数字图像处理

第十讲
离散图像变换

主要内容

- 基本思想和基本概念
- 余弦型变换
- 正弦型变换和哈特利变换
- 方波型变换
- 要点总结

问题

傅里叶变换提供了一个通用的数学变换。但它有一个假定：作用在连续图像上，而且结果可以取复数。

现实图像通常是离散的，另外复数计算对于计算机不好表示。

因此，需要专门了解离散图像上的变换。

之前我们学习过离散傅里叶变换。它只是其中一种离散图像变换

背景知识

- 最简单的做法：线性变换
- 两类
  - 一维离散线性变换
  - 二维离散线性变换

一维离散线性变换

假定图像表示为一个向量x

线性变换定义：

$$y = Tx$$

Nx1的输出向量

Nx1的输入向量

核矩阵: 大小NxN

一维离散线性变换

- 例子

平面坐标系中的向量旋转变换

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

2x1的输出向量

2x1的输入向量

核矩阵: 大小2x2

问题

在图像处理中，核矩阵要求满足非奇异性。(为什么？)

逆线性变换:

$$x = T^{-1}y$$

如果T奇异，那么T不可逆，则线性变换后，图像无法复原

问题

- 可逆矩阵太多。什么样的可逆矩阵更实用?

- 两大类
  - 正交矩阵=》正交变换
  - 酉矩阵=》酉变换

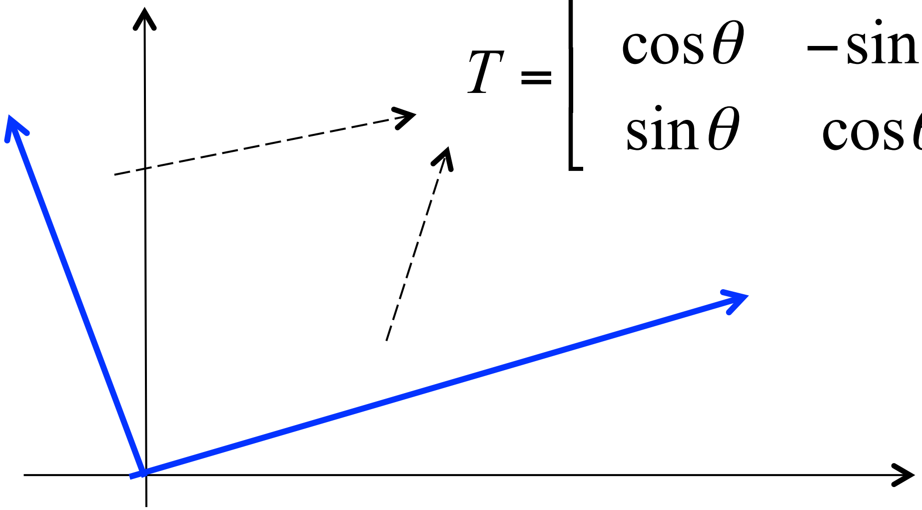
正交矩阵

正交矩阵定义

$$T^{-1} = T', TT' = I \rightarrow \text{单位阵}$$

T'表示T矩阵的转置

正交矩阵的例子



$$T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

相当于将输入图像投影到一个N维正交空间。T的每一行对应于N维空间的正交基

请课后证明T为正交矩阵

正交矩阵的好处

- 线性变换

$$y = Tx$$

- 逆变换

$$x = T^{-1}y = T'y$$

  - 不涉及求逆计算，减少了计算开销

酉矩阵

酉矩阵

$$T^{-1} = (T^*)', T(T^*)' = I \longrightarrow \text{单位阵}$$

T*表示矩阵T的共轭矩阵（如果T为实数矩阵，T*=T；如果T为复数矩阵，则T*将T矩阵的虚数部分取相反数）

相当于将输入图像投影到一个N维复数正交空间。T的每一行对应于N维复数空间的正交基

傅里叶变换与酉变换

- 离散傅里叶变换矩阵是一个酉矩阵

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \exp(-j2\pi k \frac{i}{N})$$

$$F = Wf, W_{i,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(-j2\pi k \frac{i}{N})$$

- 怎么证明?

举例证明

- **当N=4时**

$$T_4 = 0.5\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

证明过程

- 证明：一维离散傅立叶变换是酉变换。

举例$N=4$：

$$T_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\quad T_4^{*}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & -j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}$$

$$T_4T_4^{*\prime}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & -j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

因此通常为了归一化，傅立叶变换时乘以系数$\frac{1}{\sqrt{N}}$

二维离散线性变换

二维情况下，图像表示为矩阵

线性变换定义：

$$G(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\Im(x,y,u,v)F(x,y) \qquad 0\le u,v\le N-1$$

NxN的输出矩阵

核矩阵: 大小N^2xN^2

NxN的输入矩阵

二维线性变换核矩阵的结构

- 核矩阵满足如下结构

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} n=1 & n=2 & & n=N \end{array} \\
\begin{array}{c} m=1 \\ m=2 \\ \\ m=N \end{array} &
\begin{bmatrix}
[\quad] & [\quad] & \cdots & [\quad] \\
[\quad] & [\quad] & \cdots & [\quad] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
[\quad] & [\quad] & \cdots & [\quad]
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

核矩阵可看作是一个N^2XN^2的块矩阵，每行有N个块，共有N行。

问题

- 直接考虑核矩阵太复杂。计算时，引入可分离假设

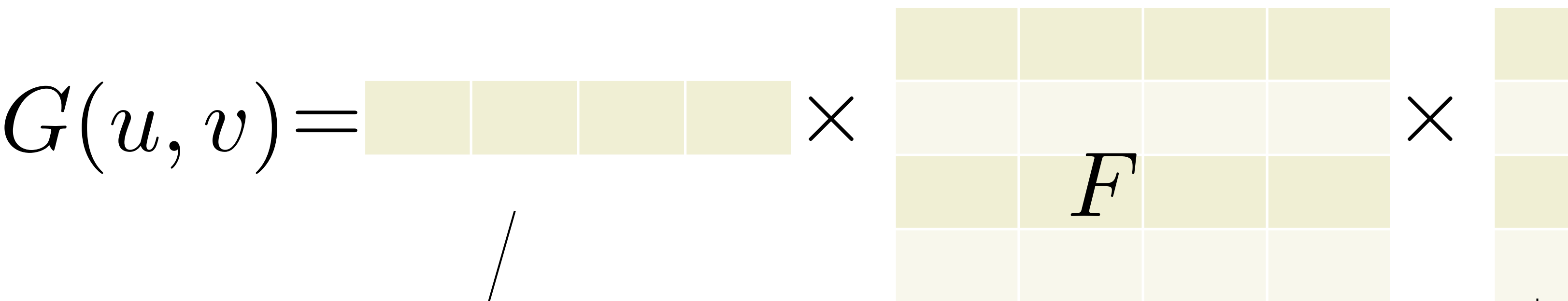
可分离假设：核函数能分解成行方向上的分量与列方向上的分量的乘积

$$\Im(x,y,u,v)=T_r(x,u)T_c(y,v)$$

$$G(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\left[\sum_{y=0}^{N-1}T_c(y,v)f(x,y)\right]T_r(x,u)$$

可分离假设的好处

$$G(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\left[\sum_{y=0}^{N-1}T_c(y,v)f(x,y)\right]T_r(x,u)$$



$T_c(v) = [T_c(v,1),\ldots,T_c(v,1)]$ $T_r(u) = [T_r(1,u);T_r(2,u);\ldots;T_r(N,u)]$

$$G = T_c \times F \times T_r$$

进一步简化

假定T_c=T_r'：

$$T_c = T, T_r = T'$$

则G可进一步简化：

$$G = TFT'$$

问题

- 如果

$$G = TFT'$$

且T为正交矩阵。如果从G中复原原图像F?

$$F = T^{-1}G(T')^{-1}$$

$$F = T'GT$$

问题

- 如果

$$G = TFT'$$

且T为酉矩阵。如果从G中复原原图像F?

$$F = (T^*)'GT^*$$

特别的，二维离散傅里叶变换矩阵是一个可分离，对称的酉矩阵。因此，傅里叶变换可以复原原图像

小结

- 一维线性变换中，核矩阵为什么需要满足非奇异性？核矩阵为什么选用正交矩阵或酉矩阵？
- 说明傅里叶变换是酉矩阵。
- 二维离散线性变换中，核矩阵直接计算太复杂，怎么办？（可分离假设）
- 可分离假设的好处是什么？
- 以二维离散傅里叶变换为例，线性变换后如何复原？

基函数和基图像

- **基函数**

每一个酉变换或正交变换的核矩阵对应于N维向量空间的一组基，产生这一组基的函数称为基函数：

例如对于傅里叶变换采用了相同形式的基函数，但频率不同：

基函数和基图像

- **基图像**

如果将核矩阵作用在只有一个非零元素的输入图像上，所得到的图像为基图像；

主要用于显示，有时会被用于反映离散变换的物理直观意义。

常用离散变换

- 余弦型变换
- 正弦型变换和哈特利变换
- 方波型变换

问题

- 回顾一维离散傅里叶变换公式

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

$$x[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

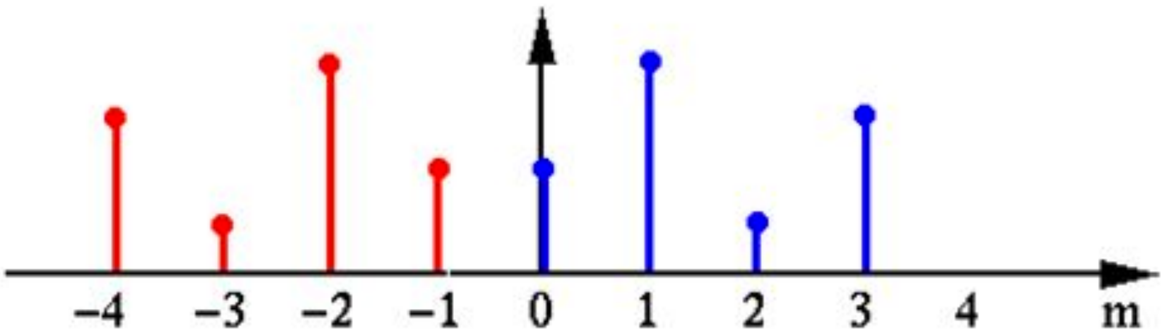
它涉及到复数运算，不适合计算机处理。
如何避免复数运算?

余弦型变换（DCT）

- 一个基本想法：能不能只用其中的余弦来计算。
- 观察：当x[m]为偶函数时，傅立叶变换只需要进行余弦实变换。
- 问题：如何处理任意的函数x[m]?
  - 答案：把x[m]处理成偶函数然后进行计算

一维余弦型变换

第一步：向坐标轴反方向复制一份序列



一维余弦型变换

第二步：左移0.5的位置得到偶函数

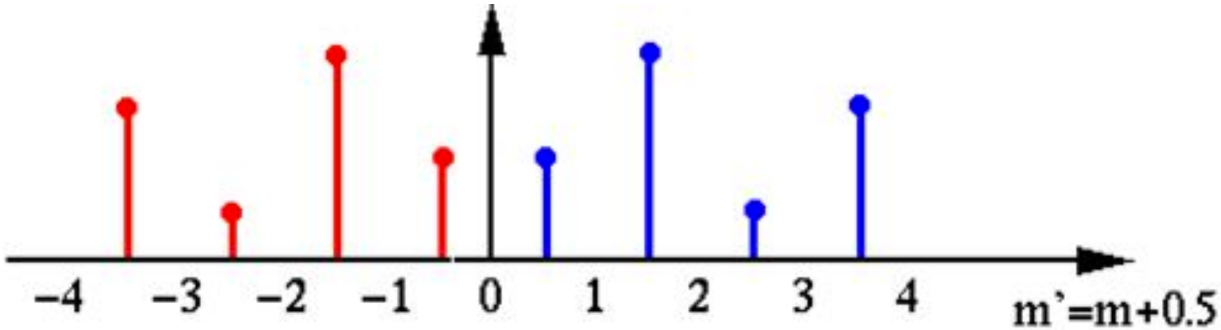


图 1

具体推导

$$\hat{x}[n]=\frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{m'=-N+\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}}x\left[m'-\frac{1}{2}\right]e^{-j\left(2\cdot\frac{\pi}{2N}\right)m'n}$$

$$\hat{x}[n]=\frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{m'=-N+\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}}x\left[m'-\frac{1}{2}\right]\cos\left(\frac{2\pi m'n}{2N}\right)-\frac{j}{\sqrt{2N}}\sum_{m'=-N+\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}}x\left[m'-\frac{1}{2}\right]\sin\left(\frac{2\pi m'n}{2N}\right)$$

$$\hat{x}[n]=\frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{m'=-N+\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}}x\left[m-\frac{1}{2}\right]\cos\left(\frac{2\pi m'n}{2N}\right)$$

$$\hat{x}[n]=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{m'=\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}}x\left[m'-\frac{1}{2}\right]\cos\left(\frac{2\pi m'n}{2N}\right)$$

令 m' = m+1/2 代入上式做变量代换：

$$\hat{x}[n]=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{m'=\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}}x\left[m'-\frac{1}{2}\right]\cos\left(\frac{2\pi m'n}{2N}\right)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{m=0}^{N-1}x[m]\cos\left(\frac{2\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)n}{2N}\right)$$

$$\hat{x}[n]=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{m=0}^{N-1}x[m]\cos\left(\frac{(2m+1)\pi n}{2N}\right)$$

$$\hat{x}[n]=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{m=0}^{N-1}x[m]\cos\left(\frac{\pi}{N}\left(m+\frac{1}{2}\right)n\right)$$

一维余弦变换的归一化处理

因此余弦正变换：$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]$

为保证每行正交向量模=1，对上式进行归一化处理，

$$F(u)=a(u)\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]$$

$$a(u)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{N}} & \text{当}u=0\text{时}\\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} & \text{当}u\neq 0\text{时}\end{cases}$$

余弦变换采用矩阵表示为$F_C=Cf$

其中核矩阵C中元素为$C_{x,u}=a(u)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]$

问题

- 请写出N=4时余弦变换核矩阵C

$$C=\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{1}{N}} \\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{3\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{5\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{7\pi}{2N} \\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{2\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{6\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{10\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{14\pi}{2N} \\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{3\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{9\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{15\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{21\pi}{2N} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix}$$

问题

- 计算*f*=[1 3 3 1]的余弦变换。

$$F = Cf = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

余弦反变换

- 余弦变换是一种特殊函数的傅立叶变换，因此一定存在反变换

- 傅立叶反变换的核矩阵即是W阵的共轭矩阵，所以余弦变换共轭矩阵即等于本身

$$f = C^T F_C$$

二维余弦型变换

- 基本想法：把f[x,y]处理成二维偶函数
- 做法：先水平做对折镜象，然后再垂直做对折镜象。

二维余弦型变换

- 公式

$$f(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & 当x,y\geq 0时 \\ f(-1-x,y) & 当x<0\,y\geq 0 \\ f(x,-1-y) & 当x\geq 0\,y<0 \\ f(-1-x,-1-y) & 当x<0\,y<0 \end{cases}$$

$$F_C(u,v)=a(u)a(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]$$

用矩阵表示为$F_C=CfC^T$

余弦变换的性质

(1)余弦变换为实正交变换$C = C^{*}, C^{-1} = C^{T}$

(2)离散序列的余弦变换是DFT的对称扩展形式；

(3)和傅立叶变换相同，余弦变换也存在快速变换；

(4)和傅立叶变换类似，余弦变换具有将高度相关数据能量集中的优势；

问题

- 求下列图像的余弦变换

$$(1)\ f_1=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\1 & 3 & 3 & 1\\1 & 3 & 3 & 1\\1 & 3 & 3 & 1\end{bmatrix}\qquad (2)\ f_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653\\0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5\\0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271\end{bmatrix}$$

问题

- 求下列图像的余弦变换

$$(1)\ f_1=\begin{bmatrix}1&3&3&1\\1&3&3&1\\1&3&3&1\\1&3&3&1\end{bmatrix}\qquad (2)\ f_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

解：$F_1=Cf_1C^T=\begin{bmatrix}8&0&-4&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$F_2=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

效果图

原图

余弦变换

效果图

将大部分信息滤掉

重构图像

点评

- 熟悉余弦变换的原理
- 熟悉一维、二维余弦变换公式
- 掌握基本余弦变换公式的计算

常用离散变换

- 余弦型变换
- 正弦型变换和哈特利变换
- 方波型变换

正弦型变换

- 启发：当x[m]为奇函数时，傅立叶变换只需要进行正弦实变换。
- 做法：添加一个等于0的点，形成n+1点。水平右移1个单位。然后再做奇对称，形成2n+2个点

一维正弦型变换

- 公式

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\sin\frac{\pi(x+1)(u+1)}{N+1}\qquad 0\le u\le N-1$$

一维正弦反变换为：

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sum_{u=0}^{N-1}F(u)\sin\frac{\pi(x+1)(u+1)}{N+1}\qquad 0\le x\le N-1$$

二维正弦型变换

- 公式

$$F(u,v)=\frac{2}{N+1}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\sin\frac{\pi(x+1)(u+1)}{N+1}\sin\frac{\pi(y+1)(v+1)}{N+1}$$

二维正弦反变换为：

$$f(x,y)=\frac{2}{N+1}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\sin\frac{\pi(x+1)(u+1)}{N+1}\sin\frac{\pi(y+1)(v+1)}{N+1}$$

正弦型变换的性质

(1)正弦变换为实对称正交变换$S = S^* = S^{-1} = S^T$；

(2)和傅立叶变换相同，正弦变换也存在快速变换，但要求$N = 2^p - 1$;

(3)和傅立叶变换类似，正弦变换具有将高度相关数据能量集中在低频的优势；

哈特利变换（Hartley）

- 基本想法：用Cas函数近似DFT复数计算。

$$F_H(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)cas\left[\frac{2\pi}{N}(xu+yv)\right]$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)cas\left[\frac{2\pi}{N}(xu+yv)\right]$$

其中$cas(\theta)=\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

将二维分离为一维，DHT的核矩阵元素为

$$H_{x,u}=\frac{1}{\sqrt{N}}\left[cas\left(2\pi\frac{xu}{N}\right)\right]$$

常用离散变换

- 余弦型变换
- 正弦型变换和哈特利变换
- 方波型变换

问题

- 之前离散余弦变换、离散正弦变换、以及离散哈特利变换都采用实数运算来避免复数计算。
- 但是对于计算机而言，整数（最好是采用1，0，-1这样类型的整数）更方便计算。
- 能不能设计这样的变换?
  - 方波型变换

离散沃尔什变换（Walsh）

基本想法：核矩阵中只有+1和-1元素，要求N=2^p，是对称的可分离的酉矩阵。

在$N=2^p$时，定义一维离散沃尔什变换为

$$W(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\prod_{i=0}^{p-1}(-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(u)}$$

常数项也可取$\sqrt{\frac{1}{N}}$

其中$b_i(x)$是x的二进制表示的第i位值。

如$p=3$，$N=2^p=8$，$x=6$（二进制110）时，

$b_0(6)=0$，$b_1(6)=1$，$b_2(6)=1$。

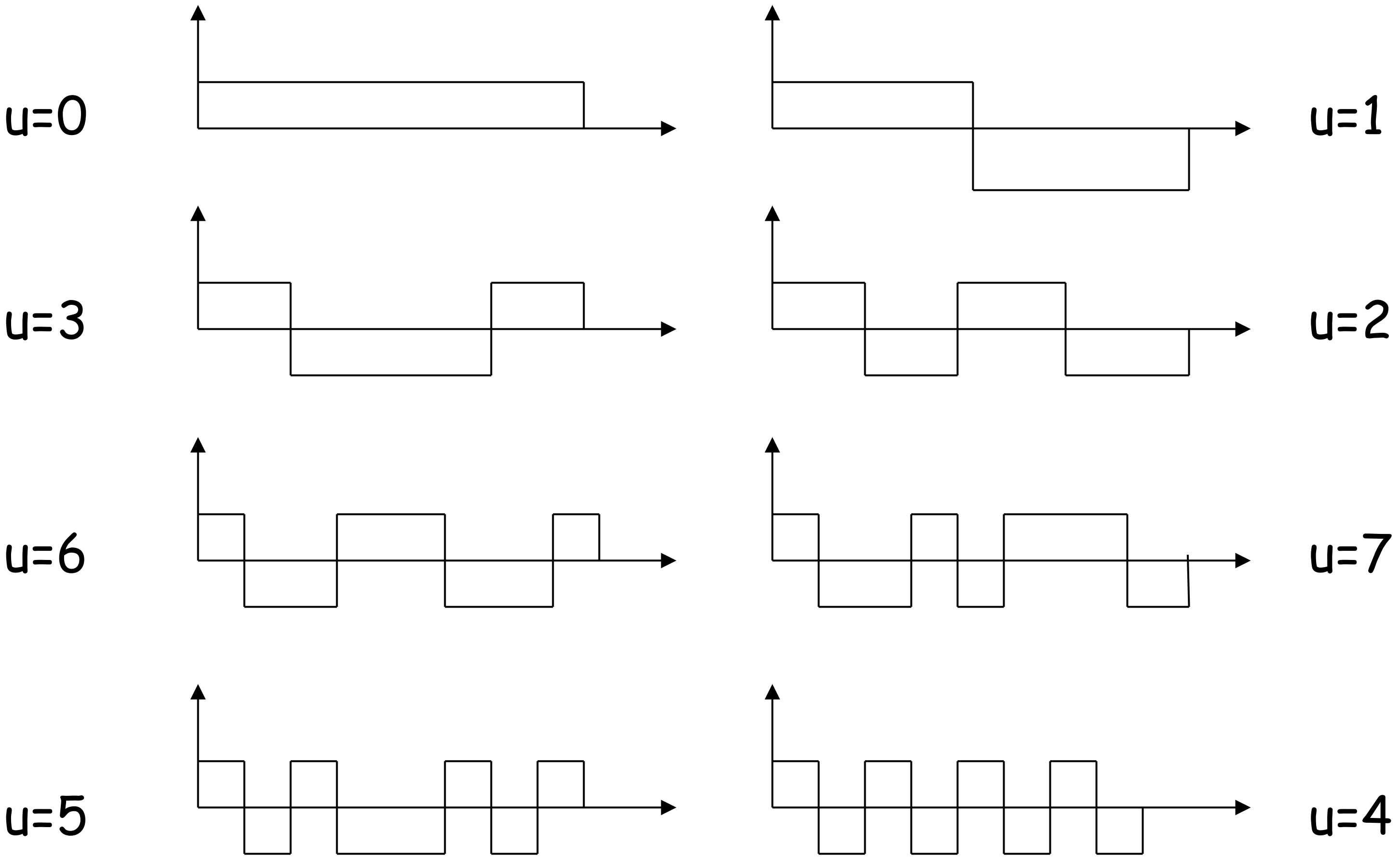
N=2,4,8时的b值

N值	N=2 p=1		N=4 p=2				N=8 p=3							
x值	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	7
x二进制	0	1	00	01	10	11	000	001	010	011	100	101	110	111
$b_0(x)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$b_1(x)$			0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$b_2(x)$							0	0	0	0	1	1	1	1

N=2,4,8时的沃尔什变换核

N	N=2 p=1		N=4 p=2				N=8 p=3							
x / u	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	7
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
2			+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-
3			+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+
4							+	-	+	-	+	-	+	-
5							+	-	+	-	-	+	-	+
6							+	-	-	+	+	-	-	+
7							+	-	-	+	-	+	+	-

图例



问题

- 计算N=4时沃尔什变换

解：通过定义得，

$$W(0)=\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3}\left[f(x)\prod_{i=0}^{1}(-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(0)}\right]=\frac{1}{4}[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]$$

$$W(1)=\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3}\left[f(x)\prod_{i=0}^{1}(-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(1)}\right]=\frac{1}{4}[f(0)+f(1)-f(2)-f(3)]$$

$$W(2)=\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3}\left[f(x)\prod_{i=0}^{1}(-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(2)}\right]=\frac{1}{4}[f(0)-f(1)+f(2)-f(3)]$$

$$W(3)=\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3}\left[f(x)\prod_{i=0}^{1}(-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(3)}\right]=\frac{1}{4}[f(0)-f(1)-f(2)+f(3)]$$

二维离散沃尔什变换

- 公式

$$W(u,v)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\prod_{i=0}^{p-1}(-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(u)+b_i(y)b_{p-1-i}(v)}$$

$$=\frac{1}{N}\left[\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x,y)\prod_{i=0}^{p-1}(-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(u)}\right]\prod_{i=0}^{p-1}(-1)^{b_i(y)b_{p-1-i}(v)}$$

$$=\frac{1}{N^2}GfG$$

问题

- 计算下列数字图像信号矩阵的DWT。

$$(1)\ f_1=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)\ f_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

问题

- 计算下列数字图像信号矩阵的DWT。

$$(1)\ f_1=\begin{bmatrix}1&3&3&1\\1&3&3&1\\1&3&3&1\\1&3&3&1\end{bmatrix}\qquad(2)\ f_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$Solution: F_1=\frac{1}{N^2}Wf_1W=\frac{1}{4^2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3&1\\1&3&3&1\\1&3&3&1\\1&3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

解：$F_2 = \dfrac{1}{N^2} W f_2 W$

$$= \frac{1}{4^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

快速沃尔什变换

- 与快速傅里叶变换做法类似的，沃尔什变换也存在快速沃尔什变换

$$W(u)=\frac{1}{2}\left[W_e(u)+W_o(u)\right]$$

$$W\left(u+\frac{N}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[W_e(u)-W_o(u)\right]$$

$$u=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

点评

- 沃尔什变换具有某种能量集中。
- 原始图像中灰度级越靠近均匀分布，经变换后的图像越集中于矩阵的边角上。对于这样的图像，沃尔什变换可以用于压缩图像信息，而且压缩比率比傅立叶变换大。

- 缺点：图像的规格要求是2的整数幂

小结

- 什么是沃尔什变换?
- 沃尔什变换的公式是什么?
- 掌握基本的沃尔什变换计算
- 沃尔什变换对于什么类型的图像压缩比高。为什么?

哈达玛（Hadamard）变换

- 哈达玛变换本质上是一种特殊排序的沃尔什变换；
- 其与沃尔什变换的最大区别是变换核矩阵行的次序不同；
- 这样得到的好处是：哈达玛变换的变换矩阵具有简单的递推关系，即高阶的变换矩阵可以用低阶转换矩阵构成。

哈达玛（Hadamard）变换

- 这样得到的好处是：哈达玛变换的变换矩阵具有简单的递推关系，即高阶的变换矩阵可以用低阶转换矩阵构成。

一维离散哈达玛变换定义为：

$$H(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)(-1)^{\sum_{i=0}^{p-1}b_i(x)b_i(u)}$$

其中$N=2^p$，$x,u=0,1,2,L$，$N-1$。

递推公式

当$N=2$时，$H_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

当$N>2$时，$H_N=\begin{bmatrix}H_{N/2} & H_{N/2}\\ H_{N/2} & -H_{N/2}\end{bmatrix}$

当$N=4$时，

$$H_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

问题

- 计算下列图像的哈达玛变换。

$$(1)\, f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)\, f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

问题

- 计算下列图像的哈达玛变换。

$$(1)\ f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)\ f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解：$$F_1 = \frac{1}{4} H f_1 H = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定序哈达玛变换

- 定义
  - 列率：在哈达玛变换矩阵中，沿某一列符号改变的次数称为这个列的列率；
- 实际使用中，通常交换哈达玛变换矩阵的列，使列率随u增加而递增。此时称定序哈达玛变换。

$$H_4' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

公式定义

定序哈达玛变换核的定义为：

$$H(x,u)=\frac{1}{N}(-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} b_i(x)p_i(u)}$$

其中

$$P_0(u)=b_{p-1}(u);$$

$$P_1(u)=b_{p-1}(u)+b_{p-2}(u);$$

M

$$P_{n-1}(u)=b_1(u)+b_2(u);$$

点评

- 什么是哈达玛变换?
- 哈达玛变换与沃尔什变换的关系
- 哈达玛变换的好处是什么?
- 掌握基本的哈达玛变换计算

斜变换（Slant）

- 斜变换是针对灰度有渐变性质的图像所提出的一种变换。
- 斜变换的变换矩阵

$S(p)$表示$N\times N$斜矩阵$N=2^p$,则

$$S(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}，\text{记作}S_1$$

$$S_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ a_2 & b_2 & -a_2 & b_2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -b_2 & a_2 & b_2 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1 & 0\\ 0 & S_1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & -a_2+b_2 & -a_2-b_2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ a_2-b_2 & -a_2-b_2 & a_2+b_2 & -a_2+b_2 \end{bmatrix}$$

使斜函数的跳变均匀，可令$a_2=2b_2$，根据正交条件

$$\frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 3b & b & -b & -3b \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 3b & b & -b & -3b \end{bmatrix}^T=1$$

$$\therefore b=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore S_2 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

递归定义:

$$S_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 1 & 0 & \\ a_p & b_p & & -a_p & b_p & \\ & & I & & & I \\ 0 & 1 & & 0 & -1 & \\ -b_p & a_p & & b_p & a_p & \\ & & I & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{p-1} & \\ & S_{p-1} \end{bmatrix}$$

求解a，b的值

$$\begin{cases} b_p = \left(1+4a_{p-1}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ a_p = 2b_p a_{p-1} \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{p+1} = \left(\dfrac{3p^2}{4p^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ b_{p+1} = \left(\dfrac{p^2-1}{4p^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad N = 2^p$$

斜变换性质

- 斜变换是实正交变换 $S = S^*, S^{-1} = S^T$
- 斜变换是一种快速变换，适合灰度渐变的信号；
- 对图像有较好的能量集中特性；
- S阵的基向量即各行向量。

问题

- 计算下列数字图像信号矩阵的DCT和ST。

$$f=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{解：}\ DCT\left(f\right)=\begin{bmatrix}10 & -4.46 & 0 & -0.32\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$ST\left(f\right)=S_2 f S_2{}'=\begin{bmatrix}10 & 4.47 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

要点总结

- 线性变换、酉变换、正交变换的原理和意义
- 余弦变换的原理，性质和意义
- 了解正弦变换、哈特利变换的基本原理；
- 方波型变换的原理，沃尔什变换、哈达玛变换的原理性质和意义，了解斜变换的定义

下一讲