第一部分　刚体的定轴转动

1.有人握着哑铃两手伸开，坐在以一定角速度转动的凳子上（摩擦力可忽略不计），若此人把手缩回使转动惯量减为原来的一半，则角速度怎样变化？转动动能是增加还是减少？为什么？

解：当转动惯量减为原来的一半时，根据角动量守恒定律，$I_0\omega_0=\frac{1}{2}I_0\omega$，即$\omega=2\omega_0$，角速度变成原角速度的 2 倍，转动动能也增加为原动能的 2 倍，因为两手缩回时对系统做了功。（两手缩回时，人的内力做功，内力不是保守力，故系统的机械能不守恒，人的肌肉做功是要消耗人的能量的，所以做功是以消耗能量为代价的，机械能不守恒）

2.一质点做简谐振动，其振动方程为$x=6\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4})$（SI 制），当$x$为多大时，系统的势能为总能量的一半？

解：由题$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$或者$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2$，即$A^2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}A^2$，所以

$\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

（a）当$\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)=+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，

此时$x=6\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4})=6\times10^{-2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4.24\times10^{-2}m$

（b）当$\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，

此时$x=6\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4})=6\times10^{-2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4.24\times10^{-2}m$

即当$x=\pm4.24\times10^{-2}m$时，系统的势能是总能量的一半。

第二部分　流体动力学基础

1. 水在水平管中稳定流动，管半径为$3.0cm$处的流速为$1.0m/s$，那么在管半径为$1.5cm$处的流速是多少？

解：由连续性方程$S_1v_1=S_2v_2$，得$3\times1=1.5\times v_2\Rightarrow v_2=2m\cdot s^{-1}$

2. 水以$5.0m/s$的速率通过截面积为$4.0cm^2$的管道而流动，当管道的横截面积增加到$8.0cm^2$时，管道逐渐下降了$10m$，

试问：（1）低处管道的水流速度v_2是多少？

（2）如果高处管道内的压强为$1.5\times10^5\ pa$，则低处管道的压强p_2是多少？

解：（1）由连续性方程$S_1v_1=S_2v_2$得$5\times4=8\times v_2\Rightarrow v_2=2.5m/s$

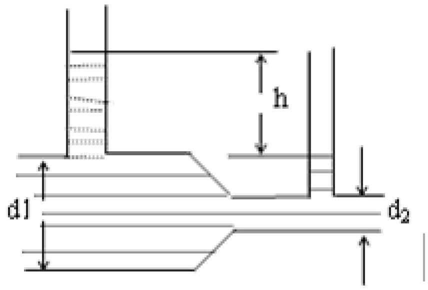
（2）由伯努利方程，设低处管道中心所在的水平面为零势能面，则

$$1.5\times10^5+\frac{1}{2}\times1.0\times10^3\times5^2+1.0\times10^3\times9.8\times10=p_2+\frac{1}{2}\times1.0\times10^3\times2.5^2+0$$

$$\Rightarrow p_2=232375pa\approx2.32\times10^5pa$$

3. 密度为ρ的液体在水平圆管中流动，管的内径分别为d_1和d_2，如果在测压管中，测得两管中液面的高度差h。

求：液体在管中的质量流量。



解：设两个截面中心连线所在的水平面为零势能面，

根据连续性方程有$\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2v_1=\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2v_2$，又由伯努利方程得$p_1+\frac{1}{2}\rho{v_1}^2=p_2+\frac{1}{2}\rho{v_2}^2$，

由图$p_1-p_2=\rho gh$得液体在管中d_2处通过时的流速为$v_2=\sqrt{\frac{2ghd_1{}^2}{d_1{}^2-d_2{}^2}}$，所以液体在管中的质量流量为：$Q_\rho=\rho\pi\left(\frac{d_2{}^2}{2}\right)\sqrt{\frac{2ghd_1{}^2}{d_1{}^2-d_2{}^2}}$

第三部分　气体动理论

1.一容积为$10cm^3$的电子管，管内气体（双原子分子）压强约为$6.67\times10^{-4}pa$，温度为$300K$，试计算管内全部气体分子的平均平动动能的总和，平均转动动能的总和及平均动能的总和各为多少？

解：设管内总分子数为N，

由$p=nkT=\frac{N}{V}kT$得$N=\frac{pV}{kT}=\frac{6.67\times10^{-4}\times10^{-5}}{1.38\times10^{-23}\times300}=1.61\times10^{12}$个，气体分子双原子分子，常温（$300K$）下平动自由度为3，转动自由度为2，总自由度为5，根据能量均分定理，

可得分子的平均平动动能的总和为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}NkT=\frac{3}{2}\times1.61\times10^{12}\times1.38\times10^{-23}\times300=10^{-8}J$$

分子的平均转动动能的总和为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{2}NkT=1.61\times10^{12}\times300\times1.38\times10^{-23}=0.67\times10^{-8}J$$

分子的平均动能之总和为

$$\bar{\varepsilon}_k=\frac{5}{2}NkT=\frac{5}{2}\times1.61\times10^{12}\times300\times1.38\times10^{-23}=1.67\times10^{-8}J$$

2. $2L$ 容器中盛有某种双原子刚性分子气体，在常温下，其压强为$1.5\times10^5 Pa$，求该气体的内能。

解：理想气体的内能$E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$，由理想气体状态方程$pV=\frac{m}{M}RT$带入上式，得

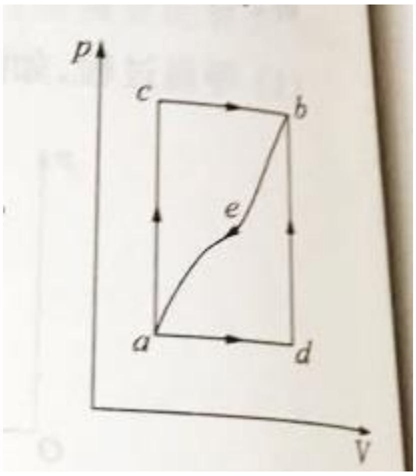
$$E=\frac{i}{2}pV=\frac{5}{2}\times1.5\times10^5\times2\times10^{-3}=750J$$

第四部分　热力学基本定律

1.一系统由图中的a态沿acb到达b态时，吸收了$80J$的热量，同时对外做了$30J$的功，试问：（1）若沿图中adb过程，则系统对外做功为$10J$，求系统吸收了多少热量？

（2）若系统由b态沿曲线bea返回a态时，外界对系统做功$20J$，这时系统是吸热还是放热？传递的热量是多少？

（3）设d态与a态的内能差$E_d-E_a=40J$，则在过程ad、bd中系统各吸热多少？



解：（1）因为$Q_{acb}=80J, A_{acb}=30J$，$E_b-E_a=Q_{acb}-A_{acb}=80-30=50J$，$a$、$b$态确定后，其内能差也唯一确定，与过程无关，沿$adb$过程，$A_{adb}=10J$，$Q_{acb}=\Delta E_{ba}+A_{acb}=60J$即系统在$adb$过程中吸收了$60J$的热量。

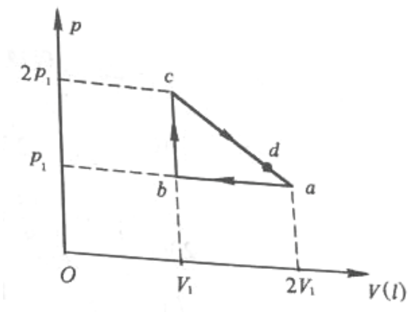
（2）$Q_{bea}=(E_a-E_b)+A_{bea}=-50-20=-70J$ 即系统沿曲线从 b 态返回 a 态时放出 $70J$ 的热量。

（3）过程 adb 由等压过程 ad 和等容过程 db 组成，且已知 $A_{db}=0$（等容），所以

$A_{adb}=A_{ad}+A_{db}=A_{ad}=10J$；$Q_{ad}=(E_d-E_a)+A_{ad}=40+10=50J$；

$Q_{db}=(E_b-E_d)=(E_b-E_a)-(E_d-E_a)=50-40=10J$，即过程 ad 中系统吸热 $50J$，过程 db 中系统吸热 $10J$。

2.如图 $1mol$ 某单原子惰性气体经历 $a\to b\to c\to a$ 循环过程，图中 ab,bc,ca 均为直线，试求循环效率。



解：由图，整个过程的净功为 $A=\dfrac{1}{2}p_1V_1$

$a\to b$ 等压过程，$Q_{ab}=C_p(T_b-T_a)$，又 $\begin{aligned}&\because P_aV_a=RT_a\Rightarrow p_1\cdot 2V_1=RT_a\\&P_bV_b=RT_b\Rightarrow p_1\cdot V_1=RT_b\\&\therefore T_a=2T_b=2T\end{aligned}$ （设 $T_b=T$）

$\therefore Q_{ab}=\dfrac{5}{2}R(T-2T)=-\dfrac{5}{2}RT$ 放热

$b\to c$ 等容过程，$Q_{bc}=C_V(T_c-T_b)$，又 $\begin{aligned}&\because P_bV_b=RT_b\Rightarrow p_1\cdot V_1=RT_b=RT_a\\&P_cV_c=RT_c\Rightarrow 2p_1\cdot V_1=RT_c\\&\therefore T_c=T_a=2T_b=2T\end{aligned}$

$\therefore Q_{bc}=\dfrac{3}{2}R(2T-T)=\dfrac{3}{2}RT$ **吸热**

$c\to a$ 过程，根据热力学第一定律得：$Q_{ca}=\triangle E+A=C_V(T_a-T_c)+\dfrac{1}{2}p_1V_1=\dfrac{1}{2}p_1V_1$ **吸热**

$\therefore Q_1=Q_{bc}+Q_{ca}=\dfrac{3}{2}RT+\dfrac{3}{2}RT=3RT$

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{\frac{1}{2}RT}{3RT}=16.7\%$$

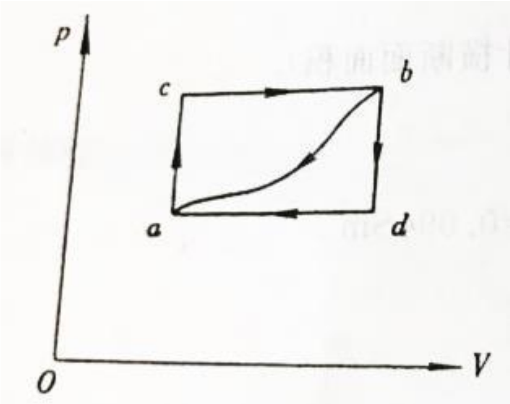
3.一系统由下图所示的 a 状态沿 acb 到达 b 状态，吸收热量 $335J$，系统对外做功 $126J$。

（1）经 adb 过程，系统做功 $42J$，求系统吸收多少热量？（2）当系统由 b 状态沿曲线 ba 返回 a 状态时，外界对系统做功为 $84J$，求系统吸收多少热量？

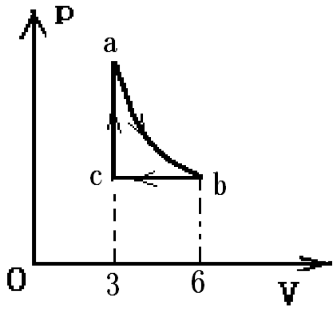
解：（1） $a \to b$ 内能增量为 $\Delta E_{ab} = Q_{acb} - A_{acb} = (335-126) = 209J$，由热力学第一定律，

$Q_{adb} = \Delta E_{ab} + A_{adb} = (209+42) = 251J$

（2） $\Delta E_{ba} = -\Delta E_{ab}$， $Q_{ba} = \Delta E_{ba} + A_{ba} = (-209-84) = -293J$，系统放热



4.如图所示，$1mol$ 的理想气体所经历的循环过程，其中 $a-b$ 为等温过程，$b-c$ 为等压过程，$c-a$ 为等容过程，$V_a = V_c = 3L$，$V_b = 6L$，取 $C_V = \frac{3}{2}R$，求：该循环热机的效率。



解：由分析， $p_bV_b = RT_b, p_cV_c = RT_c, V_b = 2V_c \Rightarrow T_b = 2T_c$， $T_c < T_b$， $a-b$ 等温膨胀，对外做功，吸热 $Q_{ab} = RT_b \ln\frac{V_b}{V_a} > 0$，$b-c$ 等压压缩，放热 $Q_{bc} = C_p\left(T_c - T_b\right) < 0$，因为 $T_a = T_c$，

$c-a$ 等容过程， $Q_{ca} = C_V\left(T_a - T_c\right) > 0$

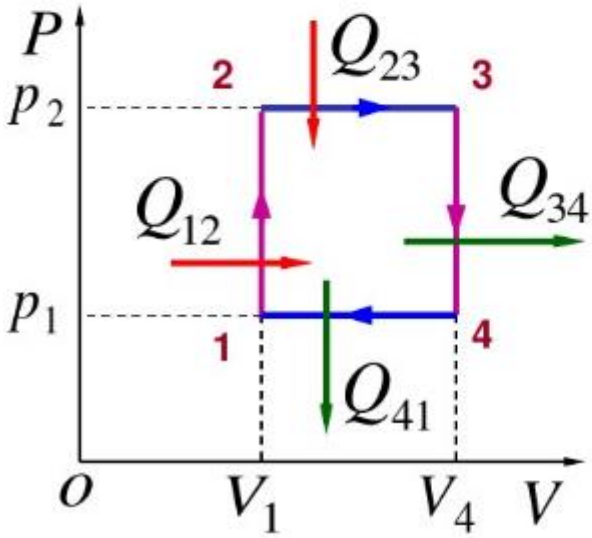
$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_{bc}|}{Q_{ab} + Q_{ca}}$$

所以，此循环过程的效率为$= 1 - \dfrac{C_p\left(T_b - T_c\right)}{RT_b \ln\dfrac{V_b}{V_a} + C_V(T_a - T_c)}$

$$= 1 - \frac{\frac{5}{2}R\left(2T_c - T_c\right)}{R \cdot 2T_c \ln 2 + \frac{3}{2}R(2T_c - T_c)} = 1 - \frac{\frac{5}{2}}{2\ln 2 + \frac{3}{2}} = 13.19\%$$

注：$\ln 2 = \log_e 2 = \log_{2.718} 2 \approx 0.693$

5. $1mol$ 氦气经过如图所示的循环过程，其中 $p_2 = 2p_1$，$V_4 = 2V_1$，求$1-2$，$2-3$，$3-4$，$4-1$ 各过程中气体吸收或放出的热量和整个循环热机的效率。



解：由理想气体的物态方程 $pV = \dfrac{m}{M}RT$，得 $T_2 = 2T_1, T_3 = 4T_1, T_4 = 2T_1$，

$Q_{12} = C_V\left(T_2 - T_1\right) = C_V T_1$，$Q_{23} = C_p\left(T_3 - T_2\right) = 2C_p T_1$，$Q_{34} = C_V\left(T_4 - T_3\right) = -2C_V T_1$，

$Q_{41} = C_p\left(T_1 - T_4\right) = -C_p T_1$，所以 $Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = C_V T_1 + 2C_p T_1$，由于 $C_p = C_V + R$ 得

$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = C_V T_1 + 2\left(C_V + R\right)T_1$；$A = \left(p_2 - p_1\right)\left(V_4 - V_1\right) = p_1 V_1 = RT_1$

$\therefore \eta = \dfrac{A}{Q_1} = \dfrac{RT_1}{T_1\left(3C_V + 2R\right)} 15.3\%$

第六部分　机械振动和机械波

1.已知一平面简谐波的波函数为$y=0.05\cos\left[\pi\left(t-\frac{x}{3}\right)+\pi\right]m$，试求波的频率，波长，波速，波上质点振动的振幅，波源（原点处）的振动方程及振动相位，。

解：将已知波函数与表示沿x轴正方向传播的平面简谐波的波函数$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$相比较得波上质点的振幅$A=0.05m$，频率$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=0.5Hz$（$\omega=\pi\ \ s^{-1}$），波速$c=3m\cdot s^{-1}$，波长$\lambda=\frac{c}{\nu}=6m$，当$x=0$时，此原点的振动方程为$y=0.05\cos\left(\pi t+\pi\right)m$，相位为$\pi t+\pi$。

2.一沿着x轴正方向传播的平面简谐波，波上质点的振幅为$2.0\times10^{-2}m$，频率为$5.0Hz$，波长为$7.0\times10^{-2}m$。设在$t=0$时，原点处质点在$\sqrt{2}\times10^{-2}m$处且向平衡位置运动，试求（1）此波的波函数（2）与原点相距为$x_1=3.5\times10^{-2}m$处质点的振动表达式及其初相（3）与原点相距为$x_2=10.5\times10^{-2}m$处质点的振动表达式及其初相（4）x_1和x_2两点之间在$t=2s$和$t=3s$时的相位差。

解：（1）由$t=0$时，原点处质点在$\sqrt{2}\times10^{-2}m$处且向平衡位置运动可得，坐标原点处质点的初相位为$\frac{\pi}{4}$，又已知$A=2.0\times10^{-2}m$，$\nu=5.0Hz$，$\lambda=7.0\times10^{-2}m$，所以沿$x$轴正方向传播的平面简谐波的波函数为

$$\begin{aligned}y(x,t)&=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right)\\&=2\times10^{-2}\cos\left[2\pi\left(5t-\frac{x}{7\times10^{-2}}\right)+\frac{\pi}{4}\right]m\end{aligned}$$

（2）用$x_1=3.5\times10^{-2}m$带入波函数得x_1点的振动表达式为

$y(x_1,t)=2\times10^{-2}\cos\left(10\pi t-\frac{3}{4}\pi\right)m$，初相位为$-\frac{3}{4}\pi$

（3）用$x_2=10.5\times10^{-2}m$带入波函数得x_2点的振动表达式为

$y(x_2,t)=2\times10^{-2}\cos\left(10\pi t-\frac{11}{4}\pi\right)m$，初相位为$-\frac{11}{4}\pi$

（4）由于介质中各质点的振动频率相同，所以两定点的相位差与时间无关，x_1和x_2两点之

间的距离为λ，相位差为2π。

第七部分　波动光学

1.自然光垂直入射到一组偏振片上，这组偏振片共有四片，每个偏振片的偏振化方向相对于前一个沿顺时针方向依次转过30°角，试求透射光强度占入射光强度的百分比。

解：设入射的自然光的强度为I_{origin}，通过第一个偏振片后光强为$I_1=\frac{1}{2}I_{origin}$，通过第二个偏振片后，由马吕斯定律，$I_2=\frac{1}{2}I_{origin}\cos^2 30^\circ=\frac{3}{8}I_{origin}$，通过第三个偏振片后的光强为

$I_3=\frac{3}{8}\cdot\cos^2 30^\circ=\frac{9}{32}I_{origin}$，通过第四个偏振片后的光强为$I_4=I_3\cdot\cos^2 30^\circ=\frac{27}{128}I_{origin}$

所以$\frac{I_4}{I_{origin}}=\frac{27}{128}=21\%$

2.自然光投射到两片偏振片上，求在下列情况下两偏振片的偏振化方向之间的夹角应为多大？（1）透射光是入射光强度的$\frac{1}{3}$；（2）透射光强随两偏振片的偏振化方向之间夹角变化而变，当透射光是最大透射光强的$\frac{1}{3}$时。

分析：（1）自然光经过一偏振片后，变为光强为原来的$\frac{1}{2}$的线偏振光，再经过一偏振片后，光强为$I=\frac{I_{origin}}{2}\cos^2\theta$

（2）透射光最大光强为$\frac{I_{origin}}{2}$

解：（1）由上面的分析可知，透射光的光强

$$I=\frac{I_{origin}}{2}=\frac{I_{origin}}{3}\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\theta=35.26^\circ or\quad\theta=180^\circ-35.26^\circ=144.74^\circ$$

（2）最大透射光强为$\frac{I_{origin}}{2}$，由题，若此时透射光强为

$$\frac{I_{origin}}{2}\cos^2\theta=\frac{1}{3}\times\frac{I_{origin}}{2}\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{1}{3}\Rightarrow\theta=54.74^\circ or\quad\theta=180^\circ-54.74^\circ=125.26^\circ$$

3.一束线偏振光透射到两块偏振片上，第一片的偏振化方向相对于入射光束的振动面成θ角，第二片的偏振化方向相对于入射光的振动面成90°，试求透射光束强度是入射光束强度的$\frac{1}{10}$时的θ为多大?

解：设入射的线偏振光的强度为I_0，由马吕斯定律可得，通过第一片偏振片后光强为$I_1 = I_0\cos^2\theta$，通过第二片偏振片后光强为$I_2 = I_1\cos^2\left(90^\circ - \theta\right) = I_0\cos^2\theta\sin^2\theta$，因为$I_2 = \frac{I_0}{10}$，所以$I_0\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{I_0}{10}$，

$$\sin^2 2\theta = \frac{2}{5} \Rightarrow \theta = 19.61^\circ \; or \quad \theta = 180^\circ - 19.61^\circ = 160.39^\circ$$