



# 数学分析

作者: hapo

时间: December 19, 2022



# 目录

<b>1</b>	<b>集合与映射</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>实数的完备性</b>	<b>3</b>
2.1	数列极限 . . . . .	4
2.2	无穷大量 . . . . .	7
2.2.1	无穷大的运算 . . . . .	8
2.3	收敛准则 . . . . .	9
<b>3</b>	<b>函数极限与连续函数</b>	<b>16</b>
3.1	函数极限和数列极限的关系 . . . . .	18
3.2	单侧极限 . . . . .	19
3.3	函数极限定义的扩充 . . . . .	19

记录本书的原因是因为我觉得自己的数学分析实在太烂了。因此我决定使用费曼学习法。这是一个链式反应，在我学习随机过程的时候，我发现自己的概率论太差了，而当我学习概率论的时候，我又发现我的测度论太差了，而我学习测度论的时候，我最终发现，我差的是数学分析。而这个最初始的问题是我并没有系统地学过数学分析。而在学习数学分析的过程中，我发现我对好多概念并不明晰，这使得学习的进度缓慢，并且经常容易在概念上卡壳，而卡壳结束后又很快忘记。因此，为了能够更好地记住，我决定使用费曼学习法。在此，我记录下我学习数学分析的过程。

# 第 1 章 集合与映射

## 定义 1.1 (集合)

是具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集的总体，其中的对象称为集合的元素。



集合通常记为  $A, B, C, X, Y$

元素通常记为  $s, t, a, b, x, y$

$x$  是集合  $S$  的元素，记为  $x \in S$

## 第2章 实数的完备性

### 内容提要

#### 有理数的定义 2.2

在本章中，我们将介绍实数的完备性。在介绍实数之前，我们需要将实数定义或者说引入。而对于实数的定义是有很多的，而我在此介绍无穷十进制小数表示和戴德金(Dedekind)分割。这部分我将结合陈纪修教授的教材和Ayumu的讲义。

在引入实数之前，我们需要先介绍有理数，而在介绍有理数之前，我们需要规定一些常用集合的记号。而介绍常用集合，则需要先介绍集合(set)，在此我们并不介绍集合，我们暂时默认我们已经知道了集合的概念，将来我们会对该部分内容进行扩充。现在让我们来列举一些常用的集合。

#### 定义 2.1 (常用集合表示)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{n | n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$$

在定义了以上的集合表示之后，我们就能以上的符号来表示有理数：

#### 定义 2.2 (有理数)

若一个数 $x$ 可以表示成 $\frac{q}{p}$ 的形式，其中 $q \in \mathbb{Z}$ ,  $p \in \mathbb{Z}^+$ ，则称 $x$ 为有理数(rational number)。而由有理数组成的集合称为有理数集，有理数集常用 $\mathbb{Q}$ 表示，其可以表示为：

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+\}$$

在这里，我们可以看到 $p$ 只需要属于 $\mathbb{Z}^+$ ，这是因为若 $x$ 为负的，我们总可以规定负号出现在分子上。

有理数对加减乘除都封闭，并且我们在有理数上定义了大小关系，即有理数也是良序的。但是它并不能满足研究所需。例如，存在长度无法用有理数表示。并且有理数之间存在“空隙”，即有理数不连续。而在我们之后的研究中，我们往往需要研究连续性，因此我们需要对有理数进行扩充。在这之前，我们先来证明确实有一些数无法用有理数表示。

#### 命题 2.1

$\sqrt{2}$ 不是有理数。

**证明** 我们用反证法。假设 $\sqrt{2}$ 为有理数，那么存在 $q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$ ，使得 $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ 。

而且有的函数在实数域和有理数域上的表现完全不一样，比如狄利克雷(dirichlet)函数。

#### 定理 2.1 (确界存在定理—实数系连续性定理)

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。

## 2.1 数列极限

### 定义 2.3 (数列极限的定义)

对于数列 $\{a_n\}$ , 存在一个实常数 $a$ , 对 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$ , 使得当 $n > N$ 时,  $|a_n - a| < \epsilon$ 成立, 则称 $\{a_n\}$ 收敛(convengent)于 $a$ 或者 $\{a_n\}$ 的极限(limit)为 $a$ , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{或者} \quad a_n \rightarrow a (n \rightarrow +\infty)$$

若不存在实数 $a$ , 满足上述性质, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散(divergent)。



一个数列收敛与否, 收敛的话, 收敛于哪个数, 这与数列的前有限项无关。

### 定义 2.4 (无穷小量的定义)

以零为极限的变量称为无穷小量。



### 命题 2.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1 (q < 1)$$



证明

### 命题 2.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$



证明

### 命题 2.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$



证明

### 命题 2.5

设 $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$



证明

### 定理 2.2 (数列极限的唯一性)

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

则

$$a = b$$



证明

## 定义 2.5

1. 对于数列  $\{x_n\}$ , 若  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$ , 成立  $x_n \leq M$ , 则称  $M$  是  $\{x_n\}$  的一个上界, 或称  $\{x_n\}$  有上界。
  2. 对于数列  $\{x_n\}$ , 若  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$ , 成立  $x_n \geq m$ , 则称  $m$  是  $\{x_n\}$  的一个下界, 或称  $\{x_n\}$  有下界。
- $\{x_n\}$  既有上界又有下界, 则称  $\{x_n\}$  有界。  
 $\{x_n\}$  有界的另一个定义:  $\exists X \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{N}^+$ , 成立  $|x_n| \leq X$



## 定理 2.3 (数列极限的有界性)

若  $\{x_n\}$  的极限存在, 则  $\{x_n\}$  有界。



证明

## 定理 2.4 (数列极限的保序性)

存在两个数列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$ , 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \quad \text{且} \quad a < b$$

则  $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ , 当  $n > N$  时,  $x_n < y_n$ 。



证明

## 引理 2.1 (数列极限的保序性逆命题)

对于  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , 若  $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, x_n \leq y_n$ , 则  $a \leq b$ 。



证明

## 引理 2.2

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b > 0$ , 则  $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n > \frac{b}{2} > 0$ 。
2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b < 0$ , 则  $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n < \frac{b}{2} < 0$ 。



**证明** 利用数列极限的保序性证明。当  $b > 0$  时, 取  $\{x_n = \frac{b}{2}\}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{2} < b$ , 由数列极限的保序性可知,  $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$ , 有  $y_n > x_n = \frac{b}{2}$ , 证毕。

同理可证明  $b < 0$  的情况。

以上推论可以合起来写为:

## 引理 2.3

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ , 则  $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n| > \frac{|b|}{2} > 0$ 。



**证明** 除了上一个推论那样分开来证明, 还可以如下证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , 即  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - b| < \epsilon$ 。

由三角不等式得:

$$|y_n - b| > ||y_n| - |b||$$

即:

$$||y_n| - |b|| < |y_n - b| < \epsilon$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = |b|$ 。之后的证明同上。

## 定理 2.5 (数列极限的夹逼性定理)

对于数列  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ , 若  $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$ , 成立  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$



**证明**  $\forall \epsilon, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, |x_n - a| < \epsilon$ , 即  $x_n - a > -\epsilon$ 。

同理,  $\forall \epsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, |y_n - a| < \epsilon$ , 即  $z_n - a < \epsilon$ 。

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则:

$$-\epsilon < x_n - a < y_n - a < z_n - a < \epsilon$$

即:

$$-\epsilon < y_n - a < \epsilon$$

即:

$$|y_n - a| < \epsilon$$

总结起来即为:  $\forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - a| < \epsilon$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ , 证毕。

#### 命题 2.6

求:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

#### 定理 2.6 (数列极限的四则运算)

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , 则

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b} (b \neq 0)$

**证明**

#### 命题 2.7

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - (-2)^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}$$

**证明**

#### 命题 2.8

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

**证明**

#### 命题 2.9

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$$

**证明**

#### 命题 2.10

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$

**证明**

有限个



**命题 2.11**

设  $a_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$



证明

**命题 2.12**

若  $\{x_n\}$  是无穷小量,  $\{y_n\}$  有界 ( $|y_n| < 0$ ), 则  $\{x_n y_n\}$  也是无穷小量。



证明

## 2.2 无穷大量

**定义 2.6 (无穷大量)**

对于一个数列  $\{x_n\}$ , 若对于任意给定的  $G > 0$ , 可以找到正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时,  $|x_n| > G$ , 则称数列  $\{x_n\}$  是无穷大量, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

若对于该数列  $\{x_n\}$ ,  $|x_n| > G$  可以恒表示为  $x_n > G$ , 则称数列  $\{x_n\}$  是正无穷大量, 记为  $+\infty$ 。

若对于该数列  $\{x_n\}$ ,  $|x_n| > G$  可以恒表示为  $x_n < -G$ , 则称数列  $\{x_n\}$  是负无穷大量, 记为  $-\infty$ 。

**命题 2.13**

设  $|q| > 1$ , 证明  $\{q^n\}$  是无穷大量。



证明

**命题 2.14**

证明  $\{\frac{n^2-1}{n+5}\}$  是无穷大量。



证明

**引理 2.4**

若  $x_n \neq 0$ , 则  $\{x_n\}$  是无穷大量的充要条件是  $\{\frac{1}{x_n}\}$  是无穷小量。



证明

**引理 2.5**

设  $\{x_n\}$  是无穷大量,  $\{y_n\}$  满足  $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N_0$ , 有  $|y_n| \geq \delta > 0$ , 则  $\{x_n y_n\}$  也是无穷大量。



证明

**引理 2.6**

设  $\{x_n\}$  是无穷大量,  $\{y_n\}$  极限存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ , 则  $\{x_n y_n\}$  与  $\{\frac{x_n}{y_n}\}$  都是无穷大量。



证明

**命题 2.15**

$\{\frac{n}{\sin(n)}\}$ 和 $\{n \cdot \arctan(n)\}$ 是无穷大量。



**证明**

**命题 2.16**

讨论极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_l}$$

其中  $a_0, b_0 \neq 0, k, l \in \mathbb{Z}^+$



**证明** 从分子上提出  $n^k$ , 分母上提出  $n^l$  次

**2.2.1 无穷大的运算**

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 则记  $\{x_n\}$  为“ $+\infty$ ”。

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ , 则记  $\{y_n\}$  为“ $+\infty$ ”。

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ , 则记  $\{z_n\}$  为“ $+\infty$ ”。

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ , 则记  $\{w_n\}$  为“0”。

**定理 2.7**

1.  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2.  $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
3.  $(+\infty) \pm (\text{有界量}) = +\infty$
4.  $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
5.  $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

**定义 2.7**

1.  $(+\infty) - (+\infty) = ?$
2.  $(+\infty) + (-\infty) = ?$
3.  $0 \cdot \infty = ?$
4.  $\frac{0}{0} = ?$
5.  $\frac{\infty}{\infty} = ?$
6. ...

上述情况称为“待定型”

**定义 2.8**

若数列  $\{x_n\}$ , 有  $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$ , 则称数列  $\{x_n\}$  单调增加, 记为  $\{x_n\} \uparrow$ 。若有  $x_n < x_{n+1}$ , 则称数列  $\{x_n\}$  严格单调增加, 记为  $\{x_n\}$  严格  $\uparrow$ 。

若数列  $\{x_n\}$ , 有  $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$ , 则称数列  $\{x_n\}$  单调减少, 记为  $\{x_n\} \downarrow$ 。若有  $x_n > x_{n+1}$ , 则称数列  $\{x_n\}$  严格单调减少, 记为  $\{x_n\}$  严格  $\downarrow$ 。

**定理 2.8 (Stolz定理)**

假设  $\{y_n\}$  严格单调增加数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ 。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a (a \text{ 为有限数, } +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$$



证明

#### 命题 2.17

用Stolz定理证明, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$



证明

#### 命题 2.18

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$



证明

#### 命题 2.19

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2}$$



证明

## 2.3 收敛准则

收敛数列一定有界, 但是收敛数列不一定有界。

1. 那么有界数列加什么条件收敛?
2. 有界数列不加条件的情况下, 可以得到什么弱一些的结论?

#### 定理 2.9

单调有界数列必定收敛。



**证明** 不妨设  $\{x_n\}$  单调增加, 有上界。

定理意义: 从定义证明时, 我们需要知道极限  $a$ , 相当于验证极限为  $a$ , 而当极限未知时, 则无法证明。而定理则从数列本身的性质出发, 不需要知道极限是多少。

#### 引理 2.7

若数列  $\{x_n\}$  从第  $N$  项之后开始单调有界, 则数列  $\{x_n\}$  依旧收敛。



**证明** 考虑  $n \geq N$  后的数组成的数列, 设  $n_1 = n - N + 1$ , 则  $\{x_{n_1}\}$  单调有界。由于  $\{x_{n_1}\} (n_1 \geq 1)$  单调有界, 则  $\{x_{n_1}\} (n_1 \geq 1)$  收敛。即  $\exists a, \forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n_1 > N_1$ , 有  $|x_{n_1} - a| < \epsilon$ 。那么我们可以取  $N_2 = N_1 + N - 1$ , 此时  $\forall \epsilon, \exists N_2 = N_1 + N - 1, \forall n > N_2$ , 有  $|x_n - a| < \epsilon$ , 即数列  $\{x_n\}$  极限存在。

#### 命题 2.20

设  $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$ , 证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求极限。



证明

**命题 2.21**

设  $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), n = 1, 2, 3, \dots$ , 证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求极限。

**证明**

无穷小量的趋近速度。

**命题 2.22**

对于上题的  $\{x_n\}$ , 求极限,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$

**证明****命题 2.23**

$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$ , 证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求极限。

**证明**

兔子

**命题 2.24 (Fibonacci 数列)**

$\{a_n\}$  为 Fibonacci 数列, 令  $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , 讨论  $\{b_n\}$  数列。

**证明**

接下来我们来研究  $\pi$  和  $e$

关于  $\pi$ :

**命题 2.25**

证明  $\left\{L_n = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$  收敛。求圆的面积公式。



**证明** 取  $t = \frac{180^\circ}{n(n+1)}$ , 当  $n \geq 3$  时,  $nt \leq 45^\circ$ 。且由三角公式得:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]\tan(t)}$$

由于  $nt \leq 45^\circ$ , 则  $\tan(kt) < 1 (k < n)$ , 因此:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]\tan(t)} > \tan[(n-1)t] + \tan(t)$$

则:

$$\begin{aligned} \tan(nt) &> \tan[(n-1)t] + \tan(t) \\ \tan[(n-1)t] &> \tan[(n-2)t] + \tan(t) \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

则:

$$\tan(nt) > n \tan(t)$$

现在来考虑 $\sin[(n+1)t]$ :

$$\begin{aligned}\sin[(n+1)t] &= \sin(nt)\cos(t) + \cos(nt)\sin(t) \\ &= \sin(nt)\cos(t) \left[ 1 + \frac{\tan(t)}{\tan(nt)} \right] \\ &< \sin(nt)\cos(t) \left[ 1 + \frac{1}{n} \right] \\ &< \sin(nt) \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

即:

$$n \sin[(n+1)t] < (n+1) \sin(nt)$$

将 $t = \frac{180^\circ}{n(n+1)}$ 代入得:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < (n+1) \sin\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right)$$

即该数列单调增加。

考虑到单位圆的面积:

$$S' > n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

并且单位圆的面积小于外接正方形的面积, 即:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < S' < 4$$

即:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < \frac{4}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

因为 $n \geq 3$ , 所以:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 8$$

因此数列 $\left\{L_n = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 单调有界, 则该数列极限存在。

现在定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \pi$ 。

再来考虑单位圆的面积 $S'$ , 设内接正多边形的面积为 $S_1$ , 外接正多边形的面积为 $S_2$ , 则 $S_1(n) < S' < S_2(n)$ 。  
内接正多边形的面积为:

$$S_1(n) = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

外接正多边形的面积为:

$$S_2(n) = n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = n \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

并且根据数列极限的四则运算有:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_1(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \pi \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_2(n) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} = \pi\end{aligned}$$

则根据夹逼性原理得:

$$S' = \pi$$

其中, 对于外接正多边形的面积, 考虑:

$$\begin{aligned}
 (n+1)\tan(nt) - n\tan[(n+1)t] &= (n+1)\frac{\sin(nt)}{\cos(nt)} - n\frac{\sin[(n+1)t]}{\cos[(n+1)t]} \\
 &= \frac{(n+1)\sin(nt)\cos[(n+1)t] - n\sin[(n+1)t]\cos(nt)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
 &= \frac{\sin(nt)\cos[(n+1)t] - n\sin(t)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
 &= \frac{\sin[(2n+1)t] - \sin(t) - 2n\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
 &= \frac{\sin[(2n+1)t] - (2n+1)\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]}
 \end{aligned}$$

并且当  $n \geq 3$  时, 有:

$$\begin{aligned}
 \sin[(2n+1)t] &= \sin(2nt)\cos(t) + \cos(2nt)\sin(t) < \sin(2nt) + \sin(t) \\
 \sin(2nt) &= \sin[(2n-1)t]\cos(t) + \cos[(2n-1)t]\sin(t) < \sin[(2n-1)t] + \sin(t) \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

因此:

$$\sin[(2n+1)t] < (2n+1)\sin(t)$$

因此:

$$(n+1)\tan(nt) < n\tan[(n+1)t]$$

即:

$$(n+1)\tan\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right) < n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

因此数列  $\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$  单调递减。因为外接正多边形面积必然大于内接正方形, 因此:

$$n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) > 2$$

因此数列  $\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$  单调有界, 则该数列极限存在。

关于  $e$ :

#### 命题 2.26

考虑两个数列:

$$\left\{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad \text{和} \quad \left\{y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

证明这两个数列极限存在且相等。

**证明**

定义  $\ln = \log_e$  为自然对数,  $e$  自然对数的底数。

#### 命题 2.27

令  $a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$ , ( $p > 0$ ), 证明  $\{a_n\}$  当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散。

**证明**

$p = 1$  时,  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  为调和级数, 它是正无穷大量, 我们想知道它趋近无限的速度。

**命题 2.28**

证明

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

收敛。

**证明** 极限记为 $\gamma$ , 称为欧拉常熟。 $\gamma > 0.577215$ **命题 2.29**

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$$

**证明** 除了夹逼准则, 还能用上一个数列相减计算。**命题 2.30**

$$d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

**证明**以上是和 $e$ 相关的数列**定义 2.9 (闭区间套)**有一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ , 满足:

1.  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \cdots$
2.  $b_n - a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

则称这样的一列闭区间是一个闭区间套。

**定理 2.10 (闭区间套定理)**假如 $[a_n, b_n]$ 是一个闭区间套, 则存在唯一的实数 $\xi$ , 它属于一切闭区间 $[a_n, b_n]$ 。且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$ 。**证明****定理 2.11**

实数集不可列。

**证明** 反证法

子列

**定义 2.10**

存在一个数列 $\{x_n\}$ , 取一系列严格单调增加的正整数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$ , 则 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$ , 称为 $\{x_n\}$ 的一个子列, 记为 $\{x_{n_k}\}$ ,  $k$ 代表子列中的第 $k$ 项, 又恰好是 $\{x_n\}$ 中的第 $n_k$ 项。

其中 $n_k \geq k, \forall k, n_j > n_k, \forall j > k$ 。**定理 2.12**设 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$ , 则它的任何一个子列也收敛于 $a$ 。即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ **证明**

可以用于证明数列不收敛。

### 命题 2.31

若  $\{x_n\}$  存在两个子列收敛于不同的极限, 则  $\{x_n\}$  发散。

证明

### 定理 2.13 (Bolzano-Weierstrass 定理)

有界数列必有收敛子列。

**证明** 设数列为  $\{x_n\}$ , 因为数列有界, 所以  $\forall n > 0$ , 存在  $a \leq x_n \leq b$ , 则取  $[a_1, b_1] = [a, b]$ 。

将  $[a_1, b_1]$  分为两个闭区间, 分别为  $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$  和  $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ , 其中至少有一个区间包含无穷多个数列的元素, 因为若两个区间都有有限个数列元素, 则数列  $\{x_n\}$  的元素有限。那么我们可以取包含无穷多个数列元素的区间为  $[a_2, b_2]$ 。

同理, 我们可以取出  $[a_3, b_3], [a_4, b_4], \dots$ 。每一个区间中都包含无穷多个数列元素。

对于这些区间,  $\forall n > 0$ , (1).  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ , (2).  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$ , 则这些闭区间组成了一个闭区间套。根据闭区间套定理, 存在唯一的实数  $\gamma$  属于一切闭区间  $[a_n, b_n]$ 。

则我们可以这样构造子列:

从  $[a_1, b_1]$  中取  $x_{n_1}$ , 使得  $n_1 > 0$ , 这必然可以实现, 因为  $[a_1, b_1]$  中有无限多个数列元素。

从  $[a_2, b_2]$  中取  $x_{n_2}$ , 使得  $n_2 > n_1$ , 这必然可以实现, 因为  $[a_2, b_2]$  中有无限多个数列元素, 即  $\forall n_1, \exists n_2 > n_1$ 。

从  $[a_3, b_3]$  中取  $x_{n_3}$ , 使得  $n_3 > n_2$ , 这必然可以实现, 因为  $[a_3, b_3]$  中有无限多个数列元素, 即  $\forall n_2, \exists n_3 > n_2$ 。

.....

对于子列  $\{x_{n_k}\}$ ,  $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ , 则  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $K = \max \{ [\log_2 (\frac{b-a}{\epsilon})] + 2, 1 \}$ ,  $\forall k > K, b_k - a_k < \epsilon$ , 同时  $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ ,  $\gamma \in [a_k, b_k]$ , 则  $\forall k > K, |x_{n_k} - \gamma| < b_k - a_k < \epsilon$ 。

即  $\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+, \forall k > K, |a_{n_k} - \gamma| < \epsilon$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \gamma$ , 该子列收敛于  $\gamma$ 。

在陈老的视频是, 陈老是用夹逼性证明  $\{x_{n_k}\}$  收敛于  $\gamma$ , 证明如下:

$\forall k, a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ , 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \gamma$ , 则根据夹逼性,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \gamma$ 。非常巧妙!

### 定理 2.14

假设  $\{x_n\}$  是无界数列, 则存在子列  $\{x_{n_k}\}$ , 它是无穷大量。

证明

Cauchy 收敛原理

### 定义 2.11

$\{x_n\}$  满足:

$$\forall \xi > 0, \exists N, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \xi$$

则称  $\{x_n\}$  为基本数列。

也可以是  $\forall m > n > N$

证明

### 命题 2.32

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

是否为基本数列。



证明

## 命题 2.33

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

是否为基本数列。



证明

## 定理 2.15 (Cauchy收敛原理)

 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 是基本数列。

证明 必要性:

充分性:

## 命题 2.34

 $\{x_n\}$ 满足压缩性条件, 即

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k |x_n - x_{n-1}|, 0 < k < 1, \forall n = 2, 3, \dots$$

则 $\{x_n\}$ 是收敛的。

证明

实数系的基本定理

1. 确界存在定理(实数系的连续性定理)
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Bolzano-Weierstrass定理
5. Cauchy收敛原理(实数系完备性)

以上都是在实数系中考虑, 实数系上的基本数列必然是收敛数列, 因此Cauchy收敛原理也被称为实数系的完备性定理。实数系有完备性, 有理数不具备完备性。例如 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 是有理数列, 但是它的极限是无理数。以上五个定理等价。我们需要证明这五个定理等价。从Cauchy收敛原理推出闭区间套定理, 再从闭区间套定理推出确界存在定理。

## 定理 2.16

实数系的完备性等价于实数系的连续性。

证明 (1)Cauchy收敛原理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理。(2)闭区间套定理 $\Rightarrow$ 确界存在定理。

## 第3章 函数极限与连续函数

### 函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

#### 定义 3.1

$y = f(x)$  在  $O(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$  上有定义, 如果存在一个数  $A$ , 使得对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 可以找到  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 成立  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x_0$  点的极限, 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  或者  $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$ 。如果不存在满足上述性质的  $A$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  点极限不存在。

$O(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$  称为去心邻域。

#### 命题 3.1

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

证明

#### 命题 3.2

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

证明

#### 命题 3.3

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

证明

函数极限的性质

#### 定理 3.1 (函数极限的唯一性)

设  $A, B$  都是  $f(x)$  在  $x_0$  的极限, 则  $A = B$ 。

证明 证明类似证明数列极限的唯一性

#### 定理 3.2 (函数极限的局部保序性)

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, A > B$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $x$  有  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $f(x) > g(x)$

证明 证明类似证明数列极限的保序性

#### 引理 3.1

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$ , 则  $\exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta), |f(x)| > \frac{|A|}{2}$ 。

证明 请使用局部保序性证明

## 引理 3.2

假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 若  $\exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta)$ , 有  $f(x) \geq g(x)$ , 则  $A \geq B$



证明

## 定理 3.3 (函数极限的局部有界性)

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\exists \delta, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta), m \leq f(x) \leq M$ ,  $m, M$  为固定实数。

若  $f(x)$  在  $x_0$  有定义, 则在  $x$  满足  $|x - x_0| < \delta$  的条件下,  $\min\{m, f(x)\} \leq f(x) \leq \max\{M, f(x)\}$ 。



证明 请使用局部保序性证明

## 定理 3.4 (函数极限的夹逼性定理)

若  $\exists r > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < r)$ , 有  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$



证明

## 命题 3.4

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



证明 使用夹逼性证明。

再用数列逼近证明。

## 定理 3.5 (函数极限四则运算)

假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 则:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha A + \beta B$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$



证明

## 命题 3.5

求:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}$$

的极限。



证明

## 命题 3.6

求:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

的极限。



证明

### 3.1 函数极限和数列极限的关系

#### 定理 3.6 (否定命题的分析表示)

$\{x_n\}$  以  $a$  为极限:  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n - a| < \epsilon$ 。  
 $\{x_n\}$  不以  $a$  为极限:  $\exists \epsilon > 0, \forall N, \exists n > N, |x_n - a| \geq \epsilon$



#### 定理 3.7 (heine定理)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在的充分必要条件是: 对于任意的满足  $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  的数列  $\{x_n\}$ ,  $\{f(x_n)\}$  收敛于  $A$ 。



**证明** 证明必要性, 即证明:

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则对于任意的满足  $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  的数列  $\{x_n\}$ ,  $\{f(x_n)\}$  收敛于  $A$ 。

因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta)$ , 成立  $|f(x) - A| < \epsilon$ 。

又因为对于  $\{x_n\}$ , 有  $x_n \neq x_0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , 即  $\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$ , 成立  $0 < |x_n - x_0| < \delta$ 。

则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 对于该  $\delta, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$ , 有  $0 < |x_n - x_0| < \delta$ , 且在该  $\delta$  下有  $|f(x_n) - A| < \epsilon$ 。证明完毕。

**证明充分性**, 即证明:

若对于任意的满足  $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  的数列  $\{x_n\}$ ,  $\{f(x_n)\}$  收敛于  $A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

利用反证法, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$ , 则  $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x (0 < |x - x_0| < \delta)$ , 使得  $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$

取  $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$ , 则对于  $\epsilon_0$ , 有:

$$\exists x_1 (0 < |x_1 - x_0| < 1), |f(x_1) - A| \geq \epsilon_0$$

$$\exists x_2 (0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}), |f(x_2) - A| \geq \epsilon_0$$

$$\exists x_3 (0 < |x_3 - x_0| < \frac{1}{3}), |f(x_3) - A| \geq \epsilon_0$$

.....

对于数列  $\{x_n\}$ , 对于  $\epsilon_0, \forall n, |x_n - x_0| > \epsilon_0$  恒成立。

即:  $\exists \epsilon = \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N, |f(x_n) - A| > \epsilon$ 。则存在数列  $\{x_n\}$  不收敛于  $A$ 。这与条件矛盾, 则假设不成立。证明完毕。

#### 命题 3.7

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$  在  $x_0 = 0$  处极限不存在。



**证明**

#### 引理 3.3

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在并且有限(收敛)的充分必要条件是: 对任意满足  $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  的  $\{x_n\}$ ,  $\{f(x_n)\}$  收敛。



**证明**

## 3.2 单侧极限

### 定义 3.2

假设  $f(x)$  在  $(x_0 - \rho, x_0)$  有定义, 如果存在  $B, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (-\delta < x - x_0 < 0)$ , 成立  $|f(x) - B| < \epsilon$ , 则称  $B$  是  $f(x)$  在  $x_0$  的左极限, 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B$  ( $f(x) \rightarrow B (x \rightarrow x_0^-)$ )。

类似地, 假如存在  $C, \exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < x - x_0 < \delta)$ , 成立  $|f(x) - C| < \epsilon$ , 则称  $C$  是  $f(x)$  在  $x_0$  的右极限, 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = C$  ( $f(x) \rightarrow C (x \rightarrow x_0^+)$ )。

则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$



### 命题 3.8

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



证明

### 命题 3.9

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ 2 \cos(x^2) & x \geq 0 \end{cases}$$



## 3.3 函数极限定义的扩充

可以将自变量  $x$  的趋向扩充成以下六种:

1.  $x \rightarrow x_0$
2.  $x \rightarrow x_0^+$
3.  $x \rightarrow x_0^-$
4.  $x \rightarrow +\infty$
5.  $x \rightarrow -\infty$
6.  $x \rightarrow \infty$

而应变量  $f(x)$  的趋向可以扩充成以下四种:

1.  $f(x) \rightarrow A$
2.  $f(x) \rightarrow +\infty$
3.  $f(x) \rightarrow -\infty$
4.  $x \rightarrow \infty$

现在加上对应的分析表述, 对于自变量  $x$ :

1.  $x \rightarrow x_0 : \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta)$
2.  $x \rightarrow x_0^+ : \exists \delta > 0, \forall x (0 < x - x_0 < \delta)$
3.  $x \rightarrow x_0^- : \exists \delta > 0, \forall x (-\delta < x - x_0 < 0)$
4.  $x \rightarrow +\infty : \exists X > 0, \forall x (x > X)$
5.  $x \rightarrow -\infty : \exists X > 0, \forall x (x < -X)$
6.  $x \rightarrow \infty : \exists X > 0, \forall x (|x| > X)$

对于应变量  $f(x)$ :

1.  $f(x) \rightarrow A : \forall \epsilon > 0, \dots, |f(x) - A| < \epsilon$
2.  $f(x) \rightarrow +\infty : \forall G > 0, \dots, f(x) > G$
3.  $f(x) \rightarrow -\infty : \forall G > 0, \dots, f(x) < -G$
4.  $x \rightarrow \infty : \forall G > 0, \dots, |f(x)| > G$

**命题 3.10**

写出:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$$

的分析表述。



证明

**命题 3.11**

写出:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

的分析表述。



证明

**命题 3.12**

写出:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

的分析表述。



证明

**命题 3.13**

证明:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



证明

**命题 3.14**

证明

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$



证明

我们讲了函数极限的性质和函数极限的四则运算。讲函数极限的性质的时候是对于收敛函数来讨论的。对于扩充后的函数极限则不一定成立, 特别对于 $\infty$ 。性质要排除 $\infty$ , 四则运算要排除待定型。

对于扩充后的heine定理应该如何书写:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 充分必要条件: 对任意的满足 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ 的数列 $\{x_n\}$ , 成立 $\{f(x_n)\}$ 收敛于A。

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且有限的充分必要条件是: 对任意满足 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ 的数列 $\{x_n\}$ ,  $\{f(x_n)\}$ 收敛。