单纯形法

（1）对于下列 LP 问题，先定一个可行基 B，将该问　题化为关于基 B 的典式，列初始单纯形表。

①、$$\max Z = 10x_1 + 5x_2; \quad s.t.\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 9; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

②、$$\max Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4; \quad s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0; \end{cases}$$

解：将 1 化为标准型
$$\max Z = 10x_1 + 5x_2; \quad s.t.\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0; \end{cases}$$

C			10	5	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	9	3	4	1	0
0	x_4	8	5	2	0	1
Z		0	10	5	0	0

$$B = (P_3, P_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}，\ Z = C_B B^{-1} b = 0，\ \delta = C - C_B B^{-1} A = (10,5,0,0)$$

2 已经是标准型，但由于没有恰当的单位阵，故随机选 x_1 、x_2 为基变量，x_3 、x_4 为非基变量。

$$B = (P_1, P_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}，\ N = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}，\ b' = B^{-1} b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}，\ Z = C_B B^{-1} b = -9，\ \delta = C - C_B B^{-1} A = (0,0,8,-2)$$

则典式为

$$\max Z = -9 + 8x_3 - 2x_4;$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}; \\ x_2 + \frac{5}{3}x_3 + 2x_4 = \frac{11}{3}; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0; \end{cases}$$

C			5	-2	3	-6
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
5	x_1	-1/3	1	0	-1/3	0
-2	x_2	11/3	0	1	5/3	2
Z		9	0	0	8	-2

（2）用单纯形法求解下列线性规划问题

① $$\max Z = 2x_1 + x_2 \quad s.t.\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15; \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24; \\ x_j \ge 0, (j = 1, 2) \end{cases}$$

② $$\max Z = 2x_1 + 5x_2 \quad s.t.\begin{cases} x_1 \le 4; \\ 2x_2 \le 12; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18; \\ x_j \ge 0, (j = 1, 2) \end{cases}$$

解：将 1 化为标准型 $$\max Z = 2x_1 + x_2 \quad s.t.\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15; \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24; \\ x_j \ge 0, (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$ ，列出单纯形表如下

C			2	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	15	3	5	1	0
0	x_4	24	6	2	0	1
Z		0	2	1	0	0

然后 x_1 进基，x_4 出基，得到

C			2	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	3	0	4	1	-1/2
2	x_1	4	1	1/3	0	1/6
Z		-8	0	1/3	0	-1/3

再 x_2 进基，x_3 出基，得到最终单纯形表如下：

C			2	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_2	3/4	0	1	1/4	-1/8
2	x_1	15/4	1	0	-1/12	5/24
Z		-33/4	0	0	-1/12	-7/12

最优解求得 $x^*=(\frac{15}{4},\frac{3}{4},0,0)$，$Z^*=\frac{33}{4}$

将 2 化为标准型得 $$\max Z=2x_1+5x_2$$ $$s.t.\begin{cases}x_1+x_3=4;\\2x_2+x_4=12;\\3x_1+2x_2+x_5=18;\\x_j\geq 0,(j=1,2,3,4,5)\end{cases}$$ 列出单纯形表

C			2	5	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
0	x_4	12	0	2	0	1	0
0	x_5	18	3	2	0	0	1
Z		0	2	5	0	0	0

然后 x_2 进基，x_4 出基，得到

C			2	5	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
5	x_2	6	0	1	0	1/2	0
0	x_5	6	3	0	0	-1	1
Z		-30	2	0	0	-5/2	0

然后 x_1 进基，x_5 出基，得到最终单纯形表

C			2	5	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	0	0	1	1/3	-1/3
5	x_2	6	0	1	0	1/2	0
2	x_1	2	1	0	0	-1/3	1/3
Z		-34	0	0	0	-11/6	-2/3

最优解求得 $x^*=(2,6,2,0,0)$，$Z^*=34$

（3）分别用大 M 法和两阶段法求解下列 LP 问题

① $$\max Z=2x_1+3x_2-5x_3$$ $$s.t.\begin{cases}x_1+x_2+x_3=7;\\2x_1-5x_2+x_3\geq 10;\\x_j\geq 0,(j=1,2,3)\end{cases}$$

② $$\max Z=2x_1+3x_2+x_3$$ $$s.t.\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3\geq 8;\\3x_1+2x_2\geq 6;\\x_j\geq 0,(j=1,2,3)\end{cases}$$

解：对于问题 1，构造大 M 问题

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - Mx_5 - Mx_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 10; \\ x_j \ge 0, (j = 1,2,3,4,5,6) \end{cases}$$

列出单纯形表如下

C			2	3	-5	0	-M	-M
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-M	x_5	7	1	1	1	0	1	0
-M	x_6	10	2	-5	1	-1	0	1
Z		17M	2+3M	3-4M	-5+2M	-M	0	0

然后 x_1 进基，x_6 出基，得到

C			2	3	-5	0	-M	-M
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-M	x_5	2	0	7/2	1/2	1/2	1	-1/2
2	x_1	5	1	-5/2	1/2	-1/2	0	1/2
Z		2M-10	0	8+7/2M	-6+1/2M	1+1/2M	0	-3/2M+1/7

然后 x_2 进基，x_5 出基，得到

C			2	3	-5	0	-M	-M
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_2	4/7	0	1	1/7	1/7	2/7	-1/7
2	x_1	45/7	1	0	6/7	-1/7	5/7	1/7
Z		-102/7	0	0	-50/7	-1/7	-M-16/7	-M+1/7

最优解求得 $x^* = (\frac{45}{7}, \frac{4}{7}, 0)$，$Z^* = \frac{102}{7}$

对于问题 2，利用两阶段法如下

$$\max \quad g = -x_4 - x_5$$

构造辅助 LP 问题 $s.t.\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 6; \\ x_j \ge 0, (j = 1,2,3,4,5) \end{cases}$，列出单纯形表

C			0	0	0	-1	-1
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_4	8	1	4	2	1	0
-1	x_5	6	3	2	0	0	1
g		14	4	6	2	0	0

然后 x_2 进基，x_4 出基，得到

C			0	0	0	-1	-1
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_2	2	1/4	1	1/2	1/4	0
-1	x_5	2	5/2	0	-1	-1/2	1
g		2	5/2	0	-1	-3/2	0

然后 x_1 进基，x_5 出基，得到

C			0	0	0	-1	-1
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_2	9/5	0	1	3/5	3/10	-1/10
0	x_1	4/5	1	0	-2/5	-1/5	2/5
g		0	0	0	0	-1	-1

最优解求得 $x^*=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0)$，以 $B=(P_1,P_2)$ 为基，带入原 LP 问题有

C			2	3	1
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3
3	x_2	9/5	0	1	3/5
2	x_1	4/5	1	0	-2/5
g		-7	0	0	0

由于非基变量存在检验数为 0，所以存在无穷多个最优解，其中一个最优解为 $x^*=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0)$，$Z^*=7$

对偶理论

（1）写出下列线性规划问题的对偶问题

① $$\min z=2x_1+2x_2+4x_3$$
$$s.t.\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3\geqslant 2\\3x_1+x_2+7x_3\leqslant 3\\x_1+4x_2+6x_3\leqslant 5\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

② $$\max z=x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$
$$s.t.\begin{cases}-x_1+x_2-x_3-3x_4=5\\6x_1+7x_2+3x_3-5x_4\geq 8\\12x_1-9x_2-9x_3+9x_4\leqslant 20\\x_1,x_2\geqslant 0,x_3\leqslant 0,x_4\text{无约束}\end{cases}$$

解：由对偶理论得

①
$$\max \ w = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$$
$$s.t.\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \le 2 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \le 2 \\ 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \le 4 \\ y_1 \ge 0, y_2, y_3 \le 0 \end{cases}$$

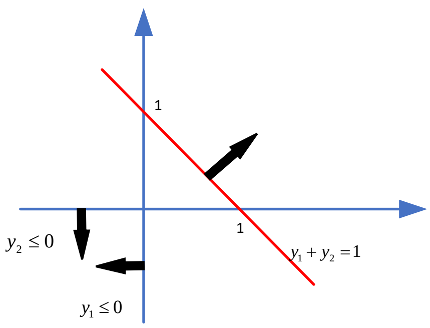
②
$$\min \ w = 5y_1 + 8y_2 + 20y_3$$
$$s.t.\begin{cases} -y_1 + 6y_2 + 12y_3 \ge 1 \\ y_1 + 7y_2 - 9y_3 \ge 2 \\ -y_1 + 3y_2 - 9y_3 \le 3 \\ -3y_1 - 5y_2 + 9y_3 = 4 \\ y_1\text{无约束，} \ y_2 \le 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

（2）应用对偶理论证明 LP1 问题可行但无最优解;

$$\max Z = x_1 - x_2 + x_3;$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_3 \ge 4; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 3; \\ x_j \ge 0 (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

解：

其对偶问题为
$$\min \ w = 4y_1 + 3y_2$$
$$s.t.\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 + 7y_2 - 9y_3 \ge 2 \\ -y_2 \ge -1 \\ -y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ y_i \le 0, \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$
其可行域如下所示，交集为空



原问题中（5,0,1）是一个可行解。对偶问题无可行解，故原问题无最优

（3）已知 LP2 问题对偶问题最优解为 $y_1^* = 1.2 \ \ y_2^* = 0.2$，试根据对偶理论求原问题最优解。

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4;$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20; \\ x_j \ge 0, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

解：

写出其对偶问题为

$$\min \quad w = 20y_1 + 20y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_i \ge 0,\quad (j=1,2) \end{cases}$$

由题意得，对偶问题最优值为 $20*1.2+20*0.2=28$，最优解（1.2,0.2）

$$\left.\begin{matrix} y_1+2y_2=1.6>1 \\ 2y_1+y_2=2.6>2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}，同时有 \left.\begin{matrix} y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x_3+3x_4=20 \\ 3x_3+2x_4=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=4 \\ x_4=4 \end{cases}$$

所以原问题得最优解为 $x^*=(0,0,0,4,4)$，$Z^*=28$

（4）已知 LP 问题用两阶段法求解时得到最终单纯表如下：

C			-15	-33	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	3	0	0	-2	1	3
-15	x_1	4/3	1	0	-1/3	0	2/3
-33	x_2	1	0	1	0	0	-1
Z			0	0	-5	0	-23

$$\min Z = 15x_1 + 33x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \\ 6x_1 + x_2 - x_4 = 6; \\ x_2 - x_5 = 1; \\ x_i \ge 0, i=1,2,\dots,5. \end{cases}$$

写出其对偶问题；求出其对偶最优解

解：由对偶理论容易写出对偶问题如下

$$\max \quad w = 6y_1 + 6y_2 + y_3$$

$$s.t.\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \le 15 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \le 33 \\ -y_1 \le 0 \\ -y_2 \le 0 \\ -y_3 \le 0 \\ y_i\text{无约束},\quad (j=1,2) \end{cases}$$

从表中可直接看出，对偶问题最优解为 $y^*=(5,0,23)$，从而算出

$W^*=53$

（5）用对偶单纯法求解下列 LP 问题

$$\min Z = x_1 + x_2;$$
$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1 + 7x_2 \geq 7; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

解：转换为标准型

$$\max \quad Z = -x_1 - x_2;$$
$$s.t.\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 - 7x_2 + x_4 = 7; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$ ，列出初始单纯形表如下

C			-1	-1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-4	-2	-1	1	0
0	x_4	-7	-1	-7	0	1
Z		0	-1	-1	0	0

检验数都是-1，随机选一个进基，然后 x_1 进基，x_3 出基，得到

C			-1	-1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
-1	x_1	2	1	1/2	-1/2	0
0	x_4	-5	0	-13/2	-1/2	1
Z		2	0	-1/2	-1/2	0

然后 x_2 进基，x_4 出基，得到

C			-1	-1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
-1	x_1	21/13	1	0	-7/13	1/13
-1	x_2	10/13	0	1	1/13	-2/13
Z		31/13	0	0	-6/13	-1/13

最优解 $x^* = (\frac{21}{13}, \frac{10}{13}, 0, 0)$，$Z^* = \frac{31}{13}$，原函数得最优值也为 $\frac{31}{13}$

灵敏度分析

已知 LP 问题及其最终单纯形表如下，求条件变化后的最优解。

$$\max \quad Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

C			2	-1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	6	1	1	1	1	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1
Z		-12	0	-3	-1	-2	0

（1）目标函数变为 $\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

（2）约束条件右端项由 $\begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix}^T$ 变为 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T$

（3）增加一个新的约束条件 $-x_1 + 2x_2 \ge 2$

解：（1）当 C_2 由-1 变成 3，对应的检验数 $\delta_2 = 1 > 0$，最优解发生变化，

C			2	3	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	6	1	1	1	1	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1
Z		-12	0	1	-1	-2	0

然后 x_2 进基，x_5 出基，得到

C			2	3	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	8/3	1	0	2/3	2/3	-1/3
3	x_2	10/3	0	1	1/3	1/3	1/3
Z		-46/3	0	0	-4/3	-7/3	-1/3

最优解 $x^* = (\frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0, 0)$，$Z^* = \frac{46}{3}$，

（2）由题目给出的单纯形表可以看出

$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$b^{'}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 7\end{bmatrix}$，带入原始表格有

C			2	-1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	1	1	1	0
0	x_5	7	0	3	1	1	1
Z		-6	0	-3	-1	-2	0

最优基不变，最优解 $x^*=(3,0,0,0,7)$，$Z^*=6$，

（3）将增加的一个约束先变成标准型 $-x_1+2x_2\geq 2 \Rightarrow x_1-2x_2+x_6=-2$，修改表格

C			2	-1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	6	1	1	1	1	0	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1	0
0	x_6	-2	1	.0	-2	0	0	1
Z		-12	0	-3	-1	-2	0	0

我们需要变换出一个单位阵出来

C			2	-1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	6	1	1	1	1	0	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1	0
0	x_6	-8	0	-1	-3	-1	0	1
Z		-12	0	-3	-1	-2	0	0

现在有了单位阵，但发现 b 有小于 0 的，所以利用对偶单纯形法，找到-1 最小，所以后 x_3 进基，x_6 出基，得到

C			2	-1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	10/3	1	2/3	0	2/3	0	1/3.
0	x_5	10/3	0	8/3	0	2/3	1	1/3
1	x_3	8/3	0	1/3	1	1/3	0	-1/3
Z		-28/3	0	-8/3	0	-5/3	0	-1/3

检验数均小于 0，且 b 均大于 0，最优解 $x^*=(\frac{10}{3},0,\frac{8}{3},0,\frac{4}{3})$，$Z^*=\frac{28}{3}$