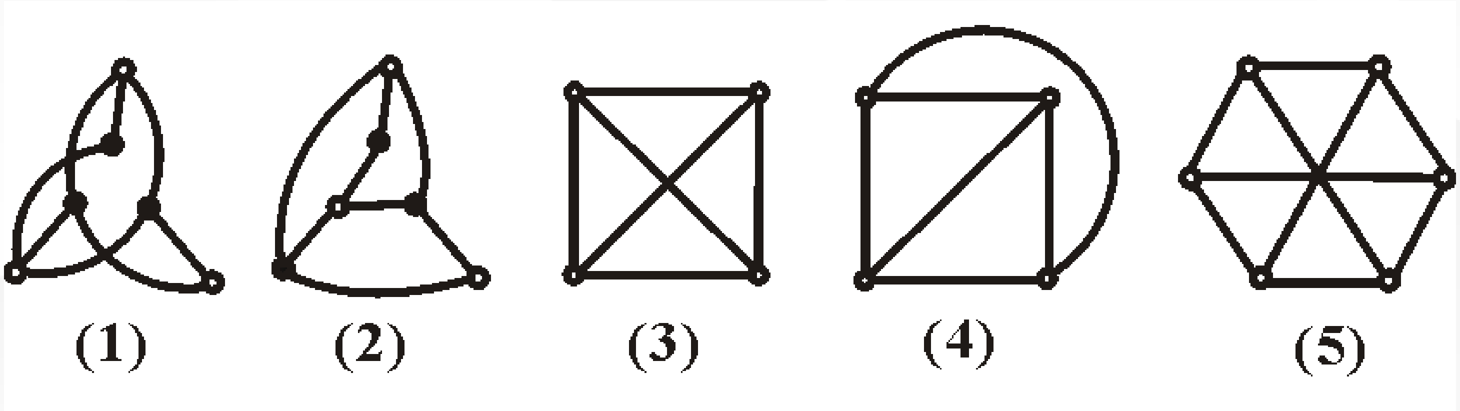
5.5 平面图与着色

一、平面图和平面嵌入

1. 定义 给定无向图G=<V, E>，若图 G中的所有点和边均在一个平面内，且任意两边无交点，那么这个图称之为平面图。例如下图中(1) (4) 是平面图，(2)是(1)的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入，(5) 是非平面图。



5.5 平面图与着色

2. 平面图的面与次数

设G是一个平面嵌入

G的面：由G的边将平面划分成的每一个区域

无限面(外部面)：面积无限的面，用R_0表示

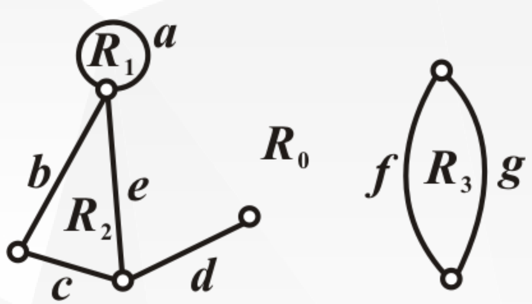
有限面(内部面)：面积有限的面，用$R_1, R_2, \ldots, R_k$表示

面R_i的边界：包围R_i的所有边构成的回路组

面R_i的次数：R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示

定理　平面图各面的次数之和等于边数的2倍。

例 如图有4个面，$\deg(R_1)=1$，
$\deg(R_2)=3$，$\deg(R_3)=2$，
$\deg(R_0)=8$。



5.5 平面图与着色

二、极大平面图

1. 定义　若G是简单平面图，并且在任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称G为极大平面图。

例如，K_5, $K_{3,3}$若删去一条边是极大平面图。

K_1, K_2, K_3, K_4都是极大平面图(它们已无不相邻顶点)。

2. 性质

极大平面图必连通。

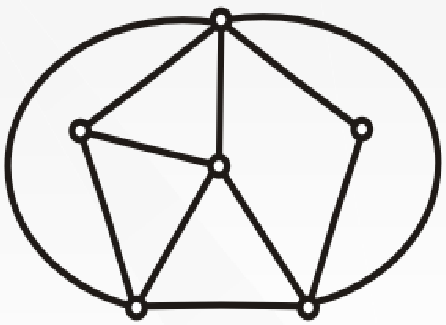
阶数大于等于3的极大平面图中不可能有割点和桥。

任何n(n≥4)阶极大平面图G均有δ(G)≥3。

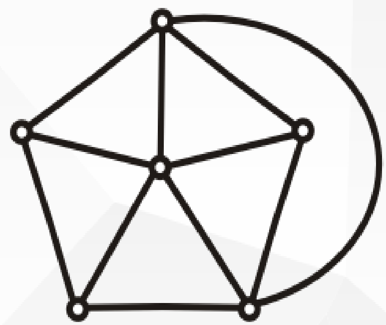
3.定理 n(n≥3)阶简单平面图是极大平面图当且仅当它连通且每个面的次数都为3。

5.5 平面图与着色

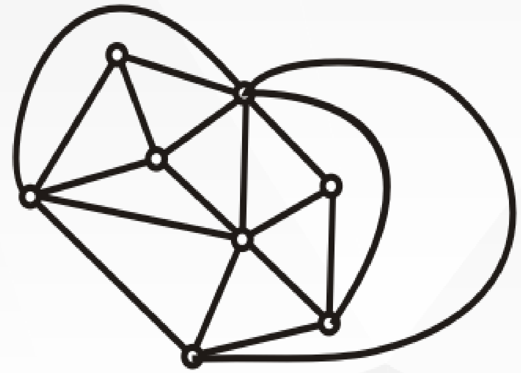
例　是否是极大平面图?



不是



不是



是

三、极小非平面图

1. 定义 若G是非平面图，并且任意删除一条边所得图都是平面图，则称G为极小非平面图。

极小非平面图必为简单图

例如，K_5, $K_{3,3}$是极小非平面图

5.5 平面图与着色

2. 欧拉公式

定理：设G为一平面图，那么它有 v个结点，e条边和r个面， 那么必然会有:

$$v-e+r=2$$

推论(欧拉公式的推广) 设G是有 p (p≥2) 个连通分支的平面图，则

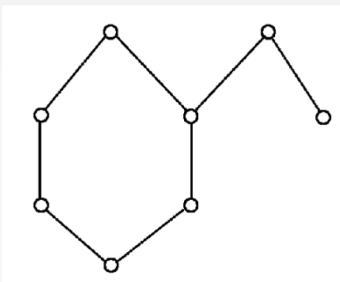
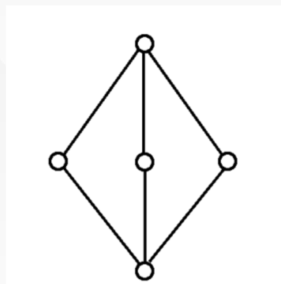
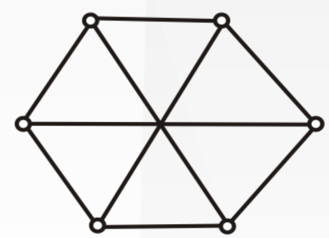
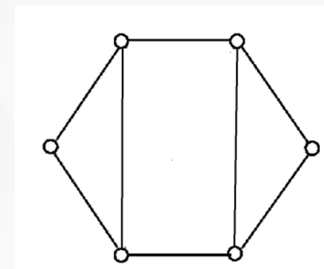
$$n-m+r=p+1$$

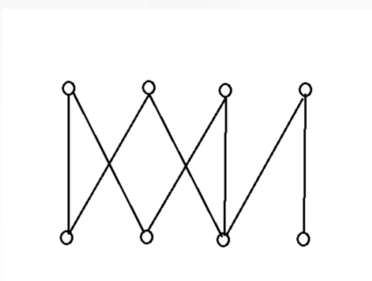
四、二部图

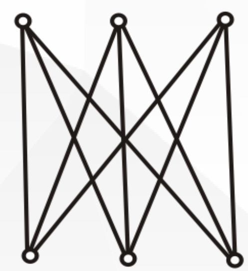
1. 定义：设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个无向图，若能将 V 分成 V_1 和 V_2 $(V_1\cup V_2=V, V_1\cap V_2=\varnothing)$，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为二部图（或称二分图，偶图等），称 V_1 和 V_2 为互补顶点子集。常将二部图 G 记为 $<V_1,V_2,E>$ 。

5.5 平面图与着色

例 下述各图是否是二部图?





不是

2. 定理 无向图G=<V,E>是二部图当且仅当G中无奇圈

5.5 平面图与着色

五、完全二部图

1. 定义：若G是简单二部图，V_1 中每个顶点均与V_2 中所有顶点相邻，则称 G 为完全二部图，记为 $K_{r,s}$ 其中 $r=|V_1|, s=|V_2|$ 。

5.6 无向树与生成树

一、树

1. 定义 (树) 若无向图 G连通且无回路，那么这个图称之为树， 并用字母 T表示。

度数为1的结点称之为叶子或树叶，

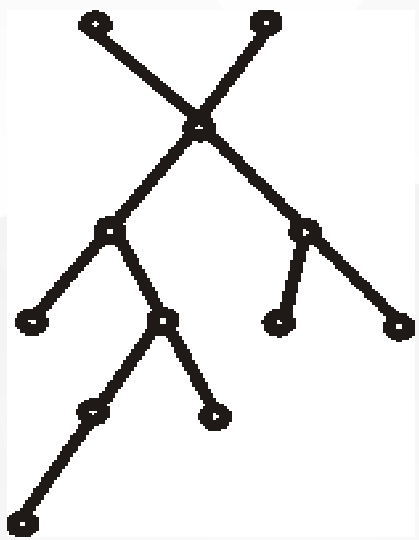
度数大 于1的称为分支点或内点。

两棵树及以上称之为森林，多棵树的森林的每个连通分支也是一颗树。

2. 无向树

无向树：无回路的连通无向图

平凡树：平凡图（只由一个孤立点组成）



5.6 无向树与生成树

3. 树等价定义

(1) 无回路的连通图。

(2) 无回路且$e=v-1$

(3) 连通且$e=v-1$

(4) 无回路，但是增加一条边就会得到一个有且仅有一个回路。

(5)连通，但是删去一条边后就不会连通（不删除结点，仅删边）

(6) 每对结点间只有一条路可以到达。

5.6 无向树与生成树

例　已知无向树T中，有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶。试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树。

解　用树的性质m=n−1和握手定理。

设有x片树叶，于是

$$n=1+2+x=3+x,$$

$$2m=2\times(2+x)=1\times3+2\times2+x$$

解得x=3，故T有3片树叶。

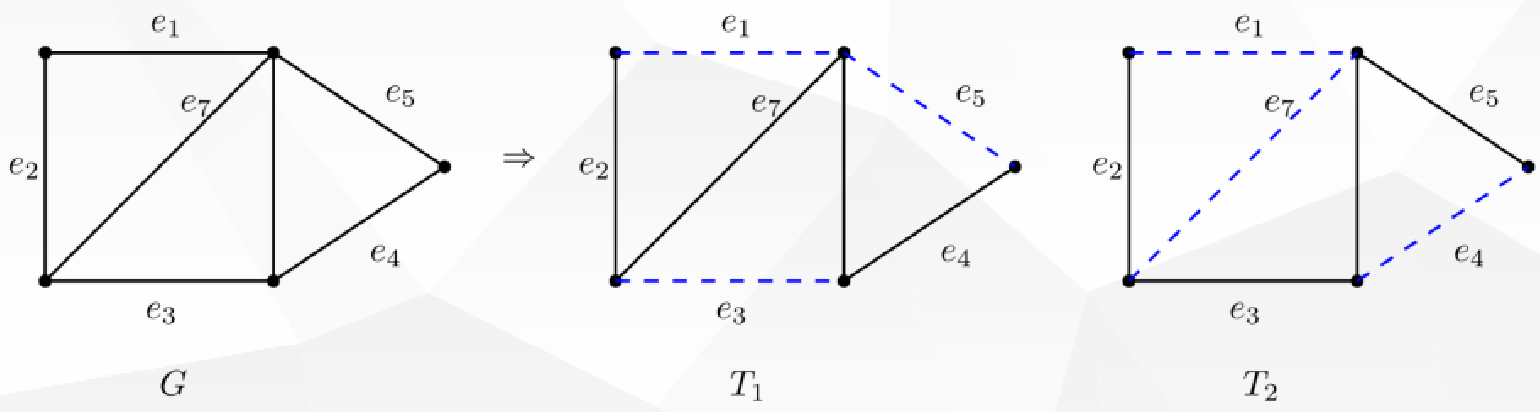
T的度数列为1, 1, 1, 2, 2, 3

有2棵非同构的无向树。

5.6 无向树与生成树

二、生成树

1. 定义 （生成树）若给定图G的子图是一棵树T，那么这棵树称为G的生成树。在生成树中的边称为树枝，不再生成树中的边称为弦。



5.6 无向树与生成树

2. 生成树的存在性

定理 任何无向连通图都有生成树。

证 用破圈法。若图中无圈，则图本身就是自己的生成树。否则删去圈上的任一条边，这不破坏连通性，重复进行直到无圈为止，剩下的图是一棵生成树。

推论 设n阶无向连通图有m条边，则$m \geq n-1$。

三、无向图与最小生成树

1. 对无向图或有向图的每一条边e附加一个实数w(e)，称作边e的权。图连同附加在边上的权称作带权图，记作G=<V,E,W>。设T是G的生成树，T所有边的权的和称作T的权，记作W(T)。

2. 最小生成树：带权图权最小的生成树

3. 方法：普林算法和克鲁斯卡尔算法

普林算法（避圈法）——求最小生成树的算法

第1步：对G的所有边的权重进行排序

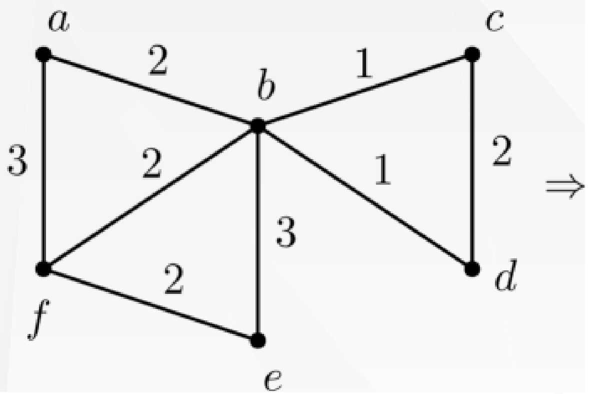
第2步：选取最小边，将它标记为e1放入到最小生成树T的集合中，设i:=1

第3步：在G中选择不在T中但是关联T中结点的边ei，判断使得若将ei加入到T中，T中不会有回路，且ei是满足这个条件的最小边。

第4步：i:=i+1直到i=n-1结束。

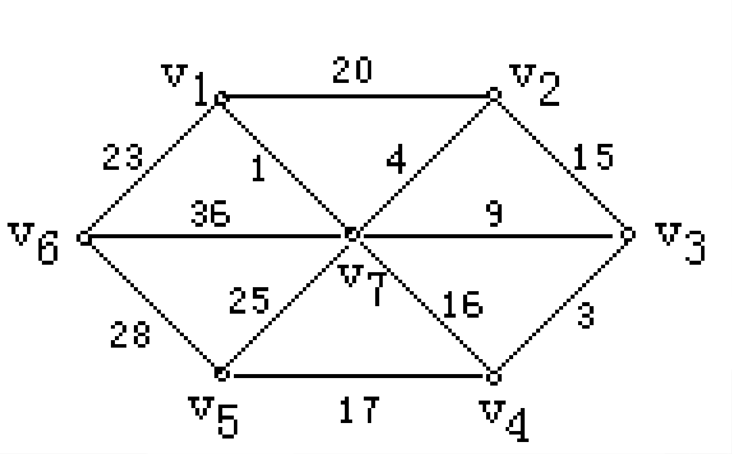
5.6 无向树与生成树

求最小生成树的算法



5.6 无向树与生成树

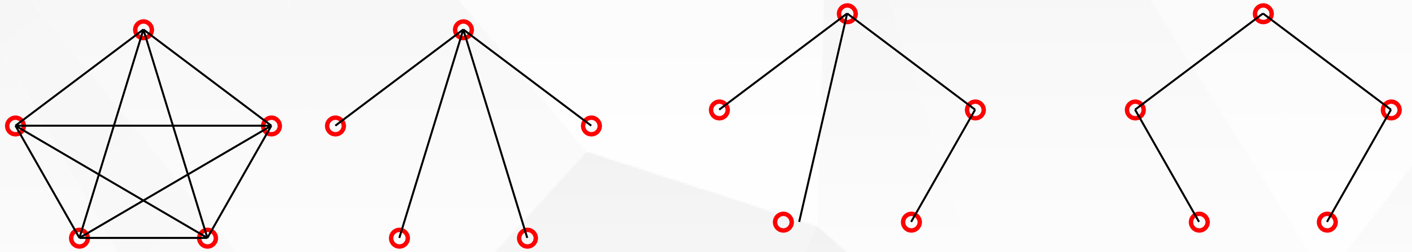
例：如下图所示的赋权图表示某七个城市v1,v2…v7及预先算出它们之间的一些直接通信线路造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间能够通信而且总造价最小。



5.6 无向树与生成树

例：请画出K_5 的所有不同构的生成树。

解： K_5的生成树T边数为4，T的度数和为8.



(11114)　(11123)　(11222)

5.7 有向树与应用

一、有向树与根树

有向树：若不考虑边的方向时图G是一棵树，那么这个图称为有向树

根树：有一个顶点入度为 0，其余的入度均为 1 的非平凡的有向树

树根：有向树中入度为 0 的顶点

树叶：有向树中入度为 1 , 出度为 0 的顶点

内点：有向树中入度为 1 , 出度大于 0 的顶点

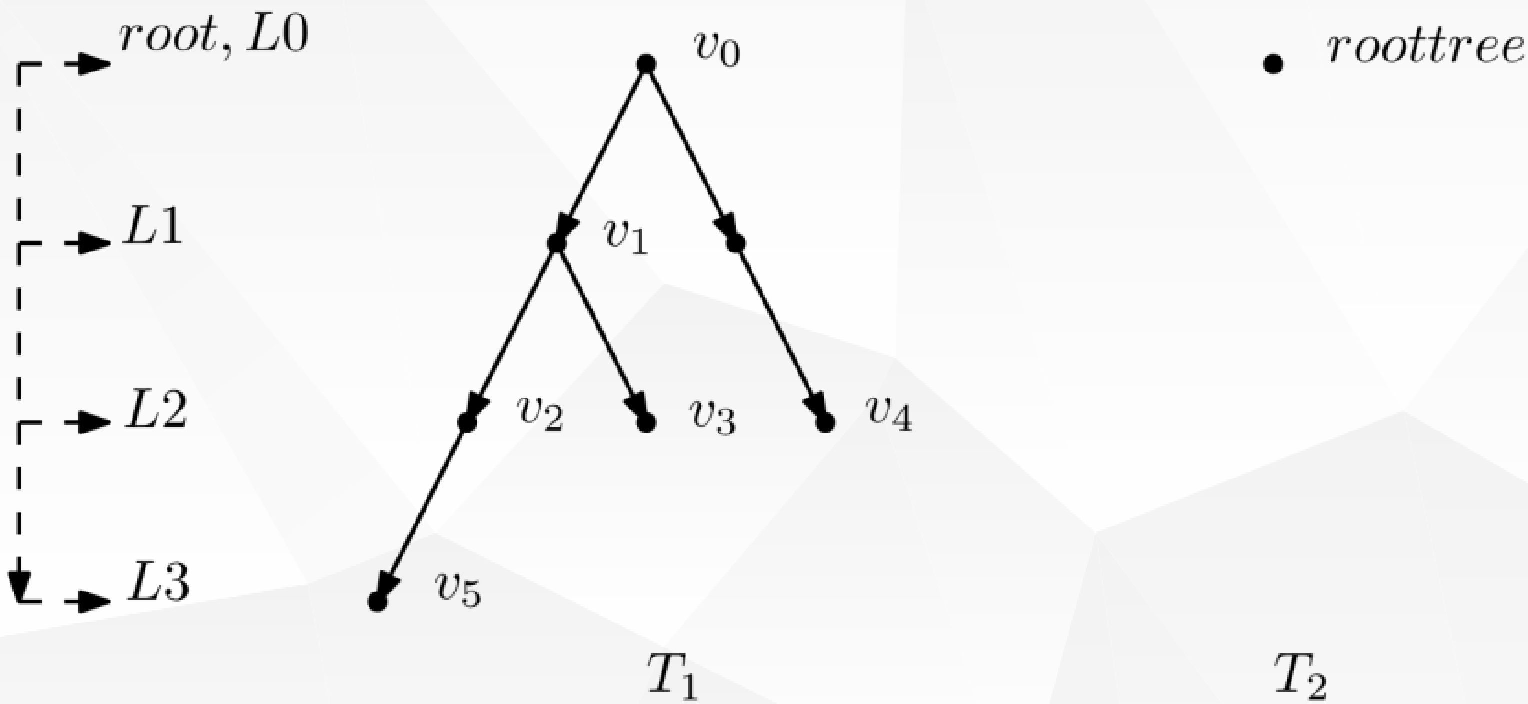
分支点：树根与内点的总称

顶点v的层数：从树根到v的通路长度

树高：有向树中顶点的最大层数

5.7 有向树与应用

根树的画法：树根放上方，省去所有有向边上的箭头



二、家族树

定义　把根树看作一棵家族树：

(1) 若顶点 a 邻接到顶点 b，则称 b 是 a 的儿子，a 是 b 的父亲；

(2) 若b和c为同一个顶点的儿子，则称b和c是兄弟；

(3) 若a≠b且a可达b，则称a是b的祖先，b是a的后代。

设v为根树的一个顶点且不是树根，称v及其所有后代的导出子图为以v为根的根子树。

5.7 有向树与应用

三、根树的分类

有序树：将根树同层上的顶点规定次序

r叉树：根树的每个分支点至多有r个儿子

r叉正则树：根树的每个分支点恰有r个儿子

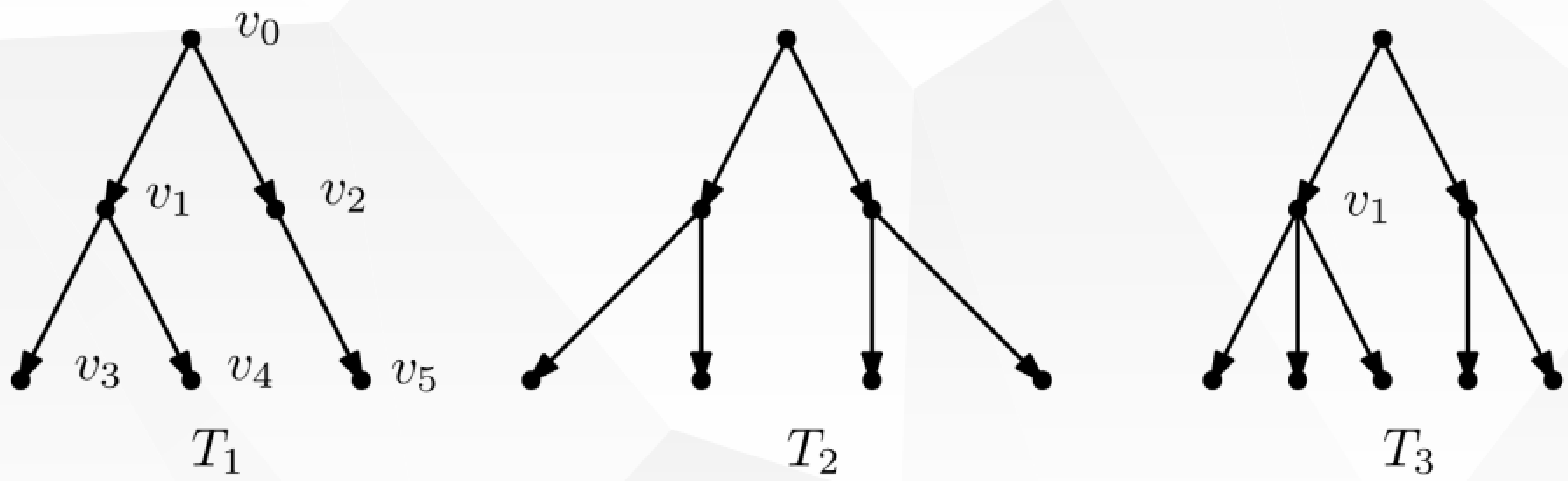
r叉完全正则树：树叶层数相同的r元正则树

r叉有序树：有序的r叉树

r叉正则有序树：有序的r叉正则树

r叉完全正则有序树：有序的r叉完全正则树

5.7 有向树与应用



注意到图中T1的每一个结点无论是根结点还是分枝结点的出度最大为2，那么样的树就是称为二叉树，同理T2也是二叉树，而T3显然最大的出度是3，因而是三叉树。

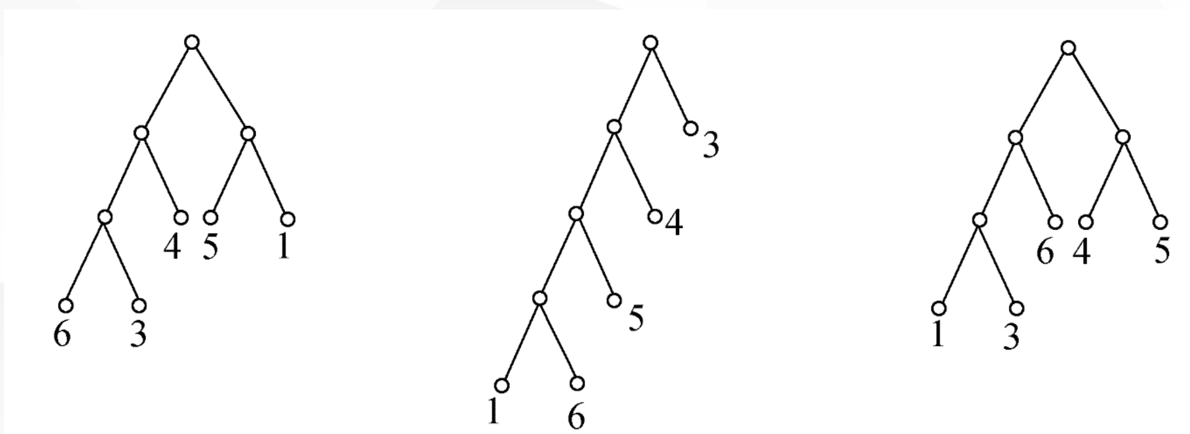
例：一棵完全二叉树有e条边，t个叶结点，请推导出e与t的关系式。

解.根据完全m叉树的公式:$(m-1)i=t-1$
得分支结点数 $i=t-1$ 又根据树中 $e=v-1$ v是结点数.
所以 $e=(i+t)-1=t-1+t-1=2t-2$

四、最优2叉树

1. 定义 设2叉树T有t片树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$，树叶的权分别为$w_1, w_2, \ldots, w_t$，称 $W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为T的权，其中 $l(v_i)$是v_i的层数。在所有权为$w_1, w_2, \ldots, w_t$ 的t片树叶的2叉树中，权最小的2叉树称为最优 2叉树。

例如



$W(T_1)=47$ $W(T_2)=54$ $W(T_3)=42$

5.7 有向树与应用

2. 求最优2叉树的算法

Huffman算法：

给定实数$w_1, w_2, \ldots, w_t$,

① 作t片树叶，分别以$w_1, w_2, \ldots, w_t$为权。

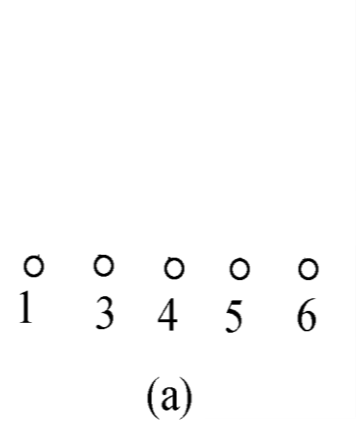
② 在所有入度为0的顶点(不一定是树叶)中选出两个权最小的顶点，添加一个新分支点，以这2个顶点为儿子，其权等于这2个儿子的权之和。

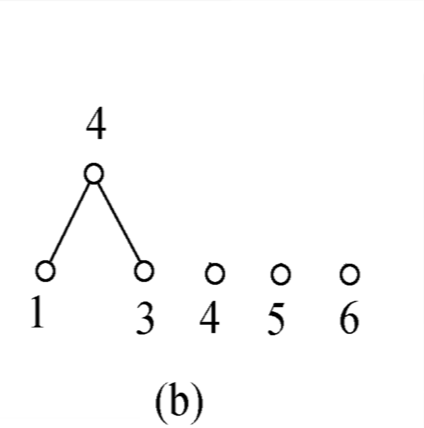
③ 重复②，直到只有1个入度为0 的顶点为止。

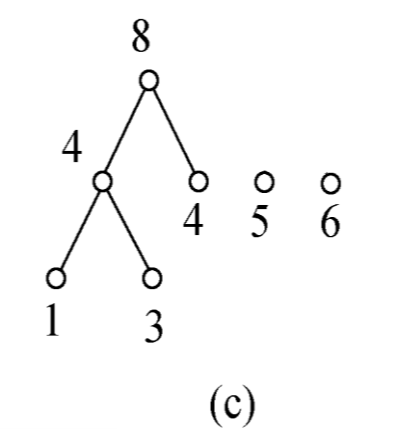
W(T)等于所有分支点的权之和

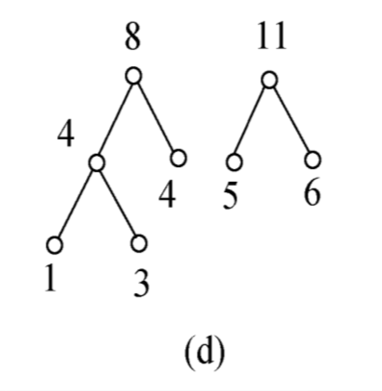
5.7 有向树与应用

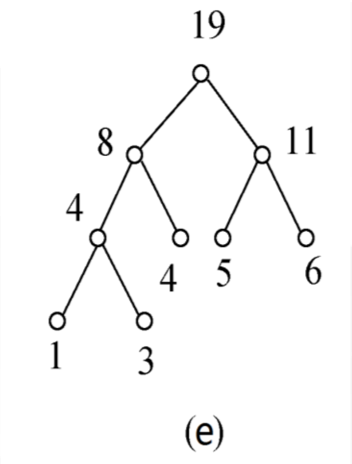
例 求权为 1, 3, 4, 5, 6的最优树。











W(T)=42，前面的T_3也是最优的。