§8-4　稳恒磁场的高斯定理与安培环路定理

一、稳恒磁场的高斯定理

由磁感应线的闭合性可知，对任意闭合曲面，穿入的磁感应线条数与穿出的磁感应线条数相同，因此，通过任何闭合曲面的磁通量为零。

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0}$$

高斯定理的积分形式

穿过任意闭合曲面S的总磁通必然为零，这就是稳恒磁场的高斯定理。

激发静电场的场源（电荷）是电场线的源头或尾闾，所以静电场是属于发散式的场，可称作有源场；而磁场的磁感线无头无尾，恒是闭合的，所以磁场可称作无源场。

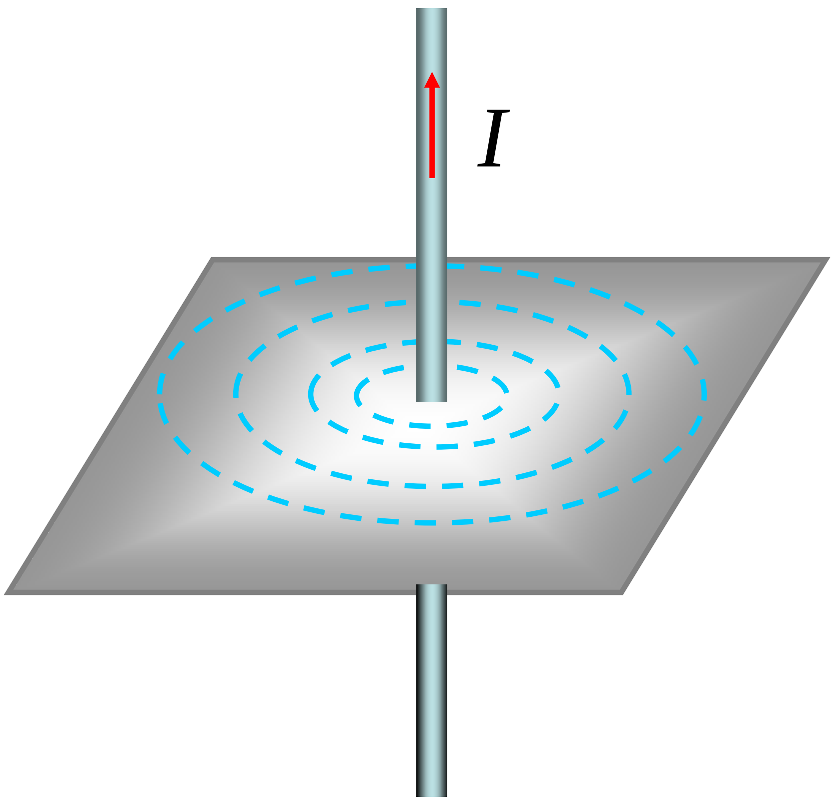
在静电场中,由于自然界有单独存在的正、负电荷,因此通过一闭合曲面的电通量可以不为零,这反映了静电场是有源场。而在磁场中,磁力线的连续性表明,像正、负电荷那样的磁单极是不存在的,磁场是无源场。

1913年英国物理学家狄拉克曾从理论上预言磁单极子的存在，但至今未被观察到。

二、安培环路定理

在恒定电流的磁场中，磁感应强度 ***B*** 矢量沿任一闭合路径 ***L***的线积分（即环路积分），等于什么?

1. 长直电流的磁场



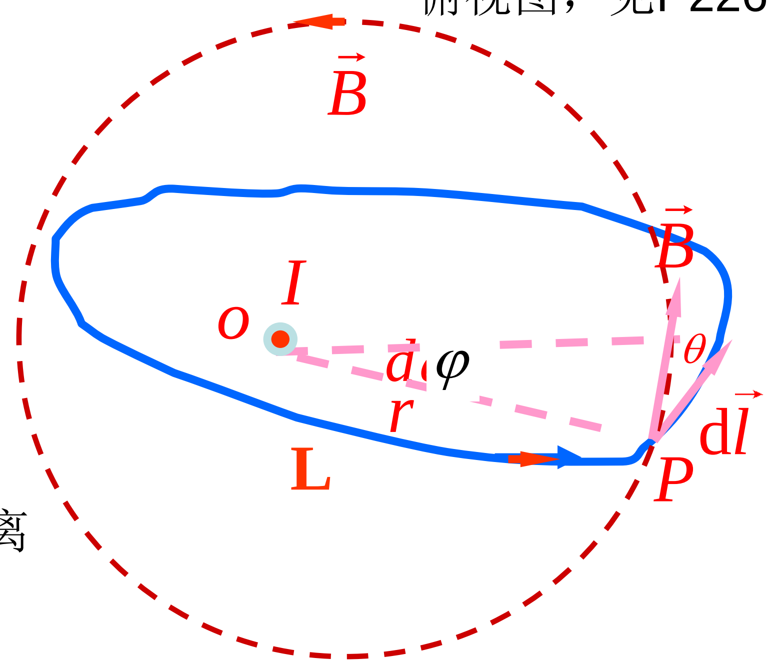
类比：静电场中，$\oint \vec{E} \bullet \vec{dl} = 0$，我们知道静电场是保守力场，并引入电势这个物理量来描述静电场

俯视图，见P226

在垂直于导线的平面内任作的环路上取一点，到电流的距离为r，磁感应强度的大小：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

某点到载流导线的距离



此圆应以0为圆心

由几何关系得：

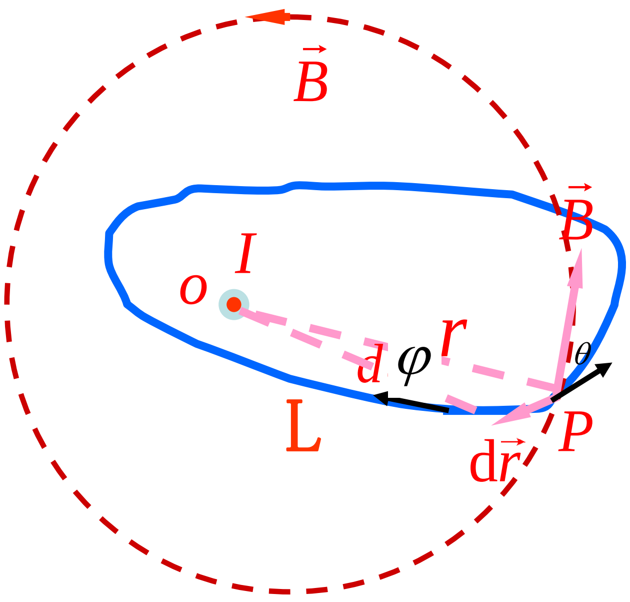
$$\mathrm{d}l\cdot\cos\theta=r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L B\cos\theta\,\mathrm{d}l=\oint_L Br\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}r\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\mu_0 I$$

如果沿同一路径但改变绕行方向积分：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos(\pi-\theta)\,\mathrm{d}l$$

$$= \oint_L -B\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$= -\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\mu_0 I$$

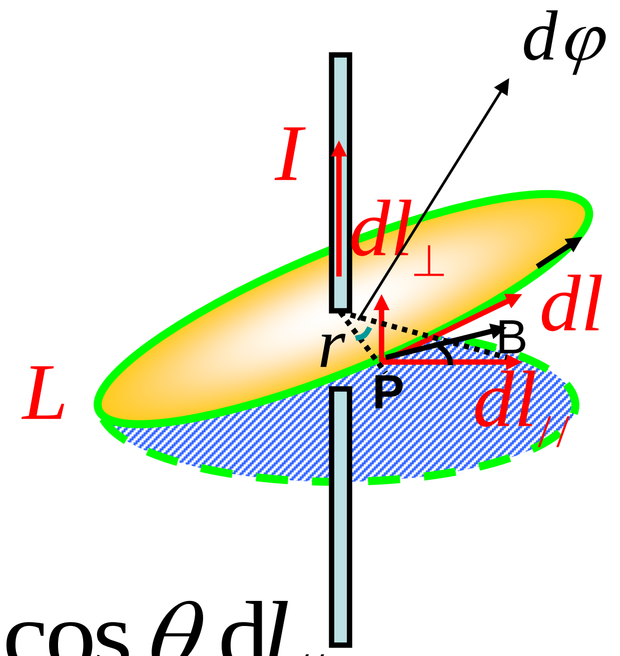
结果为负值！

若认为电流为$-I$ 则结果可写为 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(-I)$

把式中的负号和电流流向联系在一起，$-I$可认为对闭合曲线的绕行方向来讲，此时电流取负值

上页 下页 返回 退出

如果闭合曲线不在垂直于导线的平面内：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}_\perp + \mathrm{d}\vec{l}_{//})$$

$$= \oint_L B\cos 90^\circ\, \mathrm{d}l_\perp + \oint_L \underline{B\cos\theta\, \mathrm{d}l_{//}}$$

$$= 0 + \oint_L B\underline{r\,\mathrm{d}\varphi}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\, r\,\mathrm{d}\varphi$$

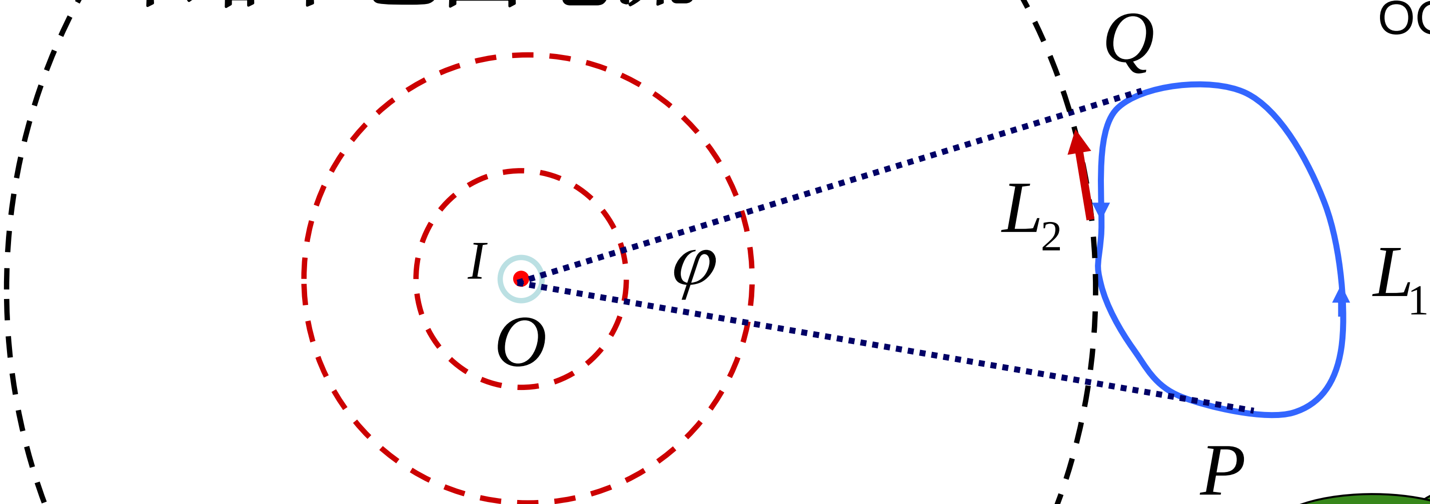
$$= \mu_0 I$$

结果一样！

将L上每一段线元 $\mathrm{d}\vec{l}$ 分解为在垂直于直导线平面内的分矢量 $\mathrm{d}\vec{l}_{//}$ 与垂直于此平面的分矢量 $\mathrm{d}\vec{l}_\perp$

环路不包围电流

从O点作闭合曲线的两条切线OP和OQ



结果为零！

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} \mathrm{d}\varphi - \int_{L_2} \mathrm{d}\varphi\right) = 0$$

表明：闭合曲线不包围电流时，磁感应强度矢量的环流为零。

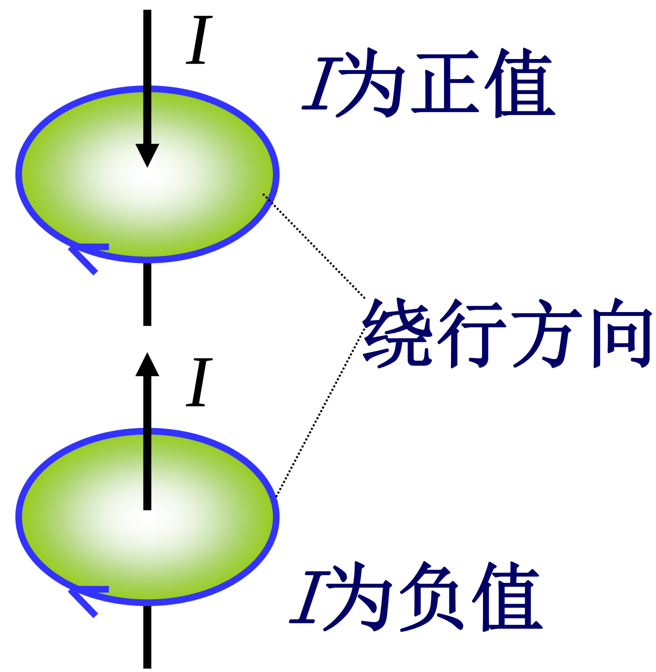
上述结论虽是从长直载流导线磁场得来，却具普遍性

安培环路定理

在磁场中，沿任一闭合曲线 $\vec{B}$ 矢量的线积分（也称 $\vec{B}$ 矢量的环流），等于真空中的磁导率 μ_0 乘以穿过以这闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和。

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I}$$

电流 I 的正负规定：积分路径的绕行方向与电流成右手螺旋关系时，电流 I 为正值；反之 I 为负值。



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

仅适用于闭合的载流导线

物理意义：

$\vec{B}$ … 空间所有电流共同产生的磁场

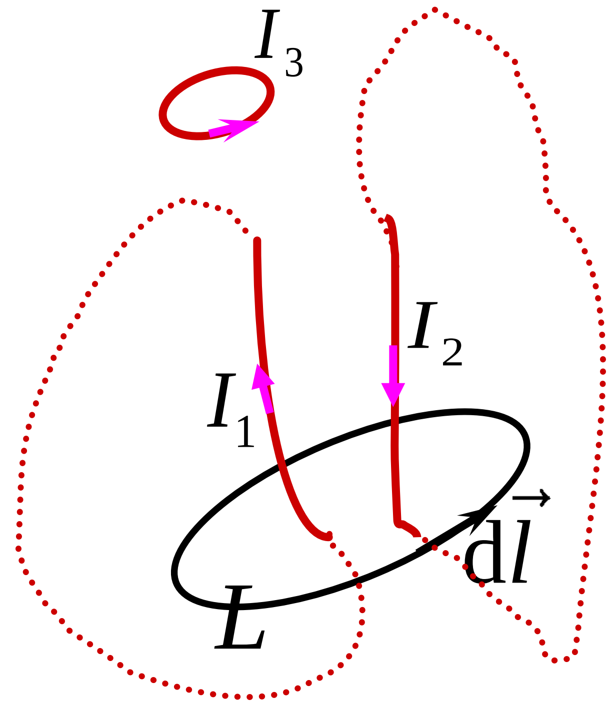
L … 在场中任取的一闭合线，任意规定一个绕行方向（不影响结果）

$\mathrm{d}\vec{l}$ … L上的任一线元

I … 空间中的电流

$\sum I$ … 环路所包围的所有电流的代数和

这个正负是按照绕行方向和右手螺旋定则产生的



几点注意：

- 任意形状稳恒电流，安培环路定理都成立。
- 环流虽然仅与所围电流有关，但磁场却是所有电流在空间产生磁场的叠加。也就是说积分的计算结果仅与环内电流有关，但B是所有的电流产生的结果。
- 安培环路定理仅仅适用于恒定电流产生的恒定磁场，恒定电流本身总是闭合的，因此安培环路定理仅仅适用于闭合的载流导线。
- 静电场的高斯定理说明静电场为有源场，环路定理又说明静电场无旋；稳恒磁场的环路定理反映稳恒磁场有旋，高斯定理又反映稳恒磁场无源。

静电场	稳恒磁场
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$ 磁场力不是保守力
电场有保守性，它是保守场，或有势场	磁场没有保守性，它是非保守场，或无势场
$\oint_s \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$	$\oint \vec{B} \bullet d\vec{S} = 0$
电力线起于正电荷、止于负电荷。 静电场是有源场	磁力线闭合、无自由磁荷 磁场是无源场

三、安培环路定理的应用

应用安培环路定理的解题步骤：

(1) 分析磁场的对称性；

(2) 过场点选择适当的路径，使得 $\vec{B}$ 沿此环路的积分易于计算：$\vec{B}$ 的量值恒定，$\vec{B}$ 与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 的夹角处处相等；

(3) 求出环路积分；

(4) 用右手螺旋定则确定所选定的回路包围电流的正负，最后由磁场的安培环路定理求出磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小。

利用安培环路定理求磁场的适用范围：在磁场中能否找到上述的环路，取决于该磁场分布的对称性，而磁场分布的对称性又来源于电流分布的对称性。因此，只有下述几种电流的磁场，才能够利用安培环路定理求解。

1.电流的分布具有无限长轴对称性

2.电流的分布具有无限大面对称性

3.各种圆环形均匀密绕螺绕环

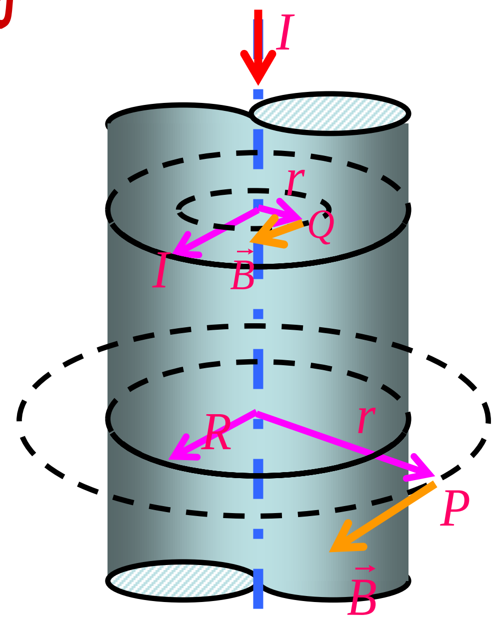
利用安培环路定理求磁场的基本步骤

1.首先用磁场叠加原理对载流体的磁场作对称性分析；

2.根据磁场的对称性和特征，选择适当形状的环路；

3.利用公式求磁感强度。

1. 长直圆柱形载流导线内外的磁场



设圆柱电流呈轴对称分布，导线可看作是无限长的，磁场对圆柱形轴线具有对称性。

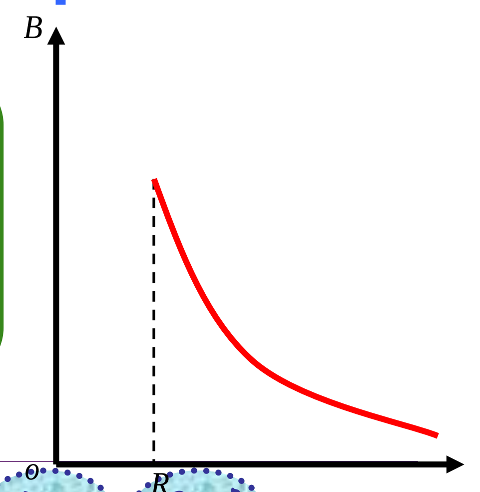
$$\oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = B2\pi r$$

当 $r > R$

$$B2\pi r = \mu_0 I$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}}$$

长圆柱形载流导线外的磁场与长直载流导线激发的磁场相同！



$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B2\pi r$$

当 $r < R$，且电流均匀分布在圆柱形导线表面层时

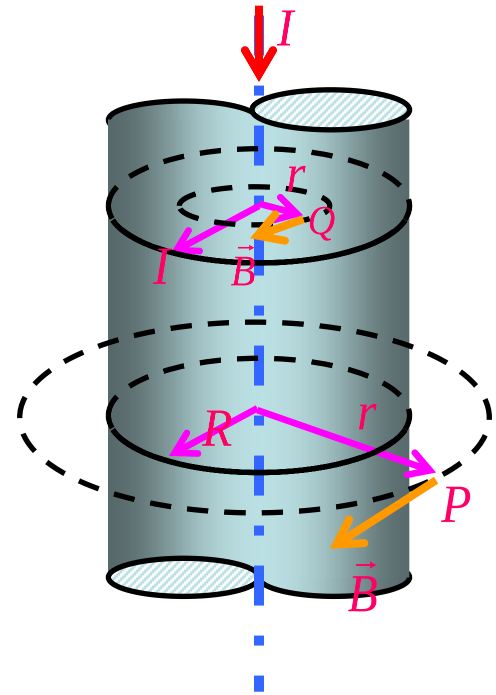
$$B2\pi r = 0 \qquad B = 0$$

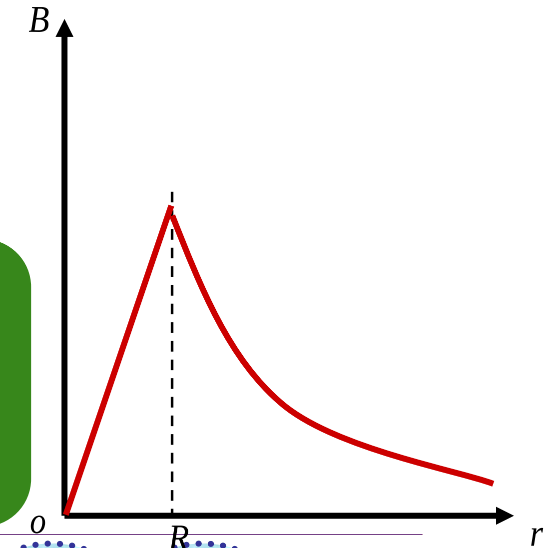
当 $r < R$，且电流均匀分布在圆柱形导线截面上时

$$B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{R^2}}$$

在圆柱形载流导线内部，磁感应强度和离开轴线的距离 r 成正比！



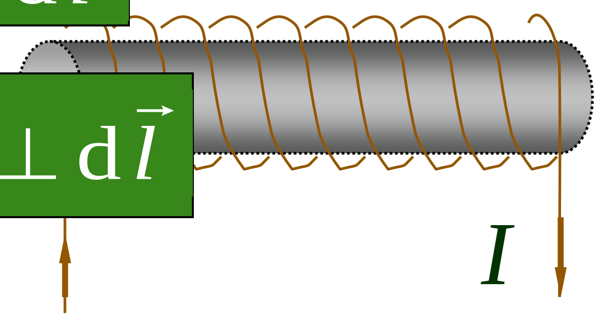


电场、磁场中典型结论的比较

		电荷均匀分布	电流均匀分布
长直线		$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
长直圆柱面	内	$E=0$	$B=0$
	外	$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
长直圆柱体	内	$E=\dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$	$B=\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$
	外	$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

2. 载流长直螺线管内的磁场

设螺线管长度为l, 共有N匝



$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{ab} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{bc} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{cd} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{da} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

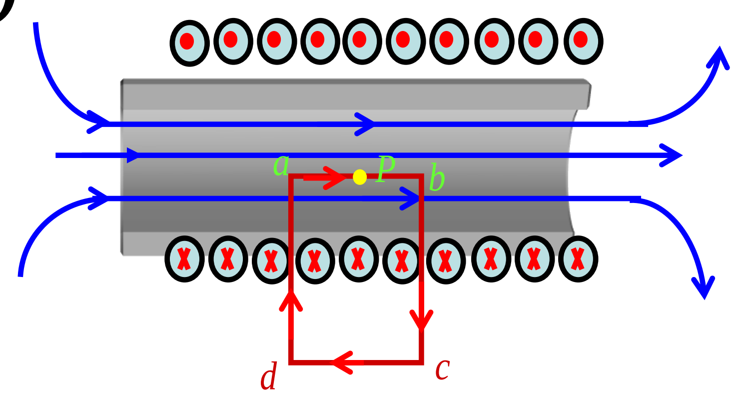
$\vec{B}\perp \mathrm{d}\vec{l}$

$\vec{B}=0$

$\vec{B}\perp \mathrm{d}\vec{l}$

$$= \int_{ab} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot \overline{ab}$$

$$= \mu_0 \overline{ab} nI$$



$$\boxed{\therefore B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{l} I}$$

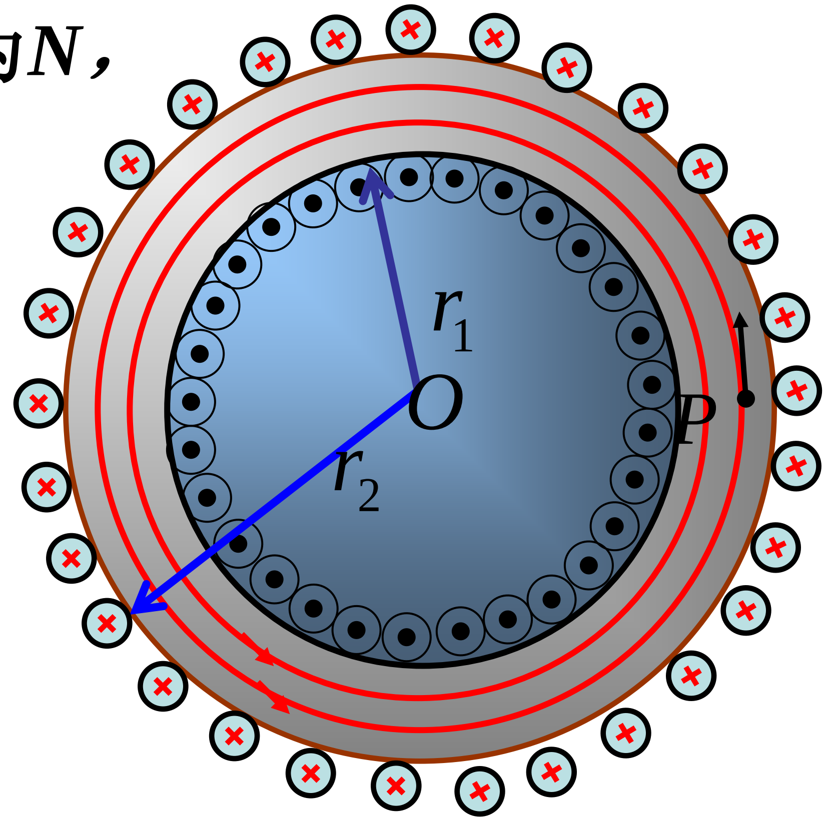
n表示每单位长度含有多少匝线圈

上页 下页 返回 退出

3. 载流螺绕环内的磁场

许多单个环形电流磁感应强度叠加

设环上线圈的总匝数为***N***，电流为***I***。



$$\because \vec{B} /\!/ \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\oint_L \mathrm{d}l$$

$$= B2\pi r$$

$$= \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \xrightarrow{r_2 - r_1 << r} \boxed{B = \mu_0 nI}$$