**（一）填空题**

1. 已知，其中，求矩阵\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

解：由于知，有3个不同的特征值1,2,3. 所以使得，故.

2. 三阶实对称矩阵*A*满足. 则的全部特征值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

解：设是矩阵的特征值，则存在非零向量，从而.由于，故，由.于是的特征值为.由于，有一特征值为，设另外两个特征值为，则，从而， 故.

**（二）选择题**

1. 设*A*是一个阶方阵，下列陈述中正确的是（ B ）

（A）如存在数和向量使, 则是*A*的属于特征值的特征向量.

（B）如存在数和非零向量，使，则是*A*的特征值.

（C）矩阵*A*的2个不同的特征值可以有同一个特征向量

（D）若 是*A*的3个互不相同的特征值，依次是*A*属于 的特征向量，则向量有可能线性相关

2. 设是矩阵*A*的特征方程的3重根，*A*的属于的线性无关的特征向量的个数为*k*，则必有（ A ）

（A） （B） （C） （D）

3. 设*A*是正交矩阵，则下列结论错误的是（ B ）

（A） （B）

（C） （D）矩阵*A*的行（列）向量组是正交单位向量组

4. 若矩阵*A*是*n*阶实对称矩阵，则说法正确的是 ( C )

（A）矩阵*A*的*n*个特征向量两两正交

（B）矩阵*A*的*n*个特征向量组成单位正交向量组

（C）矩阵*A*的*k*重特征值有

（D）矩阵*A*的*k*重特征值有

**解：**实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交，但未必两两正交；个特征向量未必是单位正交向量组，故（A），（B）均不正确. 由于实对称矩阵*A*必可对角化，*A*的 属于*k*重特征值的线性无关的特征向量必有*k* 个，故.故应选（C）

5. 下列矩阵中，和相似的是（ C ）

（A） （B）

（C） （D）

**解：**（A）中，，故和不相似. （B）中，，故和不相似. （D）中，的特征值为，的特征值为，故和不相似. 由排除法可知：只有（C）中矩阵和可能相似. 事实上，在（C）中，和的特征值均为，由于和均可相似对角化，也即和均相似于，故和相似. 故选（C）

6. 设为阶矩阵，可逆且，则四个命题 ①， ② ，③， ④ 中正确的有（ D ）个.

（A）1个 （B）2个 （C）3个 （D）4个

解：由于，可知：存在可逆矩阵，使得.故，可知、、.

又由于可逆，可知，故. 故正确的命题有4个，选（D）

7. 下列矩阵中，不能相似对角化的是（ D ）

（A） （B） （C） （D）

解：选项（A）中矩阵为实对称矩阵，可以相似对角化. 选项（B）中矩阵有三个互不相同的特征值：，可以相似对角化. 选项（C）中矩阵特征值为，由于该矩阵秩为，可知其二重特征值有两个线性无关的特征向量，故可以相似对角化. 选项（D）矩阵特征值为，令该矩阵为，，，可知其二重特征值只有一个线性无关的特征向量，故不可以相似对角化. 故选（D）.

8. 已知三阶矩阵的特征值为，则下列结论中不正确的是（ C ）

（A）矩阵是不可逆的

（B）矩阵的主对角元素之和为

（C）特征值所对应的特征向量正交

（D）方程组的基础解系由一个向量构成

解：根据，，知（A），（B）正确；而是单根，因此，即的基础解系只由一个线性无关解向量构成，可知（D）也正确.因此唯一可能不正确的选项是（C）.事实上，由于没有限定为实对称矩阵，故不同特征值的特征向量不一定正交.故选（C）.

**【评注】： 特征值的重数与矩阵的秩的关系：** 由于矩阵的重特征值最多只能有个线性无关的特征向量，故假设为矩阵的重特征值，则，也即.有两种情况可以确定：一是当矩阵可相似对角化时，必有；二是当为单特征值时，由于，又由于矩阵不满秩，故.本题在确定的基础解系所含向量个数时，用到了上述结论：由于0是单特征值，故

9. 设阶方阵，且对，则（ A ）

（A） （B）相似

（C）*A*与*B*合同 （D）*A*与*B*同时可相似对角化或不可相似对角化

解：由可知*A*与*B*具有相同特征值，而的特征值为， 所以

故（A）是正确的. 对于（B），（C），（D），可以通过举反例予以排除. 例如，则的特征多项式相同，但不相似，否则，矛盾，故可以排除（B）.同时，由于矩阵不可相似对角化，故可排除（D）. 最后，由于合同矩阵是在实对称矩阵的范围内讨论，可知（C）不正确. 故唯一正确的选项是（A）

10. 若三阶矩阵的特征值为，且，则（ A ）

（A）1 （B）2 （C）3 （D）不能确定

解：因为矩阵有三个不同的特征值，所以能对角化，则有，那么，即.因此.故选（A）

11.已知是矩阵属于特征值的特征向量，是矩阵属于特征值的特征向量，那么矩阵不能是（ D ）

（A） （B）

（C） （D）

**解：**设，使得，则有，将*P*代入得，即

可见是矩阵属于特征值的特征向量，又因矩阵可逆，因此，线性无关. （1）若是属于特征值的特征向量，则仍是属于特征值的特征向量，故（A）正确. （2）若是属于特征值的特征向量，则仍是属于特征值的特征向量.本题中，是属于的线性无关的特征向量，故仍是的特征向量，并且线性无关，故（B）正确. （3）关于（C），因为均是的特征向量，所以谁在前谁在后均正确.即（C）正确. （4）由于是不同特征值的特征向量，因此不再是矩阵的特征向量，故（D）错误.

**【评注】：**相似对角化中，只要有的对角元是矩阵*A*的*n*个特征值，矩阵*P*的列向量是与中特征值对应的*n*个线性无关的特征向量，所得的与*A*就能满足等式

12. 设四阶对称矩阵A满足，若，则矩阵*A*相似于（ D ）

（A）（B）（C）（D）

**（三）解答题**

1. 设，求一个正交矩阵使得为对角矩阵.

解：（1）求特征值 由特征方程，可得的特征值为，，.

（2）求不同特征值对应的齐次方程组的基础解系

①当，解方程, 系数矩阵，同解方程组为其中为自由未知量，令，得一个基础解系

②当时，解方程, 系数矩阵，同解方程组其中为自由未知量，令，得一个基础解系

③当时，解方程, 系数矩阵，同解方程组为其中为自由未知量，令，得一个基础解系

（3）将（2）中所有向量正交化 因为特征值不相等，则正交.

（4）将（3）中向量单位化 将单位化得，，

则 取，且

2. 设三阶矩阵的特征值为-1,2,5，矩阵，求（1）的特征值；（2）可否对角化，若可对角化求出与相似的对角阵；（3）求.

解：（1）因为，所以矩阵的特征值为-1,2,5对应生成矩阵B的特征值：

（2）因为三阶矩阵B有三个不同的特征值：，所以矩阵可以相似对角阵化，且

（3），

且，所以

3. 设，证明.

证：因为，则存在可逆矩阵*P*使得，等式两边*k*次幂，

则，所以.

4.设为三阶方阵，为三维线性无关列向量组，且有，.（1）求的全部特征值；（2）矩阵是否可对角化？

解：⑴ 由已知得，，，

，又因为线性无关，所以，，.所以-1,2是的特征值.是相应的特征向量.又由线性无关，得也线性无关，所以-1是矩阵的二重特征值，即的全部特征值为-1,-1，2.

（2）由线性无关可证明线性无关，即矩阵有三个线性无关的特征向量，所以矩阵可相似对角化.

**【评注】：**对于抽象的矩阵，经常利用定义与性质讨论其特征值与特征向量问题

5. 设三阶实对称矩阵的各行元素之和均为3，向量是线性方程组的两个解，求：（1）矩阵*A*的特征值与特征向量（2）正交矩阵*Q*和对角矩阵，使得.

解：（1）设，矩阵的各行元素之和均为3，即

，则，矩阵*A*的一个特征值为3，对应的一个特征向量，又因为，所以矩阵*A*的另外一个特征值为0，对应的特征向量，显然线性无关，所以三阶矩阵*A*的三个特征值分别为，且属于特征值的所有特征向量为（不全为0的任意常数），属于特征值的所有特征向量为，（的任意常数）.

（2）先将正交化，取，，再将单位化， ，，，得到对角矩阵：和正交矩阵，使得