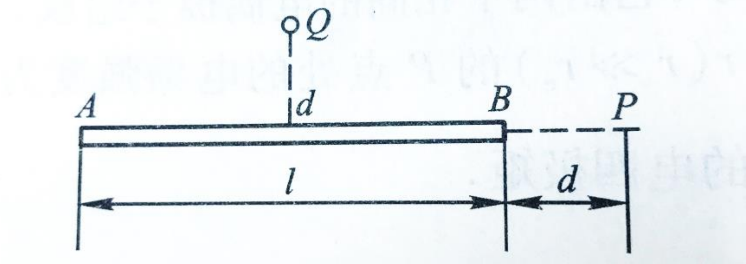
1、长 $l = 15cm$ 的直导线 AB 上均匀分布着线密度为 $\lambda = 5\times10^{-9}C/m$ 的电荷，如图所示，

求：（1）在导线的延长线上与导线一端 B 相距 $d = 5cm$ 点 P 处的电场强度。

（2）在导线的垂直平分线上与导线中点相距 $d = 5cm$ 点 P 处的电场强度。



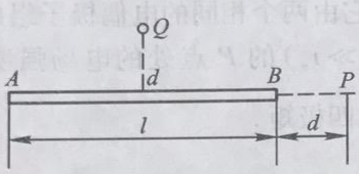
解：

（2）在导线的垂直平分线上与导线中点相距 $d=5$ cm 处 Q 点的电场强度.

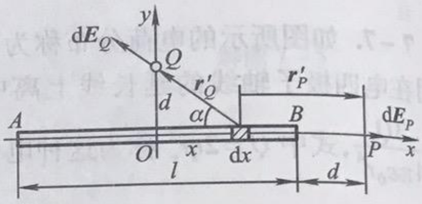
分析： 电荷连续分布的带电体在考察点的电场强度有确定的大小和方向.

通常应根据电荷分布建立坐标系，写出电荷元 $\mathrm{d}q$ 在考察点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$. 当各电荷元在考察点的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的方向不同时，应将 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 按坐标进行分解，写出分量式 $\mathrm{d}E_x$ 和 $\mathrm{d}E_y$ 等，通过积分求出合场强的分量 E_x 和 E_y 等，最后求得合场强 $\boldsymbol{E}$.

解题前应注意对电荷分布对称性的分析，选择好适当的坐标系，并注意确定积分运算的上下限.



习题 7－8 图



解图 7－8

解： 取坐标系 xOy，如解图 7－8 所示. 离 O 点 x 处的电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$ 在考察点所产生的电场强度为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$.

（1）考察点 P 在导线的延长线上时，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r_P'^2}\boldsymbol{i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{\left(\frac{l}{2}+d-x\right)^2}\boldsymbol{i}$$

带电直导线 AB 上所有电荷元在 P 的电场强度方向都相同，因此，P 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_P=\int\mathrm{d}\boldsymbol{E}_P=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{l}{2}+d-x\right)^2}\boldsymbol{i}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d}-\frac{1}{d+l}\right]\boldsymbol{i}=6.75\times10^2\boldsymbol{i}\ \mathrm{V/m}$$

$\boldsymbol{E}_P$ 沿 x 轴正方向.

（2）考察点 Q 在导线的延长线上时，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_Q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r_Q'^2}\boldsymbol{e}_{r'Q}$$

式中 $\boldsymbol{e}_{r'Q}$ 是从 $\mathrm{d}q$ 指向 Q 的单位矢量.

带电直导线 AB 上各电荷元在 Q 点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_Q$ 方向并不相同，因此需将 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_Q$ 坐标进行分解，有

$$\mathrm{d}E_{Qx}=\mathrm{d}E_Q\cos\alpha$$

$$\mathrm{d}E_{Qy}=\mathrm{d}E_Q\sin\alpha$$

由电荷对 Q 点的对称性分布可知，$E_{Qx}=0$. Q 点的合场强 $\boldsymbol{E}_Q$ 沿 y 轴正方

2、在半径分别为 $10cm$ 和 $20cm$ 的两层假想同心球面中间，均匀分布着电荷体密度为 $\rho = 10^{-9} C/m^3$ 的正电荷，求离球心 $5cm, 15cm, 50cm$ 处的电场强度。

解：

7－17. 在半径分别为 10 cm 和 20 cm 的两层假想同心球面中间，均匀分布着电荷体密度为 $\rho = 10^{-9}\ \mathrm{C/m^3}$ 的正电荷．求离球心 5 cm、15 cm、50 cm 处的电场强度．

分析： 电荷的分布具有球对称性时，它的电场也应具有球对称分布，运用高斯定理可求出各点的电场强度的大小．

解： 以 R_1 和 R_2 分别表示均匀带电球壳的内、外半径．

设离球心 $r_1 = 0.05$ m 处的电场强度为 $\boldsymbol{E}_1$，在以 r_1 为半径的高斯球面 S_1 上，$\boldsymbol{E}_1$ 的大小应该相同，并处处与 S_1 的法线方向平行．对 S_1 运用高斯定理，有

$$\oint_{S_1} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q = 0$$

所以，离球心 5 cm 处的电场强度 $\boldsymbol{E}_1 = 0$.

以 $r_2 = 0.15$ m 为半径作高斯球面 S_2，设 S_2 上各点的场强为 $\boldsymbol{E}_2$，对 S_2 运用高斯定理，有 $\oint_{S_2} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_2 4\pi r_2^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \mathrm{d}V$

式中 $\int \rho \mathrm{d}V$ 是 S_2 所围的电荷量

$$\int \rho \mathrm{d}V = \int_{R_1}^{r_2} \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}\rho(r_2^3 - R_1^3)$$

所以，离球心 15 cm 处的电场强度 $\boldsymbol{E}_2$ 的大小为

$$E_2 = \frac{\rho(r_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r_2^2} = 4.0\ \mathrm{V/m}$$

$\boldsymbol{E}_2$ 的方向与 S_2 的法线方向一致，即沿径向向外.

以 $r_3 = 0.50$ m 为半径作高斯球面 S_3 时，带电球壳在 S_3 内，对 S_3 运用高斯定理，有

$$\oint_{S_3} \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_3 4\pi r_3^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \mathrm{d}V$$

式中 $\int \rho \mathrm{d}V$ 是 S_3 所围的电荷量，即带电球壳的全部电荷量，有

$$\int \rho \mathrm{d}V = \int_{R_1}^{R_2} \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}\rho(R_2^3 - R_1^3)$$

所以，离球心 50 cm 处的电场强度 $\boldsymbol{E}_3$ 的大小为

$$E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r_3^2} = 1.05\ \mathrm{V/m}$$

$\boldsymbol{E}_3$ 的方向与 S_3 的法线方向一致，沿径向向外.

3、 点电荷 q_1, q_2, q_3, q_4 的电荷量分别为 $4\times10^{-9}C$，放置在一正方形的四个顶点上，各顶点距正方形中心点 O 的距离均为 $5cm$，求：

（1） 计算点 O 处的电场强度和电势

（2） 将一试探电荷 $q_0 = 10^{-9}C$ 从无穷远处移到点 O，电场力做功多少？

（3） 问（2）中所述过程中 q_0 的电势能的改变为多少？

解 ：

7-22. 点电荷 q_1、q_2、q_3、q_4 的电荷量各为 4×10^{-9} C，放置在一正方形的四个顶点上，各顶点距正方形中心点 O 的距离均为 5 cm.

（1）计算点 O 处的电场强度和电势；

（2）将一试探电荷 $q_0=10^{-9}$ C 从无穷远移到点 O，电场力作功多少？

（3）问（2）中所述过程中 q_0 的电势能的改变为多少？

解：（1）正方形顶点上的四个点电荷等量同号，对角电荷在 O 点的电场强度大小相等、方向相反．由电场强度的叠加原理可知，O 点的合场强为零．即

$$\boldsymbol{E}_O=0$$

相对无穷远处，每个点电荷在 O 点有相同的电势值，由电势的叠加原理可知，O 点的电势为

$$V_O=\sum V_{Oi}=4V_{O1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q_1}{r}=2.88\times10^{3}\ \mathrm{V}$$

式中 $r=5$ cm，是正方形顶点到中心的距离．

（2）将试探电荷 q_0 从无穷远移到点 O，电场力作功为

$$A_{\infty O}=-q_0(V_O-V_\infty)=-q_0V_O=-2.88\times10^{-6}\ \mathrm{J}$$

电场力作负功．

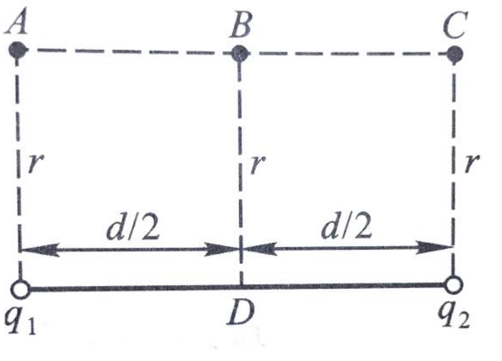
（3）将试探电荷 q_0 从无穷远移到点 O 的过程中，外力作正功，使点电荷和试探电荷系统的电势能增加．即 $A_{\infty O}=-\Delta W$

所以，有 $\Delta W=-A_{\infty O}=2.88\times10^{-6}$ J

4、如图所示，已知 $r=6cm, d=8cm, q_1=3\times10^{-8}C, q_2=-3\times10^{-8}C$，求：

（1） 将电荷量为 $2\times10^{-9}C$ 的电荷从 A 点移到 B 点，电场力做功多少？

（2） 将此点电荷从点 C 移到点 D，电场力做功多少？



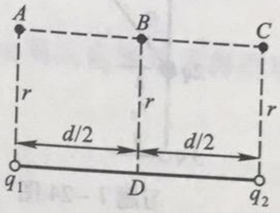
解：

$$A_{\infty O}=2.88\times10^{-6}\ \text{J}$$

7-23. 如图所示，已知 $r=6$ cm，$d=8$ cm，$q_1=3\times10^{-8}$ C，$q_2=-3\times10^{-8}$ C. 求：

（1）将电荷量为 2×10^{-9} C 的点电荷从 A 点移到 B 点，电场力作功多少？

（2）将此点电荷从点 C 移到点 D，电场力作功多少？



习题 7-23 图

分析： 由电势的叠加原理求出源电荷 q_1、q_2 在 A、B、C 和 D 四点处的电势 V_A、V_B 和 V_C、V_D 后，利用电势差求得电场力的功或系统电势能的变化．

解：

$$V_A=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2}}=1.8\times10^3\ \text{V}$$

$$V_B=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+\frac{d^2}{4}}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+\frac{d^2}{4}}}=0$$

$$V_C=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-1.8\times10^3\ \text{V}$$

$$V_D=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)}=0$$

（1）将点电荷由 A 点移到 B 点过程中，电场力作功为

$$A_{AB}=-q_0(V_B-V_A)=q_0V_A=3.6\times10^{-6}\ \text{J}$$

（2）将点电荷从 C 点移到 D 点过程中，电场力作功为

$$A_{CD}=-q_0(V_D-V_C)=q_0V_C=-3.6\times10^{-6}\ \text{J}$$

5、两个同心球面，半径分别为 $10cm$ 和 $30cm$，小球面均匀带有 $10^{-8}C$ 正电荷，大球面带有 $1.5\times10^{-8}C$ 正电荷，求离球心分别为 $20cm$、$50cm$ 处的电势。

解：

电势.

分析: 由于同心带电球面的场强具有球对称性,故可利用高斯定理求得场强E后,再由电势定义$V_A=\int_A^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$求得$V$. 也可利用均匀带电球面的电势,用电势的叠加原理求得各点的电势.

解1: 设两球面半径分别为R_1、R_2,带电q_1、q_2,由高斯定理可求得电场分布为

$$E_0=0 \qquad (r<R_1)$$

$$E_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$E_2=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r>R_2)$$

$r_1=20\ \mathrm{cm}$处的电势为

$$V_1=\int_{r_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=900\ \mathrm{V}$$

$r_2=50\ \mathrm{cm}$处的电势为

$$V_2=\int_{r_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=450\ \mathrm{V}$$

解2: 由各球面电势的叠加计算电势.

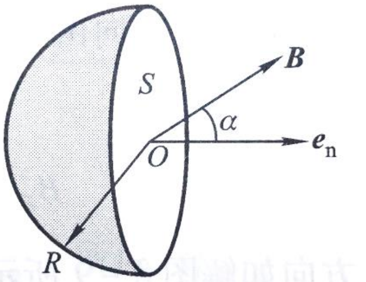
$r_1=20\ \mathrm{cm}$,位于两球面之间,电势为小球面电荷在r_1处的电势和大球面电势的代数和. 即

$$V_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=900\ \mathrm{V}$$

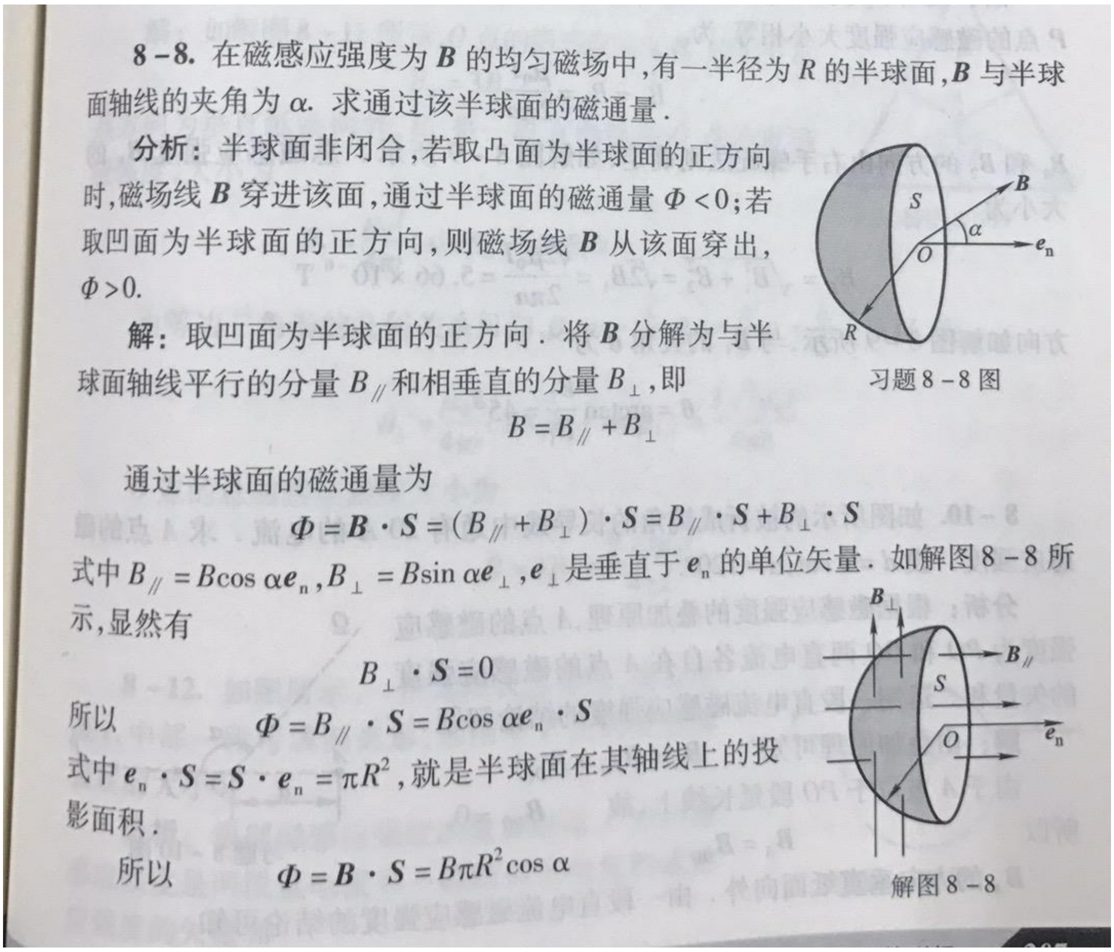
$r_2=50\ \mathrm{cm}$,位于两球面外,电势为两球面在r_2的电势. 即

$$V_2=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=450\ \mathrm{V}$$

6、 在磁感应强度为 B 的均匀磁场中,有一半径为 R 的半球面,B 与半球面轴线的夹角为α,求通过该半球面的磁通量。



解　　:



8-8. 在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中，有一半径为 R 的半球面，$\boldsymbol{B}$ 与半球面轴线的夹角为 α. 求通过该半球面的磁通量.

分析： 半球面非闭合，若取凸面为半球面的正方向时，磁场线 $\boldsymbol{B}$ 穿进该面，通过半球面的磁通量 $\Phi<0$；若取凹面为半球面的正方向，则磁场线 $\boldsymbol{B}$ 从该面穿出，$\Phi>0$.

习题 8-8 图

解： 取凹面为半球面的正方向. 将 $\boldsymbol{B}$ 分解为与半球面轴线平行的分量 $\boldsymbol{B}_{/\!/}$ 和相垂直的分量 $\boldsymbol{B}_{\perp}$，即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{/\!/}+\boldsymbol{B}_{\perp}$$

通过半球面的磁通量为

$$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{B}_{/\!/}+\boldsymbol{B}_{\perp})\cdot\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{B}_{\perp}\cdot\boldsymbol{S}$$

式中 $\boldsymbol{B}_{/\!/}=B\cos\alpha\boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{B}_{\perp}=B\sin\alpha\boldsymbol{e}_{\perp}$，$\boldsymbol{e}_{\perp}$ 是垂直于 $\boldsymbol{e}_n$ 的单位矢量. 如解图 8-8 所示，显然有

$$\boldsymbol{B}_{\perp}\cdot\boldsymbol{S}=0$$

所以
$$\Phi=\boldsymbol{B}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{S}=B\cos\alpha\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{S}$$

式中 $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_n=\pi R^2$，就是半球面在其轴线上的投影面积.

所以
$$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=B\pi R^2\cos\alpha$$

解图 8-8

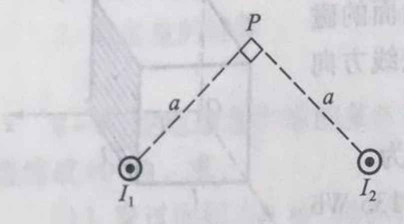
7、 两根长直导线互相平行地放置在真空中，如图所示，其中通以同向的电流 $I_1=I_2=10A$，试求 P 点的磁感应强度。已知 P 点到两导线的垂直距离均为 $0.5m$。

解　　:

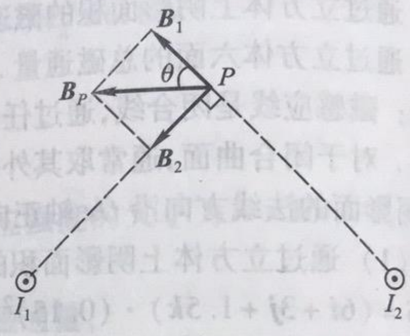
3. 磁感应强度的计算

8 -9. 两根长直导线互相平行地放置在真空中，如图所示，其中通以同向的电流 $I_1 = I_2 = 10$ A. 试求 P 点的磁感应强度．已知 P 点到两导线的垂直距离均为 0.5 m.

分析：根据磁感应强度的叠加原理，P 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_P$ 为各电流在 P 点的磁感应强度的矢量和．



习题 8 -9 图



解图 8 -9

解：设 I_1、I_2 到 P 点的垂直距离为 a. 据题意，无限长的直电流 $I_1 = I_2 = I$，在 P 点的磁感应强度大小相等，为

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

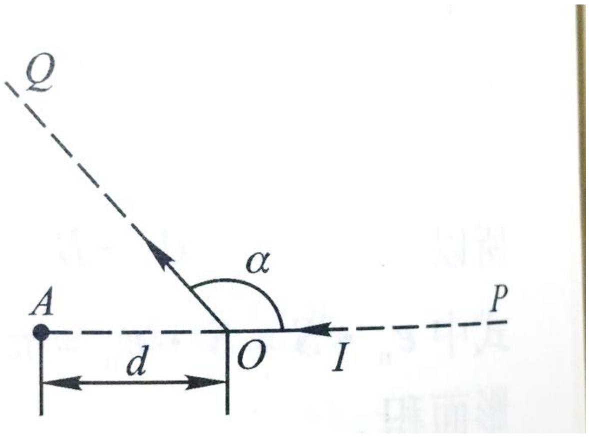
B_1 和 B_2 的方向由右手螺旋法则确定，如解图 8 -9 所示．总磁感应强度 $\boldsymbol{B}_P$ 的大小为

$$B_P = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2} B_1 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a} = 5.66 \times 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

方向如解图 8 -9 所示，与 $\boldsymbol{B}_1$ 的夹角 θ 为

$$\theta = \arctan \frac{B_2}{B_1} = 45°$$

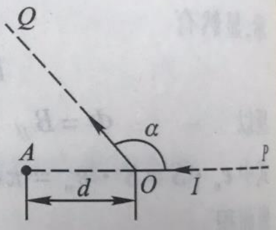
8、如图所示的被折成钝角的长导线中通有 $20A$ 的电流，求 A 点的磁感应强度，设 $d = 2cm, \alpha = 120°$。



解:

$$\theta = \arctan\frac{B_2}{B_1} = 45°$$

8-10. 如图所示的被折成钝角的长导线中通有 20 A 的电流．求 A 点的磁感应强度．设 $d = 2\ \text{cm}$，$\alpha = 120°$．



习题 8-10图

分析： 根据磁感应强度的叠加原理，A 点的磁感应强度为 PO 和 OQ 两直电流各自在 A 点的磁感应强度的矢量和．运用一段直电流磁感应强度的结论解题．

解： 由叠加原理可知 $\boldsymbol{B}_A = \boldsymbol{B}_{PO} + \boldsymbol{B}_{OQ}$

由于 A 点位于 PO 段延长线上，故 $\boldsymbol{B}_{PO} = 0$.

所以

$$\boldsymbol{B}_A = \boldsymbol{B}_{OQ}$$

$\boldsymbol{B}_A$ 的方向垂直纸面向外．由一段直电流磁感应强度的结论可知

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)$$

式中 r 是 A 点到直电流 OQ 的垂直距离，$r = d\sin(\pi - \alpha) = 1.73\ \text{cm}$，直电流 OQ 对 A 的起始角 $\beta_1 = -\frac{\pi}{6}$，终止角 $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$．所以，有

$$\begin{aligned} B_A &= B_{OQ} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1) \\ &= \frac{4\pi\times10^{-7}\times20}{4\pi\times1.73\times10^{-2}}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\ \text{T} = 1.73\times10^{-4}\ \text{T} \end{aligned}$$