数学分析

作者：hapo

时间：February 3, 2023

目录

记录本书的原因是因为我觉得自己的数学分析实在太烂了。因此我决定使用费曼学习法。这是一个链式反应，在我学习随机过程的时候，我发现自己的概率论太差了，而当我学习概率论的时候，我又发现我的测度论太差了，而我学习测度论的时候，我最终发现，我差的是数学分析。而这个最初始的问题是我并没有系统地学过数学分析。而在学习数学分析的过程中，我发现我对好多概念并不明晰，这使得学习的进度缓慢，并且经常容易在概念上卡壳，而卡壳结束后又很快忘记。因此，为了能够更好地记住，我决定使用费曼学习法。在此，我记录下我学习数学分析的过程。

第 1 章 集合与映射

定义 1.1 (集合)

是具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集的总体，其中的对象称为集合的元素。 ♣

集合通常记为A, B, C, X, Y

元素通常记为s, t, a, b, x, y

x是集合S的元素, 记为$x \in S$

第 2 章 实数的完备性

内容提要

- 有理数的定义 2.2
- 数列极限的唯一性 2.2
- Bolzano-Weierstrass定理 2.13
- 数列极限的保序性逆命题 2.1

在本章中，我们将介绍实数的完备性。在介绍实数之前，我们需要将实数定义或者说引入。而对于实数的定义是有很多的，而我在此介绍无穷十进制小数表示和戴德金(Dedekind)分割。这部分我将结合陈纪修教授的教材和Ayumu的讲义。

在引入实数之前，我们需要先介绍有理数，而在介绍有理数之前，我们需要规定一些常用集合的记号。而介绍常用集合，则需要先介绍集合(set)，在此我们并不介绍集合，我们暂时默认我们已经知道了集合的概念，将来我们会对该部分内容进行扩充。现在让我们来列举一些常用的集合。

定义 2.1 (常用集合表示)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots\}$

$\mathbb{Z}^+ = \{n | n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$

♣

在定义了以上的集合表示之后，我们就能以上的符号来表示有理数：

定义 2.2 (有理数)

若一个数x可以表示成$\frac{q}{p}$的形式，其中$q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$，则称x为**有理数**(rational number)。而由有理数组成的集合称为**有理数集**，有理数集常用$\mathbb{Q}$表示，其可以表示为：

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+\}$$

在这里，我们可以看到p只需要属于$\mathbb{Z}^+$，这是因为若x为负的，我们总可以规定负号出现在分子上。 ♣

有理数对加减乘除都封闭，并且我们在有理数上定义了大小关系，即有理数也是良序的。但是它并不能满足研究所需。例如，存在长度无法用有理数表示。并且有理数之间存在“空隙”，即有理数不连续。而在我们之后的研究中，我们往往需要研究连续性，因此我们需要对有理数进行扩充。在这之前，我们先来证明确实有一些数无法用有理数表示。

例题 2.1 $\sqrt{2}$不是有理数。

证明 我们用反证法。假设$\sqrt{2}$为有理数，那么存在$q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$，$p, q$互质，使得$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$，即$q^2 = 2p^2$。因为$q^2$可以被2整除，即$q^2$为偶数，则$q$为偶数。那么$q$可以表示为$q = 2m, m \in \mathbb{Z}$。代入上式中，得$p^2 = 2m^2$，即$p$也为偶数。这与互质矛盾，因此假设不成立，$\sqrt{2}$不是有理数。

例题 2.2 若n不是完全平方数，则$\sqrt{n}$不是有理数。

证明

除了以上举例的有些数无法用有理数表示以外，有的函数在实数域和有理数域上的表现完全不一样，比如狄利克雷(dirichlet)函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x\text{是有理数} \\ 0 & x\text{是无理数} \end{cases}$$

可以看到当x属于有理数域时，$D(x)$是一个恒等于1的常数函数，而如果x属于实数域时，$D(x)$则并不是一个常数函数。

定理 2.1 (确界存在定理—实数系连续性定理)
非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。

证明

2.1 数列极限

定义 2.3 (数列极限的定义)
对于数列$\{a_n\}$, 存在一个实常数a, 对$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$，使得当$n > N$时，$|a_n - a| < \epsilon$成立，则称$\{a_n\}$**收敛**(convengent)于a或者$\{a_n\}$的**极限**(limit)为a, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或者 \quad a_n \to a(n \to +\infty)$$

若不存在实数a, 满足上述性质, 则称数列$\{a_n\}$**发散**(divergent)。

在这里定义邻域的概念:a的ϵ邻域$O(a,\epsilon)$为:$(a-\epsilon, a+\epsilon)$。因此数列极限的定义也可以描述为: 当$n > N$时, a_n落在a的ϵ邻域内。

并且,一个数列的极限还有以下的一些性质。首先, 一个数列是否收敛, 收敛的话, 收敛于哪个数, 这与数列的前有限项无关。这是因为, 假如数列收敛于A, 我对前K项做了修改, 那么$\forall\epsilon > 0$, 可以取$N' = \max\{K, N\}$, 此时$|x_n - A| < \epsilon$, 即极限依旧为A。又比如极限不存在时, 则$\exists\epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N, |x_n - A| > \epsilon$。此时, $\forall N > K, \exists n > N, |x_n - A| > \epsilon$, 那么$N < K$时也成立。因此在求极限的不等式时, 可以从选定的一个N开始,有时候会使得不等式的求解方便。

此外, ϵ还可以限定为小于一定值, 在该限定下证明不等式成立。这是因为当$\epsilon \le c$时候, 存在了N, 使得$n > N$时成立, 那么当$\epsilon > c$时, 该N也能使得$n > N$时成立。

接下来我们定义一个特殊的数列极限: **无穷小量**。我们会在之后特殊讨论它, 例如无穷小量的阶。

定义 2.4 (无穷小量的定义)
以零为极限的变量称为**无穷小量**。

例题 2.3 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} = 1$$

证明 令:

$$\left|\frac{n}{n+3} - 1\right| = \frac{3}{n+3} < \frac{3}{n} < \epsilon$$

因此, 当$N = \left[\frac{3}{\epsilon}\right] + 1$时, $\left|\frac{n}{n+3} - 1\right| < \epsilon$

例题 2.4 证明:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0(0 < |q| < 1)$$

证明 因为$0 < |q| < 1$, 则$|q^n| = |q|^n < \epsilon$, 则:

$$n > \frac{\lg(\epsilon)}{\lg(|q|)}$$

因为$N \in \mathbb{N}^+$, 所以取$N = \max\left\{1, \left[\frac{\lg(\epsilon)}{\lg(|q|)}\right]\right\}$, 当$n > N$时, $|q^n - 0| < \epsilon$, 即:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0(0 < |q| < 1)$$

例题 2.5 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 1)$$

证明 因为$a>1$, 所以$|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1$:

$$\sqrt[n]{a}-1=\sqrt[n]{1\cdot 1\cdot 1\cdots a}-1<\frac{(n-1)+a}{n}-1<\frac{a-1}{n}<\frac{a}{n}<\epsilon$$

所以取$N=\left[\frac{a}{\epsilon}\right]+1$时, $\forall n>N$, $|\sqrt[n]{a}-1|<\epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

$\boxed{\text{陈老是这样证明的}}$:

令$y_n=\sqrt[n]{a}-1$, 则:

$$a=(1+y_n)^n=1+C_n^1y_n+C_n^2y_n^2+\cdots+C_n^ny_n^n$$

则:

$$1+ny_n<a$$

即:

$$y_n<\frac{a-1}{n}<\epsilon$$

则取$N=\left[\frac{a-1}{\epsilon}\right]+1$, , $\forall n>N$, $|\sqrt[n]{a}-1|<\epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

注 对于$\sqrt[n]{1+x}$利用均值不等式可以得到一个有意思的不等式:

$$\sqrt[n]{1+x}<1+\frac{x}{n}$$

例题 2.6 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证明 因为$n\geq 1$, 所以$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1$:

$$\sqrt[n]{n}-1=\sqrt[n]{1\cdot 1\cdot 1\cdots\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}-1<\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}<\epsilon$$

所以取$N=\left[\frac{4}{\epsilon^2}\right]+1$时, $\forall n>N$, $|\sqrt[n]{n}-1|<\epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

$\boxed{\text{陈老是这样证明的}}$:

令$y_n=\sqrt[n]{n}-1$, 则:

$$n=(1+y_n)^n=1+C_n^1y_n+C_n^2y_n^2+\cdots+C_n^ny_n^n$$

则:

$$1+C_n^2y_n^2<n$$

即

$$y_n<\sqrt{\frac{2}{n}}<\epsilon$$

则取$N=\left[\frac{2}{\epsilon^2}\right]+1$, , $\forall n>N$, $|\sqrt[n]{n}-1|<\epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

注 实际上, 用以上两种方法, 我们可以证明$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1, (k\in\mathbb{N}^+)$。

例题 2.7 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1, (k\in\mathbb{N}^+)$$

证明 因为$n\geq 1$, 所以$\left|\sqrt[n]{n^k}-1\right|=\sqrt[n]{n^k}-1$:

$$\sqrt[n]{n}-1=\sqrt[n]{1\cdot 1\cdot 1\cdots\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}-1<\frac{n-2k+2k\sqrt{n}}{n}-1<\frac{2k}{\sqrt{n}}<\epsilon$$

所以取$N=\left[\frac{4k^2}{\epsilon^2}\right]+1$时, $\forall n>N$, $\left|\sqrt[n]{n^k}-1\right|<\epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$。

$\boxed{\text{陈老证明方法}}$: 取$n>2k$, 令$y_n=\sqrt[n]{n^k}-1$, 则:

$$n^k=(1+y_n)^n=1+C_n^1y_n+\cdot+C_n^{k+1}y_n^{k+1}+\cdots+C_n^ny_n^n$$

则:

$$\frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}y_n^{k+1}<C_n^{k+1}y_n^{k+1}<n^k$$

则:

$$y_n < (k+1)\sqrt[k+1]{\frac{n^k}{(n-k)^n(n-k)}}$$

因为$n > 2k$, 则$n - k = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - k > \frac{n}{2}$, 所以:

$$yn < (k+1)\sqrt[k+1]{\frac{n^k}{(n-k)^n(n-k)}} < (k+1)\sqrt[k+1]{\frac{2^k}{(n-k)}} < \epsilon$$

则取:

$$N = \max\left\{2k, \left[\frac{2^k}{\left(\frac{\epsilon}{k+1}\right)^{k+1}}\right] + k + 1\right\}$$

当$n > N$时,$yn < \epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$

注 在知道极限的四则运算法则后, $\sqrt[n]{n^k} = (\sqrt[n]{n})^k$可以很快得出极限为1。

例题 2.8 设$a_n > 0$,$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

证明 因为$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 所以$\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$。

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &\le \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\ &= \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|}{n} + \frac{|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}\end{aligned}$$

对于后一项, 当$n > N$时, 有:

$$\frac{|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} < \frac{n\epsilon/2}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

对于前一项, 因为N为一个有限数, 则取$M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \cdots, |a_N - a|\}$, 因此:

$$\frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|}{n} < \frac{NM}{n}$$

因此取$N_1 = \left[\frac{2NM}{\epsilon} + 1\right]$, 当$n > N_1$时:

$$\frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

因此, 取$N_2 = \max\{N, N_1\}$, 当$n > N_2$时:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} < \epsilon$$

即:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

在给出数列极限的定义之后, 我们来考察下数列极限的性质。因为现在我们只讲了定义, 如果求所有的导数都从定义出发, 那么过程会极其地繁琐。因此我们需要总结规律, 使得我们能够方便地求解数列极限。

定理 2.2 (数列极限的唯一性)

若

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$$

则

$$a = b$$

注 以下我不再写$N \in \mathbb{N}^+$, 因为过于冗余。

证明 $\boxed{\text{证法一(陈老版本)}}$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1$, $\forall n > N_1$, $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$。$\exists N_2$, $\forall n > N_2$, $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$。所以$\forall n > \max\{N_1, N_2\}$, 有:

$$|a - b| = |(a - a_n) - (b - a_n)| \le |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

即$\forall \epsilon, \forall n > \max\{N_1, N_2\}, |a-b| < \epsilon$。$|a-b| < \epsilon$要对所有的$\epsilon$和$n$都成立，因此$|a-b| = 0$，即$a = b$。若$a \neq b$，则可取$\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$，使得$\exists n$使不等式不成立。

注 也可以把$\{a\}$看作一个恒等序列，则$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a-b| < \epsilon$，即恒等数列$\{a\}$的极限为b，则$a = b$。

$\boxed{\text{证法二}}$:用反证法，设$a > b$，取$\epsilon = \frac{a-b}{2}$，则$\exists N_1, \forall n > N_1, |a_n - a| < \frac{a-b}{2}$，则$a_n > \frac{a+b}{2}$。同理可得: $\exists N_2$, $\forall n > N_2, a_n < \frac{a+b}{2}$。则$\forall n > \max\{N_1, N_2\}, \frac{a+b}{2} < a_n < \frac{a+b}{2}$，存在矛盾，即$a \leq b$。同理可以证$a \geq b$，因此$a = b$。

注 唯一性表明了收敛的数列极限a有且只有一个，在定义中只说了$\exists a$，并没有限定a的个数，唯一性使得当我们求得一个极限时，不用再去找别的极限值。

接下来我们再来看数列的有界性，有界性也是极限非常重要的性质，很多时候可以帮助我们放大不等式。

定义 2.5

1. 对于数列$\{x_n\}$，若$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$，成立$x_n \leq M$，则称M是$\{x_n\}$的一个上界，或称$\{x_n\}$有上界。
2. 对于数列$\{x_n\}$，若$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$，成立$x_n \geq m$，则称m是$\{x_n\}$的一个下界，或称$\{x_n\}$有下界。

$\{x_n\}$既有上界又有下界，则称$\{x_n\}$有界。

$\{x_n\}$有界的另一个定义：$\exists X \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^+$，成立$|x_n| \leq X$。♣

注 我们先说明下这两个定义等价: 若$\{x_n\}$有上界有下界，则$\forall n \in \mathbb{N}^+, m \leq x_n \leq M$，则$|x_n| \leq \max\{|m|, |M|\}$，则我们找到了$X = \max\{|m|, |M|\}$。若$\{x_n\}$有界,即$\exists X \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^+, |x_n| \leq X$，则$\forall n \in \mathbb{N}^+, -X \leq x_n \leq X$，则我们找到了$m = -X, M = X$。

定理 2.3 (数列极限的有界性)

若$\{x_n\}$的极限存在，则$\{x_n\}$有界。♡

证明 设$\{x_n\}$的极限为a，取$\epsilon = 1$，则$\exists N, \forall n > N, |x_n - a| < 1$，则$a - 1 < x_n < a + 1$。

因为N是一个固定数，则取$m = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_N, a-1\}$，$M = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_N, a+1\}$，$\forall n \in \mathbb{N}^+$，$m \leq x_n \leq M$。

定理 2.4 (数列极限的保序性)

存在两个数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, \quad \text{且} \quad a < b$$

则$\exists N \in \mathbb{Z}^+$，当$n > N$时，$x_n < y_n$。♡

证明 取$\epsilon = \frac{b-a}{2}$，则$\exists N_1, \forall a > N_1, |x_n - a| < \frac{b-a}{2}$，即:

$$x_n - a < \frac{b-a}{2} \to x_n < \frac{b+a}{2}$$

同理，$\exists N_2, \forall n > N_2, |y_n - b| < \frac{b-a}{2}$，即:

$$y_n - b > -\frac{b-a}{2} \to y_n > \frac{a+b}{2}$$

即$\forall n > \max\{N_1, N_2\}, x_n < \frac{a+b}{2} < y_n$。

证毕

引理 2.1 (数列极限的保序性逆命题)

对于$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$，若$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, x_n \leq y_n$，则$a \leq b$。♡

证明 $\boxed{\text{反证法}}$: 若$a > b$，则$\exists N_1, \forall n > N_1, x_n > y_n$，则$\forall, n > \max\{N, N_1\}, x_n > y_n$，这与$\forall n > N, x_n \leq y_n$条件矛盾，则假设不成立。

证毕

注

1. $\exists N, foralln > N, x_n < y_n$，并不能推出$a < b$，例如$\{x_n = \frac{1}{2n}\}$和$\{y_n = \frac{1}{n}\}$，它们的极限都是0。

2. 可以直接从极限存在的情况下的逆否命题的角度思考该命题。写出定理 2.4的逆否命题: 对于$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b, \forall N, \exists n > N, x_n \geq y_n$, 则$a \geq b$, $\exists N, \forall n > N, x_n \geq y_n$满足该情况, 因此$a \geq b$。

引理 2.2

1. 若$\lim_{n\to\infty} y_n = b > 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n > \frac{b}{2} > 0$。
2. 若$\lim_{n\to\infty} y_n = b < 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n < \frac{b}{2} < 0$。

♡

证明 利用数列极限的保序性证明。当$b > 0$时，取$\{x_n = \frac{b}{2}\}$, 则$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{2} < b$, 由数列极限的保序性可知，$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有$y_n > x_n = \frac{b}{2}$。

证毕

同理可证明$b < 0$的情况。

以上推论可以合起来写为:

引理 2.3

若$\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n| > \frac{|b|}{2} > 0$。

♡

证明 除了上一个推论那样分开来证明, 还可以如下证明: $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 即$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $|y_n - b| < \epsilon$。

由三角不等式得:

$$|y_n - b| \geq ||y_n| - |b||$$

即:

$$||y_n| - |b|| \leq |y_n - b| < \epsilon$$

因此$\lim_{n\to\infty} |y_n| = |b|$。之后的证明同上。

定理 2.5 (数列极限的夹逼性定理)

对于数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, 若$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 成立$x_n \leq y_n \leq z_n$, 且$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, 则$\lim_{n\to\infty} y_n = a$

♡

证明 $\forall \epsilon, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, |x_n - a| < \epsilon$, 即$x_n - a > -\epsilon$。

同理, $\forall \epsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, |y_n - a| < \epsilon$, 即$z_n - a < \epsilon$。

取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 则:

$$-\epsilon < x_n - a < y_n - a < z_n - a < \epsilon$$

即:

$$-\epsilon < y_n - a < \epsilon$$

即:

$$|y_n - a| < \epsilon$$

总结起来即为: $\forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - a| < \epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty} y_n = a$。

证毕

例题 2.9 求:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

解 因为$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, 所以$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$。

又因为:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

因此:

$$0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

又因为$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0$, 所以根据夹逼定理:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$$

例题 2.10 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{1\le i\le p}\{a_i\}$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_p>0$, 且为常数。

证明　设$M=\max_{1\le i\le p}\{a_i\}$, 则

$$\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n\right)^{\frac{1}{n}}>M$$

$$\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n\right)^{\frac{1}{n}}\le p^{\frac{1}{n}}M$$

在之前的证明中我们已经证明$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$, 因此根据夹逼定理:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n\right)^{\frac{1}{n}}=M$$

证毕

例题 2.11 用夹逼定理证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证明　这个用夹逼定理的证明实际上和之前提到的方法1接近, 即利用

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{1\cdot1\cdot1\cdots\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}<\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1$$

例题 2.12 用夹逼定理证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$$

证明　这个用夹逼定理的证明实际上也和之前提到的方法1接近, 即利用

$$\sqrt[n]{n^2}=\sqrt[n]{1\cdot1\cdot1\cdots\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}<\frac{n-4+4\sqrt{n}}{n}<\frac{4}{\sqrt{n}}+1$$

下面再来介绍下数列极限的四则运算, 有了四则运算法则我们可以快速地计算极限。推导四则运算法则需要用到数列极限的有界性。

定理 2.6 (数列极限的四则运算)

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 则

1. $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha a+\beta b$
2. $\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$
3. $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n})=\frac{a}{b}(b\ne0)$

证明　首先根据收敛数列的有界性有: $\exists X>0, |y_n|\le X$。

1. 证明: $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha a+\beta$ b。
   $\forall\epsilon,\exists N_1,\forall n>N_1,|x_n-a|<\frac{\epsilon}{|\alpha|+|\beta|}$; $\forall\epsilon,\exists N_2,\forall n>N_2,|y_n-b|<\frac{\epsilon}{|\alpha|+|\beta|}$。
   则$\forall\epsilon,\exists N=\max\{N_1,N_2\}, foralln>N$, 有:

$$|\alpha x_n+\beta y_n-\alpha a-\beta b|\le|\alpha||x_n-a|+|\beta||y_n-b|<\epsilon$$

   即:

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha a+\beta b$$

   证毕

2. **证明:** $\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$

$$|x_ny_n-ab|=|x_ny_n-ay_n+ay_n-ab|\le|x_n-a||y_n|+|a||y_n-b|\le X|x_n-a|+|a||y_n-b|$$

$\forall\epsilon$, $\exists N_1,N_2$, $\forall n>N_1$, $|x_n-a|<\frac{\epsilon}{X+|a|}$, $\forall n>N_2$, $|y_n-b|<\frac{\epsilon}{X+|a|}$。则$\forall n>\max\{N_1,N_2\}$, 有

$$|x_ny_n-ab|<\epsilon$$

即:

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$$

证毕

3. **证明:** $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n})=\frac{a}{b}(b\neq0)$
因为$\lim_{n\to\infty}y_n=b\neq0$, **根据引理 2.3:** $\exists N_0$, $\forall n>N_0$, $|y_n|>\frac{|b|}{2}>0$。**则:**

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|bx_n-ay_n|}{|b||y_n|}<\frac{2|bx_n-ab+ab-ay_n|}{|b|^2}\le\frac{2(|b||x_n-a|+|a||y_n-b|)}{|b|^2}$$

$\forall\epsilon$, $\exists N_1,N_2$, $\forall n>N_1$, $|x_n-a|<\frac{|b|^2\epsilon}{2(|a|+|b|)}$, $\forall n>N_2$, $|y_n-b|<\frac{|b|^2\epsilon}{2(|a|+|b|)}$。**则**$\forall n>\max\{N_0,N_1,N_2\}$**:**

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|<\epsilon$$

即:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n})=\frac{a}{b}$$

证毕

注

1. 对于第三个式子, 我们还可以先证明$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{b}$, 再用第二个式子, 这样的方式简化运算。
2. 四则运算的适用范围是极限存在, 发散的情况下则不适用了, 所以在之后研究无穷大量的时候, 我们并没有直接用四则运算。

例题 2.13 求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-(-2)^n}{3\cdot5^n+2\cdot3^n}$$

解 上下同除以5^n, 则:

$$\frac{5^{n+1}-(-2)^n}{3\cdot5^n+2\cdot3^n}=\frac{5-\left(-\frac{2}{5}\right)^n}{3+2\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

根据极限的四则运算得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-(-2)^n}{3\cdot5^n+2\cdot3^n}=\frac{5}{3}$$

例题 2.14 当$a>0$时, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

证明 在例题 2.5中我们已经证明了当$a>1$时:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

当$a=1$时, $\sqrt[n]{a}=1$, 极限显然成立。

当$a<1$时:

$$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$$

因为$a<1$, 则$\frac{1}{a}>1$, 则根据$a>1$的情况得:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1$$

根据极限的四则运算得:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

综上, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

证毕

例题 2.15 求:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$$

解 因为:

$$n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

所以:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)<\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$$

又因为:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}=1$$

同理:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}=1$$

因此根据夹逼定理:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=1$$

$\boxed{\text{陈老的证明}}$:

$$n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}$$

之后直接进行四则运算。

注 如果直接对原式使用四则运算,则会得到$\infty\cdot 0$, 该极限无法计算, 因此需要对式子进行变形。

例题 2.16 求:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

解 为了书写方便, 我们令:

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

对每一项进行缩放, 则:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<y_n<\frac{n}{n}=1$$

又因为:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

根据夹逼定理得:

$$\lim_{n\to\infty}y_n=1$$

注 在数列中有无穷多项时, 我们不能直接用四则运算对每一项进行极限之后加和, 特别是每一项都趋向于0的情况下。四则运算只适用于有限项的情况下, 对于无限项的情况要具体讨论。

例题 2.17 设$a_n>0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$$

证明 若$a>0$, 根据均值不等式有:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{n_1+n_2+\cdots+n_a}{a}$$

根据例题 2.8的结果, 我们已知当$\lim_{n\to\infty} a_n = a$时, 有:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$$

根据极限的四则运算, 当$\lim_{n\to\infty} a_n = a$时, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, 根据例题 2.8, 有:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{a}$$

则根据夹逼定理:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$

若$a=0$, 则:

$$0 < \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{n_1+n_2+\cdots+n_a}{a}$$

同上, 可以证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 0$$

综上所诉:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a \quad (a_n > 0)$$

证毕

注 注意分类讨论$a=0$的情况。

命题 2.1

若$\{x_n\}$是无穷小量, $\{y_n\}$有界($|y_n| \leq X$), 则$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

证明 因为$\{x_n\}$为无穷小量, 则$\forall \epsilon>0, \exists N, \forall n>N, |x_n| < \frac{\epsilon}{X}$。由于$\{y_n\}$有界, 即$|y_n| \leq X$, 则$\forall n > N$, 有:

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \epsilon$$

即$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

证毕

2.2 无穷大量

除了上一节中介绍的数列收敛的情况外, 有时候我们还需要研究数列趋向于无穷的情况。对于极限存在的情况, 我们是说: $\forall \epsilon, \exists N, \forall n > N, |x_n - a| < \epsilon$, 即在$n > N$之后, 数列的点落在$\rho(a,\epsilon)$邻域内。而对于无穷大的情况, 我们需要适当修改定义, 因为我们的极限并不趋于一个具体的有限值, 也就无法给出该有限值的邻域。要研究无穷大量, 我们需要理解什么是无穷。我们可以这样理解无穷: 无穷比任意一个有限值都要大。接下来我们给出无穷大量的定义:

定义 2.6 (无穷大量)

对于一个数列$\{x_n\}$, 若对于任意给定的$G>0$, 可以找到正整数N, 使得当$n>N$时, $|x_n|>G$, 则称数列$\{x_n\}$是无穷大量, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

若对于该数列$\{x_n\}$, $|x_n| > G$可以恒表示为$x_n > G$, 则称数列$\{x_n\}$是正无穷大量, 记为$+\infty$。
若对于该数列$\{x_n\}$, $|x_n| > G$可以恒表示为$x_n < -G$, 则称数列$\{x_n\}$是负无穷大量, 记为$-\infty$。

例题 2.18 设$|q|>1$, 证明$\{q^n\}$是无穷大量。

证明 $\boxed{\text{证明一(陈老证明)}}$: 取$G > |q|$, 令:

$$|q^n| > G$$

则:

$$n > \frac{\lg G}{\lg |q|}$$

则$\forall G > 0$, 取$N = \max\left\{\left[\frac{\lg G}{\lg |q|}\right], 1\right\}$, 当$n > N$时, $|q^n| > G$, 即$\{q^n\}$是无穷大量。

证毕

$\boxed{\text{证明二}}$:

$$|q^n| = (1 + |q| - 1)^n > n(|q| - 1) > G$$

则$\forall G > 0$, 取$N = \max\left\{\left[\frac{G}{|q|-1}\right], 1\right\}$, 当$n > N$时, $|q^n| > G$, 即$\{q^n\}$是无穷大量。

证毕

例题 2.19 证明$\left\{\frac{n^2-1}{n+5}\right\}$是无穷大量。

证明 令:

$$\frac{n^2-1}{n+5} > \frac{n^2-25}{n+5} = n - 5 > G$$

则可取$N = [G] + 5$, 当$n > N$时, 有:

$$\left|\frac{n^2-1}{n+5}\right| > \frac{n^2-1}{n+5} > G$$

则$\left\{\frac{n^2-1}{n+5}\right\}$是无穷大量。

证毕

$\boxed{\text{陈老证明:}}$ 要证明该数列, 我们可以将分子分母进行缩放。我们希望将分子缩放成n^2, 分母缩放成n, 这是做不到的, 但是我们可以将分母缩放成$2n$。此时, 令:

$$\frac{n^2-1}{n+5} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$$

则我们可以通过解方程:

$$2n^2 - 2 > n^2 + 5n$$

得只要$n > 5$时, 不等式就能成立。因此我们可以取$N = \max\{[2G], 5\}$, 当$n > N$时候:

$$\frac{n^2-1}{n+5} > \frac{n}{2} > G$$

则$\left\{\frac{n^2-1}{n+5}\right\}$是无穷大量。

证毕

注 对于分母是$n - c$(c为常数)的情况, 我们可以令$n > 2c$, 此时$n - c > \frac{n}{2}$, 而对于分母是$n + c$的情况, 我们可以令$n > c$, 此时$n + c < 2n$。

下面我们再来讨论下无穷大量和无穷小量之间的关系。

引理 2.4

若$x_n \neq 0$, 则$\{x_n\}$是无穷大量的充要条件是$\{\frac{1}{x_n}\}$是无穷小量。

证明 $\boxed{\text{充分性}}$: 因为$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是无穷小量, 则$\forall G > 0$, 令$\epsilon = \frac{1}{G}$, $\exists N, \forall n > N$, $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \epsilon = \frac{1}{G}$, 则$|x_n| > G$, 即$\{x_n\}$是无穷大量。

$\boxed{\text{必要性}}$: 因为$\{x_n\}$是无穷大量, 则$\forall \epsilon > 0$, 令$G = \frac{1}{G}$, $\exists N, \forall n > N$, $|x_n| > G = \frac{1}{\epsilon}$, $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \epsilon$, 即$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是无穷小量。

引理 2.5

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$满足$\exists N_0, \forall n > N_0$，有$|y_n| \geq \delta > 0$，则$\{x_n y_n\}$也是无穷大量。

证明 因为$\{x_n\}$是无穷大量, 所以$\forall G > 0, \exists N_1, \forall n > N_1, |x_n| > \frac{G}{\delta}$。因此取$N = \max\{N_0, N_1\}, \forall n > N$, 有:

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \geq G$$

因此，$\{x_n y_n\}$是无穷大量。

引理 2.6

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$极限存在，且$\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$，则$\{x_n y_n\}$与$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

证明 **证明$\{x_n y_n\}$是无穷大量**: 因为$\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 所以根据引理 2.3, $\exists N, \forall n > N, |y_n| > \frac{|b|}{2}$。因此根据引理 2.5知, $\{x_n y_n\}$为无穷大量。

证明$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$是无穷大量: 因为$\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 根据极限的四则运算, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b} \neq 0$, 之后的证明同上。

例题 2.20 证明$\left\{\frac{n}{\sin(n)}\right\}$和$\{n \cdot \arctan(n)\}$是无穷大量。

证明 因为有$|\sin(n)| \leq 1$, 所以：

$$\frac{1}{|\sin(n)|} \geq 1$$

根据引理 2.5得$\left\{\frac{n}{\sin(n)}\right\}$是无穷大量。

因为$n \geq 1$, 因此有$|\arctan(n)| \geq \frac{\pi}{4}$, 根据引理 2.5得$\{n \cdot \arctan(n)\}$是无穷大量。

注 对于$\{n \cdot \arctan(n)\}$, 我们也可以用它的极限为$\frac{\pi}{2}$结合引理 2.6来证明。

例题 2.21 讨论极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_k}$$

其中$a_0, b_0 \neq 0, k, l \in \mathbb{Z}^+$。

证明 从分子上提出n^k，分母上提出n^l次, 则:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_k} = \lim_{n\to\infty} n^{k-l} \frac{a_0 + a_1 n^{-1} + \cdots + a_{k-1} n^{1-k} + a_k n^{-k}}{b_0 + b_1 n^{-1} + \cdots + b_{l-1} n^{1-l} + b_l n^{-l}}$$

根据极限的四则运算, 有:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 n^{-1} + \cdots + a_{k-1} n^{1-k} + a_k n^{-k}}{b_0 + b_1 n^{-1} + \cdots + b_{l-1} n^{1-l} + b_l n^{-l}} = \frac{a_0}{b_0} \neq 0$$

因此, **当$k > l$时**:

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-l} = \infty$$

根据引理 2.6有:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_k} = \infty$$

当**当$k = l$时**:

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-l} = 1$$

根据极限的四则运算有:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_k} = \frac{a_0}{b_0}$$

当**当$k < l$时**:

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-l} = 0$$

根据极限的四则运算有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_k}=0$$

证毕

2.2.1 无穷大的运算

在之上我们已经提到, 极限的四则运算适用于极限存在的情况, 而对于极限发散的情况则并不一定成立, 下面我们来讨论下对于极限趋向于无穷大的情况, 在哪些情况下是可以运用四则运算的。为了方便起见, 我们先做如下定义:

1. 若$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则记$\{x_n\}$为“+∞”。
2. 若$\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$，则记$\{y_n\}$为“-∞”。
3. 若$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty$，则记$\{z_n\}$为∞”。
4. 若$\lim_{n\to\infty}w_n=0$，则记$\{z_n\}$为“0”。

定理 2.7

1. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$
2. $(+\infty)-(-\infty)=+\infty$
3. $(+\infty)\pm(\text{有界量})=+\infty$
4. $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
5. $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

以上的极限是可以通过四则运算简单地判断出来的, 而以下的极限则无法通过四则运算判断出来, 我们将以下的这些极限类型称为“待定型”。

定义 2.7 (待定型)

1. $(+\infty)-(+\infty)=?$
2. $(+\infty)+(-\infty)=?$
3. $0\cdot\infty=?$
4. $\frac{0}{0}=?$
5. $\frac{\infty}{\infty}=?$
6. $\cdots$

上述情况称为“待定型”。

定义 2.8

若数列$\{x_n\}$，有$x_n\le x_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调增加，记为$\{x_n\}\uparrow$。若有$x_n<x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调增加，记为$\{x_n\}$严格$\uparrow$。

若数列$\{x_n\}$，有$x_n\ge x_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调减少，记为$\{x_n\}\downarrow$。若有$x_n>x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调减少，记为$\{x_n\}$严格$\downarrow$。

定理 2.8 (Stolz定理)

假设$\{y_n\}$严格单调增加数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$。若:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a(a\text{为有限数},+\infty,-\infty)$$

则:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$$

证明 $\boxed{\text{因为陈老的证明简洁明了，我们先写陈老的证明}}$:

当a = 0时: 因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 则$\exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, y_n > 0$。

又因为$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 0$, 则$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right| < \frac{\epsilon}{2}$。

取$N_3 = \max\{N_1, N_2\}, \forall n > N_3$:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2}|y_n - y_{n-1}|$$

又因为$\{y_n\}$严格单调增加, 则上式可以化为:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2}(y_n - y_{n-1})$$

根据三角不等式:

$$|x_n - x_{N_3}| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{N_3+1} - x_{N_3}|$$

根据上两式, 我们可以得出:

$$|x_n - x_{N_3}| < \frac{\epsilon}{2}(y_n - y_{N_3})$$

两边同除以y_n得:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{N_3}}{y_n}\right| < \frac{\epsilon}{2}(1 - \frac{y_{N_3}}{y_n}) < \frac{\epsilon}{2}$$

则根据三角不等式:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{\epsilon}{2} + \left|\frac{x_{N_3}}{y_n}\right|$$

因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty, \exists N_4 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_4, y_n > \frac{2|x_{N_3}||}{\epsilon}$

则可以取$N = \max\{N_3, N_4\}, \forall n > N_4$:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \epsilon$$

则对于$a = 0$时:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

当$a \neq 0$时:

取$z_n = x_n - ay_n$, 则:

$$\frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a$$

因此:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a\right) = 0$$

根据以上证明的$a = 0$的情况可知:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = 0$$

又因为:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{z_n}{y_n} + a$$

所以当$a \neq 0$时:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$$

当$a = +\infty$时:

因为$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$, 则$\exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$, 即:

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1}$$

因为$\{y_n\}$严格单调增加, 则:

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

即$\{x_n\}$严格单调增加。

同时, 同其他情况的证明, 我们有:

$$x_n - x_N > y_n - y_N$$

又因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 则$\forall G > \max\{0, y_N - x_N\}, \exists N_2, \forall n > N_2, y_n > 2G$。

则:

$$x_n > y_n - y_N + x_N > G$$

即$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\{x_n\}$趋向于$+\infty$。

此时考虑$\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$, 因为$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = +\infty$, 则$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = 0$(引理 2.4)。根据$a = 0$的情况得: $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$, 因此$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$, 即$\forall G > 0, \exists N_3 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_3, \left|\frac{x_n}{y_n}\right| > G$。

又因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 则$\exists N_4 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_4, y_n > 0$, 同理$\exists N_5 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_5, x_n > 0$。

则当$n > \max\{N_4, N_5\}$时, $\frac{x_n}{y_n} > 0$。

即$\forall G > 0, \exists N = \max\{N_3, N_4, N_5\} \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \frac{x_n}{y_n} > G$, 即$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$。$a = +\infty$时也成立。同理, 也能证明$a = -\infty$的情况。

$\boxed{\text{现在用定义证明}}$:

当a为有限数时:

因为$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = a$, 则$\forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1, \left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} - a\right| < \frac{\epsilon}{2}$。

又因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 则$\exists N_2, \forall n > N_2, y_n > 0$。

则$\forall n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$, 结合三角不等式, 我们有:

$$\frac{x_n}{y_n} - a < \frac{\epsilon}{2}\left(1 - \frac{y_{N_3}}{y_n}\right) + \frac{x_{N_3} - ay_{N_3}}{y_n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{x_{N_3} - ay_{N_3}}{y_n}$$

因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 所以$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n} = 0$, 即$\exists N_4, \forall n > N_4, \left|\frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n}\right| < \frac{\epsilon}{2}$。

即$\forall \epsilon > 0, \exists N_5 = \max\{N_3, N_4\}, \forall n > N_5, \frac{x_n}{y_n} - a < \epsilon$。

同理可以证明:$\forall n > N_5, \frac{x_n}{y_n} - a > -\epsilon$。因此$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$。

当$a = +\infty$时:

因为$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = +\infty$, 则$\forall G > 0, \exists N_1, \forall n > N_1, \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} > 3G$。

又因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 则$\exists N_2, \forall n > N_2, y_n > 0$。

则$\forall n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$, 结合三角不等式, 我们有:

$$\frac{x_n}{y_n} > 3G\left(1 - \frac{y_{N_3}}{y_n}\right) + \frac{x_{N_3}}{y_n}$$

因为$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 所以$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{N_3}}{y_n} = 0$, 则$\exists N_4, \forall n > N_4, \left|\frac{y_{N_3}}{y_n}\right| < \frac{1}{3}$。同理, $\exists N_5, \forall n > N_5, \left|\frac{x_{N_3}}{y_n}\right| < G$。

因此, $\forall G > 0, \exists N = \max\{N_3, N_4, N_5\}, \forall n > N, \frac{x_n}{y_n} > G$, 即$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$。

证毕

例题 2.22 用Stolz定理证明, 若$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

证明 取$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = n$, 则有$\{y_n\}$严格单调增加, 且$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 并且有:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

则根据Stolz定理(定理 2.8)得:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

例题 2.23 求:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

解 取$x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, $y_n = n^{k+1}$, 其中y_n严格单调增加, 且$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 将$(n-1)^{k+1}$进行多项式展开有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k - C_{n+1}^2 n^{k-1} + \cdots + C_{n+1}^{n+1}(-1)^{n+1}}$$

根据例题 2.21有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{k+1}$$

则根据Stolz定理(定理 2.8)得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

例题 2.24 设$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2}$$

解 取$x_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$, $y_n = n^2$, 其中y_n严格单调增加, 且$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 并且有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2-1/n}$$

根据极限的四则运算有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2} = \frac{a}{2}$$

则根据Stolz定理(定理 2.8)得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$$

到此为止, 我们已经熟悉了极限的求解方法, 因此接下来我们不会再将极限的求解步骤写得如此详细。

2.3 收敛准则

收敛数列一定有界，但是收敛数列不一定有界。

1. 那么有界数列加什么条件收敛？
2. 有界数列不加条件的情况下，可以得到什么弱一些的结论？

定理 2.9

单调有界数列必定收敛。

证明 不妨设$\{x_n\}$单调增加，有上界。

定理意义: 从定义证明时, 我们需要知道极限a, 相当于验证极限为a, 而当极限未知时, 则无法证明。而定理则从数列本身的性质出发, 不需要知道极限是多少。

引理 2.7

若数列$\{x_n\}$从第N项之后开始单调有界, 则数列$\{x_n\}$依旧收敛。

证明 考虑$n \geq N$后的数组成的数列，设$n_1 = n - N + 1$，则$\{x_{n_1}\}$单调有界。由于$\{x_{n_1}\}(n_1 \geq 1)$单调有界，则$\{x_{n_1}\}(n_1 \geq 1)$收敛。即$\exists a, \forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n_1 > N_1$, 有$|x_{n_1} - a| < \epsilon$。那么我们可以取$N_2 = N_1 + N - 1$, 此时$\forall \epsilon, \exists N_2 = N_1 + N - 1, \forall n > N_2$, 有$|x_n - a| < \epsilon$, 即数列$\{x_n\}$极限存在。

命题 2.2

设$x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

命题 2.3

设$0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), n = 1, 2, 3, \cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

无穷小量的趋近速度。

命题 2.4

$$\text{对于上题的 } \{x_n\}\text{，求极限，} \lim_{n\to\infty} nx_n$$

证明

命题 2.5

$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

兔子

命题 2.6 (Fibonacci数列)

$\{a_n\}$为Fibonacci数列，令$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$，讨论$\{b_n\}$数列。

证明

接下来我们来研究π和e

关于π:

命题 2.7

证明$\left\{L_n = n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$收敛。求圆的面积公式。

证明 取$t = \frac{180^\circ}{n(n+1)}$，当$n \geq 3$时，$nt \leq 45^\circ$。且由三角公式得:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]tan(t)}$$

由于$nt \leq 45^\circ$，则$tan(kt) < 1(k < n)$，因此:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]tan(t)} > \tan[(n-1)t] + \tan(t)$$

则:

$$\tan(nt) > \tan[(n-1)t] + \tan(t)$$

$$\tan[(n-1)t] > \tan[(n-2)t] + \tan(t)$$

$$\cdots\cdots$$

则:

$$\tan(nt) > n\tan(t)$$

现在来考虑$\sin[(n+1)t]$:

$$\begin{aligned}\sin[(n+1)t] &= \sin(nt)\cos(t)+\cos(nt)\sin(t)\\ &= \sin(nt)\cos(t)\left[1+\frac{\tan(t)}{\tan(nt)}\right]\\ &< \sin(nt)\cos(t)\left[1+\frac{1}{n}\right]\\ &< \sin(nt)\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

即:

$$n\sin[(n+1)t] < (n+1)\sin(nt)$$

将$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$代入得:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < (n+1)\sin\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right)$$

即该数列单调增加。

考虑到单位圆的面积:

$$S' > n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

并且单位圆的面积小于外接正方形的面积, 即:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < S' < 4$$

即:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < \frac{4}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

因为$n\geq 3$, 所以:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 8$$

因此数列$\left\{L_n = n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调有界, 则该数列极限存在。

现在定义$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=\pi$。

再来考虑单位圆的面积S', 设内接正多边形的面积为S_1, 外接正多边形的面积为S_2, 则$S_1(n) < S' < S_2(n)$。内接正多边形的面积为:

$$S_1(n) = n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

外接正多边形的面积为:

$$S_2(n) = n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = n\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

并且根据数列极限的四则运算有:

$$\lim_{n\to\infty} S_1(n) = \lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \pi$$

$$\lim_{n\to\infty} S_2(n) = \frac{\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} = \pi$$

则根据夹逼性定理得:

$$S' = \pi$$

其中, 对于外接正多边形的面积, 考虑:

$$\begin{aligned}(n+1)\tan(nt)-n\tan[(n+1)t] &= (n+1)\frac{\sin(nt)}{\cos(nt)}-n\frac{\sin[(n+1)t]}{\cos[(n+1)t]}\\ &= \frac{(n+1)\sin(nt)\cos[(n+1)t]-n\sin[(n+1)t]\cos(nt)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]}\\ &= \frac{\sin(nt)\cos[(n+1)t]-n\sin(t)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]}\\ &= \frac{\sin[(2n+1)t]-\sin(t)-2n\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]}\\ &= \frac{\sin[(2n+1)t]-(2n+1)\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]}\end{aligned}$$

并且当$n\geq 3$时, 有:

$$\sin[(2n+1)t]=\sin(2nt)\cos(t)+\cos(2nt)\sin(t)<\sin(2nt)+\sin(t)$$

$$\sin(2nt)=\sin[(2n-1)t]\cos(t)+\cos[(2n-1)t]\sin(t)<\sin[(2n-1)t]+\sin(t)$$

$$\cdots\cdots$$

因此:

$$sin[(2n+1)t]<(2n+1)\sin(t)$$

因此:

$$(n+1)\tan(nt)<n\tan[(n+1)t]$$

即:

$$(n+1)\tan\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right)<n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

因此数列$\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调递减。因为外接正多边形面积必然大于内接正方形, 因此:

$$n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)>2$$

因此数列$\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调有界, 则该数列极限存在。

关于e:

命题 2.8

考虑两个数列:

$$\left\{x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}\quad 和\quad \left\{y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

证明这两个数列极限存在且相等。

证明 因为

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_2}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

所以:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{n+2}{1+(n+1)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

所以$\left\{y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$单调递减。

定义$\ln=\log_e$为自然对数，e自然对数的底数。

命题 2.9

令$a_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p},(p>0)$，证明$\{a_n\}$当$p>1$时收敛，当$p\leq 1$时发散。

证明

$p=1$时，$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$为调和级数，它是正无穷大量，我们想知道它趋近无限的速度。

命题 2.10

证明

$$b_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdot+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

收敛。

证明 极限记为γ，称为欧拉常熟。$\gamma>=0.577215$

命题 2.11

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\ln 2$$

证明 除了夹逼定理，还能用上一个数列相减计算。

命题 2.12

$$d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+}\frac{1}{n}$$

证明

以上是与e相关的数列

定义 2.9 (闭区间套)

有一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$，满足：

1. $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],n=1,2,3,\cdots$
2. $b_n-a_n\to 0(n\to\infty)$

则称这样的一列闭区间是一个闭区间套。

定理 2.10 (闭区间套定理)

假如$[a_n,b_n]$是一个闭区间套，则存在唯一的实数ξ，它属于一切闭区间$[a_n,b_n]$。且$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$。

证明

定理 2.11

实数集不可列。

证明 反证法

子列

定义 2.10

存在一个数列$\{x_n\}$，取一列严格单调增加的正整数$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots$，则$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdot$称为$\{x_n\}$的一个子列，记为$\{x_{n_k}\}$，$k$代表子列中的第$k$项，又恰好是$\{x_n\}$中的第$n_k$项。

其中$n_k \geq k, \forall k, n_j > n_k, \forall j > k$。

定理 2.12

设$\{x_n\}$收敛于a, 则它的任何一个子列也收敛于a。即$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，证明$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

证明

可以用于证明数列不收敛。

命题 2.13

若$\{x_n\}$存在两个子列收敛于不同的极限，则$\{x_n\}$发散。

证明

定理 2.13 (Bolzano-Weierstrass定理)

有界数列必有收敛子列。

证明 设数列为$\{x_n\}$, 因为数列有界, 所以$\forall n > 0$, 存在$a \leq x_n \leq b$, 则取$[a_1, b_1] = [a, b]$。

将$[a_1, b_1]$分为两个闭区间, 分别为$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$和$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, 其中至少有一个区间包含无穷多个数列的元素, 因为若两个区间都有有限个数列元素，则数列$\{x_n\}$的元素有限。那么我们可以取包含无穷多个数列元素的区间为$[a_2, b_2]$。

同理, 我们可以取出$[a_3, b_3], [a_4, b_4], \cdots$。每一个区间中都包含无穷多个数列元素。

对于这些区间, $\forall n > 0, (1).[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], (2).\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$, 则这些闭区间组成了一个闭区间套。根据闭区间套定理, 存在唯一的实数γ属于一切闭区间$[a_n, b_n]$。

则我们可以这样构造子列:

从$[a_1, b_1]$中取x_{n_1}, 使得$n_1 > 0$, 这必然可以实现, 因为$[a_1, b_1]$中有无限多个数列元素。

从$[a_2, b_2]$中取x_{n_2}, 使得$n_2 > n_1$, 这必然可以实现, 因为$[a_2, b_2]$中有无限多个数列元素, 即$\forall n_1, \exists n_2 > n_1$。

从$[a_3, b_3]$中取x_{n_3}, 使得$n_3 > n_2$, 这必然可以实现, 因为$[a_3, b_3]$中有无限多个数列元素, 即$\forall n_2, \exists n_3 > n_2$。

$$\cdots\cdots$$

对于子列$\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, 则$\forall \epsilon > 0$, 取$K = \max\left\{\left[\log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)\right] + 2, 1\right\}$, $\forall k > K, b_k - a_k < \epsilon$, 同时$x_{n_k} \in [a_k, b_k], \gamma \in [a_k, b_k]$, 则$\forall k > K, |x_{n_k} - \gamma| < b_k - a_k < \epsilon$。

即$\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+, \forall k > K, |a_{n_k} - \gamma| < \epsilon$, 则$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \gamma$, 该子列收敛于$\gamma$。

在陈老的视频是，陈老是用夹逼性证明$\{x_{n_k}\}$收敛于γ, 证明如下:

$\forall k, a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, 且$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \gamma$, 则根据夹逼性, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \gamma$。**非常巧妙!**

定理 2.14

假设$\{x_n\}$是无界数列，则存在子列$\{x_{n_k}\}$，它是无穷大量。

证明

Cauchy收敛原理

定义 2.11

$\{x_n\}$满足:

$$\forall \xi > 0, \exists N, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \xi$$

则称$\{x_n\}$为基本数列。

也可以是$\forall m > n > N$

证明

命题 2.14

判断
$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$
是否为基本数列。

证明

命题 2.15

判断
$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
是否为基本数列。

证明

定理 2.15 (Cauchy收敛原理)

$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$\{x_n\}$是基本数列。

证明 **必要性**: 即$\{x_n\}$收敛 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$是基本数列。

假设$\{x_n\}$收敛于A, 则$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |x_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$。

则对于$\forall n, m > N, |x_n - x_m| < |x_n - A| + |x_m - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, 则$\{x_n\}$为基本数列。

充分性: 即$\{x_n\}$是基本数列$\Rightarrow$ $\{x_n\}$收敛。

因为$\{x_n\}$为基本数列, 即对于$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall m, n > N$, $|x_m - x_n| < \epsilon$。取$m = N + 1$, 则$\forall n > N$, $|x_{N+1} - x_n| < \epsilon$, 即$x_{N+1} - \epsilon < x_n < x_{N+1} + \epsilon$。则我们可以取$a = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1} - \epsilon\}, b = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1} + \epsilon\}$, 此时$\forall n \in \mathbb{N}^+$:
$$a \le x_n \le b$$
即, $\{x_n\}$数列有界。

根据Bolzano-Weierstrass定理(定理 2.13), 则存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A, 则$\forall \epsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}^+, \forall k > K, |x_{n_k} - A| < \frac{\epsilon}{2}$, 又由于$\{x_n\}$为基本数列, 则$\forall \epsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}^+, \forall m', n' > N', |x_{N+1} - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$。

取$N'' = \max\{N', n_K\}$, 因为$\{x_{n_{k'}}\}$由无穷多项, 则必然存在$n_{k'} > N'' \ge n_K$, 即$k' > K$,。此时, 因为$n_{k'} > N'' \ge N'$, 则$\forall n' > N'$, $\left|x_{n'} - x_{n_{k'}}\right| < \frac{\epsilon}{2}$, 又因为$k' > K$, 则$\left|x_{n_{k'}} - A\right| < \frac{\epsilon}{2}$, 因此$\forall n' > N'$, $|x_{n'} - A| < \left|x_{n'} - x_{n_{k'}}\right| + \left|x_{n_{k'}} - A\right| < \epsilon$, 即数列$\{x_n\}$收敛。

而陈老是这样证明充分性的:

取$\epsilon = 1$, 因为$\{x_n\}$是基本数列, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |x_n - x_{N+1}| < 1$, 因此$|x_n| < |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < |x_{N+1}| + 1$。取$M = \max\{|x_1|, |x_1|, \cdots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}$, 则:
$$\forall n \in \mathbb{N}^+, |x_n| \le M$$
即$\{x_n\}$有界。

根据根据Bolzano-Weierstrass定理(定理 2.13), 则存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A。

根据$\{x_n\}$是基本数列, 则$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n, m > N_1, |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$, 现在固定$x_m$, 取$x_n$为子列$\{x_{n_k}\}$。现在考虑数列$\{|x_{n_k} - x_m|\}$和数列$\{\frac{\epsilon}{2}\}$, 取$K = N_1$, 则$\forall k > K$, 有$n_k > n_K \ge K = N_1$, 即$\forall k > K, |x_{n_k} - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$, 根据数列极限的保序性逆命题(推论 2.1), $|A - x_m| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$。这对于$\forall m > N_1$都成立, 即数列$\{x_n\}$极限存在且为A。

命题 2.16

$\{x_n\}$满足压缩性条件，即

$$|x_{n+1}-x_n| \leq k\,|x_n-x_{n-1}|\,, 0<k<1, \forall n=2,3,\cdots$$

则$\{x_n\}$是收敛的。

证明

实数系的基本定理

1. 确界存在定理(实数系的连续性定理)
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Bolzano-Weierstrass定理
5. Cauchy收敛原理(实数系完备性)

以上都是在实数系中考虑, 实数系上的基本数列必然是收敛数列, 因此Cauchy收敛原理也被称为实数系的完备性定理。实数系有完备性, 有理数不具备完备性。例如$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是有理数列, 但是它的极限是无理数。以上五个定理等价。我们需要证明这五个定理等价。从Cauchy收敛原理推出闭区间套定理, 再从闭区间套定理推出确界存在定理。

定理 2.16

实数系的完备性等价于实数系的连续性。

证明 (1)Cauchy收敛原理⇒闭区间套定理。

(2)闭区间套定理⇒确界存在定理。

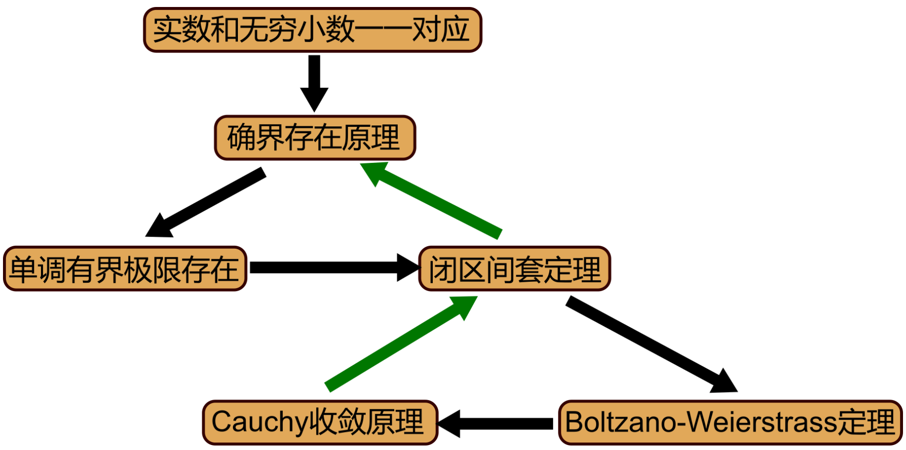

图 2.1: 陈老视频中, 实数系定理的关系

第 3 章 函数极限与连续函数

函数极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

定义 3.1

$y = f(x)$在$O(x_0, \rho) \backslash \{x_0\}$上有定义，如果存在一个数A，使得对任意给定的$\epsilon > 0$，可以找到$\delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，成立$|f(x) - A| < \epsilon$，则称A是$f(x)$在$x_0$点的极限，记为$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$或者$f(x) \to A(x \to x_0)$。如果不存在满足上述性质的A，则称$f(x)$在$x_0$点极限不存在。♣

$O(x_0, \rho) \backslash \{x_0\}$称为去心邻域。

命题 3.1

证明：

$$\lim_{x \to 0} e^x = 1$$

♠

证明

命题 3.2

证明：

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

♠

证明

命题 3.3

证明：

$$\lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

♠

证明

函数极限的性质

定理 3.1 (函数极限的唯一性)

设A, B都是$f(x)$在x_0的极限，则$A = B$。♡

证明 证明类似证明数列极限的唯一性

定理 3.2 (函数极限的局部保序性)

若$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B, A > B$，则$\exists \delta > 0$，当x有$0 < |x - x_0| < \delta$时，$f(x) > g(x)$ ♡

证明 证明类似证明数列极限的保序性

引理 3.1

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$，则$\exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta), |f(x)| > \frac{|A|}{2}$。♡

证明 请使用局部保序性证明

引理 3.2

假设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 若$\exists\delta>0, \forall x(x<|x-x_0|<\delta)$, 有$f(x)\geq g(x)$, 则$A\geq B$ ♡

证明

定理 3.3 (函数极限的局部有界性)

若$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 则$\exists\delta, \forall x(0<|x-x_0|<\delta), m\leq f(x)\leq M$, m, M为固定实数。
若$f(x)$在x_0有定义, 则在x满足$|x-x_0|<\delta$的条件下, $\min\{m, f(x)\}\leq f(x)\leq \max\{M, f(x)\}$。 ♡

证明 请使用局部保序性证明

定理 3.4 (函数极限的夹逼性定理)

若$\exists r>0$, $\forall x(x<|x-x_0|<r)$, 有$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, 且$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$, 则$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ ♡

证明

命题 3.4

证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

♠

证明 使用夹逼性证明。

再用数列逼近证明。

定理 3.5 (函数极限四则运算)

假设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 则:

1. $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha A+\beta B$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

♡

证明

命题 3.5

求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x}$$

的极限。 ♠

证明

命题 3.6

求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

的极限。 ♠

证明

3.1 函数极限和数列极限的关系

定理 3.6 (否定命题的分析表示)

$\{x_n\}$以a为极限: $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,|x_n-a|<\epsilon$。

$\{x_n\}$不以a为极限: $\exists\epsilon>0,\forall N,\exists n>N,|x_n-a|\geq\epsilon$

定理 3.7 (heine定理)

$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$存在的充分必要条件是: 对于任意的满足$x_n\neq x_0$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛于A。

证明 **证明必要性**, 即证明:

若$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 则对于任意的满足$x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\},\{f(x_n)\}$收敛于A。

因为$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 则$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$, 成立$|f(x)-A|<\epsilon$。

又因为对于$\{x_n\}$, 有$x_n\neq x_0$且$\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 即$\forall\delta>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N$, 成立$0<|x_n-x_0|<\delta$。

则$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 对于该$\delta,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N$, 有$0<|x_n-x_0|<\delta$, 且在该$\delta$下有$|f(x_n)-A|<\epsilon$。证明完毕。

证明充分性, 即证明:

若对于任意的满足$x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\},\{f(x_n)\}$收敛于A, 则$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$。

利用反证法, 若$\lim_{x\to x_0}f(x)\neq A$, 则$\exists\epsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x(0<|x-x_0|<\delta)$, 使得$|f(x)-A|\geq\epsilon_0$

取$\delta_n=\frac{1}{n},n=1,2,3,\cdots$,则对于$\epsilon_0$,有:

$$\exists x_1(0<|x_1-x_0|<1),|f(x_1)-A|\geq\epsilon_0$$

$$\exists x_2(0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2}),|f(x_2)-A|\geq\epsilon_0$$

$$\exists x_3(0<|x_3-x_0|<\frac{1}{3}),|f(x_3)-A|\geq\epsilon_0$$

$$\cdots\cdots$$

对于数列$\{x_n\}$, 对于$\epsilon_0,\forall n,|x_n-x_0|>\epsilon_0$恒成立。

即: $\exists\epsilon=\epsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N}^+,\exists n>N,|f(x_n)-A|>\epsilon$。则存在数列$\{x_n\}$不收敛于A。这与条件矛盾, 则假设不成立。证明完毕。

命题 3.7

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x_0=0$处极限不存在。

证明

引理 3.3

$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在并且有限(收敛)的充分必要条件是: 对任意满足$x_n\neq x_0$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛。

证明

3.2 单侧极限

定义 3.2

假设$f(x)$在$(x_0-\rho, x_0)$有定义，如果存在B, $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x(-\delta<x-x_0<0)$，成立$|f(x)-B|<\epsilon$，则称B是$f(x)$在$x_0$的左极限，记为$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=B(f(x)\to B(x\to x_0^-))$。
类似地，假如存在C, $\exists\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x(0<x-x_0<\delta)$，成立$|f(x)-C|<\epsilon$，则称C是$f(x)$在$x_0$的右极限，记为$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=C(f(x)\to C(x\to x_0^+))$。
则$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$

命题 3.8

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

证明

命题 3.9

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\\ 2\cos(x^2) & x\geq 0\end{cases}$$

3.3 函数极限定义的扩充

可以将自变量x的趋向扩充成以下六种:

1. $x\to x_0$
2. $x\to x_0^+$
3. $x\to x_0^-$
4. $x\to +\infty$
5. $x\to -\infty$
6. $x\to \infty$

而应变量$f(x)$的趋向可以扩充成以下四种:

1. $f(x)\to A$
2. $f(x)\to +\infty$
3. $f(x)\to -\infty$
4. $x\to\infty$

现在加上对应的分析表述，对于自变量x:

1. $x\to x_0: \exists\delta>0, \forall x(0<|x-x_0|<\delta)$
2. $x\to x_0^+: \exists\delta>0, \forall x(0<x-x_0<\delta)$
3. $x\to x_0^-: \exists\delta>0, \forall x(-\delta<x-x_0<0)$
4. $x\to+\infty: \exists X>0, \forall x(x>X)$
5. $x\to-\infty: \exists X>0, \forall x(x<-X)$
6. $x\to\infty: \exists X>0, \forall x(|x|>X)$

对于应变量$f(x)$:

1. $f(x) \to A: \forall \epsilon > 0, \cdots, |f(x) - A| < \epsilon$
2. $f(x) \to +\infty: \forall G > 0, \cdots, f(x) > G$
3. $f(x) \to -\infty: \forall G > 0, \cdots, f(x) < -G$
4. $x \to \infty: \forall G > 0, \cdots, |f(x)| > G$

命题 3.10

写出:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$$

的分析表述。

证明

命题 3.11

写出:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

的分析表述。

证明

命题 3.12

写出:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

的分析表述。

证明

命题 3.13

证明:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

证明

命题 3.14

证明

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x - 1} = -\infty$$

证明

我们讲了函数极限的性质和函数极限的四则运算。讲函数极限的性质的时候是对于收敛函数来讨论的。对于扩充后的函数极限则不一定成立, 特别对于∞。性质要排除∞, 四则运算要排除待定型。

对于扩充后的heine定理应该如何书写: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$充分必要条件: 对任意的满足$x_n \to +\infty(n \to \infty)$的数列$\{x_n\}$,, 成立$\{f(x_n)\}$收敛于A。

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$存在且有限的充分必要条件是: 对任意满足$x_n \to +\infty(n \to +\infty)$的数列$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛。

命题 3.15

设:

$$f(x)=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_k x^k}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_j x^j}(a_n,a_k\neq 0,b_m,b_j\neq 0)$$

考虑$\lim_{x\to\infty}f(x)$和$\lim_{x\to 0}f(x)$。

证明 $x\to\infty$的情况:

分三种情况讨论:

1. $n=m$:
2. $n>m$:
3. $n<m$:

$x\to 0$的情况:

分三种情况讨论:

1. $k=j$:
2. $k>j$:
3. $k<j$:

命题 3.16

证明:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

证明 提示: 夹逼法。同时$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$

函数极限的Cauchy收敛原理

回忆以下数列的情况: $\lim_{n\to\infty}x_n$收敛$\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,|x_n-x_m|<\epsilon$。

在函数中, 我们做了拓广, 并不是所有的拓广都有Cauchy收敛原理。

对于函数发散时是没有Cauchy收敛原理的。

定理 3.8 (函数极限的Cauchy收敛原理)

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在并且有限(收敛)$\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists X>0,\forall x',x''>X,|f(x')-f(x'')|<\epsilon$

证明

3.4 连续函数

分析上讲, $f(x)$在x_0点连续: 当$x\to x_0$时, $f(x)\to f(x_0)$。

定义 3.3

设$f(x)$在x_0的某个邻域中有定义, 且成立

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称$f(x)$在x_0点连续, x_0是$f(x)$的连续点。

符号表述: $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(|x-x_0|<\delta)$, 成立$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$。

开区间情况:

定义 3.4

若$f(x)$在(a,b)的每一点上都连续, 则称$f(x)$在开区间(a,b)上连续。

命题 3.17

证明:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在$(0,1)$连续。

证明

闭区间情况:

定义 3.5

若$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$点左连续。
若$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$点右连续。
符号表示:
左连续: $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x(-\delta < x - x_0 \le 0)$: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。
右连续: $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x(0 \le x - x_0 < \delta)$: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

定义 3.6

$f(x)$在(a,b)上连续，且在a点右连续，在b点左连续，则称$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

命题 3.18

证明:

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

在$(0,1)$闭区间上连续。

证明

注:关于函数$f(x)$在一个区间里面连续，整合以上的定义。

定义 3.7

设$f(x)$定义在某区间X上，若$\forall x_0 \in X$，及$\forall\epsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，$\forall x \in X(|x - x_0| < \delta)$，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。则称$f(x)$在区间X上连续。

命题 3.19

证明:

$$f(x) = \sin(x)$$

在$(-\infty,+\infty)$上连续。

证明 同理$f(x) = \cos(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。

命题 3.20

证明:

$$f(x) = a^x(a > 0, a \ne 1)$$

在$(-\infty,+\infty)$上连续。

证明

3.5 连续函数的四则运算

定理 3.9

有$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, 则:

1. $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f(x_0) + \beta g(x_0)$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}(g(x_0) \neq 0)$

♡

命题 3.21

求:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + \sin x}{3^x + 2x}$$

♠

证明

命题 3.22

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$Q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}$$

♠

证明 $f(x) = c, g(x) = x$

命题 3.23

已知$\sin(x), \cos(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续。

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, 在$\left\{x \,\middle|\, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$上连续。

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, 在$\{x \,|\, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$上连续。

♠

证明

3.6 不连续点的类型

连续的定义:$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

该定义包含了如下几层意思:

1. $f(x)$在x_0点有定义。
2. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
3. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

3.6.1 第一类不连续点

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

命题 3.24

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

在$x=0$不连续。

称第一类不连续点为跳跃点。

3.6.2 第二类不连续点

$\lim_{x\to x_0^+}f(x)$和$\lim_{x\to x_0^-}f(x)$至少有一个不存在。

命题 3.25

$f(x)=\sin(\frac{1}{x})$,$x=0$是它的第二类不连续点。

证明

命题 3.26

$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x=0$是它的第二类不连续点。

证明

3.6.3 第三类不连续点

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)\begin{cases}\neq f(x_0)\\ f(x)\text{在}x_0\text{点没定义。}\end{cases}$$

命题 3.27

$f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$, 在$x=0$极限存在, 但是没有定义。

证明

第三类不连续点称为可去不连续点。

命题 3.28

$$\mathrm{D}(x)=\begin{cases}1 & x\text{是有理数}\\ 0 & x\text{是无理数}\end{cases}$$

Dirichlet函数属于第二类不连续点。

证明

命题 3.29

黎曼(Riemann)函数:

$$\mathrm{R}(x)=\begin{cases}0 & x\text{是无理数}\\ \dfrac{1}{p} & x=\dfrac{q}{p},p\in\mathbb{N}^+,q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},p,q\text{互质}\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$, $\lim_{x\to x_0}\mathrm{R}(x)=0$。即$\mathrm{R}(x)$在一切无理点连续, 在一切有理点不连续。

为什么定义0的时候是1? 因为1可以写成$\frac{0}{1}$, 并且Riemann函数有周期性, 为了保持周期性, 因此定义0的时候是1。

证明

命题 3.30

区间(a,b)上的单调函数的不连续点必为第一类。

证明

3.7 反函数

映射: $f:X\to Y$ 为单射, 则$\exists f^{-1}:R_f\to X$。

存在性、连续性、可导性(可导性暂时不讲)

严格单调增加:$\forall x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)(y_1<y_2)$, 即$x_1\neq x_2, y_1\neq y_2$。

定理 3.10 (反函数存在定理)

若$f(x)$在D_f上严格单调增加(减少), 则存在f的反函数$f^{-1}(y), y\in R_f$,且f^{-1}也严格单调增加(减少)。

证明

定理 3.11 (反函数连续性定理)

假设$y=f(x)$在$[a,b]$上连续且严格单调增加, 设$f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, 则反函数在$[\alpha,\beta]$上连续。

证明

命题 3.31

$y=\sin(x), y=\arcsin(x)$

$y=\cos(x), y=\arccos(x)$

$y=\tan(x), y=\arctan(x)$

证明

命题 3.32

$y=a^x(a>0,a\neq 1), y=\log_a(x)$

$y=x^n, n\in\mathbb{Z}$

$y=x^\alpha=e^{\ln x^\alpha}=e^{\alpha\ln x}$

证明

讨论一个问题, $\lim_{u\to u_0}f(x)=A, \lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$

那么$\lim_{x\to x_0}f\circ g(x)$是否等于A?

反例:

$$f(u)=\begin{cases}0 & u=0\\ 1 & u\neq 0\end{cases}$$

$$g(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

则复合起来为:

$$f\circ g(x)\begin{cases}0 & x=\dfrac{1}{n\pi}\\ 1 & x\neq\dfrac{1}{n\pi}\end{cases}$$

定理 3.12

$u=g(x)$在x_0连续, $g(x_0)=u_0$, $f(u)$在u_0连续。则$f\circ g$在x_0连续。

证明

命题 3.33

$$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

证明

命题 3.34

对任意实数α, $f(x)=x^\alpha$在$(0,+\infty)$上连续。

证明

定理 3.13

一切初等函数在它的定义域上连续。

命题 3.35

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

证明

命题 3.36

放射性物质的质量变化:

设$t=0$时,物质的总量为$M=M(0)$, 放射的比例系数为k, 求时刻t的时候, $M(t)$为多少?

证明

3.8 无穷小量与无穷大量的阶

无穷小量的阶:

在数列极限的时候, 我们提及:$\lim_{n\to\infty}x_n=0$, $\{x_n\}$—无穷小量。

对于函数极限: $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$, 则称当$x\to x_0$时, $f(x)$是无穷小量。

当$x\to x_0$, $u(x)$, $v(x)$都是无穷小量。

定义 3.8

$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=0$, 则称当$x\to x_0$时, $u(x)$是$v(x)$的高阶无穷小量, 记为$u(x)=o(v(x))$, $(x\to x_0)$。

命题 3.37

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1-\cos(x)}{x}$$

证明

命题 3.38

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^2}$$

证明

定义 3.9

若存在$A>0$, 当x在x_0的某一去心邻域中$\{x|0<|x-x_0|<\rho\}$,成立 $\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A$, 则称当$x\to x_0$时, $\frac{u(x)}{v(x)}$是有界量, 记为$u(x)=O(v(x)),(x\to x_0)$。

命题 3.39

$$u(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right),u(x)=O(v(x))$$

证明

定义 3.10

若$\exists 0<a<A<+\infty$, 在$\{x|0<|x-x_0|<\rho\}$中, $0<a\le\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A<+\infty$, 则称$u(x),v(x)$在$x\to x_0$时是同阶无穷小量。

命题 3.40

$$u(x)=x(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)),v(x)=x,(x\to0)$$

证明

命题 3.41

$$u(x)=x(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)),v(x)=x,(x\to0)$$

定义 3.11

若$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$, 则称当$x\to x_0$时, $u(x)$与$v(x)$是等价无穷小量, 记为$u(x)\sim v(x),(x\to x_0)$。

命题 3.42

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1,\sin(x)\sim x(x\to x_0)$$

证明

命题 3.43

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{\frac{1}{2}x^2}$$

证明

命题 3.44

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\frac{1}{2}x^3}$$

注:(1) 取$v(x)=(x-x_0)^k$可知$u(x)$是几阶的无穷小量。

(2)$x\to 0^+$, $\frac{-1}{\ln(x)}$是正无穷小量。对任意的$\alpha>0$, $\frac{-1}{\ln(x)}$是x^α的低阶无穷小量, 即:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{-1}{\ln(x)}}{x^\alpha}=+\infty$$

这时候, 记$\frac{-1}{\ln(x)}=o(1),(x\to 0^+)$

又比如$u(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)(x\to 0)$, 不是无穷小量但是是有界量, 则记为$u(x)=O(1),(x\to 0)$。

无穷大量的阶:

$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$, 则称当$x\to x_0$时, $f(x)$是(正, 负)无穷大量。

定义 3.12

假设$u(x)$, $v(x)$当$x\to x_0$时都是无穷大量, 若$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\infty$, 这说明当$x\to x_0$时, $u(x)$是$v(x)$的高阶无穷大量。

$n^n>>n!>>a^n(a>1)>>n^\alpha(\alpha>0)>>\ln^\beta(n)(\beta>0)$

命题 3.45

设$a>1$, k是正整数, 求:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^k(x)}{x}$$

定义 3.13

若存在$A>0$, 在$\{x|0<|x-x_0|<\rho\}$, 成立:

$$\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A$$

则称当$x\to x_0$时, $\frac{u(x)}{v(x)}$是有界量, 记为$u(x)=O(v(x)),(x\to x_0)$

定义 3.14

若存在$0<a<A<+\infty$, 在$\{x|0<|x-x_0|<\rho\}$, 成立:

$$0<a\le\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A<+\infty$$

则称当$x\to x_0$时, $u(x)$, $v(x)$是同阶无穷大量。

若$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)}{=}c\neq 0$, 则$u(x)$, $v(x)$一定是同阶无穷大量。

定义 3.15

若$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$, 则称$u(x)$与$v(x)$是等价无穷大量, 记为$u(x)\sim v(x),(x\to x_0)$。

命题 3.46

$$u(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right),v(x)=x^2$$

证明

命题 3.47

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan(x)$$

证明

当$x\to 0^+$, $\frac{-1}{\ln(x)}$关于x^α都是低阶无穷小量。

命题 3.48

$x\to 0^+$, k为任意的正整数, $\left(\frac{-1}{\ln(x)}\right)^k$关于x是低阶无穷小量。

证明

命题 3.49

当$x\to 0^+$, $e^{-\frac{1}{x}}$关于x^k是高阶无穷小量。

证明

等价量:

$\sin(x)\sim x$

命题 3.50

$$\ln(1+x)\sim x,(x\to 0)$$

证明

命题 3.51

$$e^x-1\sim x,(x\to 0)$$

证明

命题 3.52

$$(1+x)^\alpha\sim \alpha x,(x\to 0)$$

证明

命题 3.53

$$u(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

讨论$x\to+\infty$和$x\to 0^+$时的阶数。

证明

命题 3.54

$$v(x)=2x^3+3x^5$$

讨论$x\to\infty$和$x\to 0$时的阶数。

证明

定理 3.14

$u(x), v(x), w(x)$在x_0的某个去心邻域上有定义，且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)}{w(x)}=1, v(x)\sim w(x), (x\to x_0)$$

则

1. $\lim_{x\to x_0} u(x)w(x)=A \iff \lim_{x\to x_0} u(x)v(x)=A$
2. $\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{w(x)}=A \iff \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}=A$

命题 3.55

计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{(e^{2x}-1)\tan(x)}$$

证明

命题 3.56

计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$$

证明

命题 3.57

计算：

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[3]{x^3-x}\right)$$

证明

命题 3.58

计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$$

3.9 闭区间上的连续函数

定理 3.15 (有界性定理)

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在闭区$[a,b]$上有界。

证明

定理 3.16 (最值定理)

$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$必能在$[a,b]$上取到最大值和最小值，即$\exists\xi,\eta\in[a,b]$，使得$f(\xi)\le f(x)\le f(\eta), \forall x\in[a,b]$。

证明

定理 3.17 (零点存在定理)

$f(x)$在$[a,b]$上连续，如果$f(a)f(b)<0$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=0$。

证明

命题 3.59

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$

证明

命题 3.60

$f(x)$在$[a,b]$上连续, $f([a,b]) \subset [a,b]$, 则$\exists \xi \in [a,b]$, 使得$f(\xi) = \xi$(ξ称为f的不动点)。

证明

命题 3.61

$f(x)$在(a,b)上连续, $f((a,b)) \subset (a,b)$, 则是否f也有不动点?

证明

定理 3.18 (中间值定理)

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续, 则它一定能取到最大值M与最小值m之间的任何一个值。

证明

3.9.1 一致连续概念

定义 3.16

X是某一区间, $f(x)$在X上连续, 是指$f(x)$在X上的每一点连续(在端点指右或者左连续)。

分析表述: $\forall x_0 \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X(|x - x_0| < \delta), |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, 能否找到对一切$x_0$适用的$\delta > 0$?

若能找到这样的$\delta > 0$, 则有:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x', x'' \in X(|x' - x''| < \delta)$: $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$。

问题: 这样的$\delta(\epsilon) > 0$是否一定能找到?不一定!

存在$\delta(\epsilon) > 0 \iff \inf_{x_0 \in X} \delta^*(\epsilon, x_0) > 0$ (令所有适用的$\delta(\epsilon, x_0)$中的最大者(或上确界)为$\delta^*(\epsilon, x_0)$)

定义 3.17 (一致连续)

$f(x)$在区间X上有定义, 假如$\forall \epsilon > 0$,$\exists \delta > 0, \forall x', x'' \in X(|x' - x''| < \delta)$: $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$, 则称$f(x)$在区间X上一致连续。

$f(x)$在X上一致连续 $\Rightarrow$ $f(x)$在区间X上连续

命题 3.62

证明:

$$y = \sin(x)$$

在$(-\infty, +\infty)$上一致连续。

证明

命题 3.63

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在区间$(0,1)$上不是一致连续。

证明

定理 3.19

假设$f(x)$在区间X上有定义，则$f(x)$在X上一致连续的充分必要条件是：对任意点列$x_n', x_n'' \in X$，只要$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$，则有$\lim_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n'')) = 0$。

证明

命题 3.64

用以上的定理证明：

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在区间$(0,1)$上不是一致连续。

证明

命题 3.65

证明：

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在$(\eta, 1), 0 < \eta < 1$上一致连续。

命题 3.66

$$f(x) = x^2$$

在$(0,+\infty)$上非一致连续。

证明

命题 3.67

$$f(x) = x^2$$

在$(0,A)$上一致连续。

证明

定理 3.20 (Cantor定理)

若$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$上一致连续。

证明

定理 3.21

$f(x)$在有限开区间(a,b)连续，则$f(x)$在开区间(a,b)上一致连续的充分必要条件是：$f(a^+), f(b^-)$存在。

证明

第 4 章 微分

4.1 微分和导数

4.1.1 微分

考虑$y=f(x)$, 当$x\to x+\Delta x$时, $f(x)\to f(x+\Delta x)$, 令$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$。应该怎么简单地表示$\Delta y$?

定义 4.1 (微分的定义)

$x_0\in D_f$, 若存在只与x_0有关, 与Δx无关的$g(x_0)$,使得当$\Delta x\to 0$时:

$$\Delta y=g(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

则称$f(x)$在x_0可微。

若$f(x)$在区间X的每一点可微, 则称$f(x)$在区间X可微。

$g(x_0)\Delta x$称为Δy的线性主要部分。

$\Delta x\to 0$, 记Δx为dx, 若$f(x)$在x点可微, 则有$\Delta y=g(x)\Delta x+o(\Delta x),(\Delta x\to 0)$。则记$\Delta y$为$dy$, 并将上式写为$dy=g(x)dx$。

♣

命题 4.1

$$y=f(x)=x^2$$

对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 求微分表示。

♠

证明

命题 4.2

$$y=f(x)=\sqrt[3]{x^2}$$

考虑f在$x_0=0$是否可微。

♠

证明

可微$\Rightarrow$连续

4.1.2 导数

$y=f(x)$在x_0可微, 则$\Delta y=g(x_0)\Delta x+o(\Delta x),(\Delta x\to 0)$, 那么:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=g(x_0)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

令$\Delta x\to 0$, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=g(x_0)$$

定义 4.2

设$x_0\in D_f$, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

存在, 则称$f(x)$在x_0可导, 记这个极限值为$f'(x_0)$(或$y'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$)。

♣

$f(x)$可导的范围是D_f的子集, 于是我们可以得到在这子集上的$f(x)$的导函数, 记为$f'(x)$(或$y'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$)。

可微$\Rightarrow$可导, 且$f'(x_0) = g(x_0)$。

可导是否一定可微?

可导, 则:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

则:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = o(1), (\Delta x \to 0)$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(1)\Delta x$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

即, 可导$\Rightarrow$可微(一元函数下)。

4.2 导数的意义与性质

命题 4.3

抛物线:

$$y^2 = 2px$$

(x_0, y_0)是抛物线上一点, 求过(x_0, y_0)的切线方程。

证明

命题 4.4

椭圆:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

求椭圆上过(x_0, y_0)点的切线。

证明

$f(x)$在x_0处的导数为以下极限:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

称:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

为$f(x)$在x_0的右导数。称:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

为$f(x)$在x_0的左导数。

因此, $f(x)$在x_0可导$\Longleftrightarrow$ $f(x)$在x_0的左右导数存在且相等。

以下两个记号不好弄混:$f'_+(x_0)$是$f(x)$在x_0的右导数, $f'(x_0^+)$是$f(x)$导数在x_0的右极限。

同理, $f'_-(x_0)$是$f(x)$在x_0的左导数, $f'(x_0^-)$是$f(x)$导数在x_0的左极限。

命题 4.5

$f(x)=|x|$在x_0的左右导数。

证明

命题 4.6

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x) & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

求$f(x)$在$x=0$的左右导数。

证明

命题 4.7

$$f(x)=\begin{cases} x^2+b & x>2 \\ ax+1 & x\leq 2 \end{cases}$$

要求确定a,b使得$f(x)$在$x_0=2$可导。

证明

$f(x)$在(a,b)上每一点可导, 则称$f(x)$在(a,b)区间上可导。

$f(x)$在(a,b)上每一点可导, 在$x=a$上有右导数, $x=b$又左导数, 则称f在闭区间$[a,b]$上可导。

4.3 导数四则运算与反函数求导法则

命题 4.8

求

$$y=\sin(x)$$

的导数。

证明

同理$y=\cos(x)$, $y'(x)=-\sin(x)$。

命题 4.9

求

$$y=\ln(x)$$

的导数。

证明

命题 4.10

求

$$y=e^x$$

的导数。

证明

命题 4.11

求

$$y = a^x$$

的导数。

证明

命题 4.12

求

$$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

在定义域$(0, +\infty)$的导数。

证明

定理 4.1

若f, g在同一区间可导，则$c_1 f(x) + c_2 g(x)$也在该区间可导，且有：

$$(c_1 f(x) + c_2 g(x))' = c_1 f'(x) + c_2 g'(x)$$

定理 4.2

若f, g在同一区间可导，则$f(x)\dot{g}(x)$也在该区间可导，且有：

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

证明

命题 4.13

求：

$$y = x^3 \cos(x)$$

的导数。

证明

命题 4.14

求：

$$y = \frac{\sin(x)}{x}$$

的导数。

证明

定理 4.3

设$g(x)$在某一个区间可导，$g(x) \neq 0$，则$\frac{1}{g(x)}$也在该区间可导，且

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

证明

命题 4.15

求:

$$y=\sec(x),\left(\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}\right)$$

的导数。

证明

命题 4.16

求:

$$y=\csc(x),\left(\csc(x)=\frac{1}{\sin(x)}\right)$$

的导数。

证明

引理 4.1

f,g在同一区间可导, $g(x)\neq 0$, 则$\frac{f(x)}{g(x)}$在该区间可导, 且:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

证明

命题 4.17

求:

$$y=\tan(x)$$

的导数。

证明

命题 4.18

求:

$$y=\cot(x)$$

的导数。

证明

定理 4.4 (反函数求导定理)

$f(x)$在(a,b)**连续**并且**严格单调**并且**可导**, $f'(x)\neq 0$, $\alpha=\min\left(f(a^+),f(b^-)\right)$, $\beta=\max\left(f(a^+),f(b^-)\right)$, 则$f^{-1}(y)$在$(\alpha,\beta)$上可导, 且:

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}$$

证明

命题 4.19

求:

$$y=\arctan(x)$$

的导数。

证明

命题 4.20

求:

$$y = \operatorname{arccot}(x)$$

的导数。

证明

命题 4.21

求:

$$y = \arcsin(x)$$

的导数。

证明

命题 4.22

求:

$$y = \arccos(x)$$

的导数。

证明

命题 4.23

考虑:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad 和 \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

的导数。

证明

命题 4.24

考虑:

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \quad 和 \quad \operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$$

的导数。

证明

命题 4.25

考虑:

$$\operatorname{sh}^{-1}(x) \quad 和 \quad \operatorname{ch}^{-1}(x)$$

的导数。

证明

注

1. $\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'(x)$
2. $\prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(f_j'(x) \prod_{i=1, i\neq j}^{n} f_i(x) \right)$

命题 4.26

求

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的导数。

证明

命题 4.27

求:

$$y = \mathrm{e}^x \left(x^2 + 3x - 1\right) \arcsin(x)$$

证明

4.4 复合函数求导法则及其应用

命题 4.28

$u = g(x)$在x_0可导, $g(x_0) = u_0$, $u = f(u)$在$u = u_0$可导, 则$y = f(g(x))$在$x = x_0$可导, 且:

$$[f(g(x))]'_{x=x_0} = f'(u_0) g'(x_0)$$

证明 有缺陷证明:

证明:

复合函数求导法则又叫链式法则。

例题 4.1 用复合函数求导法则求:

$$y = x^\alpha$$

的导数。

证明

例题 4.2 用复合函数求导法则求:

$$y = \mathrm{e}^{\cos(x)}$$

的导数。

证明

例题 4.3 用复合函数求导法则求:

$$y = \sqrt{1 + x^2}$$

的导数。

证明

命题 4.29

求:

$$y = \mathrm{e}^{\sqrt{1+\cos(x)}}$$

的导数。

证明

幂指函数:

例题 4.4 求:

$$y = f(x) = u(x)^{v(x)}$$

的导数。

证明

例题 4.5

$$y = (\sin(x))^{\cos(x)}$$

证明

定理 4.5 (一阶微分的形式不变性)

设$y = f(u)$, 则$y'(u) = f'(u)$, $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$, 其中$u$是自变量。

设$y = f(u), u = g(x)$, 则$y(x) = f(g(x))$, $y'(x) = f'(u)g'(x)$, $y'(x) = f'(g(x))g'(x)$, $\mathrm{d}y = f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$, 则 $\mathrm{d}y = f'(g(x))\mathrm{d}g(x) = f'(u)\mathrm{d}u$, 其中$u$是中间变量。

无论u是自变量还是中间变量,$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$

4.4.1 隐函数的求导与微分

隐函数:$f(x, y) = 0$。

例题 4.6

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

求y关于x的微分。

例题 4.7

$$\mathrm{e}^{xy} + x^2y - 1 = 0$$

求y关于x的微分。

证明

命题 4.30

$$\sin(y^2) = \cos(\sqrt{x})$$

求y关于x的微分。

证明

例题 4.8

$$\mathrm{e}^{x+y} - xy - e = 0$$

(0, 1)在曲线上, 求过(0, 1)点的切线方程。

证明

注

1. $y\ \frac{1}{g(x)}$也可以看作:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{u} \\ u = g(x) \end{cases}$$

则$y'(x) = -\frac{1}{g^2(x)} \cdot g'(x)$, 定义证明和复合函数结果一致。

2. $y=f(x), x=f^{-1}(y)$, 则$f^{-1}((f(x)))=x$, 使用复合函数求导, 则$1=(f^{-1}(y))'f'(x)$, 即$(f^{-1}(y))=\frac{1}{f'(x)}$, 用复合函数求导法则可以推导反函数求导。

4.4.2 函数的参数表示

函数的参数表示:

$$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$$

ϕ, ψ可微, ϕ严格单调, $\phi'(t)\neq 0$。由反函数可导定理t可以表示为$t=\phi^{-1}(x)$,则:

$$y=\psi(\phi^{-1}(x))$$

则:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\psi'(t)(\phi'(x))'=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\phi(t)}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

例题 4.9 求旋轮线:

$$\begin{cases} x=t-\sin(t) \\ y=1-\cos(t) \end{cases}$$

的导数。

证明

例题 4.10 $t=0$时, 水平速度与垂直向上的速度分别为v_1, v_2, 问在什么时刻, 速度的方向是水平的?

证明

例题 4.11

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

分别用三种表示方法的求导方式求导。

证明

4.5 高阶导数和高阶微分

定义 4.3 (高阶导数的定义)

$y=f(x)$, 若$f'(x)$任然可导, 则记它的导函数为:

$$[f'(x)]'=f''(x)$$

称它为$f(x)$的二阶导数。也可记为$y''(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}$。

若$f''(x)$仍可导, 则它的导数称为$f(x)$的三阶导数, 记为$f'''(x)$, 也可以记为$y'''(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right)=\frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}x^3}$。

从四阶开始记为$f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$

♣

定义 4.4

设f的$n-1$阶导数$f^{(n-1)}(x)$仍然可导, 则它的导数记为$\left[f^{(n-1)}(x)\right]'=f^{(n)}(x)$, 也可记为$y^{(n)}(x)$, $\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}$, $\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$

♣

例题 4.12 求

$$y=\mathrm{e}^x$$

的高阶导数。

证明

例题 4.13 求

$$y = a^x$$

的高阶导数。

证明

例题 4.14 求

$$y = \sin(x)$$

的高阶导数。

证明

例题 4.15 求

$$y = x^m \quad (m\text{是正整数})$$

的高阶导数。

证明

例题 4.16 求

$$y = \ln(x)$$

的高阶导数。

证明

4.5.1 高阶导数的运算法则

定理 4.6

$f(x), g(x)$都是n次可导，则

$$[c_1 f(x) + c_2 g(x)]^{(n)} = c_1 f^{(n)}(x) + c_2 g^{(n)}(x)$$

定理 4.7 (Leibniz公式)

$f(x), g(x)$都是n次可导，则

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^k(x)$$

证明

例题 4.17 求

$$y = (3x^2 - 2)\sin(2x)$$

的100阶导数。

证明

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^n$无固定公式，要考虑成$\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right]^n$来算。

复合函数，隐函数，参数表示的高阶导数并不简单。

4.5.2 复合函数

先考虑$y=f(u), u=g(x)$的复合函数的二阶导数:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \\ &= f''(u)(g'(x))^2 + f'(u)g''(x) \end{aligned}$$

再求三阶导数:

4.5.3 隐函数

隐函数也没有固定的公式,所以我们通过例题来说明。

例题 4.18 求隐函数:

$$\mathrm{e}^{xy} + x^2y - 1 = 0$$

的y的二阶导数。

证明

4.5.4 参数表示

问题 4.1 函数的参数表示:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

如何求y的二阶导数。

证明

例题 4.19(旋轮线) 已知:

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

求y的一阶和二阶导数。$t=\pi$时y的二阶导数是多少。

4.6 高阶微分

问题 4.2 已知$y=f(x)$,求y的高阶微分。

证明 $\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x)$,其中的$\mathrm{d}(\mathrm{d}x)$怎么求微分,我们可以考虑:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (f'(x) \neq 0)$$

该等式除了说明$\Delta y \sim f'(x)\Delta x$,还说明在上式中$\Delta x$是与$x$无关的量,因为$\Delta x$的变动与$x$无关,因此可以看作是$x$的常数函数。

那么$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(f'(x))\mathrm{d}x = f''(x)\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}x = f''(x)\mathrm{d}x^2$

依次类推: $\mathrm{d}^3y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2y) = \mathrm{d}(f''(x)\mathrm{d}x^2) = \mathrm{d}(f''(x))\mathrm{d}x^2 = f'''(x)\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}x^2 = f'''(x)\mathrm{d}x^3$。

n阶微分为: $\mathrm{d}^n(y) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{(n-1)}y) = \mathrm{d}(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$

注 高阶微分没有形式不变性。

问题 4.3 考虑$y=f(u), u=g(x)$,求d^2y以u为自变量和以x为自变量下的形式。

例题 4.20 求:

$$y = \mathrm{e}^{\sin(x)}$$

的二阶微分。

证明 $\boxed{\text{解1}}$:

$$\mathrm{d}^2 y = f''(x)\mathrm{d}x^2$$

$\boxed{\text{解2}}$:

$$\mathrm{d}^2 y = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u \quad (u = \sin(x))$$

第 5 章 微分中值定理极其应用

5.1 微分中值定理

定义 5.1

设$f(x)$的定义区间为(a,b), $x_0\in(a,b)$, 若$\exists, O(x_0,\rho)\subset(a,b)$, 使得$f(x)\le f(x_0), x\in O(x_0,\rho)$,则称$x_0$是$f$的一个极大值点, $f(x_0)$是一个极大值。

注

1. 极值是局部概念。
2. 极小值可以大于极大值。
3. 极值点可以有无穷多个, 例如: $y=\sin(1/x)$。
4. 极值概念与连续、可导等概念无关。

引理 5.1 (Fermat引理)

设x_0是$f(x)$的一个极值点, 若f在x_0可导, 则$f'(x_0)=0$

证明

注 导数等于0, 并不一定是极值点, 例如$f(x)=x^3$的$x=0$点。

定理 5.1 (Rolle定理)

$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续, 在开区间(a,b)可导, $f(a)=f(b)$, 则至少存在一个$\xi\in(a,b)$, 使$f'(\xi)=0$。

证明

例题 5.1(Legendre多项式) 若有函数:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

则它在$(-1,1)$有n个不同的根。

证明

定理 5.2 (Lagrange中值定理)

$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)可导, 则$\exists\xi\in(a,b)$, 使:

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明

注 除了以上形式之外, 还能写成别的形式, 例如

1. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$
2. $f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a), \theta\in(0,1)$
3. $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \theta\in(0,1)$
4. $\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$

例题 5.2 用Lagrange中值定理讨论函数:

我们已知$f(x)=c\Rightarrow f'(x)=0$

现在证明$f'(x)=0\Rightarrow f(x)=c$

证明

定理 5.3 (一阶导数与函数的单调性关系)

$f(x)$在区间I定义, 且可导, 则$f(x)$在I上单调增加的充分必要条件是: $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$。
若$\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, 则$f(x)$在I上严格单调增加(充分条件)。

证明 充分性:
必要性:

注 若$f(x)$在I上连续, 除了有限个点$x_1, x_2, \cdots, x_n$之外, $f'(x) > 0$, 则$f'(x)$在I上严格单调增加。

5.1.1 函数的凸性

convex(凸), convave(凹), 陈老版本将前者定义为下凸, 后者定义为上凸。
几何上, 下凸: 弦在曲线上方; 上凸: 弦在曲线上方。

定义 5.2

$f(x)$在区间I上有定义, 若$\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 成立$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$, 则称$f(x)$在区间$I$上是下凸函数。

定理 5.4 (二阶导数与凸性的关系)

设$f(x)$在I上二阶可导, 则$f(x)$在I下凸的充分必要条件是:$f''(x) \geq 0, \forall x \in I$。
若在I上有$f''(x) > 0$, 则$f(x)$在I上严格下凸。

证明 必要性:
充分性:

5.1.2 拐点

(拐点会使得作图像样)

定理 5.5

$f(x)$在区间I上连续, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$:

1. $f(x)$在$(x_0 - \delta, x_0)$与$(x_0, x_0 + \delta)$上都二阶可导, $f''(x)$在$(x_0 - \delta, x_0)$与$(x_0, x_0 + \delta)$上符号相反, 则$(x_0, f(x_0))$是拐点。$f(x)$在$(x_0 - \delta, x_0)$与$(x_0, x_0 + \delta)$上都二阶可导, $f''(x)$在$(x_0 - \delta, x_0)$与$(x_0, x_0 + \delta)$上符号相同, 则$(x_0, f(x_0))$不是拐点。
2. 若$f(x)$在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$上二阶可导, $(x_0, f(x_0))$是曲线的拐点, 则$f''(x_0) = 0$。

证明

例题 5.3 求曲线$y = \sqrt[3]{x^2}(x^2 - 4x)$的拐点。

证明

定理 5.6 (Jensen不等式)

$f(x)$在区间I下凸, 则对于$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, $(\lambda_i > 0, \sum_i \lambda_i = 1)$, 成立:

$$f(\sum_i \lambda_i x_i) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

证明

例题 5.4 取$f(x) = \ln(x)$, 证明:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

证明

例题 5.5 证明:

$$|\arctan(b)-\arctan(a)|\leq|b-a|$$

证明

例题 5.6 证明等式:

$$\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\arctan(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & x<1\\ -\dfrac{3\pi}{4} & x>1\end{cases}$$

证明

例题 5.7 判断e^π和π^e的大小。

证明

例题 5.8 证明: 当$x>0$时候,

$$\sin(x)>x-\frac{1}{6}x^3$$

证明

例题 5.9 证明: 当$a,b>0$时:

$$a\ln(a)+b\ln(b)\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2]$$

证明

例题 5.10 $a,b\geq 0$, $p,q>0$, 满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则:

$$ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

证明

定理 5.7 (Cauchy中值定理)

$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可导, 对$\forall x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 则至少存在$\xi\in(a,b)$, 使得:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

♡

证明 $\boxed{\text{证法一}}$:

$\boxed{\text{证法二}}$:

例题 5.11 设$f(x)$在$[1,+\infty)$连续, 在$(1,+\infty)$可导, $e^{-x^2}f'(x)$在$(1,+\infty)$上有界,则$xe^{-x^2}f(x)$也在$(1,+\infty)$上有界。

证明

5.2 L'Hospital法则

L'Hospital是求待定型的一种重要方法(有的书翻译成洛必达, 有的书翻译成罗比塔)。

定理 5.8 (L'Hospital法则)

$f(x),g(x)$在$(a,a+d]$上可导, $g'(x)\neq 0$, 若这时有:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=0$$

或者:

$$\lim_{x\to a^+}g(x)=\infty(\text{没要求}\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty)$$

且$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或$\infty$), 则:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注

1. $x\to a^+$也适用于$x\to x_0, x\to x_0^-, x\to\pm\infty, x\to\infty$。
2. $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, 也适用于$\frac{f'(x)}{g'(x)}\to\infty, +\infty, -\infty$。
3. $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$, 是$\frac{0}{0}$型或者$\frac{*}{\infty}$型。

证明 情况一:

情况二:

例题 5.12 求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}$$

证明

例题 5.13 求:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x)}{\sin\frac{1}{x}}$$

证明

例题 5.14 求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan(x)}{x^3}$$

证明

例题 5.15 求:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{bx}}\quad(a>0, b>0)$$

证明

例题 5.16 求:

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)$$

证明

例题 5.17 求:

$$\lim_{x\to 0^+}\cot(x)-\frac{1}{x}$$

证明

例题 5.18 求:

$$\lim_{x\to 0^+}x^x$$

证明

例题 5.19 求:

$$\lim_{x\to x^+}\ln^x(\frac{1}{x})$$

证明

例题 5.20 求:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sin(x))^{\tan(x)}$$

证明

反例(不可用洛必达):

例题 5.21 求:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

证明

例题 5.22 求:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos(x)}{x}$$

证明

5.3 Taylor多项式与插值多项式

5.3.1 Taylor多项式

定理 5.9 (带Peano余项的Taylor公式)

设$f(x)$在x_0有n阶导数, 则在x_0的领域, 成立:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+r_n(x)$$

其中:

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0)$$

设:

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

$P_n(x)$称为f在$x=x_0$处的n次Taylor多项式。$r_n(x)$称为f在$x=x_0$处的Peano余项。

注 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$在$x_0$连续。

证明

定理 5.10 (带Lagrange余项的泰勒公式)

设$f(x)$在$[a,b]$有n阶连续导数, 在(a,b)上有$n+1$阶导数, 设$x_0\in[a,b]$为一定点, 则对任意的$x\in[a,b]$, 有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+r_n(x)$$

其中:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}\quad(\xi\text{在}x,x_0\text{之间})$$

注 带Lagrange余项的泰勒公式并不要求$x\to x_0$, 它可以描述一定区间的内的情况。

证明 $\boxed{\text{陈老证明(惊为天人)}}$: 这部分我们暂不写, 待整体的进度到了再写。

$\boxed{\text{证明二}}$: 设两个辅助函数:

$$G(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$
$$H(x)=(x-x_0)^{k+1}$$

并且$G(x_0)=0$, $H(x_0)=0$。考察$G(x)$和$H(x)$导数:

$$G'(x)=f'(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^k$$
$$H'(x)=(n+1)(x-x_0)^n$$

并且有$G'(x_0)=0$, $H'(x_0)=0$。依次类推, $G^{(i)}(x)$和$H^{(i)}(x)$为:

$$G^{(i)}(x)=f^{(i)}(x)-\sum_{k=0}^{n-i}\frac{1}{k!}f^{(k+i)}(x_0)(x-x_0)^k$$

$$H^{(i)}(x)=\frac{(n+1)!}{(n+1-i)!}(x-x_0)^{n+1-i}$$

并且$G^{(i)}(x_0)=0$, $H^{(i)}(x)=0$。

现在不妨设$x>x_0$, 则根据Cauchy中值定理(定理 5.7):

$$\frac{G(x)}{H(x)}=\frac{G(x)-G(x_0)}{H(x)-H(x_0)}=\frac{G'(\xi_1)}{H'(\xi_1)}=\frac{G'(\xi_2)}{H'(\xi_2)}=\cdots=\frac{G'(\xi_n)}{H'(\xi_n)}=\frac{f^{n}(\xi_n)-f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

因此:

$$r_n(x)=G(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

注 取$n=0$:

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$

即Lagrange中值定理, 因此带Lagrange余项的Taylor展开是Lagrange中值定理的推广。

5.3.2 插值多项式

假设有一个多项式:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

要确定多项式的系数, 则需要$n+1$个条件。

设$f(x)$定义于$[a,b]$上有n阶导数, 取$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_m\in[a,b]$, 要求$P_n(x)$满足:

$$P_n^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)\quad(i=0,1,2,\cdots,m;j=0,1,2,\cdots,n_i-1)$$

即, 在x_i点, 有n_i个条件。那么假设$n+1=\sum_{i=0}^m n_i$, 那么我们就能用这些条件确定n阶多项式P_n。

现在, 我们用m_j表示$f^{(j)}(x)$的条件个数, 那么$n+1=\sum_j m_j$。

现在有两个问题:

1. 如何找$P_n(x)$?
2. 如何求余项$r_n(x)$?

定理 5.11 (插值多项式的余项定理)

$f(x)$在$[a,b]$上有n阶连续导数, 在(a,b)上有$n+1$阶导数, $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_m\in[a,b]$, 设$P_n(x)$是满足插值条件

$$P_n^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)\quad(i=0,1,2,\cdots,m;j=0,1,2,\cdots,n_i-1)$$

的n次插值多项式, 则:

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^m(x-x_i)^{n_i}$$

其中$\xi\in(x_{min},x_{max})$, $x_{min}=\min\{x,x_0,x_1,\cdots,x_m\}$, $x_{max}=\max\{x,x_0,x_1,\cdots,x_m\}$ ♡

证明

现在我们已经证明了余项的公式, 接下来我们来讨论如何找插值多项式$P_n(x)$, 但是关于找插值多项式的内容已经超出了数学分析的内容, 因此我们只讨论两种特殊的多项式:

1. $\boxed{\text{情况一}}$: $n_0=n_1=\cdots=n_m=1$

   在该情况下, 因为$\sum_{i=0}^m n_m=n+1$, 因此$n=m$。考虑$\omega_{n+1}=\prod_{i=0}^n(x-x_i)=\prod_{i=0}^m(x-x_i)$, 现在我们定

义基函数:

$$q_k(x) = \frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x-x_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x_k-x_i)}$$

这样定义的$q_k(x)$是一个n次多项式, 并且有以下的性质:

$$q_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$$

现在我们定义:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)q_k(x) = f(x_0)q_0(x) + f(x_1)q_1(x) + \cdots + f(x_n)q_n(x)$$

2. $\boxed{\text{情况二}}$: 节点仅一个x_0
在该情况下, 插值条件为:

$$P_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) \quad (j=0,1,2,\cdots,n)$$

定义基函数$q_k(x) = \frac{(x-x_0)^k}{k!}$, 那么基函数$q_k(x)$有如下性质:

$$q_k^{(j)}(x_0) = \begin{cases} 0 & j<k \\ 1 & j=k \\ 0 & j>k \end{cases}$$

那么我们就可以用基函数定义:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)q_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

这是f在x_0的Taylor多项式。

5.4 函数的Taylor公式及其应用

对于泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x)$$

当$x_0=0$时, 该公式又称为Maclaurin公式。

例题 5.23 求:

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

在$x=0$的Taylor公式。

证明

例题 5.24 求:

$$f(x) = \sin(x)$$

在$x=0$的Taylor公式。

证明

例题 5.25 求:

$$f(x) = \cos(x)$$

在$x=0$的Taylor公式。

证明

例题 5.26 求:

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

在$x=0$的Taylor公式。

证明

注

1. $\alpha=n$
2. $\alpha=-1$
3. $\alpha=1/2$
4. $\alpha=-1/2$

例题 5.27 求:

$$f(x)=2^x$$

在$x=0$的Taylor公式。

证明

例题 5.28 求:

$$f(x)=\sin(x)$$

在$x=\frac{\pi}{3}$的Taylor公式。

证明

例题 5.29 求

$$f(x)=\sqrt[3]{2-\cos(x)}$$

在$x=0$的Talyor公式(展开到x^4)。

证明

定理 5.12

设$f(x)$在x_0有$n+2$阶导数, 则它的$n+1$次Taylor多项式的导数就是$f'(x)$的n次多项式。

证明

例题 5.30 求

$$f(x)=\ln(1+x)$$

在$x=0$的Talyor公式。

证明

例题 5.31 求

$$f(x)=\arctan(x)$$

在$x=0$的Talyor公式。

证明

5.4.1 Taylor公式的应用

5.4.1.1 近似运算

例题 5.32 已知e^x的Taylor公式为:

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+r_n(x)$$

其中:

$$r_n=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad\theta\in(0,1)$$

求计算e。

证明

是否所有的情况都能用Taylor公式算近似值?

例题 5.33 求$\ln 2$的近似值。

证明

注 我们在算完一个近似值后要估算下精确度是多少。

例题 5.34 用:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

的Taylor公式估算$\ln 2$。

5.4.1.2 求极限

例题 5.35 求:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

证明

例题 5.36 求:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\sin^2(x)\right) - 6\left(\sqrt[3]{2-\sin(x)} - 1\right)}{x^4}$$

证明

5.4.1.3 证明不等式

例题 5.37 设$\alpha > 1$, 证明当$x > -1$时:

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

等号成立当且仅当$x = 0$。

证明

例题 5.38 $f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数, 在$[0,1]$上:

$$|f(x)| \leq A, \quad |f''(x)| \leq B$$

则:

$$|f'(x)| \leq 2A + \frac{1}{2}B, \quad x \in [0,1]$$

证明

5.4.1.4 求曲线的渐近线

$x \to +\infty$, $y = ax + b$是函数$f(x)$的图像的渐近线的充分必要条件是:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

如何求出一条渐近线?

例题 5.39 求:

$$y = \frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$$

的渐近线。

证明

例题 5.40 求:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$$

的渐近线。

证明

例题 5.41 求:

$$y = x^3\left(e^{\frac{1}{x}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 2\right)$$

的渐近线。

证明

现在我们用Taylor公式来证明下e是无理数。

例题 5.42 证明e不是有理数。

证明 $\boxed{\text{反证法}}$:

5.5 应用举例

5.5.1 极值问题

已知函数$y = f(x)$, 现在我们要讨论它的极大值和极小值, 假设$x = x_0$是极值点, 则$f'(x_0) = 0$, 或$f'(x_0)$不存在。

定理 5.13 (极值点的判定定理)

设$f(x)$在x_0的某一个领域中有定义, 且$f(x)$在x_0连续。

1. 设$\exists\delta > 0$, $f(x)$在$(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$上可导
   (a) 在$(x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) \geq 0$; 在$(x_0, x_0 + \delta)$, $f'(x) \leq 0$, 则x_0是极大值点, $f(x_0)$是一个极大值。
   (b) 在$(x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) \leq 0$; 在$(x_0, x_0 + \delta)$, $f'(x) \geq 0$, 则x_0是极小值点, $f(x_0)$是一个极小值。
   (c) $f'(x_0)$在$(x_0 - \delta, x_0)$与$(x_0, x_0 + \delta)$上同号, 则x_0不是极值点。
2. 设$f'(x_0) = 0$, $f(x)$在x_0二阶可导。
   (a) $f''(x_0) < 0$, 则x_0是极大值点。
   (b) $f''(x_0) > 0$, 则x_0是极小值点。
   (c) $f''(x_0) = 0$, 则无法判断。

♡

证明 $\boxed{\text{证明情况1}}$:

$\boxed{\text{证明情况2}}$:泰勒公式

注

例题 5.43 求:

$$f(x) = \sqrt[3]{(2x - x^2)^2}$$

的极值点。

证明

例题 5.44 求:

$$f(x) = (x^3 - 1)^3 + 1$$

的极值点。

解

5.5.2 最值问题

$y = f(x)$在$[a, b]$上连续, 则$f(x)$在$[a, b]$上能取到最大最小值。若最值点在(a, b)上,则它必是极值点。那么或者$f'(x_0) = 0$或者$f'(x_0)$不存在。所以求解最值问题先求解(a, b)上的极值问题, 求出极值可能点, 然后再加上$x = a$和$x = b$, 比较在这些点的函数值。

例题 5.45 求:

$$f(x)=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$$

在$[-1,4]$上的最大值、最小值。

解

例题 5.46 做圆柱形的罐头, 顶盖的厚度是其他部分的三倍, 问高h与底边半径r的比例是多少时, 最省材料?

解

例题 5.47 汽车从平面的A点到达草原的B点, A点距离交界线距离为h_1, B点距离交界线距离为h_2, AB投影到交界面的距离为l, 汽车在平面上的速度为v_1, 在草原上的速度为v_2, 则汽车在交界线上经过哪一点时的时间最短?之后画图

解

5.5.3 数学建模

例题 5.48(Malthus人口模型) 某地区人口数量函数$P(t)$和单位时间内的人口增长量有如下关系:

$$P'(t)=\lambda P(t)$$

并且假设$P(t_0)=P_0$, 求t时刻的人口数量$P(t)$。

解

例题 5.49(液体过滤问题) $Q(t)$为液体流量, $Q'(t)$为液体流速, 初始流速为q_0。流速的减少$q_0-Q'(t)$与流量成正比:

$$q_0-Q'(t)=\lambda Q(t)$$

并且$Q(0)=0$, 求t时刻的流量$Q(t)$。

解 妙妙妙

5.5.4 函数作图

首先考虑对称性, 周期性。其次:

1. 考虑不连续点。
2. 考虑$f'(x)=0$或$f'(x)$不存在的点。
3. 考虑$f''(x)=0$或$f''(x)$不存在的点。
4. 列表, 利用$f'(x)$, $f''(x)$的数据决定$f(x)$的性质。
5. 找出渐近线, 加上一些特殊点。

例题 5.50 作:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

的图像。

解

例题 5.51 作:

$$y=\frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$$

的图像。

解

例题 5.52 作:

$$y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$$

的图像。

解

5.5.5 方程的近似求解

求解方程的方法有解析方法和数值方法, 本节我们主要学习数值方法。在本节中, 我们主要介绍二分法和牛顿迭代法。

命题 5.1 (二分法)

求$f(x)=0, x\in[a,b]$, 其中$f(x)x$在$[a,b]$上连续, $f(a)f(b)<0$, 则$\exists x^*\in(a,b)$, 使$f(x^*)=0$。

证明

命题 5.2 (Newton迭代法(Newton切线法))

$f(x)$在$[a,b]$上连续, $f(a)f(b)<0$, $f'(x)\neq 0$。

证明

例题 5.53 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 满足:

1. $f(a)f(b)<0$
2. $f'(x)$在(a,b)保号
3. $f''(x)$在(a,b)保号

取x_0满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则由$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$得到的$\{x_k\}$单调收敛于$f(x)=0$的解。

第 6 章 不定积分

6.1 不定积分的概念和运算法则

6.1.1 不定积分的概念

在之前讨论人口模型和液体过滤问题时, 实际上我们已经涉及了积分的概念。

定义 6.1

在某个区间上, $F'(x) = f(x)$, 则称$F(x)$是$f(x)$的一个原函数。

注 这里说一个, 是因为原函数不唯一。设$G(x)$是该区间上的另一个原函数, 则$(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$, 则$F(x) - G(x) = C$, C为常数。

定义 6.2

一个函数$f(x)$的原函数的全体称为这个函数的不定积分, 记作$\int f(x)\mathrm{d}x$。其中, $\int$为积分号, $f(x)$为被积函数, x是积分变量。不定积分可以记为:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

例题 6.1 求:

$$\int sin(x)\mathrm{d}x$$

解

例题 6.2 求:

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x \quad (\alpha \neq -1)$$

解

例题 6.3 求:

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

解

不定积分表

6.1.2 不定积分的线性性质

定理 6.1 (不定积分的线性性质)

设$f(x)$, $g(x)$的原函数都存在, k_1, k_2是任意常数, 则:

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int g(x)\mathrm{d}x$$

证明

例题 6.4 求:

$$\int \tan^2(x)\mathrm{d}x$$

解

例题 6.5 求:

$$\int sin^2(\frac{x}{2})\mathrm{d}x$$

解

例题 6.6 求:

$$\int \frac{(x+\sqrt{x})\,(x-2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

解

例题 6.7 求:

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

例题 6.8 曲线$g=f(x)$在没一点$(x,f(x))$切线的斜率为x^2, 且曲线经过$(3,2)$, 求$y=f(x)$。

解

6.2 换元积分法和分步积分法

定理 6.2 (第一类换元积分法)

若要求$\int f(x)dx$, 若$f(x)$可以写成$f(x)=\widetilde{f}(g(x))g'(x)$, 且$\int \widetilde{f}(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$, 则$\int f(x)\mathrm{d}x=F(g(x))+C$。 ♡

证明

注 第一类换元积分法又称为“凑微分法”。

例题 6.9 求:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}$$

解

例题 6.10 求:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}$$

解

例题 6.11 求:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$$

解

例题 6.12 求:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$$

解

例题 6.13 求:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

解

例题 6.14 求:

$$\int \tan(x)\mathrm{d}x$$

解

例题 6.15 求:

$$\int \cot(x)\mathrm{d}x$$

解

例题 6.16 求:

$$\int \sec(x)\mathrm{d}x$$

解

例题 6.17 求:

$$\int \csc(x)\mathrm{d}x$$

解

例题 6.18 求:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} \tag{6.1}$$

解

例题 6.19 求:

$$\int \sin(mx)\cos(nx)dx \quad (m \neq n) \tag{6.2}$$

解

例题 6.20 求:

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x \tag{6.3}$$

解

例题 6.21 求:

$$\int \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x \tag{6.4}$$

解

例题 6.22 求:

$$\int \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x \tag{6.5}$$

解

定理 6.3 (第二类换元积分法)

若要求$\int f(x)dx$, 若存在$x=\phi(t)$使得$\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C$, 则$\int f(x)\mathrm{d}x = F(\phi^{-1}(x))+C$ ♡

注

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\mathrm{d}\phi(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$$

若$\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C$, 则$\int f(x)\mathrm{d}x = F(\phi^{-1}(t))+C$。

例题 6.23 求:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$

解

例题 6.24 求:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

解

例题 6.25 求:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \tag{6.6}$$

解

例题 6.26 求:

$$\int x(2x-1)^{100}\mathrm{d}x$$

解

例题 6.27 求:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

请分别用第一类和第二类换元法(两种)求解。

解