数学分析

作者：hapo

时间：December 15, 2022

目录

记录本书的原因是因为我觉得自己的数学分析实在太烂了。因此我决定使用费曼学习法。这是一个链式反应，在我学习随机过程的时候，我发现自己的概率论太差了，而当我学习概率论的时候，我又发现我的测度论太差了，而我学习测度论的时候，我最终发现，我差的是数学分析。而这个最初始的问题是我并没有系统地学过数学分析。而在学习数学分析的过程中，我发现我对好多概念并不明晰，这使得学习的进度缓慢，并且经常容易在概念上卡壳，而卡壳结束后又很快忘记。因此，为了能够更好地记住，我决定使用费曼学习法。在此，我记录下我学习数学分析的过程。

第 1 章 集合与映射

定义 1.1 (集合)

是具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集的总体，其中的对象称为集合的元素。

集合通常记为A, B, C, X, Y
元素通常记为s, t, a, b, x, y
x是集合S的元素，记为$x \in S$

第 2 章 实数的完备性

内容提要

- 有理数的定义 2.2

在本章中，我们将介绍实数的完备性。在介绍实数之前，我们需要将实数定义或者说引入。而对于实数的定义是有很多的，而我在此介绍无穷十进制小数表示和戴德金(Dedekind)分割。这部分我将结合陈纪修教授的教材和Ayumu的讲义。

在引入实数之前，我们需要先介绍有理数，而在介绍有理数之前，我们需要规定一些常用集合的记号。而介绍常用集合，则需要先介绍集合(set)，在此我们并不介绍集合，我们暂时默认我们已经知道了集合的概念，将来我们会对该部分内容进行扩充。现在让我们来列举一些常用的集合。

定义 2.1 (常用集合表示)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots\}$

$\mathbb{Z}^+ = \{n | n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$

♣

在定义了以上的集合表示之后，我们就能以上的符号来表示有理数：

定义 2.2 (有理数)

若一个数x可以表示成$\frac{q}{p}$的形式，其中$q \in \mathbb{Z}$，$p \in \mathbb{Z}^+$，则称x为**有理数**(rational number)。而由有理数组成的集合称为**有理数集**，有理数集常用$\mathbb{Q}$表示，其可以表示为：

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+\}$$

在这里，我们可以看到p只需要属于$\mathbb{Z}^+$，这是因为若x为负的，我们总可以规定负号出现在分子上。 ♣

有理数对加减乘除都封闭，并且我们在有理数上定义了大小关系，即有理数也是良序的。但是它并不能满足研究所需。例如，存在长度无法用有理数表示。并且有理数之间存在“空隙”，即有理数不连续。而在我们之后的研究中，我们往往需要研究连续性，因此我们需要对有理数进行扩充。在这之前，我们先来证明确实有一些数无法用有理数表示。

命题 2.1

$\sqrt{2}$不是有理数。 ♠

证明 我们用反证法。假设$\sqrt{2}$为有理数，那么存在$q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$，使得$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$。

而且有的函数在实数域和有理数域上的表现完全不一样，比如狄利克雷(dirichlet)函数。

定理 2.1 (确界存在定理—实数系连续性定理)

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。 ♡

第 3 章 数列极限

定义 3.1 (数列极限的定义)

对于数列$\{a_n\}$，存在一个实常数a，对$\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，使得当$n>N$时，$|a_n-a|<\epsilon$成立，则称$\{a_n\}$**收敛**(convengent)于a或者$\{a_n\}$的**极限**(limit)为a，记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\quad 或者\quad a_n\to a(n\to+\infty)$$

若不存在实数a，满足上述性质，则称数列$\{a_n\}$**发散**(divergent)。

一个数列收敛与否，收敛的话，收敛于哪个数，这与数列的前有限项无关。

命题 3.1

$$\lim_{n\to\infty}q^n=1(q<1)$$

证明

命题 3.2

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

证明

命题 3.3

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证明

命题 3.4

设$a_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

证明

定义 3.2 (无穷小量的定义)

以零为极限的变量称为**无穷小量**。

定理 3.1 (数列极限的有界性)

若$\{x_n\}$的极限存在，则$\{x_n\}$有界。

定理 3.2 (数列极限的保序性)

存在两个数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，并且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b,\quad 且\quad a<b$$

则$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，当$n>N$时，$x_n<y_n$。

证明

定理 3.3 (数列极限的四则运算)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}(b \neq 0)$

证明

命题 3.5

$$求\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} - (-2)^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}$$

证明

命题 3.6

$$当a > 0时，\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

证明

命题 3.7

$$求\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$$

证明

命题 3.8

$$求\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

证明

有限个

命题 3.9

设$a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$

证明

命题 3.10

若$\{x_n\}$是无穷小量，$\{y_n\}$有界($|y_n| < 0$)，则$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

证明

3.1 无穷大量

定义 3.3 (无穷大量)

对于一个数列$\{x_n\}$，若对于任意给定的$G>0$，可以找到正整数N，使得当$n>N$时，$|x_n|>G$，则称数列$\{x_n\}$是无穷大量，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

若对于该数列$\{x_n\}, |x_n|>G$可以恒表示为$x_n>G$，则称数列$\{x_n\}$是正无穷大量，记为$+\infty$。
若对于该数列$\{x_n\}$，$|x_n|>G$可以恒表示为$x_n<-G$，则称数列$\{x_n\}$是负无穷大量，记为$-\infty$。

命题 3.11

设$|q|>1$，证明$\{q^n\}$是无穷大量。

证明

命题 3.12

证明$\{\frac{n^2-1}{n+5}\}$是无穷大量。

证明

引理 3.1

若$x_n\neq 0$，则$\{x_n\}$是无穷大量的充要条件是$\{\frac{1}{x_n}\}$是无穷小量。

证明

引理 3.2

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$满足$\exists N_0\in\mathbb{Z}^+, \forall n>N_0$，有$|y_n|\geq\delta>0$，则$\{x_ny_n\}$也是无穷大量。

证明

引理 3.3

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\neq 0$，则$\{x_ny_n\}$与$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

证明

命题 3.13

$\{\frac{n}{\sin(n)}\}$和$\{n\cdot\arctan(n)\}$是无穷大量。

证明

命题 3.14

讨论极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_k}$$

其中$a_0, b_0\neq 0, k, l\in\mathbb{Z}^+$

证明 从分子上提出n^k，分母上提出n^l次

3.1.0.1 无穷大的运算

若$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$，则记$\{x_n\}$为“+∞”。
若$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$，则记$\{y_n\}$为“+∞”。
若$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$，则记$\{z_n\}$为“+∞”。
若$\lim_{n\to\infty} w_n = 0$，则记$\{z_n\}$为“0”。

定理 3.4

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
3. $(+\infty) \pm (\text{有界量}) = +\infty$
4. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
5. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

♡

定义 3.4

1. $(+\infty) - (+\infty) = ?$
2. $(+\infty) + (-\infty) = ?$
3. $0 \cdot \infty = ?$
4. $\frac{0}{0} = ?$
5. $\frac{\infty}{\infty} = ?$
6. $\cdots$

上述情况称为“待定型”

♣

定义 3.5

若数列$\{x_n\}$，有$x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调增加，记为$\{x_n\} \uparrow$。若有$x_n < x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调增加，记为$\{x_n\}$ 严格 $\uparrow$。
若数列$\{x_n\}$，有$x_n \ge x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调减少，记为$\{x_n\} \downarrow$。若有$x_n > x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调减少，记为$\{x_n\}$ 严格 $\downarrow$。

♣

定理 3.5 (Stolz定理)

假设$\{y_n\}$严格单调增加数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$。若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a(a\text{为有限数}, +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$$

♡

证明

命题 3.15

用Stolz定理证明，若$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

♠

证明

命题 3.16

$$求\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

证明

命题 3.17

$$设\lim_{n\to\infty}a_n=a，求\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}$$

证明

3.2 收敛准则

收敛数列一定有界，但是收敛数列不一定有界。

1. 那么有界数列加什么条件收敛？
2. 有界数列不加条件的情况下，可以得到什么弱一些的结论？

定理 3.6

单调有界数列必定收敛。

证明 不妨设$\{x_n\}$单调增加，有上界。

定理意义：从定义证明时，我们需要知道极限a，相当于验证极限为a，而当极限未知时，则无法证明。而定理则从数列本身的性质出发，不需要知道极限是多少。

命题 3.18

设$x_1>0,x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n},n=1,2,3,\cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

命题 3.19

设$0<x_1<1,x_{n+1}=x_n(1-x_n),n=1,2,3,\cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

无穷小量的趋近速度。

命题 3.20

$$对于上题的\{x_n\},求极限,\lim_{n\to\infty}nx_n$$

证明

命题 3.21

$x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n},n=1,2,3,\cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

兔子

命题 3.22 (Fibonacci数列)

$\{a\breve{}\grave{}n\}$为Fibonacci数列，令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，讨论$\{b_n\}$数列。

证明

接下来我们来研究π和e

关于π:

命题 3.23

证明$\left\{L_n = n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$收敛。求圆的面积公式。

证明

关于e:

命题 3.24

考虑两个数列:

$$\left\{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad 和 \quad \left\{y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

证明这两个数列极限存在且相等。

证明

定义$\ln = \log_e$为自然对数，e自然对数的底数。

命题 3.25

令$a_n = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}, (p>0)$，证明$\{a_n\}$当$p>1$时收敛，当$p\leq 1$时发散。

证明

$p=1$时，$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$为调和级数，它是正无穷大量，我们想知道它趋近无限的速度。

命题 3.26

证明

$$b_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdot+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

收敛。

证明 极限记为γ，称为欧拉常熟。$\gamma >= 0.577215$

命题 3.27

证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} = \ln 2$$

证明 除了夹逼准则，还能用上一个数列相减计算。

命题 3.28

$$d_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+}\frac{1}{n}$$

证明

以上是与e相关的数列

定义 3.6 (闭区间套)

有一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$，满足：

1. $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],n=1,2,3,\cdots$
2. $b_n-a_n\to 0(n\to\infty)$

则称这样的一列闭区间是一个闭区间套。♣

定理 3.7 (闭区间套定理)

假如$[a_n,b_n]$是一个闭区间套，则存在唯一的实数ξ，它属于一切闭区间$[a_n,b_n]$。且$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$。♡

证明

定理 3.8

实数集不可列。♡

证明 反证法

子列

定义 3.7

存在一个数列$\{x_n\}$，取一列严格单调增加的正整数$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots$，则$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdot$称为$\{x_n\}$的一个子列，记为$\{x_{n_k}\}$，$k$代表子列中的第$k$项，又恰好是$\{x_n\}$中的第$n_k$项。♣

其中$n_k\geq k,\forall k,n_j>n_k,\forall j>k$。

定理 3.9

设$\{x_n\}$收敛于a，则它的任何一个子列也收敛于a。即$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，证明$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$ ♡

证明

可以用于证明数列不收敛。

命题 3.29

若$\{x_n\}$存在两个子列收敛于不同的极限，则$\{x_n\}$发散。♠

证明

定理 3.10 (Bolzano-Weierstrass定理)

有界数列必有收敛子列。♡

证明

定理 3.11

假设$\{x_n\}$是无界数列，则存在子列$\{x_{n_k}\}$，它是无穷大量。♡

证明

Cauchy收敛原理

定义 3.8

$\{x_n\}$满足：

$$\forall \xi > 0, \exists N, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \xi$$

则称$\{x_n\}$为基本数列。

也可以是$\forall m > n > N$

证明

命题 3.30

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

是否为基本数列。

证明

命题 3.31

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

是否为基本数列。

证明

定理 3.12 (Cauchy收敛原理)

$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$\{x_n\}$是基本数列。

证明 必要性：

充分性：

命题 3.32

$\{x_n\}$满足压缩性条件，即

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k\,|x_n - x_{n-1}|\,, 0 < k < 1, \forall n = 2, 3, \cdots$$

则$\{x_n\}$是收敛的。

证明

实数系的基本定理

1. 确界存在定理(实数系的连续性定理)
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Bolzano-Weierstrass定理
5. Cauchy收敛原理(实数系完备性)

以上都是在实数系中考虑, 实数系上的基本数列必然是收敛数列, 因此Cauchy收敛原理也被称为实数系的完备性定理。实数系有完备性, 有理数不具备完备性。例如$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是有理数列, 但是它的极限是无理数。以上五个定理等价。我们需要证明这五个定理等价。从Cauchy收敛原理推出闭区间套定理, 再从闭区间套定理推出确界存在定理。

定理 3.13

实数系的完备性等价于实数系的连续性。

证明 (1)Cauchy收敛原理⇒闭区间套定理。

(2)闭区间套定理⇒确界存在定理。

3.3 函数极限