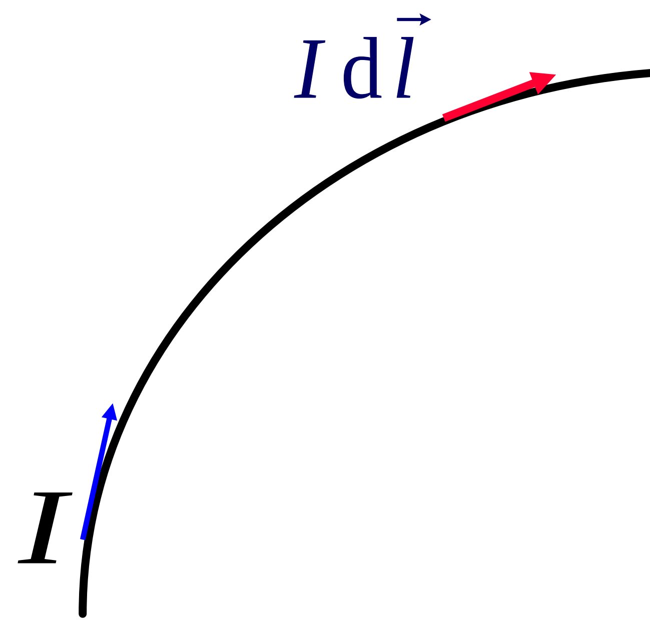
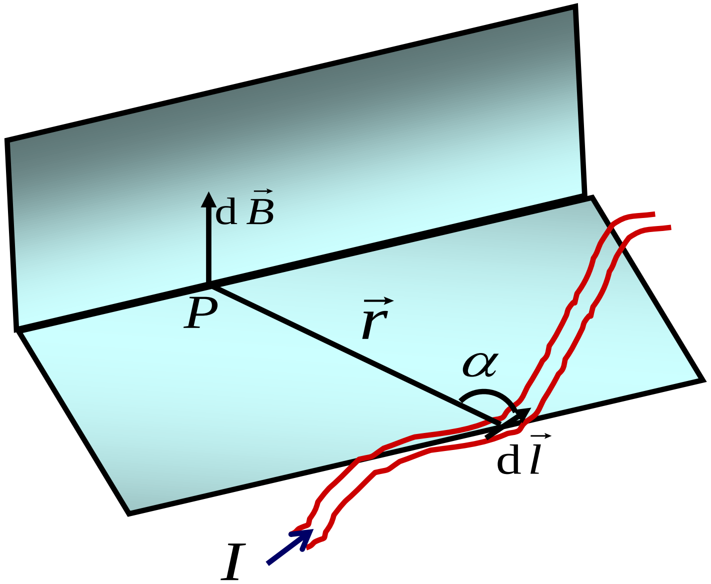
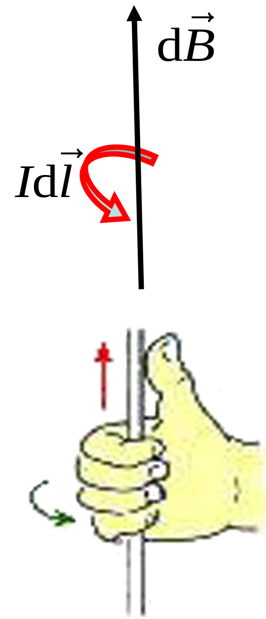
§8-3　毕奥—萨伐尔定律

一、毕奥—萨伐尔（Biot-Savart）定律

真空中，载流导线中的电流为I，导线半径比到观察点P的距离小得多，即为线电流。把电流看作是无穷多小段电流的集合，各小段电流称为电流元，并用矢量$I\,\mathrm{d}\vec{l}$表示，$\mathrm{d}\vec{l}$ 表示在载流导线上（沿电流方向)所取的线元，任意形状的线电流所激发的磁场等于各段电流元所激发的磁场的矢量和







$\vec{r}$ 是从电流元所在点到P点的矢量

α 是 $Id\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 之间小与180^0的夹角

电流元在给定点P所产生的磁感应强度的大小与***Idl***成正比，与到电流元的距离平方成反比，与电流元和矢径夹角的正弦成正比。d$\vec{B}$ 方向垂直于 $\vec{r}$ 与 $Id\vec{l}$ 组成的平面，指向为由 $Id\vec{l}$ 经 α 角转向 $\vec{r}$ 时右螺旋前进方向。

$$\mathrm{d}B = k\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

而 $k = \mu_0 / 4\pi$ $\therefore$ $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I \,\mathrm{d}\vec{l} \sin\alpha}{4\pi r^2}$

其中μ_0=4π×10^{-7}T•m•A^{-1}，称为真空磁导率。

磁感应强度的矢量式：

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

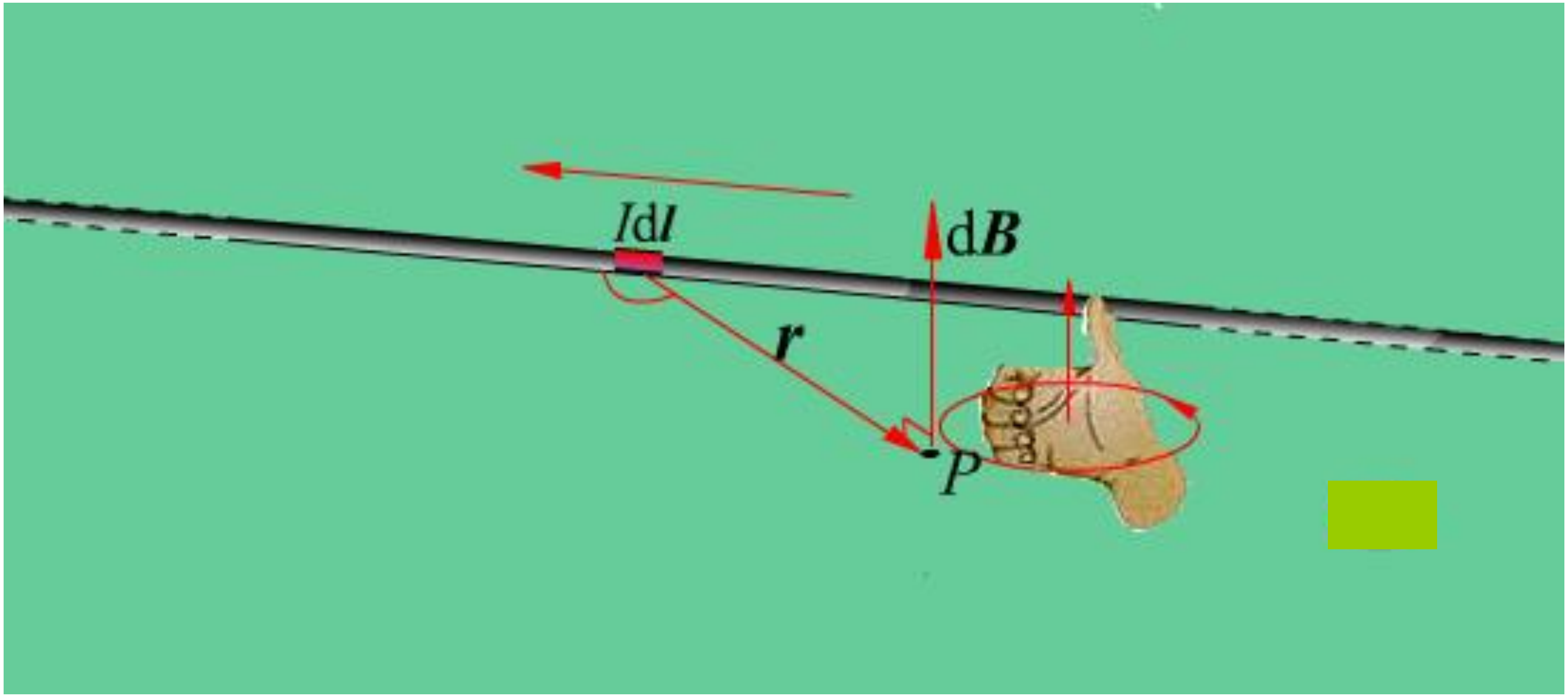
Biot-Savart定律的微分形式

$$\boxed{\vec{\mathrm{B}} = \int_L dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

Biot-Savart定律的积分形式

此种方法类比任意带电体激发电场的计算方法

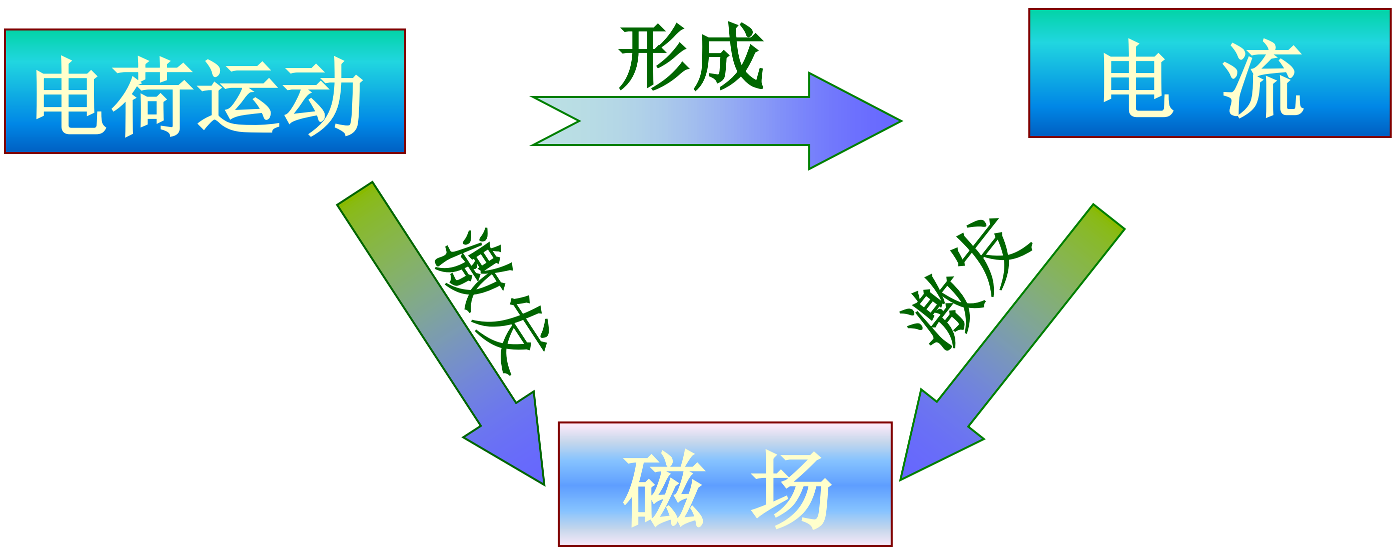
上页 下页 返回 退出



$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$
$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{r}$
P

二、 运动电荷的磁场——由Biot-Savart出发推导

电流激发磁场本质：运动的带电粒子在其周围空间激发磁场。



设电流元 $Id\vec{l}$ ，横截面积S，单位体积内有n个定向运动的正电荷（为简单起见），每个电荷电量为q，定向速度为v *（平均效果）*。

图见书P214

单位时间内通过横截面**S**的电量即为电流强度***I***:

$$I = qnvS$$

设电流元内共有d**N**个以速度**v**运动的带电粒子:

$$\mathrm{d}N = nS\,\mathrm{d}l$$

电流元在***P***点产生的磁感应强度

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qnvS\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

每个带电量为***q***的粒子以速度***v***通过电流元所在位置（点）时，在**P**点产生的磁感应强度大小为:

$$B = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}N} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin\alpha}{r^2}$$

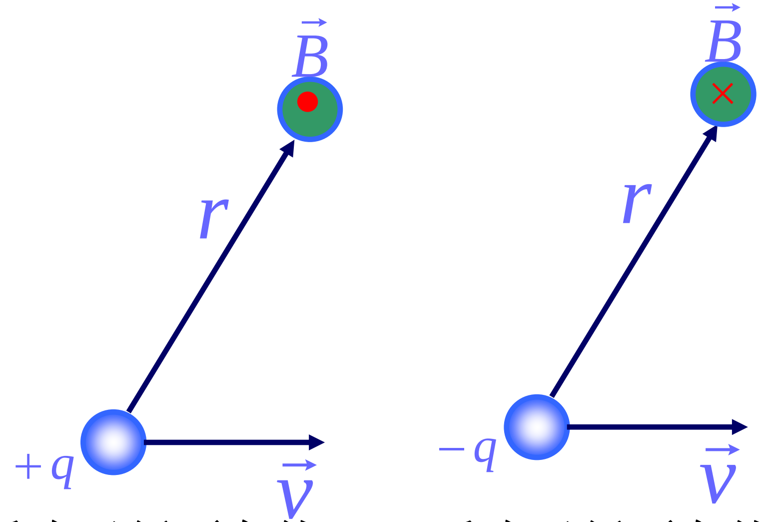
dB是同时通过Idl的许多带电粒子在P点产生磁场的综合效果

矢量式：

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}}$$

适用范围：电荷运动速度远小于光速

其方向根据右手螺旋法则，$\vec{B}$ 垂直 $\vec{v}$、$\vec{r}$ 组成的平面。q为正，$\vec{B}$ 为 $\vec{v}\times\vec{r}$ 的方向；q为负，$\vec{B}$ 与 $\vec{v}\times\vec{r}$ 的方向相反。



可见，方向由右手螺旋和电荷的电性共同决定

见P215的图11-8

运动电荷除激发磁场外，同时还在周围空间激发电场，若电荷的运动速度 $v << c$ ，则场点的场强可用电荷的**瞬时**位置指向场点的矢量 $\vec{r}$ 表出

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

体现运动

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\vec{v}\times q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \mu_0\varepsilon_0\vec{v}\times\vec{E}$$

可见：运动电荷所激发的电场和磁场是紧密联系的

必须指出：一个运动电荷所激发的电磁场不再是恒定场

三、毕奥—萨伐尔定律的应用

方法与连续带电体求场强类似

先将载流导体分割成许多电流元 $I\,\mathrm{d}\vec{l}$

写出电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 在所求点处的磁感应强度，然后按照磁感应强度的叠加原理求出所有电流元在该点磁感应强度的矢量和。

实际计算时要应先建立合适的坐标系，求各电流元的分量式。即电流元产生的磁场方向不同时，应先求出各分量 $\mathrm{d}B_x$ $\mathrm{d}B_y$ $\mathrm{d}B_z$ 然后再对各分量积分，

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \int \mathrm{d}B_x \\ B_y &= \int \mathrm{d}B_y \\ B_z &= \int \mathrm{d}B_z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

应用毕奥-萨伐尔定律计算磁场中各点磁感强度的具体步骤为：

1.首先，将载流导线划分为一段段电流元，任选一段电流元$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，并标出$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到场点 P 的位矢$\boldsymbol{r}$，确定两者的夹角（$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{r}$）；

2.根据毕奥-萨伐尔定律的公式，求出电流元$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在场点P所激发的磁感强度d$\boldsymbol{B}$的大小，并由右手螺旋法则决定d$\boldsymbol{B}$的方向；

3.建立坐标系，将d$\boldsymbol{B}$在坐标系中分解（因为磁场是矢量场，每个电流元在场点P的磁感应强度dB的方向一般并不相同，由于同方向的矢量和才是是它们标量和，即代数和，所以只有将dB分解在坐标系下，才能用标量积分来完成对磁感应强度B的大小计算），并用磁场叠加原理做对称性分析，以简化计算步骤；

4.最后，就整个载流导线对d$\boldsymbol{B}$的各个分量分别积分，一般在直角坐标系中

$$B_x = \int_L \mathrm{d}B_x \qquad B_y = \int_L \mathrm{d}B_y \qquad B_z = \int_L \mathrm{d}B_z$$

对积分结果进行矢量合成，求出磁感强度$\boldsymbol{B}$；即

$$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$$

例8-1　载流长直导线的磁场　设有长为L的载流直导线，其中电流为I。计算距离直导线为a处的P点的磁感应强度。

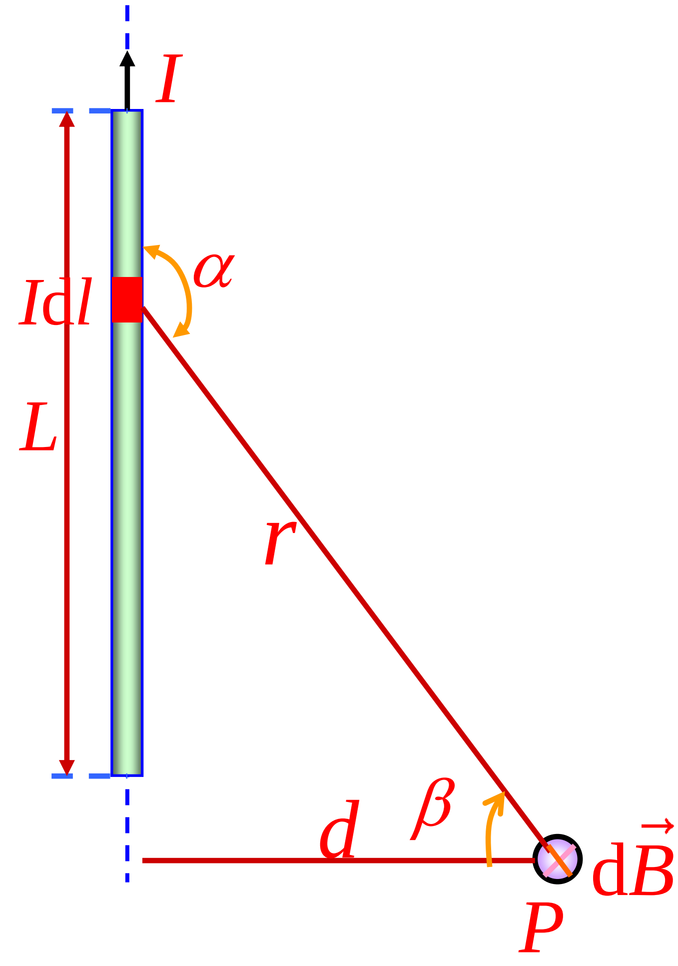
解：任取电流元 $I\mathrm{d}l$

据毕奥-萨伐尔定律，此电流元在P点磁感应强度$\mathrm{d}\vec{B}$为

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

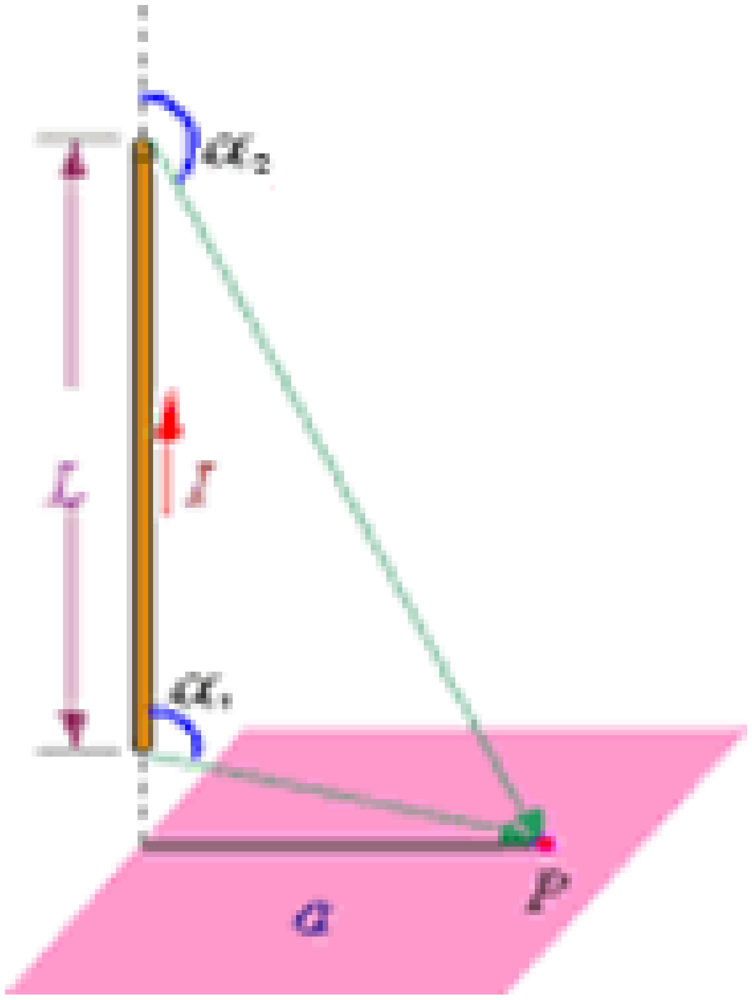
$\mathrm{d}\vec{B}$ 方向根据右手螺旋定则确定。

由于直导线上所有电流元在该点 $\mathrm{d}\vec{B}$方向相同



上页 下页 返回 退出

空间效果图



$\vec{B}=\int_L \mathrm{d}\vec{B}$ 矢量积分可变为标量积分

$$B=\int_L \mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

由几何关系有：

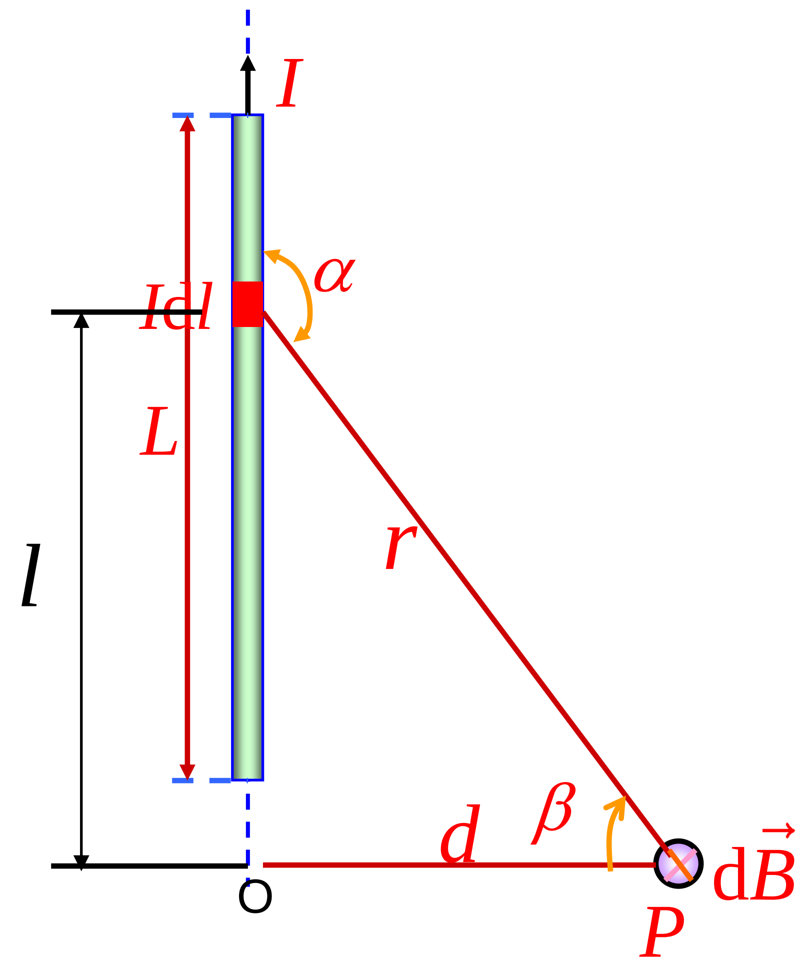
$$\sin\alpha=\cos\beta \qquad r=d\sec\beta$$

$$l=\mathrm{d}\tan\beta \qquad \mathrm{d}l=\mathrm{d}\sec^2\beta\,\mathrm{d}\beta$$

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{I}{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\beta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\sin\beta_2-\sin\beta_1\right)$$



$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$

考虑三种情况：

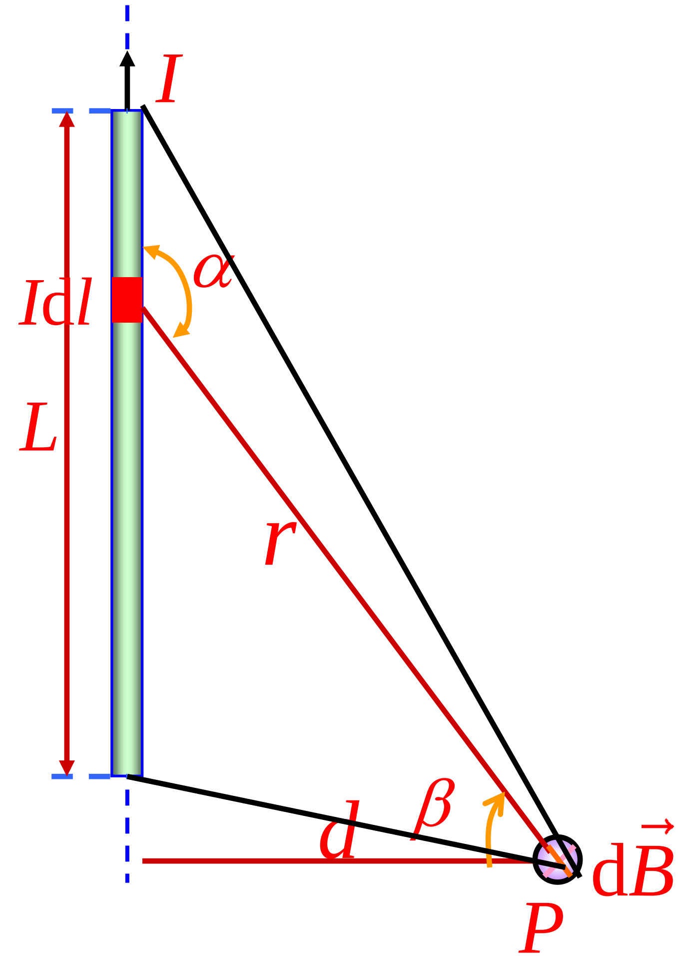
(1) 导线无限长，即 $\begin{cases}\beta_1=-\dfrac{\pi}{2}\\ \beta_2=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

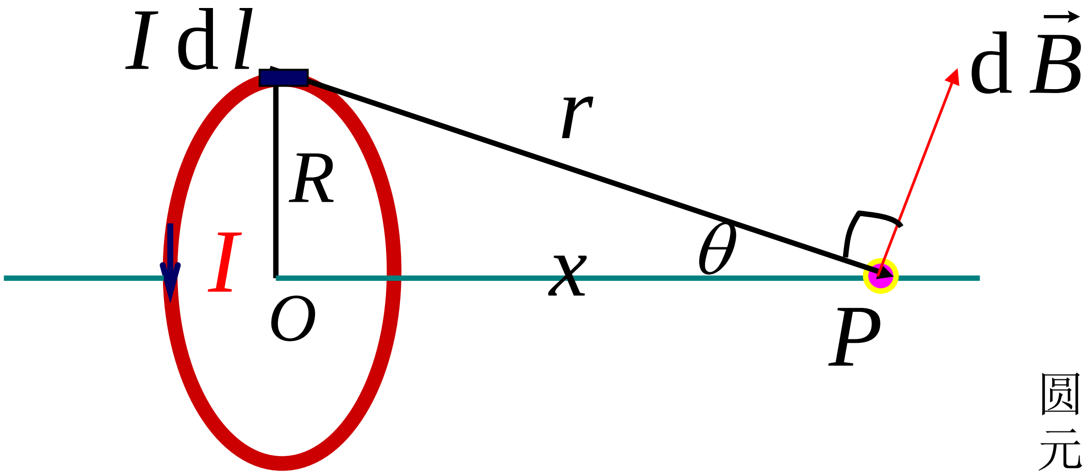
(2) 导线半无限长，场点与一端的连线垂直于导线

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\qquad\begin{cases}\beta_1=0\\ \beta_2=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

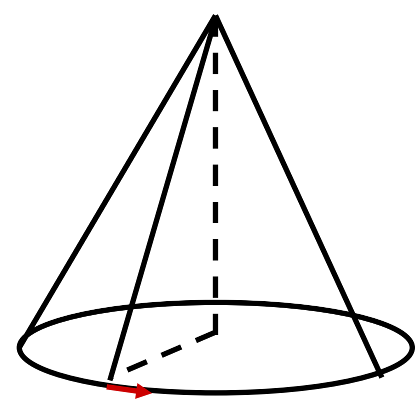
(3) P点位于导线延长线上，**B=0**



例8-2 载流圆线圈轴线上的磁场 设有圆形线圈L，半径为R，通以电流I。求轴线上一点磁感应强度。



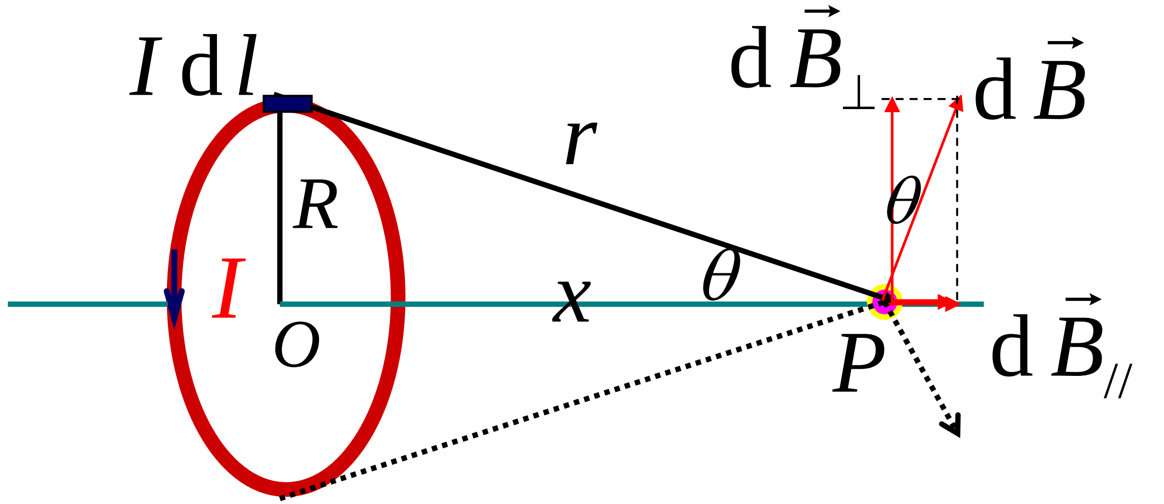
圆上任意电流元与电流元到轴线上P点的矢量之间夹角均为90^0



解： 在场点P的磁感强度大小为

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

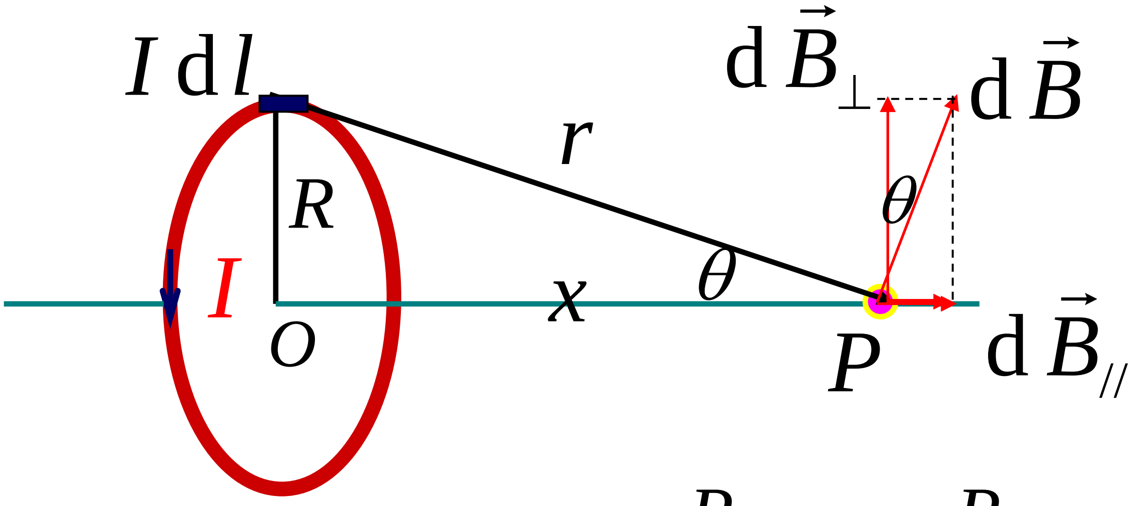
各电流元的磁场方向不相同，可分解为 $\mathrm{d}\vec{B}_\perp$和 $d\vec{B}_{//}$，由于圆电流具有对称性，其电流元的 $\mathrm{d}\vec{B}_\perp$ 逐对抵消，所以***P***点 $\vec{B}$的大小为：



$$B=\int_L \mathrm{d}B_{//}=\int_L \mathrm{d}B\sin\theta=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\,\mathrm{d}l}{r^2}\sin\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l \qquad =\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}2\pi R$$

$$B = \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi r^2} 2\pi R$$



$$\because r^2 = R^2 + x^2; \quad \sin\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{\therefore B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(R^2 + x^2)^{3/2}}}$$

$$S = \pi R^2$$

$$\therefore B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

讨论:

（1）在圆心处 $x=0$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

（2）在远离线圈处 $x>>R, x\approx r$

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{x^3}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{r^3}$$

载流线圈的磁矩

若线圈有N匝

引入 $\vec{P}_m=IS\vec{e}_n$ $\vec{P}_m=NIS\vec{e}_n$

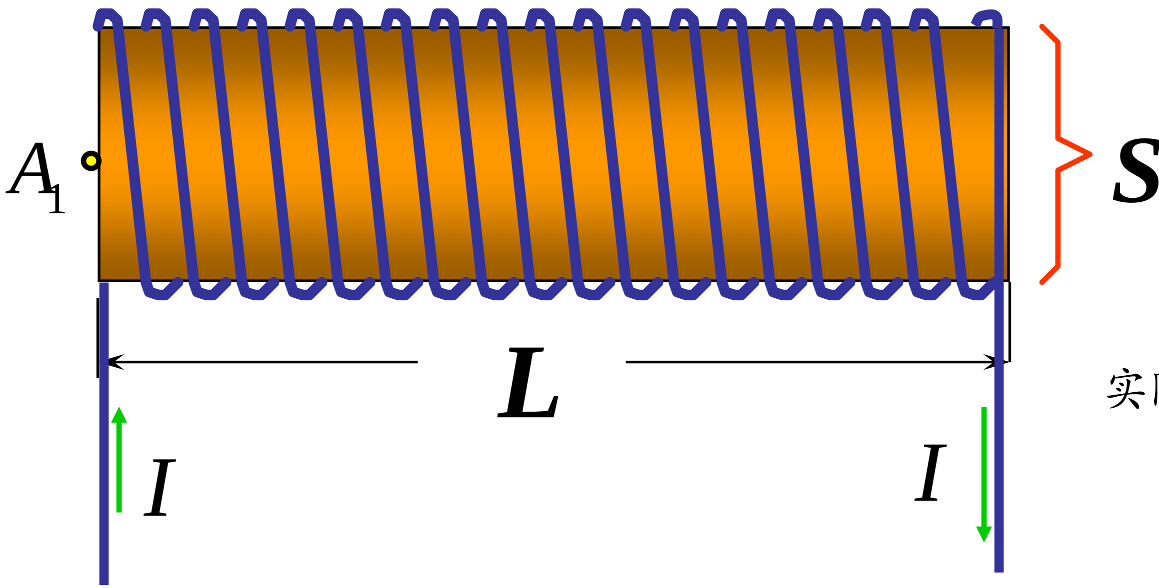
$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{P}_m}{r^3}$$

法线方向：线圈中电流流向按右手螺旋定则确定

上页 下页 返回 退出

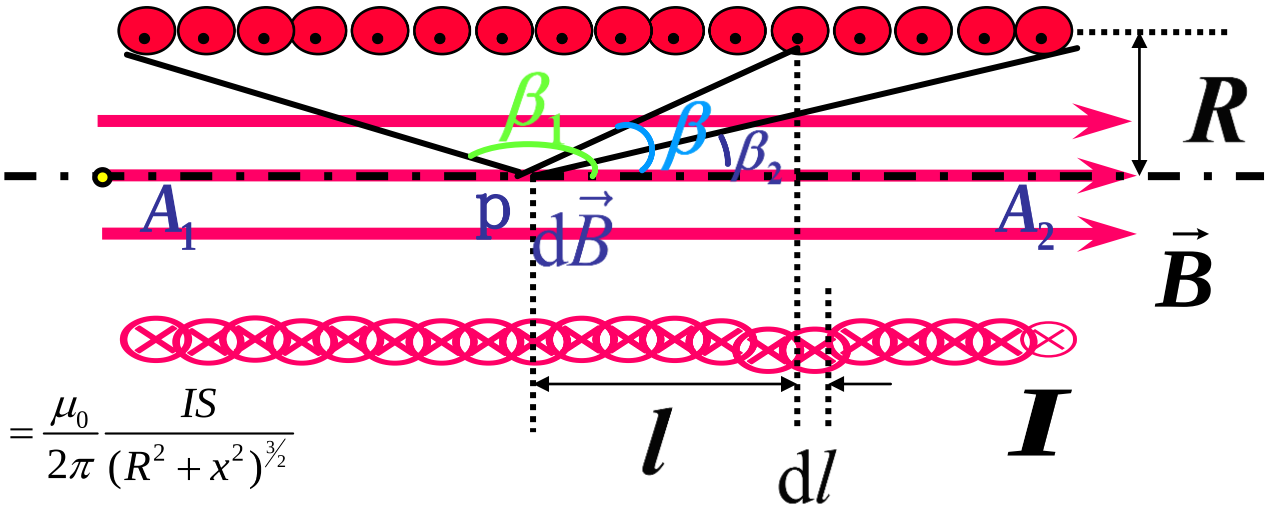
例 8 -3　载流直螺线管内部的磁场.

设螺线管的半径为***R***，电流为***I***，每单位长度有线圈***n***匝。计算螺线管内轴线上***P***点的电磁感应强度。



实际排列是仅仅挨着的

设每单位长度有线圈n匝

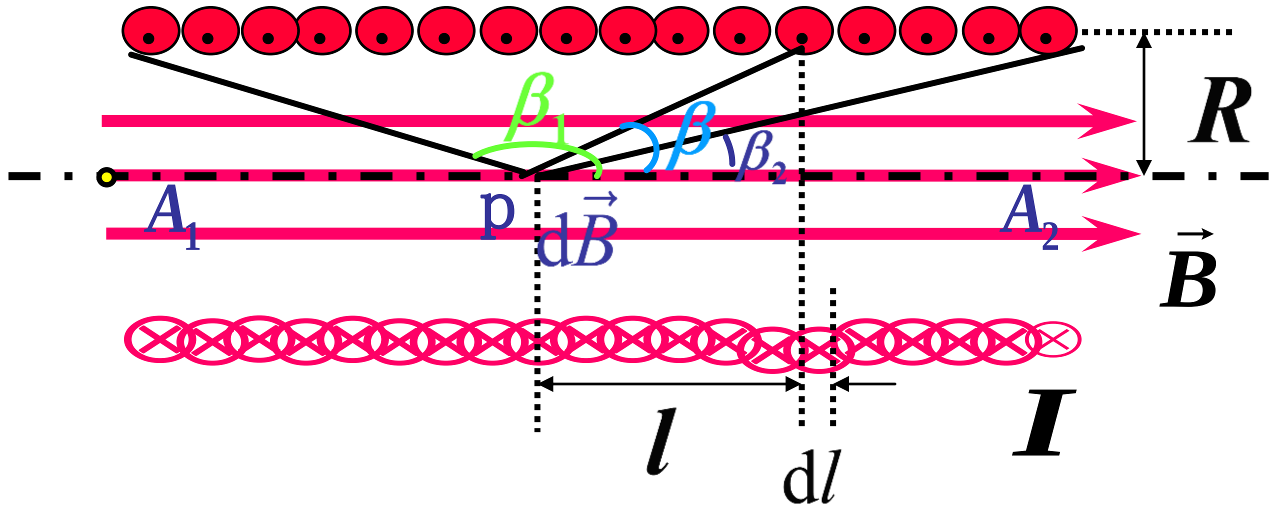


$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

在螺线管距P点l处任取一小段dl由于每匝可作平面线圈处理，n$\mathrm{d}l$匝线圈可作$In\mathrm{d}l$的一个圆电流，在P点产生的磁感应强度：

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 R^2 nI\,\mathrm{d}l}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow B=\int_L \mathrm{d}B=\int_L \frac{\mu_0 R^2 nI\,\mathrm{d}l}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$



设：β 是螺线管的轴线与从P点到dl处小段线圈上任一点的矢量 r 之间的夹角

$$\because l = R\cot\beta \qquad \therefore \mathrm{d}l = -R\csc^2\beta\,\mathrm{d}\beta$$

$$\text{又}\because R^2 + l^2 = R^2\csc^2\beta$$

$$\beta_1 \to \pi, \beta_2 \to 0$$

$$B = \int_L \frac{\mu_0 R^2 nI\,\mathrm{d}l}{2(R^2+l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} nI \int_{\beta_1}^{\beta_2} [-\sin\beta]\,\mathrm{d}\beta$$

$$= \frac{\mu_0}{2} nI(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

讨论：

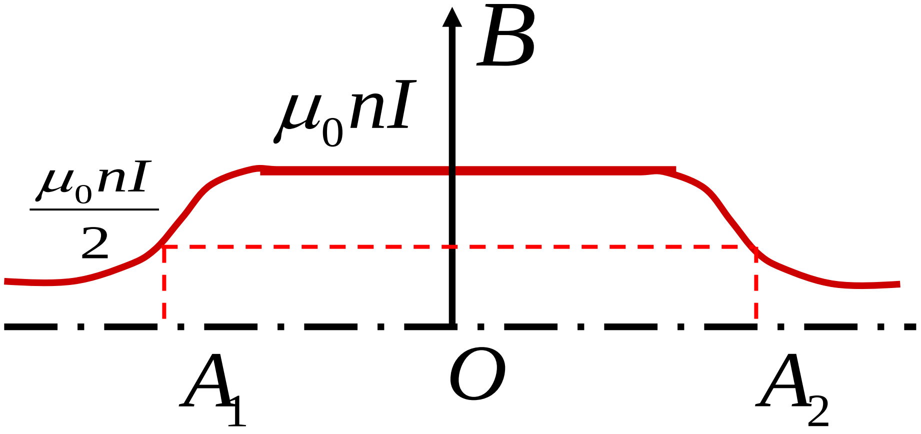
（1）螺线管无限长 $\beta_1\to\pi,\beta_2\to 0$

$$\boxed{B=\mu_0 nI}$$

（2）长螺线管的端点来说，例如在 A_1 $\beta_1\to\frac{\pi}{2},\beta_2\to 0$

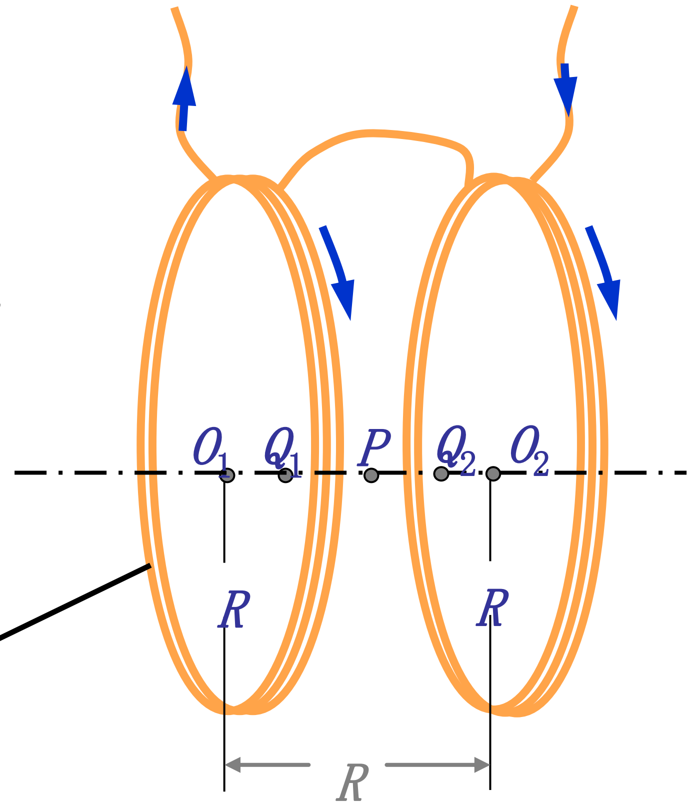
$$B=\mu_0 nI/2$$ 恰好是内部磁感应强度的一半

实际上，$L>>R$ 时，螺线管内部的磁场近似均匀，大小为 $\mu_0 nI$



例题8-4　亥姆霍兹线圈，在实验室中，常应用亥姆霍兹线圈产生所需的不太强的均匀磁场。特征是由一对相同半径的同轴载流线圈组成，当它们之间的距离等于它们的半径时，试计算两线圈中心处和轴线上中点的磁感应强度。从计算结果将看到，这时在两线圈间轴线上中点附近的场强是近似均匀的。

解： 设两个线圈的半径为R，各有N匝，每匝中的电流均为I，且流向相同（如图）。两线圈在轴线上各点的磁场方向均沿轴线向右，在圆心O_1、O_2处磁感应强度相等，大小都是



单匝单个线圈

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$x=0, x=R$$

$$B_0=\frac{\mu_0 NI}{2R}+\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left(R^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 NI}{2R}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=0.677\frac{\mu_0 NI}{R}$$

两线圈间轴线上中点P处，磁感应强度大小为

$$B_P = 2\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{8\mu_0 NI}{5\sqrt{5}R}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

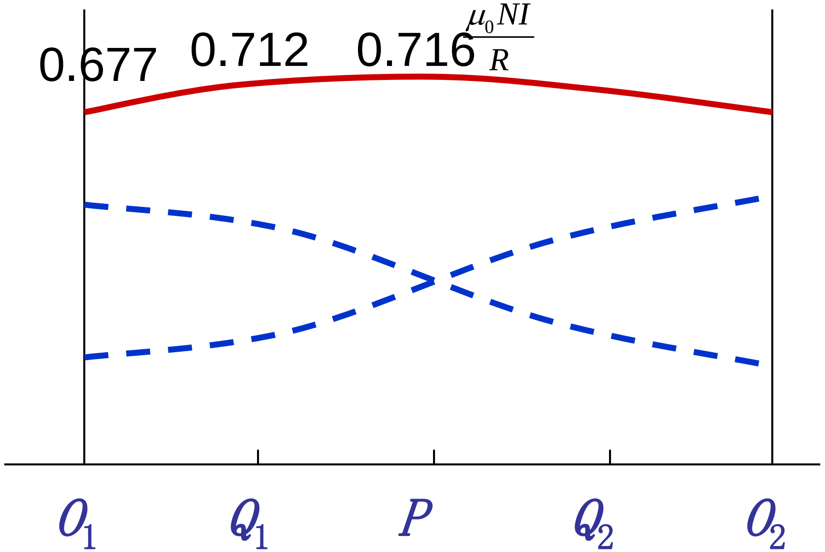
$$= 0.716\frac{\mu_0 NI}{R}$$

此外，在P点两侧各$R/4$处的O_1、O_2 两点处磁感应强度都等于

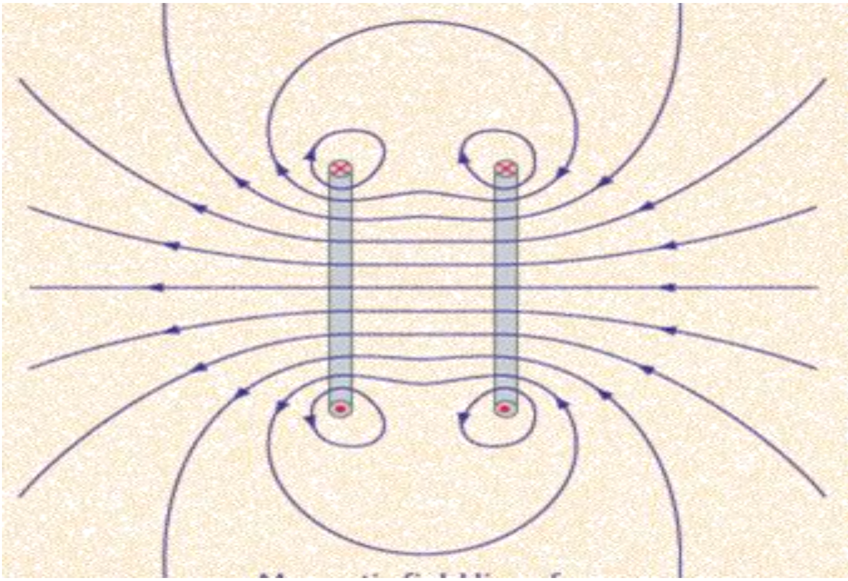
$$B_Q = \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{3R}{4}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2R}\left(\frac{4^3}{17^{3/2}}+\frac{4^3}{5^3}\right) = 0.712\frac{\mu_0 NI}{R}$$

在线圈轴线上其他各点，磁感应强度的量值都介乎B_0、B_P之间。由此可见， 在P点附近轴线上的场强基本上是均匀的，其分布情况约如图所示。图中虚线是每个圆形载流线圈在轴线上所激发的场强分布，实线是代表两线圈所激发场强的叠加曲线。右图为磁感线分布情况.



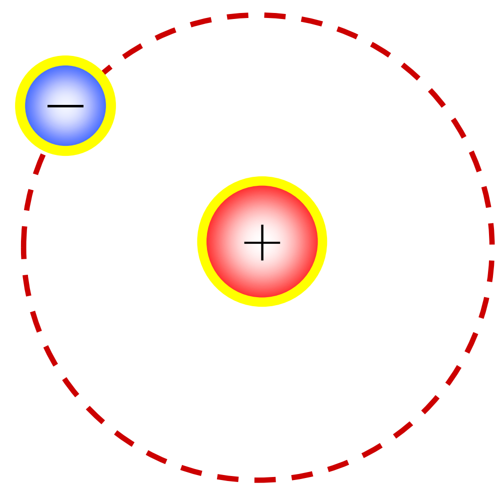
俯视图



例题 8－4 在玻尔的氢原子模型中，电子绕原子核运动相当于一个圆电流，具有相应的磁矩，称为轨道磁矩。试求（1）轨道中心磁感应强度B的大小；（2）轨道磁矩μ与轨道角动量L之间的关系；（3）计算氢原子在基态时电子的轨道磁矩。

解： （1）为简单起见，设电子绕核作匀速圆周运动，圆的半径为r，转速为n。电子的运动相当于一个圆电流，电流的量值为$I=ne$，利用例 2 的结果，轨道中心的磁感应强度的大小为

$$B_0 = \frac{\mu_0 ne}{2r}$$



（2）圆电流的面积为$S=\pi r^2$，所以相应的磁矩为

$$\mu = IS = ne\pi r^2$$

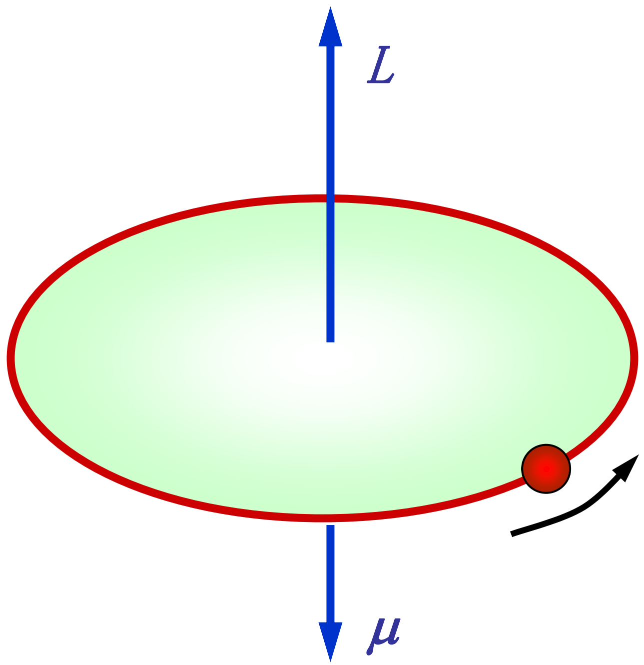
电子角动量为

$$L = m_e vr = m_e 2\pi rnr = 2m_e n\pi r^2$$

M_e是电质量，比较两式，可得

$$\mu = \frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

角动量和磁矩的方向可分别按右手螺旋规则确定。因为电子运动方向与电流方向相反，所以L和μ的方向恰好相反，如图所示。上式关系写成矢量式为



$$\mu = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

这一经典结论与量子理论导出的结果相符。

（3）由于电子的轨道角动量是满足量子化条件的，在玻尔理论中，其量值等于（$h/2\pi$）d的整数倍。所以氢原子在基态时，其轨道磁矩为

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

它是轨道磁矩的最小单位（称为玻尔磁子）。

将e=1.602×10^{-19} C，m_e= 9.11×10^{-31}kg ，普朗克常量h= 6.626×10^{-34}J·s代入，可算得

$$\mu_B = 9.273\times10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}$$

原子中的电子除沿轨道运动外，还有自旋，电子的自旋是一种量子现象，它有自己的磁矩和角动量，电子自旋磁矩的量值等于玻尔磁子。