2019-2020 年第一学期中南大学考试

运筹学（32 学时）参考答案

一、 简答题（本题 30 分，每小题 6 分）

1、将右边的线性规划问题化为标准形式。

$$\min Z = 3x_1 - 2x_2 - x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -6 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

右边线性规划问题的标准形式如下：

$$\max Z = 3x_1' + 2x_2 + x_3' - x_3''$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} -5x_1' - x_2 + 2x_3' - 2x_3'' + x_4 = 4 \\ x_1' - 3x_2 + x_3' - x_3'' + x_5 = 6 \\ 3x_1' + x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1' \ge 0, x_2 \ge 0, x_3' \ge 0, x_3'' \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

2、简述运输问题初始基可行解几种常用求法的主要思想？

【答】运输问题初始基可行解有三种常用求法：西北角法、最小元素法、元素差额法。其中：

西北角法的主要思想是优先安排运价表西北角位置的运输业务；

最小元素法的主要思想是优先安排运价表中单位运价最小的运输业务；

元素差额法的主要思想是优先安排运价表中最小元素和次小元素差额最大者的运输业务。

3、 当非基变量 x_j 的价值系数 c_j 的发生变化后，对线性规划问题的求解有何影响？

【答】 对于最优基 B 而言，当非基变量 x_j 的价值系数 c_j 的发生变化后，即 $c_j' = c_j + \Delta c_j$，只影响线性规划问题中该非基变量对应的检验数，因为 $\sigma_j' = c_j + \Delta c_j - C_B B^{-1} P_j$。

要保持原最优解不变，则 $\Delta c_j \le -\sigma_j$；否则可用单纯形法继续迭代求出新的最优解。

4、 $x_1 + \frac{7}{4}x_2 - \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{6}x_5 = \frac{4}{3}$ 为某整数规划问题的约束条件，请写出其割平面方程。

【答】其割平面方程为 $\frac{1}{3} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{6}x_5 \le 0$

5、 请给出以下目标规划问题的初始单纯表。

$$\min z = P_1 d_1^- + 3P_2(d_2^+ + d_2^-)$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 20 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ x_i, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

C_B	X_B	b	0	0	0	P_1	0	$3P_2$	$3P_2$
			x_1	x_2	x_3	d^-_1	d^+_1	d^-_2	d^+_2
0	x_3	15	2	-1	1	0	0	0	0
P_1	d^-_1	20	1	1	0	1	-1	0	0
$3P_2$	d^-_2	10	1	2	0	0	0	1	-1
	P_1	-20	-1	-1	0	0	1	0	0
	P_2	-30	-3	-6	0	0	0	0	6

二、**建模题**（本题 16 分，每题 8 分）

1、某公司下属三个小型煤矿 A_1~A_3，供应 B_1~B_4 四个工厂，每个煤矿的生产量、每个工厂的需求量、从煤矿至各厂的单位运价（单价）表如下，请为该公司制定调运方案，依次考虑下列目标：

单价 工厂 / 煤矿	B_1	B_2	B_3	B_4	生产量
A_1	3	6	5	2	12t
A_2	2	4	4	1	11t
A_3	4	3	6	3	9t
需求量	6t 以上	8t 以上	仅需 10t	仅需 6t	

P_1：A_1 产地因库存限制，应尽量全部调出；

P_2：因煤质要求，B_4 需求最好由 A_3 供应；

P_3：满足各工厂需求，按需求量确定权系数；

P_4：调运总费用不超过 80。

【答】设 x_{ij} 为从 i 煤矿调运至 j 工厂的煤炭数量，a_i 为 i 煤矿的生产量，b_j 为 j 工厂的需求量，c_{ij} 为从 i 煤矿调给 j 工厂的单位运价，其目标规划数学模型为

$$\min z = P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2 d_2^- + 3P_3 d_3^- + 4P_3 d_4^- + 5P_3(d_5^- + d_5^+) + 3P_3(d_6^- + d_6^+) + P_4 d_7^+$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \le a_i, \quad (i = 2,3) \quad a_2 = 11, a_3 = 9 \\ \sum_{j=1}^{4} x_{1j} + d_1^- - d_1^+ = a_1 = 12, \\ x_{34} + d_2^- - d_2^+ = b_4 = 6 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} + d_{2+j}^- - d_{2+j}^+ = b_j, \ (j = 1, \cdots, 4) \\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} + d_7^- - d_7^+ = 80 \\ x_{ij}, d_k^-, d_k^+ \ge 0 \quad (k = 1, \cdots, 7) \end{cases}$$

2、某公司正在进行一个重大项目的研发工作，设立了 3 个小组尝试用 3 种不同的方法来研发该项目，并预估了每组的不成功概率分别为 0.3，0.5，0.8。考虑到三组都失败的概率为 0.3×0.5×0.8=0.12。为减小失败概率，公司又增派 2 名科学家全身心投入到项目研发中。已知投入科学家的人数 n(n=0,1,2)不同，每组的失败概率也将不同，他们分别为 0.3×0.9^n，0.5×0.8^n，0.8×0.7^n。问如何分派这 2 位科学家以最小化所有组都失败的概率？

（请用动态规划的递推模型形式，描述该问题，不需要求解）

[解：]按周期分为 3 个阶段 k=1,2,3;

状态变量 s_k 表示第 k 组可分派的科学家个数。

决策变量 u_k 表示第 k 组分派的科学家个数。

状态转移方程为 $s_{k+1}=s_k-u_k$，$0\le s_k\le 2$，$0\le u_k\le s_k$

设 $v_k(s_k,u_k)$ 为第 k 个阶段的阶段效益，则 $v_1=0.3\times0.9^{u_1}$，$v_2=0.5\times0.8^{u_2}$，$v_3=0.8\times0.7^{u_3}$

目标函数为

$$\max\prod_{k=1}^{3}v_k(s_k,u_k)$$

动态规划模型的递推形式，可表示为

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\le u_k\le s_k}\{v_k(s_k,u_k)\cdot f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4)=1,\qquad s_1=2 \end{cases}$$

三、**计算题**（本题 12 分）

已知线性规划问题如右

（1） 写出其对偶问题;

（2） 已知原问题最优解为 $X^*=(1,1,2,0)$，试根据对偶理论求出对偶问题的最优解。

$$\min Z=8x_1+6x_2+3x_3+6x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2+x_4\ge 3 \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4\ge 6 \\ x_3+x_4\ge 2 \\ x_1+x_3\ge 2 \\ x_j\ge 0,(j=1,\cdots,4) \end{cases}$$

【答】其对偶问题为

$$\max W=3y_1+6y_2+2y_3+2y_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y_1+3y_2+y_4\le 8 \\ 2y_1+y_2\le 6 \\ y_2+y_3+x_4\le 3 \\ y_1+y_2+y_3\le 6 \\ y_j\ge 0,(j=1,\cdots,4) \end{cases}$$

根据互补松弛定理有

$$\begin{cases} y_1^*+3y_2^*+y_4^*=8 \\ 2y_1^*+y_2^*=6 \\ y_2^*+y_3^*+y_4^*=3 \\ y_4^*=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^*=2 \\ y_2^*=2 \\ y_3^*=1 \\ y_4^*=0 \end{cases}$$

四、**计算题**（本题 18 分）

已知运输问题的产销平衡表与单位运价表如下，试用最小元素法确定初始调运方案（5 分）；给出相应的总运价（3 分）；计算 x_{22} 的检验数（5 分）；根据 x_{22} 的检验数判断是否需要调整调运方案，若需要，针对 x_{22} 确定新的调运方案（5 分）。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3 ②	2 ⑧	7	6	10
A2	7 ⑤	5	2 ④	3 ③	12
A3	2 ⑤	5	4	5	5
销量	12	8	4	3	

【答】用最小元素法确定的初始调运方案为

$x_{11} = 2, x_{12} = 8, x_{21} = 5, x_{23} = 4, x_{24} = 3, x_{31} = 5$

相应的总运价为 $Z = 3*2 + 2*8 + 7*5 + 2*4 + 3*3 + 2*5 = 84$

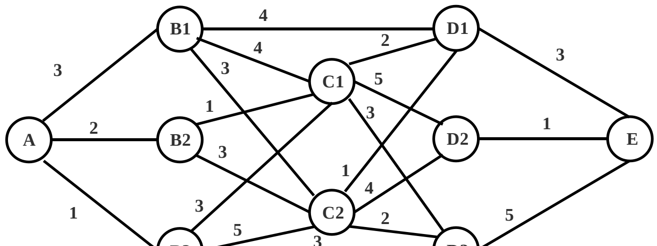
x_{22} 的检验数为 5-2+3-7 = -1

可以调整，调整后为 Z = 3*7 + 2*3 + 5*5 + 2*4 + 3*3 + 2*5 = 79

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3 ⑦	2 ③	7	6	10
A2	7	5 ⑤	2 ④	3 ③	12
A3	2 ⑤	5	4	5	5
销量	12	8	4	3	

五、**计算题**（本题 12 分）

已知快递员需要将货物从城市 A 运到城市 E，他有如下多条路径可以选择，请帮快递员选择一条捷径（10 分），并给出快递员需要行走的距离是多少（假定距离单位为 km）（2 分）。



【答】最短路径为

$A \to B_2 \to C_1 \to D_1 \to E$，

距离为 8km

六、**计算题**（本题 12 分）

某个教练需安排 4 位运动员参加田径运动的 4 个项目，这 4 位运动员参加这 4 个项目比赛的可能得分如下表所示，若每位运动员只能且必须参加一个项目，试问这个教练应该如何排兵布阵才能使总得分最大(10 分)，可能获得的总得分是多少（2 分）？

项目 运动员	100 米跑	200 米跑	400 米跑	800 米跑
A	87	84	81	78
B	86	82	83	87
C	80	89	90	87
D	83	81	79	85

【答】用匈牙利法求解， 将求最大值问题转化为标准的求最小值问题，得到如下缩减效益矩阵

(1)$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$，（得第一缩减矩阵，4 分）

(2)$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$，(3)$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$，对第 3 个缩减效益矩阵进行分配得有多个最优解，可以是

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，也可以是$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，（写出中间过程 6 分，给出答案 3 分）

总费用为 87+81+90+87=345（写出总费用，2 分）。