数学分析

作者：hapo

时间：December 20, 2022

目录

记录本书的原因是因为我觉得自己的数学分析实在太烂了。因此我决定使用费曼学习法。这是一个链式反应，在我学习随机过程的时候，我发现自己的概率论太差了，而当我学习概率论的时候，我又发现我的测度论太差了，而我学习测度论的时候，我最终发现，我差的是数学分析。而这个最初始的问题是我并没有系统地学过数学分析。而在学习数学分析的过程中，我发现我对好多概念并不明晰，这使得学习的进度缓慢，并且经常容易在概念上卡壳，而卡壳结束后又很快忘记。因此，为了能够更好地记住，我决定使用费曼学习法。在此，我记录下我学习数学分析的过程。

第 1 章 集合与映射

定义 1.1 (集合)

是具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集的总体，其中的对象称为集合的元素。 ♣

集合通常记为A, B, C, X, Y

元素通常记为s, t, a, b, x, y

x是集合S的元素, 记为$x \in S$

第 2 章 实数的完备性

内容提要

- 有理数的定义 2.2
- 数列极限的保序性逆命题 2.1
- Bolzano-Weierstrass定理 2.13

在本章中，我们将介绍实数的完备性。在介绍实数之前，我们需要将实数定义或者说引入。而对于实数的定义是有很多的，而我在此介绍无穷十进制小数表示和戴德金(Dedekind)分割。这部分我将结合陈纪修教授的教材和Ayumu的讲义。

在引入实数之前，我们需要先介绍有理数，而在介绍有理数之前，我们需要规定一些常用集合的记号。而介绍常用集合，则需要先介绍集合(set)，在此我们并不介绍集合，我们暂时默认我们已经知道了集合的概念，将来我们会对该部分内容进行扩充。现在让我们来列举一些常用的集合。

定义 2.1 (常用集合表示)

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$

$\mathbb{Z}^+=\{n|n\in\mathbb{Z},n>0\}$

♣

在定义了以上的集合表示之后，我们就能以上的符号来表示有理数：

定义 2.2 (有理数)

若一个数x可以表示成$\frac{q}{p}$的形式，其中$q\in\mathbb{Z},p\in\mathbb{Z}^+$, 则称x为**有理数**(rational number)。而由有理数组成的集合称为**有理数集**，有理数集常用$\mathbb{Q}$表示，其可以表示为：

$$\mathbb{Q}=\{x|x=\frac{q}{p},q\in\mathbb{Z},p\in\mathbb{Z}^+\}$$

在这里, 我们可以看到p只需要属于$\mathbb{Z}^+$, 这是因为若x为负的, 我们总可以规定负号出现在分子上。

♣

有理数对加减乘除都封闭，并且我们在有理数上定义了大小关系，即有理数也是良序的。但是它并不能满足研究所需。例如，存在长度无法用有理数表示。并且有理数之间存在“空隙”，即有理数不连续。而在我们之后的研究中，我们往往需要研究连续性，因此我们需要对有理数进行扩充。在这之前，我们先来证明确实有一些数无法用有理数表示。

命题 2.1

$\sqrt{2}$不是有理数。

♠

证明 我们用反证法。假设$\sqrt{2}$为有理数，那么存在$q\in\mathbb{Z},p\in\mathbb{Z}^+$，使得$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$。

而且有的函数在实数域和有理数域上的表现完全不一样，比如狄利克雷(dirichlet)函数。

定理 2.1 (确界存在定理—实数系连续性定理)

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。

♡

2.1 数列极限

定义 2.3 (数列极限的定义)

对于数列$\{a_n\}$, 存在一个实常数a, 对$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{Z}^+$，使得当$n>N$时，$|a_n-a|<\epsilon$成立，则称$\{a_n\}$**收敛**(convengent)于a或者$\{a_n\}$的**极限**(limit)为a, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或者 \quad a_n\to a(n\to+\infty)$$

若不存在实数a, 满足上述性质, 则称数列$\{a_n\}$**发散**(divergent)。

一个数列收敛与否，收敛的话，收敛于哪个数，这与数列的前有限项无关。

定义 2.4 (无穷小量的定义)

以零为极限的变量称为**无穷小量**。

命题 2.2

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 1(q<1)$$

证明

命题 2.3

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

证明

命题 2.4

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

证明

命题 2.5

设$a_n>0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

证明

定理 2.2 (数列极限的唯一性)

若

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$$

则

$$a=b$$

证明

定义 2.5

1. 对于数列$\{x_n\}$, 若$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立$x_n \leq M$, 则称M是$\{x_n\}$的一个上界, 或称$\{x_n\}$有上界。
2. 对于数列$\{x_n\}$, 若$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立$x_n \geq m$, 则称m是$\{x_n\}$的一个下界, 或称$\{x_n\}$有下界。

$\{x_n\}$既有上界又有下界, 则称$\{x_n\}$有界。

$\{x_n\}$有界的另一个定义：$\exists X \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{N}^+$, 成立$|x_n| \leq X$

定理 2.3 (数列极限的有界性)

若$\{x_n\}$的极限存在，则$\{x_n\}$有界。

证明

定理 2.4 (数列极限的保序性)

存在两个数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, \quad 且 \quad a < b$$

则$\exists N \in \mathbb{Z}^+$，当$n > N$时，$x_n < y_n$。

证明

引理 2.1 (数列极限的保序性逆命题)

对于$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$, 若$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, x_n \leq y_n$, 则$a \leq b$。

证明

引理 2.2

1. 若$\lim_{n\to\infty} y_n = b > 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n > \frac{b}{2} > 0$。
2. 若$\lim_{n\to\infty} y_n = b < 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n < \frac{b}{2} < 0$。

证明 利用数列极限的保序性证明。当$b > 0$时，取$\{x_n = \frac{b}{2}\}$, 则$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{2} < b$, 由数列极限的保序性可知，$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有$y_n > x_n = \frac{b}{2}$, 证毕。

同理可证明$b < 0$的情况。

以上推论可以合起来写为:

引理 2.3

若$\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n| > \frac{|b|}{2} > 0$。

证明 除了上一个推论那样分开来证明, 还可以如下证明: $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 即$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $|y_n - b| < \epsilon$。

由三角不等式得:

$$|y_n - b| > ||y_n| - |b||$$

即:

$$||y_n| - |b|| < |y_n - b| < \epsilon$$

因此$\lim_{n\to\infty} |y_n| = |b|$。之后的证明同上。

定理 2.5 (数列极限的夹逼性定理)

对于数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, 若$\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, 成立$x_n \leq y_n \leq z_n$, 且$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, 则$\lim_{n\to\infty} y_n = a$

证明 $\forall \epsilon, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, |x_n - a| < \epsilon$, 即$x_n - a > -\epsilon$。

同理, $\forall \epsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, |y_n - a| < \epsilon$, 即$z_n - a < \epsilon$。

取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 则:

$$-\epsilon < x_n - a < y_n - a < z_n - a < \epsilon$$

即:

$$-\epsilon < y_n - a < \epsilon$$

即:

$$|y_n - a| < \epsilon$$

总结起来即为: $\forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - a| < \epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty} y_n = a$, 证毕。

命题 2.6

求:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

定理 2.6 (数列极限的四则运算)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}(b \neq 0)$

证明

命题 2.7

$$求 \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} - (-2)^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}$$

证明

命题 2.8

$$当 a > 0 时, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

证明

命题 2.9

$$求 \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$$

证明

命题 2.10

$$求 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

证明

有限个

命题 2.11

设$a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$

证明

命题 2.12

若$\{x_n\}$是无穷小量，$\{y_n\}$有界($|y_n| < 0$)，则$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

证明

2.2 无穷大量

定义 2.6 (无穷大量)

对于一个数列$\{x_n\}$，若对于任意给定的$G > 0$, 可以找到正整数N, 使得当$n > N$时，$|x_n| > G$，则称数列$\{x_n\}$是无穷大量，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

若对于该数列$\{x_n\}, |x_n| > G$可以恒表示为$x_n > G$，则称数列$\{x_n\}$是正无穷大量，记为$+\infty$。
若对于该数列$\{x_n\}, |x_n| > G$可以恒表示为$x_n < -G$，则称数列$\{x_n\}$是负无穷大量，记为$-\infty$。

命题 2.13

设$|q| > 1$，证明$\{q^n\}$是无穷大量。

证明

命题 2.14

证明$\{\frac{n^2-1}{n+5}\}$是无穷大量。

证明

引理 2.4

若$x_n \neq 0$，则$\{x_n\}$是无穷大量的充要条件是$\{\frac{1}{x_n}\}$是无穷小量。

证明

引理 2.5

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$满足$\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N_0$，有$|y_n| \geq \delta > 0$，则$\{x_n y_n\}$也是无穷大量。

证明

引理 2.6

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$，则$\{x_n y_n\}$与$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

证明

命题 2.15

$\{\frac{n}{\sin(n)}\}$和$\{n \cdot \arctan(n)\}$是无穷大量。

证明

命题 2.16

讨论极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_k}$$

其中$a_0,b_0\neq 0,k,l\in\mathbb{Z}^+$

证明 从分子上提出n^k，分母上提出n^l次

2.2.1 无穷大的运算

若$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则记$\{x_n\}$为"+∞"。
若$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$，则记$\{y_n\}$为"+∞"。
若$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty$，则记$\{z_n\}$为"+∞"。
若$\lim_{n\to\infty}w_n=0$，则记$\{z_n\}$为"0"。

定理 2.7

1. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$
2. $(+\infty)-(-\infty)=+\infty$
3. $(+\infty)\pm(\text{有界量})=+\infty$
4. $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
5. $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

定义 2.7

1. $(+\infty)-(+\infty)=?$
2. $(+\infty)+(-\infty)=?$
3. $0\cdot\infty=?$
4. $\frac{0}{0}=?$
5. $\frac{\infty}{\infty}=?$
6. $\cdots$

上述情况称为"待定型"

定义 2.8

若数列$\{x_n\}$，有$x_n\leq x_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调增加，记为$\{x_n\}\uparrow$。若有$x_n<x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调增加，记为$\{x_n\}$严格$\uparrow$。
若数列$\{x_n\}$，有$x_n\geq x_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调减少，记为$\{x_n\}\downarrow$。若有$x_n>x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调减少，记为$\{x_n\}$严格$\downarrow$。

定理 2.8 (Stolz定理)

假设$\{y_n\}$严格单调增加数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$。若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a(a\text{为有限数},+\infty,-\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$$

证明

命题 2.17

用Stolz定理证明，若$\lim_{n\to\infty}a_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

证明

命题 2.18

$$求\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

证明

命题 2.19

$$设\lim_{n\to\infty}a_n=a，求\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}$$

证明

2.3 收敛准则

收敛数列一定有界，但是收敛数列不一定有界。

1. 那么有界数列加什么条件收敛？
2. 有界数列不加条件的情况下，可以得到什么弱一些的结论？

定理 2.9

单调有界数列必定收敛。

证明 不妨设$\{x_n\}$单调增加，有上界。

定理意义: 从定义证明时, 我们需要知道极限a, 相当于验证极限为a, 而当极限未知时, 则无法证明。而定理则从数列本身的性质出发, 不需要知道极限是多少。

引理 2.7

若数列$\{x_n\}$从第N项之后开始单调有界, 则数列$\{x_n\}$依旧收敛。

证明 考虑$n\geq N$后的数组成的数列，设$n_1=n-N+1$，则$\{x_{n_1}\}$单调有界。由于$\{x_{n_1}\}(n_1\geq 1)$单调有界，则$\{x_{n_1}\}(n_1\geq 1)$收敛。即$\exists a, \forall\epsilon>0, \exists N_1, \forall n_1>N_1$，有$|x_{n_1}-a|<\epsilon$。那么我们可以取$N_2=N_1+N-1$，此时$\forall\epsilon, \exists N_2=N_1+N-1, \forall n>N_2$，有$|x_n-a|<\epsilon$，即数列$\{x_n\}$极限存在。

命题 2.20

设$x_1>0, x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}, n=1,2,3,\cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

命题 2.21

设$0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1-x_n), n = 1,2,3,\cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

无穷小量的趋近速度。

命题 2.22

$$\text{对于上题的}\ \{x_n\}\ ,\text{求极限},\ \lim_{n\to\infty} nx_n$$

证明

命题 2.23

$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}, n = 1,2,3,\cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

兔子

命题 2.24 (Fibonacci数列)

$\{a\check{}\check{}n\}$为Fibonacci数列, 令$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$，讨论$\{b_n\}$数列。

证明

接下来我们来研究π和e

关于π:

命题 2.25

证明$\left\{L_n = n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$收敛。求圆的面积公式。

证明 取$t = \frac{180^\circ}{n(n+1)}$，当$n \geq 3$时, $nt \leq 45^\circ$。且由三角公式得:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]tan(t)}$$

由于$nt \leq 45^\circ$, 则$tan(kt) < 1(k < n)$, 因此:

$$\tan(nt) = \frac{\tan[(n-1)t] + \tan(t)}{1 - \tan[(n-1)t]tan(t)} > \tan[(n-1)t] + \tan(t)$$

则：

$$\tan(nt) > \tan[(n-1)t] + \tan(t)$$

$$\tan[(n-1)t] > \tan[(n-2)t] + \tan(t)$$

$$\cdots\cdots$$

则:

$$\tan(nt) > n\tan(t)$$

现在来考虑$\sin[(n+1)t]$:

$$\begin{aligned}\sin[(n+1)t] &= \sin(nt)\cos(t)+\cos(nt)\sin(t)\\ &= \sin(nt)\cos(t)\left[1+\frac{\tan(t)}{\tan(nt)}\right]\\ &< \sin(nt)\cos(t)\left[1+\frac{1}{n}\right]\\ &< \sin(nt)\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

即:

$$n\sin[(n+1)t] < (n+1)\sin(nt)$$

将$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$代入得:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < (n+1)\sin\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right)$$

即该数列单调增加。

考虑到单位圆的面积:

$$S' > n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

并且单位圆的面积小于外接正方形的面积, 即:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < S' < 4$$

即:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < \frac{4}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

因为$n\geq 3$, 所以:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 8$$

因此数列$\left\{L_n = n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调有界, 则该数列极限存在。

现在定义$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=\pi$。

再来考虑单位圆的面积S', 设内接正多边形的面积为S_1, 外接正多边形的面积为S_2, 则$S_1(n) < S' < S_2(n)$。内接正多边形的面积为:

$$S_1(n) = n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

外接正多边形的面积为:

$$S_2(n) = n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = n\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

并且根据数列极限的四则运算有:

$$\lim_{n\to\infty} S_1(n) = \lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \pi$$

$$\lim_{n\to\infty} S_2(n) = \frac{\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} = \pi$$

则根据夹逼性原理得:

$$S' = \pi$$

其中, 对于外接正多边形的面积, 考虑:

$$
\begin{aligned}
(n+1)\tan(nt)-n\tan[(n+1)t] &= (n+1)\frac{\sin(nt)}{\cos(nt)}-n\frac{\sin[(n+1)t]}{\cos[(n+1)t]} \\
&= \frac{(n+1)\sin(nt)\cos[(n+1)t]-n\sin[(n+1)t]\cos(nt)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
&= \frac{\sin(nt)\cos[(n+1)t]-n\sin(t)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
&= \frac{\sin[(2n+1)t]-\sin(t)-2n\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
&= \frac{\sin[(2n+1)t]-(2n+1)\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]}
\end{aligned}
$$

并且当$n \geq 3$时, 有:

$$
\sin[(2n+1)t]=\sin(2nt)\cos(t)+\cos(2nt)\sin(t)<\sin(2nt)+\sin(t)
$$

$$
\sin(2nt)=\sin[(2n-1)t]\cos(t)+\cos[(2n-1)t]\sin(t)<\sin[(2n-1)t]+\sin(t)
$$

$$
\cdots\cdots
$$

因此:

$$
sin[(2n+1)t]<(2n+1)\sin(t)
$$

因此:

$$
(n+1)\tan(nt)<n\tan[(n+1)t]
$$

即:

$$
(n+1)\tan\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right)<n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)
$$

因此数列$\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调递减。因为外接正多边形面积必然大于内接正方形, 因此:

$$
n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)>2
$$

因此数列$\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调有界, 则该数列极限存在。

关于e:

命题 2.26

考虑两个数列:

$$
\left\{x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad 和 \quad \left\{y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}
$$

证明这两个数列极限存在且相等。

证明

定义$\ln=\log_e$为自然对数，e自然对数的底数。

命题 2.27

令$a_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p},(p>0)$，证明$\{a_n\}$当$p>1$时收敛，当$p\leq 1$时发散。

证明

$p=1$时，$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$为调和级数，它是正无穷大量，我们想知道它趋近无限的速度。

命题 2.28

证明

$$b_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdot\cdot+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

收敛。

证明 极限记为γ，称为欧拉常熟。$\gamma >= 0.577215$

命题 2.29

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\ln 2$$

证明 除了夹逼准则，还能用上一个数列相减计算。

命题 2.30

$$d_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+}\frac{1}{n}$$

证明

以上是与e相关的数列

定义 2.9 (闭区间套)

有一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$，满足：

1. $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\,,n=1,2,3,\cdots$
2. $b_n-a_n\to 0(n\to\infty)$

则称这样的一列闭区间是一个闭区间套。

定理 2.10 (闭区间套定理)

假如$[a_n,b_n]$是一个闭区间套，则存在唯一的实数ξ，它属于一切闭区间$[a_n,b_n]$。且$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}b_n=\xi$。

证明

定理 2.11

实数集不可列。

证明 反证法

子列

定义 2.10

存在一个数列$\{x_n\}$，取一列严格单调增加的正整数$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots$，则$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdot$称为$\{x_n\}$的一个子列，记为$\{x_{n_k}\}$，$k$代表子列中的第$k$项，又恰好是$\{x_n\}$中的第$n_k$项。

其中$n_k\geq k,\forall k,n_j>n_k,\forall j>k$。

定理 2.12

设$\{x_n\}$收敛于a, 则它的任何一个子列也收敛于a。即$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，证明$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$

证明

可以用于证明数列不收敛。

命题 2.31

若$\{x_n\}$存在两个子列收敛于不同的极限，则$\{x_n\}$发散。

证明

定理 2.13 (Bolzano-Weierstrass定理)

有界数列必有收敛子列。

证明 设数列为$\{x_n\}$, 因为数列有界, 所以$\forall n>0$, 存在$a\le x_n\le b$, 则取$[a_1,b_1]=[a,b]$。

将$[a_1,b_1]$分为两个闭区间, 分别为$[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$和$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$, 其中至少有一个区间包含无穷多个数列的元素, 因为若两个区间都有有限个数列元素, 则数列$\{x_n\}$的元素有限。那么我们可以取包含无穷多个数列元素的区间为$[a_2,b_2]$。

同理, 我们可以取出$[a_3,b_3],[a_4,b_4],\cdots$。每一个区间中都包含无穷多个数列元素。

对于这些区间, $\forall n>0,(1).[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],(2).\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$, 则这些闭区间组成了一个闭区间套。根据闭区间套定理, 存在唯一的实数γ属于一切闭区间$[a_n,b_n]$。

则我们可以这样构造子列:

从$[a_1,b_1]$中取x_{n_1}, 使得$n_1>0$, 这必然可以实现, 因为$[a_1,b_1]$中有无限多个数列元素。

从$[a_2,b_2]$中取x_{n_2}, 使得$n_2>n_1$, 这必然可以实现, 因为$[a_2,b_2]$中有无限多个数列元素, 即$\forall n_1,\exists n_2>n_1$。

从$[a_3,b_3]$中取x_{n_3}, 使得$n_3>n_2$, 这必然可以实现, 因为$[a_3,b_3]$中有无限多个数列元素, 即$\forall n_2,\exists n_3>n_2$。

$$\cdots\cdots$$

对于子列$\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$, 则$\forall\epsilon>0$, 取$K=\max\left\{\left[\log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)\right]+2,1\right\}$, $\forall k>K,b_k-a_k<\epsilon$, 同时$x_{n_k}\in[a_k,b_k],\gamma\in[a_k,b_k]$, 则$\forall k>K,|x_{n_k}-\gamma|<b_k-a_k<\epsilon$。

即$\forall\epsilon>0,\exists K\in\mathbb{N}^+,\forall k>K,|a_{n_k}-\gamma|<\epsilon$, 则$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\gamma$, 该子列收敛于$\gamma$。

在陈老的视频是, 陈老是用夹逼性证明$\{x_{n_k}\}$收敛于γ, 证明如下:

$\forall k,a_k\le x_{n_k}\le b_k$, 且$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=\gamma$, 则根据夹逼性, $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\gamma$。**非常巧妙!**

定理 2.14

假设$\{x_n\}$是无界数列，则存在子列$\{x_{n_k}\}$，它是无穷大量。

证明

Cauchy收敛原理

定义 2.11

$\{x_n\}$满足:

$$\forall\xi>0,\exists N,\forall n,m>N,|x_n-x_m|<\xi$$

则称$\{x_n\}$为基本数列。

也可以是$\forall m>n>N$

证明

命题 2.32

判断

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

是否为基本数列。

证明

命题 2.33

判断

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

是否为基本数列。

证明

定理 2.15 (Cauchy收敛原理)

$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$\{x_n\}$是基本数列。

证明 **必要性**: 即$\{x_n\}$收敛 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$是基本数列。

假设$\{x_n\}$收敛于A, 则$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |x_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$。

则对于$\forall n, m > N, |x_n - x_m| < |x_n - A| + |x_m - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, 则$\{x_n\}$为基本数列。

充分性: 即$\{x_n\}$是基本数列$\Rightarrow$ $\{x_n\}$收敛。

因为$\{x_n\}$为基本数列, 即对于$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall m, n > N$, $|x_m - x_n| < \epsilon$。取$m = N + 1$, 则$\forall n > N$, $|x_{N+1} - x_n| < \epsilon$, 即$x_{N+1} - \epsilon < x_n < x_{N+1} + \epsilon$。则我们可以取$a = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1} - \epsilon\}, b = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1} + \epsilon\}$, 此时$\forall n \in \mathbb{N}^+$:

$$a \le x_n \le b$$

即, $\{x_n\}$数列有界。

根据Bolzano-Weierstrass定理(定理 2.13), 则存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A, 则$\forall \epsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}^+, \forall k > K, |x_{n_k} - A| < \frac{\epsilon}{2}$, 又由于$\{x_n\}$为基本数列, 则$\forall \epsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}^+, \forall m', n' > N', |x_{N+1} - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$。

取$N'' = \max\{N', n_K\}$, 因为$\{x_{n_{k'}}\}$由无穷多项, 则必然存在$n_{k'} > N'' \ge n_K$, 即$k' > K$,。此时, 因为$n_{k'} > N'' \ge N'$, 则$\forall n' > N'$, $\left|x_{n'} - x_{n_{k'}}\right| < \frac{\epsilon}{2}$, 又因为$k' > K$, 则$\left|x_{n_{k'}} - A\right| < \frac{\epsilon}{2}$, 因此$\forall n' > N'$, $|x_{n'} - A| < \left|x_{n'} - x_{n_{k'}}\right| + \left|x_{n_{k'}} - A\right| < \epsilon$, 即数列$\{x_n\}$收敛。

而陈老是这样证明充分性的:

取$\epsilon = 1$, 因为$\{x_n\}$是基本数列, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |x_n - x_{N+1}| < 1$, 因此$|x_n| < |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < |x_{N+1}| + 1$。取$M = \max\{|x_1|, |x_1|, \cdots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}$, 则:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, |x_n| \le M$$

即$\{x_n\}$有界。

根据根据Bolzano-Weierstrass定理(定理 2.13), 则存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A。

根据$\{x_n\}$是基本数列, 则$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n, m > N_1, |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$, 现在固定$x_m$, 取$x_n$为子列$\{x_{n_k}\}$。现在考虑数列$\{|x_{n_k} - x_m|\}$和数列$\{\frac{\epsilon}{2}\}$, 取$K = N_1$, 则$\forall k > K$, 有$n_k > n_K \ge K = N_1$, 即$\forall k > K, |x_{n_k} - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$, 根据数列极限的保序性逆命题(推论 2.1), $|A - x_m| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$。这对于$\forall m > N_1$都成立, 即数列$\{x_n\}$极限存在且为A。

命题 2.34

$\{x_n\}$满足压缩性条件, 即

$$|x_{n+1} - x_n| \le k\,|x_n - x_{n-1}|\,, 0 < k < 1, \forall n = 2, 3, \cdots$$

则$\{x_n\}$是收敛的。

证明

实数系的基本定理

1. 确界存在定理(实数系的连续性定理)
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Bolzano-Weierstrass定理
5. Cauchy收敛原理(实数系完备性)

以上都是在实数系中考虑, 实数系上的基本数列必然是收敛数列, 因此Cauchy收敛原理也被称为实数系的完备性定理。实数系有完备性, 有理数不具备完备性。例如$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是有理数列, 但是它的极限是无理数。以上五个定理等价。我们需要证明这五个定理等价。从Cauchy收敛原理推出闭区间套定理, 再从闭区间套定理推出确界存在定理。

定理 2.16 实数系的完备性等价于实数系的连续性。♡

证明 (1)Cauchy收敛原理⇒闭区间套定理。

(2)闭区间套定理⇒确界存在定理。

第 3 章 函数极限与连续函数

函数极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

定义 3.1

$y=f(x)$在$O(x_0,\rho)\setminus\{x_0\}$上有定义，如果存在一个数A，使得对任意给定的$\epsilon>0$，可以找到$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，成立$|f(x)-A|<\epsilon$，则称A是$f(x)$在$x_0$点的极限，记为$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$或者$f(x)\to A(x\to x_0)$。如果不存在满足上述性质的A，则称$f(x)$在$x_0$点极限不存在。

$O(x_0,\rho)\setminus\{x_0\}$称为去心邻域。

命题 3.1

证明：

$$\lim_{x\to 0}e^x=1$$

证明

命题 3.2

证明：

$$\lim_{x\to 2}x^2=4$$

证明

命题 3.3

证明：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

证明

函数极限的性质

定理 3.1 (函数极限的唯一性)

设A, B都是$f(x)$在x_0的极限，则$A=B$。

证明 证明类似证明数列极限的唯一性

定理 3.2 (函数极限的局部保序性)

若$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\lim_{x\to x_0}g(x)=B,A>B$，则$\exists\delta>0$，当x有$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>g(x)$

证明 证明类似证明数列极限的保序性

引理 3.1

$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，则$\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta),|f(x)|>\frac{|A|}{2}$。

证明 请使用局部保序性证明

引理 3.2

假设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 若$\exists\delta>0, \forall x(x<|x-x_0|<\delta)$, 有$f(x)\geq g(x)$, 则$A\geq B$

证明

定理 3.3 (函数极限的局部有界性)

若$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 则$\exists\delta, \forall x(0<|x-x_0|<\delta), m\leq f(x)\leq M$, m, M为固定实数。
若$f(x)$在x_0有定义, 则在x满足$|x-x_0|<\delta$的条件下, $\min\{m,f(x)\}\leq f(x)\leq \max\{M,f(x)\}$。

证明 请使用局部保序性证明

定理 3.4 (函数极限的夹逼性定理)

若$\exists r>0$, $\forall x(x<|x-x_0|<r)$, 有$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, 且$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$, 则$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

证明

命题 3.4

证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

证明 使用夹逼性证明。

再用数列逼近证明。

定理 3.5 (函数极限四则运算)

假设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 则:

1. $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha A+\beta B$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

证明

命题 3.5

求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}$$

的极限。

证明

命题 3.6

求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$$

的极限。

证明

3.1 函数极限和数列极限的关系

定理 3.6 (否定命题的分析表示)

$\{x_n\}$以a为极限: $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,|x_n-a|<\epsilon$。

$\{x_n\}$不以a为极限: $\exists\epsilon>0,\forall N,\exists n>N,|x_n-a|\geq\epsilon$

定理 3.7 (heine定理)

$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$存在的充分必要条件是: 对于任意的满足$x_n\neq x_0$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛于A。

证明 **证明必要性**, 即证明:

若$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 则对于任意的满足$x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\},\{f(x_n)\}$收敛于A。

因为$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 则$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$, 成立$|f(x)-A|<\epsilon$。

又因为对于$\{x_n\}$, 有$x_n\neq x_0$且$\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 即$\forall\delta>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N$, 成立$0<|x_n-x_0|<\delta$。

则$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 对于该$\delta$, $\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N$, 有$0<|x_n-x_0|<\delta$, 且在该$\delta$下有$|f(x_n)-A|<\epsilon$。证明完毕。

证明充分性, 即证明:

若对于任意的满足$x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\},\{f(x_n)\}$收敛于A, 则$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$。

利用反证法, 若$\lim_{x\to x_0}f(x)\neq A$, 则$\exists\epsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x(0<|x-x_0|<\delta)$, 使得$|f(x)-A|\geq\epsilon_0$

取$\delta_n=\frac{1}{n},n=1,2,3,\cdots$,则对于$\epsilon_0$,有:

$$\exists x_1(0<|x_1-x_0|<1),|f(x_1)-A|\geq\epsilon_0$$
$$\exists x_2(0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2}),|f(x_2)-A|\geq\epsilon_0$$
$$\exists x_3(0<|x_3-x_0|<\frac{1}{3}),|f(x_3)-A|\geq\epsilon_0$$
$$\cdots\cdots$$

对于数列$\{x_n\}$, 对于$\epsilon_0,\forall n,|x_n-x_0|>\epsilon_0$恒成立。

即: $\exists\epsilon=\epsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N}^+,\exists n>N,|f(x_n)-A|>\epsilon$。则存在数列$\{x_n\}$不收敛于A。这与条件矛盾, 则假设不成立。证明完毕。

命题 3.7

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x_0=0$处极限不存在。

证明

引理 3.3

$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在并且有限(收敛)的充分必要条件是: 对任意满足$x_n\neq x_0$, $\lim_{n\to\infty}x_n$的$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛。

证明

3.2 单侧极限

定义 3.2

假设$f(x)$在$(x_0-\rho, x_0)$有定义，如果存在B, $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x(-\delta<x-x_0<0)$, 成立$|f(x)-B|<\epsilon$, 则称B是$f(x)$在$x_0$的左极限，记为$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=B(f(x)\to B(x\to x_0^-))$。
类似地，假如存在C, $\exists\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x(0<x-x_0<\delta)$, 成立$|f(x)-C|<\epsilon$, 则称C是$f(x)$在$x_0$的右极限，记为$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=C(f(x)\to C(x\to x_0^+))$。
则$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$

命题 3.8

$$\mathbf{sign}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

证明

命题 3.9

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\\ 2\cos(x^2) & x\geq 0\end{cases}$$

3.3 函数极限定义的扩充

可以将自变量x的趋向扩充成以下六种:

1. $x\to x_0$
2. $x\to x_0^+$
3. $x\to x_0^-$
4. $x\to +\infty$
5. $x\to -\infty$
6. $x\to \infty$

而应变量$f(x)$的趋向可以扩充成以下四种:

1. $f(x)\to A$
2. $f(x)\to +\infty$
3. $f(x)\to -\infty$
4. $x\to\infty$

现在加上对应的分析表述，对于自变量x:

1. $x\to x_0: \exists\delta>0, \forall x(0<|x-x_0|<\delta)$
2. $x\to x_0^+: \exists\delta>0, \forall x(0<x-x_0<\delta)$
3. $x\to x_0^-: \exists\delta>0, \forall x(-\delta<x-x_0<0)$
4. $x\to +\infty: \exists X>0, \forall x(x>X)$
5. $x\to -\infty: \exists X>0, \forall x(x<-X)$
6. $x\to \infty: \exists X>0, \forall x(|x|>X)$

对于应变量$f(x)$:

1. $f(x) \to A : \forall \epsilon > 0, \cdots, |f(x) - A| < \epsilon$
2. $f(x) \to +\infty : \forall G > 0, \cdots, f(x) > G$
3. $f(x) \to -\infty : \forall G > 0, \cdots, f(x) < -G$
4. $x \to \infty : \forall G > 0, \cdots, |f(x)| > G$

命题 3.10

写出:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$$

的分析表述。

证明

命题 3.11

写出:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

的分析表述。

证明

命题 3.12

写出:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

的分析表述。

证明

命题 3.13

证明:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

证明

命题 3.14

证明

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

证明

我们讲了函数极限的性质和函数极限的四则运算。讲函数极限的性质的时候是对于收敛函数来讨论的。对于扩充后的函数极限则不一定成立, 特别对于∞。性质要排除∞, 四则运算要排除待定型。

对于扩充后的heine定理应该如何书写: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$充分必要条件: 对任意的满足$x_n \to +\infty (n \to \infty)$的数列$\{x_n\}$,, 成立$\{f(x_n)\}$收敛于A。

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$存在且有限的充分必要条件是: 对任意满足$x_n \to +\infty (n \to +\infty)$的数列$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛。

命题 3.15

设:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_k x^k}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_j x^j}(a_n, a_k \neq 0, b_m, b_j \neq 0)$$

考虑$\lim_{x\to\infty} f(x)$和$\lim_{x\to 0} f(x)$。

证明 $x \to \infty$的情况:

分三种情况讨论:

1. $n = m$:
2. $n > m$:
3. $n < m$:

$x \to 0$的情况:

分三种情况讨论:

1. $k = j$:
2. $k > j$:
3. $k < j$:

命题 3.16

证明:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

证明 提示: 夹逼法。同时$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

函数极限的Cauchy收敛原理

回忆以下数列的情况: $\lim_{n\to\infty} x_n$收敛$\Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \epsilon$。

在函数中, 我们做了拓广, 并不是所有的拓广都有Cauchy收敛原理。

对于函数发散时是没有Cauchy收敛原理的。

定理 3.8 (函数极限的Cauchy收敛原理)

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在并且有限(收敛)$\Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists X > 0, \forall x', x'' > X, |f(x') - f(x'')| < \epsilon$

证明