数学分析

作者：hapo

时间：December 22, 2022

目录

记录本书的原因是因为我觉得自己的数学分析实在太烂了。因此我决定使用费曼学习法。这是一个链式反应，在我学习随机过程的时候，我发现自己的概率论太差了，而当我学习概率论的时候，我又发现我的测度论太差了，而我学习测度论的时候，我最终发现，我差的是数学分析。而这个最初始的问题是我并没有系统地学过数学分析。而在学习数学分析的过程中，我发现我对好多概念并不明晰，这使得学习的进度缓慢，并且经常容易在概念上卡壳，而卡壳结束后又很快忘记。因此，为了能够更好地记住，我决定使用费曼学习法。在此，我记录下我学习数学分析的过程。

第 1 章 集合与映射

定义 1.1 (集合)

是具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集的总体，其中的对象称为集合的元素。♣

集合通常记为A, B, C, X, Y
元素通常记为s, t, a, b, x, y
x是集合S的元素, 记为$x \in S$

第 2 章 实数的完备性

内容提要

- 有理数的定义 2.2
- Bolzano-Weierstrass定理 2.13
- 数列极限的保序性逆命题 2.1

在本章中，我们将介绍实数的完备性。在介绍实数之前，我们需要将实数定义或者说引入。而对于实数的定义是有很多的，而我在此介绍无穷十进制小数表示和戴德金(Dedekind)分割。这部分我将结合陈纪修教授的教材和Ayumu的讲义。

在引入实数之前，我们需要先介绍有理数，而在介绍有理数之前，我们需要规定一些常用集合的记号。而介绍常用集合，则需要先介绍集合(set)，在此我们并不介绍集合，我们暂时默认我们已经知道了集合的概念，将来我们会对该部分内容进行扩充。现在让我们来列举一些常用的集合。

定义 2.1 (常用集合表示)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots\}$

$\mathbb{Z}^+ = \{n | n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$ ♣

在定义了以上的集合表示之后，我们就能以上的符号来表示有理数：

定义 2.2 (有理数)

若一个数x可以表示成$\frac{q}{p}$的形式，其中$q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$, 则称x为**有理数**(rational number)。而由有理数组成的集合称为**有理数集**，有理数集常用$\mathbb{Q}$表示，其可以表示为：

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+\}$$

在这里, 我们可以看到p只需要属于$\mathbb{Z}^+$, 这是因为若x为负的, 我们总可以规定负号出现在分子上。♣

有理数对加减乘除都封闭，并且我们在有理数上定义了大小关系，即有理数也是良序的。但是它并不能满足研究所需。例如，存在长度无法用有理数表示。并且有理数之间存在“空隙”，即有理数不连续。而在我们之后的研究中，我们往往需要研究连续性，因此我们需要对有理数进行扩充。在这之前，我们先来证明确实有一些数无法用有理数表示。

命题 2.1

$\sqrt{2}$不是有理数。♠

证明 我们用反证法。假设$\sqrt{2}$为有理数，那么存在$q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$，使得$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$。

而且有的函数在实数域和有理数域上的表现完全不一样，比如狄利克雷(dirichlet)函数。

定理 2.1 (确界存在定理—实数系连续性定理)

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。♡

2.1 数列极限

定义 2.3 (数列极限的定义)

对于数列$\{a_n\}$, 存在一个实常数a, 对$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$，使得当$n > N$时，$|a_n - a| < \epsilon$成立，则称$\{a_n\}$**收敛**(convengent)于a或者$\{a_n\}$的**极限**(limit)为a, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或者 \quad a_n \to a(n \to +\infty)$$

若不存在实数a, 满足上述性质, 则称数列$\{a_n\}$**发散**(divergent)。

一个数列收敛与否，收敛的话，收敛于哪个数，这与数列的前有限项无关。

定义 2.4 (无穷小量的定义)

以零为极限的变量称为**无穷小量**。

命题 2.2

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 1(q < 1)$$

证明

命题 2.3

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

证明

命题 2.4

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

证明

命题 2.5

设$a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

证明

定理 2.2 (数列极限的唯一性)

若

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$$

则

$$a = b$$

证明

定义 2.5

1. 对于数列$\{x_n\}$, 若$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立$x_n \leq M$, 则称M是$\{x_n\}$的一个上界, 或称$\{x_n\}$有上界。
2. 对于数列$\{x_n\}$, 若$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立$x_n \geq m$, 则称m是$\{x_n\}$的一个下界, 或称$\{x_n\}$有下界。

$\{x_n\}$既有上界又有下界, 则称$\{x_n\}$有界。

$\{x_n\}$有界的另一个定义：$\exists X \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{N}^+$, 成立$|x_n| \leq X$

定理 2.3 (数列极限的有界性)

若$\{x_n\}$的极限存在，则$\{x_n\}$有界。

证明

定理 2.4 (数列极限的保序性)

存在两个数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, \quad 且 \quad a < b$$

则$\exists N \in \mathbb{Z}^+$，当$n > N$时，$x_n < y_n$。

证明

引理 2.1 (数列极限的保序性逆命题)

对于$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$, 若$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, x_n \leq y_n$, 则$a \leq b$。

证明

引理 2.2

1. 若$\lim_{n\to\infty} y_n = b > 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n > \frac{b}{2} > 0$。
2. 若$\lim_{n\to\infty} y_n = b < 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, y_n < \frac{b}{2} < 0$。

证明 利用数列极限的保序性证明。当$b > 0$时，取$\{x_n = \frac{b}{2}\}$, 则$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{2} < b$, 由数列极限的保序性可知，$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有$y_n > x_n = \frac{b}{2}$, 证毕。

同理可证明$b < 0$的情况。

以上推论可以合起来写为:

引理 2.3

若$\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 则$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n| > \frac{|b|}{2} > 0$。

证明 除了上一个推论那样分开来证明, 还可以如下证明: $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 即$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $|y_n - b| < \epsilon$。

由三角不等式得:

$$|y_n - b| > ||y_n| - |b||$$

即:

$$||y_n| - |b|| < |y_n - b| < \epsilon$$

因此$\lim_{n\to\infty} |y_n| = |b|$。之后的证明同上。

定理 2.5 (数列极限的夹逼性定理)

对于数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, 若$\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, 成立$x_n \leq y_n \leq z_n$, 且$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, 则$\lim_{n\to\infty} y_n = a$

证明 $\forall \epsilon, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, |x_n - a| < \epsilon$, 即$x_n - a > -\epsilon$。

同理, $\forall \epsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2, |y_n - a| < \epsilon$, 即$z_n - a < \epsilon$。

取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 则:

$$-\epsilon < x_n - a < y_n - a < z_n - a < \epsilon$$

即:

$$-\epsilon < y_n - a < \epsilon$$

即:

$$|y_n - a| < \epsilon$$

总结起来即为: $\forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |y_n - a| < \epsilon$, 即$\lim_{n\to\infty} y_n = a$, 证毕。

命题 2.6

求:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

定理 2.6 (数列极限的四则运算)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b} (b \neq 0)$

证明

命题 2.7

$$求 \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} - (-2)^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}$$

证明

命题 2.8

$$当 a > 0 时, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

证明

命题 2.9

$$求 \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$$

证明

命题 2.10

$$求 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

证明

有限个

命题 2.11

设$a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$

证明

命题 2.12

若$\{x_n\}$是无穷小量，$\{y_n\}$有界($|y_n| < 0$)，则$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

证明

2.2 无穷大量

定义 2.6 (无穷大量)

对于一个数列$\{x_n\}$，若对于任意给定的$G > 0$, 可以找到正整数N, 使得当$n > N$时，$|x_n| > G$，则称数列$\{x_n\}$是无穷大量，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

若对于该数列$\{x_n\}, |x_n| > G$可以恒表示为$x_n > G$，则称数列$\{x_n\}$是正无穷大量，记为$+\infty$。
若对于该数列$\{x_n\}, |x_n| > G$可以恒表示为$x_n < -G$，则称数列$\{x_n\}$是负无穷大量，记为$-\infty$。

命题 2.13

设$|q| > 1$，证明$\{q^n\}$是无穷大量。

证明

命题 2.14

证明$\{\frac{n^2-1}{n+5}\}$是无穷大量。

证明

引理 2.4

若$x_n \neq 0$，则$\{x_n\}$是无穷大量的充要条件是$\{\frac{1}{x_n}\}$是无穷小量。

证明

引理 2.5

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$满足$\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N_0$，有$|y_n| \geq \delta > 0$，则$\{x_n y_n\}$也是无穷大量。

证明

引理 2.6

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\{y_n\}$极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$，则$\{x_n y_n\}$与$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

证明

命题 2.15

$\{\frac{n}{\sin(n)}\}$和$\{n\cdot\arctan(n)\}$是无穷大量。

证明

命题 2.16

讨论极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_k}$$

其中$a_0,b_0\neq 0,k,l\in\mathbb{Z}^+$

证明 从分子上提出n^k，分母上提出n^l次

2.2.1 无穷大的运算

若$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则记$\{x_n\}$为“+∞”。
若$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$，则记$\{y_n\}$为“+∞”。
若$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty$，则记$\{z_n\}$为“+∞”。
若$\lim_{n\to\infty}w_n=0$，则记$\{z_n\}$为“0”。

定理 2.7

1. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$
2. $(+\infty)-(-\infty)=+\infty$
3. $(+\infty)\pm(\text{有界量})=+\infty$
4. $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
5. $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

定义 2.7

1. $(+\infty)-(+\infty)=?$
2. $(+\infty)+(-\infty)=?$
3. $0\cdot\infty=?$
4. $\frac{0}{0}=?$
5. $\frac{\infty}{\infty}=?$
6. $\cdots$

上述情况称为“待定型”

定义 2.8

若数列$\{x_n\}$，有$x_n\leq x_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调增加，记为$\{x_n\}\uparrow$。若有$x_n<x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调增加，记为$\{x_n\}$严格$\uparrow$。
若数列$\{x_n\}$，有$x_n\geq x_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^+$，则称数列$\{x_n\}$单调减少，记为$\{x_n\}\downarrow$。若有$x_n>x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$严格单调减少，记为$\{x_n\}$严格$\downarrow$。

定理 2.8 (Stolz定理)

假设$\{y_n\}$严格单调增加数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$。若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a(a\text{为有限数},+\infty,-\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$$

♡

证明 因为陈老的证明简介明了，我们先写陈老的证明:

当a = 0时: 因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$，则$\exists N_1\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_1,y_n>0$。

又因为$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$，则$\forall\epsilon>0,\exists N_2\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_2,\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right|<\frac{\epsilon}{2}$。

取$N_3=\max\{N_1,N_2\},\forall n>N_3$:

$$|x_n-x_{n-1}|<\frac{\epsilon}{2}|y_n-y_{n-1}|$$

又因为$\{y_n\}$严格单调增加，则上式可以化为:

$$|x_n-x_{n-1}|<\frac{\epsilon}{2}(y_n-y_{n-1})$$

根据三角不等式:

$$|x_n-x_{N_3}|\leq|x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_{N_3+1}-x_{N_3}|$$

根据上两式，我们可以得出:

$$|x_n-x_{N_3}|<\frac{\epsilon}{2}(y_n-y_{N_3})$$

两边同除以y_n得:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{N_3}}{y_n}\right|<\frac{\epsilon}{2}(1-\frac{y_{N_3}}{y_n})<\frac{\epsilon}{2}$$

则根据三角不等式:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right|<\frac{\epsilon}{2}+\left|\frac{x_{N_3}}{y_n}\right|$$

因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty,\exists N_4\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_4,y_n>\frac{2|x_{N_3}|}{\epsilon}$

则可以取$N=\max\{N_3,N_4\},\forall n>N_4$:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right|<\epsilon$$

则对于$a=0$时:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$$

当$a\neq0$时:

取$z_n=x_n-ay_n$，则

$$\frac{z_n-z_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a$$

因此:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n-z_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\right)=0$$

根据以上证明的$a=0$的情况可知:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{y_n}=0$$

又因为:

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{z_n}{y_n}+a$$

所以当$a\neq0$时:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$$

当$a=+\infty$时:

因为$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$, 则$\exists N_1\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_1,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}>1$, 即:

$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}$$

因为$\{y_n\}$严格单调增加, 则

$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}>0$$

即$\{x_n\}$**严格单调增加**。

同时, 同其他情况的证明, 我们有:

$$x_n-x_N>y_n-y_N$$

又因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 则$\forall G>\max\{0,y_N-x_N\},\exists N_2\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_2,y_n>2G$。

则

$$x_n>y_n-y_N+x_N>G$$

即$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\{x_n\}$趋向于$+\infty$。

此时考虑$\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$, 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$, 则$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$(引理 2.4)。根据$a=0$的情况得: $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$, 因此$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$, 即$\forall G>0,\exists N_3\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_3,\left|\frac{x_n}{y_n}\right|>G$。

又因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 则$\exists N_4\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_4,y_n>0$, 同理$\exists N_5\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_5,x_n>0$。

则当$n>\max\{N_4,N_5\}$时, $\frac{x_n}{y_n}>0$。

即$\forall G>0,\exists N=\max\{N_3,N_4,N_5\}\in\mathbb{N}^+,\forall n>N,\frac{x_n}{y_n}>G$, 即$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$。$a=+\infty$时也成立。同理, 也能证明$a=-\infty$的情况。

现在用定义证明:

当a为有限数时:

因为$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$, 则$\forall\epsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_1,\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\right|<\frac{\epsilon}{2}$。

又因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 则$\exists N_2\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_2,y_n>0$。

则$\forall n>N_3=\max\{N_1,N_2\}$, 结合三角不等式, 我们有:

$$\frac{x_n}{y_n}-a<\frac{\epsilon}{2}\left(1-\frac{y_{N_3}}{y_n}\right)+\frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n}<\frac{\epsilon}{2}+\frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n}$$

因为$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 所以$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n}=0$, 即$\exists N_4\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_4,\left|\frac{x_{N_3}-ay_{N_3}}{y_n}\right|<\frac{\epsilon}{2}$。

即$\forall\epsilon>0,\exists N_5=\max\{N_3,N_4\},\forall n>N_5,\frac{x_n}{y_n}-a<\epsilon$。

同理可以证明:$\forall n>N_5,\frac{x_n}{y_n}-a>-\epsilon$。因此$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$。

命题 2.17

用Stolz定理证明, 若$\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

证明

命题 2.18

$$\text{求}\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

证明

命题 2.19

$$\text{设}\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \text{求}\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}$$

证明

2.3 收敛准则

收敛数列一定有界，但是收敛数列不一定有界。

1. 那么有界数列加什么条件收敛？
2. 有界数列不加条件的情况下，可以得到什么弱一些的结论？

定理 2.9

单调有界数列必定收敛。

证明 不妨设$\{x_n\}$单调增加，有上界。

定理意义: 从定义证明时, 我们需要知道极限a, 相当于验证极限为a, 而当极限未知时, 则无法证明。而定理则从数列本身的性质出发, 不需要知道极限是多少。

引理 2.7

若数列$\{x_n\}$从第N项之后开始单调有界, 则数列$\{x_n\}$依旧收敛。

证明 考虑$n \geq N$后的数组成的数列, 设$n_1 = n - N + 1$, 则$\{x_{n_1}\}$单调有界。由于$\{x_{n_1}\}\,(n_1 \geq 1)$单调有界, 则$\{x_{n_1}\}\,(n_1 \geq 1)$收敛。即$\exists a, \forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n_1 > N_1$, 有$|x_{n_1} - a| < \epsilon$。那么我们可以取$N_2 = N_1 + N - 1$, 此时$\forall \epsilon, \exists N_2 = N_1 + N - 1, \forall n > N_2$, 有$|x_n - a| < \epsilon$, 即数列$\{x_n\}$极限存在。

命题 2.20

设$x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

命题 2.21

设$0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), n = 1, 2, 3, \cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

无穷小量的趋近速度。

命题 2.22

$$\text{对于上题的 } \{x_n\}\text{, 求极限, } \lim_{n\to\infty} nx_n$$

证明

命题 2.23

$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明

兔子

命题 2.24 (Fibonacci数列)

$\{a_n\}$为Fibonacci数列, 令$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$，讨论$\{b_n\}$数列。

证明

接下来我们来研究π和e

关于π:

命题 2.25

证明$\left\{L_n = n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$收敛。求圆的面积公式。

证明 取$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$, 当$n\geq 3$时, $nt\leq 45^\circ$。且由三角公式得:

$$\tan(nt)=\frac{\tan[(n-1)t]+\tan(t)}{1-\tan[(n-1)t]tan(t)}$$

由于$nt\leq 45^\circ$, 则$tan(kt)<1(k<n)$, 因此:

$$\tan(nt)=\frac{\tan[(n-1)t]+\tan(t)}{1-\tan[(n-1)t]tan(t)}>\tan[(n-1)t]+\tan(t)$$

则:

$$\tan(nt)>\tan[(n-1)t]+\tan(t)$$
$$\tan[(n-1)t]>\tan[(n-2)t]+\tan(t)$$
$$\cdots\cdots$$

则:

$$\tan(nt)>n\tan(t)$$

现在来考虑$\sin[(n+1)t]$:

$$\begin{aligned}\sin[(n+1)t]&=\sin(nt)\cos(t)+\cos(nt)\sin(t)\\&=\sin(nt)\cos(t)\left[1+\frac{\tan(t)}{\tan(nt)}\right]\\&<\sin(nt)\cos(t)\left[1+\frac{1}{n}\right]\\&<\sin(nt)\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

即:

$$n\sin[(n+1)t]<(n+1)\sin(nt)$$

将$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$代入得:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)<(n+1)\sin\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right)$$

即该数列单调增加。

考虑到单位圆的面积:

$$S'>n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

并且单位圆的面积小于外接正方形的面积, 即:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)<S'<4$$

即:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)<\frac{4}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

因为$n\geq 3$, 所以:

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)<8$$

因此数列$\left\{L_n=n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调有界, 则该数列极限存在。

现在定义$\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=\pi$。

再来考虑单位圆的面积S', 设内接正多边形的面积为S_1, 外接正多边形的面积为S_2, 则$S_1(n)<S'<S_2(n)$。

内接正多边形的面积为:

$$S_1(n) = n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

外接正多边形的面积为:

$$S_2(n) = n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = n\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

并且根据数列极限的四则运算有:

$$\lim_{n\to\infty} S_1(n) = \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \pi$$

$$\lim_{n\to\infty} S_2(n) = \frac{\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} = \pi$$

则根据夹逼性原理得:

$$S' = \pi$$

其中, 对于外接正多边形的面积, 考虑:

$$\begin{aligned}
(n+1)\tan(nt) - n\tan[(n+1)t] &= (n+1)\frac{\sin(nt)}{\cos(nt)} - n\frac{\sin[(n+1)t]}{\cos[(n+1)t]} \\
&= \frac{(n+1)\sin(nt)\cos[(n+1)t] - n\sin[(n+1)t]\cos(nt)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
&= \frac{\sin(nt)\cos[(n+1)t] - n\sin(t)}{\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
&= \frac{\sin[(2n+1)t] - \sin(t) - 2n\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]} \\
&= \frac{\sin[(2n+1)t] - (2n+1)\sin(t)}{2\cos(nt)\cos[(n+1)t]}
\end{aligned}$$

并且当$n \geq 3$时, 有:

$$\sin[(2n+1)t] = \sin(2nt)\cos(t) + \cos(2nt)\sin(t) < \sin(2nt) + \sin(t)$$

$$\sin(2nt) = \sin[(2n-1)t]\cos(t) + \cos[(2n-1)t]\sin(t) < \sin[(2n-1)t] + \sin(t)$$

$$\cdots\cdots$$

因此:

$$sin[(2n+1)t] < (2n+1)\sin(t)$$

因此:

$$(n+1)\tan(nt) < n\tan[(n+1)t]$$

即:

$$(n+1)\tan\left(\frac{180^\circ}{n+1}\right) < n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

因此数列$\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调递减。因为外接正多边形面积必然大于内接正方形, 因此:

$$n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) > 2$$

因此数列$\left\{n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right\}$单调有界, 则该数列极限存在。

关于e:

命题 2.26

考虑两个数列:

$$\left\{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad 和 \quad \left\{y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

证明这两个数列极限存在且相等。

证明

定义$\ln = \log_e$为自然对数，e自然对数的底数。

命题 2.27

令$a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, (p > 0)$，证明$\{a_n\}$当$p > 1$时收敛，当$p \leq 1$时发散。

证明

$p = 1$时，$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$为调和级数，它是正无穷大量，我们想知道它趋近无限的速度。

命题 2.28

证明

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

收敛。

证明 极限记为γ，称为欧拉常熟。$\gamma >= 0.577215$

命题 2.29

证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$$

证明 除了夹逼准则，还能用上一个数列相减计算。

命题 2.30

$$d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+}\frac{1}{n}$$

证明

以上是与e相关的数列

定义 2.9 (闭区间套)

有一列闭区间$\{[a_n, b_n]\}$，满足:

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \cdots$
2. $b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$

则称这样的一列闭区间是一个闭区间套。

定理 2.10 (闭区间套定理)

假如$[a_n, b_n]$是一个闭区间套，则存在唯一的实数ξ，它属于一切闭区间$[a_n, b_n]$。且$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$。

证明

定理 2.11

实数集不可列。

证明 反证法

子列

定义 2.10

存在一个数列$\{x_n\}$，取一列严格单调增加的正整数$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$，则$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdot$称为$\{x_n\}$的一个子列，记为$\{x_{n_k}\}$，$k$代表子列中的第$k$项，又恰好是$\{x_n\}$中的第$n_k$项。

其中$n_k \geq k, \forall k, n_j > n_k, \forall j > k$。

定理 2.12

设$\{x_n\}$收敛于a, 则它的任何一个子列也收敛于a。即$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，证明$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

证明

可以用于证明数列不收敛。

命题 2.31

若$\{x_n\}$存在两个子列收敛于不同的极限，则$\{x_n\}$发散。

证明

定理 2.13 (Bolzano-Weierstrass定理)

有界数列必有收敛子列。

证明 设数列为$\{x_n\}$, 因为数列有界, 所以$\forall n > 0$, 存在$a \leq x_n \leq b$, 则取$[a_1, b_1] = [a, b]$。

将$[a_1, b_1]$分为两个闭区间, 分别为$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$和$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, 其中至少有一个区间包含无穷多个数列的元素, 因为若两个区间都有有限个数列元素, 则数列$\{x_n\}$的元素有限。那么我们可以取包含无穷多个数列元素的区间为$[a_2, b_2]$。

同理, 我们可以取出$[a_3, b_3], [a_4, b_4], \cdots$。每一个区间中都包含无穷多个数列元素。

对于这些区间, $\forall n > 0, (1).[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], (2).\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$, 则这些闭区间组成了一个闭区间套。根据闭区间套定理, 存在唯一的实数γ属于一切闭区间$[a_n, b_n]$。

则我们可以这样构造子列:

从$[a_1, b_1]$中取x_{n_1}, 使得$n_1 > 0$, 这必然可以实现, 因为$[a_1, b_1]$中有无限多个数列元素。

从$[a_2, b_2]$中取x_{n_2}, 使得$n_2 > n_1$, 这必然可以实现, 因为$[a_2, b_2]$中有无限多个数列元素, 即$\forall n_1, \exists n_2 > n_1$。

从$[a_3, b_3]$中取x_{n_3}, 使得$n_3 > n_2$, 这必然可以实现, 因为$[a_3, b_3]$中有无限多个数列元素, 即$\forall n_2, \exists n_3 > n_2$。

$$\cdots\cdots$$

对于子列$\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, 则$\forall \epsilon > 0$, 取$K = \max\left\{\left[\log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)\right] + 2, 1\right\}$, $\forall k > K, b_k - a_k < \epsilon$, 同时$x_{n_k} \in [a_k, b_k], \gamma \in [a_k, b_k]$, 则$\forall k > K, |x_{n_k} - \gamma| < b_k - a_k < \epsilon$。

即$\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+, \forall k > K, |a_{n_k} - \gamma| < \epsilon$, 则$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \gamma$, 该子列收敛于$\gamma$。

在陈老的视频是，陈老是用夹逼性证明$\{x_{n_k}\}$收敛于γ, 证明如下:

$\forall k, a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, 且$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \gamma$, 则根据夹逼性, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \gamma$。**非常巧妙!**

定理 2.14

假设$\{x_n\}$是无界数列，则存在子列$\{x_{n_k}\}$，它是无穷大量。

证明

Cauchy收敛原理

定义 2.11

$\{x_n\}$满足：

$$\forall\xi>0,\exists N,\forall n,m>N,|x_n-x_m|<\xi$$

则称$\{x_n\}$为基本数列。

也可以是$\forall m>n>N$

证明

命题 2.32

判断

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

是否为基本数列。

证明

命题 2.33

判断

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

是否为基本数列。

证明

定理 2.15 (Cauchy收敛原理)

$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$\{x_n\}$是基本数列。

证明 **必要性**: 即$\{x_n\}$收敛 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$是基本数列。

假设$\{x_n\}$收敛于A, 则$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N,|x_n-A|<\frac{\epsilon}{2}$。

则对于$\forall n,m>N,|x_n-x_m|<|x_n-A|+|x_m-A|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$, 则$\{x_n\}$为基本数列。

充分性: 即$\{x_n\}$是基本数列$\Rightarrow$ $\{x_n\}$收敛。

因为$\{x_n\}$为基本数列, 即对于$\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$, $\forall m,n>N$, $|x_m-x_n|<\epsilon$。取$m=N+1$, 则$\forall n>N$, $|x_{N+1}-x_n|<\epsilon$, 即$x_{N+1}-\epsilon<x_n<x_{N+1}+\epsilon$。则我们可以取$a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_N,x_{N+1}-\epsilon\},b=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_N,x_{N+1}+\epsilon\}$, 此时$\forall n\in\mathbb{N}^+$:

$$a\le x_n\le b$$

即, $\{x_n\}$数列有界。

根据Bolzano-Weierstrass定理(定理 2.13), 则存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A, 则$\forall\epsilon>0$, $\exists K\in\mathbb{N}^+,\forall k>K,|x_{n_k}-A|<\frac{\epsilon}{2}$, 又由于$\{x_n\}$为基本数列, 则$\forall\epsilon>0,\exists N'\in\mathbb{N}^+,\forall m',n'>N',|x_{N+1}-x_{n'}|<\frac{\epsilon}{2}$。

取$N''=\max\{N',n_K\}$, 因为$\{x_{n_{k'}}\}$由无穷多项, 则必然存在$n_{k'}>N''\ge n_K$, 即$k'>K$,。此时, 因为$n_{k'}>N''\ge N'$, 则$\forall n'>N'$, $\left|x_{n'}-x_{n_{k'}}\right|<\frac{\epsilon}{2}$, 又因为$k'>K$, 则$\left|x_{n_{k'}}-A\right|<\frac{\epsilon}{2}$, 因此$\forall n'>N'$, $|x_{n'}-A|<\left|x_{n'}-x_{n_{k'}}\right|+\left|x_{n_{k'}}-A\right|<\epsilon$, 即数列$\{x_n\}$收敛。

而陈老是这样证明充分性的：

取$\epsilon=1$, 因为$\{x_n\}$是基本数列, 则$\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N,|x_n-x_{N+1}|<1$, 因此$|x_n|<|x_n-x_{N+1}|+|x_{N+1}|<$

$|x_{N+1}|+1$。取$M=\max\{|x_1|,|x_1|,\cdots,|x_N|,|x_{N+1}|+1\}$, 则:

$$\forall n\in\mathbb{N}^+, |x_n|\leq M$$

即$\{x_n\}$有界。

根据根据Bolzano-Weierstrass定理(定理 2.13), 则存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 假设该收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A。

根据$\{x_n\}$是基本数列, 则$\forall\epsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}^+,\forall n,m>N_1,|x_n-x_m|<\frac{\epsilon}{2}$, 现在固定$x_m$, 取$x_n$为子列$\{x_{n_k}\}$。现在考虑数列$\{|x_{n_k}-x_m|\}$和数列$\{\frac{\epsilon}{2}\}$, 取$K=N_1$, 则$\forall k>K$, 有$n_k>n_K\geq K=N_1$, 即$\forall k>K,|x_{n_k}-x_m|<\frac{\epsilon}{2}$, 根据数列极限的保序性逆命题(推论 2.1), $|A-x_m|\leq\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$。这对于$\forall m>N_1$都成立, 即数列$\{x_n\}$极限存在且为A。

命题 2.34

$\{x_n\}$满足压缩性条件, 即

$$|x_{n+1}-x_n|\leq k|x_n-x_{n-1}|, 0<k<1, \forall n=2,3,\cdots$$

则$\{x_n\}$是收敛的。

证明

实数系的基本定理

1. 确界存在定理(实数系的连续性定理)
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Bolzano-Weierstrass定理
5. Cauchy收敛原理(实数系完备性)

以上都是在实数系中考虑, 实数系上的基本数列必然是收敛数列, 因此Cauchy收敛原理也被称为实数系的完备性定理。实数系有完备性, 有理数不具备完备性。例如$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$是有理数列, 但是它的极限是无理数。以上五个定理等价。我们需要证明这五个定理等价。从Cauchy收敛原理推出闭区间套定理, 再从闭区间套定理推出确界存在定理。

定理 2.16

实数系的完备性等价于实数系的连续性。

证明 (1)Cauchy收敛原理⇒闭区间套定理。

(2)闭区间套定理⇒确界存在定理。

第 3 章 函数极限与连续函数

函数极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

定义 3.1

$y=f(x)$在$O(x_0,\rho)\setminus\{x_0\}$上有定义，如果存在一个数A，使得对任意给定的$\epsilon>0$，可以找到$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，成立$|f(x)-A|<\epsilon$，则称A是$f(x)$在$x_0$点的极限，记为$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$或者$f(x)\to A(x\to x_0)$。如果不存在满足上述性质的A，则称$f(x)$在$x_0$点极限不存在。

$O(x_0,\rho)\setminus\{x_0\}$称为去心邻域。

命题 3.1

证明：

$$\lim_{x\to 0}e^x=1$$

证明

命题 3.2

证明：

$$\lim_{x\to 2}x^2=4$$

证明

命题 3.3

证明：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

证明

函数极限的性质

定理 3.1 (函数极限的唯一性)

设A, B都是$f(x)$在x_0的极限，则$A=B$。

证明 证明类似证明数列极限的唯一性

定理 3.2 (函数极限的局部保序性)

若$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\lim_{x\to x_0}g(x)=B,A>B$，则$\exists\delta>0$，当x有$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>g(x)$

证明 证明类似证明数列极限的保序性

引理 3.1

$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，则$\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta),|f(x)|>\frac{|A|}{2}$。

证明 请使用局部保序性证明

引理 3.2

假设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 若$\exists\delta>0, \forall x(x<|x-x_0|<\delta)$, 有$f(x)\geq g(x)$, 则$A\geq B$ ♡

证明

定理 3.3 (函数极限的局部有界性)

若$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 则$\exists\delta, \forall x(0<|x-x_0|<\delta), m\leq f(x)\leq M$, m, M为固定实数。
若$f(x)$在x_0有定义, 则在x满足$|x-x_0|<\delta$的条件下, $\min\{m, f(x)\}\leq f(x)\leq \max\{M, f(x)\}$。 ♡

证明 请使用局部保序性证明

定理 3.4 (函数极限的夹逼性定理)

若$\exists r>0$, $\forall x(x<|x-x_0|<r)$, 有$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, 且$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$, 则$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ ♡

证明

命题 3.4

证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

♠

证明 使用夹逼性证明。
再用数列逼近证明。

定理 3.5 (函数极限四则运算)

假设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 则:
1. $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha A+\beta B$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

♡

证明

命题 3.5

求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x}$$

的极限。 ♠

证明

命题 3.6

求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

的极限。 ♠

证明

3.1 函数极限和数列极限的关系

定理 3.6 (否定命题的分析表示)

$\{x_n\}$以a为极限: $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,|x_n-a|<\epsilon$。

$\{x_n\}$不以a为极限: $\exists\epsilon>0,\forall N,\exists n>N,|x_n-a|\geq\epsilon$

定理 3.7 (heine定理)

$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$存在的充分必要条件是: 对于任意的满足$x_n\neq x_0$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛于A。

证明 **证明必要性**, 即证明:

若$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 则对于任意的满足$x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\},\{f(x_n)\}$收敛于A。

因为$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 则$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$, 成立$|f(x)-A|<\epsilon$。

又因为对于$\{x_n\}$, 有$x_n\neq x_0$且$\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 即$\forall\delta>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N$, 成立$0<|x_n-x_0|<\delta$。

则$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 对于该$\delta,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N$, 有$0<|x_n-x_0|<\delta$, 且在该$\delta$下有$|f(x_n)-A|<\epsilon$。证明完毕。

证明充分性, 即证明:

若对于任意的满足$x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的数列$\{x_n\},\{f(x_n)\}$收敛于A, 则$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$。

利用反证法, 若$\lim_{x\to x_0}f(x)\neq A$, 则$\exists\epsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x(0<|x-x_0|<\delta)$, 使得$|f(x)-A|\geq\epsilon_0$

取$\delta_n=\frac{1}{n},n=1,2,3,\cdots$,则对于$\epsilon_0$,有:

$$\exists x_1(0<|x_1-x_0|<1),|f(x_1)-A|\geq\epsilon_0$$
$$\exists x_2(0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2}),|f(x_2)-A|\geq\epsilon_0$$
$$\exists x_3(0<|x_3-x_0|<\frac{1}{3}),|f(x_3)-A|\geq\epsilon_0$$
$$\cdots\cdots$$

对于数列$\{x_n\}$, 对于$\epsilon_0,\forall n,|x_n-x_0|>\epsilon_0$恒成立。

即: $\exists\epsilon=\epsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N}^+,\exists n>N,|f(x_n)-A|>\epsilon$。则存在数列$\{x_n\}$不收敛于A。这与条件矛盾, 则假设不成立。证明完毕。

命题 3.7

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x_0=0$处极限不存在。

证明

引理 3.3

$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在并且有限(收敛)的充分必要条件是: 对任意满足$x_n\neq x_0$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$的$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛。

证明

3.2 单侧极限

定义 3.2

假设$f(x)$在$(x_0-\rho,x_0)$有定义，如果存在B, $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(-\delta<x-x_0<0)$, 成立$|f(x)-B|<\epsilon$, 则称B是$f(x)$在$x_0$的左极限，记为$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=B(f(x)\to B(x\to x_0^-))$。
类似地，假如存在C, $\exists\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0<x-x_0<\delta)$, 成立$|f(x)-C|<\epsilon$, 则称C是$f(x)$在$x_0$的右极限，记为$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=C(f(x)\to C(x\to x_0^+))$。
则$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$

命题 3.8

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

证明

命题 3.9

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\\ 2\cos(x^2) & x\geq 0\end{cases}$$

3.3 函数极限定义的扩充

可以将自变量x的趋向扩充成以下六种:

1. $x\to x_0$
2. $x\to x_0^+$
3. $x\to x_0^-$
4. $x\to+\infty$
5. $x\to-\infty$
6. $x\to\infty$

而应变量$f(x)$的趋向可以扩充成以下四种:

1. $f(x)\to A$
2. $f(x)\to+\infty$
3. $f(x)\to-\infty$
4. $x\to\infty$

现在加上对应的分析表述，对于自变量x:

1. $x\to x_0:\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$
2. $x\to x_0^+:\exists\delta>0,\forall x(0<x-x_0<\delta)$
3. $x\to x_0^-:\exists\delta>0,\forall x(-\delta<x-x_0<0)$
4. $x\to+\infty:\exists X>0,\forall x(x>X)$
5. $x\to-\infty:\exists X>0,\forall x(x<-X)$
6. $x\to\infty:\exists X>0,\forall x(|x|>X)$

对于应变量$f(x)$:

1. $f(x) \to A : \forall \epsilon > 0, \cdots, |f(x) - A| < \epsilon$
2. $f(x) \to +\infty : \forall G > 0, \cdots, f(x) > G$
3. $f(x) \to -\infty : \forall G > 0, \cdots, f(x) < -G$
4. $x \to \infty : \forall G > 0, \cdots, |f(x)| > G$

命题 3.10

写出:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$$

的分析表述。

证明

命题 3.11

写出:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

的分析表述。

证明

命题 3.12

写出:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

的分析表述。

证明

命题 3.13

证明:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

证明

命题 3.14

证明

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

证明

我们讲了函数极限的性质和函数极限的四则运算。讲函数极限的性质的时候是对于收敛函数来讨论的。对于扩充后的函数极限则不一定成立, 特别对于∞。性质要排除∞, 四则运算要排除待定型。

对于扩充后的heine定理应该如何书写: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$充分必要条件: 对任意的满足$x_n \to +\infty (n \to \infty)$的数列$\{x_n\}$,, 成立$\{f(x_n)\}$收敛于A。

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$存在且有限的充分必要条件是: 对任意满足$x_n \to +\infty (n \to +\infty)$的数列$\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$收敛。

命题 3.15

设:

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j}(a_n,a_k\neq 0,b_m,b_j\neq 0)$$

考虑$\lim_{x\to\infty}f(x)$和$\lim_{x\to 0}f(x)$。

证明 $x\to\infty$的情况:

分三种情况讨论:

1. $n=m$:
2. $n>m$:
3. $n<m$:

$x\to 0$的情况:

分三种情况讨论:

1. $k=j$:
2. $k>j$:
3. $k<j$:

命题 3.16

证明:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

证明 提示: 夹逼法。同时$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$

函数极限的Cauchy收敛原理

回忆以下数列的情况: $\lim_{n\to\infty}x_n$收敛$\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,|x_n-x_m|<\epsilon$。

在函数中, 我们做了拓广, 并不是所有的拓广都有Cauchy收敛原理。

对于函数发散时是没有Cauchy收敛原理的。

定理 3.8 (函数极限的Cauchy收敛原理)

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在并且有限(收敛)$\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists X>0,\forall x',x''>X,|f(x')-f(x'')|<\epsilon$

证明

3.4 连续函数

分析上讲, $f(x)$在x_0点连续: 当$x\to x_0$时, $f(x)\to f(x_0)$。

定义 3.3

设$f(x)$在x_0的某个邻域中有定义, 且成立

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称$f(x)$在x_0点连续, x_0是$f(x)$的连续点。

符号表述: $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(|x-x_0|<\delta)$, 成立$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$。

开区间情况:

定义 3.4

若$f(x)$在(a,b)的每一点上都连续, 则称$f(x)$在开区间(a,b)上连续。

命题 3.17

证明:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在$(0, 1)$连续。

证明

闭区间情况:

定义 3.5

若$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$点左连续。

若$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$点右连续。

符号表示:

左连续: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x(-\delta < x - x_0 \leq 0)$: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

右连续: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x(0 \leq x - x_0 < \delta)$: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

定义 3.6

$f(x)$在(a, b)上连续, 且在a点右连续, 在b点左连续, 则称$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续。

命题 3.18

证明:

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

在$(0, 1)$闭区间上连续。

证明

注:关于函数$f(x)$在一个区间里面连续, 整合以上的定义。

定义 3.7

设$f(x)$定义在某区间X上, 若$\forall x_0 \in X$, 及$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in X(|x - x_0| < \delta)$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。则称$f(x)$在区间X上连续。

命题 3.19

证明:

$$f(x) = \sin(x)$$

在$(-\infty, +\infty)$上连续。

证明 同理$f(x) = \cos(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续。

命题 3.20

证明:

$$f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$$

在$(-\infty, +\infty)$上连续。

证明

3.5 连续函数的四则运算

定理 3.9

有$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$, 则:

1. $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=f(x_0)g(x_0)$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}(g(x_0)\neq 0)$

命题 3.21

求:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\sin x}{3^x+2x}$$

证明

命题 3.22

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

$$Q(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$$

证明 $f(x)=c, g(x)=x$

命题 3.23

已知$\sin(x), \cos(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。

$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, 在$\left\{x \,\middle|\, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$上连续。

$\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, 在$\{x\,|x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$上连续。

证明

3.6 不连续点的类型

连续的定义:$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

该定义包含了如下几层意思:

1. $f(x)$在x_0点有定义。
2. $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$
3. $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

3.6.1 第一类不连续点

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

命题 3.24

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

在$x=0$不连续。

称第一类不连续点为跳跃点。

3.6.2 第二类不连续点

$\lim_{x\to x_0^+}f(x)$和$\lim_{x\to x_0^-}f(x)$至少有一个不存在。

命题 3.25

$f(x)=\sin(\frac{1}{x})$,$x=0$是它的第二类不连续点。

证明

命题 3.26

$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x=0$是它的第二类不连续点。

证明

3.6.3 第三类不连续点

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)\begin{cases}\neq f(x_0)\\ f(x)\text{在}x_0\text{点没定义。}\end{cases}$$

命题 3.27

$f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$, 在$x=0$极限存在, 但是没有定义。

证明

第三类不连续点称为可去不连续点。

命题 3.28

$$\mathrm{D}(x)=\begin{cases}1 & x\text{是有理数}\\ 0 & x\text{是无理数}\end{cases}$$

Dirichlet函数属于第二类不连续点。

证明

命题 3.29

黎曼(Riemann)函数:

$$\mathrm{R}(x)=\begin{cases}0 & x\text{是无理数}\\ \dfrac{1}{p} & x=\dfrac{q}{p}, p\in\mathbb{N}^+, q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}, p,q\text{互质}\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$, $\lim_{x\to x_0}\mathrm{R}(x)=0$。即$\mathrm{R}(x)$在一切无理点连续, 在一切有理点不连续。

为什么定义0的时候是1? 因为1可以写成$\frac{0}{1}$, 并且Riemann函数有周期性, 为了保持周期性, 因此定义0的时候是1。

证明

命题 3.30

区间(a,b)上的单调函数的不连续点必为第一类。♠

证明

3.7 反函数

映射: $f:X\to Y$ 为单射, 则$\exists f^{-1}:R_f\to X$。
存在性、连续性、可导性(可导性暂时不讲)
严格单调增加:$\forall x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)(y_1<y_2)$, 即$x_1\neq x_2, y_1\neq y_2$。

定理 3.10 (反函数存在定理)

若$f(x)$在D_f上严格单调增加(减少), 则存在f的反函数$xf^{-1}(y), y\in R_f$,且f^{-1}也严格单调增加(减少)。♡

证明