1.

$$\max Z = 4x_1 + 9x_2 + 2x_3^2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：

（1）k=3

$$f_3(s_3) = \max_{0\le x_3\le s_3}\left\{2x_3^2 + f_4(s_4)\right\} = \max_{0\le x_3\le s_3}\left\{2x_3^2\right\}$$

由函数增减性可知 $x_3 = s_3$， $f_3(s_3) = 2s_3^2$

（2）k=2　　$s_3 = s_2 - x_2$

$$f_2(s_2) = \max_{0\le x_2\le s_2}\left\{9x_2 + f_3(s_3)\right\} = \max_{0\le x_2\le s_2}\left\{9x_2 + 2s_3^2\right\} = \max_{0\le x_2\le s_2}\left\{9x_2 + 2(s_2 - x_2)^2\right\}$$

令 $\varphi_2(x_2) = 9x_2 + 2(s_2 - x_2)^2$，则 $\varphi_2'(x_2) = 9 - 4(s_2 - x_2) = 0$ 得 $x_2 = s_2 - \dfrac{9}{4}$

由于 $\varphi_2''(x_2) = 4 > 0$ 所以 $x_2 = s_2 - \dfrac{9}{4}$ 为极小值点，故极大值点必在 $[0, s_2]$ 端点，计算两端点函数值

$$\varphi_2(0) = 2s_2^2 \quad \varphi_2(s_2) = 9s_2$$

故

$$f_2(s_2) = \begin{cases} 9s_2 & 0 \le s_2 \le \dfrac{9}{2} \\ 2s_2^2 & \dfrac{9}{2} < s_2 \le 10 \end{cases}$$

（3）k=1　　$s_2 = s_1 - x_1$

$$f_1(s_1) = \max_{0\le x_1\le s_1}\left\{4x_1 + f_2(s_2)\right\} = \begin{cases} \max\limits_{\substack{0\le x_1\le s_1 \\ x_2 = s_2}}\left\{4x_1 + 9(s_1 - x_1)\right\} & 0 \le s_2 \le \dfrac{9}{2} \\ \max\limits_{\substack{0\le x_1\le s_1 \\ x_2 = 0}}\left\{4x_1 + (s_1 - x_1)^2\right\} & \dfrac{9}{2} < s_2 \le 10 \end{cases}$$

显然 $\max\limits_{\substack{0\le x_1\le s_1 \\ x_2 = s_2 \\ 0\le s_2\le \frac{9}{2}}}\left\{4x_1 + 9(s_1 - x_1)\right\} = 9s_1 \qquad x_1 = 0$

令 $\varphi_1(x_1) = 4x_1 + (s_1 - x_1)^2$，则 $\varphi_1'(x_1) = 4 - 2(s_1 - x_1) = 0$ 得 $x_1 = s_1 - 2$

由于 $\varphi_1''(x_1) = 2 > 0$ 所以 $x_1 = s_1 - 2$ 为极小值点，故极大值点必在 $[0, s_1]$ 端点，计算两端点函数值

$$\varphi_1(0) = 2s_1^2 \quad \varphi_1(s_1) = 4s_1$$

故

$$f_1(s_1) = \begin{cases} 4s_1 & 0 \le s_1 \le 2 \\ 2s_1^2 & 2 < s_1 \le 10 \end{cases} \text{或 } f_1(s_1) = 9s_1\ (0 \le s_1 \le 10)$$

由于 $s_1 \le 10$，由函数增减性可知，取 $s_1 = 10$， $f_1(s_1) = 200$ 为指标函数最优值。

回代求解最优决策，有 $x_1^*=0 \quad x_2^*=0 \quad x_3^*=10 \quad s_2^*=10 \quad s_3^*=10$

则线性规划问题最优解为 $\mathrm{X}^*=(0,0,10)^{\mathrm{T}}$ 最优值为 $Z^*=200$。

2.

$$\max Z=3x_1^3-4x_1+2x_2^2-5x_2+2x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1+2x_2+3x_3\le 18\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

（1）k=3

$$f_3(s_3)=\max_{0\le x_3\le\frac{s_3}{3}}\left\{2x_3+f_4(s_4)\right\}=\max_{0\le x_3\le\frac{s_3}{3}}\left\{2x_3\right\}$$

由函数增减性可知 $x_3=\dfrac{s_3}{3}$， $f_3(s_3)=\dfrac{2}{3}s_3$

（2）k=2 $\quad s_3=s_2-2x_2$

$$f_2(s_2)=\max_{0\le x_2\le\frac{s_2}{2}}\left\{2x_2^2-5x_2+f_3(s_3)\right\}=\max_{0\le x_2\le\frac{s_2}{2}}\left\{2x_2^2-5x_2+\frac{2}{3}s_3\right\}=\max_{0\le x_2\le\frac{s_2}{2}}\left\{2x_2^2-\frac{19}{3}x_2+\frac{2}{3}s_2\right\}$$

令 $\varphi_2(x_2)=2x_2^2-\dfrac{19}{3}x_2+\dfrac{2}{3}s_2$，则 $\varphi_2'(x_2)=4x_2-\dfrac{19}{3}=0$ 得 $x_2=\dfrac{19}{12}$

由于 $\varphi_2''(x_2)=4>0$ 所以 $x_2=\dfrac{19}{12}$ 为极小值点，故极大值点必在 $[0,\dfrac{s_2}{2}]$ 端点，计算两端点函数值

$$\varphi_2(0)=\frac{2}{3}s_2 \quad \varphi_2\left(\frac{s_2}{2}\right)=\frac{s_2^2}{2}-\frac{5}{2}s_2$$

故

$$f_2(s_2)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}s_2 & 0\le s_2\le\dfrac{19}{3}\\[2ex] \dfrac{s_2^2}{2}-\dfrac{5}{2}s_2 & \dfrac{19}{3}<s_2\le 18\end{cases}$$

（3）k=1 $\quad s_2=s_1-4x_1$

$$f_1(s_1)=\max_{0\le x_1\le\frac{s_1}{4}}\left\{3x_1^3-4x_1+f_2(s_2)\right\}=\begin{cases}\max\limits_{\substack{0\le x_1\le\frac{s_1}{4}\\ x_2=0}}\left\{3x_1^3-4x_1+\dfrac{2}{3}s_2\right\} & 0<s_2\le\dfrac{19}{3}\\[2ex] \max\limits_{\substack{0\le x_1\le\frac{s_1}{4}\\ x_2=\frac{s_2}{2}}}\left\{3x_1^3-4x_1+\dfrac{s_2^2}{2}-\dfrac{5}{2}s_2\right\} & \dfrac{19}{3}\le s_2\le 18\end{cases}$$

得到

$$f_1(s_1)=\frac{3}{64}s_1^3-s_1 \qquad x_1=\frac{s_1}{4}\,x_2=\frac{s_2}{2}\text{或}x_1=\frac{s_1}{4}\,x_2=0$$

由于 $s_1\le 18$，取 $s_1=18$， $f_1(s_1)=255.375$ 为指标函数最优值。

回代求解最优决策，有 $x_1^*=\dfrac{s_1}{4}$=4.5　$x_2^*=0$　$x_3^*=0$　　$s_2^*=0$　$s_3^*=0$

则线性规划问题最优解为 $X^*=(\dfrac{9}{2},0,0)^T$ 最优值为 $Z^*=255.375$。

3. 某人外出旅游，需将 5 件物品装入包裹，若包裹总重量有不超过 13kg 限制，物品单件重量及价值如下表。试问如何装这些物品，使总价值最大？

物品	A	B	C	D	E
单件重量(Kg)	7	5	4	3	1
单件价值(元)	9	4	3	2	0.5

解：

此决策问题可划分为 5 个阶段，ABCDE 分别为一个阶段 k=1,2,3,4,5

状态及状态量：k 阶段拥有的资源数 x_k　$0\le x_k\le 13$　$x_1=13$

决策与决策变量：k 阶段放入 A 背包的单件重量 u_k　$0\le u_k\le x_k$

状态转移方程：$x_{k+1}=x_k-u_k$

阶段效益：r_k

目标函数：$R=\sum_{k=1}^{n} r_k$

基本方程：$\begin{cases} f_k(x_k) \quad \max\limits_{0\le u_k\le x_k}\{r_k+f_{k+1}(x_{k+1})\} \\ f_6(x_6)=0 \quad k=1,2,3,4,5 \end{cases}$

该问题为离散问题，则用表格法进行求解

k	x_k	u_k	r_k	r_k+f_{k+1}	f_k	P_{kn}^*
5	13	0	0	0+0	0	
	12	1	0.5	0.5+0	0.5	E
4	13	0	0	0+0	0	
	12	0	0	0+0.5	0.5	E
	10	3	2	2+0	2	D
	9	3	2	2+0.5	2.5	DE
3	13	0	0	0+0	0	
	12	0	0	0+0.5	0.5	E
	10	0	0	0+2	2	D
	9	0	0	0+2.5	2.5	DE
	9	4	3	3+0	3	C
	8	4	3	3+0.5	3.5	CE
	6	4	3	3+2	5	CD
	5	4	3	3+2.5	5.5	CDE
2	13	0	0	0+0	0	
	12	0	0	0+0.5	0.5	E
	10	0	0	0+2	2	D
	9	0	0	0+2.5	2.5	DE
	9	0	0	0+3	3	C
	8	0	0	0+3.5	3.5	CE
	6	0	0	0+5	5	CD
	5	0	0	0+5.5	5.5	CDE
	8	5	4	4+0	4	B
	7	5	4	4+0.5	4.5	BE

	5	5	4	4+2	6	BD
	4	5	4	4+2.5	6.5	BDE
	4	5	4	4+3	7	BC
	3	5	4	4+3.5	7.5	BCE
	1	5	4	4+5	9	BCD
	0	5	4	4+5.5	9.5	BCDE
1	6	7	9	9+0	9	A
	5	7	9	9+0.5	9.5	AE
	3	7	9	9+2	11	AD
	2	7	9	9+2.5	11.5	ADE
	2	7	9	9+3	12	AC
	1	7	9	9+3.5	12.5	ACE
	1	7	9	9+4	13	AB
	0	7	9	9+4.5	13.5	ABE

可知 $P_{kn}^{*}=ABE$（放入背包的物品）最优值 $f_1=13.5$（最大总价值）