



数学分析

作者: hapo

时间: December 15, 2022



目录

| | | |
|-------|-----------|----|
| 1 | 集合与映射 | 2 |
| 2 | 实数的完备性 | 3 |
| 2.1 | 数列极限 | 4 |
| 2.2 | 无穷大量 | 6 |
| 2.2.1 | 无穷大的运算 | 7 |
| 2.3 | 收敛准则 | 8 |
| 3 | 函数极限与连续函数 | 13 |

记录本书的原因是因为我觉得自己的数学分析实在太烂了。因此我决定使用费曼学习法。这是一个链式反应，在我学习随机过程的时候，我发现自己的概率论太差了，而当我学习概率论的时候，我又发现我的测度论太差了，而我学习测度论的时候，我最终发现，我差的是数学分析。而这个最初始的问题是我并没有系统地学过数学分析。而在学习数学分析的过程中，我发现我对好多概念并不明晰，这使得学习的进度缓慢，并且经常容易在概念上卡壳，而卡壳结束后又很快忘记。因此，为了能够更好地记住，我决定使用费曼学习法。在此，我记录下我学习数学分析的过程。

第 1 章 集合与映射

定义 1.1 (集合)

是具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集的总体，其中的对象称为集合的元素。



集合通常记为 A, B, C, X, Y

元素通常记为 s, t, a, b, x, y

x 是集合 S 的元素，记为 $x \in S$

第2章 实数的完备性

内容提要

有理数的定义 2.2

在本章中，我们将介绍实数的完备性。在介绍实数之前，我们需要将实数定义或者说引入。而对于实数的定义是有很多的，而我在此介绍无穷十进制小数表示和戴德金(Dedekind)分割。这部分我将结合陈纪修教授的教材和Ayumu的讲义。

在引入实数之前，我们需要先介绍有理数，而在介绍有理数之前，我们需要规定一些常用集合的记号。而介绍常用集合，则需要先介绍集合(set)，在此我们并不介绍集合，我们暂时默认我们已经知道了集合的概念，将来我们会对该部分内容进行扩充。现在让我们来列举一些常用的集合。

定义 2.1 (常用集合表示)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{n | n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$$

在定义了以上的集合表示之后，我们就能以上的符号来表示有理数：

定义 2.2 (有理数)

若一个数 x 可以表示成 $\frac{q}{p}$ 的形式，其中 $q \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}^+$ ，则称 x 为有理数(rational number)。而由有理数组成的集合称为有理数集，有理数集常用 \mathbb{Q} 表示，其可以表示为：

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+\}$$

在这里，我们可以看到 p 只需要属于 \mathbb{Z}^+ ，这是因为若 x 为负的，我们总可以规定负号出现在分子上。

有理数对加减乘除都封闭，并且我们在有理数上定义了大小关系，即有理数也是良序的。但是它并不能满足研究所需。例如，存在长度无法用有理数表示。并且有理数之间存在“空隙”，即有理数不连续。而在我们之后的研究中，我们往往需要研究连续性，因此我们需要对有理数进行扩充。在这之前，我们先来证明确实有一些数无法用有理数表示。

命题 2.1

$\sqrt{2}$ 不是有理数。

证明 我们用反证法。假设 $\sqrt{2}$ 为有理数，那么存在 $q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$ ，使得 $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ 。

而且有的函数在实数域和有理数域上的表现完全不一样，比如狄利克雷(dirichlet)函数。

定理 2.1 (确界存在定理—实数系连续性定理)

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。

2.1 数列极限

定义 2.3 (数列极限的定义)

对于数列 $\{a_n\}$, 存在一个实常数 a , 对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \epsilon$ 成立, 则称 $\{a_n\}$ 收敛(convengent)于 a 或者 $\{a_n\}$ 的极限(limit)为 a , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{或者} \quad a_n \rightarrow a (n \rightarrow +\infty)$$

若不存在实数 a , 满足上述性质, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散(divergent)。



一个数列收敛与否, 收敛的话, 收敛于哪个数, 这与数列的前有限项无关。

命题 2.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1 (q < 1)$$



证明

命题 2.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$



证明

命题 2.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$



证明

命题 2.5

设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$



证明

定义 2.4 (无穷小量的定义)

以零为极限的变量称为无穷小量。



定理 2.2 (数列极限的有界性)

若 $\{x_n\}$ 的极限存在, 则 $\{x_n\}$ 有界。



定理 2.3 (数列极限的保序性)

存在两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \quad \text{且} \quad a < b$$

则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $x_n < y_n$ 。



证明

定理 2.4 (数列极限的四则运算)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b} (b \neq 0)$



证明

命题 2.6

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - (-2)^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}$$



证明

命题 2.7

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$



证明

命题 2.8

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$$



证明

命题 2.9

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$



证明

有限个

命题 2.10

设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$



证明

命题 2.11

若 $\{x_n\}$ 是无穷小量, $\{y_n\}$ 有界 ($|y_n| < 0$), 则 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷小量。



证明

2.2 无穷大量

定义 2.5 (无穷大量)

对于一个数列 $\{x_n\}$, 若对于任意给定的 $G > 0$, 可以找到正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $|x_n| > G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

若对于该数列 $\{x_n\}$, $|x_n| > G$ 可以恒表示为 $x_n > G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是正无穷大量, 记为 $+\infty$ 。

若对于该数列 $\{x_n\}$, $|x_n| > G$ 可以恒表示为 $x_n < -G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是负无穷大量, 记为 $-\infty$ 。



命题 2.12

设 $|q| > 1$, 证明 $\{q^n\}$ 是无穷大量。



证明

命题 2.13

证明 $\{\frac{n^2-1}{n+5}\}$ 是无穷大量。



证明

引理 2.1

若 $x_n \neq 0$, 则 $\{x_n\}$ 是无穷大量的充要条件是 $\{\frac{1}{x_n}\}$ 是无穷小量。



证明

引理 2.2

设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\{y_n\}$ 满足 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N_0$, 有 $|y_n| \geq \delta > 0$, 则 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷大量。



证明

引理 2.3

设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\{y_n\}$ 极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, 则 $\{x_n y_n\}$ 与 $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ 都是无穷大量。



证明

命题 2.14

$\{\frac{n}{\sin(n)}\}$ 和 $\{n \cdot \arctan(n)\}$ 是无穷大量。



证明

命题 2.15

讨论极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_l}$$

其中 $a_0, b_0 \neq 0, k, l \in \mathbb{Z}^+$



证明 从分子上提出 n^k , 分母上提出 n^l 次

2.2.1 无穷大的运算

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则记 $\{x_n\}$ 为“ $+\infty$ ”。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 则记 $\{y_n\}$ 为“ $+\infty$ ”。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, 则记 $\{z_n\}$ 为“ $+\infty$ ”。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$, 则记 $\{w_n\}$ 为“0”。

定理 2.5

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
3. $(+\infty) \pm (\text{有界量}) = +\infty$
4. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
5. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$



定义 2.6

1. $(+\infty) - (+\infty) = ?$
2. $(+\infty) + (-\infty) = ?$
3. $0 \cdot \infty = ?$
4. $\frac{0}{0} = ?$
5. $\frac{\infty}{\infty} = ?$
6. ...

上述情况称为“待定型”



定义 2.7

若数列 $\{x_n\}$, 有 $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 则称数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 记为 $\{x_n\} \uparrow$ 。若有 $x_n < x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 严格单调增加, 记为 $\{x_n\}$ 严格 \uparrow 。

若数列 $\{x_n\}$, 有 $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 则称数列 $\{x_n\}$ 单调减少, 记为 $\{x_n\} \downarrow$ 。若有 $x_n > x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 严格单调减少, 记为 $\{x_n\}$ 严格 \downarrow 。



定理 2.6 (Stolz定理)

假设 $\{y_n\}$ 严格单调增加数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ 。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a (a \text{ 为有限数, } +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$$



证明

命题 2.16

用Stolz定理证明, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$



证明

命题 2.17

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$



证明

命题 2.18

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2}$$



证明

2.3 收敛准则

收敛数列一定有界，但是收敛数列不一定有界。

1. 那么有界数列加什么条件收敛？
2. 有界数列不加条件的情况下，可以得到什么弱一些的结论？

定理 2.7

单调有界数列必定收敛。



证明 不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加，有上界。

定理意义：从定义证明时，我们需要知道极限 a ，相当于验证极限为 a ，而当极限未知时，则无法证明。而定理则从数列本身的性质出发，不需要知道极限是多少。

命题 2.19

设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$ ，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限。



证明

命题 2.20

设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), n = 1, 2, 3, \dots$ ，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限。



证明

无穷小量的趋近速度。

命题 2.21

对于上题的 $\{x_n\}$ ，求极限， $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$



证明

命题 2.22

$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$ ，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限。



证明

兔子

命题 2.23 (Fibonacci数列)

$\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列，令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ，讨论 $\{b_n\}$ 数列。



证明

接下来我们来研究 π 和 e

关于 π :

命题 2.24

证明 $\left\{L_n = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 收敛。求圆的面积公式。



证明

关于 e :

命题 2.25

考虑两个数列:

$$\left\{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad \text{和} \quad \left\{y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

证明这两个数列极限存在且相等。



证明

定义 $\ln = \log_e$ 为自然对数, e 自然对数的底数。

命题 2.26

令 $a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$, ($p > 0$), 证明 $\{a_n\}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散。



证明

$p = 1$ 时, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 为调和级数, 它是正无穷大量, 我们想知道它趋近无限的速度。

命题 2.27

证明

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

收敛。



证明 极限记为 γ , 称为欧拉常熟。 $\gamma > 0.577215$

命题 2.28

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$$



证明 除了夹逼准则, 还能用上一个数列相减计算。

命题 2.29

$$d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$



证明

以上是与 e 相关的数列

定义 2.8 (闭区间套)

有一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足:

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \dots$
2. $b_n - a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

则称这样的一列闭区间是一个闭区间套。

**定理 2.8 (闭区间套定理)**

假如 $[a_n, b_n]$ 是一个闭区间套, 则存在唯一的实数 ξ , 它属于一切闭区间 $[a_n, b_n]$ 。且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$ 。



证明

定理 2.9

实数集不可列。



证明 反证法

子列

定义 2.9

存在一个数列 $\{x_n\}$, 取一列严格单调增加的正整数 $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$, 则 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$, 称为 $\{x_n\}$ 的一个子列, 记为 $\{x_{n_k}\}$, k 代表子列中的第 k 项, 又恰好是 $\{x_n\}$ 中的第 n_k 项。



其中 $n_k \geq k, \forall k, n_j > n_k, \forall j > k$ 。

定理 2.10

设 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则它的任何一个子列也收敛于 a 。即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$



证明

可以用于证明数列不收敛。

命题 2.30

若 $\{x_n\}$ 存在两个子列收敛于不同的极限, 则 $\{x_n\}$ 发散。



证明

定理 2.11 (Bolzano-Weierstrass 定理)

有界数列必有收敛子列。



证明

定理 2.12

假设 $\{x_n\}$ 是无界数列, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 它是无穷大量。



证明

Cauchy 收敛原理

定义 2.10

$\{x_n\}$ 满足:

$$\forall \xi > 0, \exists N, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \xi$$

则称 $\{x_n\}$ 为基本数列。



也可以是 $\forall m > n > N$

证明

命题 2.31

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

是否为基本数列。



证明

命题 2.32

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

是否为基本数列。



证明

定理 2.13 (Cauchy收敛原理)

$\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 是基本数列。



证明 必要性:

充分性:

命题 2.33

$\{x_n\}$ 满足压缩性条件, 即

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k |x_n - x_{n-1}|, 0 < k < 1, \forall n = 2, 3, \dots$$

则 $\{x_n\}$ 是收敛的。



证明

实数系的基本定理

1. 确界存在定理(实数系的连续性定理)
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Bolzano-Weierstrass定理
5. Cauchy收敛原理(实数系完备性)

以上都是在实数系中考虑, 实数系上的基本数列必然是收敛数列, 因此Cauchy收敛原理也被称为实数系的完备性定理。实数系有完备性, 有理数不具备完备性。例如 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 是有理数列, 但是它的极限是无理数。以上五个定理等价。我们需要证明这五个定理等价。从Cauchy收敛原理推出闭区间套定理, 再从闭区间套定理推出确界存在定理。

定理 2.14

实数系的完备性等价于实数系的连续性。



证明 (1)Cauchy收敛原理 \Rightarrow 闭区间套定理。

(2)闭区间套定理 \Rightarrow 确界存在定理。

第3章 函数极限与连续函数

函数极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

定义 3.1

$y = f(x)$ 在 $O(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ 上有定义, 如果存在一个数 A , 使得对任意给定的 $\epsilon > 0$, 可以找到 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 是 $f(x)$ 在 x_0 点的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或者 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$ 。如果不存在满足上述性质的 A , 则称 $f(x)$ 在 x_0 点极限不存在。



$O(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ 称为去心邻域。