1.1

4. 讨论下列函数的有界性：

(1) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$； (2) $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$. (1)、(2)$f(x)$均在$\mathbf{R}$上有界.

1.5

6. 设有收敛数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，若从某项起，有

$$x_n \geqslant y_n \quad (n \geqslant N, N \in \mathbf{N}_+),$$

且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$，证明：$A \geqslant B$. 略.

1.6

5. 设数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求此极限.

6. 设数列$\{x_n\}$满足：$x_1\in(0,\pi)$，$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求此极限.

5. 提示：数列$\{x_n\}$单调增加且有界，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

6. 提示：数列$\{x_n\}$单调减少且有界，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

1.8

8. 设$f(x)$对任意实数x,y，有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，且$f(x)$在$x=0$连续，证明：$f(x)$在$\mathbf{R}$上连续. 略.

1.9

4. 求下列极限：(9) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{2x}}-1)$；(10) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$. (9) $\frac{1}{2}$； (10) 不存在.

1.10

5. 证明：方程$x^3+2x^2-4x-1=0$有三个实根.

5. 提示：在$(-\infty,+\infty)$内找出三个子区间，使$f(x)=x^3+2x^2-4x-1$在每个子区间的两端异号.

总复习题一

14.

(3) 求曲线$y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$的渐近线. (3) 铅直渐近线$x=-\frac{1}{e}$，斜渐近线$y=x+\frac{1}{e}$.

2.1

11. 试证明：

(1) 若$f(x)$为可导的奇函数，则$f'(x)$为偶函数；

(2) 若$f(x)$为可导的偶函数，则$f'(x)$为奇函数； 略.

2.2

10. 设$f(x)$可导，求下列函数的导数$\frac{dy}{dx}$：(3) $y=\frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$. (3) $\frac{e^x f'(e^x)-f'(x)f(e^x)}{e^{f(x)}}$.

14. 设函数$f(x)$满足下列条件：

(1) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，对一切$x,y\in\mathbf{R}$；

(2) $f(x)$在$x=0$处可导.

试证明$f(x)$在$\mathbf{R}$上处处可导，且$f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$. 略.

2.4

3. 设曲线C的方程为$x^2y-xy^2=2$，试找出C上有水平切线和铅直切线的点.

3. 点$M(-1,-2)$处有水平切线，点$N(2,1)$处有铅直切线.

4. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$： (4) $y-2x=(x-y)\ln(x-y)$. (4) $\dfrac{1}{[2+\ln(x-y)]^3(x-y)}$.

总复习题二

12. 设$y=y(x)$是由方程$\begin{cases}e^x=3t^2+2t+1,\\ t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}$所确定，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$. 12. $\dfrac{1}{2}$.

3.3

11. 若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数，且$f''(x)>0$，又$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，证明：$f(x)\geqslant x$，$x\in(-\infty,+\infty)$. 略.

3.4

11. 利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式： (4) $\sin x>\dfrac{2x}{\pi}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 略.

3.5

9. 设函数$f_n(x)=nx(1-x)^n\ (n=1,2,3,\cdots)$，$M(n)=\max\limits_{x\in[0,1]}f_n(x)$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$. 9. $\dfrac{1}{e}$.

3.7

9. 设R为抛物线$y=x^2$上任一点$M(x,y)$处的曲率半径，s为该曲线上某一点M_0到点M的弧长，证明：$3R\dfrac{d^2R}{ds^2}-\left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2-9=0$. 略.

总复习题三

15. 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$内嵌入一内接矩形，使矩形的边平行于椭圆的轴而面积最大，求最大矩形的面积.

15. $2ab$.

5.1

6. 试从定积分的几何意义,说明以下等式成立:

$$\int_1^e \ln x\mathrm{d}x + \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = e.$$

略.

5.2

7. 设$f(x)=\int_0^x\left(\int_{\sin t}^1\sqrt{1+u^4}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$,求$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$. 7. $-\frac{5}{8}$.

16. 以下积分上限的函数:

$$S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}\mathrm{d}t,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

称为菲涅耳(Fresnel)积分,在光学中有重要应用.

(1) 证明:$S(x)$为奇函数;

(2) 求出$S(x)$的极小值点.

16. (1) 略; (2) $x=(-1)^k\sqrt{2k}$ $(k\in\mathbf{N}_+)$.

5-3

7. 设$x=\varphi(y)$是单调函数$y=xe^{x^2}$的反函数,求$\int_0^e\varphi(y)\mathrm{d}y$. 7. $\frac{e+1}{2}$.

5-4

2. 求由曲线$y=\frac{1}{4x^2-1}$、x轴和直线$x=1$所围成的向右无限延伸的图形的面积. 2. $\frac{1}{4}\ln 3$.

总复习题五

15. 设$f'(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续,$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$ $(n\in\mathbf{N})$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 略.

6-2

5. 试求a,b的值,使得由曲线$y=\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$与两坐标轴所围成的图形的面积被曲线$y=a\sin x$与$y=b\sin x$三等分.

5. $a=\frac{4}{3},b=\frac{5}{12}$.

11. 在区间$[1,e]$上求一点ξ,使得图6-21中所示的阴影部分的面积最小. 11. $\xi=\sqrt{e}$.

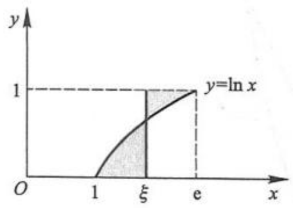

图 6-21

21. 利用题 20 的结论和方法，计算曲线 $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 和 x 轴所围成的图形按下列方式所得旋转体的体积：

绕直线 $x=-\pi$ 旋转. （1）$2\pi^2$；（2）$6\pi^2$.

6-3

7. 有一铅直放置的矩形闸门，它的顶端与水面相平，一条对角线将闸门分成两个三角形区域.试证：其中一个三角形区域上所受的水压力是另一个三角形区域上所受水压力的 2 倍.

7. 略.

总复习题六

（3）有半径不相等的两个木质球体，分别在中间钻出一个以球体直径为轴的圆柱形洞，使得剩下的两个环状立体的高都等于 h（图 6-34）.假设对应木质球半径较大的环状立体为 P，另一个为 Q.通过计算，正确的结论是（　　）.

（A）P 的体积大于 Q 的体积

（B）P 的体积等于 Q 的体积

（C）P 的体积小于 Q 的体积

（D）在 h 的不同取值范围，P 与 Q 的体积有不同的大小关系

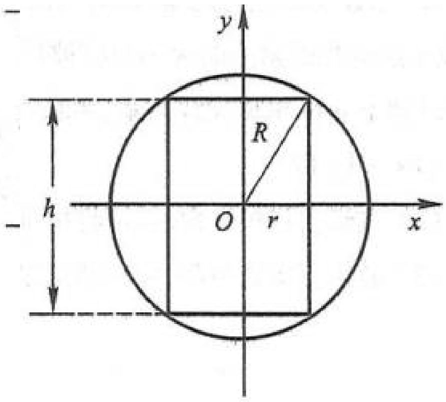

图 6-34

（3）（B）.

8. 设曲线 C 为函数 $y=xe^{-x}$ $(x\geqslant 0)$ 的图形，$M(x_0,y_0)$ 为 C 上的一个拐点，MT 为曲线 C 在点 M 处的切线.求由曲线 C、切线 MT 和 x 轴所围的向右无限延伸的平面图形的面积.

8. $\dfrac{1}{e^2}$.

7-1

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

（3）曲线上点 $P(x,y)$ 处的切线与 y 轴的交点为 Q，线段 PQ 的长度为 a，且曲线通过点 $(a,0)$.

（3）$x^2(1+y'^2)=a^2, y\big|_{x=a}=0$.

7-2

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

（6）$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{d\theta}+\dfrac{\rho^2+1}{\rho^2-1}\cot\theta=0, \rho\big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=3$；

（7）$x^2(1+y'^2)=a^2, y\big|_{x=a}=0$，其中 $a>0$.

（6）$\rho+\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{5}{3\sin\theta}$；（7）$y=\pm\left(\sqrt{a^2-x^2}+a\ln\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$.

7-3

2. 求下列齐次方程满足所给初值条件的特解：（4）$x\dfrac{dy}{dx}=y+x\sec\dfrac{y}{x}, y\big|_{x=1}=\dfrac{\pi}{4}$.（4）$\sin\dfrac{y}{x}=\ln x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7-4

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解：(6) $x(1+x^2)y'+y=1+x^2, y\big|_{x=1}=0.$

(6) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\ln\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{2}}.$

7-5

2. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，满足：

$$f'^2(x)=f(x)+\int_0^x [f'(t)]^3\,dt,$$

且 $f'(0)=1$，求 $f(x)$.

2. $f(x)=2\ln\sec\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+1-\ln 2.$

7-7

1. 下题中给出了四个结论，从中选一个正确的结论：

在下列微分方程中，以 $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的常系数齐次线性微分方程是(　　).

(A) $y'''+y''-y'-y=0$　　(B) $y'''+y''+y'+y=0$

(C) $y'''-y''-y'+y=0$　　(D) $y'''-y''-y'-y=0$

1. (B).

7-8

3. 已知二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+my'+ny=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，求 m,n 的值，并求非齐次方程 $y''+my'+ny=x$ 满足初值条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的特解.

3. $m=-2, n=1, y=-xe^x+x+2.$

8.1

20. 设 O 是 A,B 的连线以外的一点，证明 A,B,C 三点共线的充分必要条件是 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda+\mu=1$.

略.

8.2

11. 设有四面体 $OPQR$（图 8-28），其中 $\triangle OPQ$, $\triangle OQR$, $\triangle OPR$ 和 $\triangle PQR$ 的面积分别为 A,B,C 和 D. 试用向量方法证明如下三维空间中的勾股定理：

$$A^2+B^2+C^2=D^2.$$

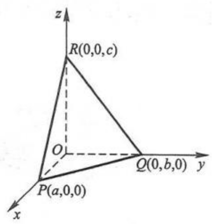

图 8-28

略.

总复习题八

6. 试用向量证明：梯形两腰中点的连线平行于底边，且其长度等于上、下两底边长度之和的一半.

略.

10. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2,2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,1,2)$，若存在向量 $\boldsymbol{c}$，使 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$，试求向量 $\boldsymbol{c}$；若向量 $\boldsymbol{c}$ 不止一个，试找出模最小的那个 $\boldsymbol{c}$.

10. $c=(x,2-2x,2x-1)$，其中 x 为参数；模为最小的 $c=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

19. 一直线 l 过点 $A(-3,5,-9)$ 且与两直线 $l_1:\begin{cases}y=3x+5,\\z=2x-3,\end{cases}$ $l_2:\begin{cases}y=4x-7,\\z=5x+10\end{cases}$ 相交，求此直线方程.

19. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{22}=\frac{z+9}{2}$.

9-1

*7. 证明下列极限不存在：（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$；（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x+y)}{(x+y)xy}$. 略.

9.2

1. 设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$. 1. $f_x(0,0)$ 不存在，$f_y(0,0)=0$.

9.4

11. 设函数 $f(x,y,z)$ 满足 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$（t 为任意实数），则称函数 f 为 n 次齐次函数. 证明：n 次齐次函数 f 满足关系式

$$xf_x+yf_y+zf_z=nf(x,y,z),$$

其中函数 f 具有一阶连续偏导数. 略.

9.5

8. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2xz-2xyz+\ln(xyz)=0$ 所确定的隐函数，求 dz.

8. $dz=-\frac{z}{x}dx+\frac{z(2xyz-1)}{y(2xz-2xyz+1)}dy$.

9.6

11. 设曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面通过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\x+y-z=0.\end{cases}$ 求此切平面的方程.

11. 切平面方程：$9x+y-z-27=0$ 或 $9x+17y-17z+27=0$.

12. 设 L 是曲面 $\Sigma:z=y^2+x^3y$ 上一条曲线的切线，切点为 $P(2,1,9)$，L 在 xOy 面上的投影平行于 x 轴，求切线 L 的参数方程.

12. 切线的参数方程：$x=2+t,y=1,z=9+12t$，t 为参数.

9.8

4. 求两直线 $\begin{cases}y=2x,\\z=x+1\end{cases}$ 与 $\begin{cases}y=x+3,\\z=x\end{cases}$ 之间的最短距离. 4. 最短距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10.1

6. 计算 $\iint\limits_D(2+y\cos x+xy\sin y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|x^2+y^2\leqslant 1\}$. 6. 2π.

10.2

1. 计算下列二重积分：(5) $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$. (5) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{6}$.

15. 选用适当的坐标计算下列各题：

(5) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是圆形闭区域 $\{(x,y)\,|x^2+y^2\leqslant ax\}(a>0)$. (5) $\frac{3\pi-4}{9}a^3$.

10.3

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分：

(5) $\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\,\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由抛物面 $x=y^2+z^2$ 与圆锥面 $x=2-\sqrt{y^2+z^2}$ 所围成的闭区域. (5) $\frac{4}{15}\pi$.

10.4

4. 设 Σ 为一确定球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$（R 为正的常数）,另有一球心在 Σ 上、半径为 r 的球面 Σ_1,问 r 取何值时,球面 Σ_1 在球面 Σ 内部的那部分面积最大?

4. $\frac{4}{3}R$.

总复习题十

9. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega xy^2\,\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由 $z=0,x+y-z=0,x-y-z=0$ 和 $x=1$ 所围成的闭区域； 9. (1) $\frac{1}{36}$;

11.2

9. 设曲线 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,从 z 轴的正向看取逆时针方向,

$$I=\oint_\Gamma z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z,$$

试利用两类曲线积分之间的关系证明：$|I|\leqslant 2\pi a^2$. 略.

11-3

8. 设有界闭区域 D 由 xOy 面上的分段光滑曲线 L 所围成,函数 $u=u(x,y)$ 在 D 上具有连续的二阶偏导数,$\frac{\partial u}{\partial n}$表示 $u(x,y)$ 沿 L 的外法向量的方向导数,证明

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 L 取正向. 略.

11.5

5. 计算

$$\iint_{\Sigma}(3z+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\ x=0\end{cases}$ $(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面的左侧. 5. 6π.

总复习题十一

4. 已知函数 $f(x)$ 具有连续导数, $f(0)=1$, 且曲线积分

$$\int_L[\mathrm{e}^x+f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 试确定 $f(x)$, 并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}[\mathrm{e}^x+f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$ 的值.

5. 计算下列曲面积分:

(5) $\oiint_{\Sigma}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-[2f(y)+y^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(z)+z^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中函数 $f(x)$ 具有连续导数, Σ 是立方体 Ω:

$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$ 的表面, 并取外侧.

4. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-1}$.

12.1

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件: (1) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$; (2) $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}+u_{2k})$ 收敛. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 略.

12.2

1. 以下各题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的正项级数, $b_n=\dfrac{1-\cos a_n}{a_n}$, $c_n=\dfrac{1-\cos\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}}$. 则有(　　);

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 均收敛　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 敛散性不确定

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 均发散　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 敛散性不确定

(2) 设有两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 则有(　　).

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 发散 1. (1) (B)； (2) (C).

12.3

1. 下题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论：

已知 $\alpha>0$,若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+\alpha)^n$ 在 $x=0$ 处发散,在 $x=-2\alpha$ 处收敛,则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-\alpha)^n$ 的收敛域为(　　).

(A) $[-2\alpha,0)$　　(B) $[0,2\alpha)$　　(C) $(-2\alpha,0]$　　(D) $(0,2\alpha]$

1. (B).

12.4

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数,并求展开式成立的区间：(3) xe^x.

(3) $xe^x=e+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e}{(n-1)!}+\frac{e}{n!}\right](x-1)^n,(-\infty,+\infty)$.

12.7

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：(3) $f(x)=x\sin x$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

(3) $x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx$, $(-\pi,\pi)$.

总复习题十二

10. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的系数 $a_1=1,a_2=0$,且满足 $a_n=\frac{-1}{(n-1)(n-2)}a_{n-2}$ $(n\geqslant3,n\in\mathbf{N})$.试求该幂级数的收敛域与和函数 $f(x)$.

10. 收敛域 $(-\infty,+\infty)$,和函数 $f(x)=x\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$.