

§ 9-2 动生电动势

由法拉第电磁感应定律可以知道，只要通过回路所围面积中的磁通量发生变化，回路中就会产生感应电动势。使磁通量发生变化的多种方法从**本质**上讲可归纳为两类：
$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

一类是磁场保持不变，导体“回路”（有可能是一个虚拟的回路）或导体在磁场中运动，由此产生的电动势称作**动生电动势**。（如导体切割磁力线或线圈转动）

另一类是导体回路不动，磁场发生变化，由此产生的电动势称为**感生电动势**。

一、在磁场中运动的导线内的感应电动势

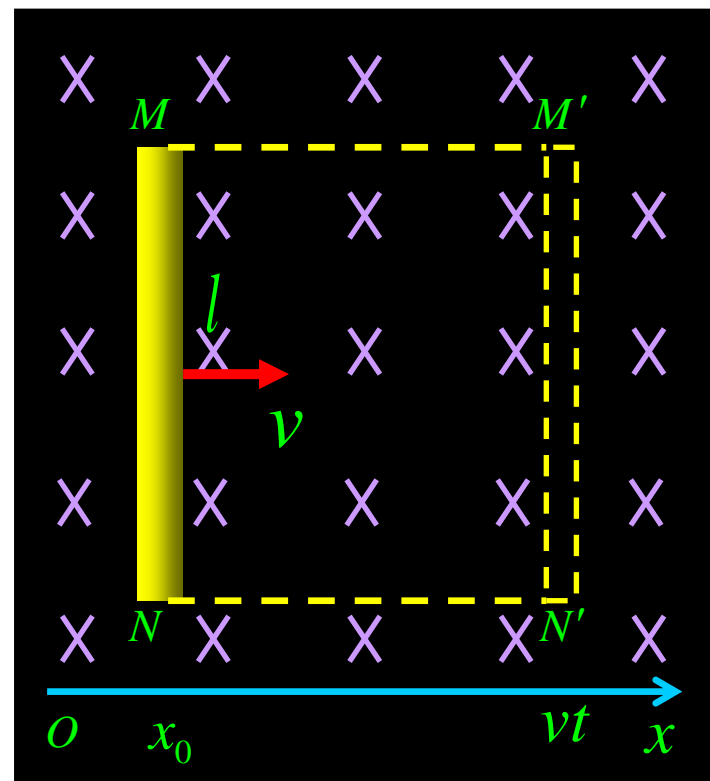
如图，导线 MN 在 t 时间内从 x_0 平移到 $x=vt$ ，这段时间内导体 MN 扫出了一个**假想回路**（以方便计算通过一定面积的磁通量）如虚线所示。这个回路磁通量为

$$\Phi = Bl(vt - x_0)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = Blv$$

运动导线 MN 上产生的动生电动势

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$



可见，通过回路面积磁通量的增量就是导线在运动过程所切割的磁感应线数，所以动生电动势在量值上等于在单位时间内导线切割的磁感应线数（磁通量的变化率）。负号代表动生电动势的方向。

动生电动势的本质：

可见，切割磁力线就会产生电动势，本质：导体中的电子受到洛伦兹力的作用

当导线 MN 在磁场中以速度 v 向右运动时，导线内每个自由电子也获得向右的定向速度 v ，自由电子受的洛伦兹力为：

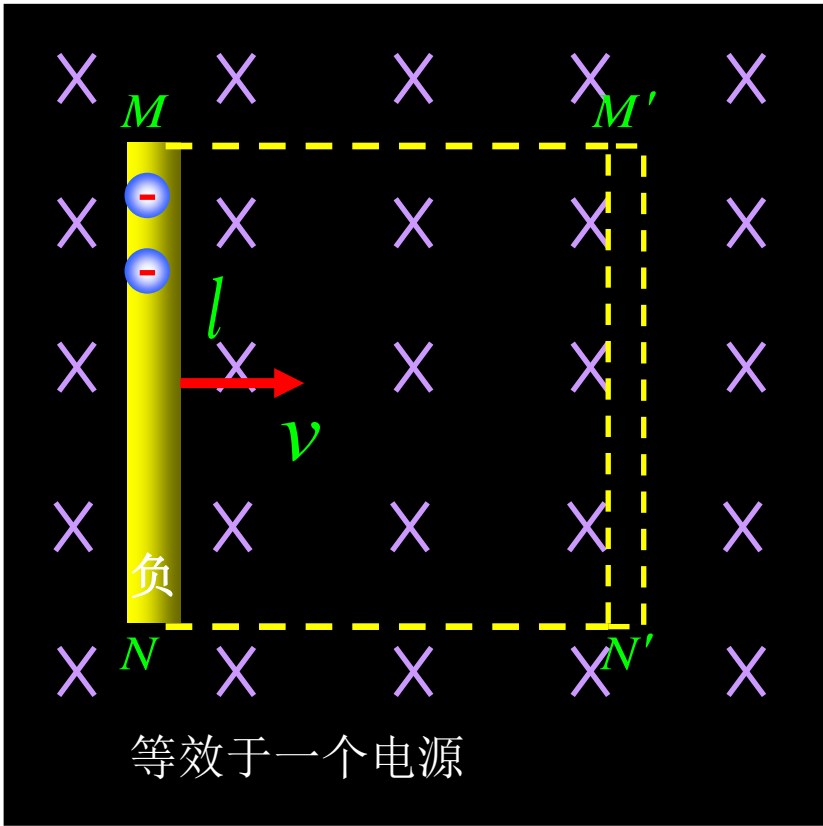
$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

e 为电子电荷量的绝对值， F 方向从 M 指向 N ，电子在这个力的作用下将由 M 移向 N 。

类比霍尔效应，其中电子的运动时由电流而发生

电子在洛伦兹力作用下，
将沿导线从M端向N端运动，
可以看作等效于一个非静电
性场强 E_k 对电子的作用。**非
静电力就是洛伦兹力 F** 。因
此 $-e\vec{E}_k = -e\vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{E}_k = \vec{v} \times \vec{B}$$



按照电动势的定义，感应电动势是这段导线内非
静电力做功的结果，所以

$$\varepsilon_i = \int_M^N \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_M^N (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad \text{此处} = -Blv$$

可见，动生电动势实质是**运动电荷**受洛伦兹力的结果。

在一般情况下，磁场可以不均匀，导线在磁场中运动时各部分的速度也可以不同， \vec{v} 、 \vec{B} 和 $d\vec{l}$ 也可以不相互垂直，这时运动导线 $d\vec{l}$ 内的动生电动势为

$$d\varepsilon_i = \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

线元矢量 $d\vec{l}$ 的方向是任意选定的，当 $d\vec{l}$ 与 $\vec{v} \times \vec{B}$ 间呈锐角时，为正 ε_i 表示顺着 ε_i 的方向；呈钝角时，为负 ε_i 表示逆着 ε_i 方向。

导线内总的动生电动势为

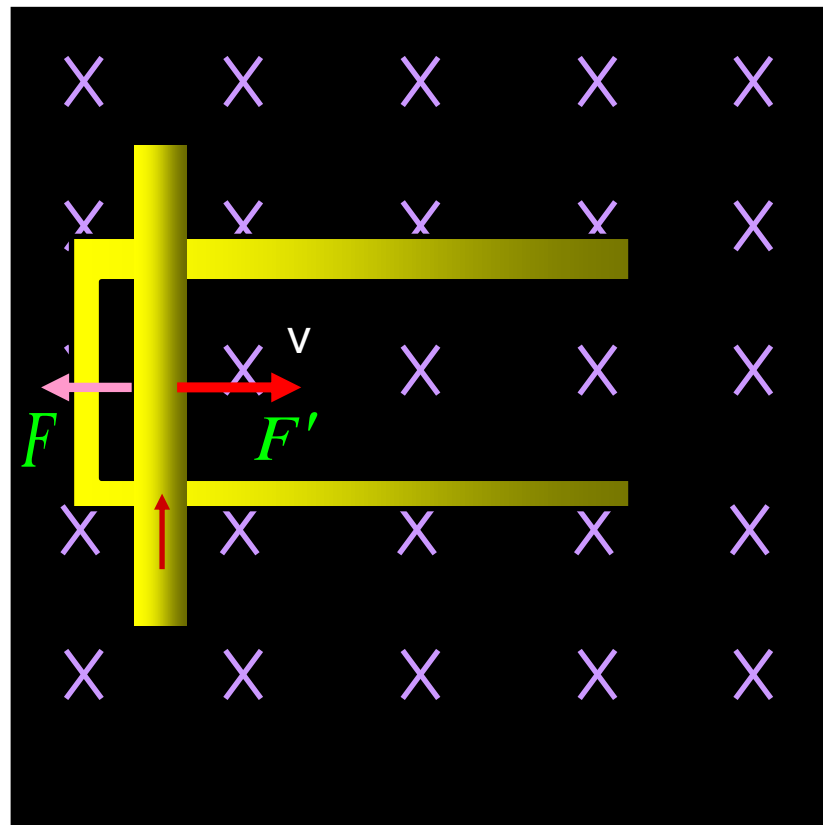
$$\varepsilon_i = \int_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

体现了动生电动势产生的本质，大小等于单位正电荷受到的洛伦兹力沿着导线回路或一段导线积分

导线在磁场中运动时的能量转换

一根导线在磁场中切割磁感应线运动能产生动生电动势，**但没有恒定电流。**

构建一个闭合回路后才能建立起感应电流。



此时，导线在外磁场中运动要受到**向左**的安培力作用

阻碍磁通量的变化

$$F = BI_i l$$

i-induced

所以，要**维持**导线向右匀速运动，使之产生恒定电动势，导线上必须施加等大的一个向右的外力 F' 。

因此，在**维持**导线向右**匀速**运动过程中，外力必须克服安培力而作功，电源（即导线 **MN** ）向回路中提供的电能来自于外界提供的机械能——能量守恒

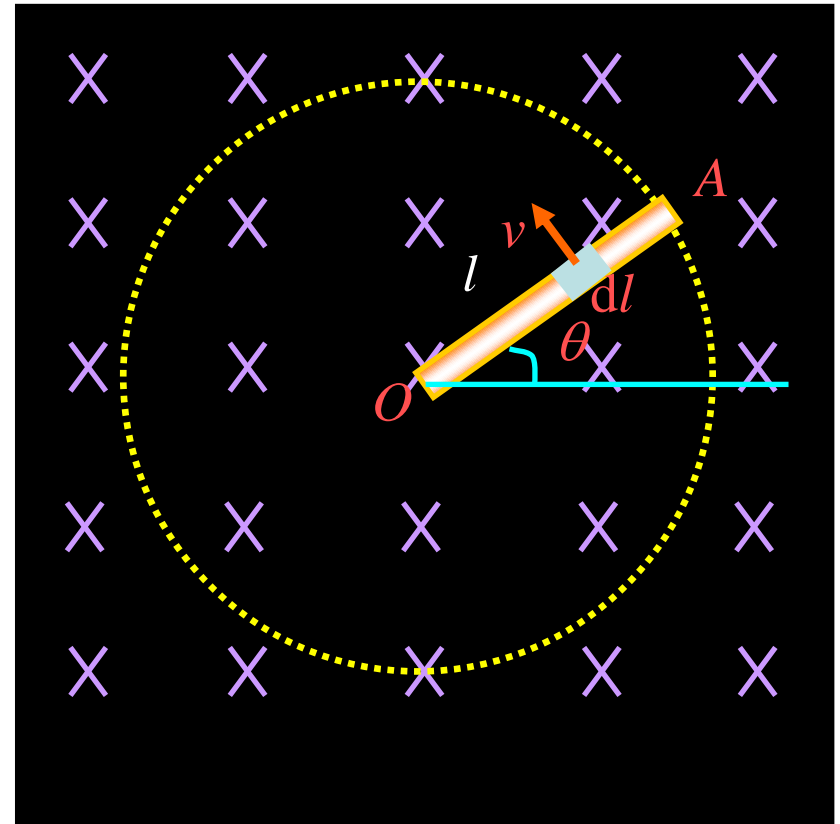
例题9-2 如图已知铜棒 **OA** 长 **$L=50\text{m}$** ，处在方向垂直纸面向内的均匀磁场（ **$B=0.01\text{T}$** ）中，沿逆时针方向绕 **O** 轴转动，角速率 **$\omega=100\pi\text{rad/s}$** ，求铜棒中的动生电动势大小及方向。如果是半径为 **50cm** 的铜盘以上述角速度转动，求盘中心和边缘之间的电势差。

$$d\varepsilon_i = \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

解:在铜棒上距O点为 l 处取线元 $d\vec{l}$ ，其方向沿O指向A，其运动速度的大小为 $v = \omega l$ 。

显然 \vec{v} 、 \vec{B} 、 $d\vec{l}$ 相互垂直，所以 $d\vec{l}$ 上的动生电动势为

$$\begin{aligned} d\varepsilon_i &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= -vB dl \end{aligned}$$



各小段上的 $d\varepsilon_i$ 指向相同，由此可得金属棒上总电动势为

$$\varepsilon_i = -\int_0^L B\omega l dl = -\frac{1}{2} B\omega L^2 = -\frac{0.01 \times 100\pi \times 0.5^2}{2} \text{ V} = -0.39 \text{ V}$$

负号代表动生电动势的方向

由图可知 $\vec{v} \times \vec{B}$, 的方向由**A**指向**O**, **此即电动势的方向**, $V_O - V_A = 0.39\text{V}$

解法二: 设铜棒在 Δt 时间内转过角度 $\Delta\theta$ 。则这段时间内铜棒所切割的磁感应线数等于它所扫过的扇形面积内所通过的磁通量, 即

$$\Delta\Phi = B \frac{1}{2} L(L\Delta\theta) = \frac{1}{2} BL^2 \Delta\theta$$

所以, 铜棒中的电动势为 $\varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} BL^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} BL^2 \omega$

结果与上一解法完全相同。匀速转动

如果是铜盘转动, 等效于无数铜棒并联, 因此, 铜盘中心与边缘电势差仍为0.39V。此为一种简易发电机模型。

例题9-3 如图，长直导线中电流为 $I=10\text{A}$ ，在其附近有一长为 $l=0.2\text{m}$ 的金属棒 MN ，以速度 $v=2\text{m/s}$ 平行于导线做匀速运动，如果靠近导线的一端 M 距离导线为 $a=0.1\text{m}$ ，求金属棒中的动生电动势。

解： 金属棒上取长度元 $\text{d}x$ ，每一 $\text{d}x$ 处磁场可看作均匀的

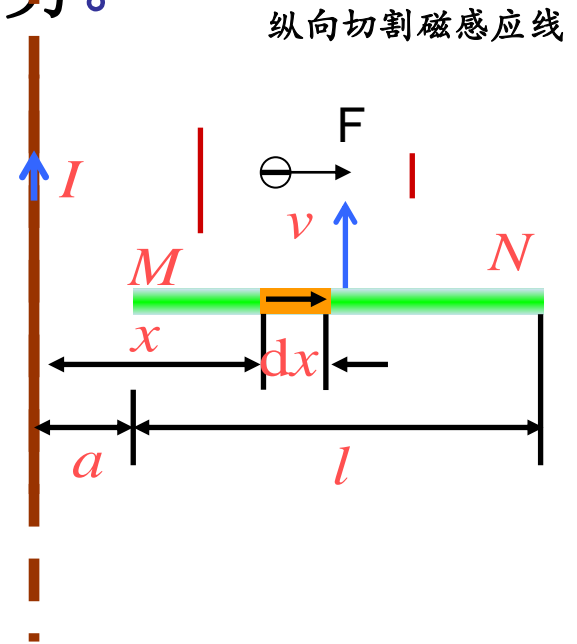
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

因此， $\text{d}x$ 小段上的动生电动势为

$$\text{大小 } \text{d}\varepsilon_i = Bv\text{d}x = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v\text{d}x$$

总的动生电动势为

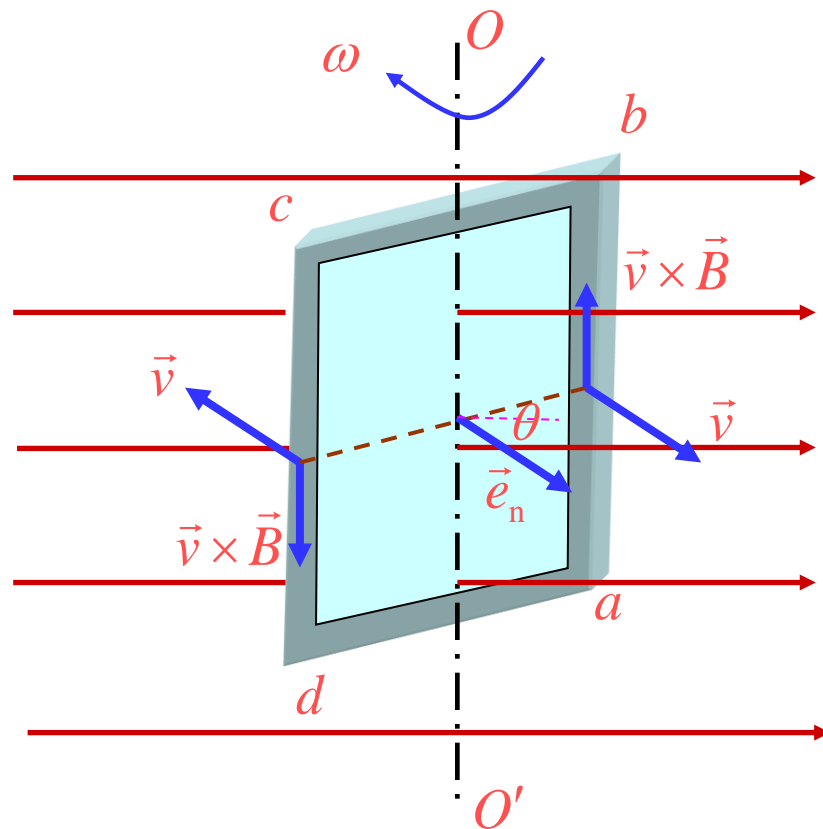
$$\varepsilon_i = \int \text{d}\varepsilon_i = \int_a^{a+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v\text{d}x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(\frac{a+l}{a}\right) = 4.4 \times 10^{-6} \text{V}$$



二、在磁场中转动的线圈内的感应电动势

$$d\varepsilon_i = \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

设矩形线圈 $abcd$ 的匝数为 N , 面积为 S , 使这线圈在匀强磁场中绕固定的轴线 OO' 转动, 磁感应强度 \vec{B} 与 OO' 轴垂直。当 $t=0$ 时, \vec{e}_n 与 \vec{B} 之间的夹角为零, 经过 t 时间, \vec{e}_n 与 \vec{B} 之间的夹角为 θ 。



引起线圈磁通量变化的是磁场和面积法线方向之间的夹角

$$\Phi = BS \cos \theta$$

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

因 $\theta = \omega t$

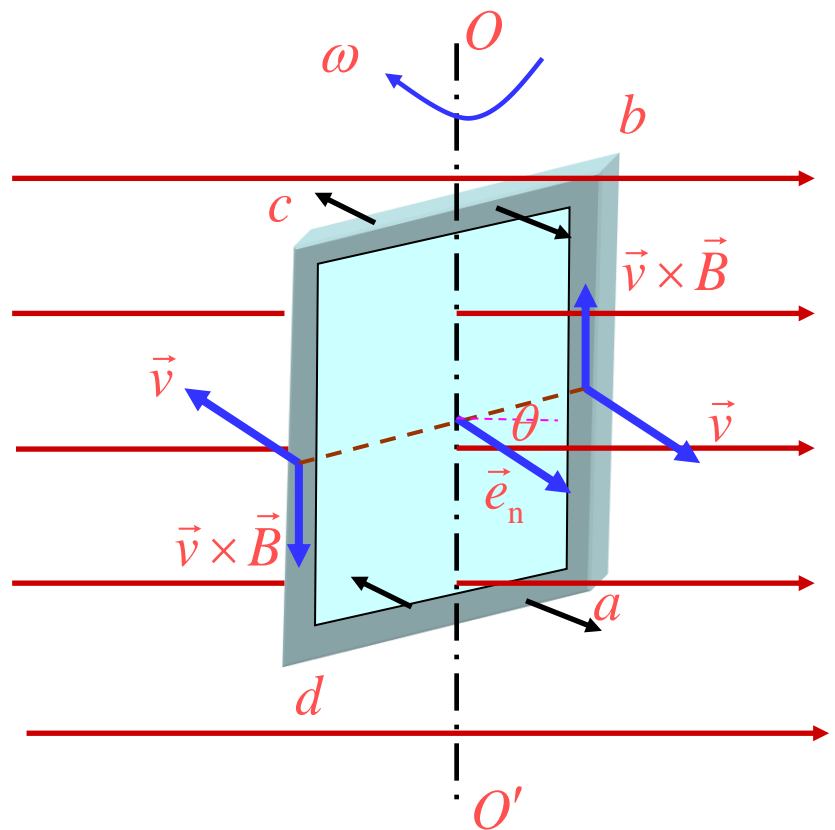
故 $\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t$

令 $NBS\omega = \varepsilon_0$

表示当线圈平面平行于
磁场方向瞬时的电动势

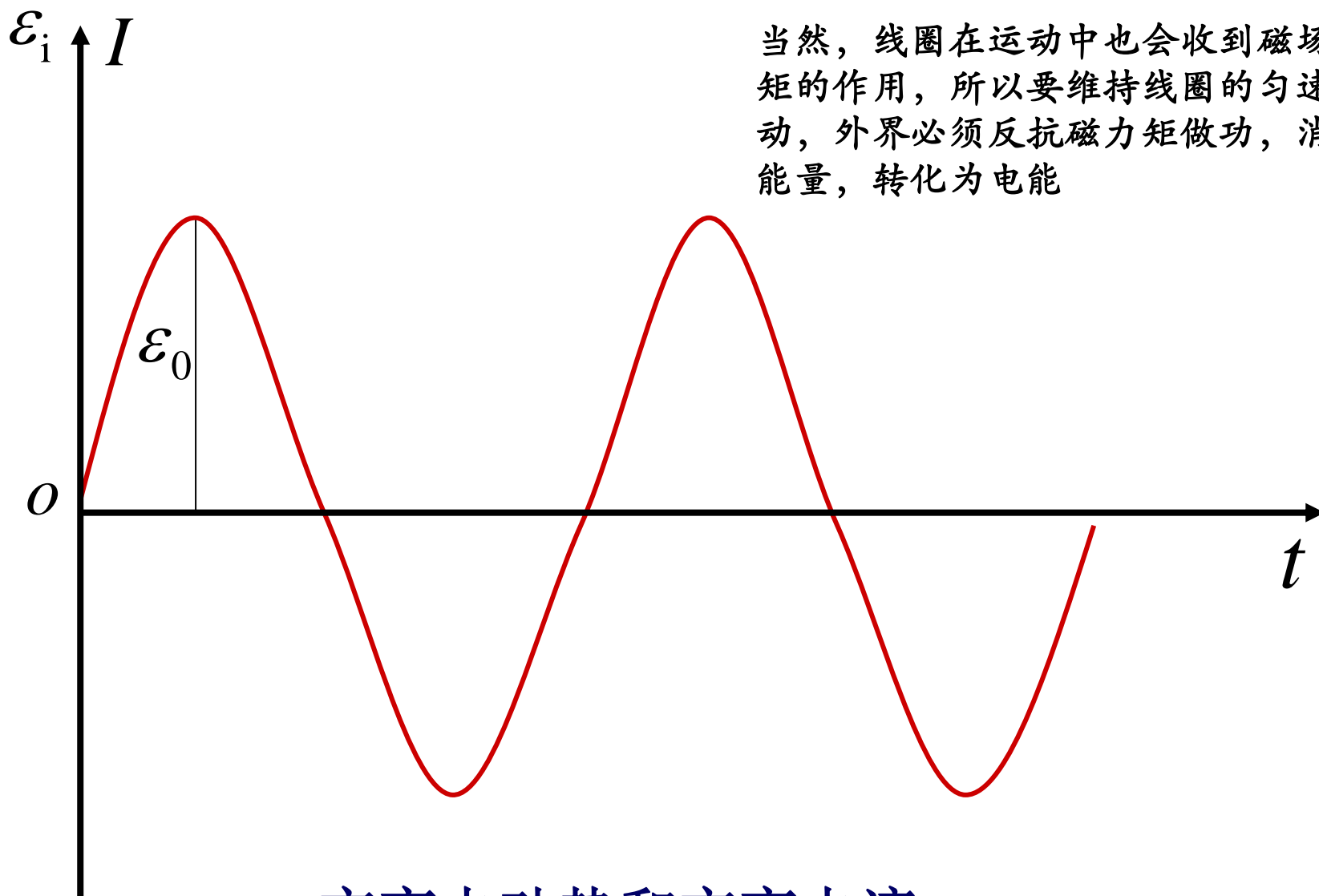
$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$



在匀强磁场内转动的线圈中所产生的电动势是随时间作周期性变化的，这种电动势称为**交变电动势**。在交变电动势的作用下，线圈中的电流也是交变的，称为**交变电流或交流**。由于线圈中自感存在，其变化要比电动势变化落后一些

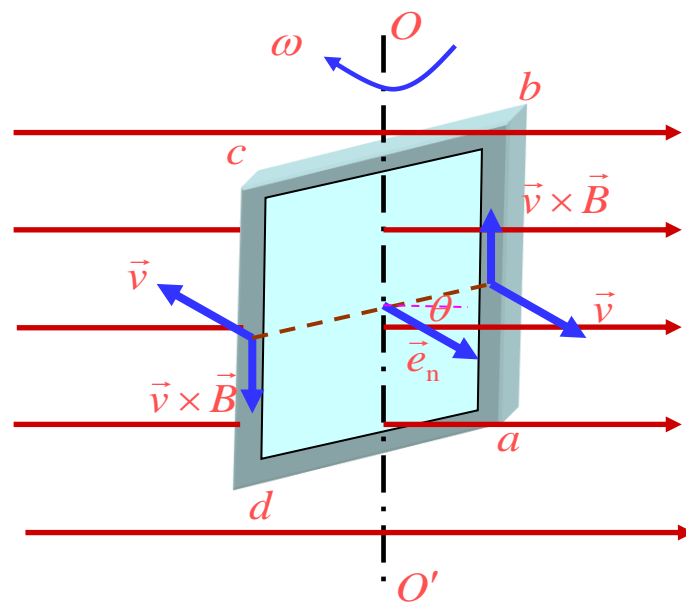
当然，线圈在运动中也会收到磁场力矩的作用，所以要维持线圈的匀速转动，外界必须反抗磁力矩做功，消耗能量，转化为电能



交变电动势和交变电流

例题9-4 边长为 $l=5\text{cm}$ 的正方形线圈，在磁感应强度为 $B=0.84\text{T}$ 的磁场中绕轴转动，线圈铜线的电阻率为 $\rho=1.7\times 10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$ ，截面积 $S=0.5\text{m}^2$ ，共10匝。线圈转速为 $n=10\text{r/s}$ ，转轴与磁场方向垂直。求（1）当线圈由其平面与磁场垂直而转过 30° 时线圈内的动生电动势；（2）线圈转动时的最大电动势及该时刻线圈的位置；（3）由图示位置开始转过1s时线圈内的动生电动势。

解：取逆时针的绕行方向为正方向，线圈平面与磁场方向垂直时为计时起点($t=0$)，当线圈转过角 θ 时，通过单匝线圈磁通量为



$$\Phi = BS \cos \theta = Bl^2 \cos \theta$$

设线圈转动角速度为 ω

$$\omega = 2\pi n \quad \theta = 2\pi nt$$

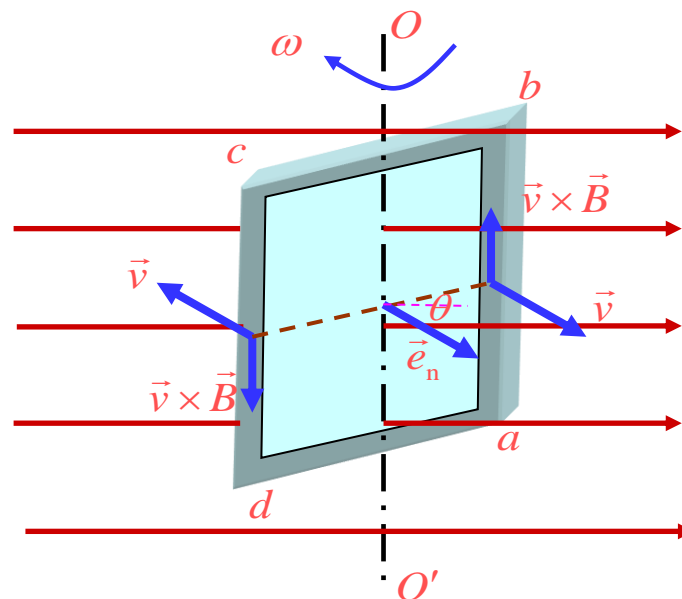
$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d}{dt} (Bl^2 \cos 2\pi nt)$$

$$= NBl^2 2\pi n \sin 2\pi nt$$

(1) 当 $\theta = 30^\circ$

$$\varepsilon_i = NBl^2 2\pi n \sin 30^\circ$$

$$= 0.66V$$



$$(2) \text{ 当 } |\sin 2\pi n t| = 1, \quad \theta = 2\pi n t$$

即当 $\theta = 90^\circ$ 、 $\theta = 270^\circ$ 等位置时电动势 ε_i 最大

$$\varepsilon_i = NBl^2 2\pi n = 1.32\text{V}$$

(3) 当 $t=1\text{s}$ 时,

$$\varepsilon_i = NBl^2 2\pi n \sin 2\pi n = 0$$

本题也可以将线圈看作由四段长为 l 的导线在磁场中运动产生动生电动势之和。显然只有 ab 和 cd 两边切割磁感应线产生电动势

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{iab} + \varepsilon_{icd} = 2NBlv \sin \theta = 2NBl\omega \frac{l}{2} \sin \omega t$$

$$= NBl^2 2\pi \sin 2\pi n t$$

$$\int d\varepsilon_i = \int \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

选择进入下一节

§ 9-0 教学基本要求

§ 9-1 电磁感应定律

§ 9-2 动生电动势

§ 9-3 感生电动势 感生电场

§ 9-4 自感应和互感应

§ 9-5 磁场的能量

§ 9-6 位移电流 电磁场理论

* § 9-7 电磁场的统一性和电磁场量的相对性