2-1 线性规划引论

（1） 设饲料 i 的使用量为 x_i kg,则此问题的线性规划模型为：

$$\min \quad Z = 0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 18x_5 \geq 700 \\ x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.5x_5 \geq 30 \\ 0.5x_1 + x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.8x_5 \geq 100 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$

（2） 设设备 A_i 生产产品 j x_{ij} 件，设备 B_R 生产产品 j y_{Rj} 件，产品总利润为 Z .

$$\begin{aligned} \max \quad Z = {} & x_{11} + x_{21} + 1.65y_{12} + 2.3x_{23} - 0.05(5x_{11} + 10x_{12}) \\ & - 0.0321(7x_{21} + 9x_{22} + 12x_{23}) - 0.0625(6y_{11} + 8y_{12}) \\ & - 0.12(4y_{21} + 11y_{23}) - 0.35y_{31} \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_{11} + 10x_{12} \leq 6000 \\ 7x_{21} + 9x_{22} + 12x_{23} \leq 10000 \\ 6y_{11} + 8y_{12} \leq 4000 \\ 4y_{21} + 11y_{23} \leq 7000 \\ 7y_{31} \leq 4000 \\ y_{ij}, x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, \; j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

（3） 设产品 A_i 由机器 B_j 生产 x_{ij} 小时，利润为 Z .

$$\begin{aligned} \max \quad Z = {} & 40(x_{11} + x_{12}) + 65(x_{21} + x_{23}) + 40(x_{32} + x_{33}) \\ & - 200\left(\frac{x_{11}}{10} + \frac{x_{21}}{20}\right) - 100\left(\frac{x_{12}}{20} + \frac{x_{32}}{10}\right) - 200\left(\frac{x_{23}}{10} + \frac{x_{33}}{20}\right) \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dfrac{x_{11}}{10} + \dfrac{x_{21}}{20} \leq 55 \\ \dfrac{x_{12}}{20} + \dfrac{x_{32}}{10} \leq 50 \\ \dfrac{x_{23}}{10} + \dfrac{x_{33}}{20} \leq 65 \\ x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, \; j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

（4）

①. 标准型：

$$\max \quad Z = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5(x_4' - x_4'')$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 + (x_4' - x_4'') = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - (x_4' - x_4'') + x_5 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2(x_4' - x_4'') - x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'', x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

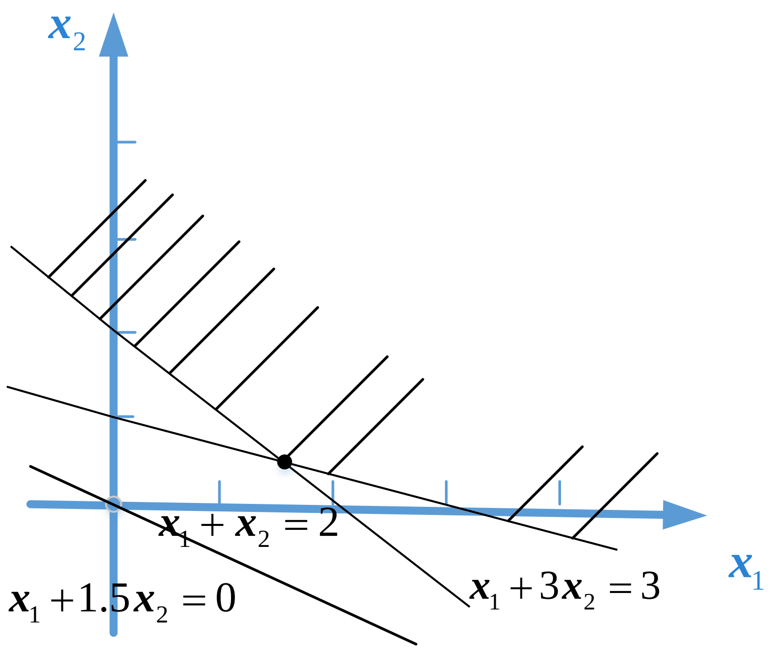
②. 标准型

$$\max \quad Z = 2x_1' + x_2 - 3(x_3' - x_3'')$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1' + 2x_2 + (x_3' - x_3'') = 4 \\ -5x_1' + x_2 - 3(x_3' - x_3'') + x_4 = 6 \\ -x_1 = x_1' \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4 \ge 0 \end{cases}$$

（5）

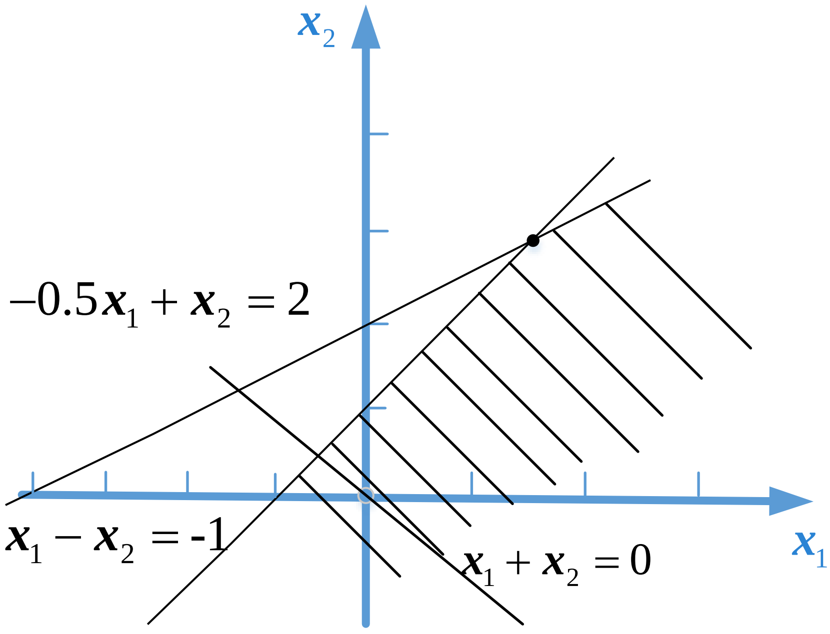
①. 图解法：



目标函数在 $x_1 = 1.5, x_2 = 0.5$ 处取得最小值 2.25，有唯一最优解

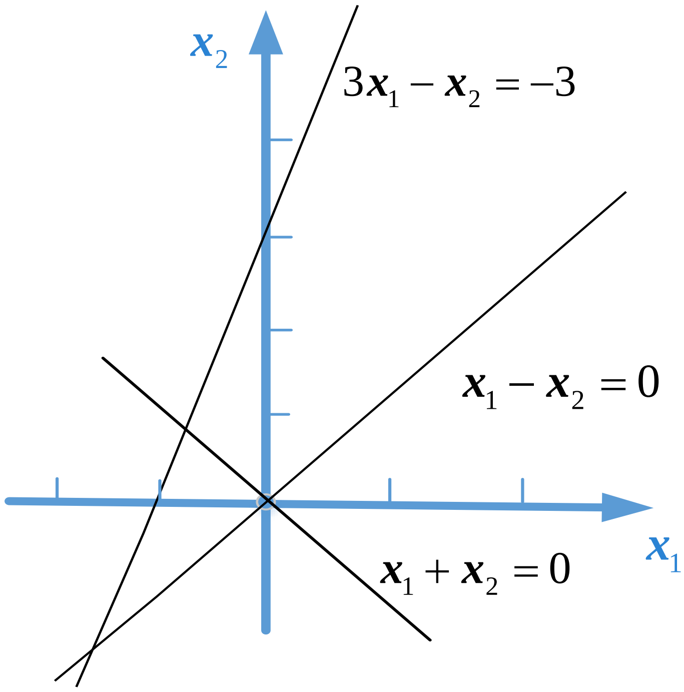
②. 图解法

无可行解。



目标函数无界

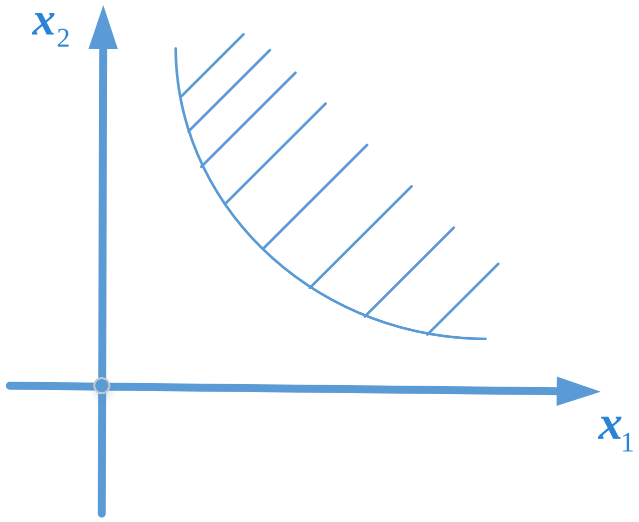
③. 图解法



无可行解。

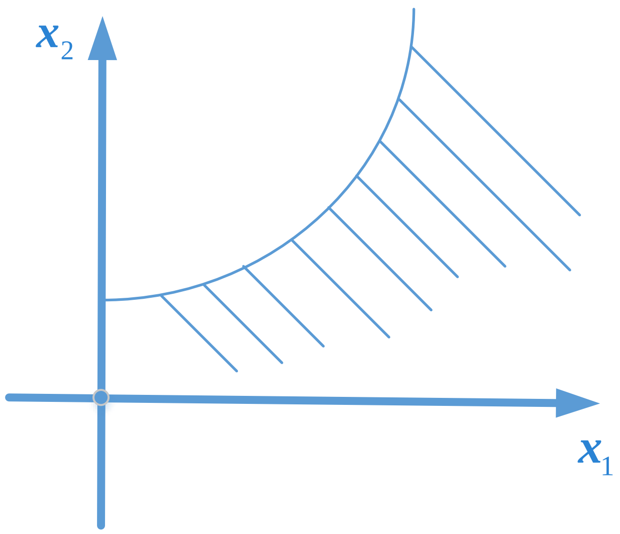
（6）

①. $A=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\geq 30, x_1\geq 0, x_2\geq 0\}$;



A 集合为凸集。

②. $B=\{(x_1,x_2)\mid x_2-3\leq x_1^2, x_1\geq 0, x_2\geq 0\}$



B 集合为非凸集合。

（7）

$$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\qquad N=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

能构成基。

令 $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4 = 0$,则 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

解得基本解： $\boldsymbol{x} = (\frac{4}{7}, 0, \frac{37}{35}, 0, -\frac{16}{35})^{\mathrm{T}}$