第四篇

电 磁 学

电能是应用最广泛的能源；

电磁波的传播实现了信息传递；

电磁学与工程技术各个领域有十分密切的联系；

电磁学的研究在理论方面也很重要。

公元前600年

古希腊泰勒斯
第一次记载电现象

1820年

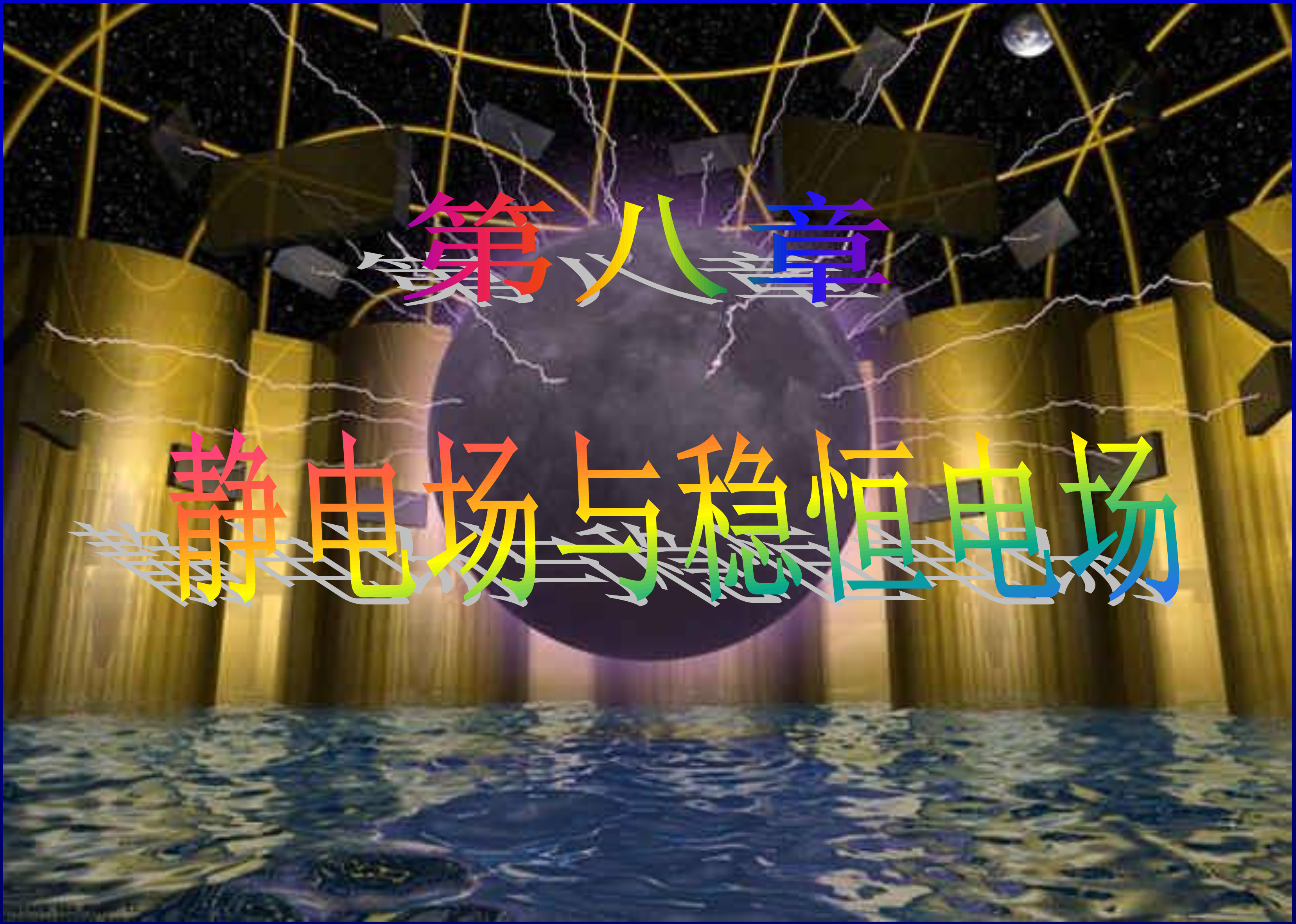
奥斯特发现
电流对磁针的作用

1831年

法拉第发现
电磁感应

1865年麦克斯韦提出
电磁场理论

1905年爱因斯坦建立
狭义相对论



第八章

静电场与稳恒电场

静电场-----相对于观察者静止的电荷产生的电场

稳恒电场—不随时间改变的电荷分布产生不随时间改变的电场

两个物理量：　场强、电势；

一个实验规律：库仑定律；

两个定理：　高斯定理、环流定理

8-1 电场 电场强度

一、电荷

电荷的种类：正电荷、负电荷

电荷的性质：同号相吸、异号相斥

电量：电荷的多少 单位：库仑 符号：C

电荷守恒定律：在一个孤立系统内发生的过程中，正负电荷的代数和保持不变。

电荷的量子化效应：$Q=Ne$

二、库仑定律

真空中两个静止的点电荷之间的作用力（静电力），与它们所带电量的乘积成正比，与它们之间的距离的平方成反比，作用力沿着这两个点电荷的连线。

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$\vec{F}_{21}$ ——电荷q_1作用于电荷q_2的力。

$\vec{r}_o$ ——单位矢量，由施力物体指向受力物体。

ε_0 ——真空介电常数。

$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2}$$

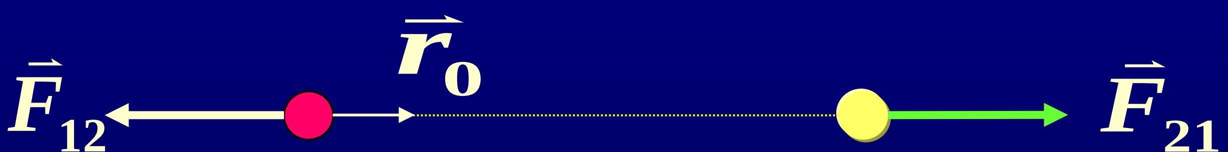
$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx 9\times10^9\,Nm^2C^{-2}$$

讨论 $\vec{F}_{21}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r^2}\vec{r}_0$

库仑定律包含同性相斥，异性相吸这一结果。

(a)q_1和q_2同性，则$q_1 q_2>0$，$\vec{F}_{21}$和 $\vec{r}_0$ 同向，

方程说明1排斥2



$q_1>0$ $q_2>0$

$q_1<0$ $q_2<0$

斥力

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0$$

(b)q_1和q_2异性，则$q_1 q_2<0$，$\vec{F}_{21}$和$\vec{r}_0$反向，方程说明1吸引2

$q_1 > 0$ $q_2 < 0$ 引力

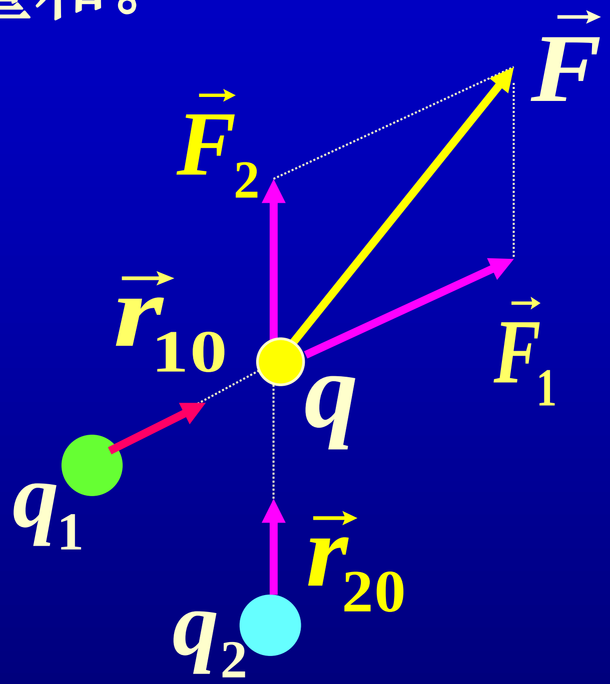
$q_1 < 0$ $q_2 > 0$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}}$$

注意：只适用两个点电荷之间

静电力的叠加原理

作用于某电荷上的总静电力等于其他点电荷单独存在时作用于该电荷的静电力的矢量和。



数学表达式

离散状态

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

$$\vec{F}_i=\frac{qq_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^{\,2}}\vec{r}_{i0}$$

连续分布

$$\vec{F}=\int d\vec{F} \qquad d\vec{F}=\frac{q\,dq}{4\pi\varepsilon_0 r^{2}}\vec{r}_0$$

例：在氢原子中，电子与质子的距离为5.3×10^{-11}米，试求静电力及万有引力，并比较这两个力的数量关系。

解：由于电子与质子之间距离约为它们自身直径的10^5倍，因而可将电子、质子看成点电荷。

电子与质子之间静电力（库仑力）为吸引力

$$F_E = e^2 \Big/ 4\pi\varepsilon_0 R^2 = 8.2\times10^{-8}(\text{牛})$$

电子与质子之间的万有引力为

$$F_G = GmM \Big/ R^2 = 3.6\times10^{-47}\ N$$

忽略！

所以库仑力与万有引力数值之比为

$$F_E \Big/ F_G = 2.3\times10^{39}$$

三、电场强度

电荷 $\rightleftarrows$ 电场 $\rightleftarrows$ 电荷

<u>电场</u>

★叠加性

★对外表现：*a*.对电荷（带电体）施加作用力

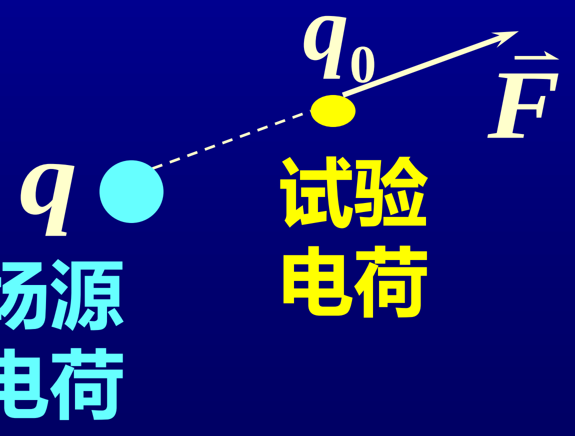
b.电场力对电荷（带电体）作功

★研究方法：力法—引入场强 $\vec{E}$

能法—引入电势 u

<u>电场强度</u>

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$



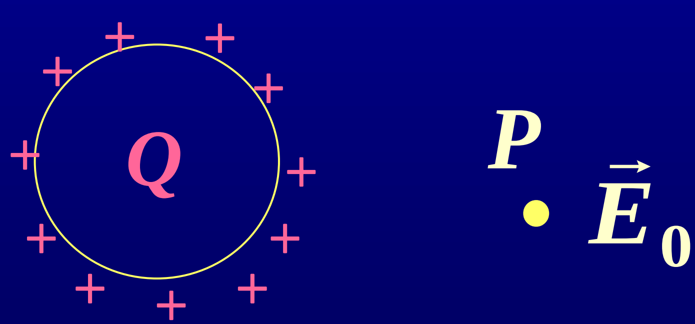
$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$$

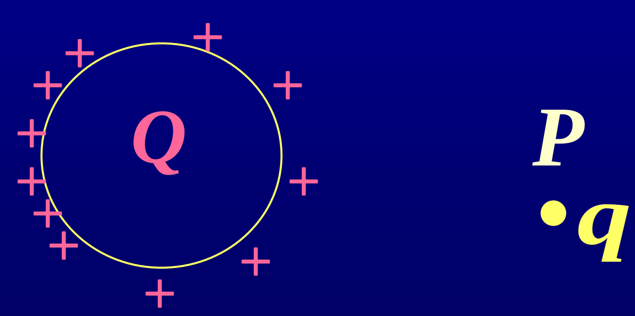
讨论

1.由 $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$ 是否能说, $\vec{E}$ 与 $\vec{F}$ 成正比，与 q_0 成反比?

2.一总电量为$Q>0$的金属球，在它附近P点产生的场强为E_0。将一点电荷$q>0$引入P点，测得q实际受力F与q之比为F/q，是大于、小于、还是等于P点的E_0

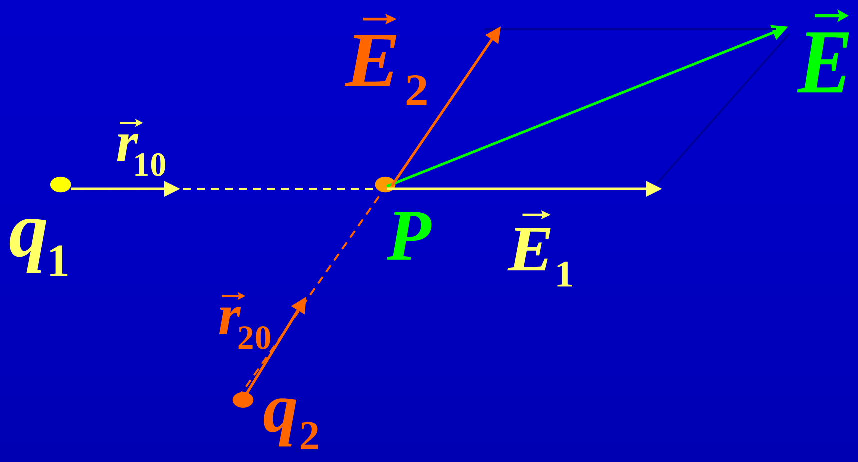
$$\boxed{\frac{F}{q} < E_0}$$





四、场强叠加原理

点电荷系

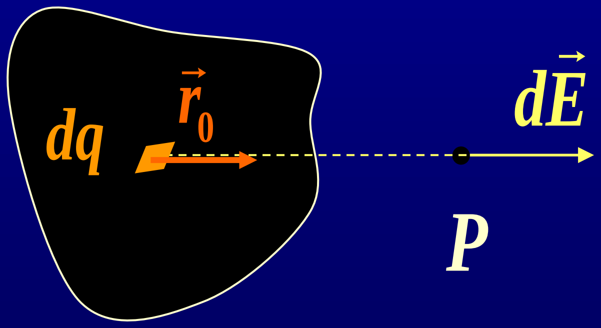


$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\sum\vec{F}_i}{q_0}=\sum\vec{E}_i$$

连续带电体

$$\vec{E}=\int d\vec{E}$$

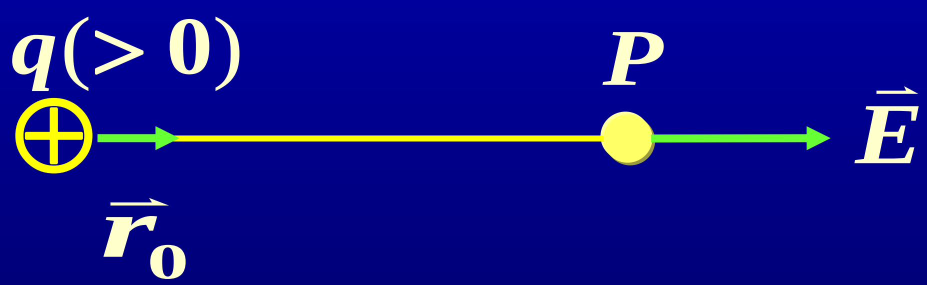


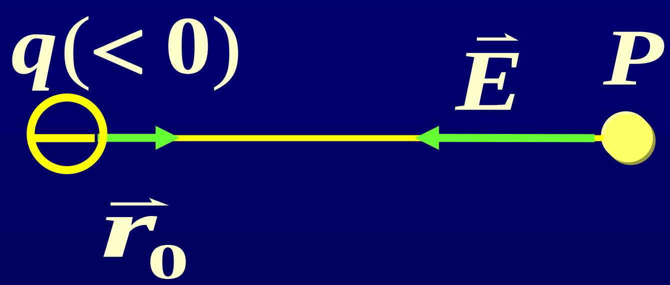
五、电场强度的计算

1. 点电荷的电场

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}_0}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\vec{r}_0 \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}_0$$





2. 点电荷系的电场

设真空中有n个点电荷$q_1, q_2, \ldots q_n$，则P点场强

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_{i0}$$

场强在坐标轴上的投影

$$E_x = \sum_i E_{ix}, \quad E_y = \sum_i E_{iy}, \quad E_z = \sum_i E_{iz}$$

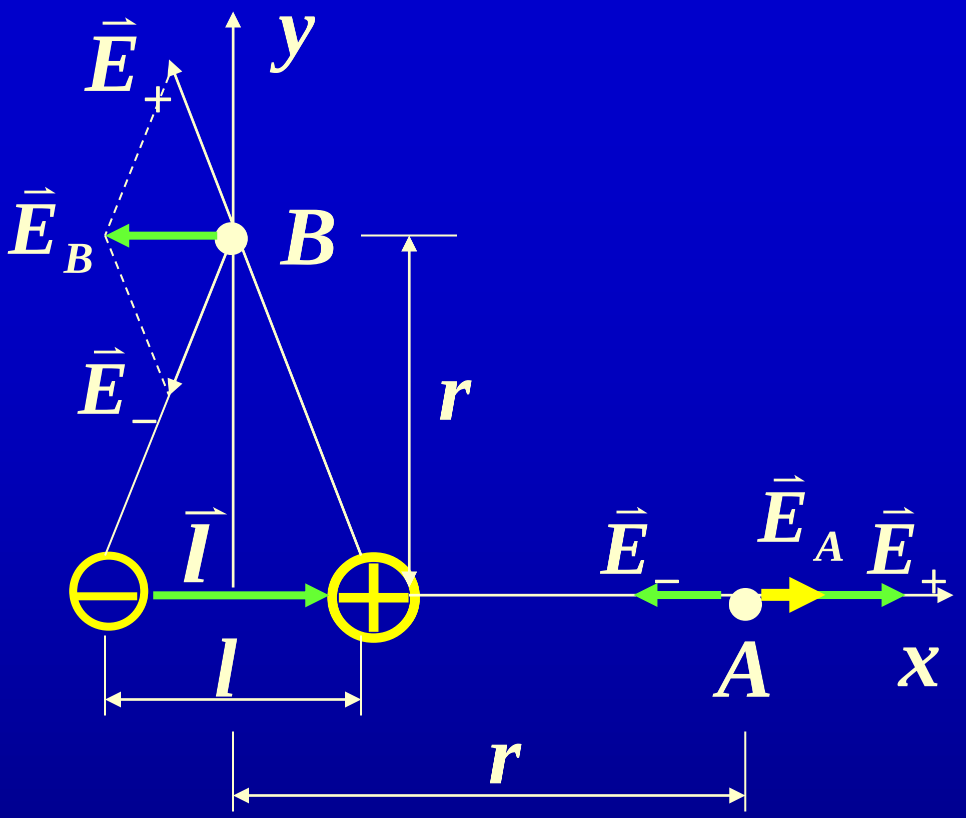
$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + \vec{E}_z \vec{k}$$

例1. 电偶极子

如图已知：q、$-q$、$r>>l$,

电偶极矩 $\vec{p}=q\vec{l}$

求：A点及B点的场强

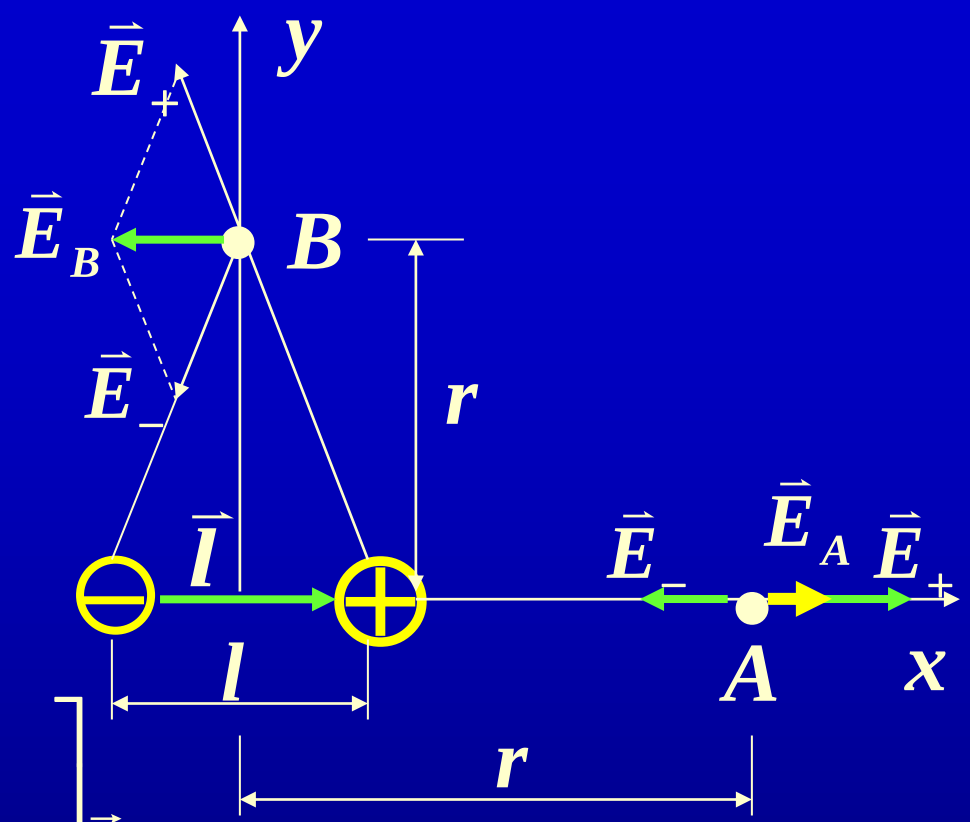


解：A点　设$+q$和$-q$ 的场强 分别为$\vec{E}_+$和 $\vec{E}_-$

$$\vec{E}_+=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-\frac{l}{2})^2}\vec{i}\qquad \vec{E}_-=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(r+\frac{l}{2})^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r - \frac{l}{2})^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_- = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (r + \frac{l}{2})^2}\vec{i}$$



$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{q}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]\vec{i}$$

$$= \frac{2qrl}{4\pi\varepsilon_0 r^4 (1-\frac{l}{2r})^2 (1+\frac{l}{2r})^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3}\vec{i}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$$

对B点：$E_+ = E_- = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(r^2 + l^2/4)}$

$E_x = E_{+x} + E_{-x} = 2E_{+x}$

$= -2E_+ \cos\theta$

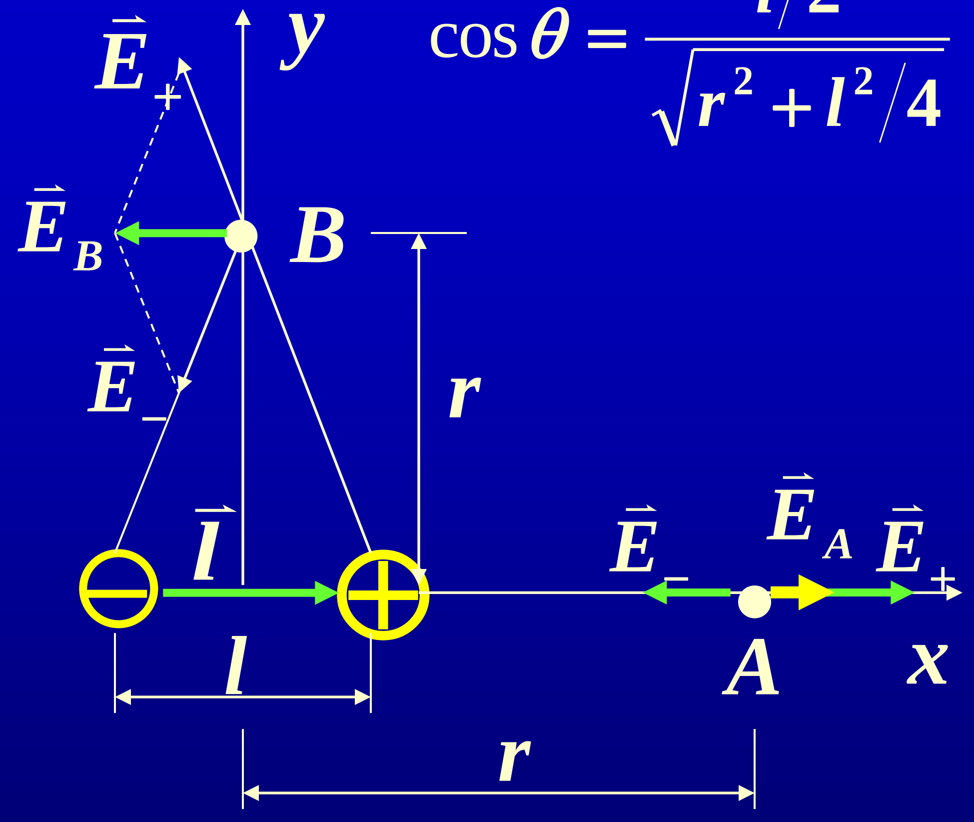
$E_y = E_{+y} + E_{-y} = 0$

$E_B = 2E_+ \cos\theta$

$= \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{ql}{(r^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2}}$

$\approx \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{r^3}$

$\cos\theta = \dfrac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}}$

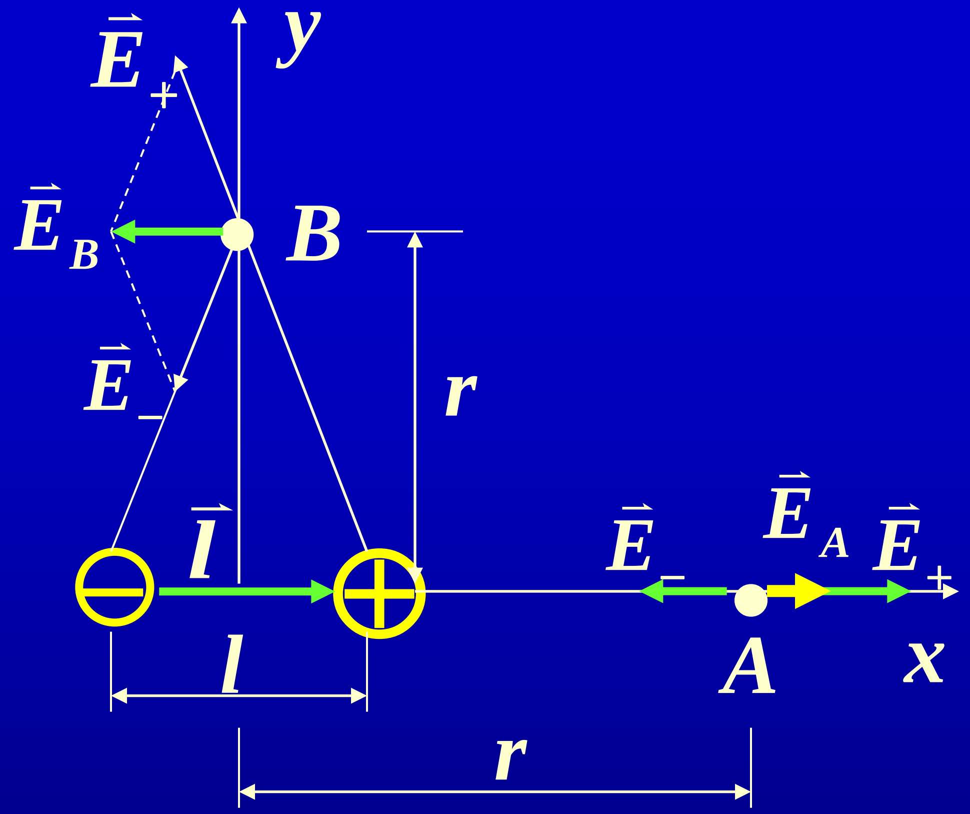


$$\vec{E}_B = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$$

$E \propto \vec{p}$

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_B = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$$



结论

$$E \propto \frac{1}{r^3}$$

3. 连续带电体的电场

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\vec{r}_0 \qquad \vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\vec{r}_0$$

$$E_x = \int dE_x \qquad E_y = \int dE_y \qquad E_z = \int dE_z$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

电荷元随不同的电荷分布应表达为

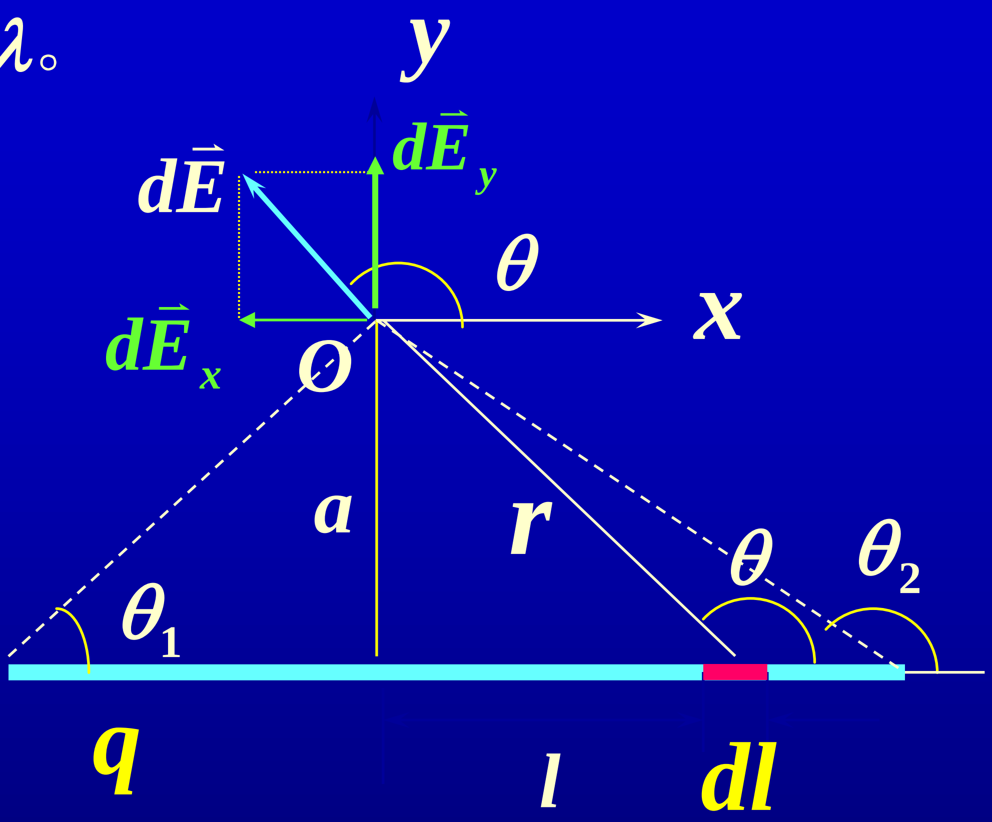
线电荷 $dq = \lambda dl$

面电荷 $dq = \sigma dS$

体电荷 $dq = \rho dV$

例2　求一均匀带电直线在O点的电场。

已知： q 、 a 、θ_1、θ_2、λ。



解题步骤

1. 选电荷元 $dq=\lambda dl$

2.确定$d\vec{E}$ 的方向

3.确定$d\vec{E}$ 的大小

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}$$

4. 建立坐标，将$d\vec{E}$投影到坐标轴上

$$dE_x=dE\cos\theta \quad dE_y=dE\sin\theta$$

5. 选择积分变量

r、θ、l 是变量，而线积分只要一个变量

选θ作为积分变量

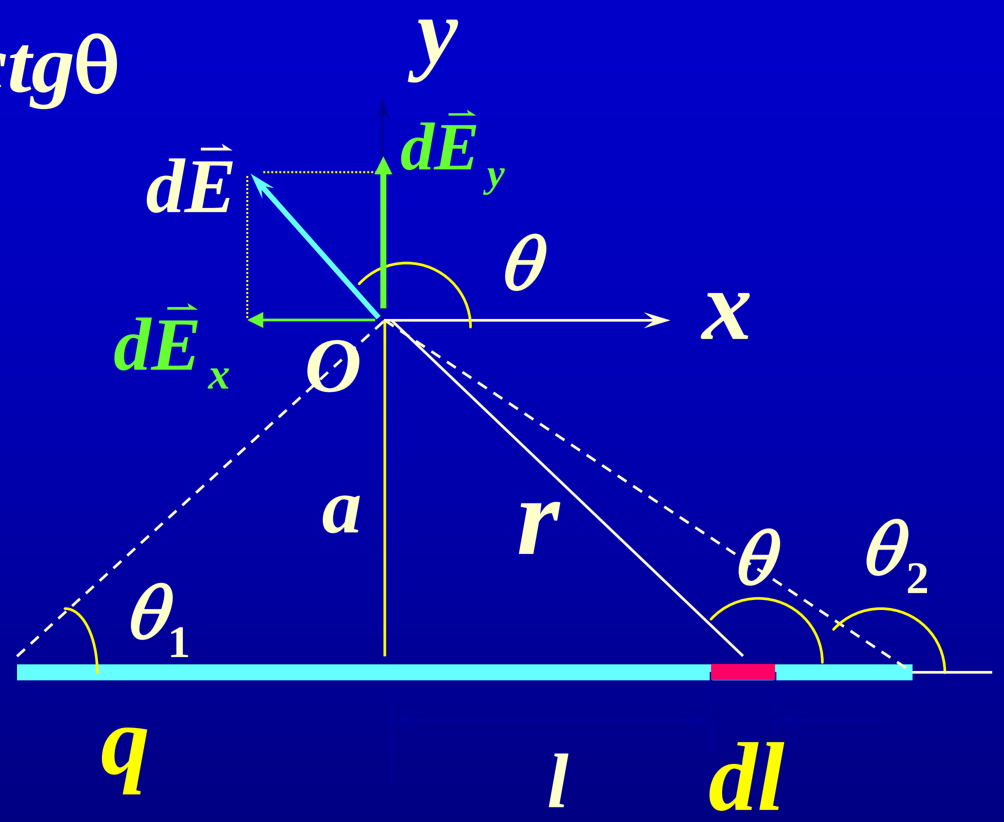
$$l = actg(\pi - \theta) = -actg\theta$$

$$\therefore dl = a\csc^2\theta d\theta$$

$$r^2 = a^2 + l^2$$

$$= a^2 + a^2 ctg^2\theta$$

$$= a^2\csc^2\theta$$



$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\csc^2\theta d\theta}{a^2\csc^2\theta}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta d\theta$$

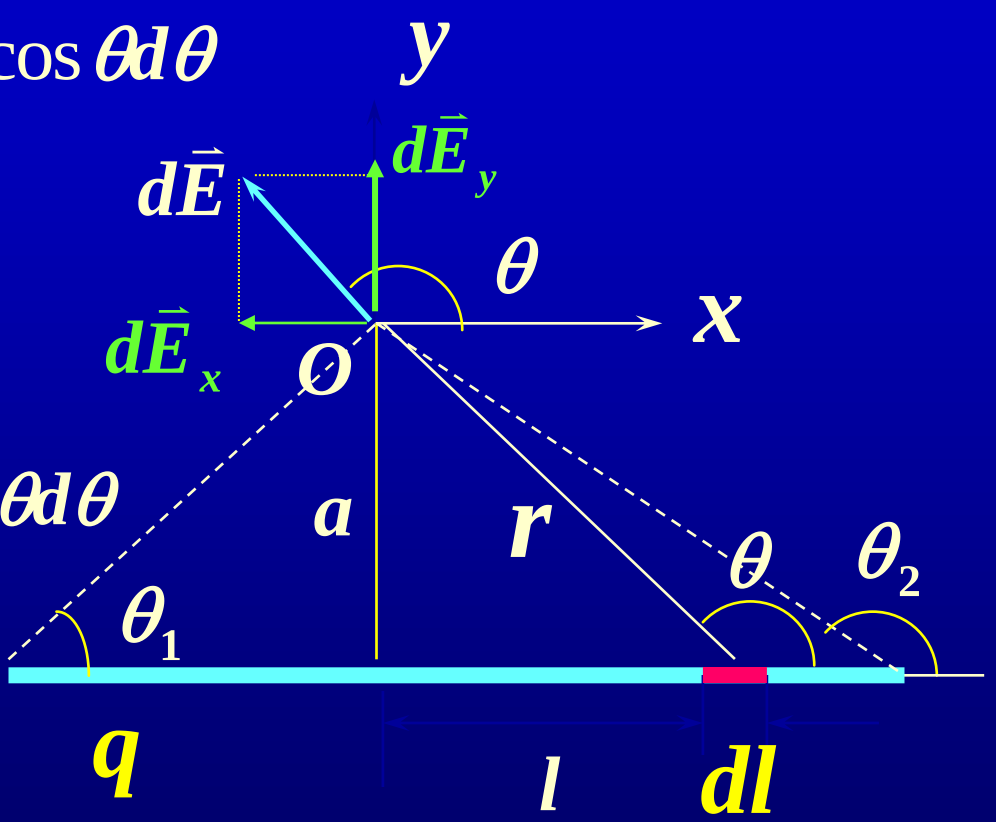
$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta d\theta$$

$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

arctg(E_y / E_x)

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

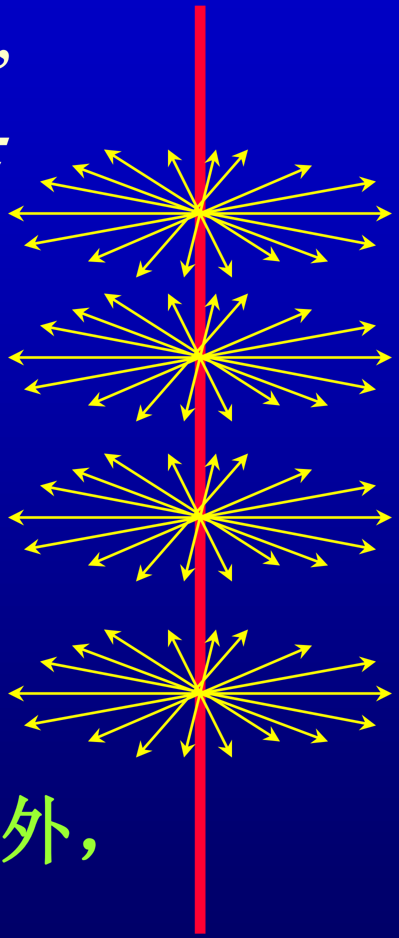
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

讨论 当直线长度 $L \to \infty$ 或 $a \to 0$ $\begin{cases}\theta_1 \to 0, \\ \theta_2 \to \pi\end{cases}$

$$E_x = 0 \qquad E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

无限长均匀带电直线的场强

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

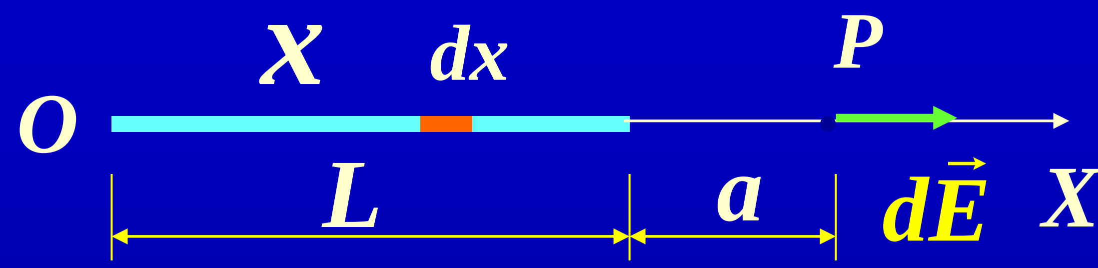


当 $\lambda > 0$, $E_y > 0$, $\vec{E}$ 方向垂直带电导体向外，

当 $\lambda < 0$, $E_y < 0$, $\vec{E}$ 方向垂直带电导体向里。

课堂练习

求均匀带电细杆延长线上一点的场强。已知 q, L, a



$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (L + a - x)^2}$$

$$E = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 (L + a - x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L + a}\right)$$

$$= \frac{qL}{4\pi\varepsilon_0 aL(L + a)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a(L + a)}$$

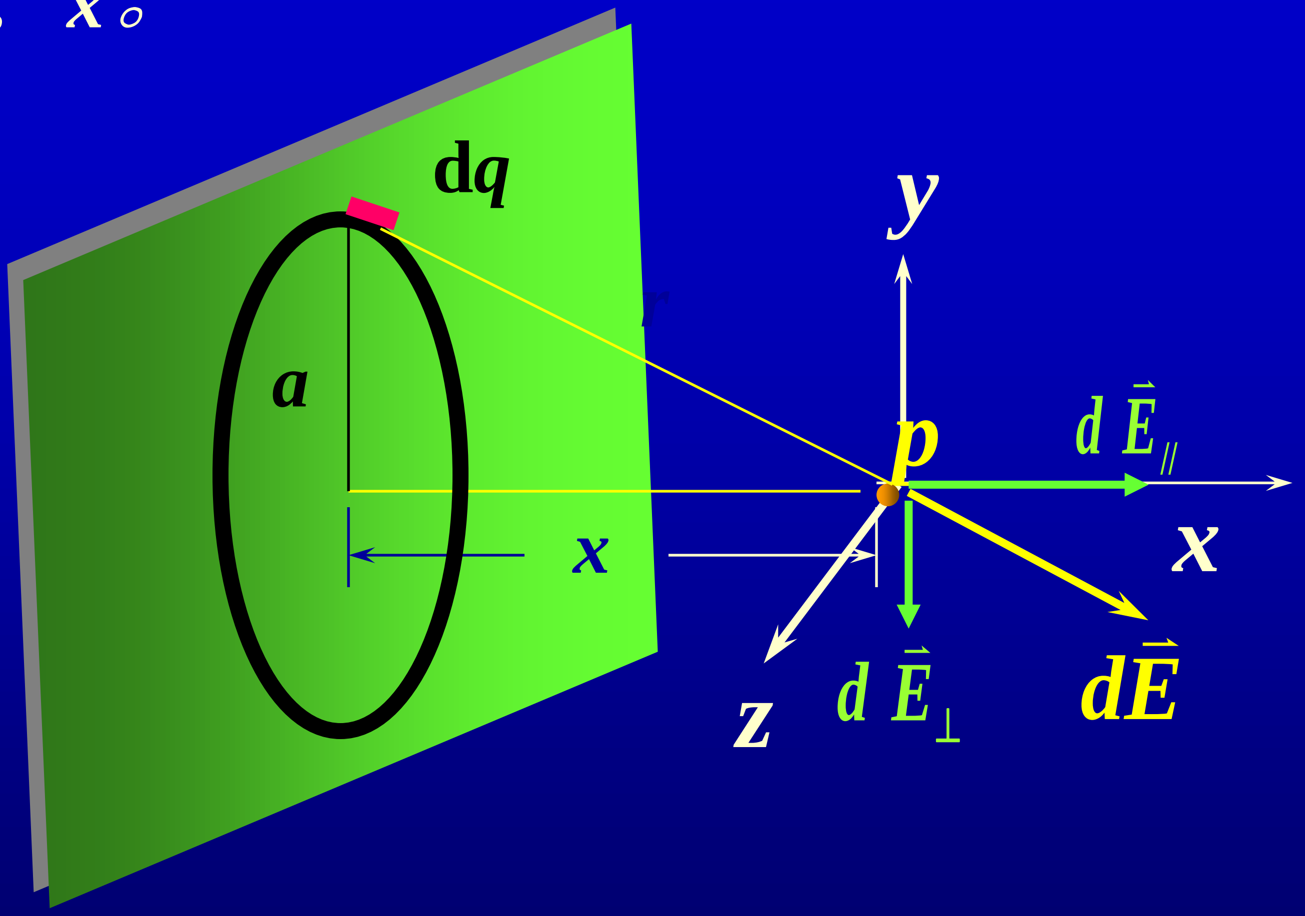
例3　求一均匀带电圆环轴线上任一点 x处的电场。

已知：　q 、a 、 x。

$$dq = \lambda dl$$

$$= \frac{q}{2\pi a} dl$$

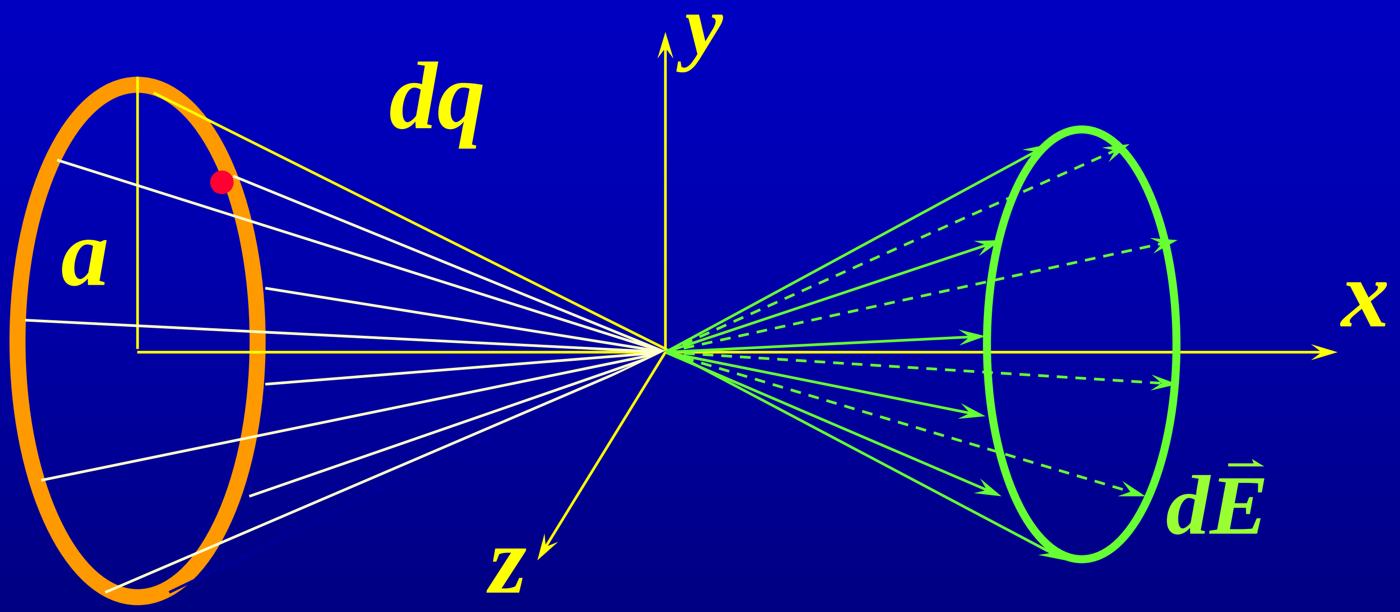
$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$d\vec{E}_{//} = dE\vec{i}$$

$$d\vec{E}_{\perp} = dE_y\vec{j} + dE_z\vec{k}$$

当dq位置发生变化时，它所激发的电场矢量构成了一个圆锥面。



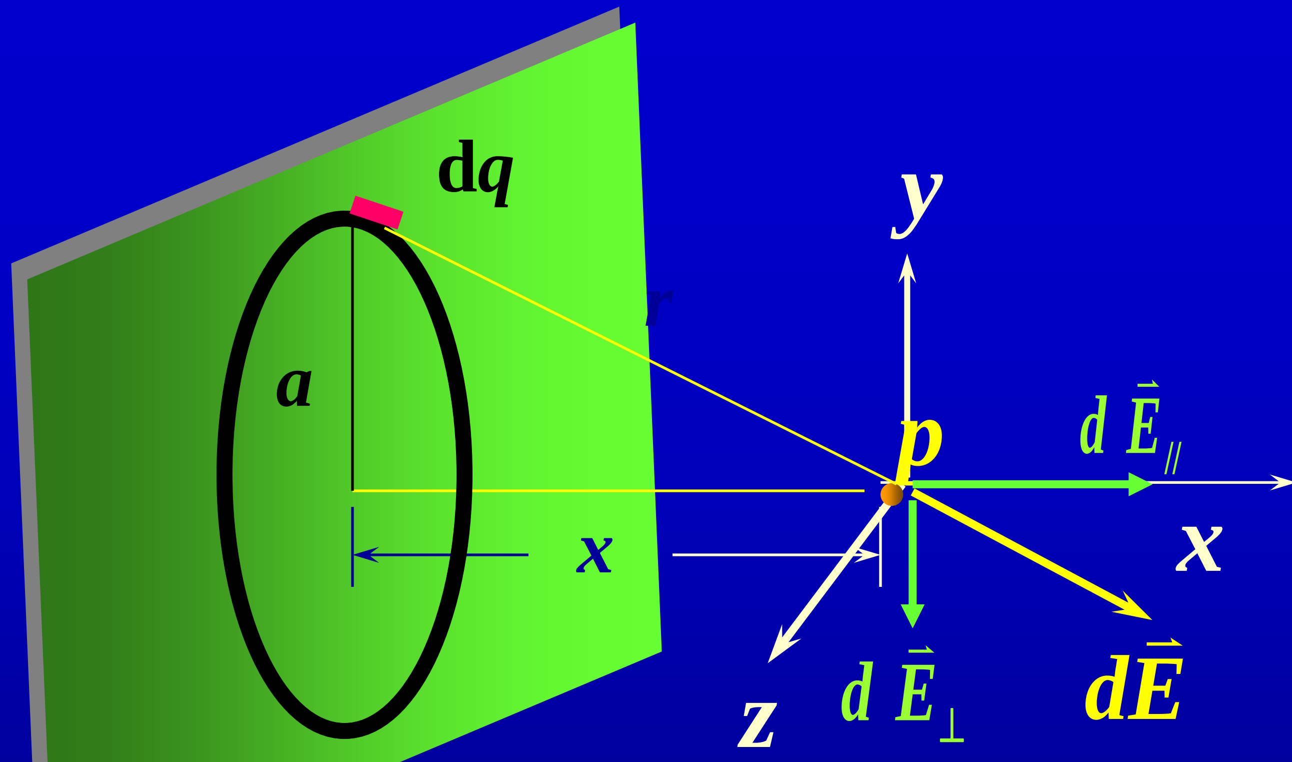
由对称性 $E_y = E_z = 0$

$$E=\int dE_{//}$$

$$=\int dE\cos\theta$$

$$\cos\theta = x/r$$

$$r=(a^2+x^2)^{1/2}$$



$$E=\oint_{2\pi a}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2\pi a}\frac{dl}{r^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{i}}$$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{i}}$$

讨论（1）当 $q>0,\ \vec{E}$的方向沿x轴正向

当$q<0,\ \vec{E}$ 的方向沿x轴负向

（2）当$x=0$,即在圆环中心处, $\vec{E}=0$

当 $x\to\infty\ \ \vec{E}=0$

$\frac{dE}{dx}=0$时 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ $\quad E=E_{max}=\dfrac{\frac{a}{\sqrt{2}}q}{4\pi\varepsilon_0(a^2+\frac{a^2}{2})^{3/2}}$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{i}}$$

（3）当 $x>>a$ 时，$x^2+a^2\approx x^2$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$$

这时可以<u>把带电圆环看作一个点电荷</u>

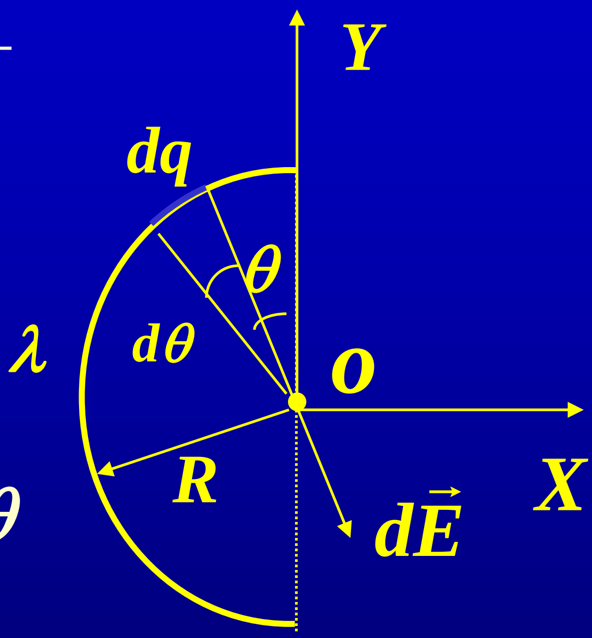
这正反映了<u>点电荷概念的相对性</u>

课堂练习：

1. 求均匀带电半圆环圆心处的 $\vec{E}$，已知 R、λ

电荷元dq产生的场 $dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

根据对称性 $\int dE_y = 0$



$$E = \int dE_x = \int dE \sin\theta = \int_0^{\pi} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \sin\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

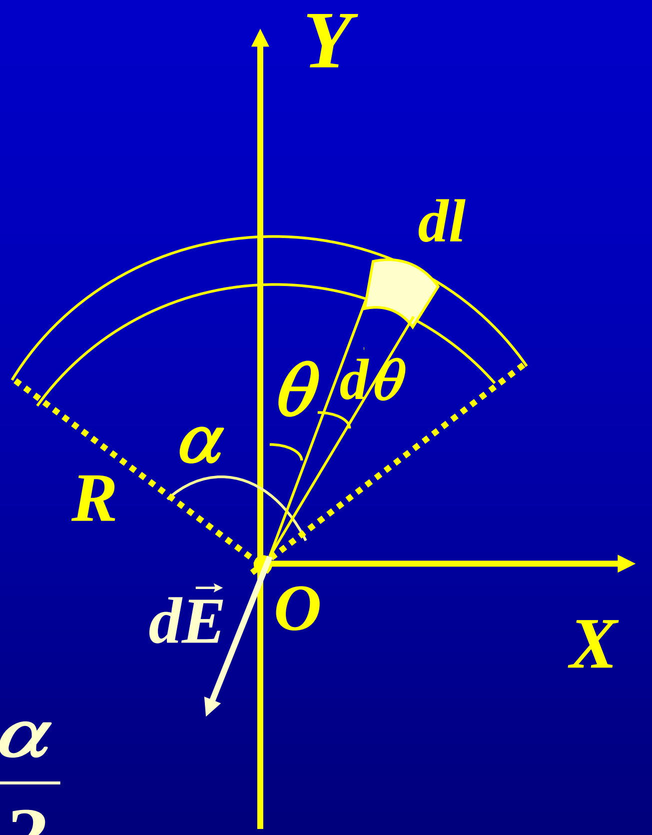
2. 求均匀带电一细圆弧圆心处的场强，已知α，λ，R

取电荷元dq则 $dE=\dfrac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

由对称性 $\int dE_x=0$

$$E=\int dE_y=\int\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\lambda R\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}d\theta=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\frac{\alpha}{2}$$



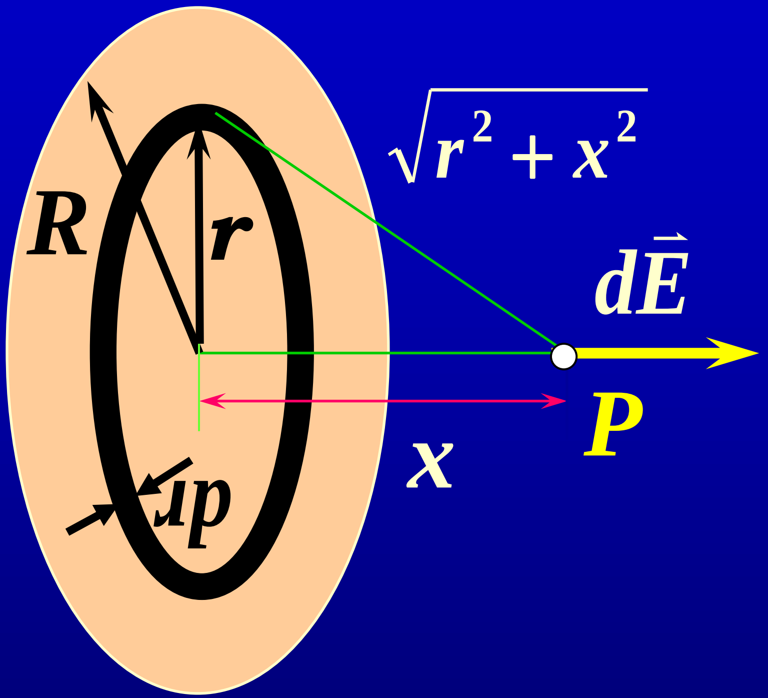
方向：沿Y轴负向

例4 求均匀带电圆盘轴线上任一点的电场。

已知：q、R、x 求：E_p

解：细圆环所带电量为

$$dq = \sigma 2\pi r dr \quad \sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$



由上题结论知：

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x dq}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E = \int dE = \int_0^R \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$$

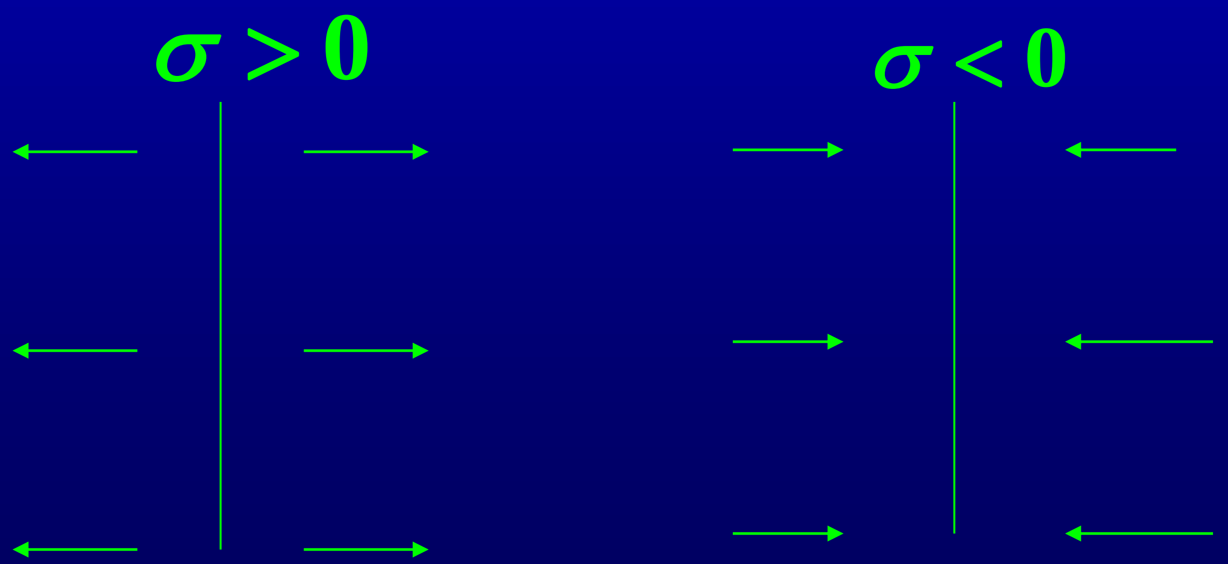
讨论

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

1. 当$R>>x$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

（无限大均匀带电平面的场强）



$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)}$$

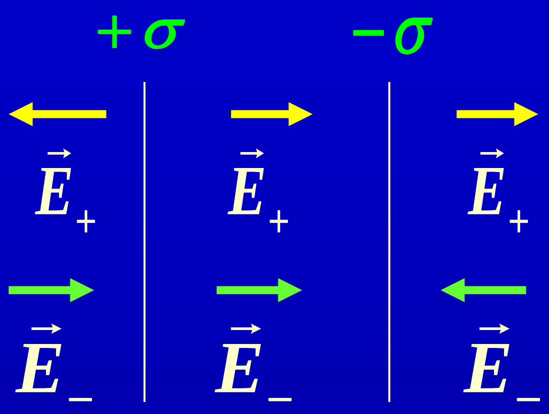
2. 当$R<<x$

$$\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}=\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)=\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2-\cdots\cdots\right]$$

$$\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

例5. 两块无限大均匀带电平面，已知电荷面密度为$\pm\sigma$，计算场强分布。



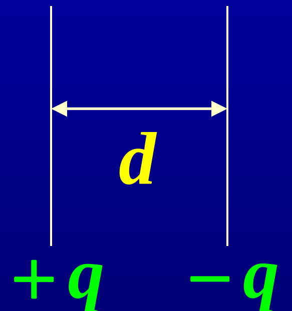
解：由场强叠加原理

两板之间：$E = E_+ + E_- = 2\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

两板之外： $E=0$

六. 带电体在外电场中所受的力

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad \vec{F} = \int \vec{E}dq$$

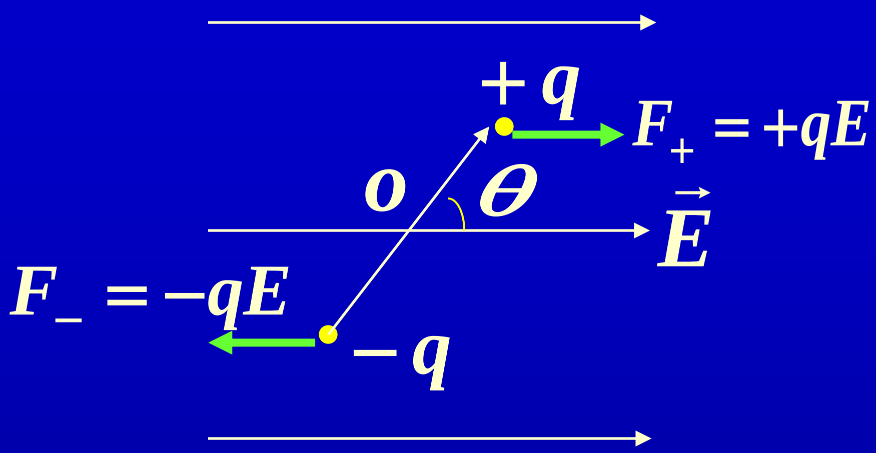


课堂讨论：如图已知$\pm q$、d、S

求两板间的所用力 $f = q\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$ $\quad f \neq \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

例6 计算电偶极子在均匀电场中所受的合力和合力矩

已知 $\vec{p}=q\vec{l}$, $\vec{E}$



解：合力

$$\vec{F}=\vec{F}_+ +\vec{F}_- =0$$

合力矩

$$M=F_+\frac{l}{2}\sin\theta+F_-\frac{l}{2}\sin\theta=qlE\sin\theta$$

将上式写为矢量式 $\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}$

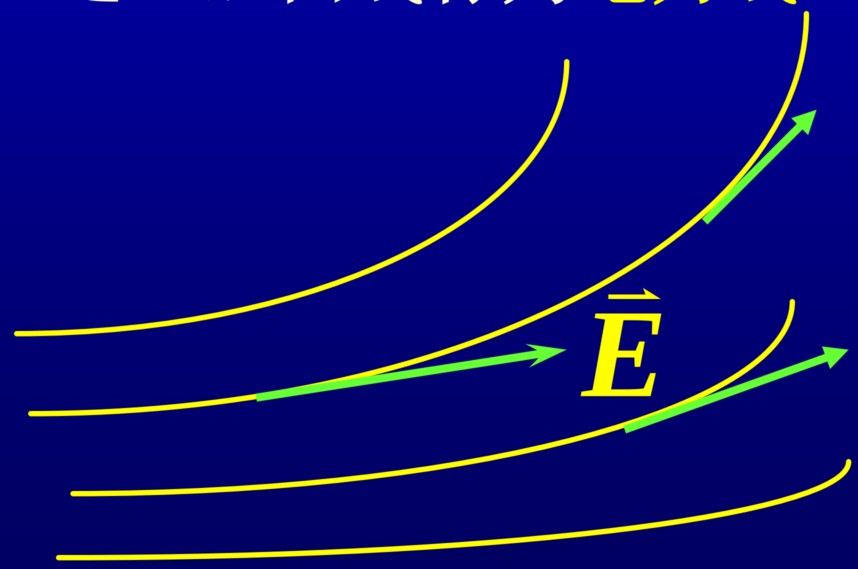
可见：$\vec{p}\perp\vec{E}$ 力矩最大；$\vec{p}\,//\,\vec{E}$ 力矩最小。

力矩总是使电矩 $\vec{p}$ 转向 $\vec{E}$ 的方向，以达到稳定状态

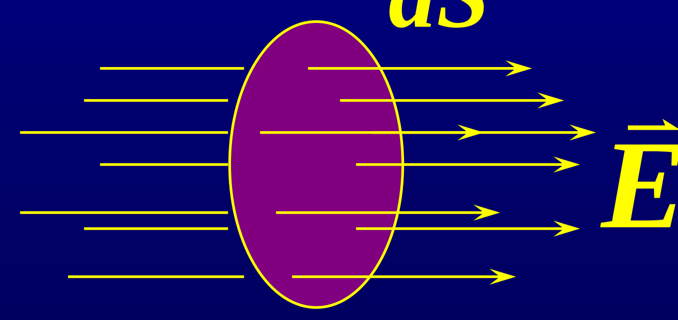
8-2 电通量 高斯定理

一、电场的图示法电力线

在电场中画一组曲线，曲线上每一点的切线方向与该点的电场方向一致，这一组曲线称为电力线。

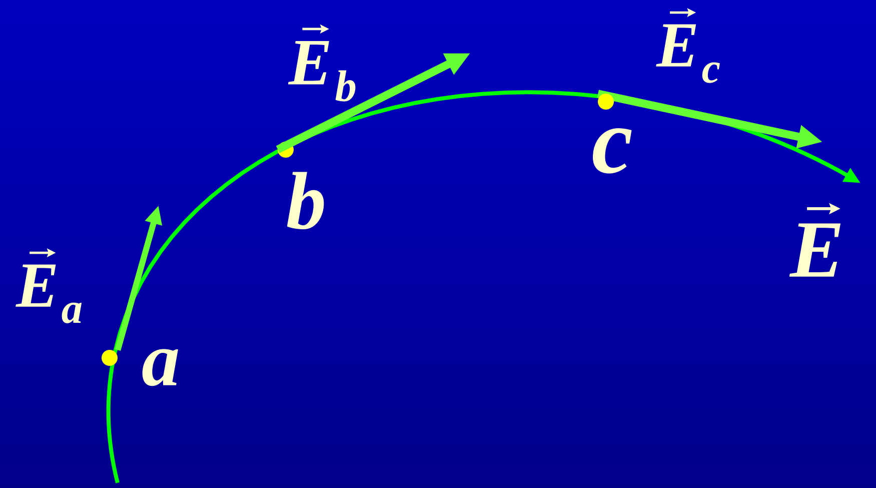


通过无限小面元dS的电力线数目$d\Phi_e$与$dS_{\perp}$的比值称为电力线密度。我们规定电场中某点的场强的大小等于该点的电力线密度



$$E=\frac{d\Phi_e}{dS_{\perp}}$$

总结： $\vec{E}\begin{cases}\text{方向：切线方向}\\ \text{大小：}E=\dfrac{d\phi_e}{dS_\perp}\end{cases}$ =电力线密度

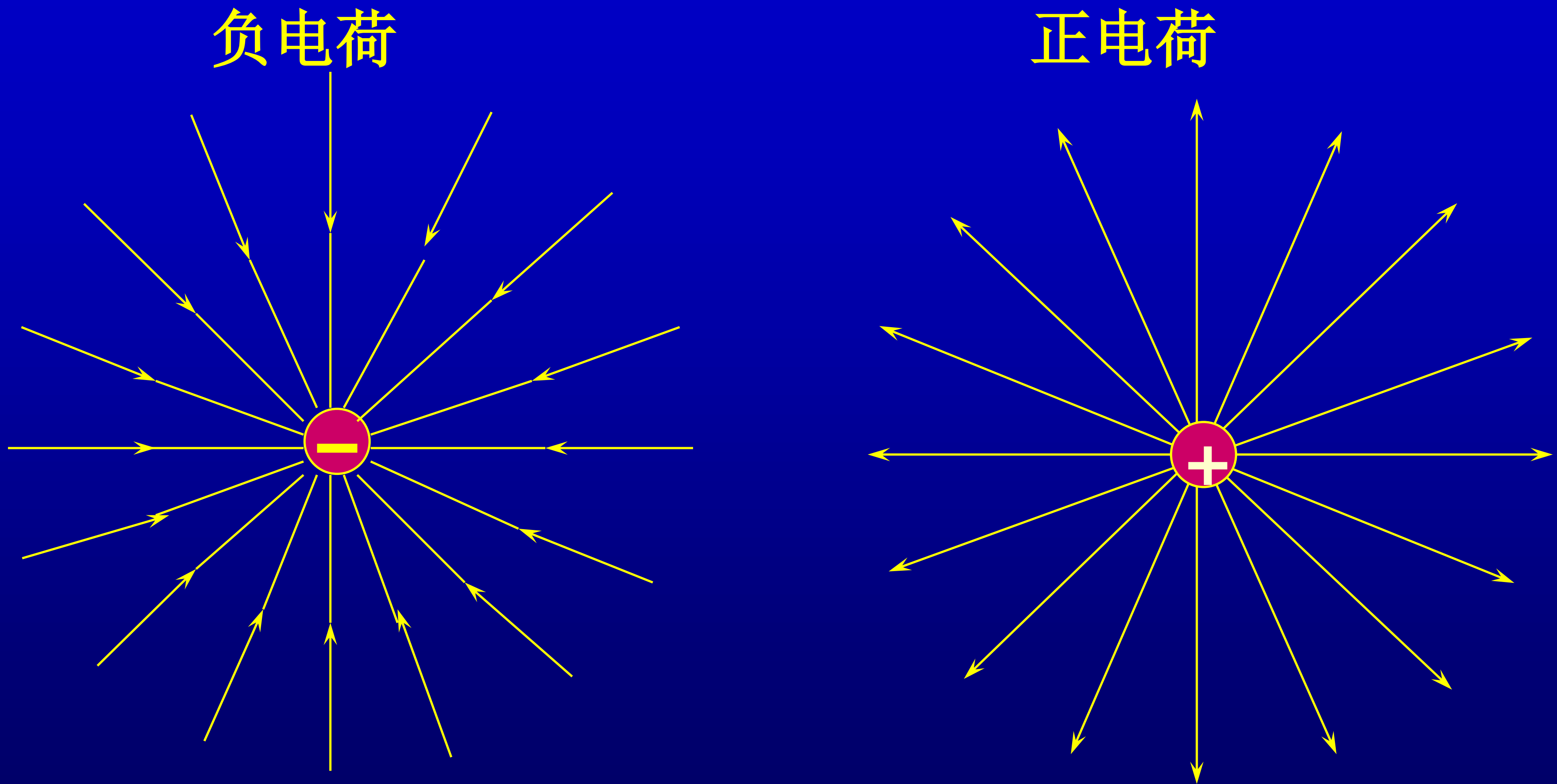


电力线性质：

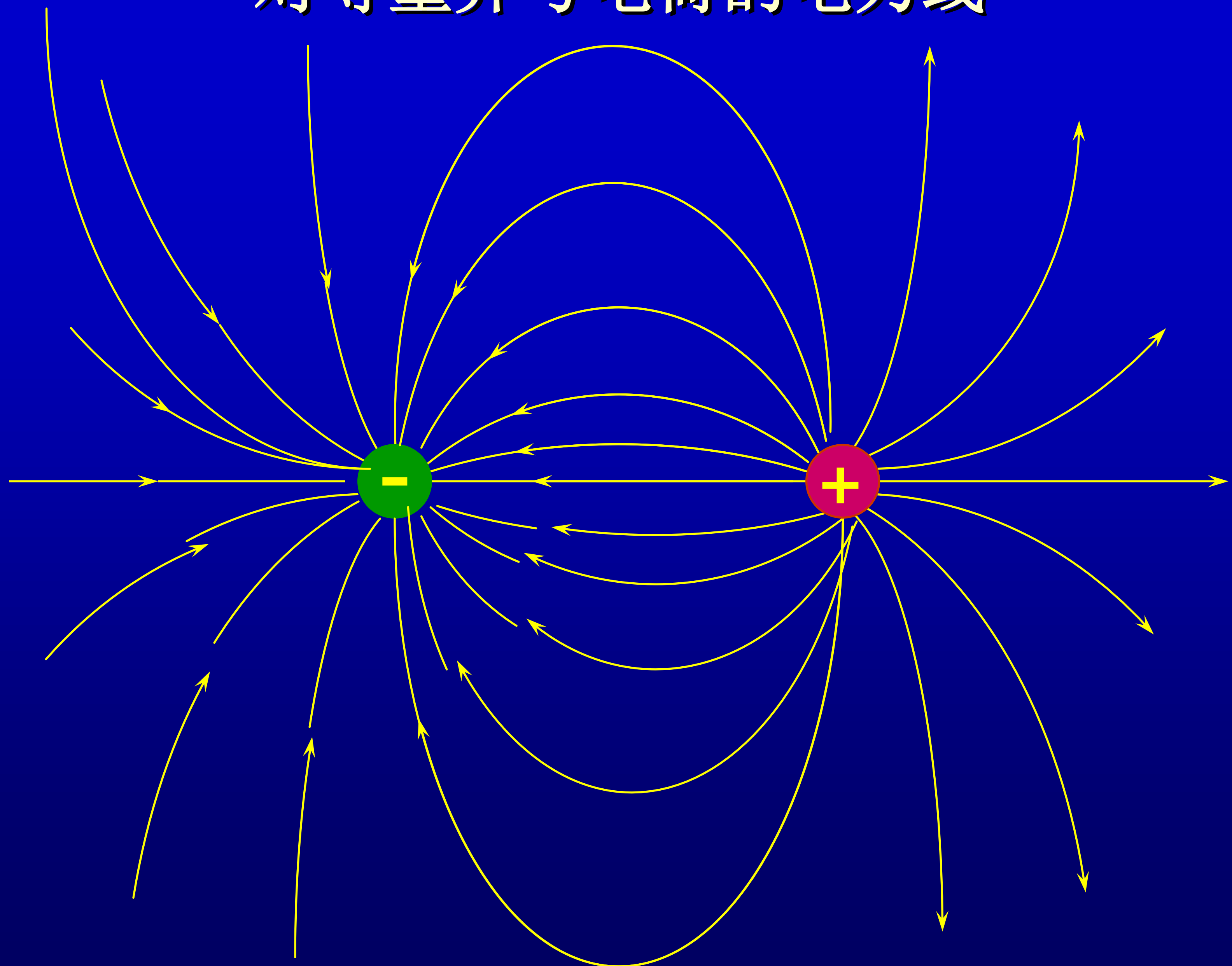
1、不闭合，不中断起于正电荷、止于负电荷；

2、任何两条电力线不相交。

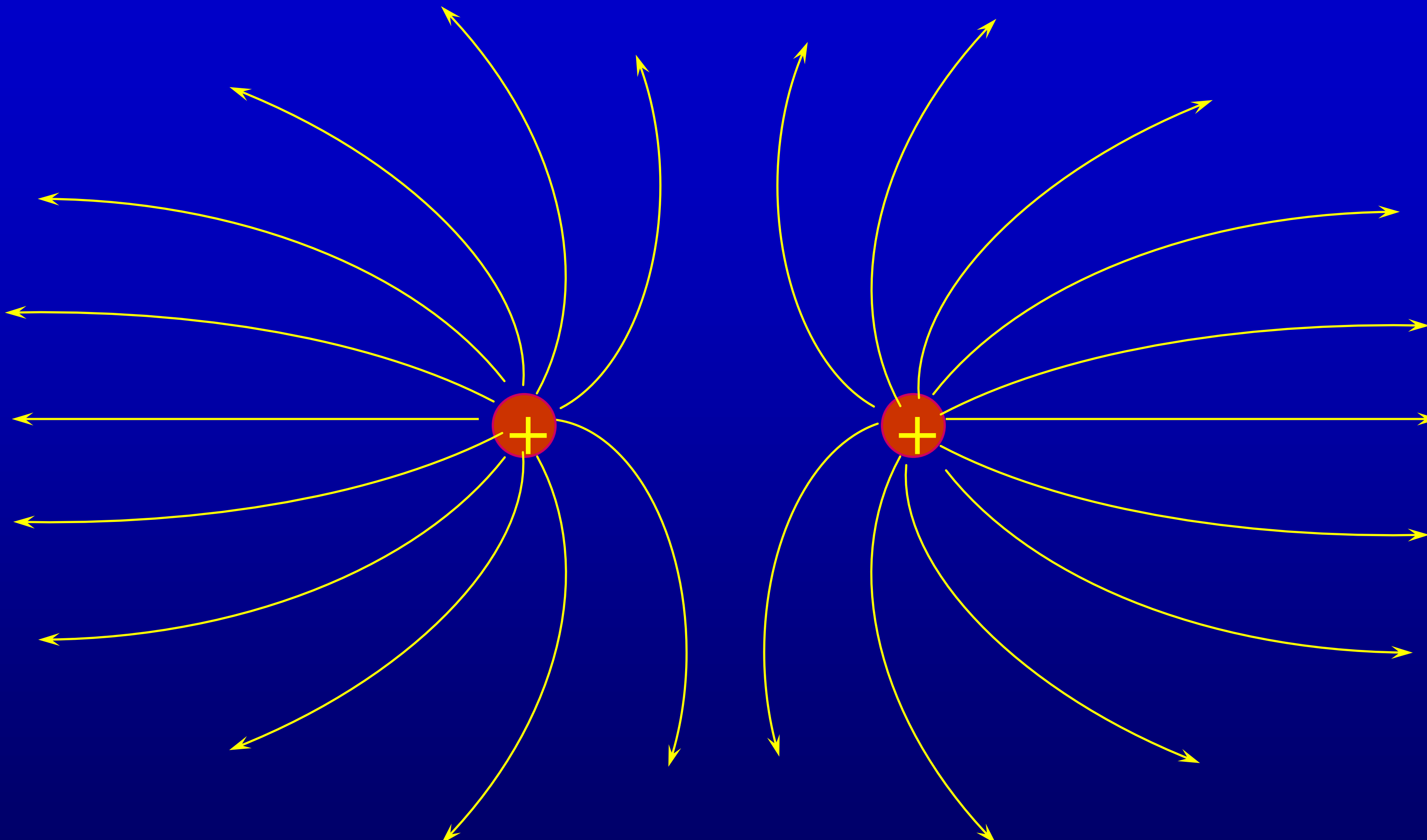
点电荷的电力线



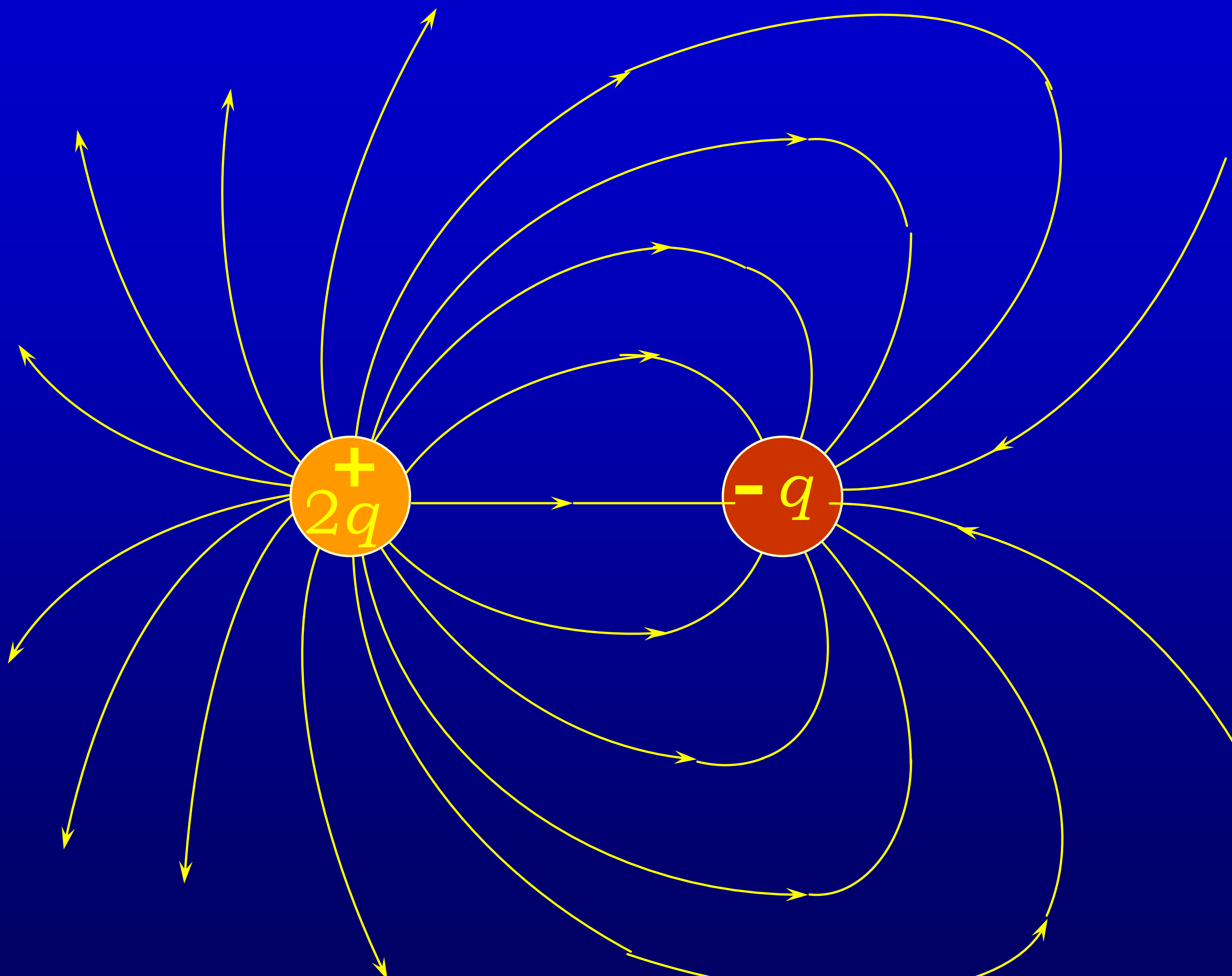
一对等量异号电荷的电力线



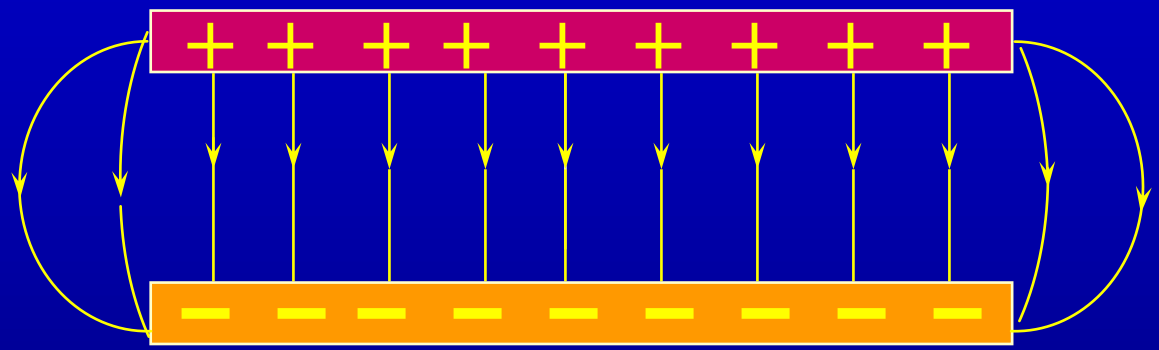
一对等量正点电荷的电力线



一对异号不等量点电荷的电力线



带电平行板电容器的电场

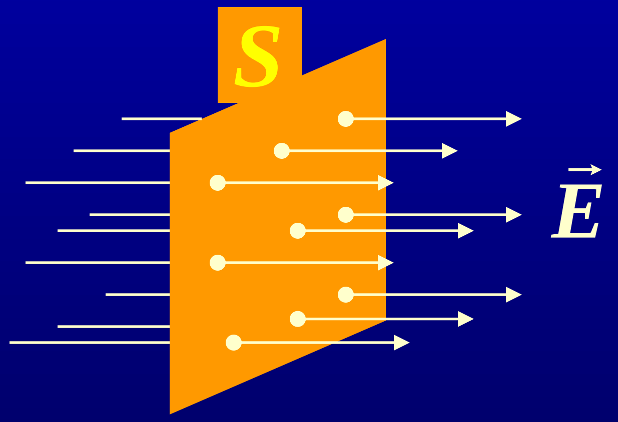


二、电通量

通过电场中某一面的电力线数称为<u>通过该面的电通量</u>。用Φ_e表示。

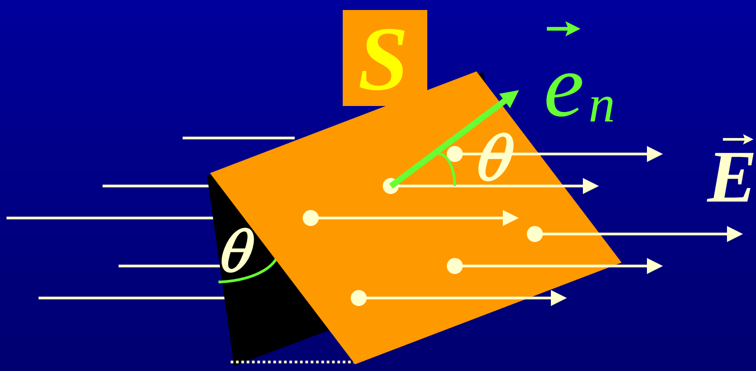
<u>均匀电场</u>

<u>S与电场强度方向垂直</u>



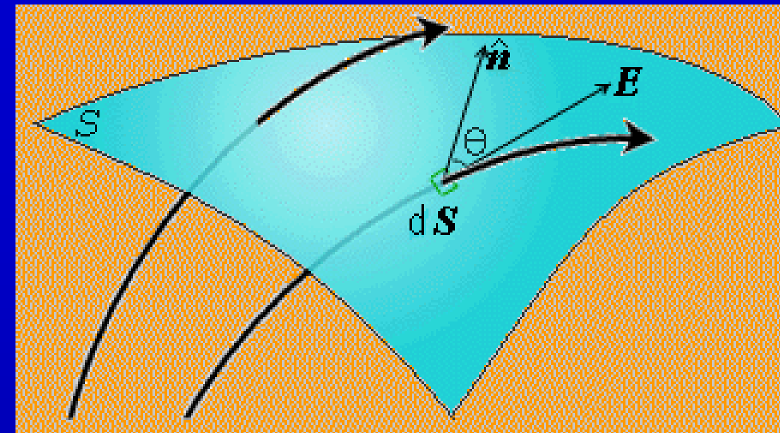
$$\Phi_e = ES$$

<u>均匀电场，S 法线方向与电场强度方向成θ角</u>



$$\Phi_e = ES\cos\theta = \vec{E}\bullet\vec{S}$$

电场不均匀，S为任意曲面

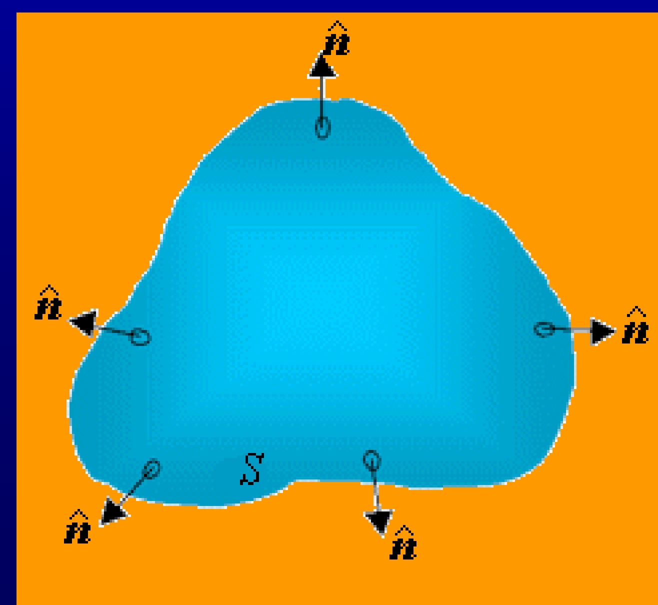


$$d\Phi_e = EdS_\perp = EdS\cos\theta$$
$$= \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S E\cos\theta dS$$

$$= \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS$$

S为任意闭合曲面



$$\Phi_e = \oint_S E\cos\theta dS = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

规定：法线的正方向为指向闭合曲面的外侧。

例：在均匀电场中，

$$\vec{E}=(-240\,N/c)\vec{i}+(-160\,N/c)\vec{j}+(390\,N/c)\vec{k}$$

通过平面 $\Delta\vec{S}=(-1.1m^2)\vec{i}+(4.2m^2)\vec{j}+(2.4m^2)\vec{k}$ 的电通量是多少？$\Delta\vec{S}$ 在垂直于 $\vec{E}$ 的平面上的投影是多少？

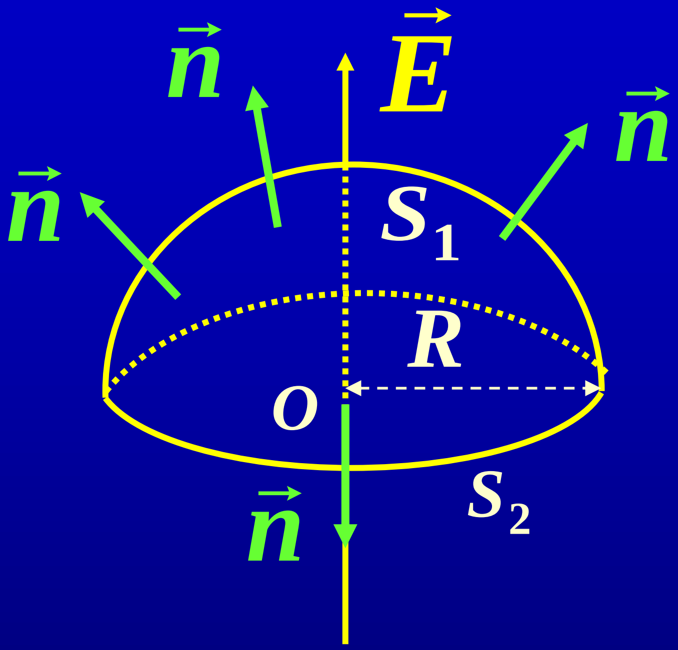
解：（1）$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}$ $\quad \Delta\vec{S}=\Delta S_x\vec{i}+\Delta S_y\vec{j}+\Delta S_z\vec{k}$

$$\Phi_e=\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}=E_x\Delta S_x+E_y\Delta S_y+E_z\Delta S_z$$

（2）

$$\Delta S_{\perp}=\Phi_e\Big/E=\Phi_e\Big/\sqrt{E_x^2+E_y^2+E_z^2}$$

课堂练习　求均匀电场中一半球面的电通量。



$$\Phi_{S_1} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= E \cdot S_2$$

$$\Phi_{S_1} = E\pi R^2$$

三、高斯定理

在真空中的任意静电场中，通过任一闭合曲面S的电通量Φ_e,等于该闭合曲面所包围的电荷电量的代数和除以ε_0而与闭合曲面外的电荷无关。

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$$

1、高斯定理的引出

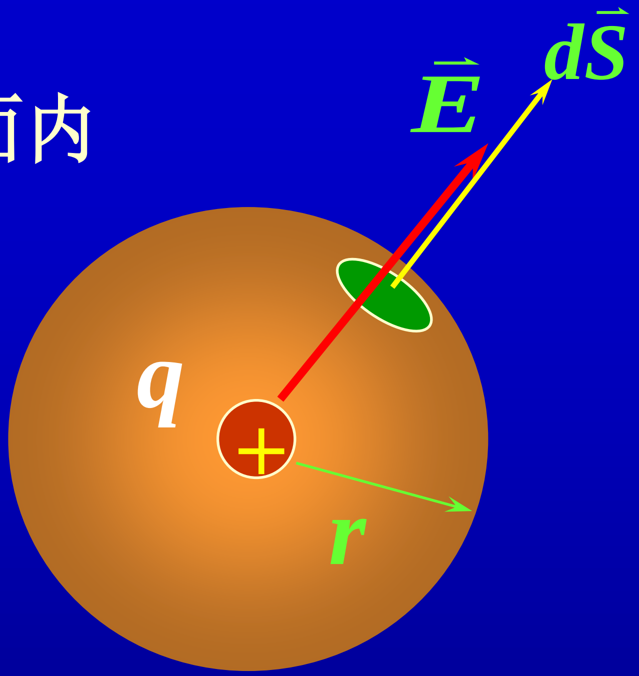
(1)场源电荷为点电荷且在闭合曲面内

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_s dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



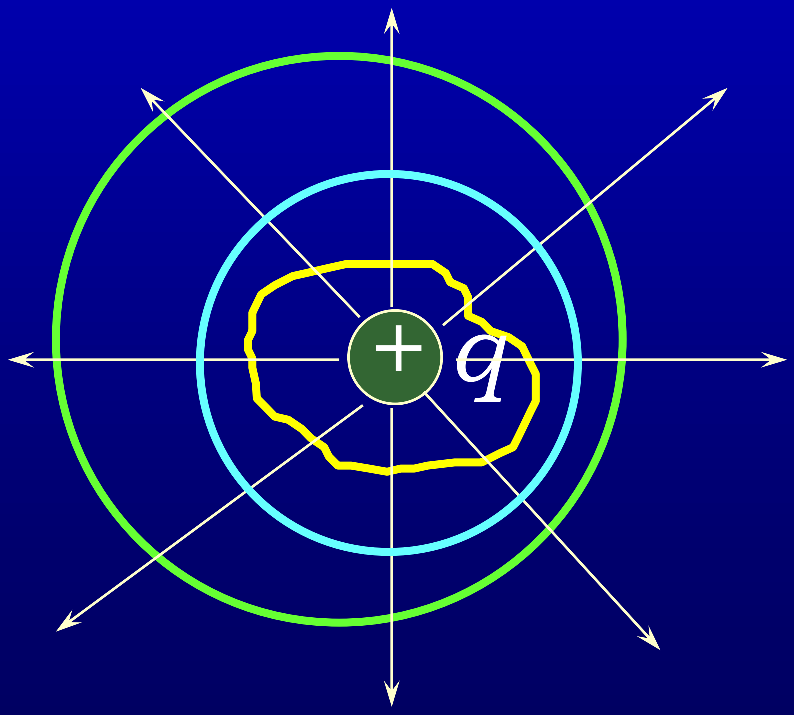
与球面半径无关，即以点电荷q为中心的任一球面，不论半径大小如何，通过球面的电通量都相等。

讨论：

a. $q > 0 \Rightarrow \Phi_e > 0$ $\quad$ $q < 0 \Rightarrow \Phi_e < 0$

电量为q的正电荷有q/ε_0条电力线由它发出伸向无穷远

电量为q的负电荷有q/ε_0条电力线终止于它

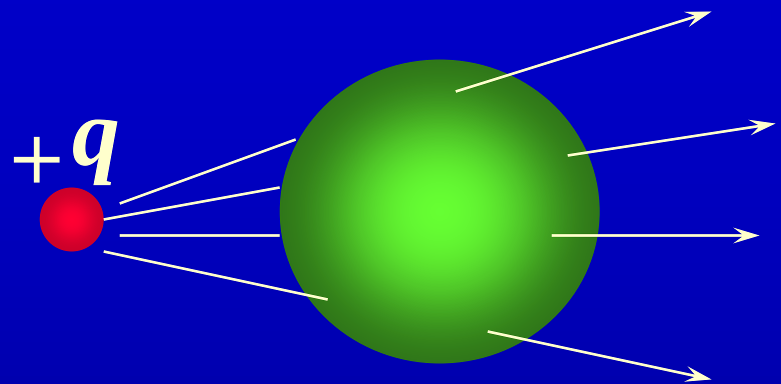


b、若q不位于球面中心，积分值不变。

c、若封闭面不是球面，积分值不变。

$$\oint_s \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

(2) 场源电荷为点电荷，但在闭合曲面外。



因为有几条电力线进面内必然有同样数目的电力线从面内出来。

$$\Phi_e = 0 \Rightarrow \oint_s \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0$$

(3) 场源电荷为点电荷系(或电荷连续分布的带电体)，
高斯面为任意闭合曲面

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_s \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \cdots\cdots + \oint_s \vec{E}_n \cdot d\vec{S}$$

$$= \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \cdots + \Phi_{en} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ei}$$

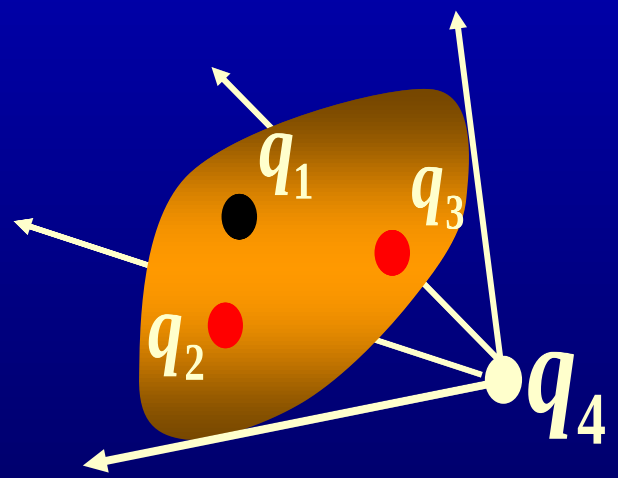
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

3、高斯定理的理解

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$$

a. $\vec{E}$是闭合面各面元处的电场强度，是由全部电荷（面内外电荷）共同产生的矢量和，而过曲面的通量由曲面内的电荷决定。

因为曲面外的电荷（如q_4）对闭合曲面提供的通量有正有负才导致对整个闭合曲面贡献的通量为0。



b. 对连续带电体，高斯定理为 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq$

c. $\sum q_i > 0 \Rightarrow \Phi_e > 0$

表明电力线从正电荷发出，穿出闭合曲面，所以正电荷是静电场的源头。

$\sum q_i < 0 \Rightarrow \Phi_e < 0$

表明有电力线穿入闭合曲面而终止于负电荷，所以负电荷是静电场的尾。

静电场是<u>有源场</u>

四、高斯定理的应用

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

1．利用高斯定理求某些电通量

例：设均匀电场$\vec{E}$和半径R为的半球面的轴平行，计算通过半球面的电通量。

$$\because \sum q_i = 0 \quad \therefore \Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0$$

$$\Phi_{S_1} = E\pi R^2$$

$$\Phi_{S_1} + (-E\pi R^2) = 0$$

2. 当场源分布具有高度对称性时求场强分布

步骤:

1.对称性分析，确定 $\vec{E}$ 的大小及方向分布特征

2.作高斯面，计算电通量及 $\sum q_i$

3.利用高斯定理求解

例1. 均匀带电球面的电场。已知R、 $q>0$

解: 对称性分析 $\rightarrow \vec{E}$具有球对称　作高斯面——球面

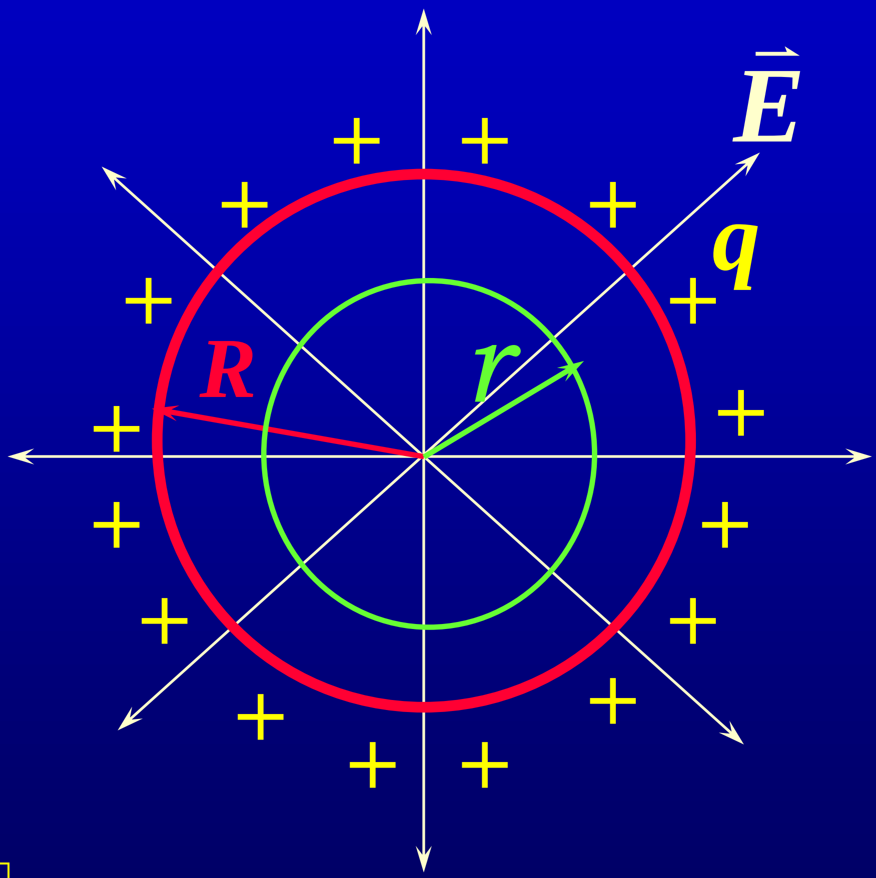
$r < R$

电通量

$$\Phi_e = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}$$

$$= E_1 \oint_{s_1} dS = E_1 4\pi r^2$$

电量 $\sum q_i = 0$



用高斯定理求解

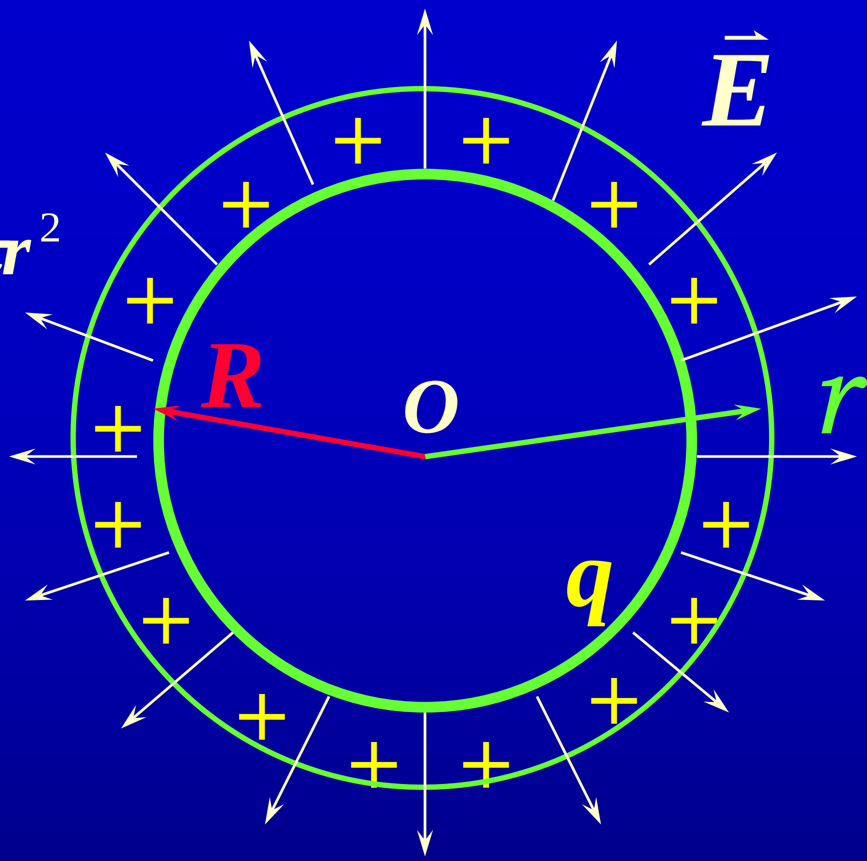
$$E_1 4\pi r^2 = 0 \qquad \boxed{\therefore E_1 = 0}$$

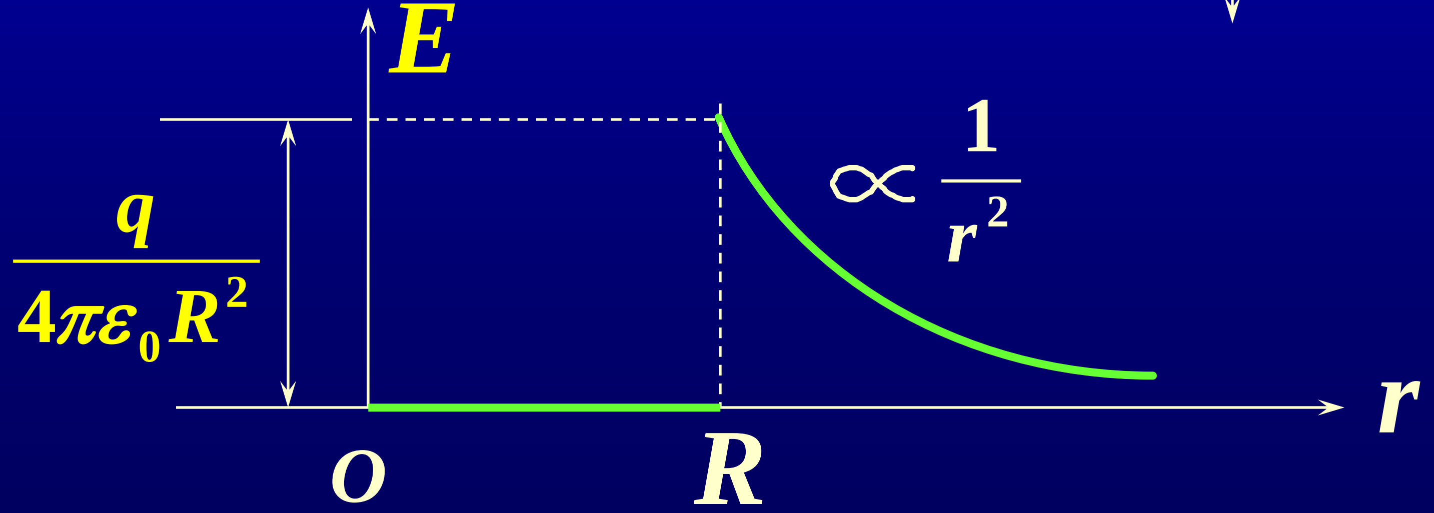
$r > R$

$$\Phi_e = \oint_{s_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = E_2 \oint_{s_2} d\vec{S} = E_2 4\pi r^2$$

$$\sum q_i = q \qquad E_2 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$





例2. 均匀带电球体的电场。已知q,R

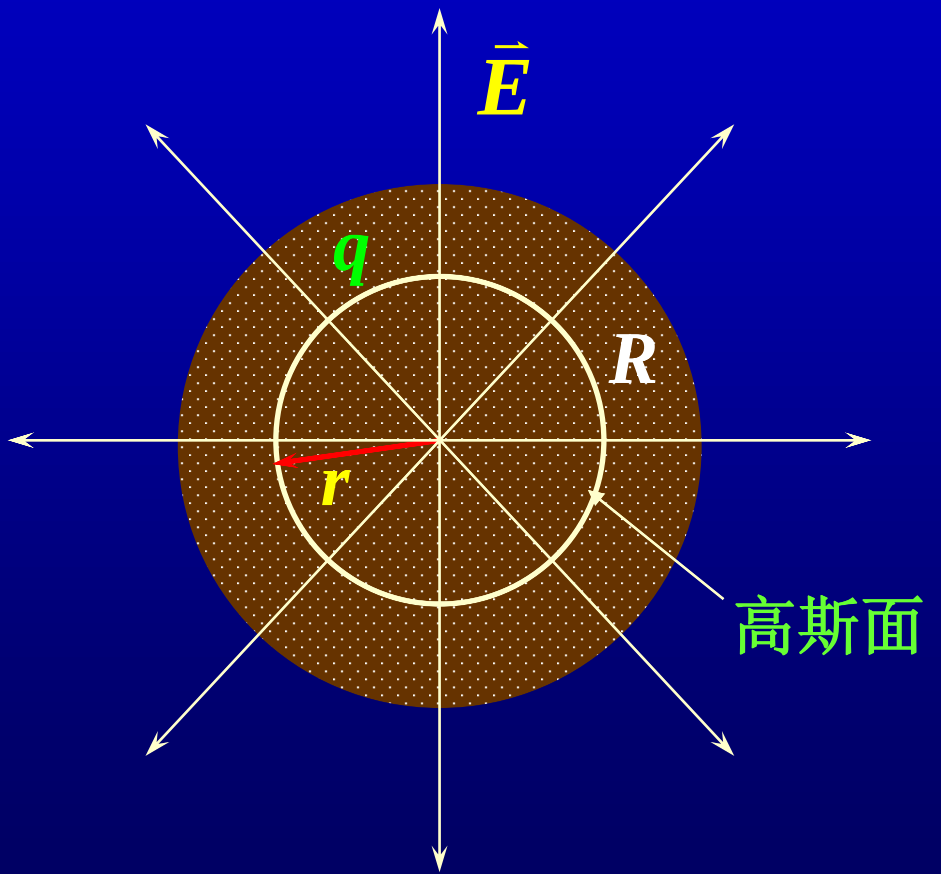
解： $r<R$

$$\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,4\pi r^2$$

$$\sum q_i = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qr^3}{R^3}$$

场强 $$\boxed{E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$



$r>R$

电通量

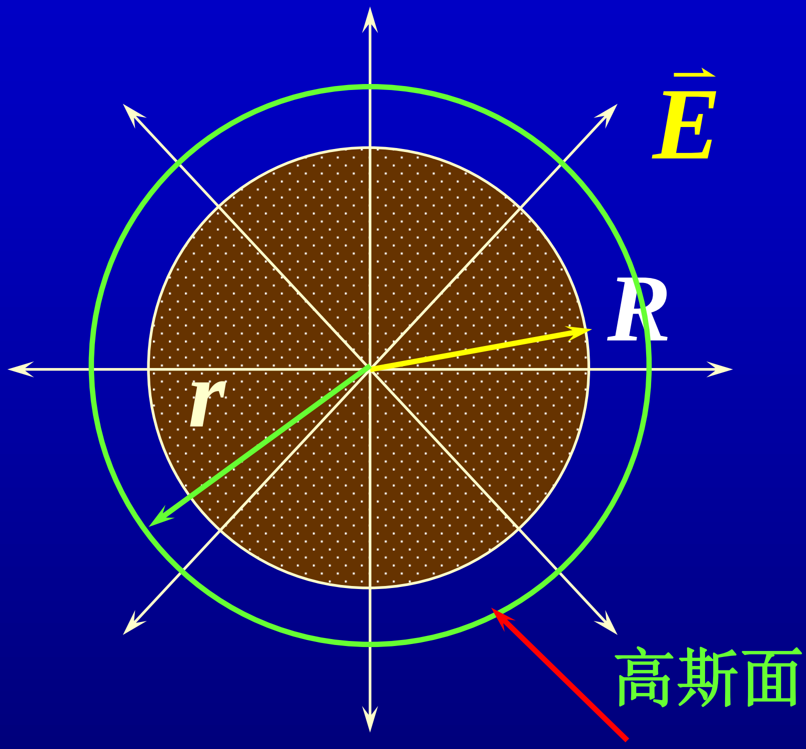
$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,4\pi r^2$$

电量 $\sum q_i = q$

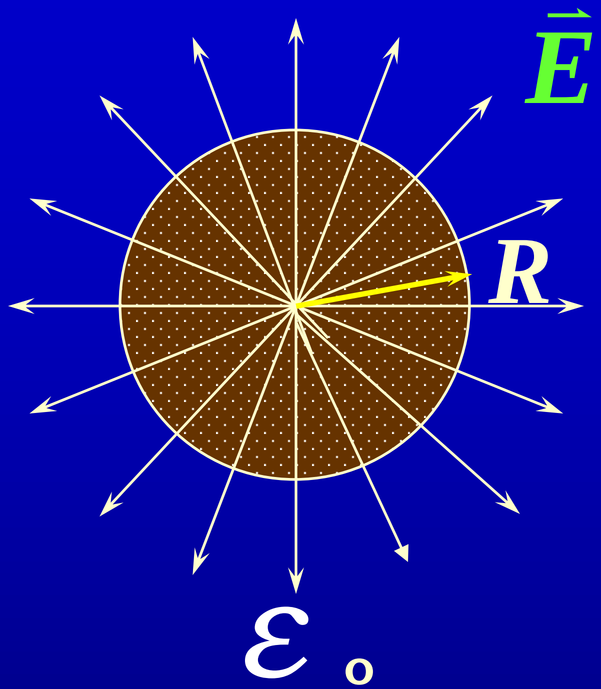
高斯定理

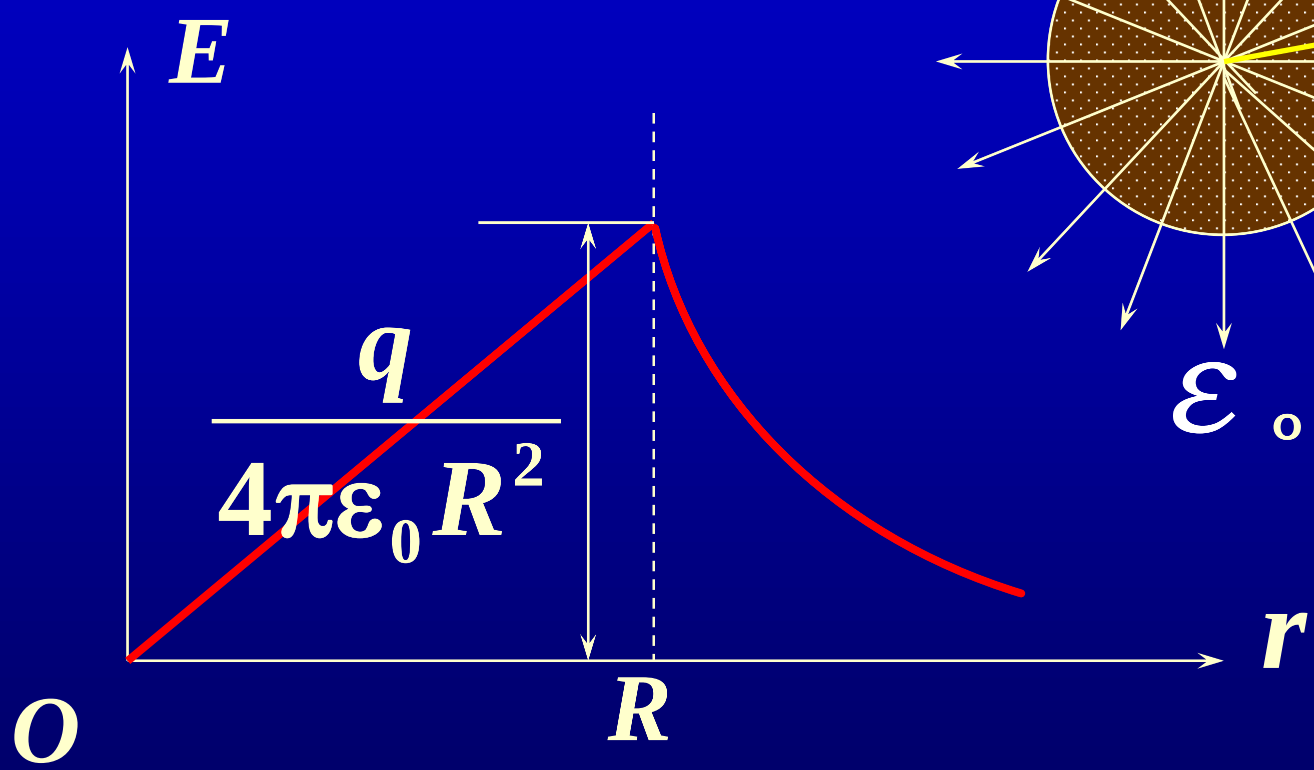
$$E\,4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$$

场强 $$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$



均匀带电球体电场强度分布曲线





例3. 均匀带电无限大平面的电场，已知σ

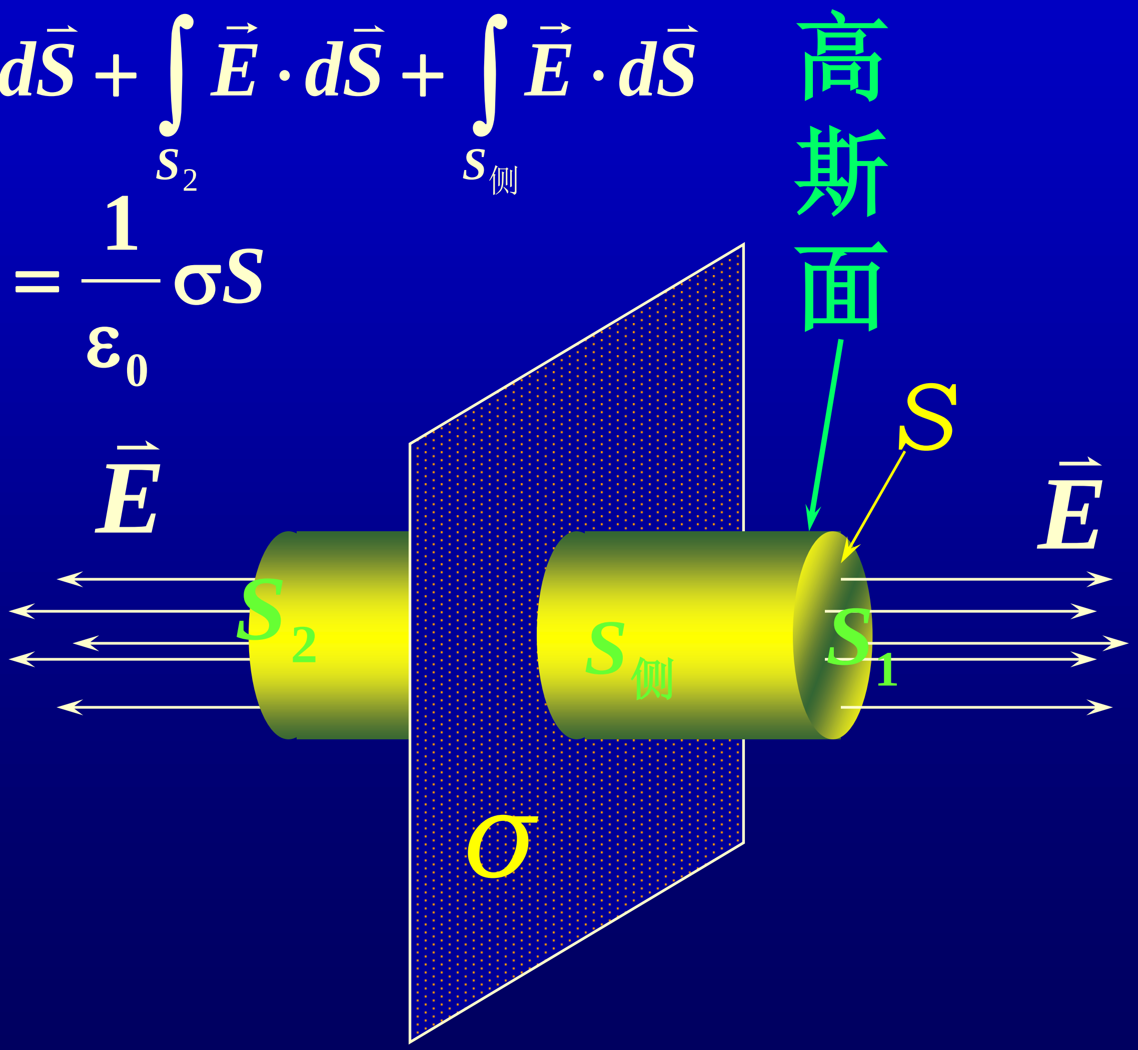
解: $\vec{E}$具有面对称　　高斯面:柱面

$$\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_{侧}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= ES_1 + ES_2 + 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

$$2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



例4. 均匀带电圆柱面的电场。

沿轴线方向单位长度带电量为λ

解：场具有轴对称　　　高斯面：圆柱面

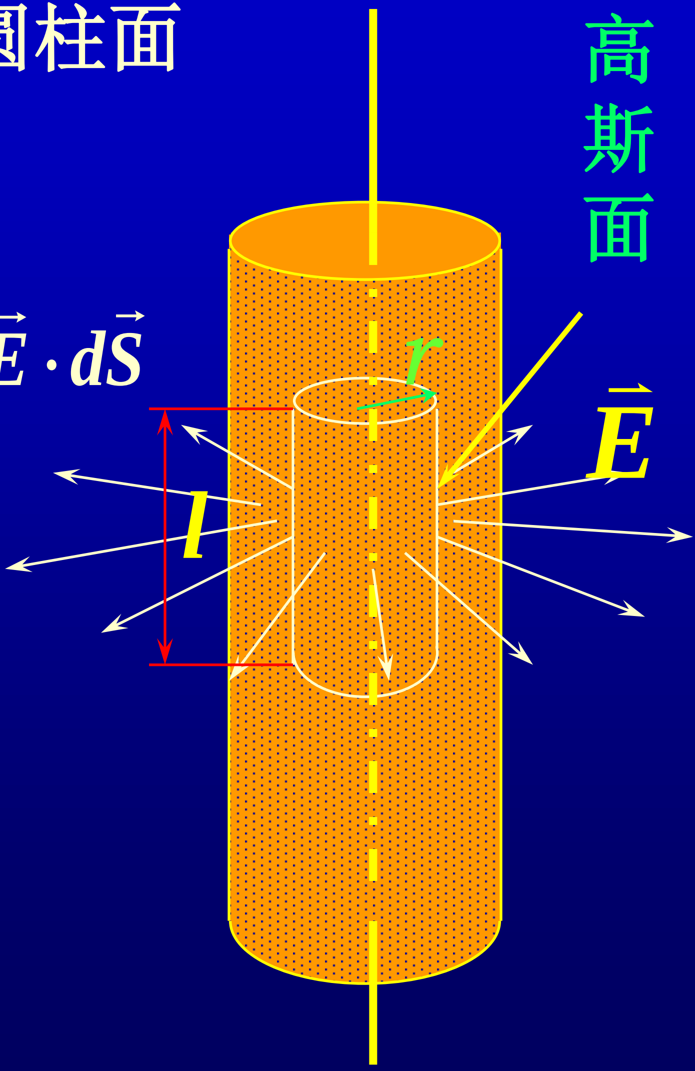
(1) $r < R$

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= 0 + 0 + \mathrm{E}2\pi \mathrm{rl} = \mathrm{E}2\pi \mathrm{rl}$$

$$\sum q_i = 0$$

$$\boxed{E = 0}$$



(2) $r > R$

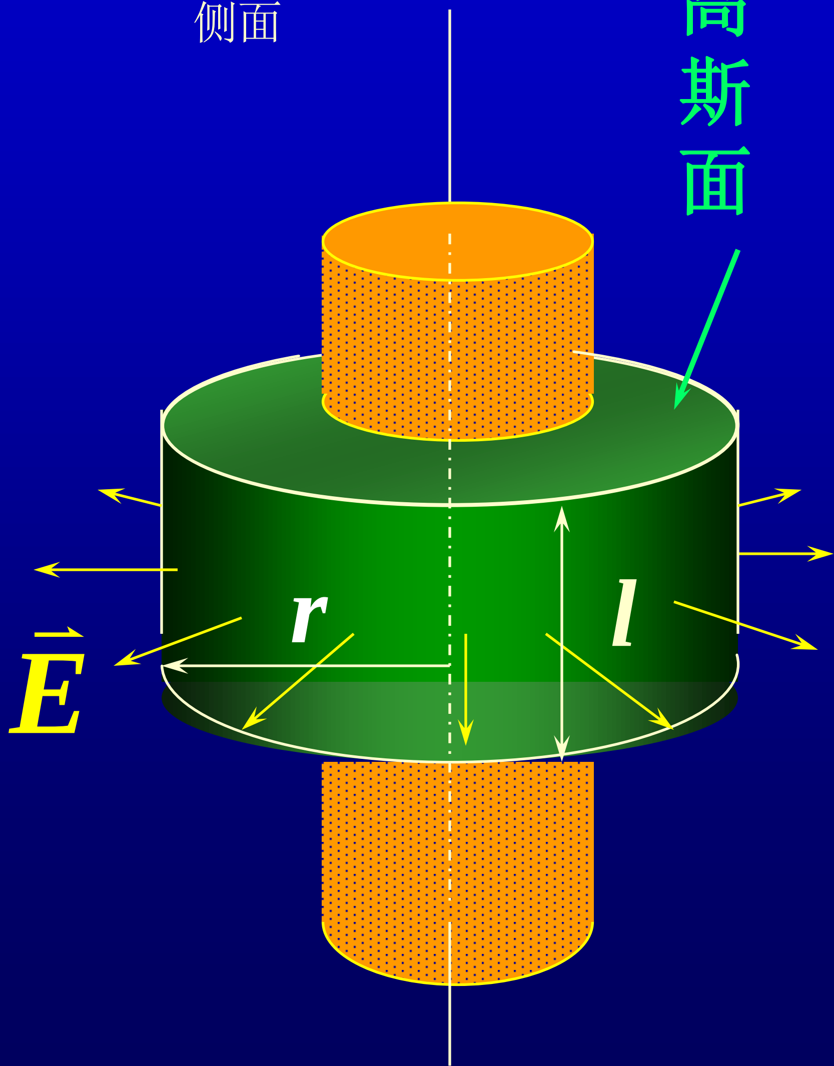
$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \mathbf{E2\pi rl}$$

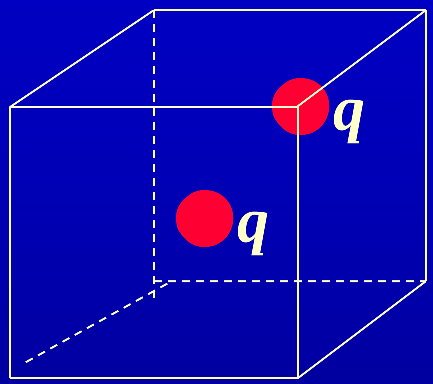
$$\sum q_i = 2\pi Rl\sigma$$

$$E = \frac{R\sigma}{r\varepsilon_0} \qquad 令\ \lambda = 2\pi R\sigma$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



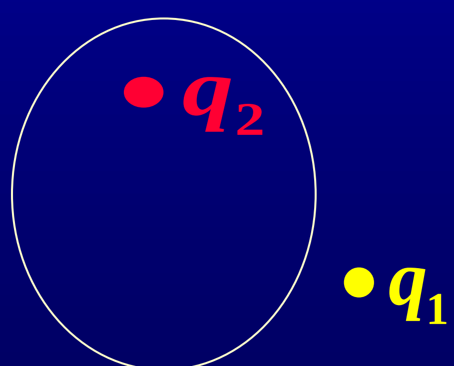
课堂讨论



1. 立方体边长 a，求 $\Phi_e = \dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

$q\begin{cases}\text{位于中心}\\\text{位于一顶点}\end{cases}$ 过每一面的通量

$$\Phi_e = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{q}{24\varepsilon_0} \end{cases}$$



2. 如图 讨论

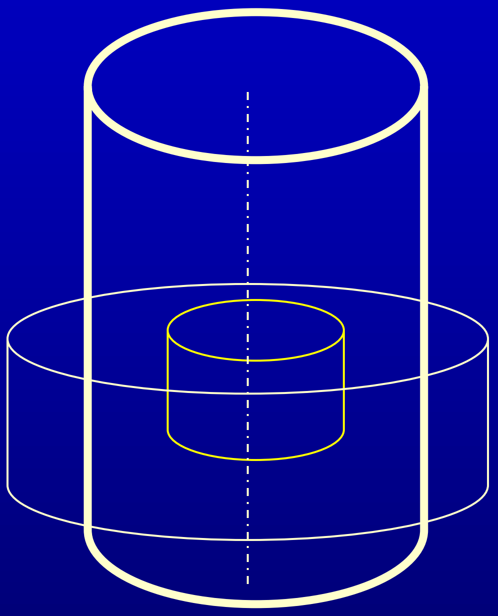
移动两电荷对场强及通量的影响

课堂练习：

求均匀带电圆柱体的场强分布，已知R，λ

$r < R$ $$E\,2\pi rl = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \pi R^2}\pi r^2 l$$

$r > R$ $$E\,2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

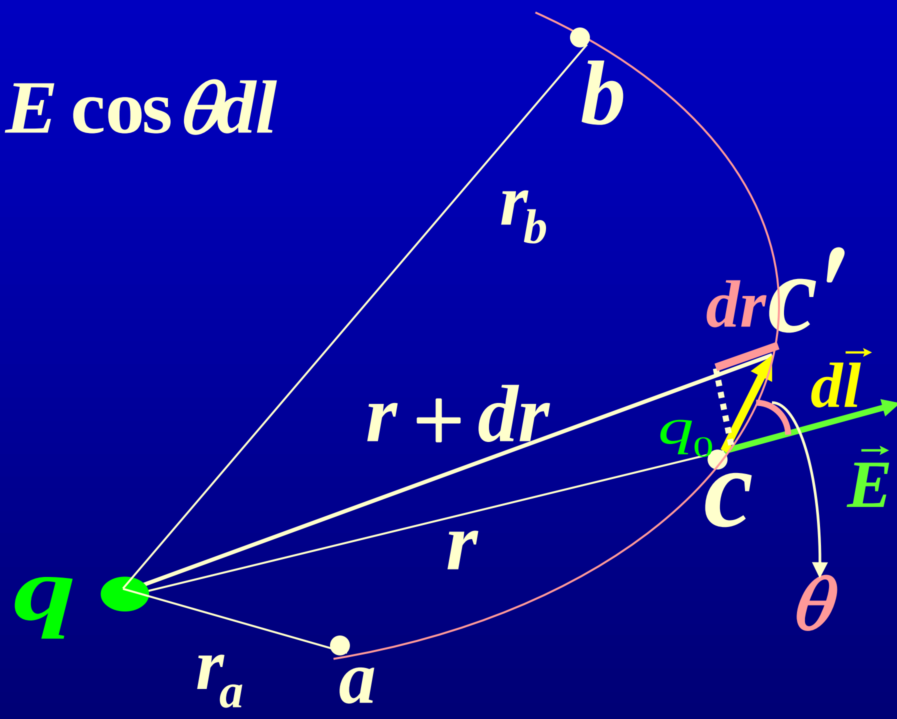


$$E = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2} & r < R \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

8-3　电场力的功　电势

一. 电场力做功

与路径无关——$\boxed{\text{保守力}}$



$$dA = \vec{F} \bullet d\vec{l} = q_0 \vec{E} \bullet d\vec{l} = q_0 E \cos\theta dl$$

其中　$\cos\theta dl = dr$

则　$dA = q_0 E dr$

$$\therefore A = \int_a^b q_0 E dr$$

$$= \int_{r_a}^{r_b} q_o \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = U_a - U_b = -\Delta U$$

保守力的功=相应势能的减少

推广

$$A_{ab} = \int_a^b q_0(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots\cdots + \vec{E}_n) \bullet d\vec{l}$$

$$= \int_a^b q_0\vec{E}_1 \bullet d\vec{l} + \int_a^b q_0\vec{E}_2 \bullet d\vec{l} + \cdots\cdots \int_a^b q_0\vec{E}_n \bullet d\vec{l}$$

$$= A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ia}} - \frac{1}{r_{ib}}\right)$$

(与路径无关)

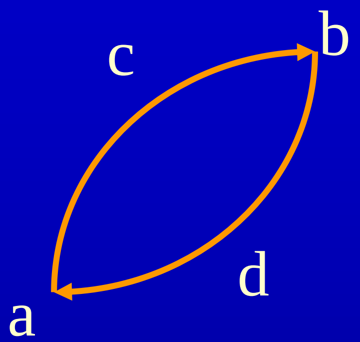
结论

试验电荷在任何静电场中移动时，静电场力所做的功只与路径的起点和终点位置有关，而与路径无关。

二、静电场的环路定理

q_0沿闭合路径 *acbda* 一周电场力所作的功

$$A=\oint q_0\vec{E}\bullet d\vec{l}=\int_{acb}q_0\vec{E}\bullet d\vec{l}+\int_{bda}q_0\vec{E}\bullet d\vec{l}$$



$$=\int_{acb}q_0\vec{E}\bullet d\vec{l}-\int_{adb}q_0\vec{E}\bullet d\vec{l}=0$$

即静电场力移动电荷沿任一闭和路径所作的功为零。

$\because q_0\neq 0\qquad\therefore\ \oint\vec{E}\bullet d\vec{l}=0$

在静电场中，电场强度的环流恒为零。

——静电场的环路定理

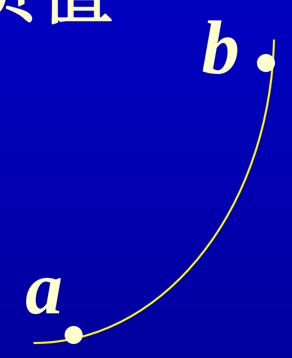
静电场的两个基本性质：有源且处处无旋

三、电势能

保守力的功=相应势能的减少

消耗本身的能量

所以　　静电力的功=静电势能增量的负值



试验电荷q_0处于 $\begin{cases} a\text{点电势能} & W_a \\ b\text{点电势能} & W_b \end{cases}$

则$a \to b$电场力的功 $A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \bullet d\vec{l} = W_a - W_b$

取　$W_\infty = 0$　　$W_a = A_{a\infty} = \int_a^\infty q_0 \vec{E} \bullet d\vec{l}$

<u>注意</u>　　W_a属于q_0及 $\vec{E}$系统

四、电势 电势差

$$W_a = \int_a^{\infty} q_0 \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

定义电势 $u_a = \dfrac{W_a}{q_0} = \int_a^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l}$

单位正电荷在该点所具有的电势能	单位正电荷从该点到无穷远点(电势零)电场力所作的功

定义电势差 $u_a - u_b$ 电场中任意两点 的电势之差（电压）

$$u_{ab} = u_a - u_b = \int_a^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l} - \int_b^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_a^{b} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

a、*b*两点的电势差等于将单位正电荷从*a*点移到*b*时，电场力所做的功。

将电荷q从$a\rightarrow b$电场力的功

$$A_{ab}=W_a-W_b=q_0\int_a^b \vec{E}\bullet d\vec{l}=q_0(u_a-u_b)$$

注意

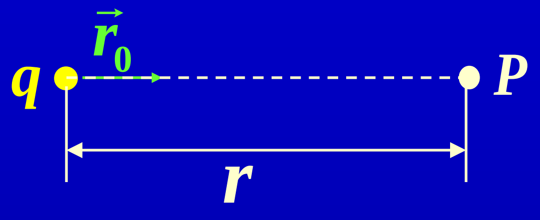
1、电势是相对量，电势零点的选择是任意的。

2、两点间的电势差与电势零点选择无关。

3、电势零点的选择。

五、电势的计算

1、点电荷电场中的电势



如图 P点的场强为 $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$

由电势定义得 $u_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\bullet d\vec{l}=\int_r^{\infty}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

讨论

大小 $q>0 \quad u>0 \quad r\uparrow \quad u\downarrow \quad r\to\infty \quad u$最小

$q<0 \quad u<0 \quad r\uparrow \quad u\uparrow \quad r\to\infty \quad u$最大

对称性 以q为球心的同一球面上的点电势相等

2、电势叠加原理

若场源为q_1、q_2……q_n的点电荷系

根据电场叠加原理场中任一点的

场强 $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\ldots\ldots+\vec{E}_n$

电势 $u=\int_P^\infty \vec{E}\bullet d\vec{l}=\int_P^\infty(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n)\bullet d\vec{l}$

$$=\int_P^\infty \vec{E}_1\bullet d\vec{l}+\int_P^\infty \vec{E}_2\bullet d\vec{l}+\ldots\ldots+\int_P^\infty \vec{E}_n\bullet d\vec{l}$$

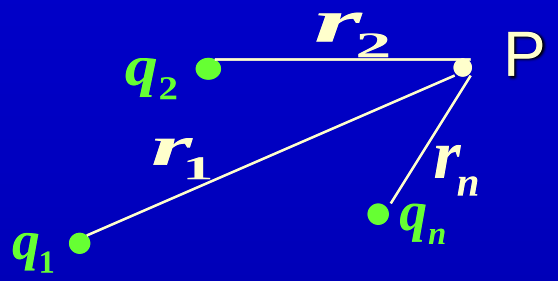
$$=u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n=\sum_{i=1}^n u_i$$

各点电荷单独存在时在该点电势的代数和

点电荷系的电势

由电势叠加原理，P的电势为

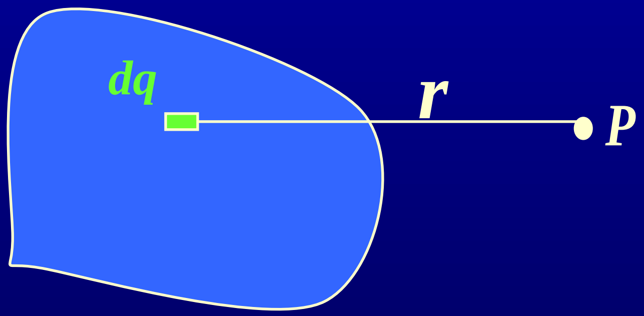
$$u = \sum u_i = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$



连续带电体的电势

由电势叠加原理

$$u = \int du = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



电势计算的两种方法：

♠根据已知的场强分布，按定义计算

$$u_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

♠由点电荷电势公式，利用电势叠加原理计算

电势是标量，但是有正负，这个正负是根据参考点的选取不同而产生的。

例1 、求电偶极子电场中任一点P的电势

由叠加原理

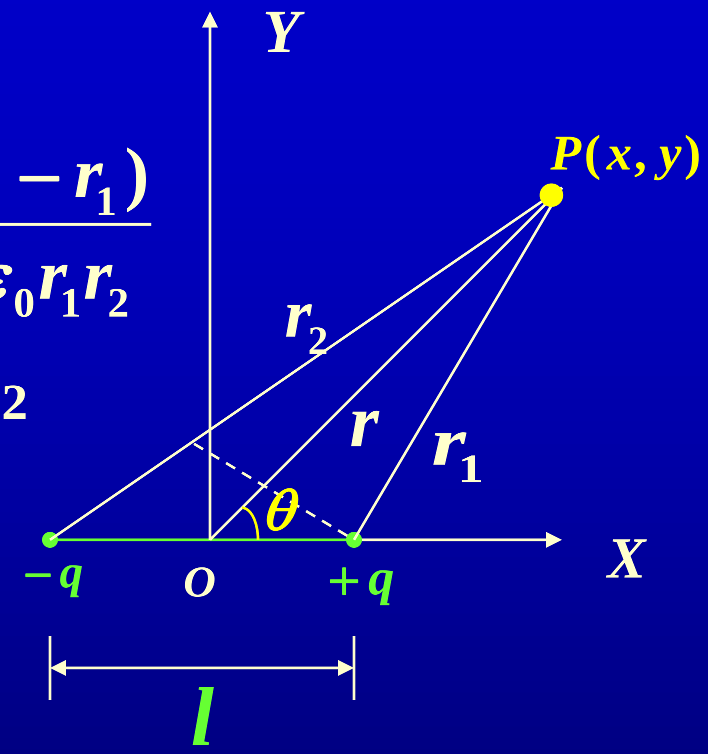
$$u_P = u_1 + u_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}$$

$$\because r >> l \quad r_2 - r_1 \approx l\cos\theta \quad r_1 r_2 \approx r^2$$

$$\therefore u = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

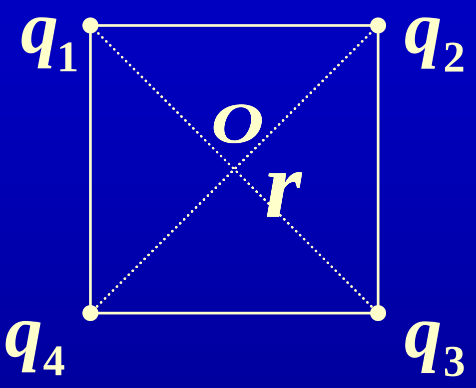


$$\boxed{u = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

课堂练习： 已知正方形顶点有四个等量的电点荷 $4.0\times10^{-9}C$

r=5cm

①求 u_o



$$u = 4\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = 28.8\times10^{2}V$$

②将 $q_0 = 1.0\times10^{-9}c$ 从 $\infty \longrightarrow 0$ 电场力所作的功

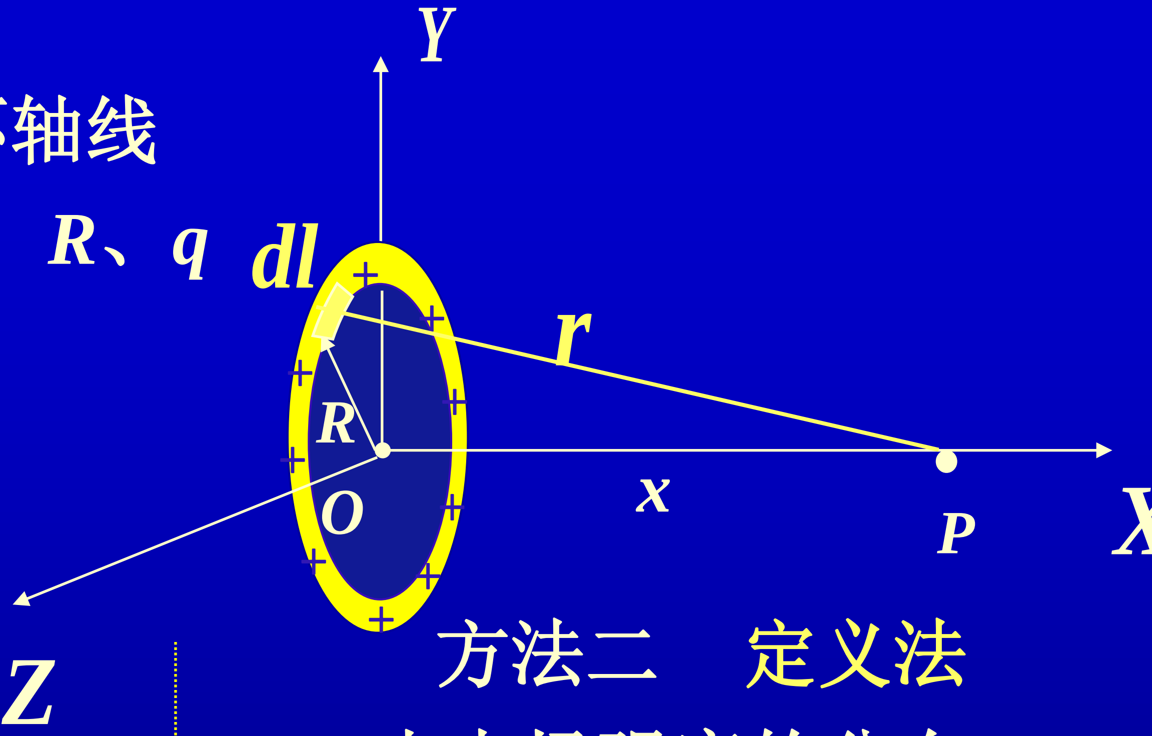
$$A_{\infty 0} = q_0(u_\infty - u_0) = q_0(0 - 28.8\times10^{2}) = -28.8\times10^{-7}J$$

③求该过程中电势能的改变

$$A_{\infty 0} = W_\infty - W_0 = -28.8\times10^{-7} < 0$$

电势能 $\uparrow$

例2、求均匀带电圆环轴线上的电势分布。已知：R、q



解:方法一 微元法

$$du = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$u_P = \int du = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

方法二 定义法

由电场强度的分布

$$E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$u = \int_{x_p}^{\infty} E dx = \int_{x_p}^{\infty} \frac{qxdx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

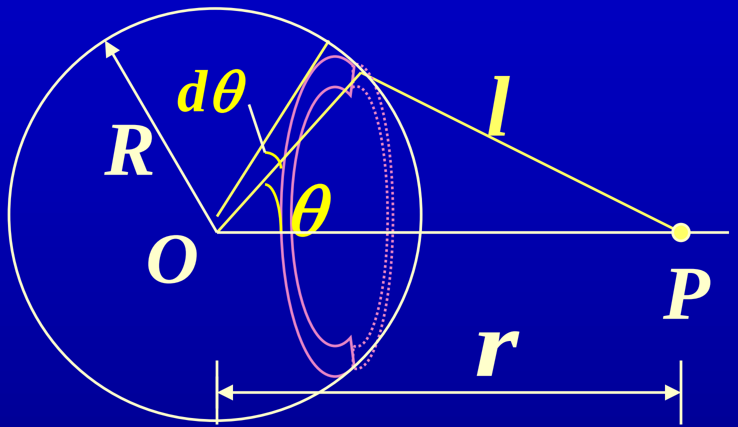
例3、求均匀带电球面电场中电势的分布，已知R，q

解: 方法一 叠加法 (微元法)

任一圆环 $dS = 2\pi R\sin\theta R d\theta$ $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$

$$du = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{l}$$

$$= \frac{q\sin\theta d\theta}{8\pi\varepsilon_0 l}$$



由图 $l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$

$$2ldl = 2rR\sin\theta d\theta$$

$$du = \frac{qdl}{8\pi\varepsilon_0 rR}$$

$r > R$

$$u = \int_{r-R}^{r+R}\frac{qdl}{8\pi\varepsilon_0 rR} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

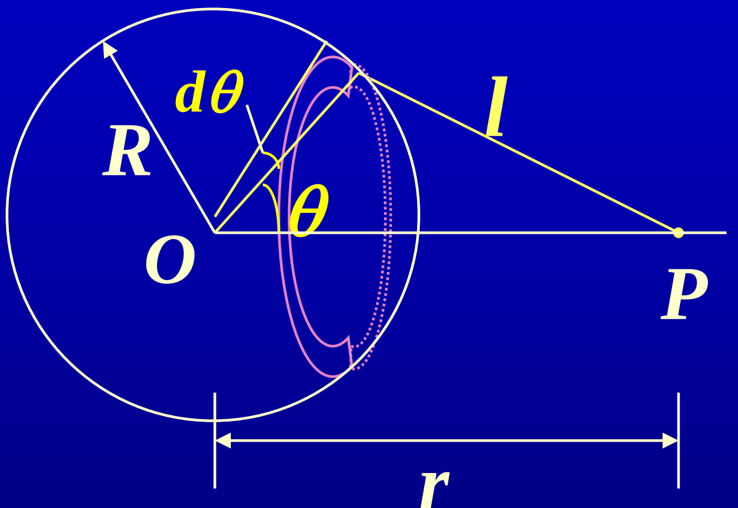
$r < R$

$$u = \int_{R-r}^{R+r}\frac{qdl}{8\pi\varepsilon_0 rR} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

方法二　定义法

由高斯定理求出场强分布 $E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\\[2ex] 0 & r<R\end{cases}$

由定义 $u=\int_P^{\infty}\vec{E}\bullet d\vec{l}$



$r<R$

$$u=\int_r^R\vec{E}\bullet d\vec{l}+\int_R^{\infty}\vec{E}\bullet d\vec{l}$$

$$=0+\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$r>R$

$$u=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

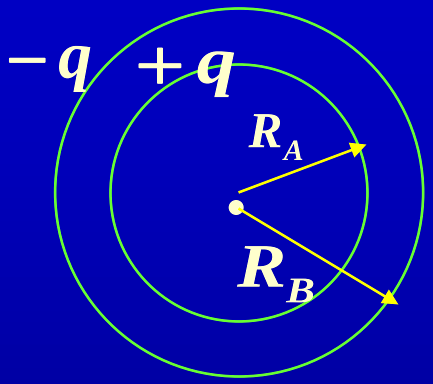
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

都是对无限远来说的

课堂练习：1.求等量异号的同心带电球面的电势差

已知$+q$ 、$-q$、R_A、R_B

解: 由高斯定理



$$E = \begin{cases} 0 & r < R_A \quad r > R_B \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_A < r < R_B \end{cases}$$

由电势差定义

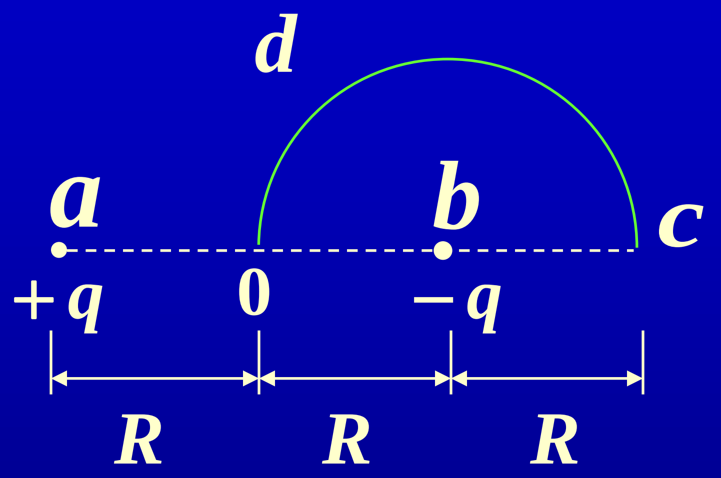
$$u_{AB} = u_A - u_B = \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

2.如图已知$+q$ 、$-q$、R

①求单位正电荷沿odc 移至c ，电场力所作的功

$$A_{oc}=u_o-u_c=0-\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3R}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)$$

$$=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$



② 将单位负电荷由 $\infty \longrightarrow 0$电场力所作的功

$$A_{\infty O}=u_\infty-u_o=0$$

8-4　场强与电势的关系

功、电势差、电势能之间的关系

$$A_{ab}=q\int_a^b \vec{E}\bullet d\vec{l}=q(u_a-u_b)=W_a-W_b$$

讨论

1．$A_{ab}>0 \longrightarrow W_a>W_b$

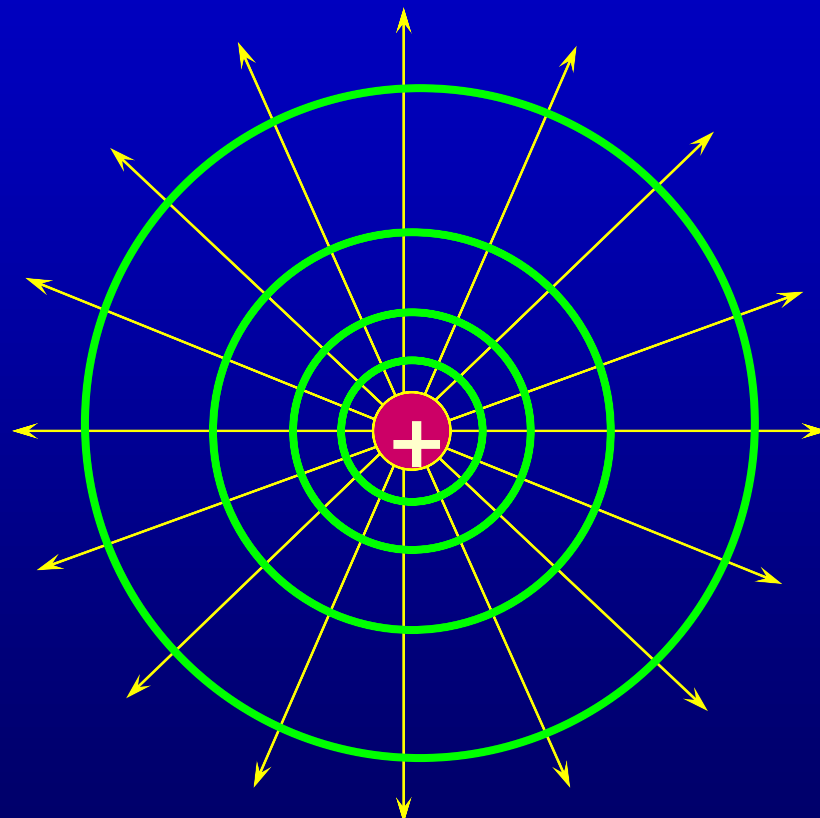
$$\begin{cases} q>0 & \text{则} \quad u_a>u_b \\ q<0 & \text{则} \quad u_a<u_b \end{cases}$$

2. $A_{ab}<0 \longrightarrow W_a<W_b$

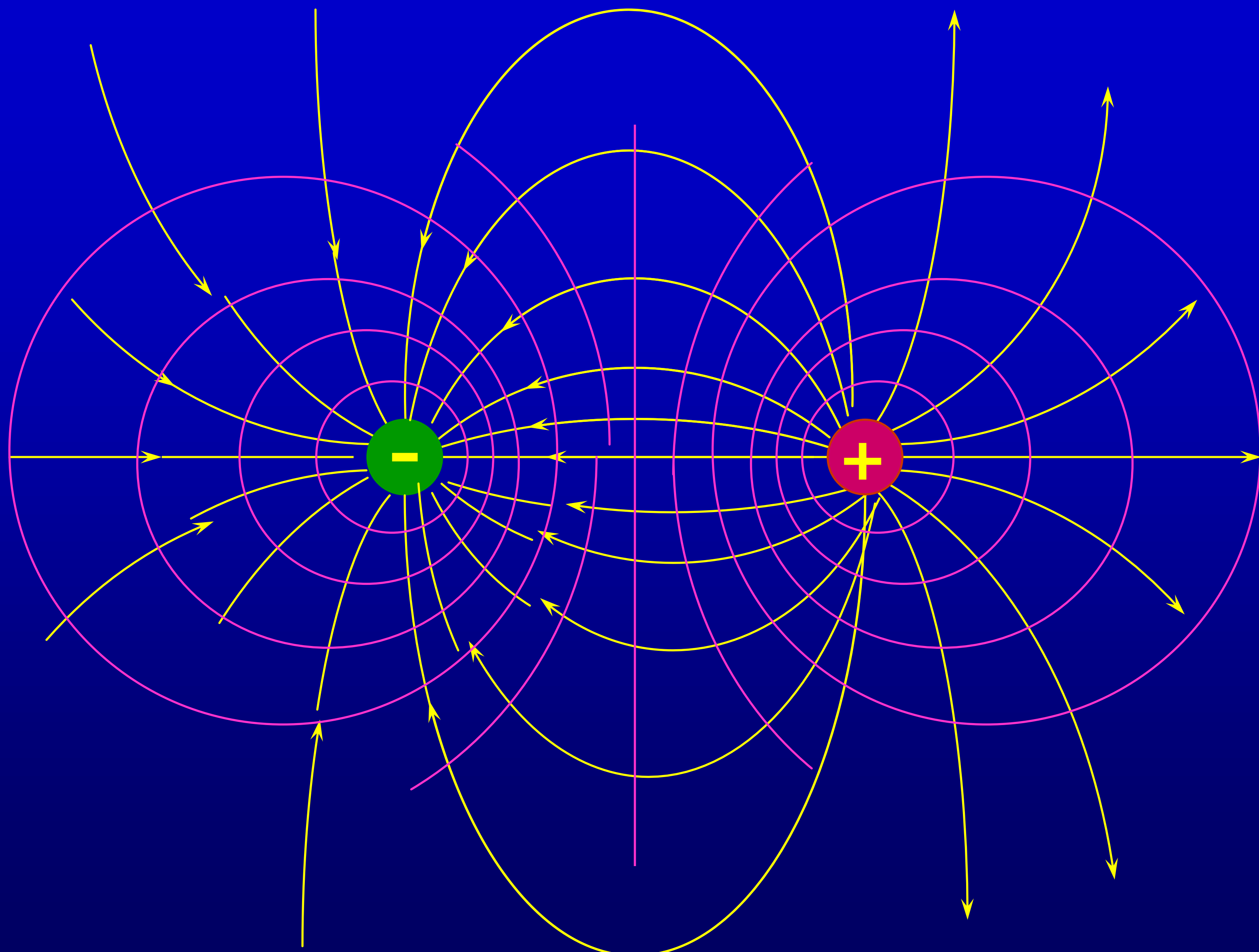
$$\begin{cases} q>0 & \text{则} \quad u_a<u_b \\ q<0 & \text{则} \quad u_a>u_b \end{cases}$$

一、 等势面

等势面： 电场中电势相等的点组成的曲面



电偶极子的等势面

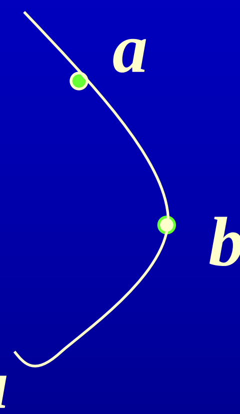


等势面的性质

(1)等势面与电力线处处正交，

电力线指向电势降落的方向。

★a,b为等势面上任意两点移动q,从a到b

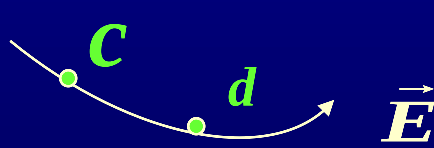


$$\because u_a = u_b \qquad A_{ab} = q(u_a - u_b) = 0$$

★令q在面上有元位移 $d\vec{l}$

$$dA = q\vec{E} \bullet d\vec{l} = qE\cos\theta dl = 0 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

★沿电力线移动$+q$



q为正，且电场方向与位移方向一致，功为正

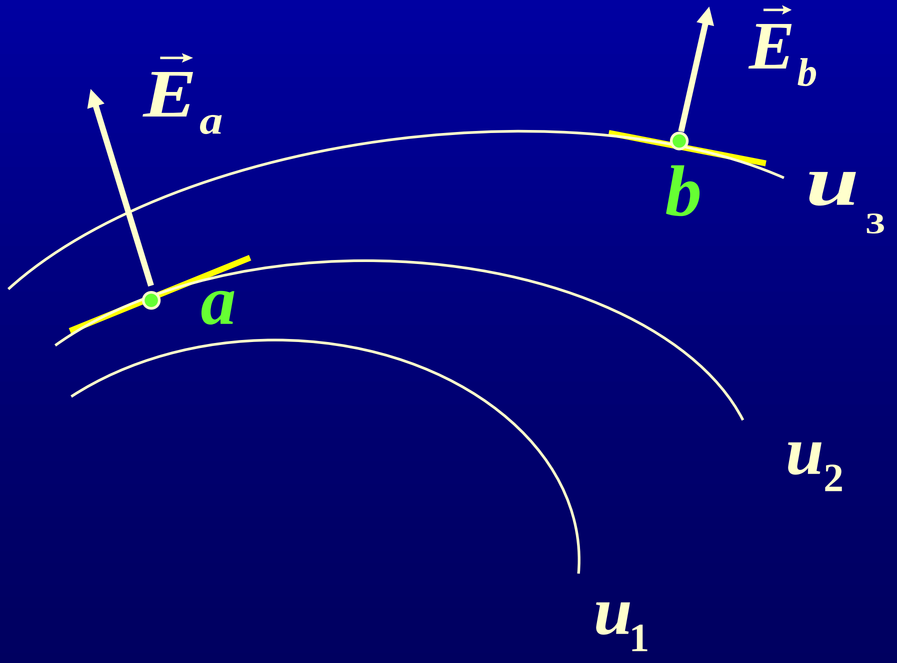
$$A_{cd} = W_c - W_d = q(u_c - u_d) > 0 \qquad \therefore u_c > u_d$$

(2)等势面较密集的地方场强大，较稀疏的地方场强小。

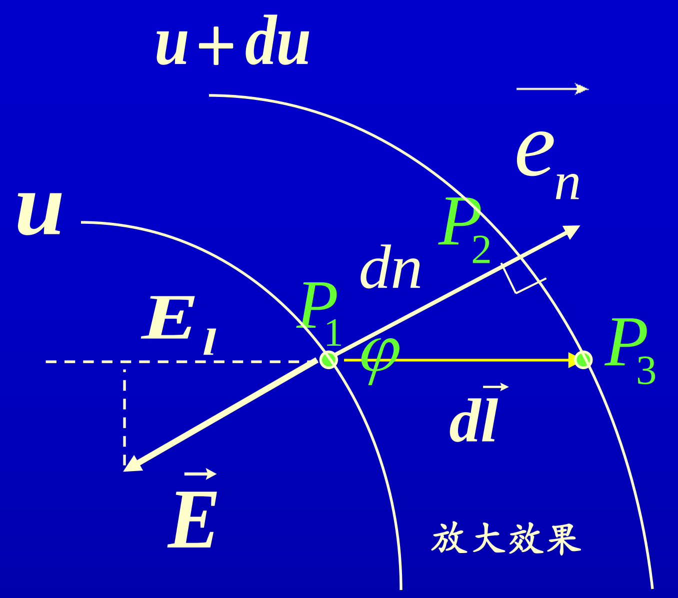
规定:场中任意两相邻等势面间的电势差相等

课堂练习：由等势面确定a、b点的场强大小和方向

已知 $u_1 - u_2 = u_2 - u_3 > 0$



二、场强与电势梯度的关系



任意静电场中，取两个十分邻近的等势面1、2

$$du > 0$$

在P_1点作等势面1的法线，它与等势面2交于P_2点
规定指向电势升高的方向为这法线的正方向
并以e_n表示法线方向的单位矢量

令 $P_1P_2 = dn$

沿dl方向到达P_3，其电势变化量为du，空间位置的该变量为dl，电势的空间变化率各不相等

$$\frac{du}{dl} \le \boxed{\frac{du}{dn}}$$

沿e_n方向电势的空间变化率

$$dn = dl\cos\varphi \qquad \therefore \frac{du}{dl} = \frac{du}{dn}\cos\varphi = \frac{du}{dn}\vec{e}_n \bullet \frac{\vec{dl}}{dl}$$

任意方向的电势的空间变化率　　沿e_n方向的电势的空间变化率

$\dfrac{du}{dn}\vec{e}_n$ 定义为P_1处的电势梯度矢量，记做gradu，即

$$gradu = \frac{du}{dn}\vec{e}_n$$ 电势升高的方向

说明：电场中某点的电势梯度矢量，在方向上与电势在该点处空间变化率为最大的方向相同，在量值上等于沿该方向的电势的空间变化率

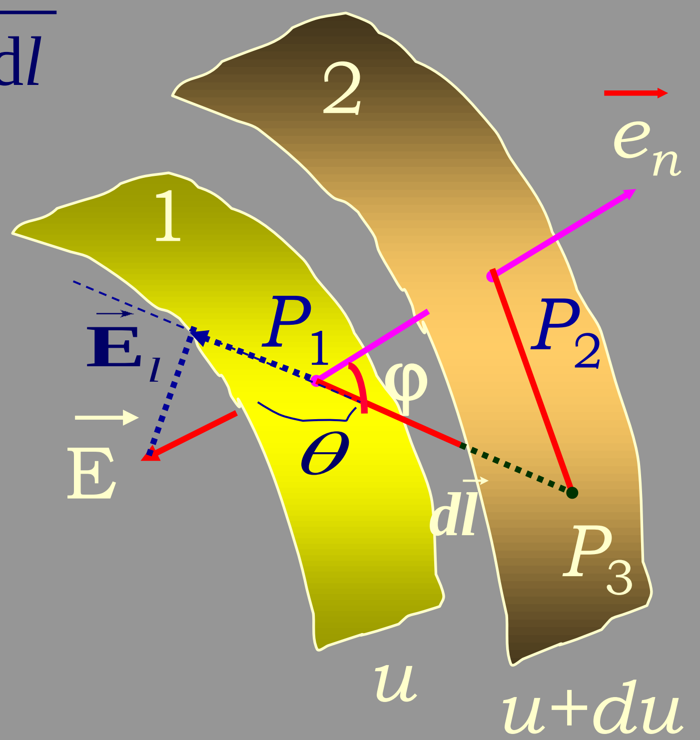
P_1点的 $\vec{E}$ 方向与 $\vec{e}_n$ 的方向相反

电荷q从等势面1移动到等势面2，电场力做功

$$\mathrm{d}A = q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = qE\cdot\mathrm{d}l\cdot\cos\theta = E_l\cdot\mathrm{d}l$$

电场力做功等于电势能的减少量

$$\mathrm{d}A = q\left[u-(u+du)\right] = -q\cdot\mathrm{d}u \quad \therefore E_l = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}$$



$$E_l = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}$$ 表示沿该方向电势变化率的负值

负号表示$\overrightarrow{E_l}$与$\overrightarrow{dl}$方向相反

场强与等势面垂直，但指向电势降低的方向，即为 $\vec{\mathbf{E}}$ $\vec{\mathbf{E}}_n$

同理，得 $$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\overrightarrow{e_n} = -\mathrm{grad}u$$

一般 $u=u(x,y,z)$ $\therefore \vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}$

所以 $E_x=-\dfrac{\partial u}{\partial x}$ $E_y=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ $E_z=-\dfrac{\partial u}{\partial z}$

$$=-(\underline{\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k})}$$

u的梯度: $gradu$ 或 ∇u

$$\therefore \vec{E}=-gradu=-\nabla u$$

$\vec{E}$的方向与u的梯度反向，即指向u降落的方向

物理意义：电势梯度是一个矢量，它的大小为电势沿等势面法线方向的变化率，它的方向沿等势面法线方向且指向电势增大的方向。

例1. 利用场强与电势梯度的关系， 计算均匀带电细圆环轴线上一点的场强。

解： $u = u(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$

$$\therefore E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_y = E_z = 0$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

例2. 计算电偶极子电场中任一点的场强

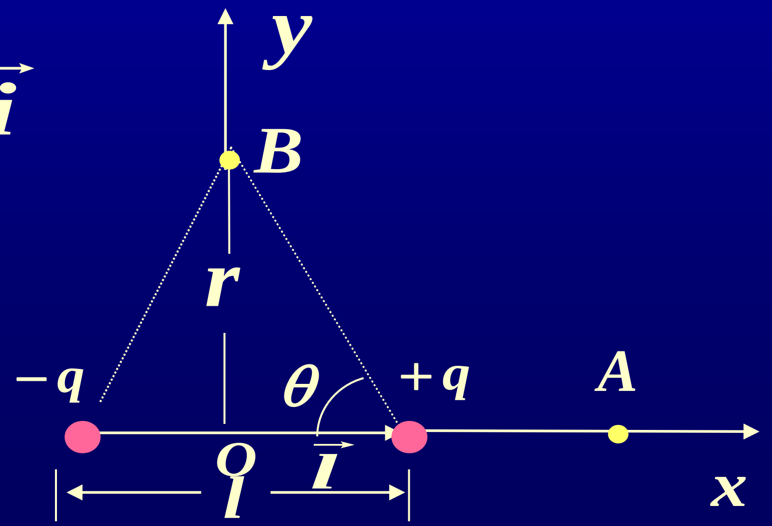
解：$u=u(x,y)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$$E_x=-\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$E_y=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

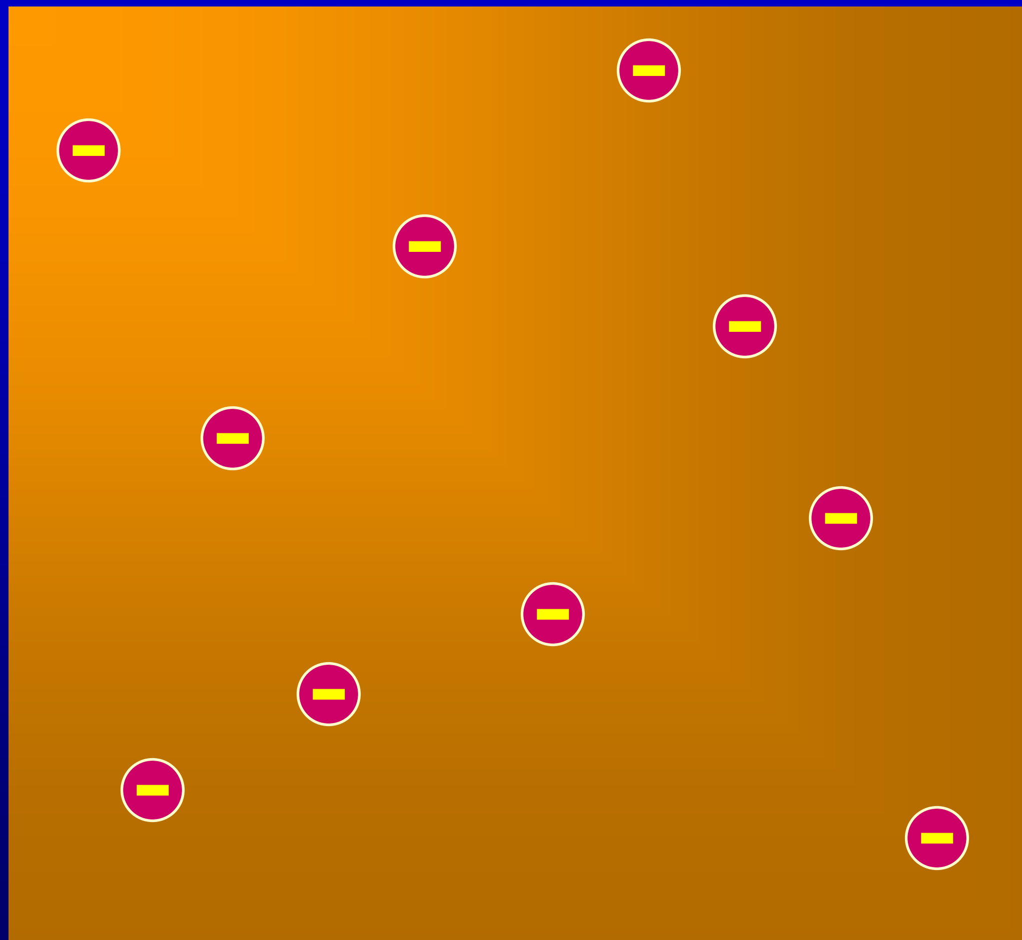
B点(x=0) $\quad \vec{E}=-\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}\vec{i}$

A点(y=0) $\quad \vec{E}=\dfrac{p}{2\pi\varepsilon_0 x^3}\vec{i}$



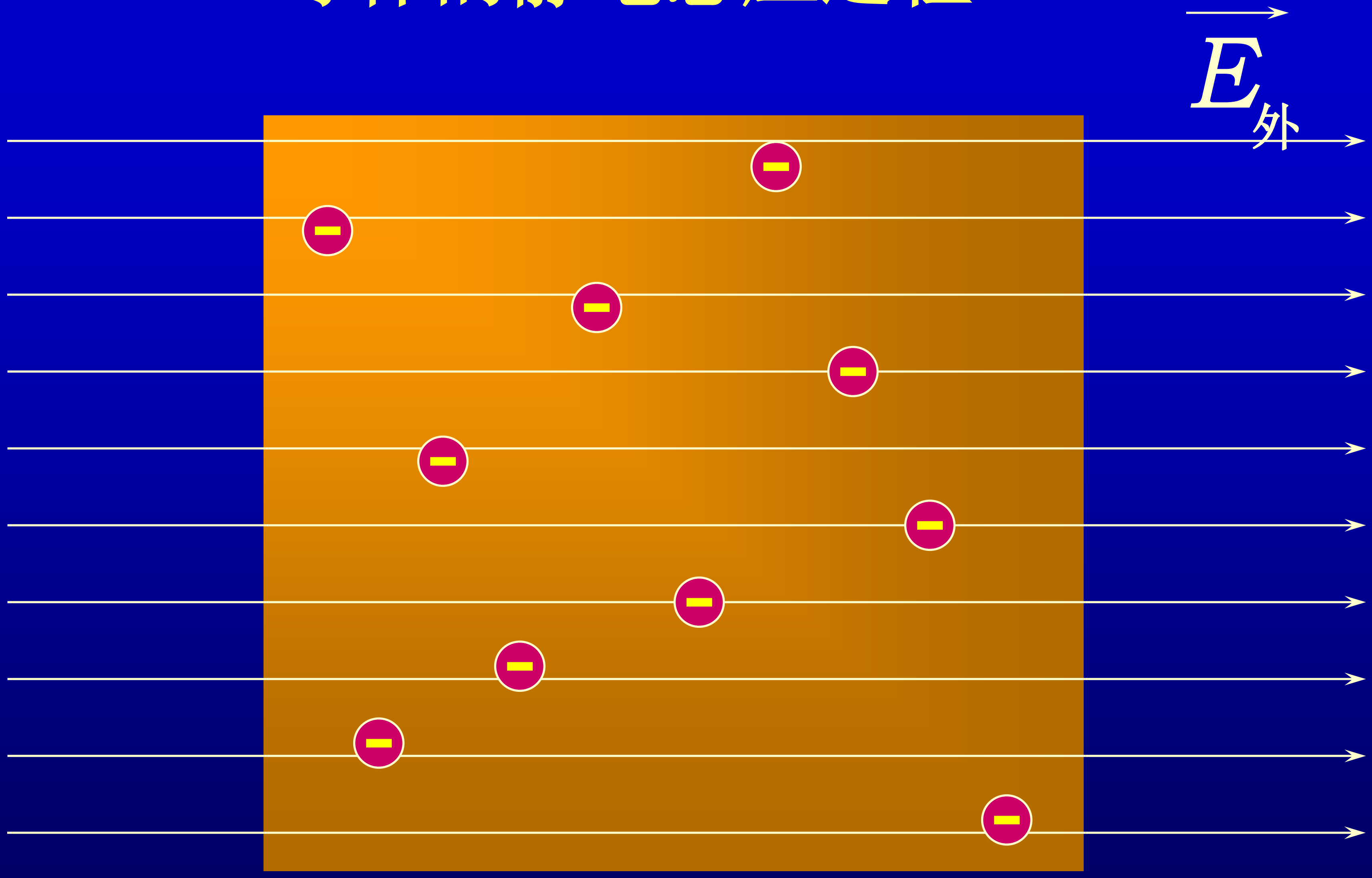
8-5 静电场中的导体和电介质

一、导体的静电平衡



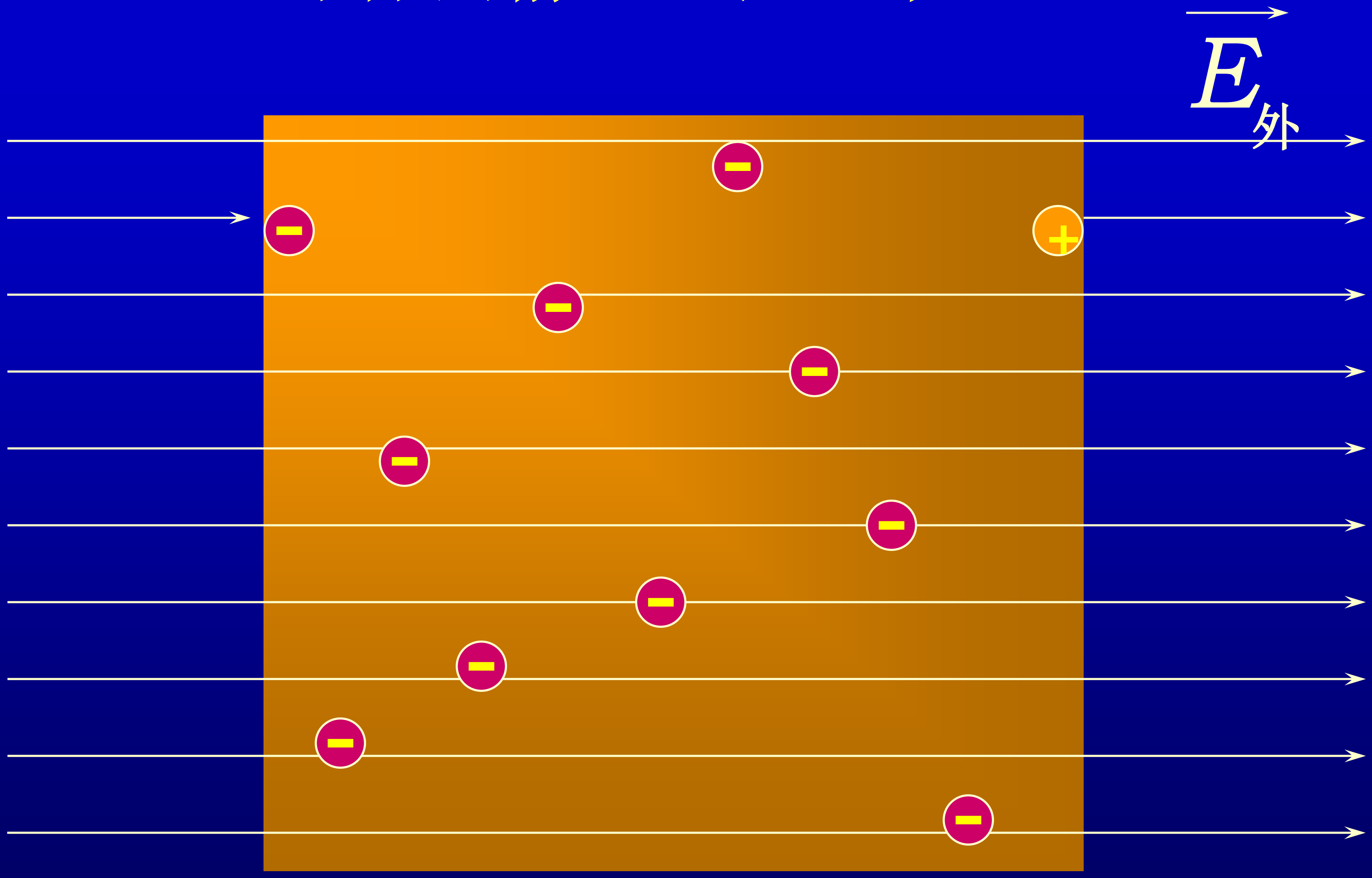
无外电场时

导体的静电感应过程



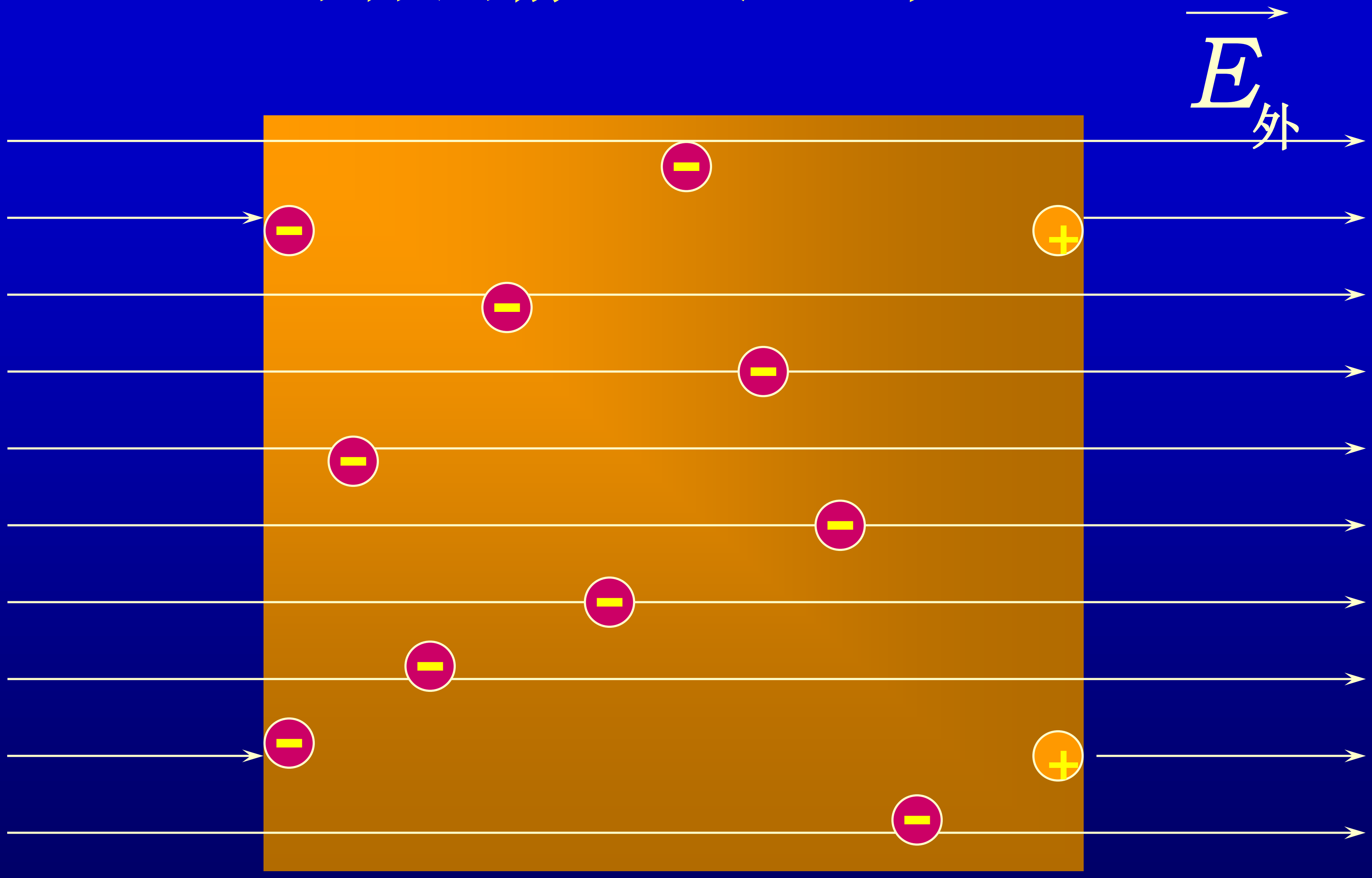
加上外电场后

导体的静电感应过程



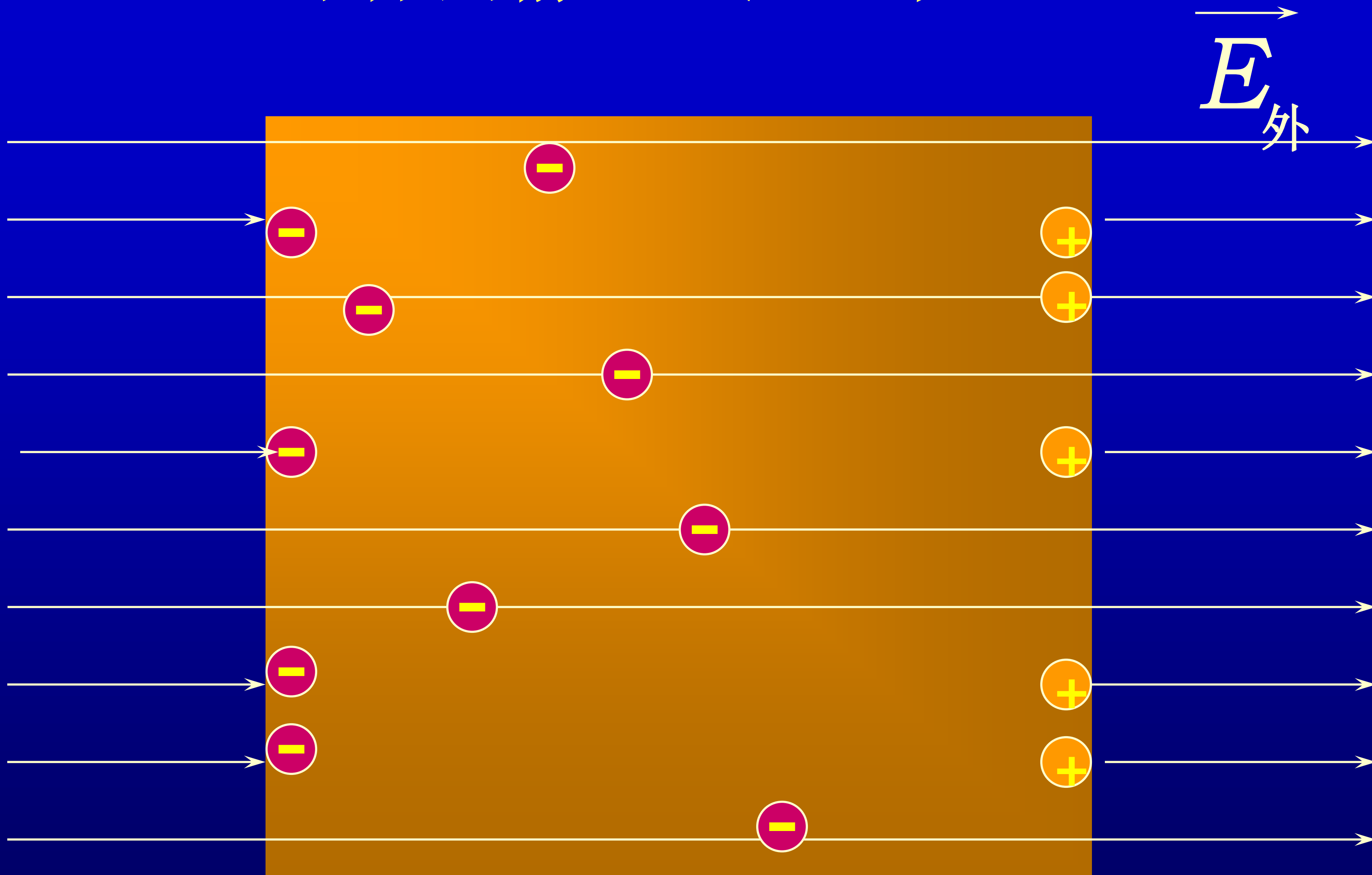
加上外电场后

导体的静电感应过程



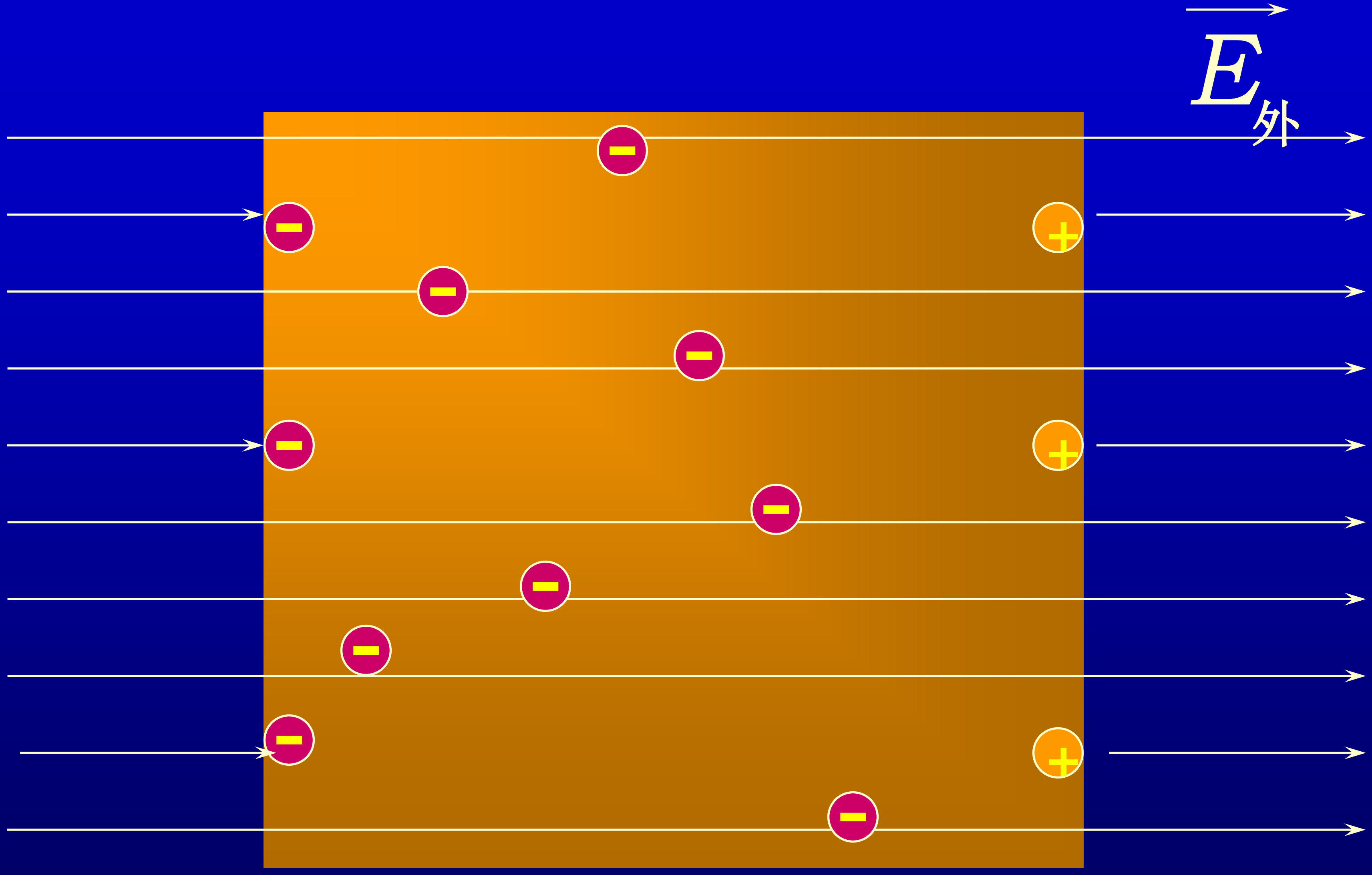
加上外电场后

导体的静电感应过程



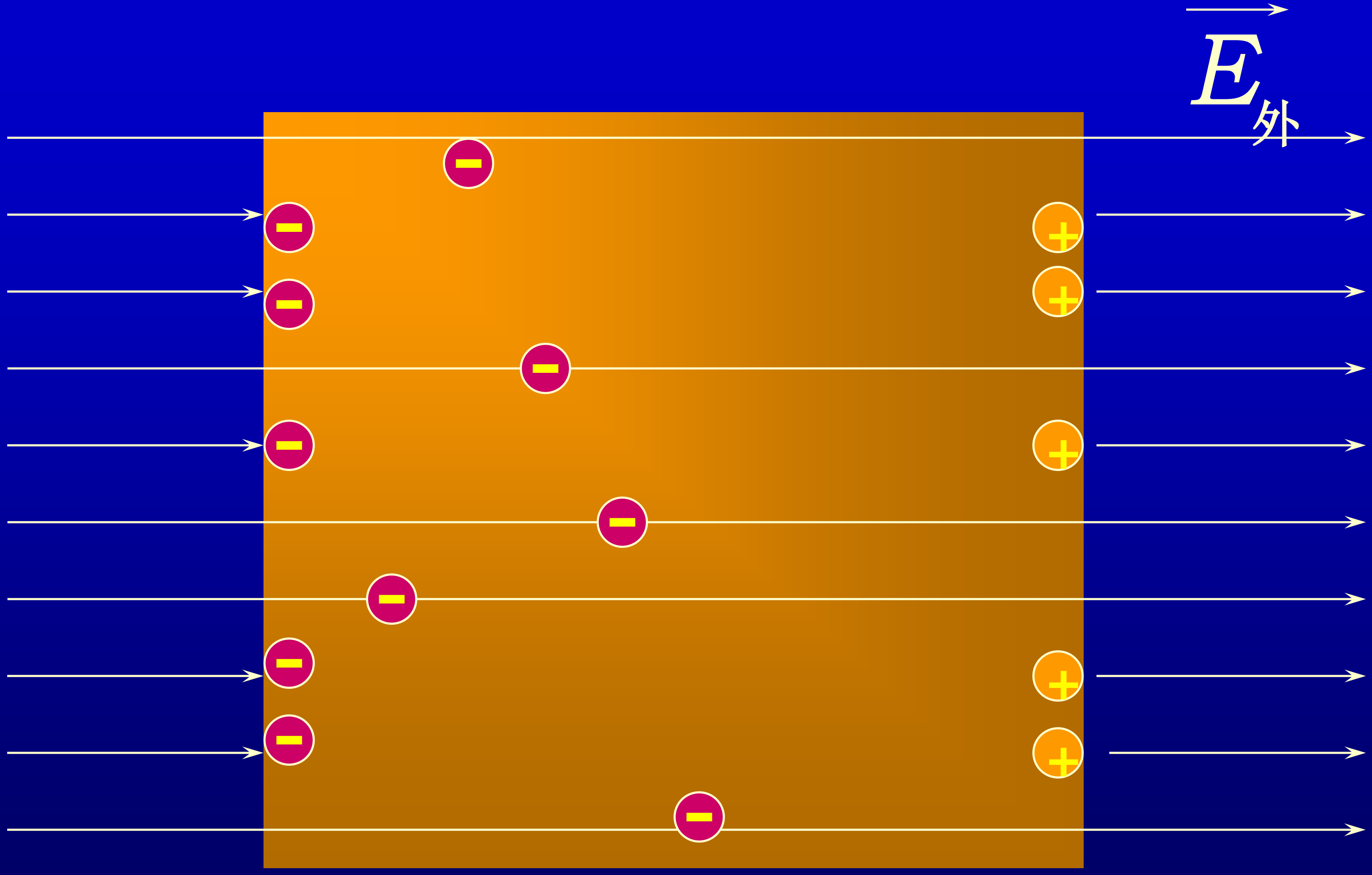
加上外电场后

导体的静电感应过程



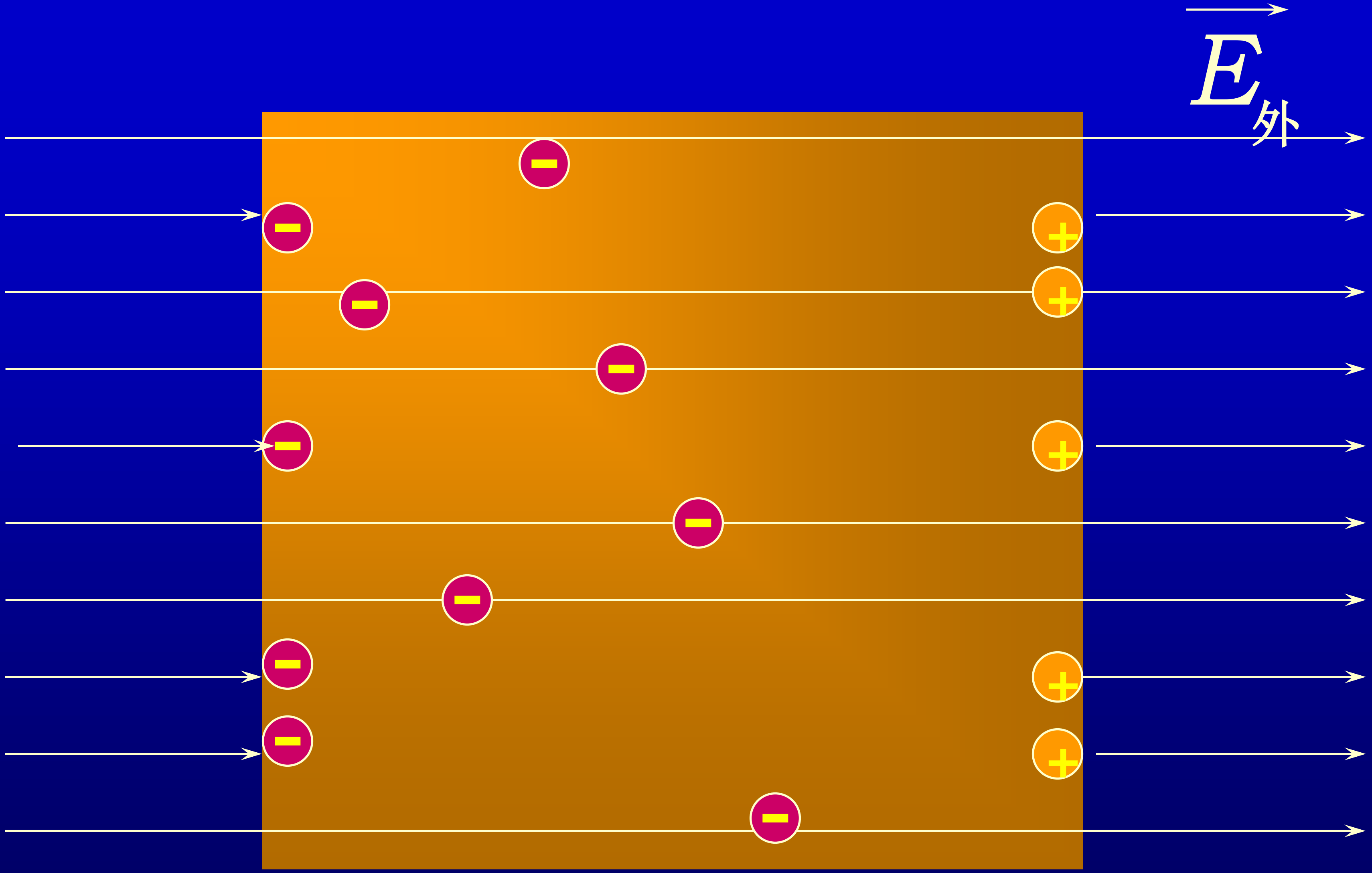
加上外电场后

导体的静电感应过程



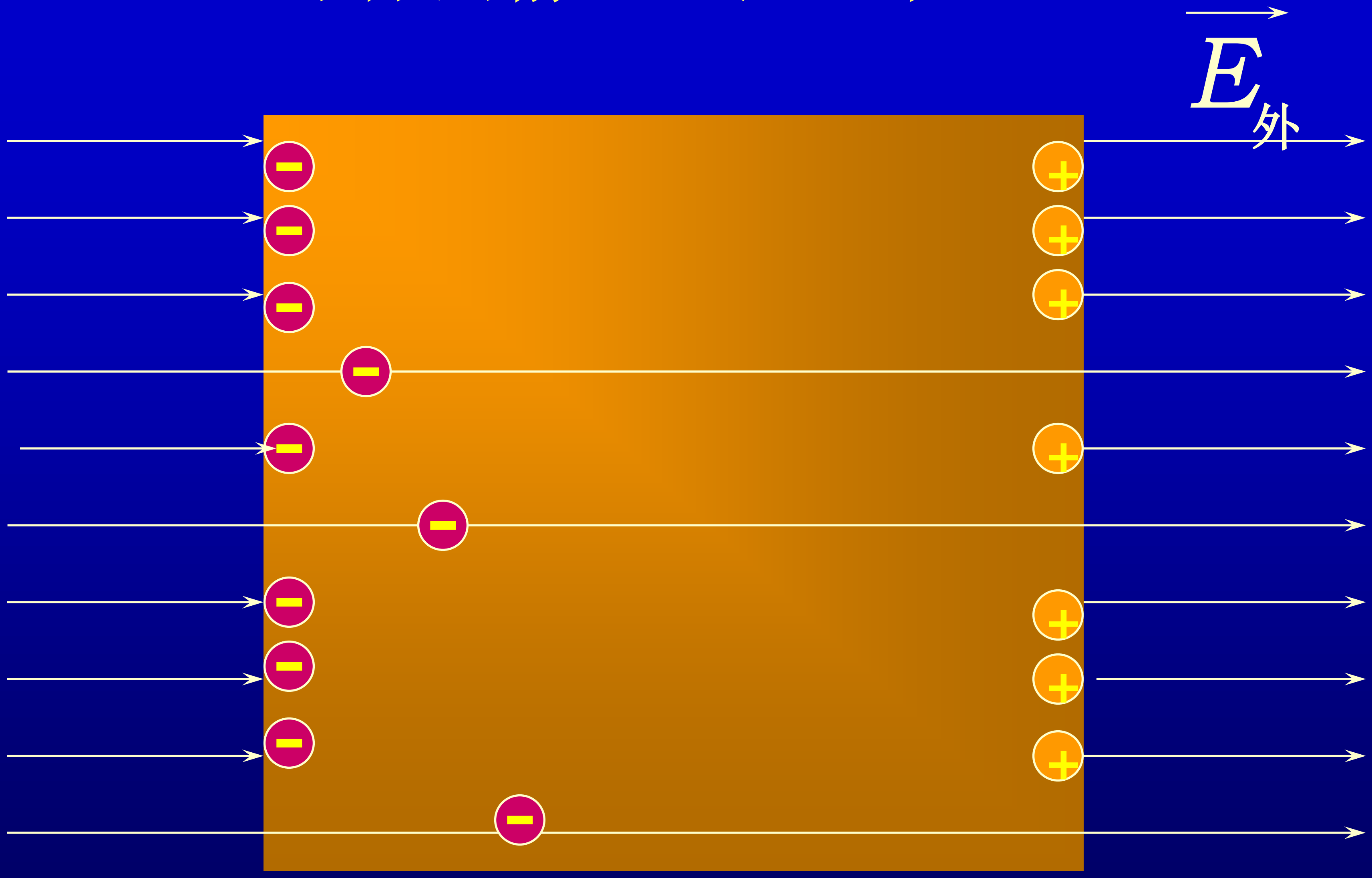
加上外电场后

导体的静电感应过程



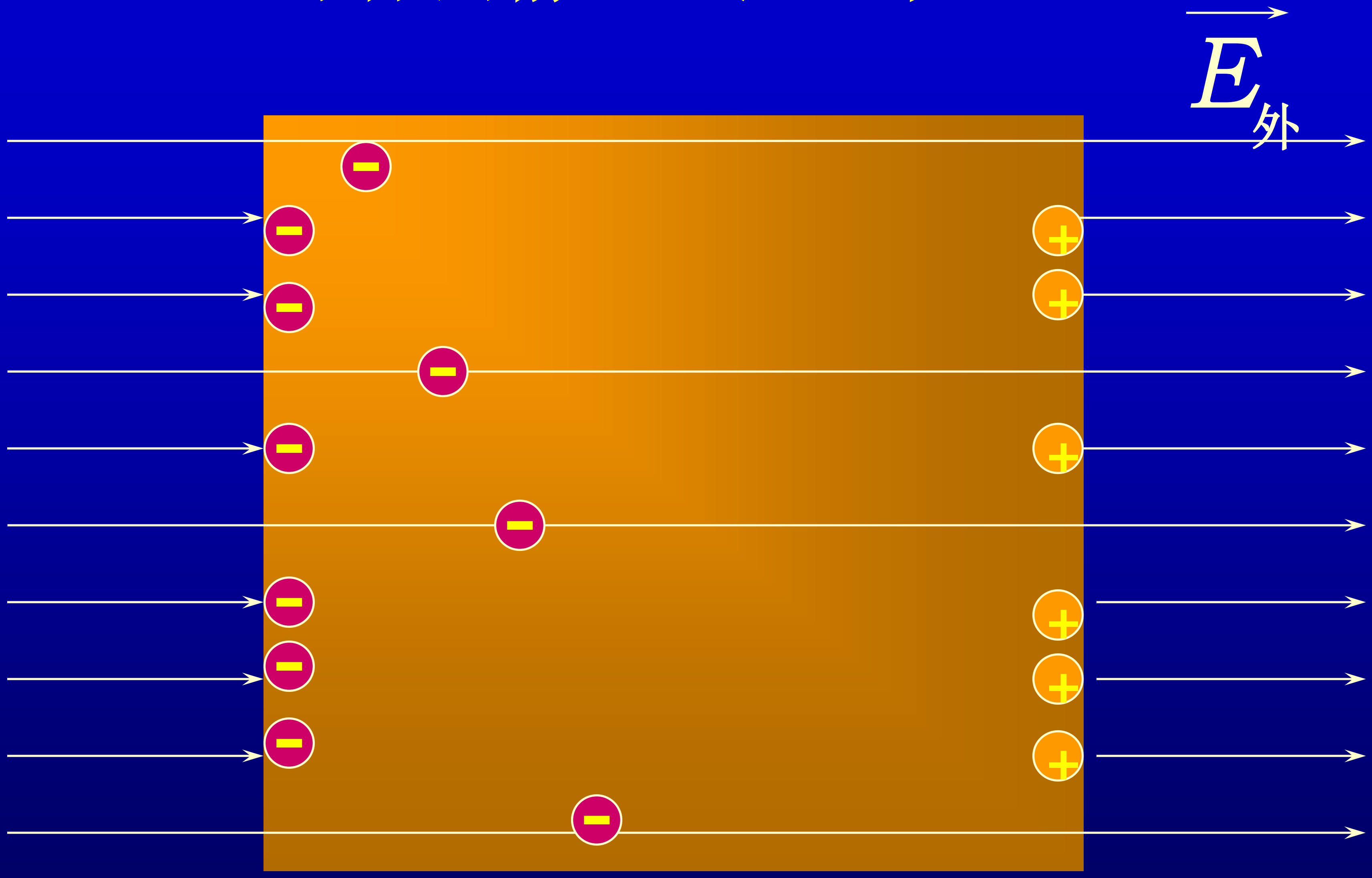
加上外电场后

导体的静电感应过程



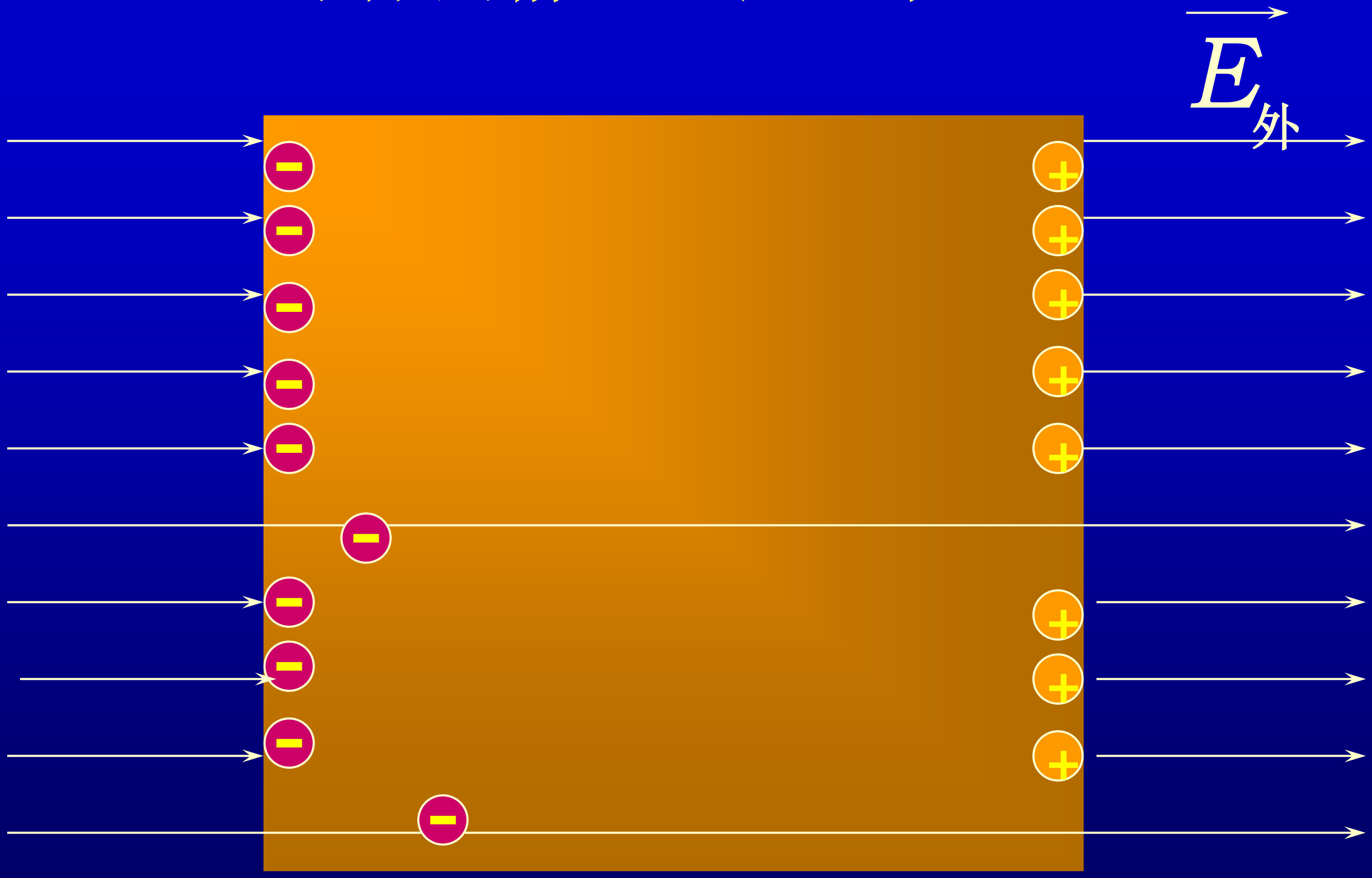
加上外电场后

导体的静电感应过程



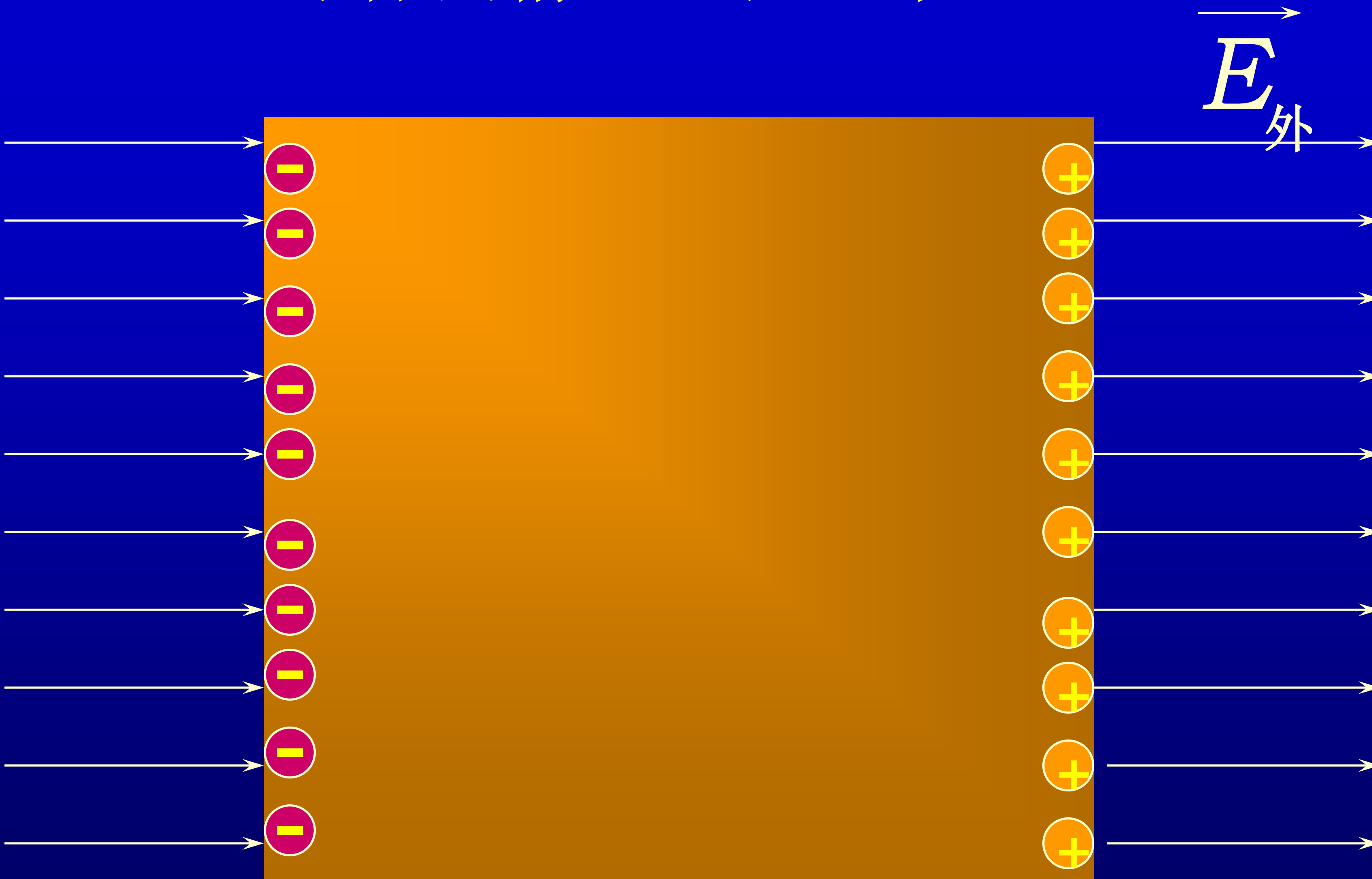
加上外电场后

导体的静电感应过程



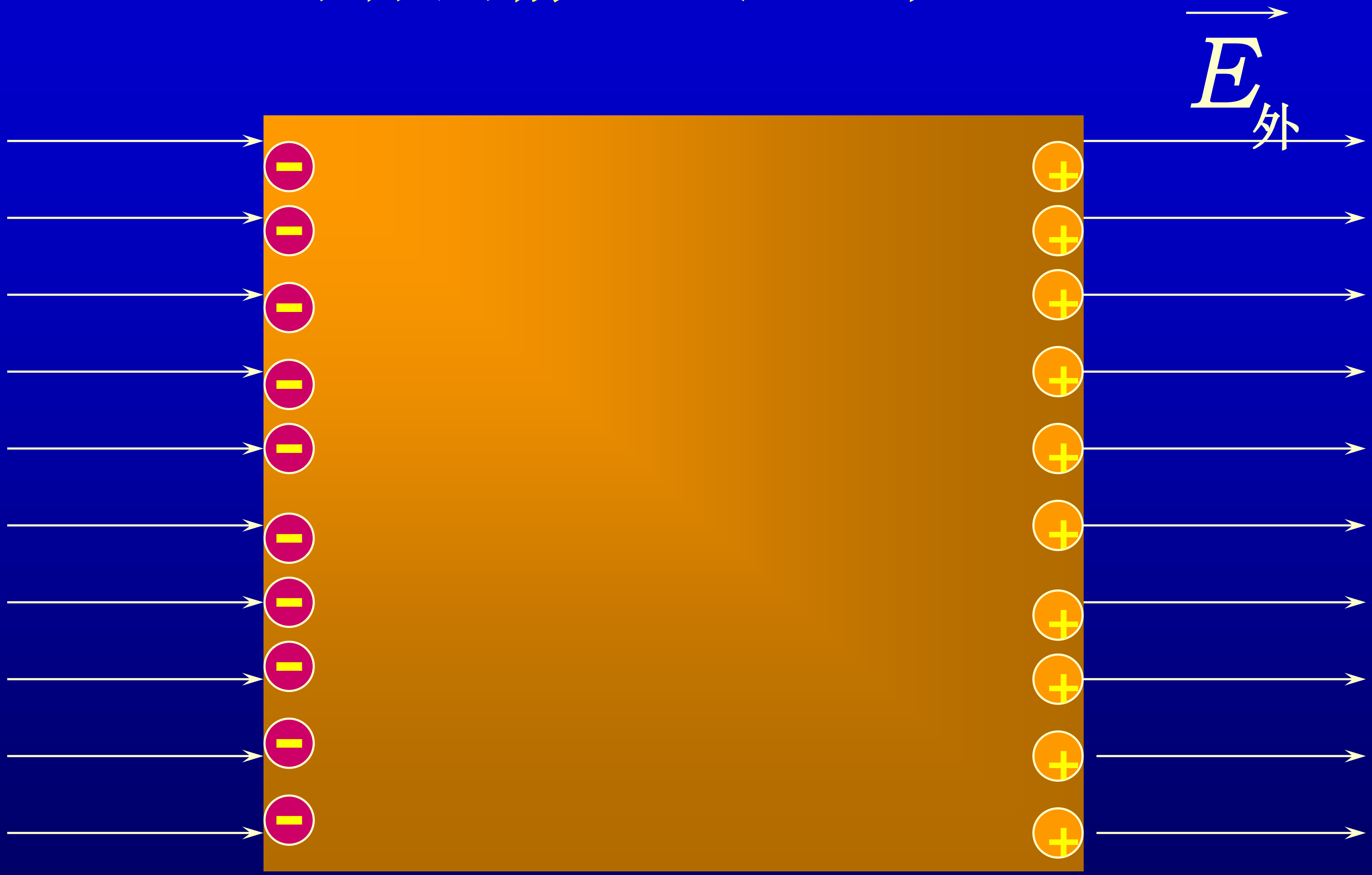
加上外电场后

导体的静电感应过程



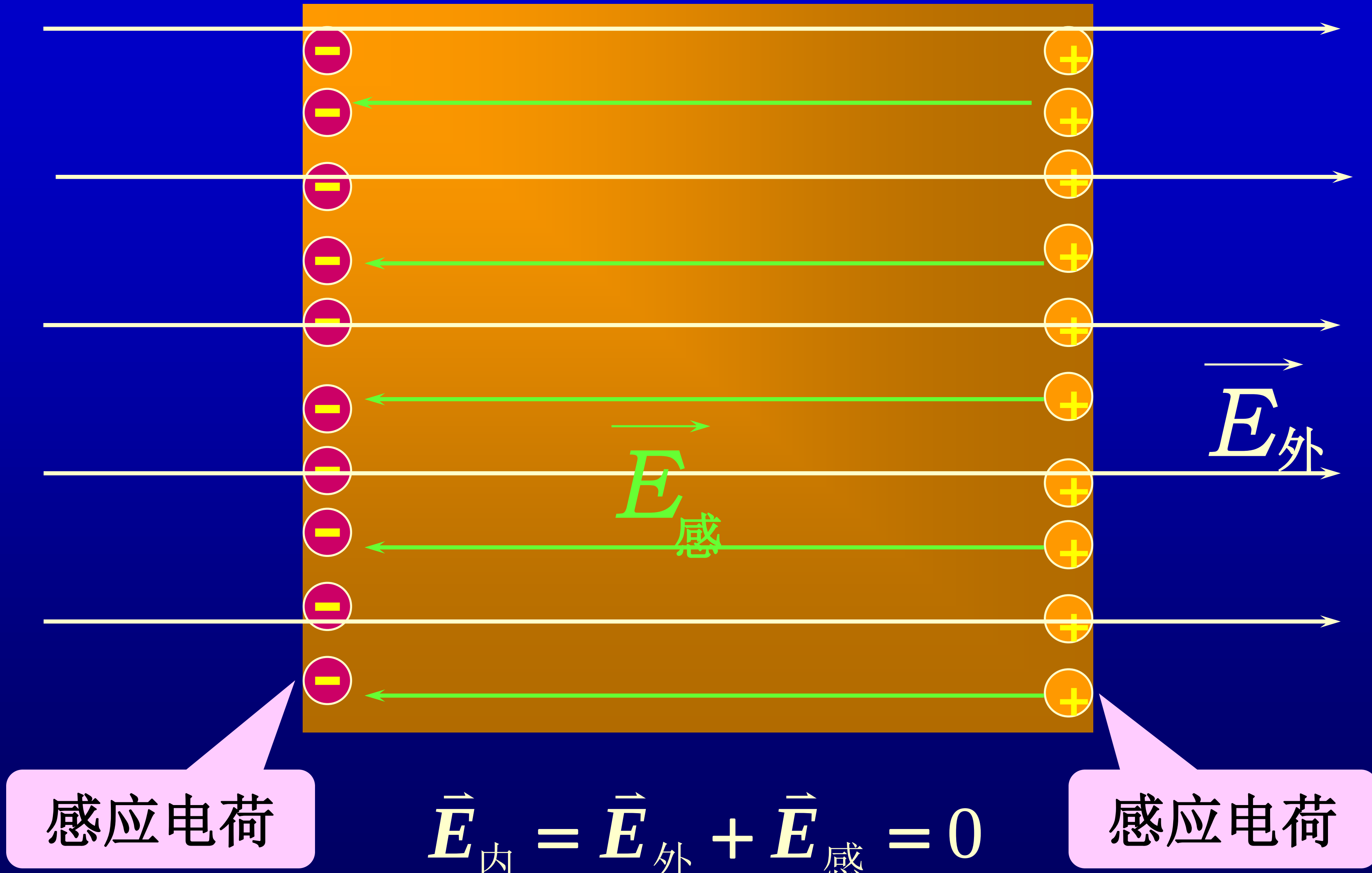
加上外电场后

导体的静电感应过程



加上外电场后

导体达到静平衡：导体中没有电荷作任何宏观定向运动的状态，叫静电平衡状态

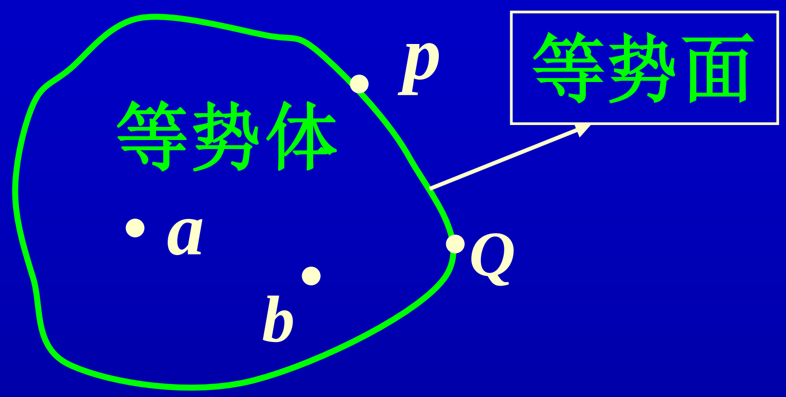


$$\vec{E}_{内} = \vec{E}_{外} + \vec{E}_{感} = 0$$

处于静电平衡状态的导体，导体内部（合）电场强度处处为零。因为任意一个电子受到合力为零，才不作宏观运动，由F=qE，得场强为零

导体内

$$u_a - u_b = \int_a^b \vec{E} \bullet d\vec{l}$$



$$\because \vec{E}_{内} = 0 \qquad \therefore u_a = u_b$$

或 $\therefore -gradu = \vec{E} = 0$

导体表面 $$u_P - u_Q = \int_P^Q \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_P^Q E\cos 90^0 dl = 0$$

$$\therefore u_P = u_Q$$

或用P86的方法

静电平衡条件推出

（1）导体是等势体，其表面是等势面

（2）导体表面的场强方向处处垂直于导体表面

处于静电平衡状态的导体的性质：

1、导体是等势体，导体表面是等势面。

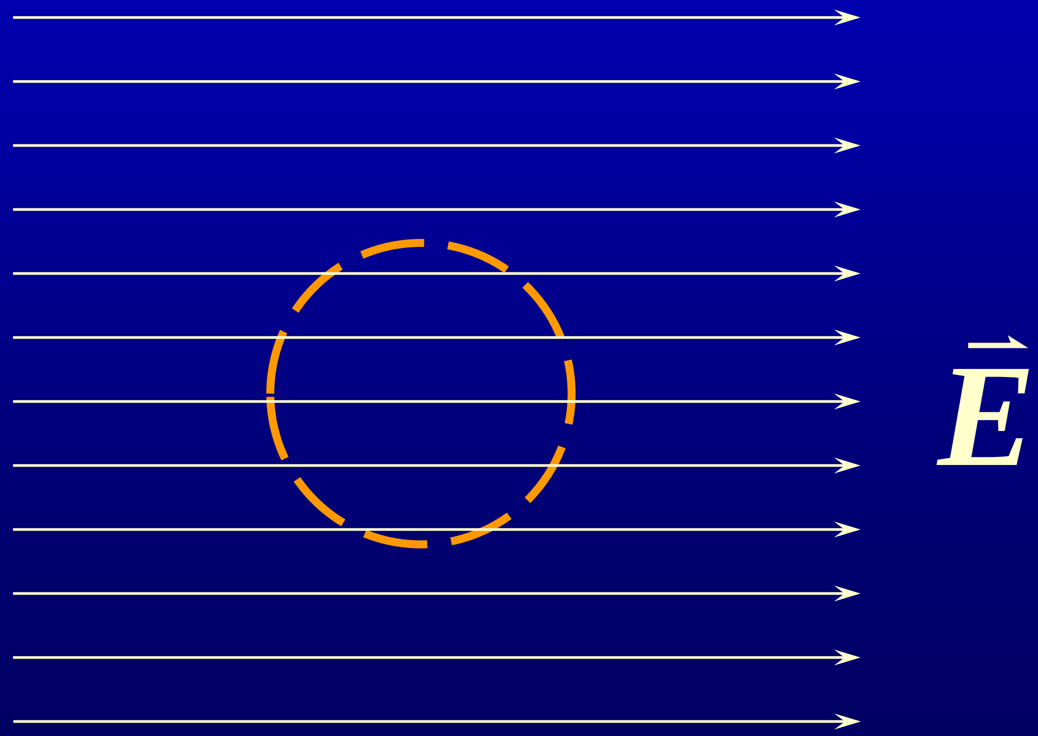
2、导体内部处处没有未被抵消的净电荷，净电荷只分布在导体的表面上。表面有场强　　由高斯定理可证明

3、导体以外，靠近导体表面附近处的场强大小与导体表面在该处的面电荷密度σ的关系为$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

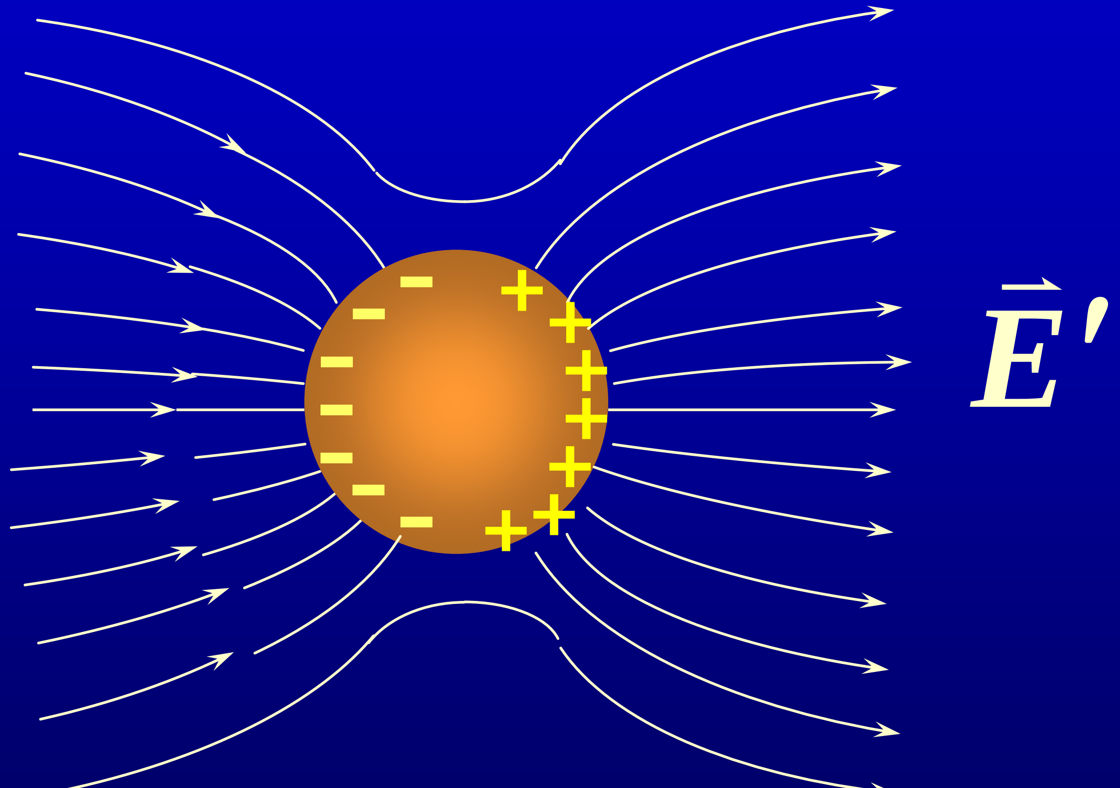
详细说明如下

1、导体表面附近的场强方向处处与表面垂直。

金属球放入前电场为一均匀场



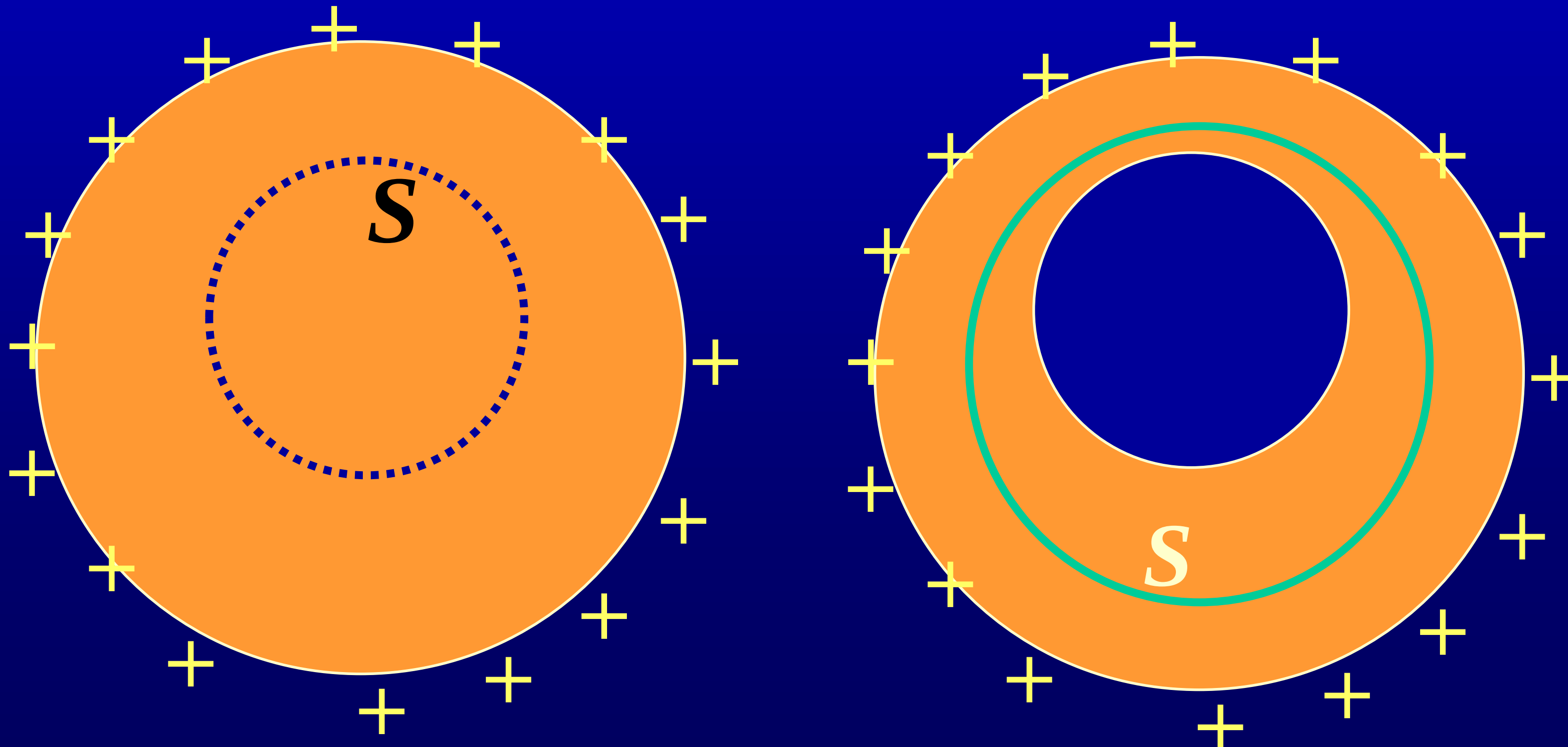
金属球放入后电力线发生弯曲
电场为一非均匀场



2、导体内没有净电荷，未被抵消的净电荷只能分布在导体表面上。

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{\int_V \rho_e dV}{\varepsilon_0}$$

$$\because 内部\ \vec{E} = 0 \qquad \therefore \rho_e = 0$$



3、导体表面上的电荷分布

导体表面上的电荷分布情况，不仅与导体表面形状有关，还和它周围存在的其他带电体有关。

实验发现：静电场中的孤立带电体，静电平衡时导体上电荷面密度的大小与该处表面的曲率有关。

曲率较大，表面尖而凸出部分，电荷面密度较大

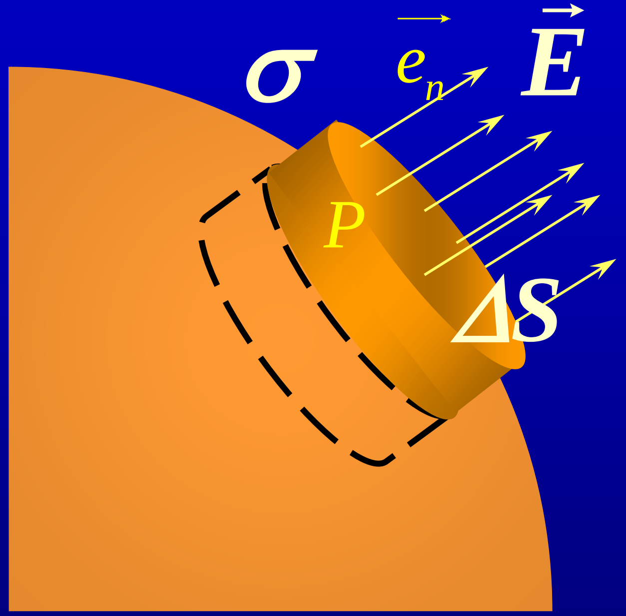
曲率较小，表面比较平坦部分，电荷面密度较小

曲率为负，表面凹进去的部分，电荷面密度最小

紧靠导体表面，但又不是在导体表面上的意思

4、导体外部近表面处场强方向与该处导体表面垂直，大小与该处导体表面电荷面密度σ成正比。

在导体表面外无限靠近表面处任取一点P，过P作导体表面的外法线单位矢量$\vec{e}_n$，则P点场强为 $\vec{E} = E\vec{e}_n$



在P点附近的导体表面上取面积元，足够小，可认为其上电荷面密度均匀，围绕面元作一个扁平的圆柱形闭合面，其轴线垂直于导体表面，上下两底面与导体表面平行

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = E \cdot \Delta S \cdot \cos 0^0 = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E}_{外表面} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n$$

注意：导体表面附近的场强E不单是由该表面处的电荷所激发，它是导体面上所有电荷以及周围其他带电体上的电荷所激发的和场强，外在的影响已经在σ中体现出来了

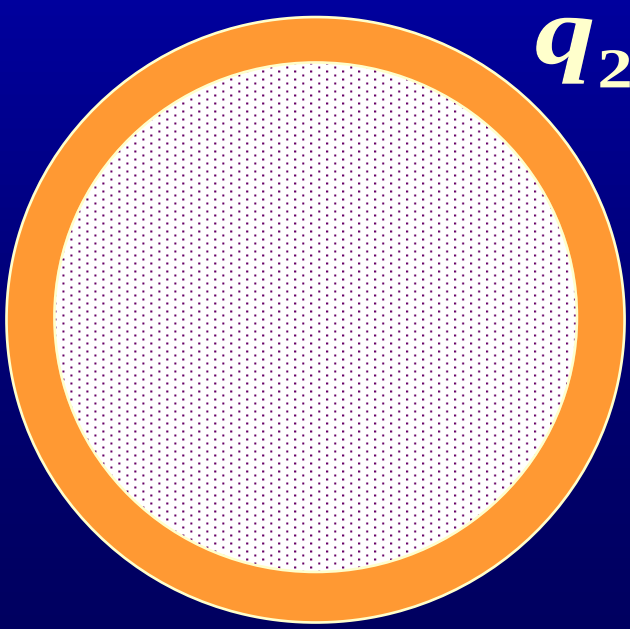
二、导体壳和静电屏蔽

1、空腔内无带电体的情况

腔体内表面不带电量，

腔体外表面所带的电量为带电体所带总电量。

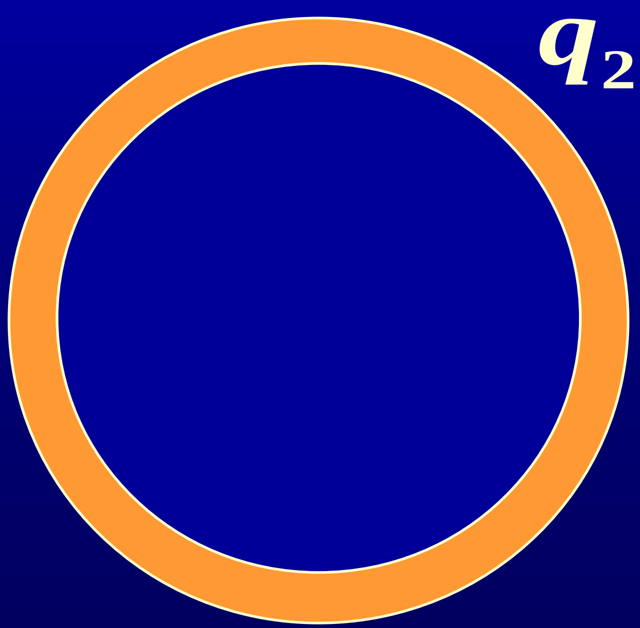
导体上电荷面密度的大小与该处表面的曲率有关。



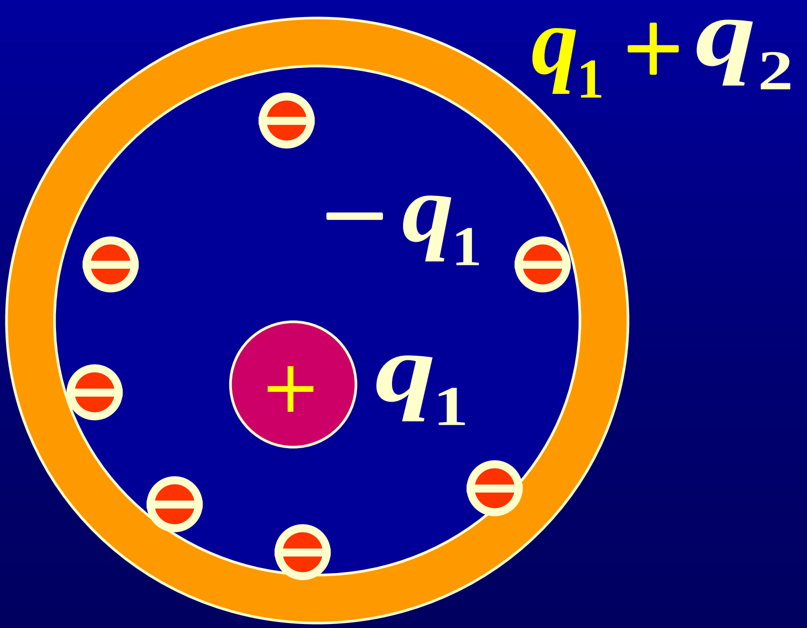
2、空腔内有带电体

腔体内表面所带的电量和腔内带电体所带的电量等量异号，腔体外表面所带的电量由电荷守恒定律决定。

未引入q_1时



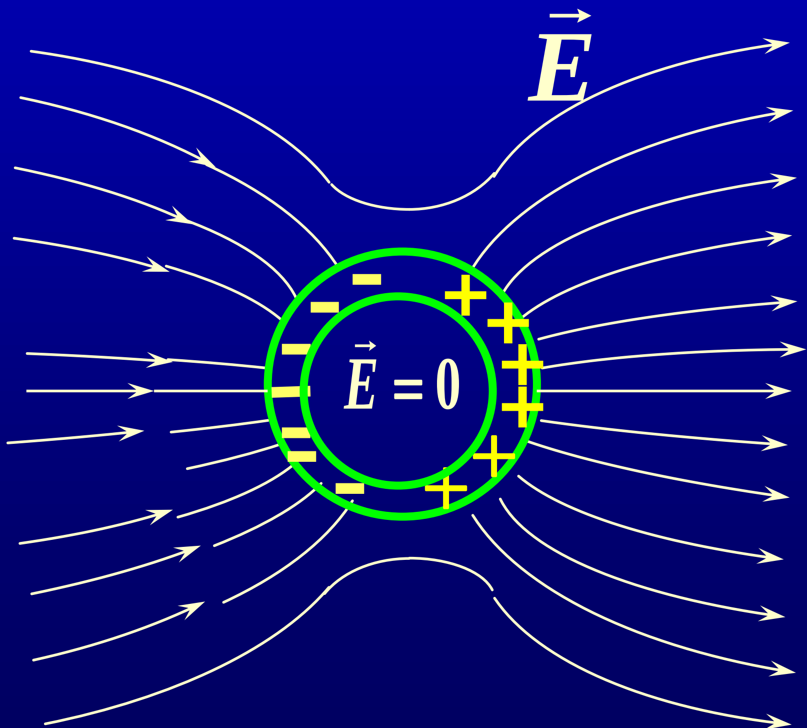
放入q_1后

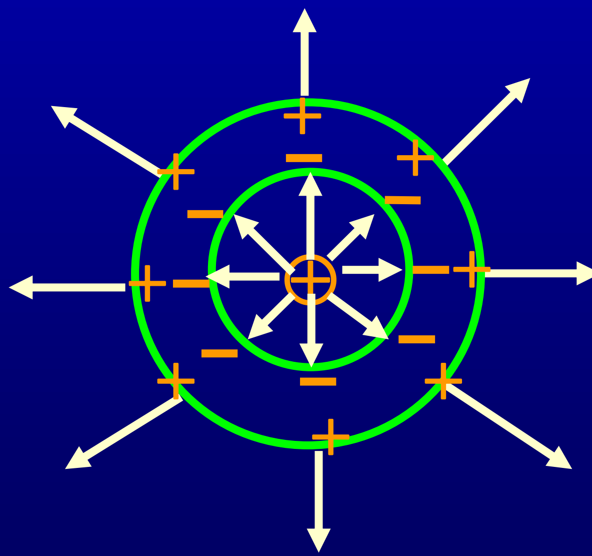


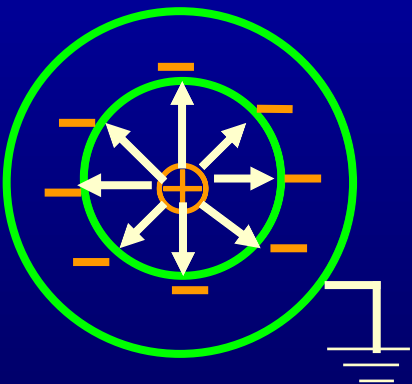
3、静电屏蔽

封闭导体壳（不论接地与否）内部的电场不受外电场的影响；

接地封闭导体壳（或金属丝网）外部的场不受壳内电荷的影响。







三、有导体存在时场强和电势的计算

电荷守恒定律

静电平衡条件

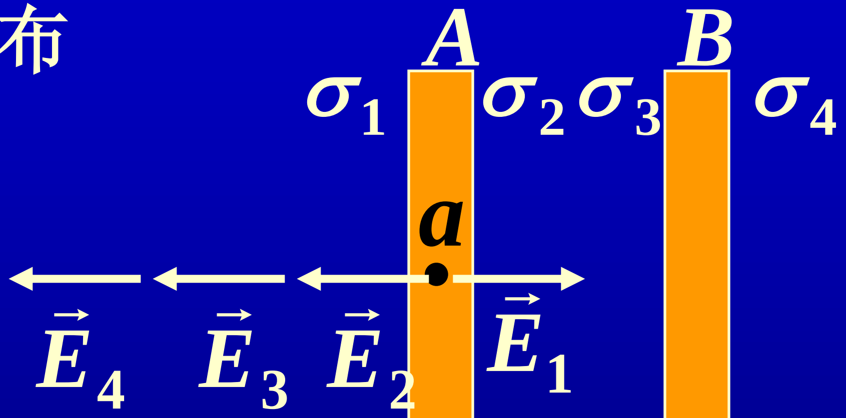
电荷分布

$\vec{E}$ u

例1.已知：导体板A，面积为S、带电量Q，在其旁边放入导体板B。

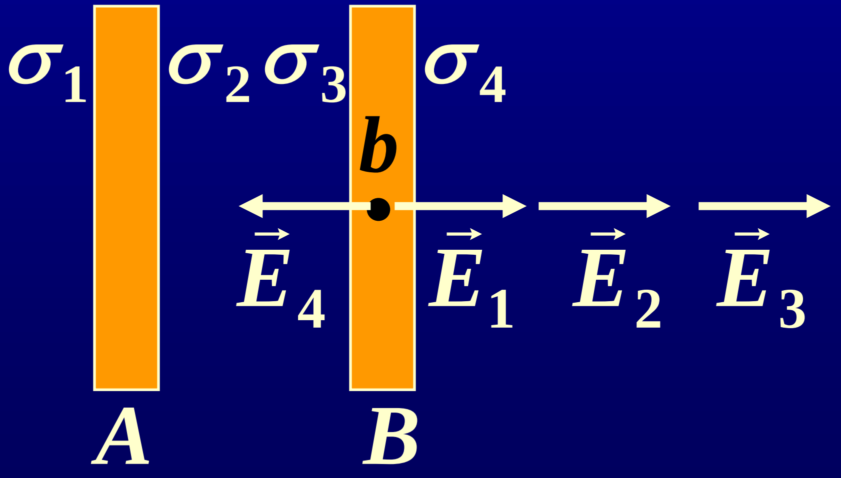
求：(1)A、B上的电荷分布及空间的电场分布

(2)将B板接地，求电荷分布



a点 $$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

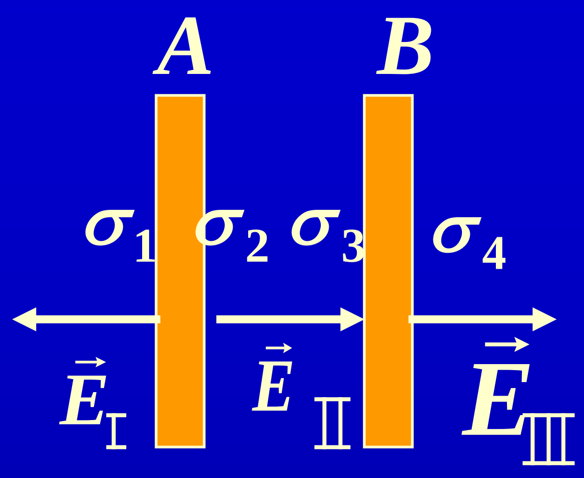
b点 $$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$



A板 $$\sigma_1 S+\sigma_2 S=Q$$

B板 $$\sigma_3 S+\sigma_4 S=0$$

解方程得:



电荷分布 $$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q}{2S}$$

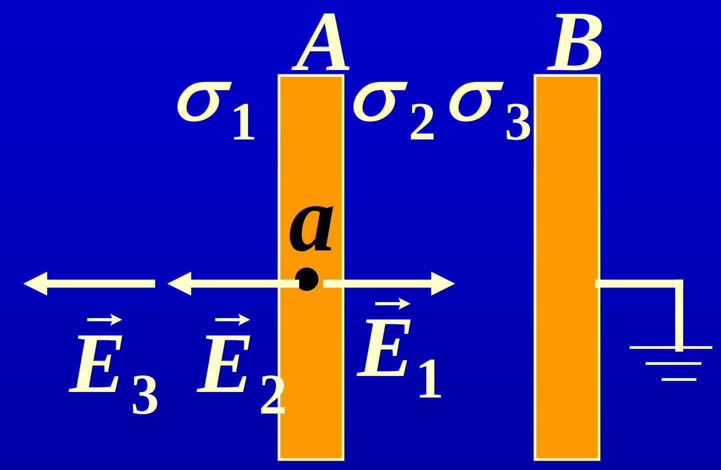
场强分布 A板左侧 $$E_{\mathrm{I}} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

两板之间 $$E_{\mathrm{II}} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

B板右侧 $$E_{\mathrm{III}} = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

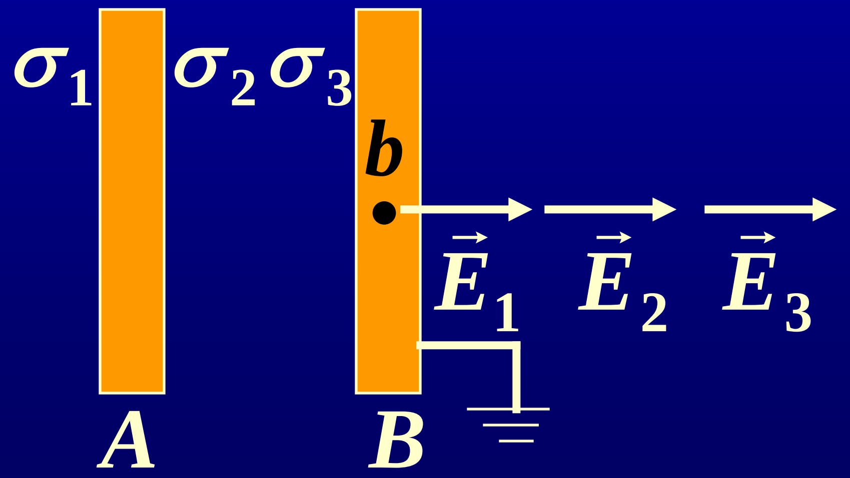
(2)将B板接地，求电荷及场强分布

接地时　$\sigma_4 = 0$



a点　$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = 0$$

b点　$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = 0$$

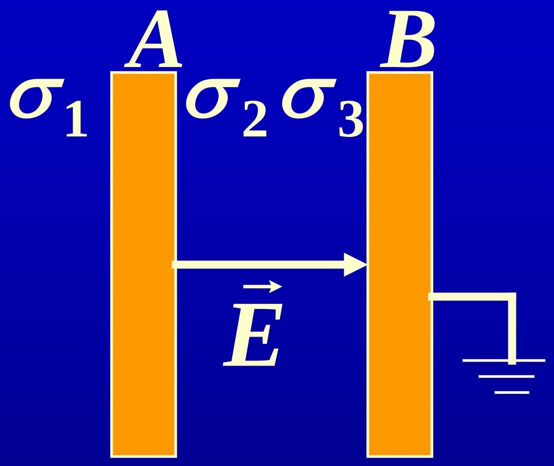


A板　$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q$

电荷分布

$$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q}{S}$$

电荷分布 $\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = -\sigma_3 = \dfrac{Q}{S}$

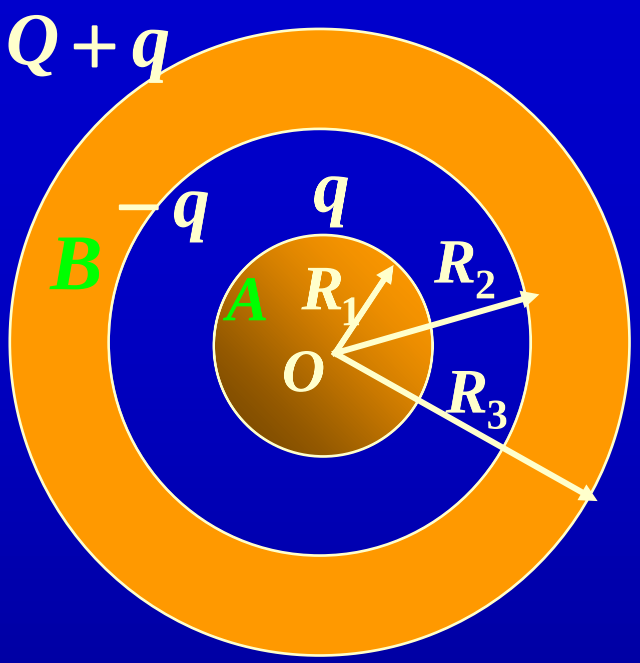


场强分布

两板之间 $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

两板之外 $E = 0$

例2.已知R_1 R_2 R_3 q Q



求 ①电荷及场强分布；球心的电势

②如用导线连接A、B，再作计算

解：*电荷分布* q $-q$ $Q+q$

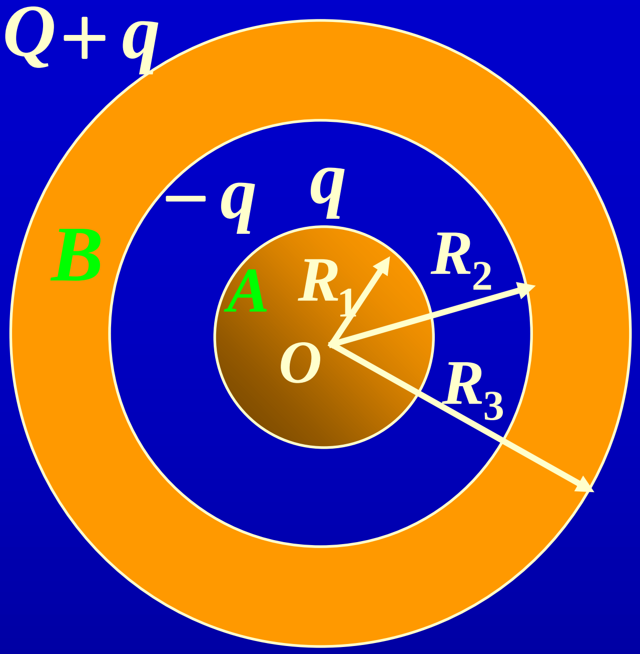
由高斯定理得

场强分布

$$E=\begin{cases} 0 & r<R_1 \quad R_2<r<R_3 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2 \\ \dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3 \end{cases}$$

场强分布

$$E=\begin{cases} 0 & r<R_1 \quad R_2<r<R_3 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2 \\ \dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3 \end{cases}$$



球心的电势

$$u_o=\int_0^{\infty}\vec{E}\bullet d\vec{r}=\int_0^{R_1}Edr+\int_{R_1}^{R_2}Edr+\int_{R_2}^{R_3}Edr+\int_{R_3}^{\infty}Edr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{R_3}$$

②用导线连接A、B，再作计算

连接A、B， $q + (-q)$ 中和

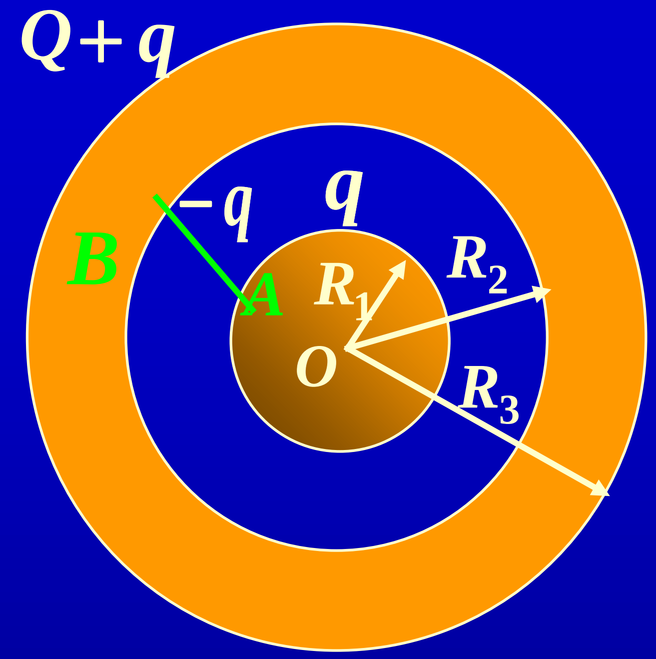
球壳外表面带电 $Q+q$

$r < R_3 \quad E = 0$

$$u_o = \int_0^{R_3} E dr + \int_{R_3}^{\infty} E dr = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

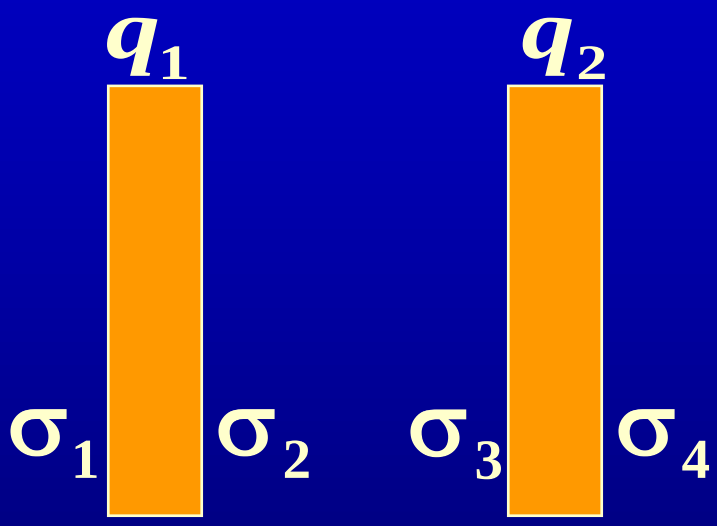
$r > R_3 \quad E = \dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$u = \int_r^{\infty} E dr = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



练习　已知: 两金属板带电分别为q_1、q_2

求：σ_1 、σ_2 、σ_3 、σ_4



$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_1 + q_2}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_1 - q_2}{2S}$$

问题：

1、在两板间插入一中性金属平板，求板面的电荷密度。

$$\sigma_1 = \sigma_6 = \frac{q_1 + q_2}{2S} \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma_4 = -\sigma_5 = \frac{q_1 - q_2}{2S}$$

2、如果第三板接地，又如何？

$$\sigma_1 = \sigma_6 = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma_4 = -\sigma_5 = \frac{q_1}{S}$$

3、剪掉第三板接地线，再令第一板接地，又如何？

$$\sigma_1 = \sigma_6 = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma_4 = -\sigma_5 = \frac{q_1}{S}$$

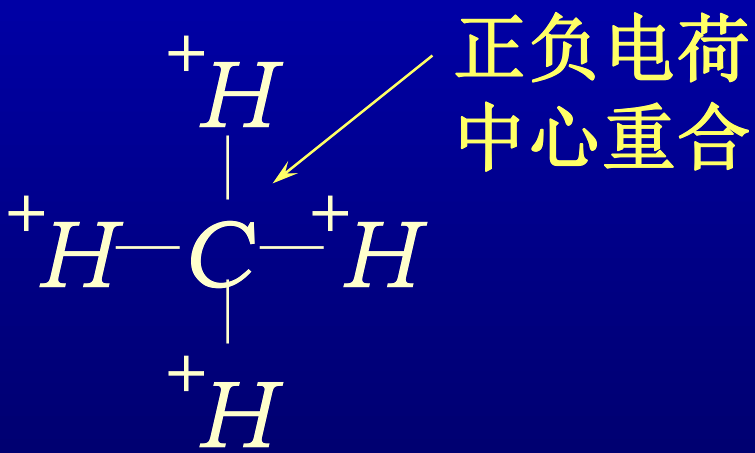
四、电介质的极化

电介质

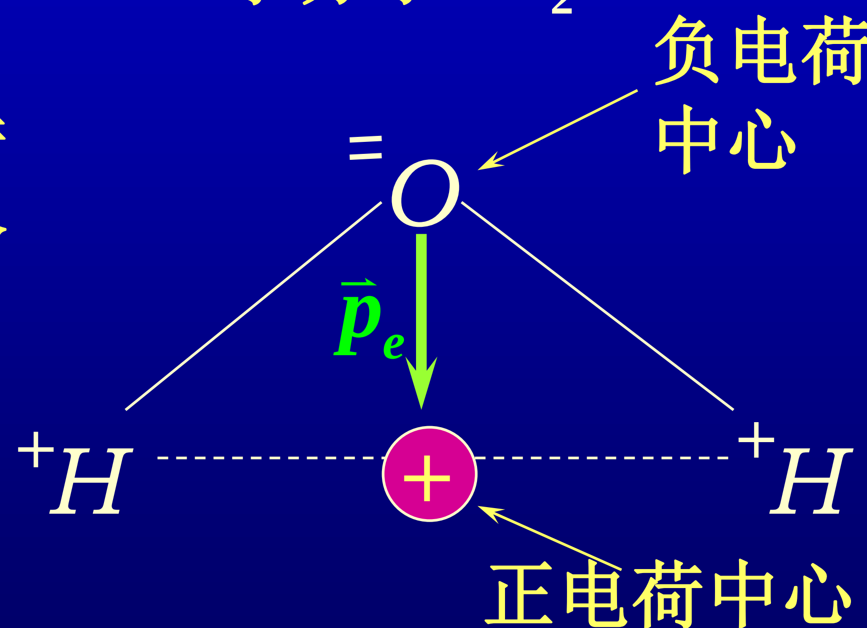
无极分子：分子正负电荷中心重合；

有极分子：分子正负电荷中心不重合。

甲烷分子 CH_4

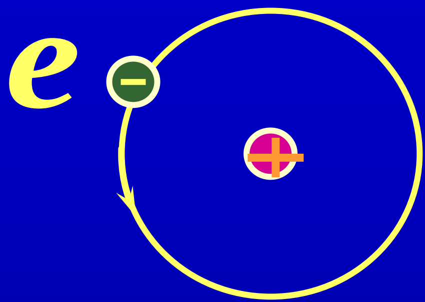


水分子 H_2O

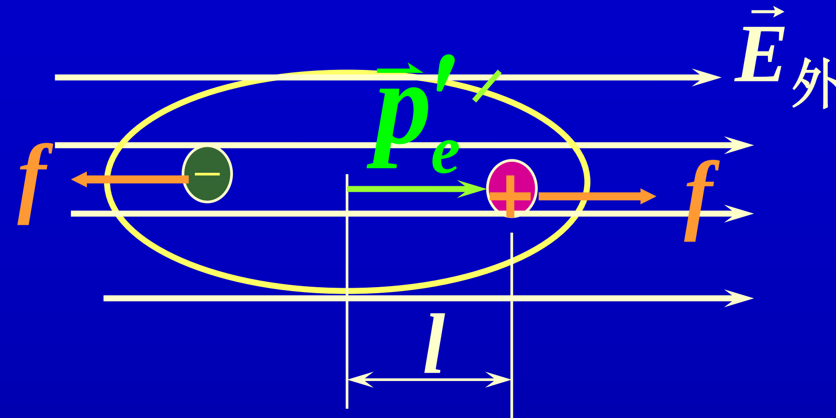


$\vec{p}_e = 0$　　$\vec{p}_e$ ——分子电偶极矩

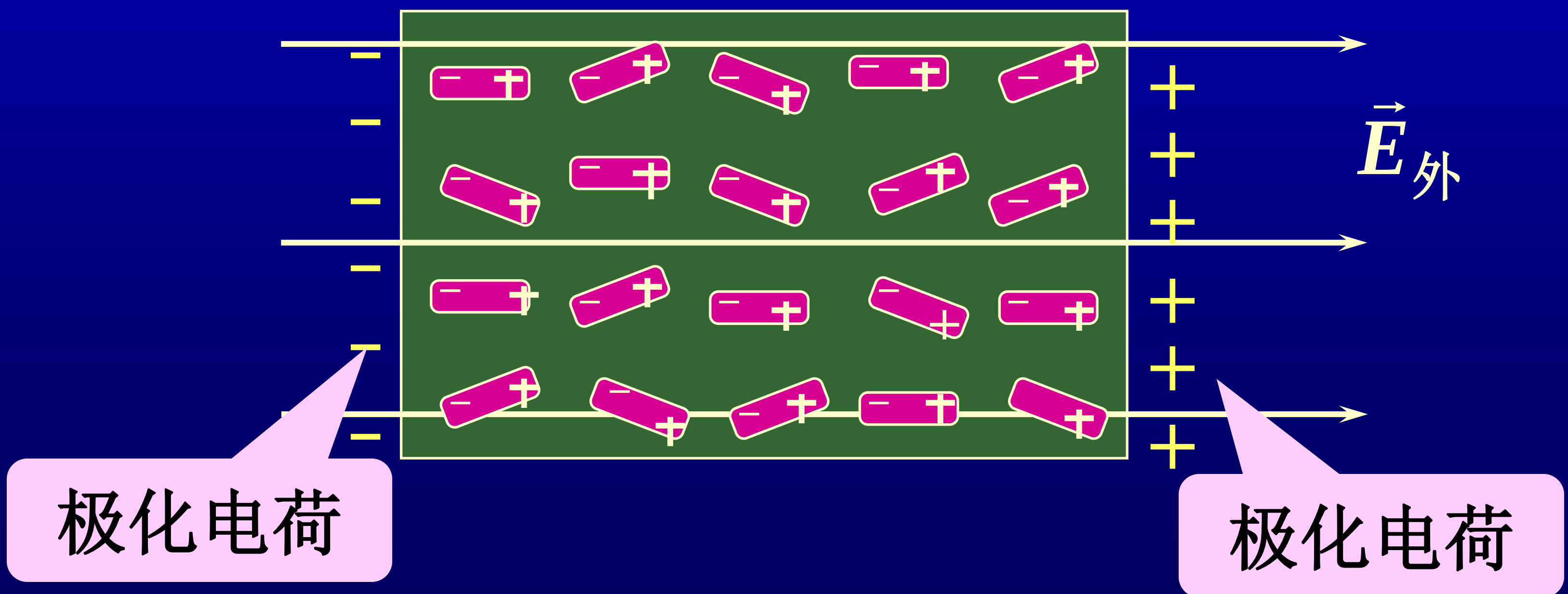
1. 无极分子的位移极化



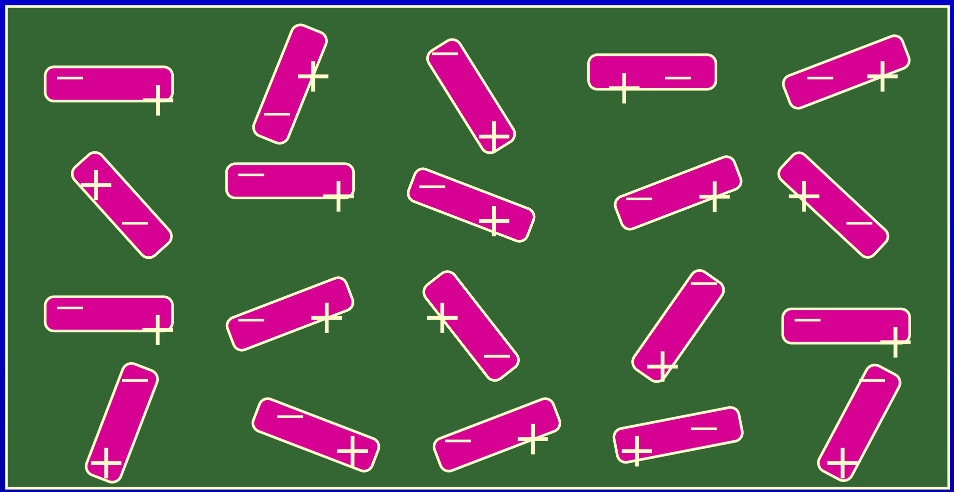
无外电场时 $\vec{p}_e = 0$



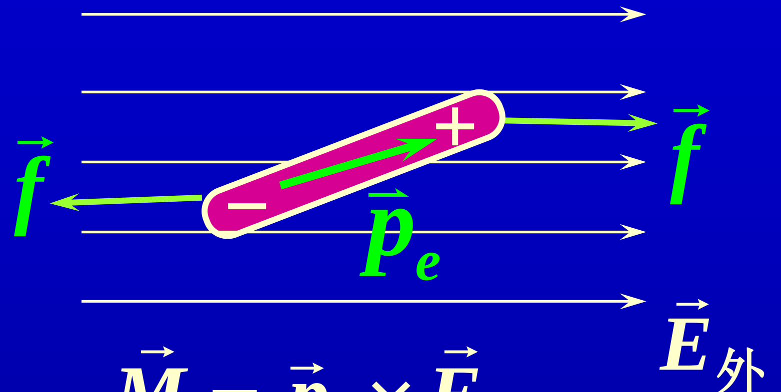
加上外电场后 $\vec{p}'_e \neq 0$



2. 有极分子的转向极化

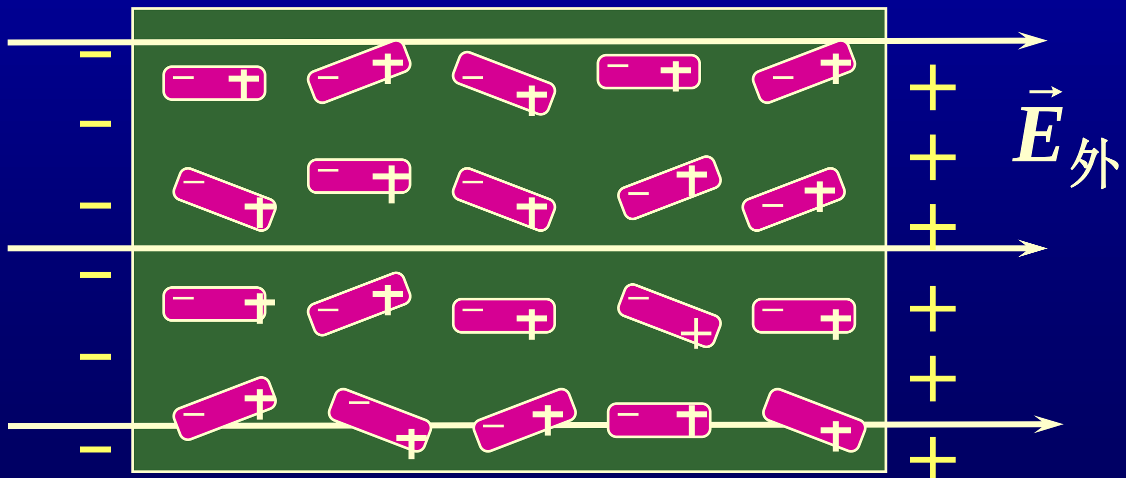


无外电场时 电矩取向不同



$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}_外$$

加上外场



$\vec{p}_e$转向外电场

两端面出现

极化电荷层

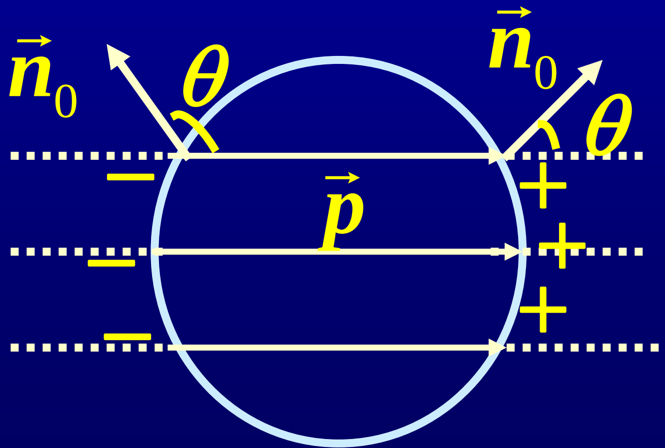
*五、电极化强度和极化电荷

1、电极化强度(矢量)

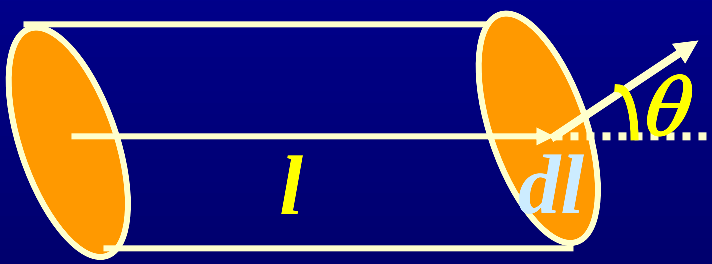
$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$$

<u>单位体积内分子电偶极矩的矢量和</u>

描述了电介质极化强弱，反映了电介质内分子电偶极矩排列的有序或无序程度。



表面极化电荷



极化电荷

2、极化电荷和极化强度关系

(1)均匀介质极化时，其表面上某点的极化电荷面密度，等于该处电极化强度在外法线上的分量。

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n$$

(2)在电场中，穿过任意闭合曲面的极化强度通量等于该闭合曲面内极化电荷总量的负值。

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum_S q_i'$$

$\sum_S q_i'$ — S面内包围的极化电荷总和

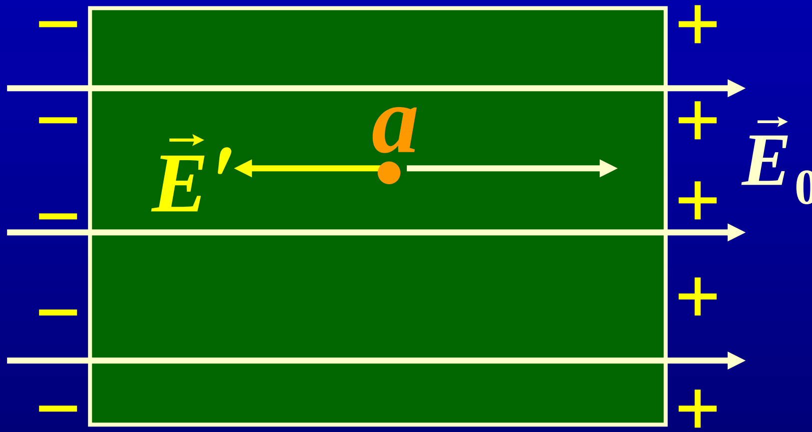
*六、电介质中的电场

$$\vec{P} = \alpha\vec{E} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

χ —电介质的极化率

$$\underbrace{\vec{E}}_{\text{介质中的场}} = \underbrace{\vec{E}_0}_{\text{自由电荷的场}} + \underbrace{\vec{E}'}_{\text{极化电荷的场}}$$

$\because \left|\vec{E}'\right| < \left|\vec{E}_0\right| \quad \therefore \left|\vec{E}\right| < \left|\vec{E}_0\right|$



无限大均匀电介质中

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

充满电场空间的各向同性均匀电介质内部的场强大小等于真空中场强的 $1/\varepsilon_r$ 倍，方向与真空中场强方向一致。

1、线性各向异性电介质

$$P_x=\varepsilon_0(\chi_{11}E_x+\chi_{12}E_y+\chi_{13}E_Z)$$

$$P_Y=\varepsilon_0(\chi_{21}E_x+\chi_{22}E_y+\chi_{23}E_Z)$$

$$P_z=\varepsilon_0(\chi_{31}E_x+\chi_{32}E_y+\chi_{33}E_z)$$

其中χ_{11}、χ_{12}、χ_{13}、$\cdots\chi_{33}$是9个常数,它表示张量在坐标中的9个分量，叫做电介质的极化率张量。

P_x,P_y,P_z与E_x,E_y,E_z 的关系是线性关系时，电介质叫做<u>线性电介质</u>。

2、铁电体

如：酒石酸钾钠（$NaKC_4H_4O_6$）及钛酸钡（$B_aT_iO_3$）

$\vec{P}$与$\vec{E}$的关系是非线性的，甚至$\vec{P}$与$\vec{E}$之间也不存在单值函数关系。

铁电体的性能和用途

（1）、由于铁电体具有电滞效应，经过极化的铁电体在剩余极化强度P_r和$-P_r$处是双稳态，可制成二进制的存储器。

（2）、铁电体的相对介电常数ε_r不是常数，随外加电场的变化。利用铁电体作为介质可制成容量大、体积小的电容器。

（3）、铁电体在居里点附近，材料的电阻率会随温度发生灵敏的变化，可以制成铁电热敏电阻器。

（4）、铁电体在强光作用下能产生非线性效应，常用做激光技术中的倍频或混频器件。

3、压电体

1880年居里兄弟发现石英晶体被外力压缩或拉伸时，在石英的某些相对表面上会产生等量异号电荷。

——压电效应

4、驻极体

极化强度并不随外场的撤除而消失。如：石蜡

七、有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i \quad =\frac{1}{\varepsilon_0}(\underbrace{\sum q}_{\text{自由电荷}}+\underbrace{\sum q_i'}_{\text{极化电荷}})$$

$$\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}=-\sum_S q_i'$$

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sum q-\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S})$$

$$\oint_S (\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\bullet d\vec{S}=\sum q$$

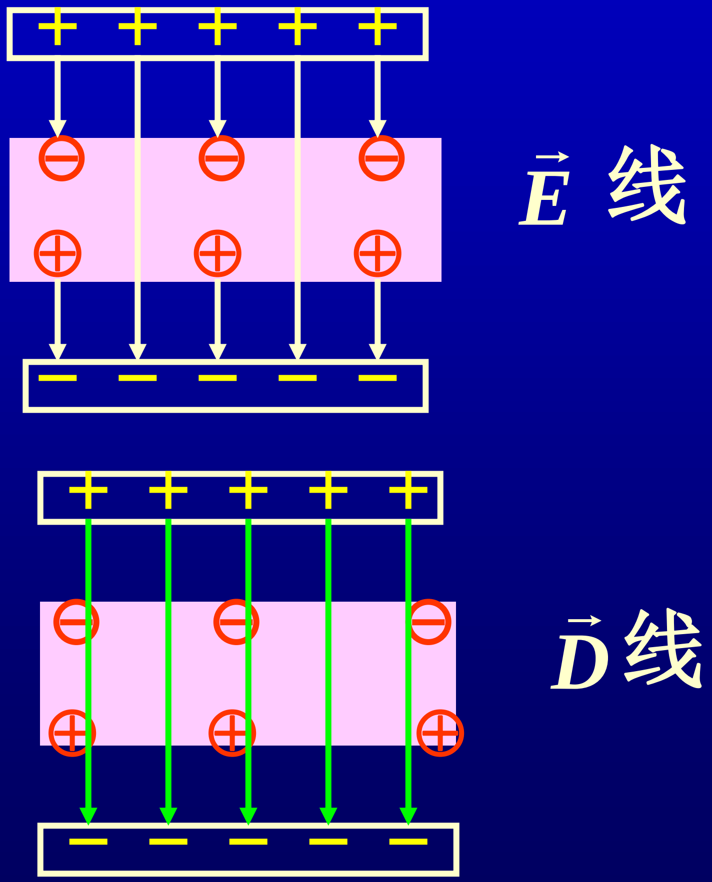
$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0\chi\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}$$ 电位移矢量

$$\vec{D}=\begin{cases}\varepsilon_0\vec{E} & \text{真空中}\\ \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} & \text{介质中}\end{cases}$$

介质中的高斯定理 $\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = \sum q$ 自由电荷

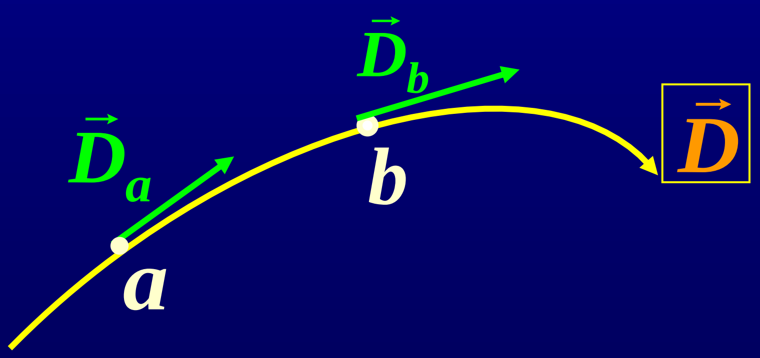
通过任意闭合曲面的电位移通量，等于该闭合曲面所包围的自由电荷的代数和。



电位移线

$\vec{D}$ 方向:切线

大小: $\dfrac{\text{电位移线条数}}{S_\perp}$



8-6 电容 电容器

电容——使导体升高单位电势所需的电量。

一、孤立导体的电容

孤立导体：附近没有其他导体和带电体

$q \propto U$ ⇒ $\dfrac{q}{U} = C$ 孤立导体的电容

孤立导体球的电容 $C=4\pi\varepsilon_0 R$

单位：法拉（F）、微法拉（μF）、皮法拉（pF）

$$1法拉 = 1库仑/伏特$$

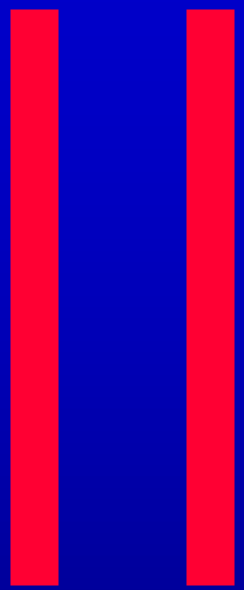
$$1F = 10^6 \mu F = 10^{12} pF$$

二、电容器及电容

1、电容器的电容

导体组合,使之不受周围导体的影响

——电容器



电容器的电容：当电容器的两极板分别带有等值异号电荷q时，电量q与两极板间相应的电势差u_A-u_B的比值。

$$C=\frac{q}{u_A-u_B}$$

将真空电容器充满某种电介质

$$C = \boxed{\varepsilon_r} C_0$$

电介质的相对电容率（相对介电常数）

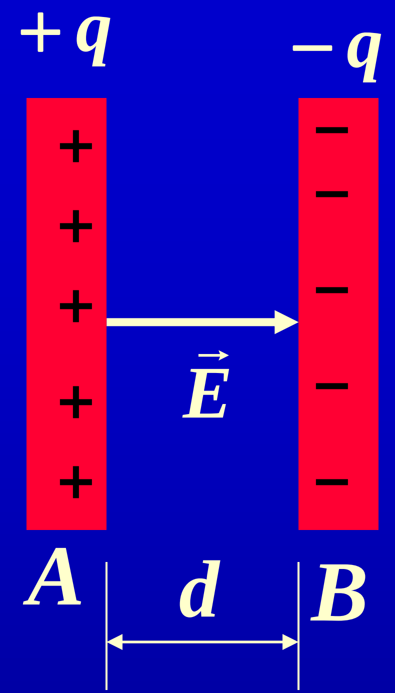
$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$　电介质的电容率（介电常数）

平行板电容器 $$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

同心球型电容器 $$C = \frac{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 S}{R_A - R_B} \quad (R_A > R_B)$$

同轴圆柱型电容器 $$C = \frac{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 l}{\ln(R_A / R_B)} \quad (R_A > R_B)$$

2、电容器电容的计算



平行板电容器　已知：S、d、ε_0

设A、B分别带电$+q$、$-q$

A、B间场强分布 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

电势差

$$u_A-u_B=\int_A^B \vec{E}\bullet d\vec{l}=Ed=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

由定义

$$C=\frac{q}{u_A-u_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

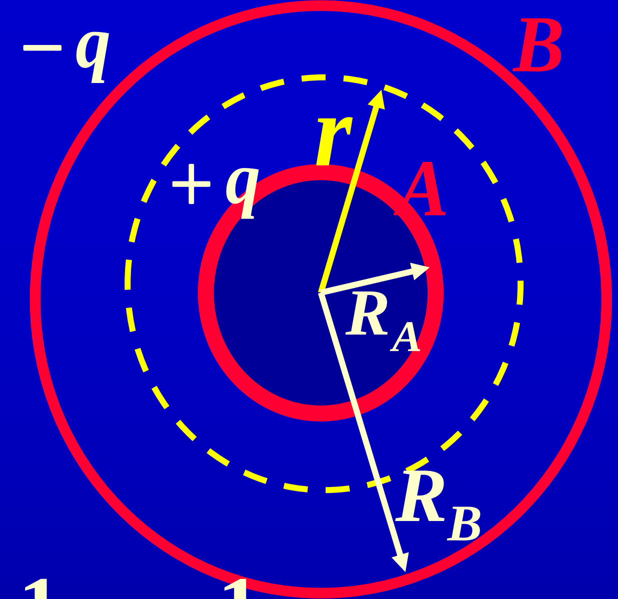
讨论

- C与 d S ε_0有关
- $S\uparrow$ $C\uparrow$；$d\downarrow$ $C\uparrow$
- 插入介质

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}\qquad C\uparrow$$

球形电容器

已知 R_A R_B



设+q、-q

场强分布 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

电势差

$$u_A - u_B = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

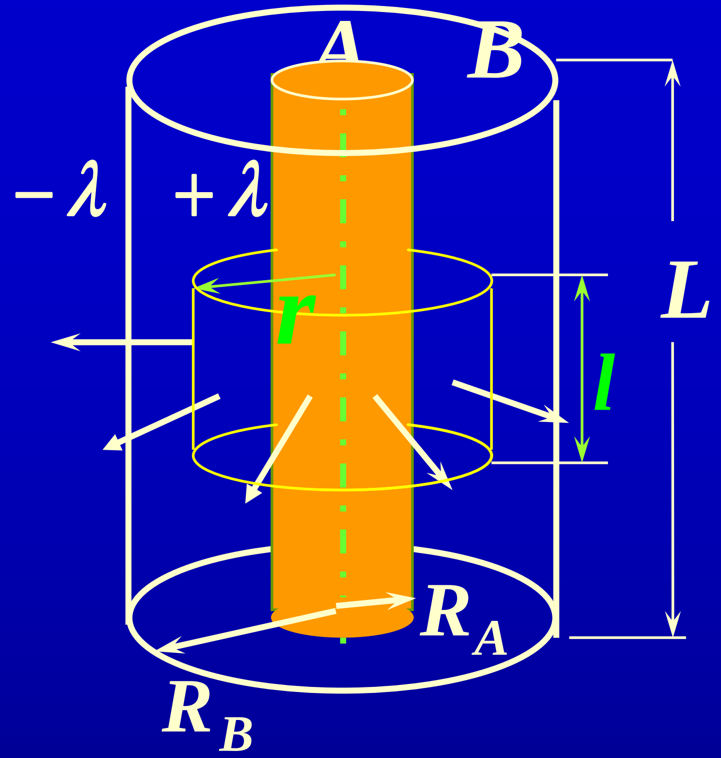
由定义 $C = \dfrac{q}{u_A - u_B} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$

讨论

$R_B >> R_A$ 或$R_B \to \infty$ $C = 4\pi\varepsilon_0 R_A$

孤立导体的电容

圆柱形电容器



已知: $R_A \quad R_B \quad L$

$L >> R_B - R_A$

设$\pm\lambda$

场强分布 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

电势差

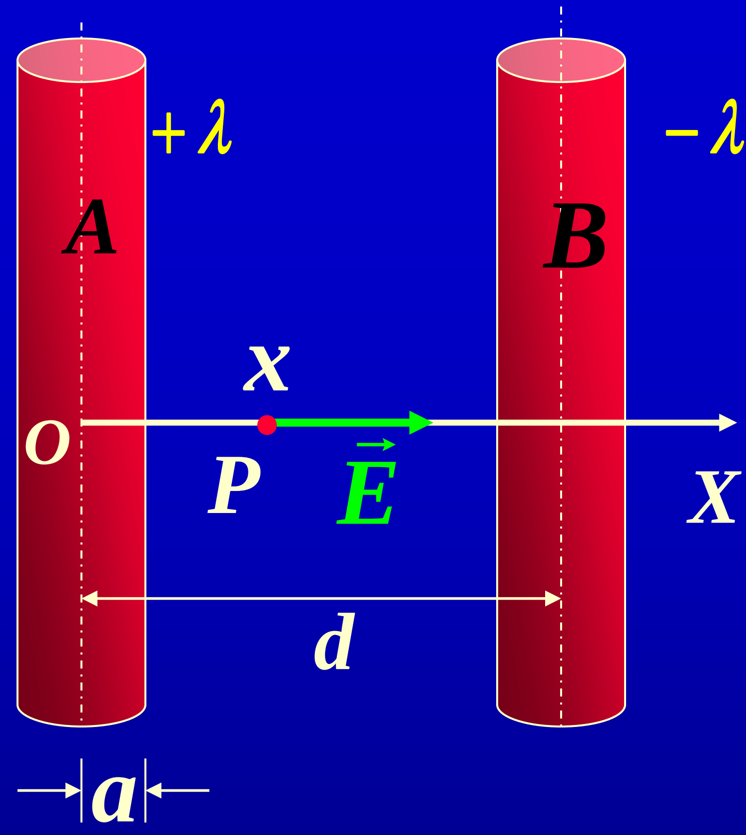
$$u_A - u_B = \int_A^B E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{R_B}{R_A}$$

由定义 $C = \dfrac{q}{u_A - u_B} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\dfrac{R_B}{R_A}}$

例　平行无限长直导线

已知:a、d、$d >> a$

求:单位长度导线间的C



解:　设$\pm\lambda$

场强分布

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d - x)}$$

导线间电势差

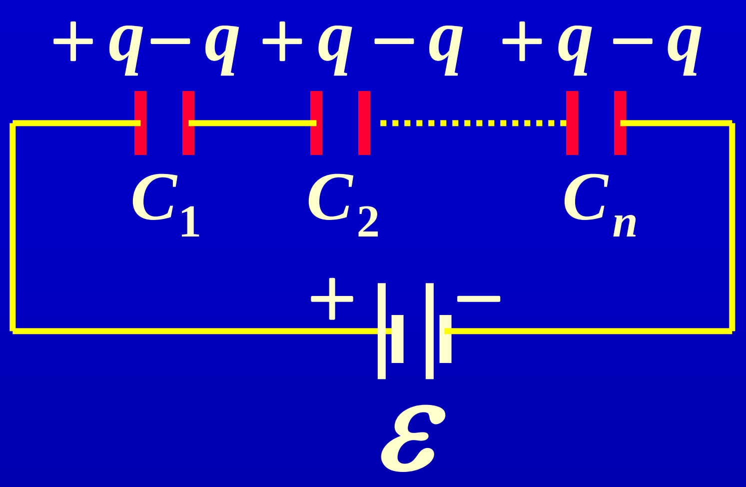
$$u_A - u_B = \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_a^{d-a} E \cdot dx$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln\frac{d-a}{a} \approx \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln\frac{d}{a}$$

电容

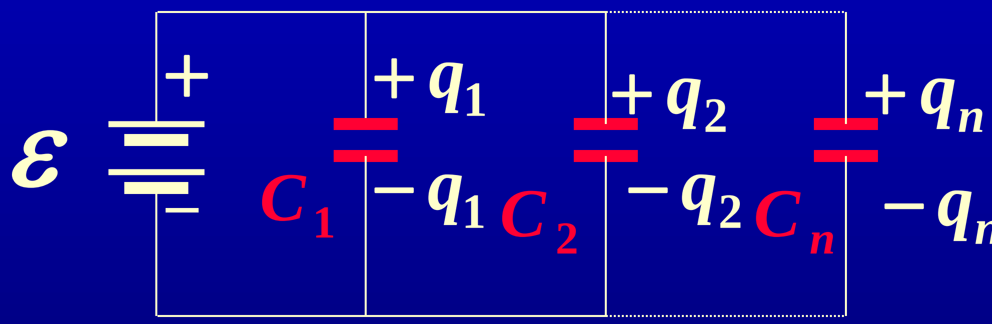
$$C = \frac{\lambda}{u_A - u_B} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}$$

*三、电容器的串并联



串联等效电容

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{C_n}$$



并联等效电容

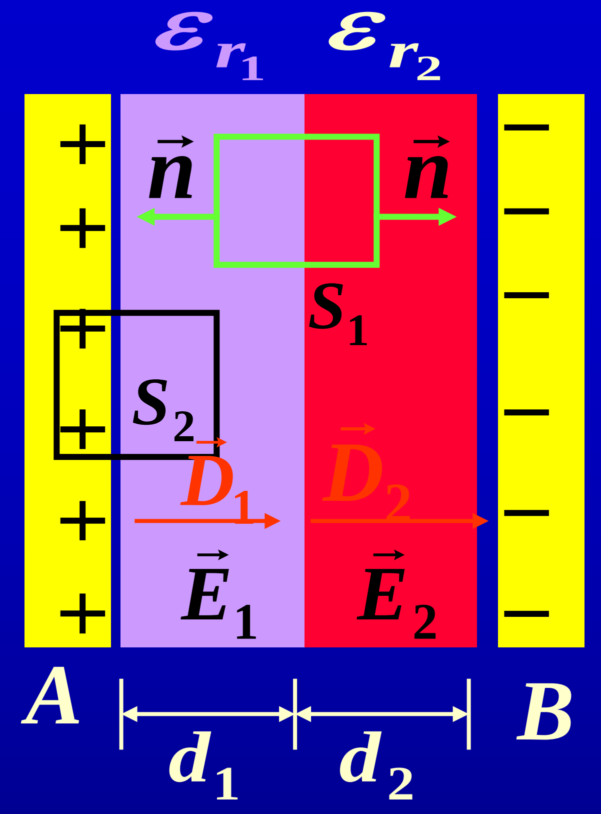
$$C=C_1+C_2+\ldots\ldots+C_n$$

*四、范德格拉夫起电机

例1. 已知:导体板 S $\pm\sigma$

介质 ε_{r_1} ε_{r_2} d_1 d_2

求:各介质内的 $\vec{D}$ $\vec{E}$



解:设两介质中的 $\vec{D}$ $\vec{E}$ 分别为

$\vec{D}_1$ $\vec{E}_1$ $\vec{D}_2$ $\vec{E}_2$

由高斯定理

$$\oint_{S_1} \vec{D} \bullet d\vec{S} = -D_1 \Delta S + D_2 \Delta S = 0$$

$$\therefore D_1 = D_2$$

$$\oint_{S_2} \vec{D} \bullet d\vec{S} = D_1 \Delta S + 0 = \sigma \Delta S$$

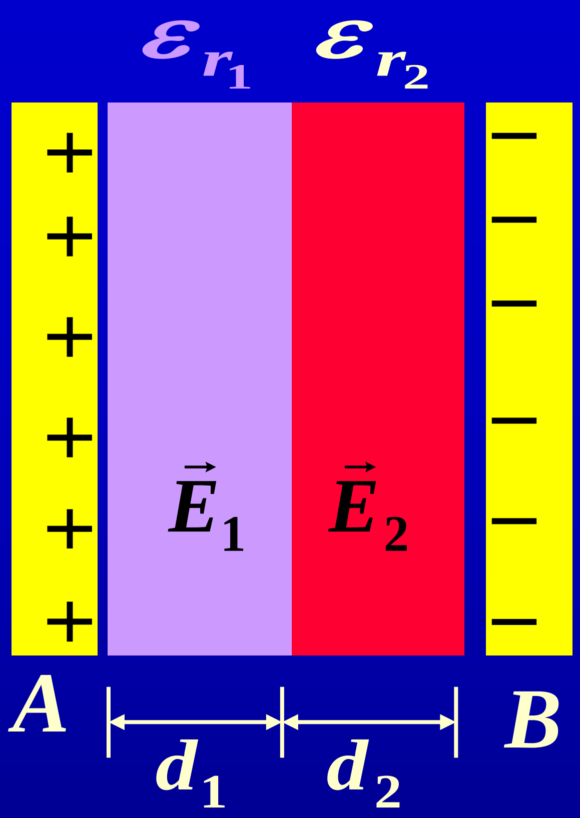
$$\therefore D_1 = \sigma \qquad D = \sigma$$

由 $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E_1$ 得 $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}}$ $E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}}$

例2. 平行板电容器。

已知d_1、ε_{r1}、d_2、 ε_{r2}、S

求:电容C



解：设两板带电$\pm\sigma$

场强分布 $E_1=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}$ $E_2=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}$

电势差

$$u_A-u_B=E_1d_1+E_2d_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r_1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r_2}}\right)$$

电容

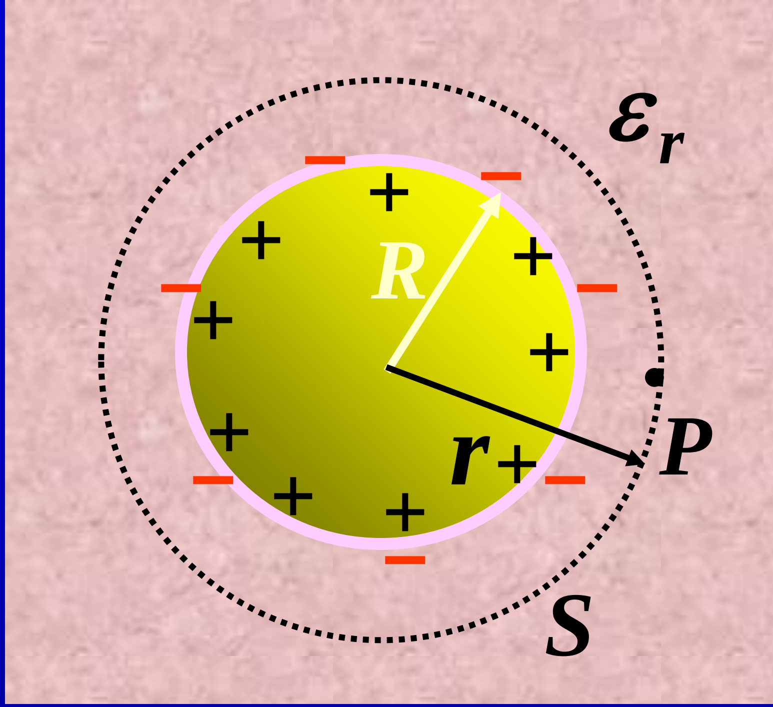
$$C=\frac{q}{u_A-u_B}=\frac{\sigma S}{\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{d_1}{\varepsilon_{r_1}}+\dfrac{d_2}{\varepsilon_{r_2}}\right)}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}S}{d_1\varepsilon_{r_2}+d_2\varepsilon_{r_1}}$$

例3 .已知:导体球 R Q

介质 ε_r

求:1. 球外任一点的 $\vec{E}$

2. 导体球的电势 u



解: 过P点作高斯面得

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = Q \qquad D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

电势

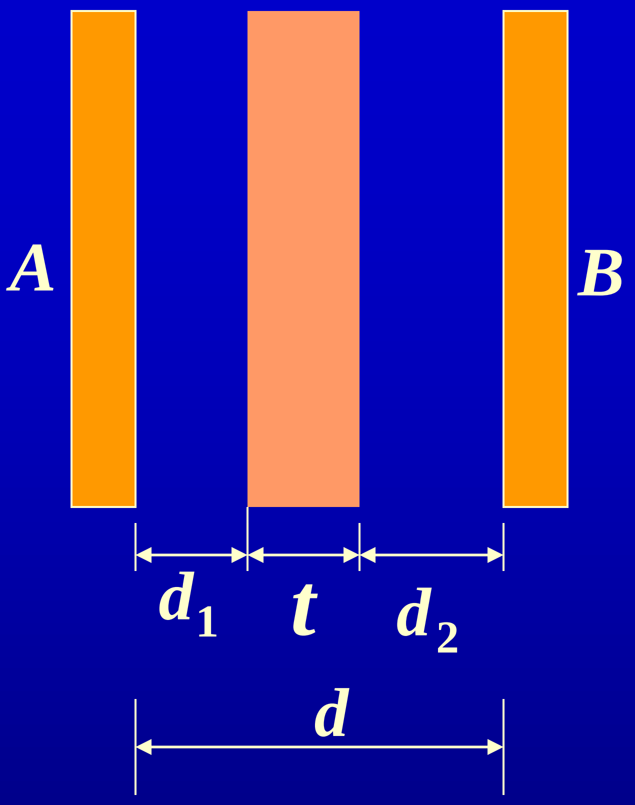
$$u = \int_R^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

例4.平行板电容器

已知 :S、d插入厚为t的铜板

求： C



设±q

场强分布

$$E = 0 \qquad E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

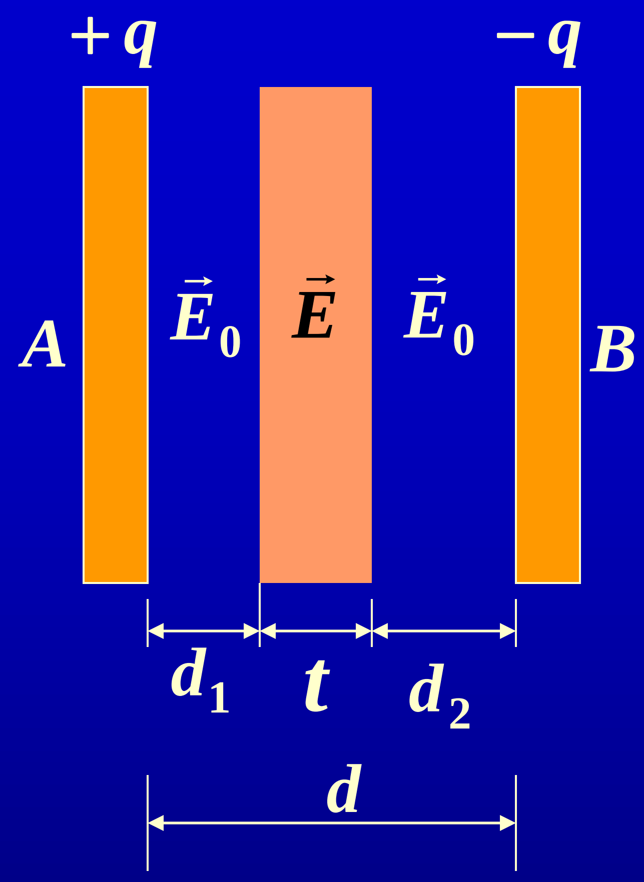
电势差

$$u_A - u_B = E_0 d_1 + Et + E_0 d_2$$

$$= E_0(d_1 + d_2)$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0 S}(d_1 + d_2)$$

$$C = \frac{q}{u_A - u_B} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + d_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - t}$$



8-7 电流 稳恒电场 电动势

一、电流 电流密度

电流—— 大量电荷有规则的定向运动形成电流。

电流强度—— 单位时间内通过某截面的电量。

大小： $I = \dfrac{dq}{dt}$ 单位（SI）：安培（A）

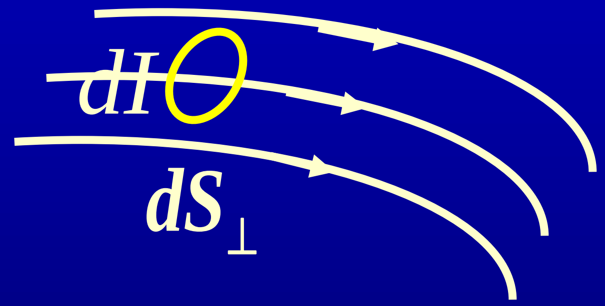
方向：规定为正电荷运动方向。

电流强度只能从整体上反映导体内电流的大小。当遇到电流在粗细不均匀的导线或大块导体中流动的情况时，导体的不同部分电流的大小和方向都可能不一样。有必要引入电流密度矢量。

电流密度

当通过任一截面的电量不均匀时，用电流强度来描述就不够用了，有必要引入一个描述空间不同点电流的大小的物理量。

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}\vec{n}$$



导体中某点的电流密度，数值上等于通过该点场强方向垂直的单位截面积的电流强度。

方向：该点场强的方向。

电流密度和电流强度的关系

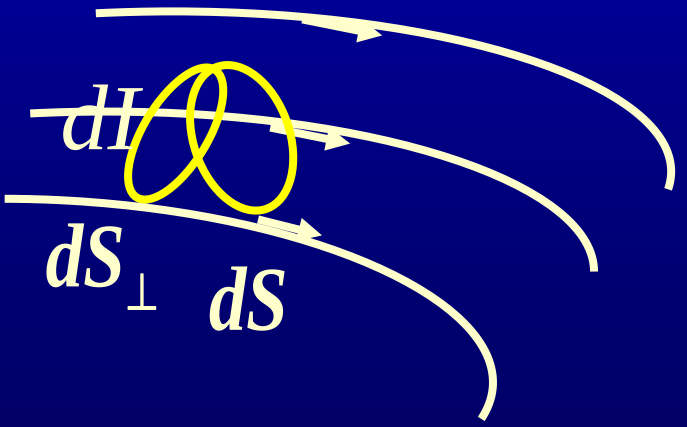
$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}\vec{n}$$

$$dI = jdS_{\perp} = j\cos\theta dS = \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

穿过某截面的电流强度等于电流密度矢量穿过该截面的通量。

电流强度是电流密度的通量。



二、稳恒电场

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}}$$

——电流的连续性方程

稳恒电流：导体内各处的电流密度都不随时间变化

对稳恒电流有： $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

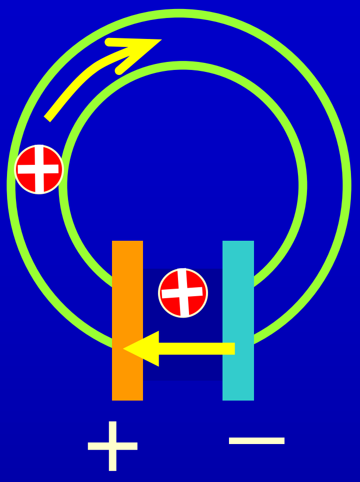
在稳恒电流情况下，导体内电荷的分布不随时间改变。不随时间改变的电荷分布产生不随时间改变的电场，这种电场称稳恒电场。

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场	稳恒电场
产生电场的电荷始终固定不动	电荷分布不随时间改变但伴随着电荷的定向移动
静电平衡时，导体内电场为零，导体是等势体	导体内电场不为零，导体内任意两点不是等势
电场有保守性，它是保守场，或有势场	电场有保守性，它是保守场，或有势场
维持静电场不需要能量的转换	稳恒电场的存在总要伴随着能量的转换

三、电动势

非静电力： 能把正电荷从电势较低点（如电源负极板）送到电势较高点（如电源正极板）的作用力称为非静电力，记作F_k。



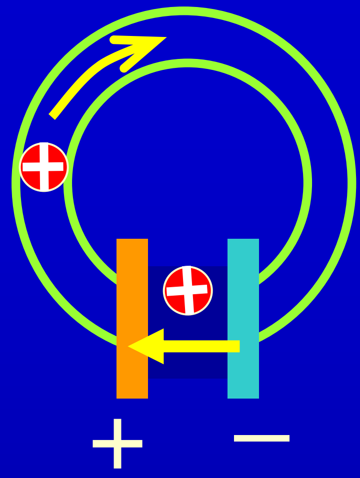
非静电场强 $$\boxed{E_k = \frac{F_k}{q}}$$

提供非静电力的装置就是电源。

静电力欲使正电荷从高电位到低电位。

非静电力欲使正电荷从低电位到高电位。

电动势ε： 把单位正电荷从负极经电源内部移到正极时，电源中非静电力所做的功。



$$\boxed{\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \bullet d\vec{l}}$$

方向：自负极经电源内部到正极的方向为正方向。

电源外部E_k为零，$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \bullet dl = \oint_L \vec{E}_k \bullet dl$

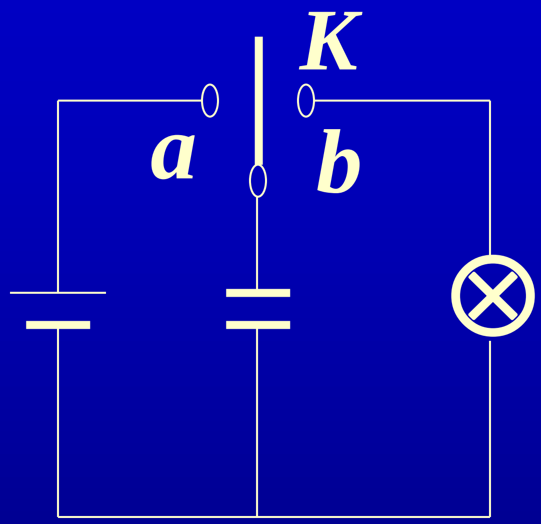
单位正电荷绕闭合回路一周时，电源中非静电力所做的功。

电动势描述电路中非静电力做功本领

电势差描述电路中静电力做功

8-8　电场的能量

一、带电系统的能量



开关倒向*a*,电容器充电。

开关倒向*b*,电容器放电。

灯泡发光 ⟵ 电容器释放能量 ⟵ 电源提供

计算电容器带有电量Q，相应电势差为U时所具有的能量。

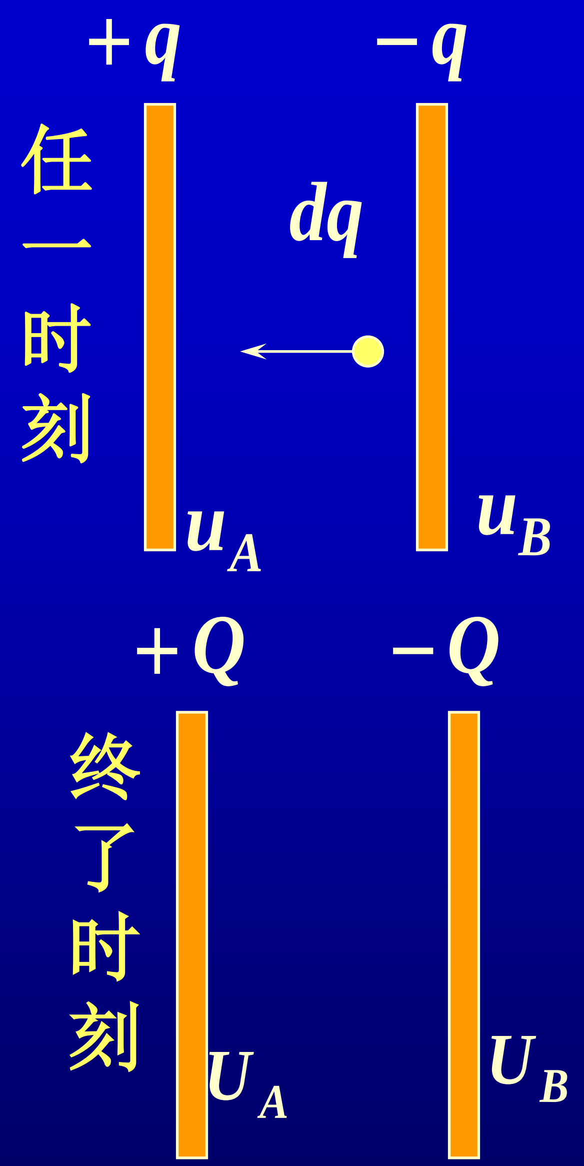
$$u_A - u_B = u = \frac{q}{C}$$

$$B \xrightarrow{dq} A$$

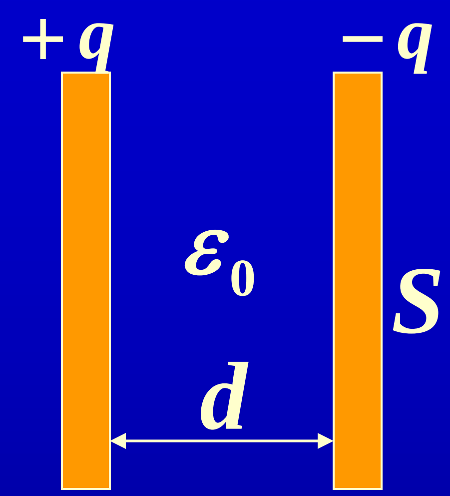
外力做功 $dW = dA = u\,dq = \dfrac{q}{C}dq$

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C} =$$ 电容器的电能

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$



二、电场能量



1、对平行板电容器

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d}\right)(Ed)^2$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(Sd)=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$$

电场存在的空间体积

<u>电场能量体密度</u>——描述电场中能量分布状况

2、电场中某点处单位体积内的电场能量

对任一电场，电场强度非均匀

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

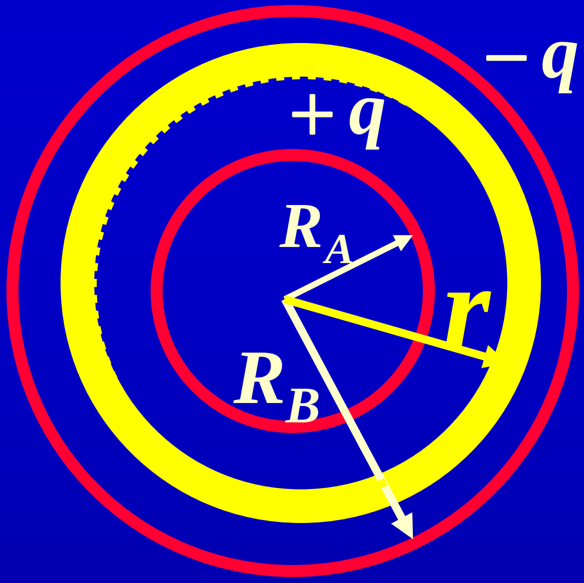
$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}$$

$$dW_e = w_e dV$$

$$W = \int_V dW = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = \int_V \frac{1}{2} DE dV$$

例： 计算球形电容器的能量

已知R_A、R_B、$\pm q$



解：场强分布 $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

取体积元 $dV=4\pi r^2 dr$

$$dW=wdV=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

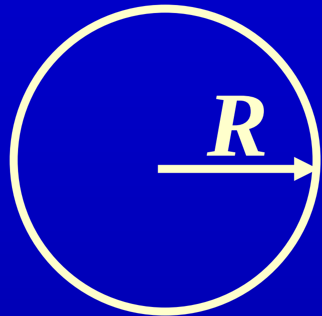
能量 $$W=\int_V dW=\int_{R_A}^{R_B}\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\dfrac{R_A R_B}{R_B-R_A}}=\frac{1}{2C}q^2$$

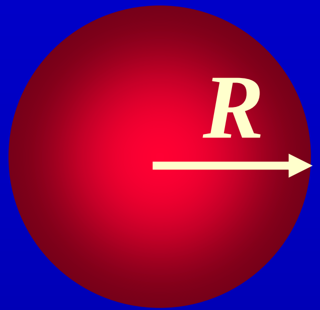
课堂讨论

比较均匀带电球面和均匀带电球体所储存的能量。

q



q



$$E=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

$$E=\begin{cases}\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

$$W=\int_0^R\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\cdot 4\pi r^2dr+\int_R^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\cdot 4\pi r^2dr$$

$$W_{球面}<W_{球体}$$