$\{x_{n_k}\}$，$k$代表子列中的第$k$项，又恰好是$\{x_n\}$中的第$n_k$项。

其中$n_k \geq k, \forall k, n_j > n_k, \forall j > k$。

**定理 2.12**

设$\{x_n\}$收敛于a, 则它的任何一个子列也收敛于a。即$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，证明$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

**证明**

可以用于证明数列不收敛。

**命题 2.33**

若$\{x_n\}$存在两个子列收敛于不同的极限，则$\{x_n\}$发散。

**证明**

**定理 2.13 (Bolzano-Weierstrass定理)**

有界数列必有收敛子列。

**证明** 设数列为$\{x_n\}$, 因为数列有界, 所以$\forall n > 0$, 存在$a \leq x_n \leq b$, 则取$[a_1,b_1] = [a,b]$。

将$[a_1,b_1]$分为两个闭区间, 分别为$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$和$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, 其中至少有一个区间包含无穷多个数列的元素, 因为若两个区间都有有限个数列元素, 则数列$\{x_n\}$的元素有限。那么我们可以取包含无穷多个数列元素的区间为$[a_2,b_2]$。

同理，我们可以取出$[a_3,b_3]$, $[a_4,b_4]$, $\cdots$。每一个区间中都包含无穷多个数列元素。

对于这些区间，$\forall n>0$, (1).$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, (2).$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$, 则这些闭区间组成了一个闭区间套。根据闭区间套定理，存在唯一的实数$\gamma$属于一切闭区间$[a_n,b_n]$。

则我们可以这样构造子列：

从$[a_1,b_1]$中取$x_{n_1}$，使得$n_1>0$，这必然可以实现，因为$[a_1,b_1]$中有无限多个数列元素。

从$[a_2,b_2]$中取$x_{n_2}$，使得$n_2>n_1$，这必然可以实现，因为$[a_2,b_2]$中有无限多个数列元素，即$\forall n_1,\exists n_2>n_1$。

从$[a_3,b_3]$中取$x_{n_3}$，使得$n_3>n_2$，这必然可以实现，因为$[a_3,b_3]$中有无限多个数列元素，即$\forall n_2,\exists n_3>n_2$。

$$\cdots\cdots$$

对于子列$\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$，则$\forall\epsilon>0$，取$K=\max\left\{\left[\log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)\right]+2,1\right\}$, $\forall k>K, b_k-a_k<\epsilon$，同时$x_{n_k}\in[a_k,b_k]$, $\gamma\in[a_k,b_k]$，则$\forall k>K, |x_{n_k}-\gamma|<b_k-a_k<\epsilon$。

即$\forall\epsilon>0,\exists K\in\mathbb{N}^+,\forall k>K, |a_{n_k}-\gamma|<\epsilon$，则$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\gamma$，该子列收敛于$\gamma$。

在陈老的视频是，陈老是用夹逼性证明$\{x_{n_k}\}$收敛于$\gamma$，证明如下：

$\forall k$, $a_k\le x_{n_k}\le b_k$，且$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=\gamma$，则根据夹逼性，$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\gamma$。**非常巧妙!**

**定理 2.14**

假设$\{x_n\}$是无界数列，则存在子列$\{x_{n_k}\}$，它是无穷大量。

**证明**

Cauchy收敛原理

**定义 2.11**

$\{x_n\}$满足：

$$\forall\xi>0,\exists N,\forall n,m>N,|x_n-x_m|<\xi$$

则称$\{x_n\}$为基本数列。

也可以是$\forall m>n>N$

**证明**

**命题 2.34**

判断

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

是否为基本数列。

**证明**

**命题 2.35**

判断

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

是否为基本数列。

**证明**

**定理 2.15 (Cauchy收敛原理)**

$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$\{x_n\}$是基本数列。

**证明** **必要性**：即$\{x_n\}$收敛 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$是基本数列。

假设$\{x_n\}$收敛于A，则$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N,|x_n-A|<\frac{\epsilon}{2}$。

则对于$\forall n,m>N, |x_n-x_m|<|x_n-A|+|x_m-A|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$, 则$\{x_n\}$为基本数列。

**充分性**: 即$\{x_n\}$是基本数列$\Rightarrow\{x_n\}$收敛。

因为$\{x_n\}$为基本数列, 即对于$\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$, $\forall m,n>N$, $|x_m-x_n|<\epsilon$。取$m=N+1$, 则$\forall n>N$, $|x_{N+1}-x_n|<\epsilon$, 即$x_{N+1}-\epsilon<x_n<x_{N+1}+\epsilon$。则我们可以取$a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_N,x_{N+1}-\epsilon\}, b=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_N,x_{N+1}+\epsilon\}$, 此时$\forall n\in\mathbb{N}^+$:

$$a\le x_n\le b$$

即, $\{x_n\}$数列有界。

根据Bolzano-Weierstrass定理(定理 2.13), 则存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A, 则$\forall\epsilon>0$, $\exists K\in\mathbb{N}^+, \forall k>K, |x_{n_k}-A|<\frac{\epsilon}{2}$, 又由于$\{x_n\}$为基本数列, 则$\forall\epsilon>0, \exists N'\in\mathbb{N}^+, \forall m',n'>N', |x_{N+1}-x_{n'}|<\frac{\epsilon}{2}$。

取$N''=\max\{N',n_K\}$, 因为$\{x_{n_{k'}}\}$由无穷多项, 则必然存在$n_{k'}>N''\ge n_K$, 即$k'>K$,。此时, 因为$n_{k'}>N''\ge N'$, 则$\forall n'>N'$, $|x_{n'}-x_{n_{k'}}|<\frac{\epsilon}{2}$, 又因为$k'>K$, 则$|x_{n_{k'}}-A|<\frac{\epsilon}{2}$, 因此$\forall n'>N'$, $|x_{n'}-A|<|x_{n'}-x_{n_{k'}}|+|x_{n_{k'}}-A|<\epsilon$, 即数列$\{x_n\}$收敛。

而陈老是这样证明充分性的:

取$\epsilon=1$, 因为$\{x_n\}$是基本数列, 则$\exists N\in\mathbb{N}^+, \forall n>N, |x_n-x_{N+1}|<1$, 因此$|x_n|<|x_n-x_{N+1}|+|x_{N+1}|<|x_{N+1}|+1$。取$M=\max\{|x_1|,|x_1|,\cdots,|x_N|,|x_{N+1}|+1\}$, 则:

$$\forall n\in\mathbb{N}^+, |x_n|\le M$$

即$\{x_n\}$有界。

根据根据Bolzano-Weierstrass定理(定理 2.13), 则存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A。

根据$\{x_n\}$是基本数列, 则$\forall\epsilon>0, \exists N_1\in\mathbb{N}^+, \forall n,m>N_1, |x_n-x_m|<\frac{\epsilon}{2}$, 现在固定$x_m$, 取$x_n$为子列$\{x_{n_k}\}$。现在考虑数列$\{|x_{n_k}-x_m|\}$和数列$\{\frac{\epsilon}{2}\}$, 取$K=N_1$, 则$\forall k>K$, 有$n_k>n_K\ge K=N_1$, 即$\forall k>K, |x_{n_k}-x_m|<\frac{\epsilon}{2}$, 根据数列极限的保序性逆命题(推论 2.1), $|A-x_m|\le\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$。这对于$\forall m>N_1$都成立, 即数列$\{x_n\}$极限存在且为A。

**命题 2.36**

$\{x_n\}$满足压缩性条件, 即

$$|x_{n+1}-x_n|\le k|x_n-x_{n-1}|, 0<k<1, \forall n=2,3,\cdots$$

则$\{x_n\}$是收敛的。

**证明**

实数系的基本定理

1. 确界存在定理(实数系的连续性定理)
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Bolzano-Weierstrass定理
5. Cauchy收敛原理(实数系完备性)

以上都是在实数系中考虑, 实数系上的基本数列必然是收敛数列, 因此Cauchy收敛原理也被称为实数系的完备性定理。实数系有完备性, 有理数不具备完备性。例如$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$是有理数列, 但是它的极限是无理数。以上五个定理等价。我们需要证明这五个定理等价。从Cauchy收敛原理推出闭区间套定理, 再从闭区间套定理推出确界存在定理。

**定理 2.16**

实数系的完备性等价于实数系的连续性。

**证明** (1)Cauchy收敛原理$\Rightarrow$闭区间套定理。

(2)闭区间套定理⇒确界存在定理。

# 第 3 章 函数极限与连续函数

函数极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

**定义 3.1**

$y=f(x)$在$O(x_0,\rho)\setminus\{x_0\}$上有定义，如果存在一个数A，使得对任意给定的$\epsilon>0$，可以找到$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，成立$|f(x)-A|<\epsilon$，则称A是$f(x)$在$x_0$点的极限，记为$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$或者$f(x)\to A(x\to x_0)$。如果不存在满足上述性质的A，则称$f(x)$在$x_0$点极限不存在。

$O(x_0,\rho)\setminus\{x_0\}$称为去心邻域。

**命题 3.1**

证明：

$$\lim_{x\to 0}e^x=1$$

证明

**命题 3.2**

证明：

$$\lim_{x\to 2}x^2=4$$

证明

**命题 3.3**

证明：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

证明

函数极限的性质

**定理 3.1 (函数极限的唯一性)**

设A, B都是$f(x)$在$x_0$的极限，则$A=B$。

证明 证明类似证明数列极限的唯一性

**定理 3.2 (函数极限的局部保序性)**

若$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\lim_{x\to x_0}g(x)=B,A>B$，则$\exists\delta>0$，当x有$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>g(x)$

证明 证明类似证明数列极限的保序性

**引理 3.1**

$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，则$\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta),|f(x)|>\frac{|A|}{2}$。

证明 请使用局部保序性证明

**引理 3.2**

假设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 若$\exists\delta>0, \forall x(x<|x-x_0|<\delta)$, 有$f(x)\geq g(x)$, 则$A\geq B$

证明

**定理 3.3 (函数极限的局部有界性)**

若$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 则$\exists\delta, \forall x(0<|x-x_0|<\delta), m\leq f(x)\leq M$, m, M为固定实数。

若$f(x)$在$x_0$有定义, 则在$x$满足$|x-x_0|<\delta$的条件下, $\min\{m, f(x)\}\leq f(x)\leq \max\{M, f(x)\}$。

证明 请使用局部保序性证明

**定理 3.4 (函数极限的夹逼性定理)**

若$\exists r>0$, $\forall x(x<|x-x_0|<r)$, 有$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, 且$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$, 则$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

证明

**命题 3.4**

证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

证明 使用夹逼性证明。

再用数列逼近证明。

**定理 3.5 (函数极限四则运算)**

假设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 则:

1. $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha A+\beta B$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

证明

**命题 3.5**

求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}$$

的极限。

证明

**命题 3.6**

求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$$

的极限。

证明

## 3.1 函数极限和数列极限的关系

**定理 3.6 (否定命题的分析表示)**

$\{x_n\}$以$a$为极限: $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,|x_n-a|<\epsilon$。

$\{x_n\}$不以$a$为极限: $\exists\epsilon>0,\forall N,\exists n>N,|x_n-a|\geq\epsilon$

**定理 3.7 (heine定理)**

$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$存在的充分必要条件是: 对于任意的满足$x_n\neq x_0$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛于A。

证明 **证明必要性**, 即证明:

若$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 则对于任意的满足$x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\},\{f(x_n)\}$收敛于A。

因为$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 则$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$, 成立$|f(x)-A|<\epsilon$。

又因为对于$\{x_n\}$, 有$x_n\neq x_0$且$\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 即$\forall\delta>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N$, 成立$0<|x_n-x_0|<\delta$。

则$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 对于该$\delta$, $\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N$, 有$0<|x_n-x_0|<\delta$, 且在该$\delta$下有$|f(x_n)-A|<\epsilon$。证明完毕。

**证明充分性**, 即证明:

若对于任意的满足$x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\},\{f(x_n)\}$收敛于A, 则$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$。

利用反证法, 若$\lim_{x\to x_0}f(x)\neq A$, 则$\exists\epsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x(0<|x-x_0|<\delta)$, 使得$|f(x)-A|\geq\epsilon_0$

取$\delta_n=\frac{1}{n},n=1,2,3,\cdots$,则对于$\epsilon_0$,有:

$$
\begin{gathered}
\exists x_1(0<|x_1-x_0|<1),|f(x_1)-A|\geq\epsilon_0\\
\exists x_2(0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2}),|f(x_2)-A|\geq\epsilon_0\\
\exists x_3(0<|x_3-x_0|<\frac{1}{3}),|f(x_3)-A|\geq\epsilon_0\\
\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

对于数列$\{x_n\}$, 对于$\epsilon_0,\forall n,|x_n-x_0|>\epsilon_0$恒成立。

即: $\exists\epsilon=\epsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N}^+,\exists n>N,|f(x_n)-A|>\epsilon$。则存在数列$\{x_n\}$不收敛于A。这与条件矛盾, 则假设不成立。证明完毕。

**命题 3.7**

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x_0=0$处极限不存在。

证明

**引理 3.3**

$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在并且有限(收敛)的充分必要条件是: 对任意满足$x_n\neq x_0$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛。

证明

## 3.2 单侧极限

**定义 3.2**

假设$f(x)$在$(x_0-\rho,x_0)$有定义，如果存在B, $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(-\delta<x-x_0<0)$，成立$|f(x)-B|<\epsilon$，则称B是$f(x)$在$x_0$的左极限，记为$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=B(f(x)\to B(x\to x_0^-))$。
类似地，假如存在C, $\exists\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0<x-x_0<\delta)$，成立$|f(x)-C|<\epsilon$，则称C是$f(x)$在$x_0$的右极限，记为$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=C(f(x)\to C(x\to x_0^+))$。
则$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$

**命题 3.8**

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

证明

**命题 3.9**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\\ 2\cos(x^2) & x\geq 0\end{cases}$$

## 3.3 函数极限定义的扩充

可以将自变量$x$的趋向扩充成以下六种:

1. $x\to x_0$
2. $x\to x_0^+$
3. $x\to x_0^-$
4. $x\to+\infty$
5. $x\to-\infty$
6. $x\to\infty$

而应变量$f(x)$的趋向可以扩充成以下四种:

1. $f(x)\to A$
2. $f(x)\to+\infty$
3. $f(x)\to-\infty$
4. $x\to\infty$

现在加上对应的分析表述，对于自变量$x$:

1. $x\to x_0:\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$
2. $x\to x_0^+:\exists\delta>0,\forall x(0<x-x_0<\delta)$
3. $x\to x_0^-:\exists\delta>0,\forall x(-\delta<x-x_0<0)$
4. $x\to+\infty:\exists X>0,\forall x(x>X)$
5. $x\to-\infty:\exists X>0,\forall x(x<-X)$
6. $x\to\infty:\exists X>0,\forall x(|x|>X)$

对于应变量$f(x)$:

1. $f(x) \to A : \forall \epsilon > 0, \cdots, |f(x) - A| < \epsilon$
2. $f(x) \to +\infty : \forall G > 0, \cdots, f(x) > G$
3. $f(x) \to -\infty : \forall G > 0, \cdots, f(x) < -G$
4. $x \to \infty : \forall G > 0, \cdots, |f(x)| > G$

**命题 3.10**

写出:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$$

的分析表述。

**证明**

**命题 3.11**

写出:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

的分析表述。

**证明**

**命题 3.12**

写出:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

的分析表述。

**证明**

**命题 3.13**

证明:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

**证明**

**命题 3.14**

证明

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

**证明**

我们讲了函数极限的性质和函数极限的四则运算。讲函数极限的性质的时候是对于收敛函数来讨论的。对于扩充后的函数极限则不一定成立,特别对于$\infty$。性质要排除$\infty$,四则运算要排除待定型。

对于扩充后的heine定理应该如何书写: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$充分必要条件: 对任意的满足$x_n \to +\infty(n \to \infty)$的数列$\{x_n\}$,, 成立$\{f(x_n)\}$收敛于A。

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在且有限的充分必要条件是: 对任意满足$x_n \to +\infty(n \to +\infty)$的数列$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛。

**命题 3.15**

设:

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j}(a_n,a_k\neq 0,b_m,b_j\neq 0)$$

考虑$\lim_{x\to\infty}f(x)$和$\lim_{x\to 0}f(x)$。

**证明** $x\to\infty$的情况:

分三种情况讨论:

1. $n=m$:
2. $n>m$:
3. $n<m$:

$x\to 0$的情况:

分三种情况讨论:

1. $k=j$:
2. $k>j$:
3. $k<j$:

**命题 3.16**

证明:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

**证明** 提示: 夹逼法。同时$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$

函数极限的Cauchy收敛原理

回忆以下数列的情况: $\lim_{n\to\infty}x_n$收敛$\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,|x_n-x_m|<\epsilon$。

在函数中, 我们做了拓广, 并不是所有的拓广都有Cauchy收敛原理。

对于函数发散时是没有Cauchy收敛原理的。

**定理 3.8 (函数极限的Cauchy收敛原理)**

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在并且有限(收敛)$\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists X>0,\forall x',x''>X,|f(x')-f(x'')|<\epsilon$

**证明**

## 3.4 连续函数

分析上讲, $f(x)$在$x_0$点连续: 当$x\to x_0$时, $f(x)\to f(x_0)$。

**定义 3.3**

设$f(x)$在$x_0$的某个邻域中有定义, 且成立

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称$f(x)$在$x_0$点连续, $x_0$是$f(x)$的连续点。

符号表述: $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(|x-x_0|<\delta)$, 成立$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$。

开区间情况:

**定义 3.4**

若$f(x)$在$(a,b)$的每一点上都连续, 则称$f(x)$在开区间$(a,b)$上连续。

**命题 3.17**

证明:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在$(0, 1)$连续。

**证明**

闭区间情况:

**定义 3.5**

若$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$点左连续。

若$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$点右连续。

符号表示:

**左连续**: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x(-\delta < x - x_0 \leq 0): |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

**右连续**: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x(0 \leq x - x_0 < \delta): |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

**定义 3.6**

$f(x)$在$(a, b)$上连续, 且在a点右连续, 在b点左连续, 则称$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续。

**命题 3.18**

证明:

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

在$(0, 1)$闭区间上连续。

**证明**

注:关于函数$f(x)$在一个区间里面连续, 整合以上的定义。

**定义 3.7**

设$f(x)$定义在某区间X上, 若$\forall x_0 \in X$, 及$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X(|x - x_0| < \delta), |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。则称$f(x)$在区间X上连续。

**命题 3.19**

证明:

$$f(x) = \sin(x)$$

在$(-\infty, +\infty)$上连续。

**证明** 同理$f(x) = \cos(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续。

**命题 3.20**

证明:

$$f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$$

在$(-\infty, +\infty)$上连续。

**证明**

## 3.5 连续函数的四则运算

**定理 3.9**

有$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$, 则:

1. $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=f(x_0)g(x_0)$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}(g(x_0)\neq 0)$

♡

**命题 3.21**

求:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\sin x}{3^x+2x}$$

♠

证明

**命题 3.22**

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

$$Q(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$$

♠

证明 $f(x)=c, g(x)=x$

**命题 3.23**

已知$\sin(x), \cos(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。

$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, 在$\left\{x\,|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$上连续。

$\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, 在$\{x\,|x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$上连续。

♠

证明

## 3.6 不连续点的类型

连续的定义:$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

该定义包含了如下几层意思:

1. $f(x)$在$x_0$点有定义。
2. $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$
3. $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

### 3.6.1 第一类不连续点

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

**命题 3.24**

$$\mathrm{sign}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

在$x=0$不连续。

称第一类不连续点为跳跃点。

### 3.6.2 第二类不连续点

$\lim_{x\to x_0^+}f(x)$和$\lim_{x\to x_0^-}f(x)$至少有一个不存在。

**命题 3.25**

$f(x)=\sin(\frac{1}{x})$,$x=0$是它的第二类不连续点。

**证明**

**命题 3.26**

$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x=0$是它的第二类不连续点。

**证明**

### 3.6.3 第三类不连续点

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)\begin{cases}\neq f(x_0)\\ f(x)\text{在}x_0\text{点没定义。}\end{cases}$$

**命题 3.27**

$f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$, 在$x=0$极限存在, 但是没有定义。

**证明**

第三类不连续点称为可去不连续点。

**命题 3.28**

$$\mathrm{D}(x)=\begin{cases}1 & x\text{是有理数}\\ 0 & x\text{是无理数}\end{cases}$$

Dirichlet函数属于第二类不连续点。

**证明**

**命题 3.29**

黎曼(Riemann)函数:

$$\mathrm{R}(x)=\begin{cases}0 & x\text{是无理数}\\ \dfrac{1}{p} & x=\dfrac{q}{p}, p\in\mathbb{N}^+, q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}, p, q\text{互质}\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$, $\lim_{x\to x_0}\mathrm{R}(x)=0$。即$\mathrm{R}(x)$在一切无理点连续, 在一切有理点不连续。

为什么定义0的时候是1? 因为1可以写成$\frac{0}{1}$, 并且Riemann函数有周期性, 为了保持周期性, 因此定义0的时候是1。

证明

**命题 3.30**

区间$(a,b)$上的单调函数的不连续点必为第一类。

证明

## 3.7 反函数

映射: $f: X \to Y$ 为单射, 则$\exists f^{-1}: R_f \to X$。
存在性、连续性、可导性(可导性暂时不讲)
严格单调增加:$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)(y_1 < y_2)$, 即$x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$。

**定理 3.10 (反函数存在定理)**

若$f(x)$在$D_f$上严格单调增加(减少), 则存在f的反函数$f^{-1}(y), y \in R_f$,且$f^{-1}$也严格单调增加(减少)。

证明

**定理 3.11 (反函数连续性定理)**

假设$y = f(x)$在$[a,b]$上连续且严格单调增加, 设$f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, 则反函数在$[\alpha, \beta]$上连续。

证明

**命题 3.31**

$y = \sin(x), y = \arcsin(x)$
$y = \cos(x), y = \arccos(x)$
$y = \tan(x), y = \arctan(x)$

证明

**命题 3.32**

$y = a^x (a > 0, a \neq 1), y = \log_a(x)$
$y = x^n, n \in \mathbb{Z}$
$y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$

证明

讨论一个问题, $\lim_{u \to u_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = u_0$
那么$\lim_{x \to x_0} f \circ g(x)$是否等于A?
反例:

$$f(u) = \begin{cases} 0 & u = 0 \\ 1 & u \neq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

则复合起来为:

$$f \circ g(x) \begin{cases} 0 & x = \dfrac{1}{n\pi} \\ 1 & x \neq \dfrac{1}{n\pi} \end{cases}$$

**定理 3.12**

$u=g(x)$在$x_0$连续, $g(x_0)=u_0$, $f(u)$在$u_0$连续。则$f\circ g$在$x_0$连续。

证明

**命题 3.33**

$$\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

证明

**命题 3.34**

对任意实数$\alpha$, $f(x)=x^\alpha$在$(0,+\infty)$上连续。

证明

**定理 3.13**

一切初等函数在它的定义域上连续。

**命题 3.35**

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

证明

**命题 3.36**

放射性物质的质量变化:

设$t=0$时,物质的总量为$M=M(0)$, 放射的比例系数为k, 求时刻t的时候, $M(t)$为多少?

证明

## 3.8 无穷小量与无穷大量的阶

无穷小量的阶:

在数列极限的时候, 我们提及:$\lim_{n\to\infty}x_n=0$, $\{x_n\}$—无穷小量。

对于函数极限: $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$, 则称当$x\to x_0$时, $f(x)$是无穷小量。

当$x\to x_0$, $u(x)$, $v(x)$都是无穷小量。

**定义 3.8**

$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=0$, 则称当$x\to x_0$时, $u(x)$是$v(x)$的高阶无穷小量, 记为$u(x)=o(v(x))$, $(x\to x_0)$。

**命题 3.37**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1-\cos(x)}{x}$$

证明

**命题 3.38**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^2}$$

证明

**定义 3.9**

若存在$A>0$, 当$x$在$x_0$的某一去心邻域中$\{x|0<|x-x_0|<\rho\}$,成立$\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\leq A$, 则称当$x\to x_0$时, $\frac{u(x)}{v(x)}$是有界量, 记为$u(x)=O(v(x)),(x\to x_0)$。

**命题 3.39**

$$u(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right),u(x)=O(v(x))$$

证明

**定义 3.10**

若$\exists 0<a<A<+\infty$, 在$\{x|0<|x-x_0|<\rho\}$中, $0<a\leq\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\leq A<+\infty$, 则称$u(x),v(x)$在$x\to x_0$时是同阶无穷小量。

**命题 3.40**

$$u(x)=x(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)),v(x)=x,(x\to 0)$$

证明

**命题 3.41**

$$u(x)=x(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)),v(x)=x,(x\to 0)$$

**定义 3.11**

若$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$, 则称当$x\to x_0$时, $u(x)$与$v(x)$是等价无穷小量, 记为$u(x)\sim v(x),(x\to x_0)$。

**命题 3.42**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1,\sin(x)\sim x(x\to x_0)$$

证明

**命题 3.43**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\frac{1}{2}x^2}$$

证明

**命题 3.44**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\frac{1}{2}x^3}$$

注:(1) 取$v(x)=(x-x_0)^k$可知$u(x)$是几阶的无穷小量。

(2)$x\to 0^+$, $\frac{-1}{\ln(x)}$是正无穷小量。对任意的$\alpha>0$, $\frac{-1}{\ln(x)}$是$x^\alpha$的低阶无穷小量, 即:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{\ln(x)}}{x^\alpha}=+\infty$$

这时候, 记$\frac{-1}{\ln(x)}=o(1),(x\to 0^+)$

又比如$u(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)(x\to 0)$, 不是无穷小量但是是有界量, 则记为$u(x)=O(1),(x\to 0)$。

无穷大量的阶:

$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$, 则称当$x\to x_0$时, $f(x)$是(正, 负)无穷大量。

**定义 3.12**

假设$u(x)$, $v(x)$当$x\to x_0$时都是无穷大量, 若$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\infty$, 这说明当$x\to x_0$时, $u(x)$是$v(x)$的高阶无穷大量。

$n^n>>n!>>a^n(a>1)>>n^\alpha(\alpha>0)>>\ln^\beta(n)(\beta>0)$

**命题 3.45**

设$a>1$, k是正整数, 求:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^k(x)}{x}$$

**定义 3.13**

若存在$A>0$, 在$\{x|0<|x-x_0|<\rho\}$, 成立:

$$\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A$$

则称当$x\to x_0$时, $\frac{u(x)}{v(x)}$是有界量, 记为$u(x)=O(v(x)),(x\to x_0)$

**定义 3.14**

若存在$0<a<A<+\infty$, 在$\{x|0<|x-x_0|<\rho\}$, 成立:

$$0<a\le\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A<+\infty$$

则称当$x\to x_0$时, $u(x),v(x)$是同阶无穷大量。

若$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)}{=}c\neq 0$, 则$u(x),v(x)$一定是同阶无穷大量。

**定义 3.15**

若$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$, 则称$u(x)$与$v(x)$是等价无穷大量, 记为$u(x)\sim v(x),(x\to x_0)$。

**命题 3.46**

$$u(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right),v(x)=x^2$$

**证明**

**命题 3.47**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan(x)$$

**证明**

当$x\to 0^+$, $\frac{-1}{\ln(x)}$关于$x^\alpha$都是低阶无穷小量。

**命题 3.48**

$x\to 0^+$, k为任意的正整数,$\left(\frac{-1}{\ln(x)}\right)^k$关于x是低阶无穷小量。

**证明**

**命题 3.49**

当$x\to 0^+$, $e^{-\frac{1}{x}}$关于$x^k$是高阶无穷小量。

**证明**

等价量:

$\sin(x)\sim x$

**命题 3.50**

$$\ln(1+x)\sim x,(x\to 0)$$

**证明**

**命题 3.51**

$$e^x-1\sim x,(x\to 0)$$

**证明**

**命题 3.52**

$$(1+x)^\alpha\sim\alpha x,(x\to 0)$$

**证明**

**命题 3.53**

$$u(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

讨论$x\to+\infty$和$x\to 0^+$时的阶数。

**证明**

**命题 3.54**

$$v(x)=2x^3+3x^5$$

讨论$x\to\infty$和$x\to 0$时的阶数。

**证明**

**定理 3.14**

$u(x), v(x), w(x)$在$x_0$的某个去心邻域上有定义，且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)}{w(x)}=1, v(x)\sim w(x), (x\to x_0)$$

则

1. $\lim_{x\to x_0}u(x)w(x)=A \iff \lim_{x\to x_0}u(x)v(x)=A$
2. $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{w(x)}=A \iff \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=A$

**命题 3.55**

计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{(e^{2x}-1)\tan(x)}$$

证明

**命题 3.56**

计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$$

证明

**命题 3.57**

计算：

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[3]{x^3-x}\right)$$

证明

**命题 3.58**

计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$$

## 3.9 闭区间上的连续函数

**定理 3.15 (有界性定理)**

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在闭区$[a,b]$上有界。

证明

**定理 3.16 (最值定理)**

$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$必能在$[a,b]$上取到最大值和最小值，即$\exists\xi,\eta\in[a,b]$，使得$f(\xi)\le f(x)\le f(\eta), \forall x\in[a,b]$。

证明

**定理 3.17 (零点存在定理)**

$f(x)$在$[a,b]$上连续，如果$f(a)f(b)<0$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=0$。

证明

**命题 3.59**

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$

证明

**命题 3.60**

$f(x)$在$[a,b]$上连续, $f([a,b]) \subset [a,b]$, 则$\exists \xi \in [a,b]$, 使得$f(\xi) = \xi$($\xi$称为$f$的不动点)。

证明

**命题 3.61**

$f(x)$在$(a,b)$上连续, $f((a,b)) \subset (a,b)$, 则是否$f$也有不动点?

证明

**定理 3.18 (中间值定理)**

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续, 则它一定能取到最大值M与最小值m之间的任何一个值。

证明

### 3.9.1 一致连续概念

**定义 3.16**

X是某一区间, $f(x)$在X上连续, 是指$f(x)$在X上的每一点连续(在端点指右或者左连续)。
分析表述: $\forall x_0 \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X(|x - x_0| < \delta), |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, 能否找到对一切$x_0$适用的$\delta > 0$?
若能找到这样的$\delta > 0$, 则有:
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x', x'' \in X(|x' - x''| < \delta)$: $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$。
问题: 这样的$\delta(\epsilon) > 0$是否一定能找到?不一定!
存在$\delta(\epsilon) > 0 \iff \inf_{x_0 \in X} \delta^*(\epsilon, x_0) > 0$ (令所有适用的$\delta(\epsilon, x_0)$中的最大者(或上确界)为$\delta^*(\epsilon, x_0)$)

**定义 3.17 (一致连续)**

$f(x)$在区间X上有定义, 假如$\forall \epsilon > 0$,$\exists \delta > 0, \forall x', x'' \in X(|x' - x''| < \delta)$: $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$, 则称$f(x)$在区间X上一致连续。

$f(x)$在X上一致连续 $\Rightarrow$ $f(x)$在区间X上连续

**命题 3.62**

证明:

$$y = \sin(x)$$

在$(-\infty, +\infty)$上一致连续。

证明

**命题 3.63**

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

在区间$(0,1)$上不是一致连续。

**证明**

**定理 3.19**

假设$f(x)$在区间X上有定义，则$f(x)$在X上一致连续的充分必要条件是：对任意点列$x'_n, x''_n \in X$，只要$\lim_{n\to\infty}(x'_n - x''_n)=0$，则有$\lim_{n\to\infty}(f(x'_n)-f(x''_n))=0$

**证明**