中南大学考试答案

2020 -- 2021 学年 一 学期 时间100分钟 2020 年 1 月 5 日

运筹学 课程 32 学时 2 学分 考试形式： 开 卷

专业年级： 自动化、测控19级 总分100分，占总评成绩 60 %

注：此页不作答题纸，请将答案写在答题纸上

一、**简答题**（本题30分，每小题6分）

1、将右边的线性规划问题化为标准形式。

$$\min Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 \le -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -6 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_2 \le 0, x_3 \ge 0, x_1\text{无约束} \end{cases}$$

【解】

令 $x_1 = x_1' - x_1''$，$x_2 = -x_2'$，$Z' = -Z$

$$\max Z' = -Z = x_1'' - x_1' - 2x_2' - 3x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5(x_1'' - x_1') - x_2' - 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1'' - x_1' + 3x_2' + x_3 + x_5 = 6 \\ 3(x_1'' - x_1') - x_2' + 4x_3 = 5 \\ x_1', x_1'', x_2', x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

2、试谈线性规划对偶问题的经济解释。

【解】如果原规划模型属于在一定资源约束条件下，按一定的单位消耗分配资源生产一组产品并寻求利润最大化问题，那么其对偶模型属于对该问题中每一种资源进行估价，以便得出与最优生产计划相一致的最低总价值，该对偶模型中资源的估价表现为相应资源的影子价格。当所有资源以最优方式分配时，第 i 种资源的影子价格 y_i 给出了第 i 种资源单位追加量的边际利润。

3、试述分枝定界法求解线性整数规划问题的主要思想。

考虑目标函数为求极大值的线性整数规划问题，分枝定界法主要由“分枝”和“定界”两部分组成。其基本思路如下：

第一步，求解 IP 的松弛问题 LP：若松弛问题没有可行解，则原问题也没有可行解；若松弛问题的最优解恰好全取整数，则该最优解也是其对应的子问题的最优解；否则记LP问题的最优解为 $X^{(0)}$，最优值为 $Z^{(0)}$，并进一步求解；

第二步，定界：设 IP 的最优值为 Z^*，以 $Z^{(0)}$作为 Z^*的上界，记为 $Z^{上} = Z^{(0)}$；再在 IP 中找一个可行解 X`，以其目标值 Z`作为下界，记为 $Z_{下}$ =Z `，则有 $Z_{下} \le Z^* \le Z^{上}$；

第三步，分枝：在 LP 最优解 $X^{(0)}$中任选一个不符合整数条件的变量(如 $x_r = b`_r$)，$[b`_r]$用表示不超过 $b`_r$ 的最大整数。构造 2 个约束条件 $x_r \le [b`_r]$和 $x_r \ge [b`_r] +1$，并分别加入 IP 问题，形成 IP1 和 IP2 两个子问题，再解这 2 个子问题的松弛问题 LP1 和 LP2；

第四步，修改上、下界：原则包括

（1）在各分枝问题中，找出目标函数值最大者作为新上界；

（2）从符合整数条件分枝中，找出目标函数值最大者作新下界；

第五步，比较与剪枝：各分枝目标值中，小于 $Z_{下}$的分枝剪掉，不再分枝；否则还要继续分枝，如此反复进行，直至 $Z_{下}= Z^* = Z^{上}$，表示得到整数最优解 X^*。

4、 $x_1+\frac{7}{4}x_2+\frac{3}{5}x_4-\frac{1}{6}x_5=\frac{11}{7}$ 为某整数规划问题的约束条件，请写出其割平面方程。

【解】其隔平面方程为： $\frac{4}{7}-\frac{3}{4}x_2-\frac{3}{5}x_4-\frac{5}{6}x_5\le 0$

5、建立动态规划模型时，应定义状态变量，请说明状态变量的特点。

【解】（1）满足无后效性——指系统从某个阶段往后的发展，完全由本阶段所处的状态及其往后的决策决定，与系统以前的状态和决策无关。即过程过去的历史只能通过当前的状态去影响未来的发展，当前状态是未来过程的初始状态。

（2）可知性—各阶段状态变量的值直接或间接均为已知。

二、建模题（本题 16 分，每题 8 分）

1、某厂生产 A_1，A_2，A_3 三种产品，需要消耗 B_1、B_2 两种原材料，每件产品对原材料的消耗、每件产品的成本（单位：元）材料的现有存量如下，要求制定生产计划，依次满足下列目标：

P_1：A_1、A_2、A_3 的产量需求如右表，并依单位成本确定权系数；

P_2：原材料 B_1 的现有量可以超过；

P_3：原材料 B_2 的现有量不得超过；

P_4：总成本限制在 7000 元以下。

（写出数学模型即可，无需求解）

消耗 原料 产品	B_1	B_2	单位成本	需要量
A_1	7	8	35	⩾100
A_2	4	5	25	⩽80
A_3	9	3	30	⩾120
现有量	1800	1500		

【解】

设生产 A_1，A_2，A_3 三种产品的数量分别为 x_1，x_2，x_3，依题意建立目标规划模型如下：

$\min Z= P_1(7d_1^-+5d_2^++6d_3^-) +P_2\, d_4^-+P_3 d_5^++ P_4\, d_6^+$

s.t. $x_1+d_1^- -d_1^+ =100$

$x_2+d_2^--d_2^+=80$

$x_3+d_3^--d_3^+=120$

$7x_1+4x_2+9x_3+d_4^--d_4^+=1800$

$8x_1+5x_2+3x_3+d_5^- -d_5^+=1500$

$35x_1+25x_2+30x_3+d_6^--d_6^+=7000$

$x_1,x_2,x_3\ge 0,\ d_i^-,d_i^+\ge 0(i=1,2,3,4,5,6)$

2、某学生正在备考政治、数学、英语、专业课 4 门功课，还剩两周时间，每门功课至少复习 2 天。若他已估计出各门功课的复习天数与能提高的分数之间的关系如下，他应怎样安排复习时间可使总的分数提高最多，试给出该问题的动态规划模型描述形式。

	备考课程复习天数（天）x			
	政治	数学	英语	专业课
提高分数 y	$y=e^x$	$y=x$	$y=1/(1+e^{-x})$	$y=2x$

【解】

令阶段 $k=1,2,3,4$ 依次表示确定政治数学、英语和专业课 4 门课需要复习几天的过程；

状态 s_k 表示在第 k 阶段初还剩有多少天可以复习，$1 \le s_k \le 14,\ s_1 = 14$；

决策 x_k 表示第 k 阶段分配复习天数，$2 \le x_k \le s_k$；

状态转移方程为：$s_{k+1} = s_k - x_k$ ；

阶段效益有：$v_1 = e^{x_1}$，$v_2 = x_2$，$v_3 = 1\big/\left(1+e^{-x_3}\right)$，$v_4 = 2x_4$；

目标函数：$Z = \sum_{i=\mathrm{k}}^{4} v_i(x_i)$；

动态规划问题的基本方程：$\begin{cases} f_k = \max\limits_{x_k}\{v_k + f_{k+1}\} \\ f_5 = 0, k = 4,3,2,1 \end{cases}$。

三、**计算题**（本题 12 分）

已知线性规划问题

$\max Z = 4x_1+2x_2+3x_3$

s.t. $x_1+2x_2+3x_3 \le b_1$

$x_1-5x_2-6x_3 \le b_2$

$x_1,x_2,x_3 \ge 0$

对于给定的非负常数 b_1 和 b_2，最优单纯形表如下：

C							
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_1	20				1	
	x_5	10				-1	

(1) 完成上述最优单纯形表，并求 b_1 和 b_2；（6 分）

(2) 写出该问题的对偶问题；（3 分）

(3) 给出原问题和对偶问题的最优解和最优值。（3 分）

【解】

初始单纯形表

C			4	2	3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	b_1	1	2	3	1	0
0	x_5	b_2	1	-5	-6	0	1
Z		0	4	2	3	0	0

$$B\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad B\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 10\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 30\end{bmatrix}$$

$$B\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -5 & -6 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -7 & -9 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

于是最优单纯形表如下

C			4	2	3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	20	1	2	3	1	0
0	x_5	10	0	-7	-9	-1	1
		-80	0	-6	-9	-4	0

对偶问题如下

min　$W = 20y_1+30y_2$

s.t.　$y_1+y_2 \geq 4$

$2y_1-5y_2 \geq 2$

$3y_1-6y_2 \geq 3$

$y_1,y_2 \geq 0$

原问题的最优解为 $x^* = [20,0,0]^T$, $Z^* = 80$。$y^* = [4,0]^T$,$W^* = 80$。

四、**计算题**（本题 18 分）

已知运输问题的产销平衡表与单位运价表如下，试用最小元素法确定初始调运方案（5 分）；并给出相应的总运价（3 分）；用闭回路法计算 x_{24} 的检验数（4 分）；根据 x_{24} 的检验数判断是否需要调整调运方案，若需要，针对 x_{24} 确定新的调运方案并给出总运价（6 分）。

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	9	5	6	10	9
A2	1	3	4	6	10
A3	8	2	5	7	4
销量	3	6	8	6	

解：最小元素法确定初始方案（5 分）：

$c_{21}=1$最小，确定 $x_{21}=3$，划去第 1 列。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	9	5	6	10	9
A2	1（3）	3	4	6	7
A3	8	2	5	7	4
销量	0	6	8	6	

$c_{32}=2$ 最小，确定 $x_{32}=4$，划去第 3 行。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	9	5	6	10	9
A2	1（3）	3	4	6	7
A3	8	2（4）	5	7	0
销量	0	2	8	6	

$c_{22}=3$最小，确定 $x_{22}=2$，划去第 2 列。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	9	5	6	10	9
A2	1（3）	3（2）	4	6	5
A3	8	2（4）	5	7	0
销量	0	0	8	6	

$c_{23}=4$ 最小，确定 $x_{23}=5$，划去第 2 行，剩余基变量自然确定 $x_{13}=3$， $x_{14}=6$ 。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	9	5	6（3）	10（6）	9
A2	1（3）	3（2）	4（5）	6	0
A3	8	2（4）	5	7	0
销量	0	0	3	6	

则最小元素法确定初始调运方案为 $x_{13}=3, x_{14}=6, x_{21}=3, x_{22}=2, x_{23}=5, x_{32}=4$ 。

相应总运价费为（3 分）： $6\times3+10\times6+1\times3+3\times2+4\times5+2\times4=115$ 。

闭回路法计算 x_{24} 的检验数（4 分）：

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	9	5	6（3）	10（6）	9
A2	1（3）	3（2）	4（5）	6	0
A3	8	2（4）	5	7	0
销量	0	0	3	6	

闭回路为$\{x_{24}, x_{14}, x_{13}, x_{23}\}$，则检验数为：

$$\sigma_{24} = (c_{24} + c_{13}) - (c_{14} + c_{23}) = (6+6) - (10+4) = -2$$

由于 x_{24} 的检验数小于 0，因此需要针对 x_{24} 调整调运方案。（6 分）

$$\theta = \min\{x_{14}, x_{23}\} = \min\{6, 5\}=5$$

$$\text{则}\begin{cases} x_{24} = 0 + \theta = 5; \\ x_{14} = 6 - \theta = 1; \\ x_{13} = 3 + \theta = 8; \\ x_{23} = 5 - \theta = 0 \end{cases}$$

则新的调运方案为：

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	9	5	6（8）	10（1）	9
A2	1（3）	3（2）	4（0）	6（5）	0
A3	8	2（4）	5	7	0
销量	0	0	3	6	

即 $x_{13} = 8, x_{14} = 1, x_{21} = 3, x_{22} = 2, x_{24} = 5, x_{32} = 4$

（新调运方案的总运费为：$6\times8+10\times1+1\times3+3\times2+6\times5+2\times4=105$）

五、**计算题**（本题 12 分）

某部门需要派四位选手参加比赛，四位选手的综合考评得分如下表所示，每位选手只需要完成一个项目，每个项目只需要一位选手完成，请确定出使总得分最大的项目分工方案。

项目 选手	A	B	C	D
甲	93	94	95	93
乙	89	92	91	95
丙	95	92	92	93
丁	89	95	94	97

（1）写出原始效益矩阵，将最大化指派问题转化为最小化指派问题。（3 分）
（2）试用匈牙利法在总得分最大的条件下确定各员工的工作分配方案。（6 分）
（3）写出工作分配方案，计算出总得分。（3 分）
【解】

问题（1）

$$C=\begin{bmatrix} 93 & 94 & 95 & 93 \\ 89 & 92 & 91 & 95 \\ 95 & 92 & 92 & 93 \\ 89 & 95 & 94 & 97 \end{bmatrix}$$

令 M=97， $C'=97-c_{ij}$

$$C'=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

问题（2）

1）变换系数矩阵，增加 0 元素

$$(c'_{ij})=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} & -1 & & \end{matrix} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2）试指派

$$\begin{bmatrix} 2 & \times & \Delta & 2 \\ 6 & 2 & 4 & \Delta \\ \Delta & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & \times \end{bmatrix}$$

3）作最少的直线覆盖所有 0 元素

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & \times & \Delta & 2 \\ 6 & 2 & 4 & \Delta \\ \Delta & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & \times \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & \checkmark \end{matrix} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & \times & \Delta & 2 \\ 6 & 2 & 4 & \Delta \\ \Delta & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & \times \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & \checkmark \end{matrix} & \end{array}$$

4）没有被直线通过的元素中选择最小值为 1，变换系数矩阵，将没有被直线通过的所有元素减去这个最小元素；直线交点处的元素加上这个最小值，得到新的矩阵。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

5）得出最优解

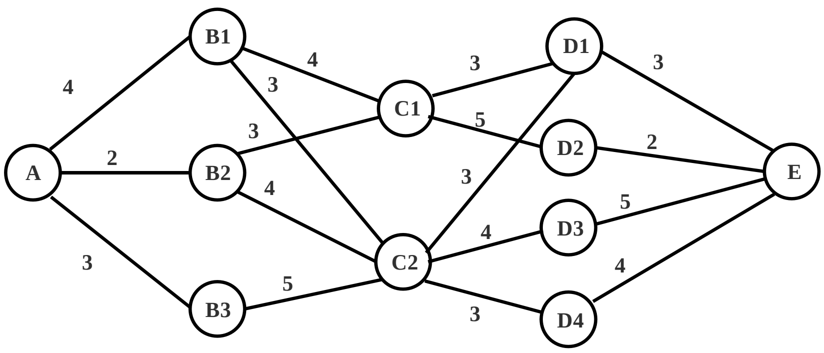
$$\begin{bmatrix} 2 & \times & \Delta & 3 \\ 5 & 1 & 3 & \Delta \\ \Delta & 2 & 3 & 3 \\ 7 & \Delta & 2 & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

问题（3）

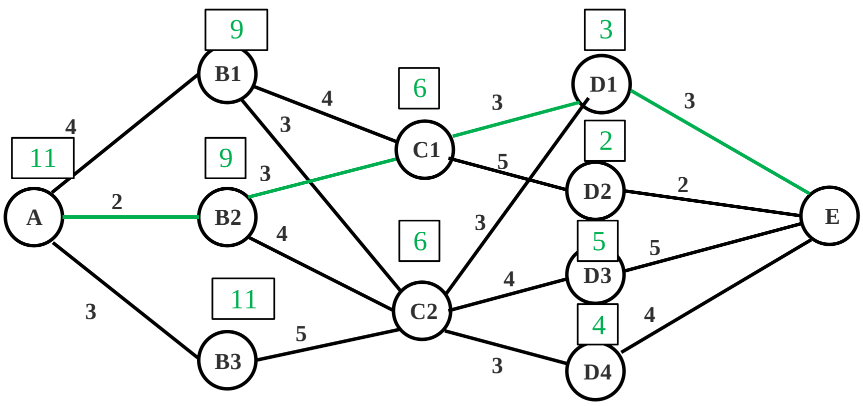
安排甲做 C 工作，乙做 D 工作，丙做 A 工作，丁做 B 工作，最大得分为 95+95+95+95=380

六、**计算题**（本题 12 分）

已知救护车需要将疑似新冠肺炎感染病人从小区 A 运到医院 E，他有如下多条路径可以选择，请帮救护车选择一条捷径（8 分），并给出需要行驶的最短距离是多少（假定距离单位为 km）（2 分）。



【解】



最短路径：$AB_2C_1D_1E$，最短距离：11km