



数学分析

作者: hapo

时间: January 4, 2023



目录

1	集合与映射	2
2	实数的完备性	3
2.1	数列极限	4
2.2	无穷大量	8
2.2.1	无穷大的运算	9
2.3	收敛准则	11
3	函数极限与连续函数	19
3.1	函数极限和数列极限的关系	21
3.2	单侧极限	22
3.3	函数极限定义的扩充	22
3.4	连续函数	24
3.5	连续函数的四则运算	26
3.6	不连续点的类型	26
3.6.1	第一类不连续点	26
3.6.2	第二类不连续点	27
3.6.3	第三类不连续点	27
3.7	反函数	28
3.8	无穷小量与无穷大量的阶	29
3.9	闭区间上的连续函数	33
3.9.1	一致连续概念	34
4	微分	36
4.1	微分和导数	36
4.1.1	微分	36
4.1.2	导数	36
4.2	导数的意义与性质	37
4.3	导数四则运算与反函数求导法则	38

记录本书的原因是因为我觉得自己的数学分析实在太烂了。因此我决定使用费曼学习法。这是一个链式反应，在我学习随机过程的时候，我发现自己的概率论太差了，而当我学习概率论的时候，我又发现我的测度论太差了，而我学习测度论的时候，我最终发现，我差的是数学分析。而这个最初始的问题是我并没有系统地学过数学分析。而在学习数学分析的过程中，我发现我对好多概念并不明晰，这使得学习的进度缓慢，并且经常容易在概念上卡壳，而卡壳结束后又很快忘记。因此，为了能够更好地记住，我决定使用费曼学习法。在此，我记录下我学习数学分析的过程。

第 1 章 集合与映射

定义 1.1 (集合)

是具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集的总体，其中的对象称为集合的元素。



集合通常记为 A, B, C, X, Y

元素通常记为 s, t, a, b, x, y

x 是集合 S 的元素, 记为 $x \in S$

第2章 实数的完备性

内容提要

□ 有理数的定义 2.2

□ 数列极限的保序性逆命题 2.1

□ Bolzano-Weierstrass定理 2.13

在本章中，我们将介绍实数的完备性。在介绍实数之前，我们需要将实数定义或者说引入。而对于实数的定义是有很多的，而我在此介绍无穷十进制小数表示和戴德金(Dedekind)分割。这部分我将结合陈纪修教授的教材和Ayumu的讲义。

在引入实数之前，我们需要先介绍有理数，而在介绍有理数之前，我们需要规定一些常用集合的记号。而介绍常用集合，则需要先介绍集合(set)，在此我们并不介绍集合，我们暂时默认我们已经知道了集合的概念，将来我们会对该部分内容进行扩充。现在让我们来列举一些常用的集合。

定义 2.1 (常用集合表示)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{n | n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$$

在定义了以上的集合表示之后，我们就能以上的符号来表示有理数：

定义 2.2 (有理数)

若一个数 x 可以表示成 $\frac{q}{p}$ 的形式，其中 $q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$ ，则称 x 为有理数(rational number)。而由有理数组成的集合称为有理数集，有理数集常用 \mathbb{Q} 表示，其可以表示为：

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+\}$$

在这里，我们可以看到 p 只需要属于 \mathbb{Z}^+ ，这是因为若 x 为负的，我们总可以规定负号出现在分子上。

有理数对加减乘除都封闭，并且我们在有理数上定义了大小关系，即有理数也是良序的。但是它并不能满足研究所需。例如，存在长度无法用有理数表示。并且有理数之间存在“空隙”，即有理数不连续。而在我们之后的研究中，我们往往需要研究连续性，因此我们需要对有理数进行扩充。在这之前，我们先来证明确实有一些数无法用有理数表示。

命题 2.1

$\sqrt{2}$ 不是有理数。

证明 我们用反证法。假设 $\sqrt{2}$ 为有理数，那么存在 $q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+, p, q$ 互质，使得 $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ ，即 $q^2 = 2p^2$ 。因为 q^2 可以被2整除，即 q^2 为偶数，则 q 为偶数。那么 q 可以表示为 $q = 2m, m \in \mathbb{Z}$ 。代入上式中，得 $p^2 = 2m^2$ ，即 p 也为偶数。这与互质矛盾，因此假设不成立， $\sqrt{2}$ 不是有理数。

命题 2.2

若 n 不是完全平方数，则 \sqrt{n} 不是有理数。

证明

除了有些数无法用有理数表示外，有的函数在实数域和有理数域上的表现完全不一样，比如狄利克雷(dirichlet)函数：

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是有理数} \\ 0 & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

定理 2.1 (确界存在定理—实数系连续性定理)

非空有上界的数集必有上确界, 非空有下界的数集必有下确界。



证明

2.1 数列极限

定义 2.3 (数列极限的定义)

对于数列 $\{a_n\}$, 存在一个实常数 a , 对 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \epsilon$ 成立, 则称 $\{a_n\}$ 收敛 (convergent) 于 a 或者 $\{a_n\}$ 的极限 (limit) 为 a , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{或者} \quad a_n \rightarrow a (n \rightarrow +\infty)$$

若不存在实数 a , 满足上述性质, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散 (divergent)。



在这里定义邻域的概念: a 的 ϵ 邻域 $O(a, \epsilon)$ 为: $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 。因此数列极限的定义也可以描述为: 当 $n > N$ 时, a_n 落在 a 的 ϵ 邻域内。

并且, 一个数列的极限还有以下的一些性质。首先, 一个数列是否收敛, 收敛的话, 收敛于哪个数, 这与数列的前有限项无关。这是因为, 假如数列收敛于 A , 我对前 K 项做了修改, 那么 $\forall \epsilon > 0$, 可以取 $N' = \max\{K, N\}$, 此时 $|x_n - A| < \epsilon$, 即极限依旧为 A 。又比如极限不存在时, 则 $\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N, |x_n - A| > \epsilon$ 。此时, $\forall N > K, \exists n > N, |x_n - A| > \epsilon$, 那么 $N < K$ 时也成立。因此在求极限的不等式时, 可以从选定的一个 N 开始, 有时候会使得不等式的求解方便。

此外, ϵ 还可以限定为小于一定值, 在该限定下证明不等式成立。这是因为当 $\epsilon \leq c$ 时候, 存在了 N , 使得 $n > N$ 时成立, 那么当 $\epsilon > c$ 时, 该 N 也能使得 $n > N$ 时成立。

定义 2.4 (无穷小量的定义)

以零为极限的变量称为无穷小量。

**命题 2.3**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+3} = 1$$



证明 令:

$$\left| \frac{n}{n+3} - 1 \right| = \frac{3}{n+3} < \frac{3}{n} < \epsilon$$

因此, 当 $N = \left\lceil \frac{3}{\epsilon} \right\rceil + 1$ 时, $\left| \frac{n}{n+3} - 1 \right| < \epsilon$

命题 2.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (0 < |q| < 1)$$



证明 因为 $0 < |q| < 1$, 则 $|q^n| = |q|^n < \epsilon$, 则:

$$n > \frac{\lg(\epsilon)}{\lg(|q|)}$$

因为 $N \in \mathbb{N}^+$, 所以取 $N = \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{\lg(\epsilon)}{\lg(|q|)} \right\rceil \right\}$, 当 $n > N$ 时, $|q^n - 0| < \epsilon$, 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (0 < |q| < 1)$$

命题 2.5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 1)$$

证明 因为 $a > 1$, 所以 $|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1$:

$$\sqrt[n]{a} - 1 = \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots a} - 1 < \frac{(n-1) + a}{n} - 1 < \frac{a-1}{n} < \frac{a}{n} < \epsilon$$

所以取 $N = \left[\frac{a}{\epsilon}\right] + 1$ 时, $\forall n > N$, $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

陈老是这样证明的:

令 $y_n = \sqrt[n]{a} - 1$, 则:

$$a = (1 + y_n)^n = 1 + C_n^1 y_n + C_n^2 y_n^2 + \cdots$$

则:

$$1 + ny_n < a$$

即

$$y_n < \frac{a-1}{n} < \epsilon$$

则取 $N = \left[\frac{a-1}{\epsilon}\right] + 1$, $\forall n > N$, $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

注: 对于 $\sqrt[n]{1+x}$ 利用均值不等式可以得到一个有意思的不等式:

$$\sqrt[n]{1+x} < 1 + \frac{x}{n}$$

命题 2.6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

证明

命题 2.7

设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

证明

定理 2.2 (数列极限的唯一性)

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

则

$$a = b$$

证明

定义 2.5

1. 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立 $x_n \leq M$, 则称 M 是 $\{x_n\}$ 的一个上界, 或称 $\{x_n\}$ 有上界。

2. 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立 $x_n \geq m$, 则称 m 是 $\{x_n\}$ 的一个下界, 或称 $\{x_n\}$ 有下界。

$\{x_n\}$ 既有上界又有下界, 则称 $\{x_n\}$ 有界。

$\{x_n\}$ 有界的另一个定义: $\exists X \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{N}^+$, 成立 $|x_n| \leq X$

定理 2.3 (数列极限的有界性)

若 $\{x_n\}$ 的极限存在, 则 $\{x_n\}$ 有界。



证明

定理 2.4 (数列极限的保序性)

存在两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \quad \text{且} \quad a < b$$

则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $x_n < y_n$ 。



证明

引理 2.1 (数列极限的保序性逆命题)

对于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 若 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, x_n \leq y_n$, 则 $a \leq b$ 。



证明

引理 2.2

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n > \frac{b}{2} > 0$ 。
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b < 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n < \frac{b}{2} < 0$ 。



证明 利用数列极限的保序性证明。当 $b > 0$ 时, 取 $\{x_n = \frac{b}{2}\}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{2} < b$, 由数列极限的保序性可知, $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $y_n > x_n = \frac{b}{2}$, 证毕。

同理可证明 $b < 0$ 的情况。

以上推论可以合起来写为:

引理 2.3

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n| > \frac{|b|}{2} > 0$ 。



证明 除了上一个推论那样分开来证明, 还可以如下证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - b| < \epsilon$ 。

由三角不等式得:

$$|y_n - b| > ||y_n| - |b||$$

即:

$$||y_n| - |b|| < |y_n - b| < \epsilon$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = |b|$ 。之后的证明同上。

定理 2.5 (数列极限的夹逼性定理)

对于数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, 若 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 成立 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$



证明 $\forall \epsilon, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, |x_n - a| < \epsilon$, 即 $x_n - a > -\epsilon$ 。

同理, $\forall \epsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, |y_n - a| < \epsilon$, 即 $z_n - a < \epsilon$ 。

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则:

$$-\epsilon < x_n - a < y_n - a < z_n - a < \epsilon$$

即:

$$-\epsilon < y_n - a < \epsilon$$

即:

$$|y_n - a| < \epsilon$$

总结起来即为: $\forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - a| < \epsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, 证毕。

命题 2.8

求:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

定理 2.6 (数列极限的四则运算)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b} (b \neq 0)$

证明

命题 2.9

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - (-2)^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}$$

证明

命题 2.10

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

证明

命题 2.11

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \right)$$

证明

命题 2.12

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

证明

有限个

命题 2.13

设 $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$

证明

命题 2.14

若 $\{x_n\}$ 是无穷小量, $\{y_n\}$ 有界($|y_n| < 0$), 则 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷小量。



证明

2.2 无穷大量

定义 2.6 (无穷大量)

对于一个数列 $\{x_n\}$, 若对于任意给定的 $G > 0$, 可以找到正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $|x_n| > G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

若对于该数列 $\{x_n\}$, $|x_n| > G$ 可以恒表示为 $x_n > G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是正无穷大量, 记为 $+\infty$ 。

若对于该数列 $\{x_n\}$, $|x_n| > G$ 可以恒表示为 $x_n < -G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是负无穷大量, 记为 $-\infty$ 。

**命题 2.15**

设 $|q| > 1$, 证明 $\{q^n\}$ 是无穷大量。



证明

命题 2.16

证明 $\{\frac{n^2-1}{n+5}\}$ 是无穷大量。



证明

引理 2.4

若 $x_n \neq 0$, 则 $\{x_n\}$ 是无穷大量的充要条件是 $\{\frac{1}{x_n}\}$ 是无穷小量。



证明

引理 2.5

设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\{y_n\}$ 满足 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N_0$, 有 $|y_n| \geq \delta > 0$, 则 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷大量。



证明

引理 2.6

设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\{y_n\}$ 极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, 则 $\{x_n y_n\}$ 与 $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ 都是无穷大量。



证明

命题 2.17

$\{\frac{n}{\sin(n)}\}$ 和 $\{n \cdot \arctan(n)\}$ 是无穷大量。



证明

命题 2.18

讨论极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_l}$$

其中 $a_0, b_0 \neq 0, k, l \in \mathbb{Z}^+$ **证明** 从分子上提出 n^k , 分母上提出 n^l 次

2.2.1 无穷大的运算

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则记 $\{x_n\}$ 为“ $+\infty$ ”。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 则记 $\{y_n\}$ 为“ $+\infty$ ”。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, 则记 $\{z_n\}$ 为“ $+\infty$ ”。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$, 则记 $\{w_n\}$ 为“0”。

定理 2.7

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
3. $(+\infty) \pm (\text{有界量}) = +\infty$
4. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
5. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$



定义 2.7

1. $(+\infty) - (+\infty) = ?$
2. $(+\infty) + (-\infty) = ?$
3. $0 \cdot \infty = ?$
4. $\frac{0}{0} = ?$
5. $\frac{\infty}{\infty} = ?$
6. ...

上述情况称为“待定型”



定义 2.8

若数列 $\{x_n\}$, 有 $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 则称数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 记为 $\{x_n\} \uparrow$ 。若有 $x_n < x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 严格单调增加, 记为 $\{x_n\}$ 严格 \uparrow 。若数列 $\{x_n\}$, 有 $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 则称数列 $\{x_n\}$ 单调减少, 记为 $\{x_n\} \downarrow$ 。若有 $x_n > x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 严格单调减少, 记为 $\{x_n\}$ 严格 \downarrow 。

定理 2.8 (Stolz定理)

假设 $\{y_n\}$ 严格单调增加数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ 。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a (a \text{ 为有限数, } +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$$

**证明** 因为陈老的证明简介明了, 我们先写陈老的证明:

当 $a = 0$ 时: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 则 $\exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, y_n > 0$ 。

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right| < \frac{\epsilon}{2}$ 。

取 $N_3 = \max\{N_1, N_2\}, \forall n > N_3$:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2} |y_n - y_{n-1}|$$

又因为 $\{y_n\}$ 严格单调增加, 则上式可以化为:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2} (y_n - y_{n-1})$$

根据三角不等式:

$$|x_n - x_{N_3}| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{N_3+1} - x_{N_3}|$$

根据上两式, 我们可以得出:

$$|x_n - x_{N_3}| < \frac{\epsilon}{2} (y_n - y_{N_3})$$

两边同除以 y_n 得:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{N_3}}{y_n} \right| < \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{y_{N_3}}{y_n} \right) < \frac{\epsilon}{2}$$

则根据三角不等式:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \frac{\epsilon}{2} + \left| \frac{x_{N_3}}{y_n} \right|$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, \exists N_4 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_4, y_n > \frac{2|x_{N_3}|}{\epsilon}$

则可以取 $N = \max\{N_3, N_4\}, \forall n > N_4$:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \epsilon$$

则对于 $a = 0$ 时:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

当 $a \neq 0$ 时:

取 $z_n = x_n - ay_n$, 则

$$\frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a$$

因此:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \right) = 0$$

根据以上证明的 $a = 0$ 的情况可知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{y_n} = 0$$

又因为:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{z_n}{y_n} + a$$

所以当 $a \neq 0$ 时:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$$

当 $a = +\infty$ 时:

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$, 则 $\exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$, 即:

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1}$$

因为 $\{y_n\}$ 严格单调增加, 则

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

即 $\{x_n\}$ 严格单调增加。

同时, 同其他情况的证明, 我们有:

$$x_n - x_N > y_n - y_N$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 则 $\forall G > \max\{0, y_N - x_N\}$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_2$, $y_n > 2G$ 。

则

$$x_n > y_n - y_N + x_N > G$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, $\{x_n\}$ 趋向于 $+\infty$ 。

此时考虑 $\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$ (引理 2.4)。根据 $a = 0$ 的情况得:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$, 即 $\forall G > 0$, $\exists N_3 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_3$, $\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > G$ 。

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 则 $\exists N_4 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_4$, $y_n > 0$, 同理 $\exists N_5 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_5$, $x_n > 0$ 。

则当 $n > \max\{N_4, N_5\}$ 时, $\frac{x_n}{y_n} > 0$ 。

即 $\forall G > 0$, $\exists N = \max\{N_3, N_4, N_5\} \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $\frac{x_n}{y_n} > G$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$ 。 $a = +\infty$ 时也成立。同理, 也能证明 $a = -\infty$ 的情况。

现在用定义证明:

当 a 为有限数时:

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_1$, $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \right| < \frac{\epsilon}{2}$ 。

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 则 $\exists N_2 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_2$, $y_n > 0$ 。

则 $\forall n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$, 结合三角不等式, 我们有:

$$\frac{x_n}{y_n} - a < \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{y_{N_3}}{y_n} \right) + \frac{x_{N_3} - ay_{N_3}}{y_n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{x_{N_3} - ay_{N_3}}{y_n}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{N_3} - ay_{N_3}}{y_n} = 0$, 即 $\exists N_4 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_4$, $\left| \frac{x_{N_3} - ay_{N_3}}{y_n} \right| < \frac{\epsilon}{2}$ 。

即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_5 = \max\{N_3, N_4\}$, $\forall n > N_5$, $\frac{x_n}{y_n} - a < \epsilon$ 。

同理可以证明: $\forall n > N_5$, $\frac{x_n}{y_n} - a > -\epsilon$ 。因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$ 。

命题 2.19

用 Stolz 定理证明, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

证明

命题 2.20

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

证明

命题 2.21

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2}$$

证明

2.3 收敛准则

收敛数列一定有界, 但是收敛数列不一定有界。

1. 那么有界数列加什么条件收敛?
2. 有界数列不加条件的情况下, 可以得到什么弱一些的结论?

定理 2.9

单调有界数列必定收敛。



证明 不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加, 有上界。

定理意义: 从定义证明时, 我们需要知道极限 a , 相当于验证极限为 a , 而当极限未知时, 则无法证明。而定理则从数列本身的性质出发, 不需要知道极限是多少。

引理 2.7

若数列 $\{x_n\}$ 从第 N 项之后开始单调有界, 则数列 $\{x_n\}$ 依旧收敛。



证明 考虑 $n \geq N$ 后的数组成的数列, 设 $n_1 = n - N + 1$, 则 $\{x_{n_1}\}$ 单调有界。由于 $\{x_{n_1}\} (n_1 \geq 1)$ 单调有界, 则 $\{x_{n_1}\} (n_1 \geq 1)$ 收敛。即 $\exists a, \forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n_1 > N_1$, 有 $|x_{n_1} - a| < \epsilon$ 。那么我们可以取 $N_2 = N_1 + N - 1$, 此时 $\forall \epsilon, \exists N_2 = N_1 + N - 1, \forall n > N_2$, 有 $|x_n - a| < \epsilon$, 即数列 $\{x_n\}$ 极限存在。

命题 2.22

设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限。



证明

命题 2.23

设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), n = 1, 2, 3, \dots$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限。



证明

无穷小量的趋近速度。

命题 2.24

对于上题的 $\{x_n\}$, 求极限, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$



证明

命题 2.25

$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限。



证明

兔子

命题 2.26 (Fibonacci 数列)

$\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列, 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 讨论 $\{b_n\}$ 数列。



证明

接下来我们来研究 π 和 e

关于 π :

命题 2.27

证明 $\left\{L_n = n \sin \left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 收敛。求圆的面积公式。



证明 取 $t = \frac{180^\circ}{n(n+1)}$, 当 $n \geq 3$ 时, $nt \leq 45^\circ$ 。且由三角公式得:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]\tan(t)}$$

由于 $nt \leq 45^\circ$, 则 $\tan(kt) < 1 (k < n)$, 因此:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]\tan(t)} > \tan[(n-1)t] + \tan(t)$$

则:

$$\begin{aligned}\tan(nt) &> \tan[(n-1)t] + \tan(t) \\ \tan[(n-1)t] &> \tan[(n-2)t] + \tan(t) \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

则:

$$\tan(nt) > n \tan(t)$$

现在来考虑 $\sin[(n+1)t]$:

$$\begin{aligned}\sin[(n+1)t] &= \sin(nt) \cos(t) + \cos(nt) \sin(t) \\ &= \sin(nt) \cos(t) \left[1 + \frac{\tan(t)}{\tan(nt)} \right] \\ &< \sin(nt) \cos(t) \left[1 + \frac{1}{n} \right] \\ &< \sin(nt) \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

即:

$$n \sin[(n+1)t] < (n+1) \sin(nt)$$

将 $t = \frac{180^\circ}{n(n+1)}$ 代入得:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < (n+1) \sin\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right)$$

即该数列单调增加。

考虑到单位圆的面积:

$$S' > n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

并且单位圆的面积小于外接正方形的面积, 即:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < S' < 4$$

即:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < \frac{4}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

因为 $n \geq 3$, 所以:

$$n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 8$$

因此数列 $\left\{L_n = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 单调有界, 则该数列极限存在。

现在定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \pi$ 。

再来考虑单位圆的面积 S' , 设内接正多边形的面积为 S_1 , 外接正多边形的面积为 S_2 , 则 $S_1(n) < S' < S_2(n)$ 。

内接正多边形的面积为:

$$S_1(n) = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

外接正多边形的面积为:

$$S_2(n) = n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = n \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

并且根据数列极限的四则运算有:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_1(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \pi \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_2(n) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} = \pi\end{aligned}$$

则根据夹逼性原理得:

$$S' = \pi$$

其中, 对于外接正多边形的面积, 考虑:

$$\begin{aligned}(n+1) \tan(nt) - n \tan[(n+1)t] &= (n+1) \frac{\sin(nt)}{\cos(nt)} - n \frac{\sin[(n+1)t]}{\cos[(n+1)t]} \\ &= \frac{(n+1) \sin(nt) \cos[(n+1)t] - n \sin[(n+1)t] \cos(nt)}{\cos(nt) \cos[(n+1)t]} \\ &= \frac{\sin(nt) \cos[(n+1)t] - n \sin(t)}{\cos(nt) \cos[(n+1)t]} \\ &= \frac{\sin[(2n+1)t] - \sin(t) - 2n \sin(t)}{2 \cos(nt) \cos[(n+1)t]} \\ &= \frac{\sin[(2n+1)t] - (2n+1) \sin(t)}{2 \cos(nt) \cos[(n+1)t]}\end{aligned}$$

并且当 $n \geq 3$ 时, 有:

$$\begin{aligned}\sin[(2n+1)t] &= \sin(2nt) \cos(t) + \cos(2nt) \sin(t) < \sin(2nt) + \sin(t) \\ \sin(2nt) &= \sin[(2n-1)t] \cos(t) + \cos[(2n-1)t] \sin(t) < \sin[(2n-1)t] + \sin(t) \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

因此:

$$\sin[(2n+1)t] < (2n+1) \sin(t)$$

因此:

$$(n+1) \tan(nt) < n \tan[(n+1)t]$$

即:

$$(n+1) \tan\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right) < n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

因此数列 $\left\{n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 单调递减。因为外接正多边形面积必然大于内接正方形, 因此:

$$n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) > 2$$

因此数列 $\left\{n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$ 单调有界, 则该数列极限存在。

关于e:

命题 2.28

考虑两个数列:

$$\left\{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad \text{和} \quad \left\{y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

证明这两个数列极限存在且相等。



证明

定义 $\ln = \log_e$ 为自然对数, e 自然对数的底数。

命题 2.29

令 $a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$, ($p > 0$), 证明 $\{a_n\}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散。

**证明**

$p = 1$ 时, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 为调和级数, 它是正无穷大量, 我们想知道它趋近无限的速度。

命题 2.30**证明**

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

收敛。

**证明** 极限记为 γ , 称为欧拉常熟。 $\gamma \approx 0.577215$ **命题 2.31****证明**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$$

**证明** 除了夹逼准则, 还能用上一个数列相减计算。**命题 2.32**

$$d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

**证明**

以上是与 e 相关的数列

定义 2.9 (闭区间套)

有一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足:

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \cdots$
2. $b_n - a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

则称这样的一列闭区间是一个闭区间套。

**定理 2.10 (闭区间套定理)**

假如 $[a_n, b_n]$ 是一个闭区间套, 则存在唯一的实数 ξ , 它属于一切闭区间 $[a_n, b_n]$ 。且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$ 。

**证明****定理 2.11**

实数集不可列。

**证明** 反证法

子列

定义 2.10

存在一个数列 $\{x_n\}$, 取一系列严格单调增加的正整数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$, 则 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$, 称为 $\{x_n\}$ 的一个子列, 记为 $\{x_{n_k}\}$, k 代表子列中的第 k 项, 又恰好是 $\{x_n\}$ 中的第 n_k 项。



其中 $n_k \geq k, \forall k, n_j > n_k, \forall j > k$ 。

定理 2.12

设 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则它的任何一个子列也收敛于 a 。即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

**证明**

可以用于证明数列不收敛。

命题 2.33

若 $\{x_n\}$ 存在两个子列收敛于不同的极限, 则 $\{x_n\}$ 发散。

**证明****定理 2.13 (Bolzano-Weierstrass定理)**

有界数列必有收敛子列。



证明 设数列为 $\{x_n\}$, 因为数列有界, 所以 $\forall n > 0$, 存在 $a \leq x_n \leq b$, 则取 $[a_1, b_1] = [a, b]$ 。

将 $[a_1, b_1]$ 分为两个闭区间, 分别为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, 其中至少有一个区间包含无穷多个数列的元素, 因为若两个区间都有有限个数列元素, 则数列 $\{x_n\}$ 的元素有限。那么我们可以取包含无穷多个数列元素的区间为 $[a_2, b_2]$ 。

同理, 我们可以取出 $[a_3, b_3], [a_4, b_4], \cdots$ 。每一个区间中都包含无穷多个数列元素。

对于这些区间, $\forall n > 0, (1). [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], (2). \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$, 则这些闭区间组成了一个闭区间套。根据闭区间套定理, 存在唯一的实数 γ 属于一切闭区间 $[a_n, b_n]$ 。

则我们可以这样构造子列:

从 $[a_1, b_1]$ 中取 x_{n_1} , 使得 $n_1 > 0$, 这必然可以实现, 因为 $[a_1, b_1]$ 中有无限多个数列元素。

从 $[a_2, b_2]$ 中取 x_{n_2} , 使得 $n_2 > n_1$, 这必然可以实现, 因为 $[a_2, b_2]$ 中有无限多个数列元素, 即 $\forall n_1, \exists n_2 > n_1$ 。

从 $[a_3, b_3]$ 中取 x_{n_3} , 使得 $n_3 > n_2$, 这必然可以实现, 因为 $[a_3, b_3]$ 中有无限多个数列元素, 即 $\forall n_2, \exists n_3 > n_2$ 。

.....

对于子列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 取 $K = \max \{ [\log_2 (\frac{b-a}{\epsilon})] + 2, 1 \}$, $\forall k > K, b_k - a_k < \epsilon$, 同时 $x_{n_k} \in [a_k, b_k], \gamma \in [a_k, b_k]$, 则 $\forall k > K, |x_{n_k} - \gamma| < b_k - a_k < \epsilon$ 。

即 $\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+, \forall k > K, |x_{n_k} - \gamma| < \epsilon$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \gamma$, 该子列收敛于 γ 。

在陈老的视频是, 陈老是用夹逼性证明 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 γ , 证明如下:

$\forall k, a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \gamma$, 则根据夹逼性, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \gamma$ 。非常巧妙!

定理 2.14

假设 $\{x_n\}$ 是无界数列, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 它是无穷大量。

**证明**

Cauchy收敛原理

定义 2.11

$\{x_n\}$ 满足:

$$\forall \xi > 0, \exists N, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \xi$$

则称 $\{x_n\}$ 为基本数列。



也可以是 $\forall m > n > N$

证明

命题 2.34

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

是否为基本数列。



证明

命题 2.35

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

是否为基本数列。



证明

定理 2.15 (Cauchy收敛原理)

$\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 是基本数列。



证明 必要性: 即 $\{x_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \{x_n\}$ 是基本数列。

假设 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |x_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ 。

则对于 $\forall n, m > N, |x_n - x_m| < |x_n - A| + |x_m - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, 则 $\{x_n\}$ 为基本数列。

充分性: 即 $\{x_n\}$ 是基本数列 $\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛。

因为 $\{x_n\}$ 为基本数列, 即对于 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall m, n > N, |x_m - x_n| < \epsilon$ 。取 $m = N + 1$, 则 $\forall n > N, |x_{N+1} - x_n| < \epsilon$, 即 $x_{N+1} - \epsilon < x_n < x_{N+1} + \epsilon$ 。则我们可以取 $a = \min \{x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1} - \epsilon\}, b = \max \{x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1} + \epsilon\}$, 此时 $\forall n \in \mathbb{N}^+$:

$$a \leq x_n \leq b$$

即, $\{x_n\}$ 数列有界。

根据 Bolzano-Weierstrass 定理(定理 2.13), 则存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 A , 则 $\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+, \forall k > K, |x_{n_k} - A| < \frac{\epsilon}{2}$, 又由于 $\{x_n\}$ 为基本数列, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}^+, \forall m', n' > N', |x_{n_{m'}} - x_{n_{n'}}| < \frac{\epsilon}{2}$ 。

取 $N'' = \max \{N', n_K\}$, 因为 $\{x_{n_{k'}}\}$ 由无穷多项, 则必然存在 $n_{k'} > N'' \geq n_K$, 即 $k' > K$ 。此时, 因为 $n_{k'} > N'' \geq N'$, 则 $\forall n' > N', |x_{n'} - x_{n_{k'}}| < \frac{\epsilon}{2}$, 又因为 $k' > K$, 则 $|x_{n_{k'}} - A| < \frac{\epsilon}{2}$, 因此 $\forall n' > N', |x_{n'} - A| < |x_{n'} - x_{n_{k'}}| + |x_{n_{k'}} - A| < \epsilon$, 即数列 $\{x_n\}$ 收敛。

而陈老是这样证明充分性的:

取 $\epsilon = 1$, 因为 $\{x_n\}$ 是基本数列, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |x_n - x_{N+1}| < 1$, 因此 $|x_n| < |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < |x_{N+1}| + 1$ 。取 $M = \max \{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}$, 则:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, |x_n| \leq M$$

即 $\{x_n\}$ 有界。

根据Bolzano-Weierstrass定理(定理 2.13), 则存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于A。

根据 $\{x_n\}$ 是基本数列, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n, m > N_1, |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$, 现在固定 x_m , 取 x_n 为子列 $\{x_{n_k}\}$ 。现在考虑数列 $\{|x_{n_k} - x_m|\}$ 和数列 $\{\frac{\epsilon}{2}\}$, 取 $K = N_1$, 则 $\forall k > K$, 有 $n_k > n_K \geq K = N_1$, 即 $\forall k > K, |x_{n_k} - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$, 根据数列极限的保序性逆命题(推论 2.1), $|A - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ 。这对于 $\forall m > N_1$ 都成立, 即数列 $\{x_n\}$ 极限存在且为A。

命题 2.36

$\{x_n\}$ 满足压缩性条件, 即

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k |x_n - x_{n-1}|, 0 < k < 1, \forall n = 2, 3, \dots$$

则 $\{x_n\}$ 是收敛的。



证明

实数系的基本定理

1. 确界存在定理(实数系的连续性定理)
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Bolzano-Weierstrass定理
5. Cauchy收敛原理(实数系完备性)

以上都是在实数系中考虑, 实数系上的基本数列必然是收敛数列, 因此Cauchy收敛原理也被称为实数系的完备性定理。实数系有完备性, 有理数不具备完备性。例如 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 是有理数列, 但是它的极限是无理数。以上五个定理等价。我们需要证明这五个定理等价。从Cauchy收敛原理推出闭区间套定理, 再从闭区间套定理推出确界存在定理。

定理 2.16

实数系的完备性等价于实数系的连续性。



证明 (1)Cauchy收敛原理 \Rightarrow 闭区间套定理。

(2)闭区间套定理 \Rightarrow 确界存在定理。

第3章 函数极限与连续函数

函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

定义 3.1

$y = f(x)$ 在 $O(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ 上有定义, 如果存在一个数 A , 使得对任意给定的 $\epsilon > 0$, 可以找到 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 是 $f(x)$ 在 x_0 点的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或者 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$ 。如果不存在满足上述性质的 A , 则称 $f(x)$ 在 x_0 点极限不存在。



$O(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ 称为去心邻域。

命题 3.1

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$



证明

命题 3.2

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$



证明

命题 3.3

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$



证明

函数极限的性质

定理 3.1 (函数极限的唯一性)

设 A, B 都是 $f(x)$ 在 x_0 的极限, 则 $A = B$ 。



证明 证明类似证明数列极限的唯一性

定理 3.2 (函数极限的局部保序性)

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 x 有 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > g(x)$



证明 证明类似证明数列极限的保序性

引理 3.1

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, 则 $\exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta), |f(x)| > \frac{|A|}{2}$ 。



证明 请使用局部保序性证明

引理 3.2

假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 若 $\exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta)$, 有 $f(x) \geq g(x)$, 则 $A \geq B$



证明

定理 3.3 (函数极限的局部有界性)

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists \delta, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta), m \leq f(x) \leq M$, m, M 为固定实数。

若 $f(x)$ 在 x_0 有定义, 则在 x 满足 $|x - x_0| < \delta$ 的条件下, $\min\{m, f(x)\} \leq f(x) \leq \max\{M, f(x)\}$ 。



证明 请使用局部保序性证明

定理 3.4 (函数极限的夹逼性定理)

若 $\exists r > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < r)$, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$



证明

命题 3.4

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



证明 使用夹逼性证明。

再用数列逼近证明。

定理 3.5 (函数极限四则运算)

假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha A + \beta B$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$



证明

命题 3.5

求:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}$$

的极限。



证明

命题 3.6

求:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

的极限。



证明

3.1 函数极限和数列极限的关系

定理 3.6 (否定命题的分析表示)

$\{x_n\}$ 以 a 为极限: $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n - a| < \epsilon$ 。
 $\{x_n\}$ 不以 a 为极限: $\exists \epsilon > 0, \forall N, \exists n > N, |x_n - a| \geq \epsilon$



定理 3.7 (heine定理)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在的充分必要条件是: 对于任意的满足 $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的数列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛于 A 。



证明 证明必要性, 即证明:

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则对于任意的满足 $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的数列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛于 A 。

因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta)$, 成立 $|f(x) - A| < \epsilon$ 。

又因为对于 $\{x_n\}$, 有 $x_n \neq x_0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 即 $\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 成立 $0 < |x_n - x_0| < \delta$ 。

则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对于该 $\delta, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$, 且在该 δ 下有 $|f(x_n) - A| < \epsilon$ 。证明完毕。

证明充分性, 即证明:

若对于任意的满足 $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的数列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛于 A , 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

利用反证法, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$, 则 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x (0 < |x - x_0| < \delta)$, 使得 $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$

取 $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$, 则对于 ϵ_0 , 有:

$$\exists x_1 (0 < |x_1 - x_0| < 1), |f(x_1) - A| \geq \epsilon_0$$

$$\exists x_2 (0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}), |f(x_2) - A| \geq \epsilon_0$$

$$\exists x_3 (0 < |x_3 - x_0| < \frac{1}{3}), |f(x_3) - A| \geq \epsilon_0$$

.....

对于数列 $\{x_n\}$, 对于 $\epsilon_0, \forall n, |x_n - x_0| > \epsilon_0$ 恒成立。

即: $\exists \epsilon = \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N, |f(x_n) - A| > \epsilon$ 。则存在数列 $\{x_n\}$ 不收敛于 A 。这与条件矛盾, 则假设不成立。证明完毕。

命题 3.7

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处极限不存在。



证明

引理 3.3

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在并且有限(收敛)的充分必要条件是: 对任意满足 $x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛。



证明

3.2 单侧极限

定义 3.2

假设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0)$ 有定义, 如果存在 $B, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (-\delta < x - x_0 < 0)$, 成立 $|f(x) - B| < \epsilon$, 则称 B 是 $f(x)$ 在 x_0 的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B$ ($f(x) \rightarrow B (x \rightarrow x_0^-)$)。

类似地, 假如存在 $C, \exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < x - x_0 < \delta)$, 成立 $|f(x) - C| < \epsilon$, 则称 C 是 $f(x)$ 在 x_0 的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = C$ ($f(x) \rightarrow C (x \rightarrow x_0^+)$)。

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$



命题 3.8

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



证明

命题 3.9

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ 2 \cos(x^2) & x \geq 0 \end{cases}$$



3.3 函数极限定义的扩充

可以将自变量 x 的趋向扩充成以下六种:

1. $x \rightarrow x_0$
2. $x \rightarrow x_0^+$
3. $x \rightarrow x_0^-$
4. $x \rightarrow +\infty$
5. $x \rightarrow -\infty$
6. $x \rightarrow \infty$

而应变量 $f(x)$ 的趋向可以扩充成以下四种:

1. $f(x) \rightarrow A$
2. $f(x) \rightarrow +\infty$
3. $f(x) \rightarrow -\infty$
4. $x \rightarrow \infty$

现在加上对应的分析表述, 对于自变量 x :

1. $x \rightarrow x_0 : \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta)$
2. $x \rightarrow x_0^+ : \exists \delta > 0, \forall x (0 < x - x_0 < \delta)$
3. $x \rightarrow x_0^- : \exists \delta > 0, \forall x (-\delta < x - x_0 < 0)$
4. $x \rightarrow +\infty : \exists X > 0, \forall x (x > X)$
5. $x \rightarrow -\infty : \exists X > 0, \forall x (x < -X)$
6. $x \rightarrow \infty : \exists X > 0, \forall x (|x| > X)$

对于应变量 $f(x)$:

1. $f(x) \rightarrow A : \forall \epsilon > 0, \dots, |f(x) - A| < \epsilon$
2. $f(x) \rightarrow +\infty : \forall G > 0, \dots, f(x) > G$
3. $f(x) \rightarrow -\infty : \forall G > 0, \dots, f(x) < -G$
4. $x \rightarrow \infty : \forall G > 0, \dots, |f(x)| > G$

命题 3.10

写出:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$$

的分析表述。



证明

命题 3.11

写出:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

的分析表述。



证明

命题 3.12

写出:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

的分析表述。



证明

命题 3.13

证明:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



证明

命题 3.14

证明

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$



证明

我们讲了函数极限的性质和函数极限的四则运算。讲函数极限的性质的时候是对于收敛函数来讨论的。对于扩充后的函数极限则不一定成立, 特别对于 ∞ 。性质要排除 ∞ , 四则运算要排除待定型。

对于扩充后的heine定理应该如何书写: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 充分必要条件: 对任意的满足 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ 的数列 $\{x_n\}$, 成立 $\{f(x_n)\}$ 收敛于A。

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且有限的充分必要条件是: 对任意满足 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ 的数列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 收敛。

命题 3.15

设:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^k}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_j x^j} \quad (a_n, a_k \neq 0, b_m, b_j \neq 0)$$

考虑 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。



证明 $x \rightarrow \infty$ 的情况:

分三种情况讨论:

1. $n = m$:
2. $n > m$:
3. $n < m$:

$x \rightarrow 0$ 的情况:

分三种情况讨论:

1. $k = j$:
2. $k > j$:
3. $k < j$:

命题 3.16

证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$



证明 提示: 夹逼法。同时 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

函数极限的Cauchy收敛原理

回忆以下数列的情况: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 收敛 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \epsilon$ 。

在函数中, 我们做了推广, 并不是所有的推广都有Cauchy收敛原理。

对于函数发散时是没有Cauchy收敛原理的。

定理 3.8 (函数极限的Cauchy收敛原理)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在并且有限(收敛) $\iff \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \forall x', x'' > X, |f(x') - f(x'')| < \epsilon$



证明

3.4 连续函数

分析上讲, $f(x)$ 在 x_0 点连续: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow f(x_0)$ 。

定义 3.3

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域中有定义, 且成立

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续, x_0 是 $f(x)$ 的连续点。

符号表述: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (|x - x_0| < \delta), \text{成立 } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。



开区间情况:

定义 3.4

若 $f(x)$ 在 (a, b) 的每一点上都连续, 则称 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上连续。



命题 3.17

证明:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在 $(0, 1)$ 连续。**证明**

闭区间情况:

定义 3.5若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续。若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续。

符号表示:

左连续: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (-\delta < x - x_0 \leq 0): |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。右连续: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 \leq x - x_0 < \delta): |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。**定义 3.6** $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且在 a 点右连续, 在 b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续。**命题 3.18**

证明:

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

在 $(0, 1)$ 闭区间上连续。**证明**注:关于函数 $f(x)$ 在一个区间里面连续, 整合以上的定义。**定义 3.7**设 $f(x)$ 定义在某区间 X 上, 若 $\forall x_0 \in X$, 及 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X (|x - x_0| < \delta), |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。则称 $f(x)$ 在区间 X 上连续。**命题 3.19**

证明:

$$f(x) = \sin(x)$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。**证明** 同理 $f(x) = \cos(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。**命题 3.20**

证明:

$$f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。**证明**

3.5 连续函数的四则运算

定理 3.9

有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, 则:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f(x_0) + \beta g(x_0)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} (g(x_0) \neq 0)$



命题 3.21

求:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \sin x}{3^x + 2x}$$



证明

命题 3.22

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$Q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0}$$



证明 $f(x) = c, g(x) = x$

命题 3.23

已知 $\sin(x), \cos(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, 在 $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ 上连续。

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, 在 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 上连续。



证明

3.6 不连续点的类型

连续的定义: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

该定义包含了如下几层意思:

1. $f(x)$ 在 x_0 点有定义。
2. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

3.6.1 第一类不连续点

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

命题 3.24

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 不连续。

称第一类不连续点为跳跃点。

3.6.2 第二类不连续点

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 至少有一个不存在。

命题 3.25

$f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $x = 0$ 是它的第二类不连续点。

证明

命题 3.26

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x = 0$ 是它的第二类不连续点。

证明

3.6.3 第三类不连续点

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \begin{cases} \neq f(x_0) \\ f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 点没定义。} \end{cases}$$

命题 3.27

$f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$, 在 $x = 0$ 极限存在, 但是没有定义。

证明

第三类不连续点称为可去不连续点。

命题 3.28

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是有理数} \\ 0 & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

Dirichlet 函数属于第二类不连续点。

证明

命题 3.29

黎曼(Riemann)函数:

$$R(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ 是无理数} \\ \frac{1}{p} & x = \frac{q}{p}, p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, p, q \text{ 互质} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ 。即 $R(x)$ 在一切无理点连续, 在一切有理点不连续。

为什么定义0的时候是1? 因为1可以写成 $\frac{0}{1}$, 并且Riemann函数有周期性, 为了保持周期性, 因此定义0的时候是1。

证明

命题 3.30

区间 (a, b) 上的单调函数的不连续点必为第一类。



证明

3.7 反函数

映射: $f: X \rightarrow Y$ 为单射, 则 $\exists f^{-1}: R_f \rightarrow X$ 。

存在性、连续性、可导性(可导性暂时不讲)

严格单调增加: $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($y_1 < y_2$), 即 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ 。

定理 3.10 (反函数存在定理)

若 $f(x)$ 在 D_f 上严格单调增加(减少), 则存在 f 的反函数 $f^{-1}(y), y \in R_f$, 且 f^{-1} 也严格单调增加(减少)。



证明

定理 3.11 (反函数连续性定理)

假设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且严格单调增加, 设 $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$, 则反函数在 $[\alpha, \beta]$ 上连续。



证明

命题 3.31

$$y = \sin(x), y = \arcsin(x)$$

$$y = \cos(x), y = \arccos(x)$$

$$y = \tan(x), y = \arctan(x)$$



证明

命题 3.32

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1), y = \log_a(x)$$

$$y = x^n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$



证明

讨论一个问题, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$

那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x)$ 是否等于 A ?

反例:

$$f(u) = \begin{cases} 0 & u = 0 \\ 1 & u \neq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

则复合起来为:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 0 & x = \frac{1}{n\pi} \\ 1 & x \neq \frac{1}{n\pi} \end{cases}$$

定理 3.12

$u = g(x)$ 在 x_0 连续, $g(x_0) = u_0$, $f(u)$ 在 u_0 连续。则 $f \circ g$ 在 x_0 连续。



证明

命题 3.33

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



证明

命题 3.34

对任意实数 α , $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。



证明

定理 3.13

一切初等函数在它的定义域上连续。

**命题 3.35**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$



证明

命题 3.36

放射性物质的质量变化:

设 $t = 0$ 时, 物质的总量为 $M = M(0)$, 放射的比例系数为 k , 求时刻 t 的时候, $M(t)$ 为多少?



证明

3.8 无穷小量与无穷大量的阶

无穷小量的阶:

在数列极限的时候, 我们提及: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\{x_n\}$ —无穷小量。

对于函数极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 是无穷小量。

当 $x \rightarrow x_0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是无穷小量。

定义 3.8

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x)$ 是 $v(x)$ 的高阶无穷小量, 记为 $u(x) = o(v(x))$, $(x \rightarrow x_0)$ 。

**命题 3.37**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$



证明

命题 3.38

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^2}$$



证明

定义 3.9

若存在 $A > 0$, 当 x 在 x_0 的某一去心邻域中 $\{x | 0 < |x - x_0| < \rho\}$, 成立 $\left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| \leq A$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量, 记为 $u(x) = O(v(x)), (x \rightarrow x_0)$ 。



命题 3.39

$$u(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), u(x) = O(v(x))$$



证明

定义 3.10

若 $\exists 0 < a < A < +\infty$, 在 $\{x | 0 < |x - x_0| < \rho\}$ 中, $0 < a \leq \left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| \leq A < +\infty$, 则称 $u(x), v(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时是同阶无穷小量。



命题 3.40

$$u(x) = x(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)), v(x) = x, (x \rightarrow 0)$$



证明

命题 3.41

$$u(x) = x(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)), v(x) = x, (x \rightarrow 0)$$



定义 3.11

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x)$ 与 $v(x)$ 是等价无穷小量, 记为 $u(x) \sim v(x), (x \rightarrow x_0)$ 。



命题 3.42

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \sin(x) \sim x (x \rightarrow 0)$$



证明

命题 3.43

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{1}{2}x^2}$$



证明

命题 3.44

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\frac{1}{2}x^3}$$

注:(1) 取 $v(x) = (x - x_0)^k$ 可知 $u(x)$ 是几阶的无穷小量。

(2) $x \rightarrow 0^+$, $\frac{-1}{\ln(x)}$ 是正无穷小量。对任意的 $\alpha > 0$, $\frac{-1}{\ln(x)}$ 是 x^α 的低阶无穷小量, 即:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{\ln(x)}}{x^\alpha} = +\infty$$

这时候, 记 $\frac{-1}{\ln(x)} = o(1), (x \rightarrow 0^+)$

又比如 $u(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) (x \rightarrow 0)$, 不是无穷小量但是是有界量, 则记为 $u(x) = O(1), (x \rightarrow 0)$ 。

无穷大量的阶:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty (+\infty, -\infty)$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 是(正, 负)无穷大量。

定义 3.12

假设 $u(x), v(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时都是无穷大量, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \infty$, 这说明当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x)$ 是 $v(x)$ 的高阶无穷大量。

$$n^n \gg n! \gg a^n (a > 1) \gg n^\alpha (\alpha > 0) \gg \ln^\beta(n) (\beta > 0)$$

命题 3.45

设 $a > 1, k$ 是正整数, 求:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^k}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^k(x)}{x}$$

定义 3.13

若存在 $A > 0$, 在 $\{x | 0 < |x - x_0| < \rho\}$, 成立:

$$\left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| \leq A$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量, 记为 $u(x) = O(v(x)), (x \rightarrow x_0)$

定义 3.14

若存在 $0 < a < A < +\infty$, 在 $\{x | 0 < |x - x_0| < \rho\}$, 成立:

$$0 < a \leq \left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| \leq A < +\infty$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x), v(x)$ 是同阶无穷大量。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x)}{= c} \neq 0$, 则 $u(x), v(x)$ 一定是同阶无穷大量。

定义 3.15

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$, 则称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是等价无穷大量, 记为 $u(x) \sim v(x), (x \rightarrow x_0)$ 。

命题 3.46

$$u(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), v(x) = x^2$$

证明

命题 3.47

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan(x)$$



证明

当 $x \rightarrow 0^+$, $\frac{-1}{\ln(x)}$ 关于 x^α 都是低阶无穷小量。

命题 3.48

$x \rightarrow 0^+$, k 为任意的正整数, $\left(\frac{-1}{\ln(x)} \right)^k$ 关于 x 是低阶无穷小量。



证明

命题 3.49

当 $x \rightarrow 0^+$, $e^{-\frac{1}{x}}$ 关于 x^k 是高阶无穷小量。



证明

等价值:

$$\sin(x) \sim x$$

命题 3.50

$$\ln(1+x) \sim x, (x \rightarrow 0)$$



证明

命题 3.51

$$e^x - 1 \sim x, (x \rightarrow 0)$$



证明

命题 3.52

$$(1+x)^\alpha \sim \alpha x, (x \rightarrow 0)$$



证明

命题 3.53

$$u(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

讨论 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow 0^+$ 时的阶数。



证明

命题 3.54

$$v(x) = 2x^3 + 3x^5$$

讨论 $x \rightarrow \infty$ 和 $x \rightarrow 0$ 时的阶数。



证明

定理 3.14

$u(x), v(x), w(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域上有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x)}{w(x)} = 1, v(x) \sim w(x), (x \rightarrow x_0)$$

则

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)w(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)v(x) = A$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{w(x)} = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = A$

**命题 3.55**

计算:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{(e^{2x}-1)\tan(x)}$$



证明

命题 3.56

计算:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$$



证明

命题 3.57

计算:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[3]{x^3-x} \right)$$



证明

命题 3.58

计算:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$$



3.9 闭区间上的连续函数

定理 3.15 (有界性定理)

$f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在闭区 $[a, b]$ 上有界。



证明

定理 3.16 (最值定理)

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 必能在 $[a, b]$ 上取到最大值和最小值, 即 $\exists \xi, \eta \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta), \forall x \in [a, b]$ 。



证明

定理 3.17 (零点存在定理)

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 如果 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = 0$ 。



证明

命题 3.59

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$



证明

命题 3.60

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f([a, b]) \subset [a, b]$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$ (ξ 称为 f 的不动点)。



证明

命题 3.61

$f(x)$ 在 (a, b) 上连续, $f((a, b)) \subset (a, b)$, 则是否 f 也有不动点?



证明

定理 3.18 (中间值定理)

$f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则它一定能取到最大值 M 与最小值 m 之间的任何一个值。



证明

3.9.1 一致连续概念

定义 3.16

X 是某一区间, $f(x)$ 在 X 上连续, 是指 $f(x)$ 在 X 上的每一点连续(在端点指右或者左连续)。

分析表述: $\forall x_0 \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X (|x - x_0| < \delta), |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$



$\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, 能否找到对一切 x_0 适用的 $\delta > 0$?

若能找到这样的 $\delta > 0$, 则有:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x', x'' \in X (|x' - x''| < \delta): |f(x') - f(x'')| < \epsilon$ 。

问题: 这样的 $\delta(\epsilon) > 0$ 是否一定能找到? 不一定!

存在 $\delta(\epsilon) > 0 \iff \inf_{x_0 \in X} \delta^*(\epsilon, x_0) > 0$ (令所有适用的 $\delta(\epsilon, x_0)$ 中的最大者(或上确界)为 $\delta^*(\epsilon, x_0)$)

定义 3.17 (一致连续)

$f(x)$ 在区间 X 上有定义, 假如 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in X (|x' - x''| < \delta): |f(x') - f(x'')| < \epsilon$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续。



$f(x)$ 在 X 上一致连续 $\Rightarrow f(x)$ 在区间 X 上连续

命题 3.62

证明:

$$y = \sin(x)$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续。



证明

命题 3.63

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在区间 $(0, 1)$ 上不是一致连续。



证明

定理 3.19

假设 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 则 $f(x)$ 在 X 上一致连续的充分必要条件是: 对任意点列 $x'_n, x''_n \in X$, 只要 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x'_n) - f(x''_n)) = 0$ 。



证明

命题 3.64

用以上的定理证明:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在区间 $(0, 1)$ 上不是一致连续。



证明

命题 3.65

证明:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在 $(\eta, 1), 0 < \eta < 1$ 上一致连续。

**命题 3.66**

$$f(x) = x^2$$

在 $(0, +\infty)$ 上非一致连续。



证明

命题 3.67

$$f(x) = x^2$$

在 $(0, A)$ 上一致连续。



证明

定理 3.20 (Cantor 定理)

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续。



证明

定理 3.21

$f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 连续, 则 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上一致连续的充分必要条件是: $f(a^+), f(b^-)$ 存在。



证明

第4章 微分

4.1 微分和导数

4.1.1 微分

考虑 $y = f(x)$, 当 $x \rightarrow x + \Delta x$ 时, $f(x) \rightarrow f(x + \Delta x)$, 令 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。应该怎么简单地表示 Δy ?

定义 4.1 (微分的定义)

$x_0 \in D_f$, 若存在只与 x_0 有关, 与 Δx 无关的 $g(x_0)$, 使得当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时:

$$\Delta y = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 可微。

若 $f(x)$ 在区间 X 的每一点可微, 则称 $f(x)$ 在区间 X 可微。

$g(x_0)\Delta x$ 称为 Δy 的线性主要部分。

$\Delta x \rightarrow 0$, 记 Δx 为 dx , 若 $f(x)$ 在 x 点可微, 则有 $\Delta y = g(x)\Delta x + o(\Delta x)$, ($\Delta x \rightarrow 0$)。则记 Δy 为 dy , 并将上式写为 $dy = g(x)dx$ 。



命题 4.1

$$y = f(x) = x^2$$

对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 求微分表示。



证明

命题 4.2

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

考虑 f 在 $x_0 = 0$ 是否可微。



证明

可微 \Rightarrow 连续

4.1.2 导数

$y = f(x)$ 在 x_0 可微, 则 $\Delta y = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, ($\Delta x \rightarrow 0$), 那么:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x_0)$$

定义 4.2

设 $x_0 \in D_f$, 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 可导, 记这个极限值为 $f'(x_0)$ (或 $y'(x_0)$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$, $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$)。



$f(x)$ 可导的范围是 D_f 的子集,于是我们可以得到在这子集上的 $f(x)$ 的导函数,记为 $f'(x)$ (或 $y'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$)。

可微 \Rightarrow 可导,且 $f'(x_0) = g(x_0)$ 。

可导是否一定可微?

可导,则:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

则:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = o(1), (\Delta x \rightarrow 0)$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(1)\Delta x$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

即,可导 \Rightarrow 可微(一元函数下)。

4.2 导数的意义与性质

命题 4.3

抛物线:

$$y^2 = 2px$$

(x_0, y_0) 是抛物线上一点,求过 (x_0, y_0) 的切线方程。

证明

命题 4.4

椭圆:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

求椭圆上过 (x_0, y_0) 点的切线。

证明

$f(x)$ 在 x_0 处的导数为以下极限:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

称:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

为 $f(x)$ 在 x_0 的右导数。称:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

为 $f(x)$ 在 x_0 的左导数。

因此, $f(x)$ 在 x_0 可导 $\iff f(x)$ 在 x_0 的左右导数存在且相等。

以下两个记号不好弄混: $f'_+(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的右导数, $f'(x_0^+)$ 是 $f(x)$ 导数在 x_0 的右极限。

同理, $f'_-(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的左导数, $f'(x_0^-)$ 是 $f(x)$ 导数在 x_0 的左极限。

命题 4.5

$f(x) = |x|$ 在 x_0 的左右导数。



证明

命题 4.6

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的左右导数。



证明

命题 4.7

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b & x > 2 \\ ax + 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

要求确定 a, b 使得 $f(x)$ 在 $x_0 = 2$ 可导。



证明

$f(x)$ 在 (a, b) 上每一点可导, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 区间上可导。

$f(x)$ 在 (a, b) 上每一点可导, 在 $x = a$ 上有右导数, $x = b$ 有左导数, 则称 f 在闭区间 $[a, b]$ 上可导。

4.3 导数四则运算与反函数求导法则

命题 4.8

求

$$y = \sin(x)$$

的导数。



证明

同理 $y = \cos(x)$, $y'(x) = -\sin(x)$ 。

命题 4.9

求

$$y = \ln(x)$$

的导数。



证明

命题 4.10

求

$$y = e^x$$

的导数。



证明

命题 4.11

求

$$y = a^x$$

的导数。



证明

命题 4.12

求

$$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

在定义域 $(0, +\infty)$ 的导数。

证明

定理 4.1

若 f, g 在同一区间可导, 则 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 也在该区间可导, 且有:

$$(c_1 f(x) + c_2 g(x))' = c_1 f'(x) + c_2 g'(x)$$



定理 4.2

若 f, g 在同一区间可导, 则 $f(x)g(x)$ 也在该区间可导, 且有:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$



证明

命题 4.13

求:

$$y = x^3 \cos(x)$$

的导数。



证明

命题 4.14

求:

$$y = \frac{\sin(x)}{x}$$

的导数。



证明

定理 4.3

设 $g(x)$ 在某一个区间可导, $g(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{g(x)}$ 也在该区间可导, 且

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$



证明

命题 4.15

求:

$$y = \sec(x), \left(\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \right)$$

的导数。



证明

命题 4.16

求:

$$y = \csc(x), \left(\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

的导数。



证明

引理 4.1

f, g 在同一区间可导, $g(x) \neq 0$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在该区间可导, 且:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$



证明

命题 4.17

求:

$$y = \tan(x)$$

的导数。



证明

命题 4.18

求:

$$y = \cot(x)$$

的导数。



证明

定理 4.4 (反函数求导定理)

$f(x)$ 在 (a, b) 连续并且严格单调并且可导, $f'(x) \neq 0$, $\alpha = \min(f(a^+), f(b^-))$, $\beta = \max(f(a^+), f(b^-))$, 则 $f^{-1}(y)$ 在 (α, β) 上可导, 且:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$



证明

命题 4.19

求:

$$y = \arctan(x)$$

的导数。



证明

命题 4.20

求:

$$y = \operatorname{arccot}(x)$$

的导数。



证明

命题 4.21

求:

$$y = \arcsin(x)$$

的导数。



证明

命题 4.22

求:

$$y = \arccos(x)$$

的导数。



证明