

5-整数规划

课后练习题

(1) 用分枝定界法求解下列整数规划问题

$$\begin{aligned} \min Z &= -x_1 - 5x_2 \\ \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且全为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

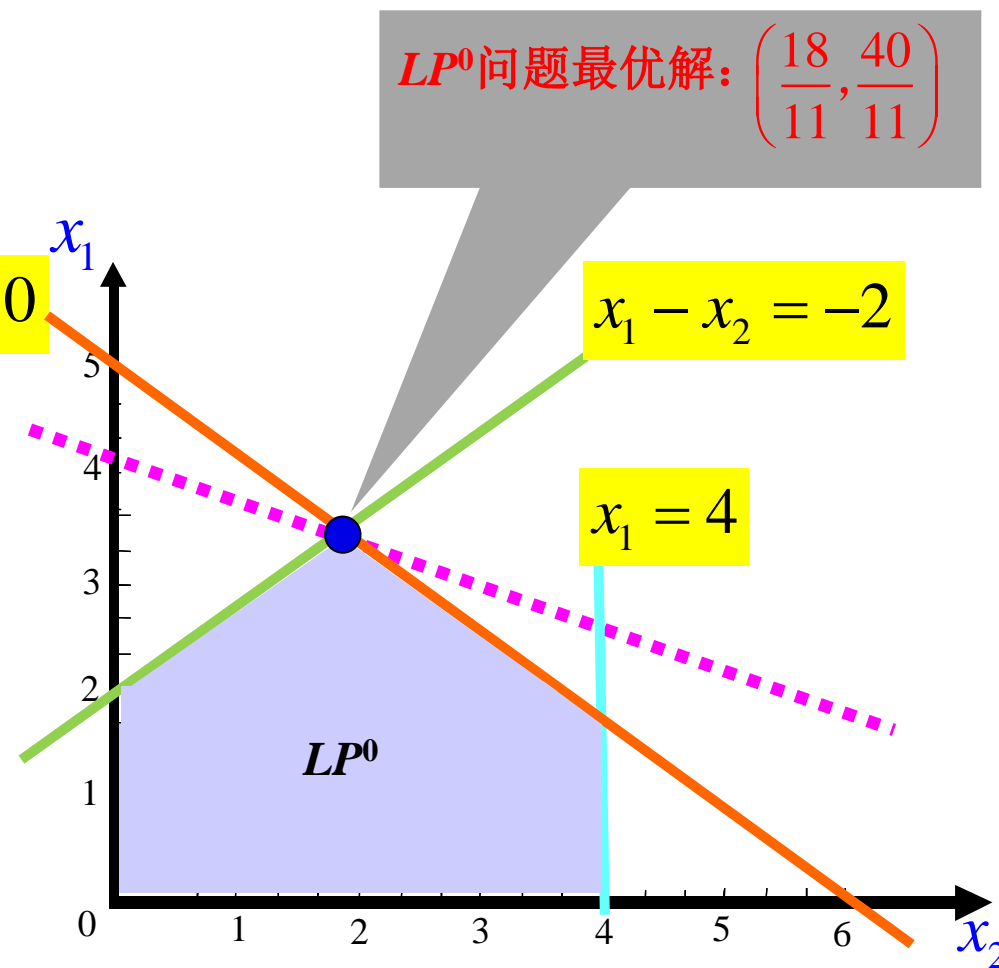
解：先求对应的松弛问题（记为 LP^0 ）

$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (LP^0)$$

用图解法得到最优解 $x = \left(\frac{18}{11}, \frac{40}{11}\right)$,

$Z^{(0)} = -\frac{218}{11}$, 如右图所示。



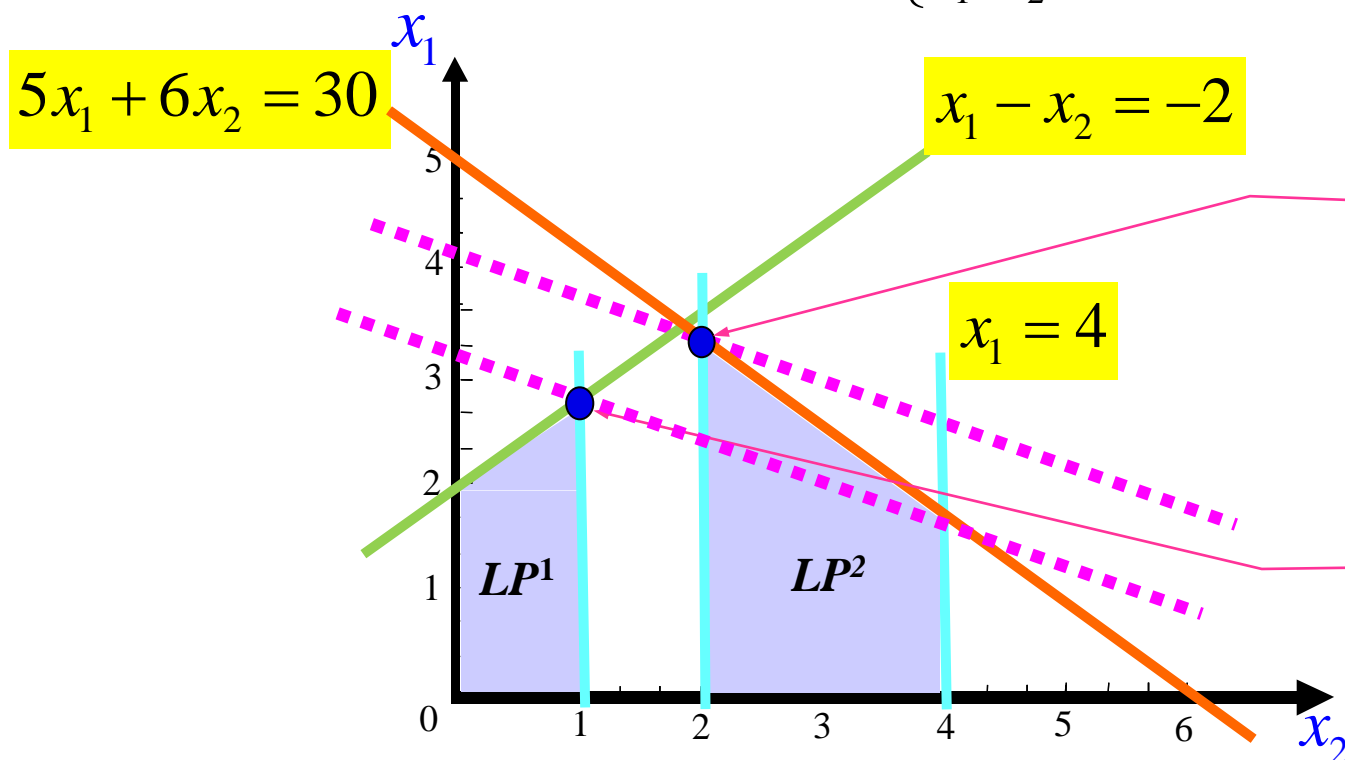
增加约束 $x_1 \leq 1$ 及 $x_1 \geq 2$ 得到两个线性规划

$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (LP^1)$$

$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ 2 \leq x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (LP^2)$$



$$LP^2 : x = (1, 3), \quad Z^{(2)} = -16$$

$$LP^1 : x = \left(2, \frac{10}{3}\right), \quad Z^{(1)} = -\frac{56}{3}$$

对 LP^3 进行分枝，增加约束 $x_1 \leq 2$ 及 $x_1 \geq 3$ 得到两个线性规划

$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 = 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(LP^5)

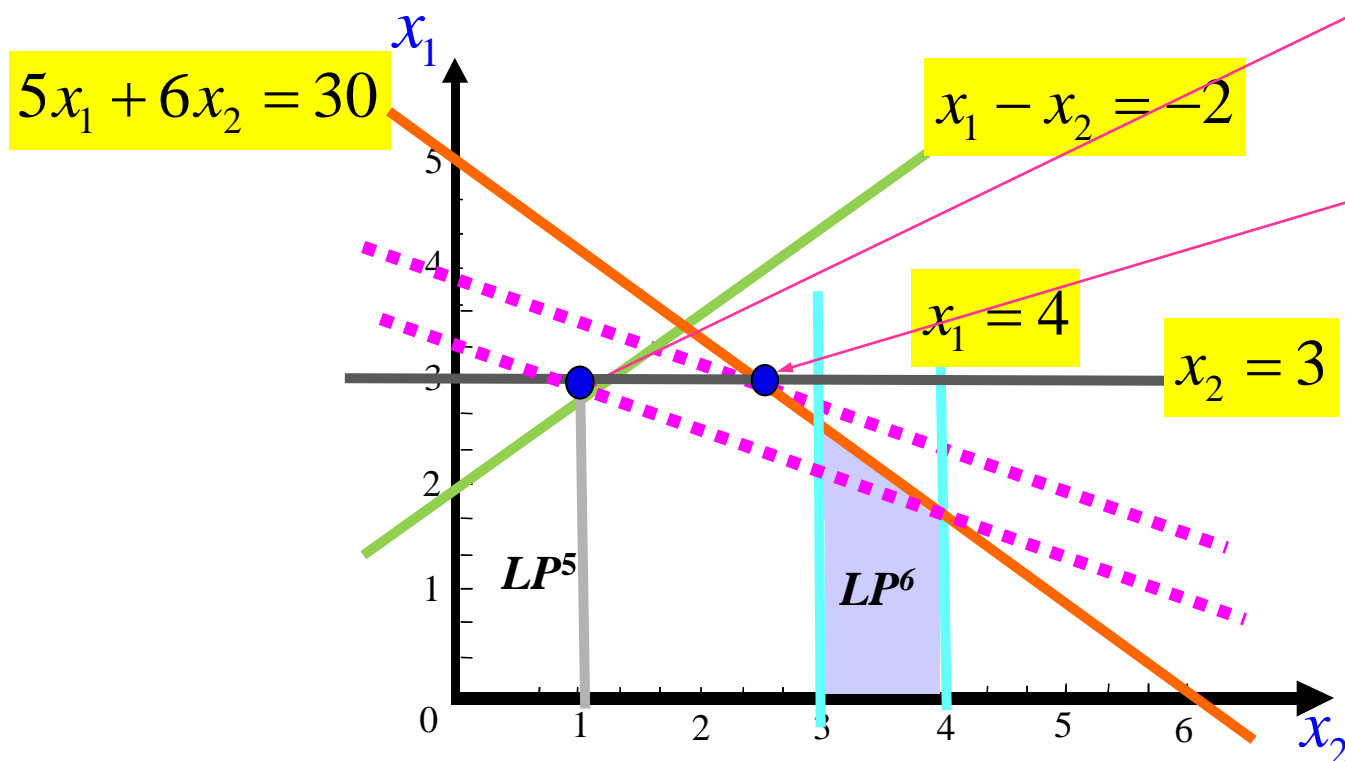
$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ 3 \leq x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(LP^6)

LP^5 : $x = (2, 3), Z^{(5)} = -17$

LP^6 : $x = \left(3, \frac{5}{2}\right), Z^{(6)} = -\frac{31}{2}$

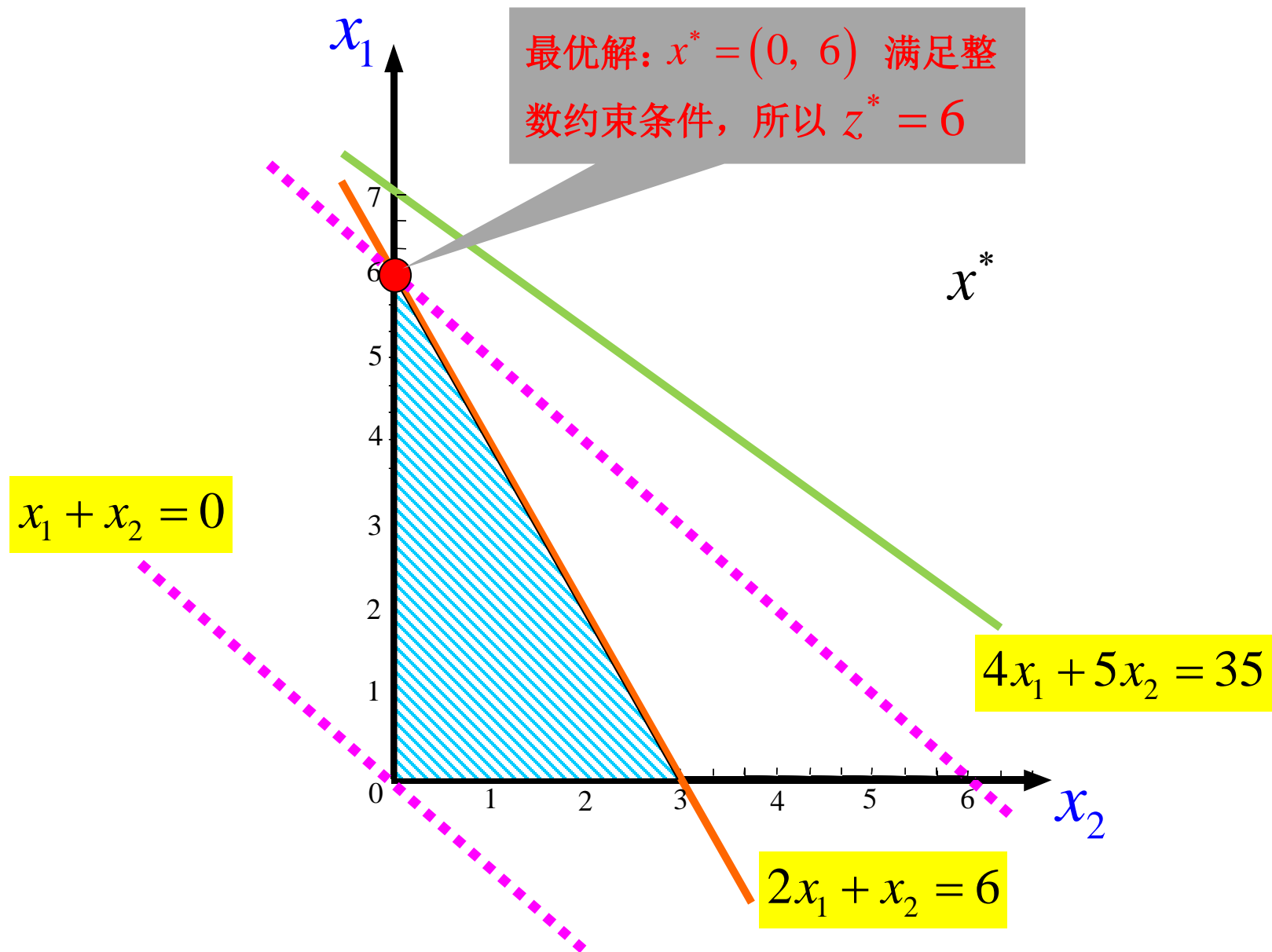


最优解和最优值分别为：

$$x^* = (2, 3), Z^* = -17$$

(2) 用割平面法求解下列整数规划问题

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2; \\ s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 35; \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{ 且为整数.} \end{cases} \end{aligned}$$



(3) 已知效益矩阵如下，用匈牙利法求解该分配问题

①

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 16 & 17 \\ 15 & 16 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

②

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

① 解:

1) 变换系数矩阵, 增加0元素。

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 16 & 17 \\ 15 & 16 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} -7 \\ -12 \\ -14 \\ -11 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

-1

2) 试指派 (找独立0元素)

$$\begin{pmatrix} \Delta & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \Delta & 4 & 4 \\ 1 & 2 & \Delta & \times \\ \times & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

找到 3 个独立零元素
但 $m = 3 < n = 4$

3) 作最少的直线覆盖所有0元素

$$\begin{pmatrix} \Delta & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \Delta & 4 & 4 \\ 1 & 2 & \Delta & \times \\ \times & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \checkmark \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \checkmark \end{matrix}$$

选择直线外的最小元素为1；直线外元素减1，直线交点元素加1，其他保持不变。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

4) 重复步骤2)和步骤3)

$$\begin{pmatrix} \Delta & 1 & 2 & 3 \\ 2 & \Delta & 4 & 4 \\ 2 & 2 & \Delta & \times \\ \times & \times & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta & 1 & 2 & 3 \\ 2 & \Delta & 4 & 4 \\ 2 & 2 & \Delta & \times \\ \times & \times & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \checkmark \\ \checkmark \\ \text{---} \\ \checkmark \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) 试指派

$$\begin{pmatrix} \times & 1 & \Delta & 1 \\ 2 & \Delta & 2 & 2 \\ 4 & 4 & \times & \Delta \\ \Delta & \times & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6) 最优矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即最优解为： $12 + 15 + 10 + 11 = 48$

② 解:

1) 变换系数矩阵, 增加0元素。

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -6 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2) 试指派 (找独立0元素)

$$\begin{pmatrix} \Delta & 4 & \times & 7 & \times \\ 5 & 3 & \Delta & 6 & 4 \\ 3 & \Delta & \times & 4 & 2 \\ 5 & \times & \times & \Delta & 2 \\ 2 & 2 & \times & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

找到 4 个独立零元素
但 $m = 4 < n = 5$

3) 作最少的直线覆盖所有0元素

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} \Delta & 4 & \times & 7 & \times \\ 5 & 3 & \Delta & 6 & 4 \\ 3 & \Delta & \times & 4 & 2 \\ 5 & \times & \times & \Delta & 2 \\ 2 & 2 & \times & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \checkmark \\ \\ \\ \checkmark \end{array} \\
 \downarrow \checkmark
 \end{array}$$

选择直线外的最小元素为2；直线外元素减1，直线交点元素加2，其他保持不变。

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) 试指派

$$\begin{pmatrix} \times & 4 & 2 & 7 & \Delta \\ 3 & 1 & \Delta & 4 & 2 \\ 3 & \Delta & 2 & 4 & 2 \\ 5 & \times & 2 & \Delta & 2 \\ \Delta & \times & \times & \times & 1 \end{pmatrix}$$

5) 最优矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即最优解为：
 $3+2+4+3+9=21$