Chapter 5

这一讲我们来利用上一讲中提到的技术来证明一些结果. 首先是 Roth 定理.

Theorem. 设 $\{0,1,\cdots,n\}$ 的子集 A 无非平凡的三项等差数列. 则 $|A|=o(n)$.

Remark. Roth 定理是著名的 Szemerédi 定理的特殊情况. Szemerédi 定理指出, 对任意正整数 k, 若 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集 A 无非平凡的 k 项等差数列. 则 $|A|=o(n)$. Roth 定理即 $k=3$ 的情形.

Proof. 我们首先来证明一个引理.

Lemma. 假设图 G 有 n 个顶点, 并且每条边恰在一个三角形中. 则图 G 有 $o(n^2)$ 条边.

Proof. 设 G 有 m 条边. 由于每条边恰在一个三角形中, 故 G 中含三角形的个数为 $\frac{m}{3}<n^2$. 因此, 对 H 为三角形的情况用 Graph Removing Theorem, 我们可以去掉 $o(n^2)$ 条边来使得图 G 中没有三角形. 而去掉一条边只能最多去掉图 G 中一个三角形, 故图 G 中三角形的个数为 $o(n^2)$, 也即图 G 的边数为 $o(n^2)$. 证毕. $\square$

回到原题. 首先通过平移可以不妨设 $0\in A$. 记 $m=2n+1$. 我们将 A 中的元素视为 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 中的元素. 考虑一个三部图 G, 其三个部分 $X=Y=Z=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. 对于 $x\in X, y\in Y, z\in Z$, x 和 y 相连当且仅当 $y-x\in A$, y 和 z 相连当且仅当 $z-y\in A$, x 和 z 相连当且仅当 $\frac{z-x}{2}\in A$. 我们来考察这个三部图 G. 若 G 中存在顶点分别为 x,y,z 的三角形, 则 $y-x, z-y, \frac{z-x}{2}$ 均属于 A, 而它们恰好构成一个等差数列, 除非 $y-x=z-y=\frac{z-x}{2}$, 即 $x=y=z$. 因此, 每个点恰且仅在一个三角形中 (x,x,x 构成一个三角形). 由引理, G 中的边数为 $o(n^2)$. 而 G 中的边数为 $3m|A|$, 因此 $|A|=o(n)$. 结论证毕. $\square$

Remark. 目前关于 Roth 定理最好的结果, 是 2020 年 Thomas F. Bloom 和 Olof Sisask 证明的, 设 $\{0,1,\cdots,n\}$ 的子集 A 无非平凡的三项等差数列, 则 $|A|\le\frac{N}{(\ln n)^{1+c}}$ 对某个常数 $c>0$. Erdös 曾经猜想, 对任意正整数 k, $\{0,1,\cdots,n\}$ 的子集 A 无非平凡的 k 项等差数列的充分必要条件是 A 中所有元素的倒数和发散. 这个结果证明了 Erdös 的猜想的 $k=3$ 的情形.

另一方面, 关于无非平凡三项等差数列的集合的元素个数的下界, 我们有以下的构造:

Theorem. 存在常数 C, 满足: 对于任意正整数 N, 存在 $\{1,2,\cdots,N\}$ 的子集 A, 满足: A 中无三项等差数列, 且 $|A|\ge Ne^{-c\sqrt{\ln N}}$.

Proof. 待定正整数 m,d. 对于任意正整数 $L\le dm^2$, 考虑集合

$$X_L=\{(x_1,x_2,\cdots,x_d)|x_i\in\mathbb{N},1\le x_i\le m,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2=L\}.$$

由抽屉原理, 存在集合 L_0, 使得 $|X_{L_0}|\ge\frac{m^d}{md^2}$. 记 $X=X_{L_0}$. 考虑映射 $\phi:X\to\mathbb{N}$ 如下:

$$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_d)=\sum_{i=1}^{d}x_i(2m)^{d-1}.$$

记 $A=\phi(X)$, 并取 $m=\frac{1}{2}[e^{\sqrt{\ln N}}]$, $d=[\sqrt{\ln N}]$. 则 A 是 $\{1,2,\cdots,N\}$ 的子集, 且

$$|A|=|X|\geq \frac{m^d}{md^2}\geq Ne^{-c\sqrt{\ln N}},$$

其中 c 为某个确定的常数. 最后我们证明 A 中无非平凡的三项等差数列. 若 A 中有非平凡的三项等差数列 u,v,w, 设 $\phi^{-1}(u)=(u_1,u_2,\cdots,u_d),\phi^{-1}(v)=(v_1,v_2,\cdots,v_d),\phi^{-1}(w)=(w_1,u_2,\cdots,w_d)$, 则对任意正整数 i, u_i,v_i,w_i 构成等差数列, 故 $\phi^{-1}(u),\phi^{-1}(v),\phi^{-1}(w)$ 三点共线, 而它们位于 R^d 中的同一个球面上, 矛盾! 结论得证. □

利用本题中所述的引理, 我们还可以证明下述结论:

Theorem. ((6,3)-problem) 假设一个 3-uniform 的超图 H 有 n 个顶点, 满足任意 6 个顶点之间连的边数小于 3. 则 H 的边数为 $o(n^2)$.

Proof. 首先设 H 的每个顶点的度数均大于等于 2. 此时, H 中若有两条边有两个公共元素, 不妨设这两条边为 $\{a,b,c\}$ 和 $\{a,b,d\}$, 则我们选取一条包含点 c 的边即知矛盾. 因此任何两个元素至多只有一个公共边经过.

作一个图 G: 顶点为 H' 中的顶点, 若 H 中有一条边 $\{a,b,c\}$, 则连接点 a,b. 显然图 G 中每条边恰在一个三角形中, 故图 G 的边数为 $o(n^2)$, 三角形数也为 $o(n^2)$. 而图 G 中的三角形数即图 H 的边数, 故 H 的边数为 $o(n^2)$.

若 H 中有度数小于等于 1 的点, 去掉该点和该点所连出的边. 设执行 k 次操作后剩下的图 H 的每个顶点的度数均大于等于 2. 则 $e(H)\leq e(H')+k=o((n-k)^2)+k=o(n^2)$. 结论得证.

下一个结果是第二讲中提到的 Erdös–Stone–Simonovits 定理.

Theorem. (Erdös–Stone–Simonovits 定理) 对任意至少有 1 条边的图 H, 有

$$\mathrm{ex}(n,H)\leq \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}\right)+o(n^2),$$

其中 $\chi(H)$ 是图 H 的色数.

Proof. 我们证明, 对任意 $\delta>0$, 存在 n_0, 使得 $n>n_0$ 时, n 个点的图 G 若含 $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+\delta)n^2$ 条边, 则 G 含图 H. 待定 ϵ,c. 那么, 存在 n_0, 使得 $n>n_0$ 时, G 的顶点集存在 ϵ-*regular* 的分划 $\{V_0,V_1,V_2,\cdots,V_k\}$. 我们接下来去掉 G 中以下的边:

- 所有 V_0 中的点连出的边, 这样的边至多 ϵn^2 条.
- V_i 中内部点连的边, 这样的边至多 $k\frac{n^2}{k^2}<\epsilon n^2$ 条.
- 不 ϵ-*regular* 的对 (V_i,V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\epsilon k^2\frac{n^2}{k^2}=\epsilon n^2$ 条.

- $d(V_i,V_j)<\frac{\delta}{4}$ 的对 (V_i,V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\frac{\delta}{4}k^2\frac{n^2}{k^2}=\frac{\delta}{4}n^2$ 条.

因此, 我们可以选取 ϵ 使得删去的边不超过 δn^2 条. 由 Turán 定理, 剩下的图含 K_{r+1}. 这 $r+1$ 个点必须在 $V_1,V_2,\cdots,V_r$ 中每个子集各一个, 所以 V_i 之间两两 ϵ-*regular* 且 $d(V_i,V_j)>\frac{\delta}{4}$. 因此, 我们可以选取满足 Graph Embedding lemma 的 ϵ,c, 使得剩下的图中一定含 H. 结论得证. $\square$

下一个结果是关于 Ramsey 问题的推广. 我们将 Ramsey 问题所要求的完全图推广到一般的图, 即: 对于任意图 H,K, 记 $R(H,K)$ 为满足下述条件的最小的正整数 n: 完全图 K_n 的任意红蓝二染色一定存在红色的 H 或者蓝色的 K. 这里 H,K 均为完全图时即 Ramsey 问题. 关于 $R(H,K)$, 我们有以下的结果:

Theorem. 对任意 Δ, 存在实数 c, 满足: 若 $\Delta(H)\le\Delta$, $\Delta(K)\le\Delta$, $|V(H)=|V(K)|=m$, 则 $R(G,H)\le c'm$.

Proof. 首先注意到一个基本的事实: 对于 G 的两个不交子集 A,B, 若它们关于它们中连的红边是 ϵ-*regular* 的, 则它们关于蓝边也是. 因此, 我们可以在这个图中讨论 ϵ-*regular* 的分划. 设 $|G|=n$. 待定 ϵ,c,r. 那么, 存在 n_0, 使得 $n>n_0$ 时, G 的顶点集存在 ϵ-*regular* 的分划 $\{V_0,V_1,V_2,\cdots,V_k\}$. 此时, 不 ϵ-*regular* 的对 (V_i,V_j) 至多 ϵk^2 对.

我们重新构造一个图 G': G' 的顶点为 $1,2,\cdots,k$; 若 V_i,V_j 是 ϵ-*regular* 的, 我们就将 i,j 连边. 那么, G' 中至少有 $\binom{k}{2}-\epsilon k^2$ 条边. 因此, $\epsilon<\frac{1}{10r}$ 时, 由 Turán 定理, 图 G' 中就存在 K_r. 由对称性, 不妨设点 $1,2,\cdots,r$ 之间两两相连.

我们对于这个 K_r 染色: 若 $d(V_i,V_j)\ge\frac{1}{2}$(关于红边), 我们就染红色, 否则, 我们就染蓝色. 那么, $r\ge 4^{\Delta+1}$ 时, 这个图中存在同色的 K_Δ. 由对称性, 不妨设点 $1,2,\cdots,\Delta$ 构成红色的 K_Δ. 那么, 我们可以取 ϵ 和 c, 对 $V_1,V_2,\cdots,V_\Delta$ 使用 Graph Embedding lemma, 就可以找到红色的 H. 结论得证. $\square$

上面两个结果都是结合 Graph Embedding lemma 和 Regularity lemma 的经典运用: 我们先利用 Regularity lemma 进行分块, 去掉那些性质不优秀的边, 然后利用一些计数来说明剩下的边满足 Graph Embedding lemma 的条件, 最后运用 Graph Embedding lemma 解决问题.

最后我们来讨论第三讲中讨论过的 Erdös-Turán 问题. 我们要证明如下结果:

Theorem. 当 t 为偶数时, $RT(n,K_t,o(n))=(\frac{3t-10}{6t-8}+o(1))n^2$.

Proof. 我们首先给出构造. 首先是 $t=4$ 的情形. 选取充分大的正整数 d,n_0, 并设 $n>n_0$ 为偶数. 记 $\mu=\frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$. 我们将单位球面 S^d 划分为 $\frac{n}{2}$ 个等测度的区域 $D_1,D_2,\cdots,D_{\frac{n}{2}}$, 每个的直径均小于等于 $\frac{\mu}{10}$. 我们在每个 D_i 中选取两个点 x_i,y_i. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_{\frac{n}{2}}\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_{\frac{n}{2}}\}$. 我们以 $X\cup Y$ 为顶点构造一个图 G. 其连边规则如下: X 或 Y 中的两个点相邻当且仅当它们的距离大于等于 $2-\mu$, X 中的一个点和 Y 中的一个点相邻当且仅当它们的距离小于等于 $\sqrt{2}-\mu$.

我们接下来验证这个图 G 满足条件. 我们仅给出证明概要. 首先, 若图中有 K_4, 显然不能有三个 X 或 Y 中的点, 因此必须是两个 X 中的点和两个 Y 中的点, 不妨设为 x_1, x_2 和 y_1, y_2. 那么, 当 μ 很小时, x_1, x_2 接近球的两极, 而 y_1 必须和 x_1, x_2 均在同一个半球中, 因此易推出矛盾.

接下来验证 G 的最大独立集数为 $o(n)$. 我们任取 $x_1, x_2, \cdots, x_{cn}$, 那么这些点所在区域之并 U 的测度就大于等于 c. 因此, 当 d 充分大时, 由 isoperimetric theorem, U 就包含两个点 A, B, 使得 $d(A,B) \geq 2 - \frac{2}{mu}$. 此时我们在这两个区域中找出点 x_i, x_j 就连边, 因此其最大独立集数为 $o(n)$.

最后, 我们注意到 X, Y 内部连的边数为 $o(n^2)$, 而每个 $x \in X$ 均与在与其同半球的点连边, 故近似与一半的点连边, 故每个点的度数均几乎为 $\frac{4}{n}$, 因此总边数为 $(\frac{1}{8} + o(1))n^2$. 证毕.

对于一般的情形, 我们首先待定两个参数 x, y. 取一个完全 $r = \frac{t-4}{2}$ 部图 A, 每个部分 x 个点; 在其每个部分嵌入一个图 H, 其中 H 无三角形且最大独立集数为 $o(x)$(这样的 H 的存在性我们已经在第三讲中证明过). 接下来, 我们再取一个无 K_4, 最大独立集数为 $o(y)$, 边数为 $(\frac{1}{8} + o(1))y^2$ 的图 B, 并将 B 中的点与 A 中所有点连接, 形成一个新的图 G.

我们接下来说明可以取 x, y 使得图 G 满足条件. 一方面, 对于图 G 中的一个团, 其在 A 的每个部分最多有 2 个点, 在 B 部分中最多 3 个点, 因此最多 $2r + 3 = t - 1$ 个点, 因此图 G 中无 K_t.

另一方面, 简单计算知

$$|V(G)| = rx + y; \quad |e(G)| = \frac{1}{8}y^2 + rxy + \frac{1}{2}r(r-1)x^2 + o(1)y^2.$$

固定 $n = rx + y$, 代入计算得

$$|e(G)| = \frac{1}{8}(n^2 - r((3r+4)x^2 - 6nx)) + o(1)n^2.$$

我们取 n 为 $3r+4$ 的倍数 (不为倍数时考虑比 n 小的最大的 $3r+4$ 的倍数 n', 在 n' 个点的图中进行构造即可), $x = \frac{3}{3r+4}n$, 代入计算得 $e(G) = (\frac{3t-10}{6t-8} + o(1))n^2$. 因此对于一般的 t 我们就构造完毕.

接下来我们给出证明. 同 q 为奇数的情况, 事实上我们要证明下述结论: 存在函数 f, g, 使得如果图 G 的边数大于等于 $(\frac{3t-10}{6t-8} + r)n^2$, 且 $n > f(r)$, 则图 G 就至少有一个大小为 $g(r)n$ 的独立集, 或一个 K_t.

我们首先证明如下的 Graph Embedding Theorem 型的引理:

Lemma. 给定正整数 $m \leq k$, 和正实数 d. 则存在实数 ϵ, ϵ_0, 使得下述命题成立:

若图 G 的顶点集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 满足: 对于 $1 \leq i \leq k$, $|A_i| = t$; A_i, A_j 之间两两 *ϵ-regular*; 对于 $k+1-m \leq i \leq j \leq k$, $d(A_i, A_j) > \frac{1}{2} + d$; 对于 $1 \leq i \leq j \leq k$, $d(A_i, A_j) > d$. 则图 G 要么含一个 K_{m+k}, 要么含一个元素个数大于等于 $\epsilon_0 t$ 的独立集.

注意, $m = 0$ 时此即 H 为完全图时的嵌入定理.

Proof. 其证明基本类似于的 Graph Embedding Theorem. 我们依然首先待定 ϵ, c, ϵ_0 并逐步选出选出 v_i. 注意, 我们此时在集合 $A_{k+1-m}, \cdots, A_m$ 中要选出 2 个元素, 才能选取出 K_{m+k}.

假设我们已经选出了 G 中的点 $x_1, x_2, \cdots, x_j$ 作为 $v_1, v_2, \cdots, v_j$. 对于 $i > j$, 记 Y_i^j 为此时 x_i 的可能的选择. 我们对 j 归纳证明, 我们总能保证 $|Y_i^j| \geq t(d-2\epsilon)^j$. 此时, 我们取 $\epsilon_0 = (d-2\epsilon)^k$, 则要么 Y_i^j 是一个元素个数大于等于 $\epsilon_0 t$ 的独立集, 要么存在两个相邻的元素可以被我们取出.

记 $t = k+1-m$. 我们仅陈述 v_t 和 v_{t+1} 的选择, 其余同理. 我们考虑 A_t 中如下的元素 a: 对于一切 $i > t$, a 在 Y_i^{t-1} 中的邻居个数大于等于 $(\frac{1}{2}+d-\epsilon)|Y_i^{t-1}|$. 仍然由 Graph Embedding Theorem 的证明中所述引理, 这样的元素个数至少有 $(d-2\epsilon)|Y_t^{t-1}|$ 个, 且其中任选两个在 Y_i^{t-1} 中的公共邻居数均大于等于 $(d-2\epsilon)|Y_i^{t-1}|$, 因此可以作为 v_t 和 v_{t+1}. 结论得证. □

回到原题. 我们待定 ϵ. 那么, 存在 n_0, 使得 $n > n_0$ 时, G 的顶点集存在 ϵ-*regular* 的分划 $\{V_0, V_1, V_2, \cdots, V_k\}$. 我们接下来去掉 G 中以下的边:

- 所有 V_0 中的点连出的边, 这样的边至多 ϵn^2 条.
- V_i 中内部点连的边, 这样的边至多 $k\frac{n^2}{k^2} < \epsilon n^2$ 条.
- 不 ϵ-*regular* 的对 (V_i, V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\epsilon k^2 \frac{n^2}{k^2} = \epsilon n^2$ 条.
- $d(V_i, V_j) < \epsilon$ 的对 (V_i, V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\epsilon k^2 \frac{n^2}{k^2} = \epsilon n^2$ 条.

我们可以选取 ϵ 使得删去的边不超过 $\frac{r}{2}n^2$ 条. 那么, 剩下还有 $(\frac{3t-10}{6t-8}+\frac{r}{2})n^2$ 条边.

我们重新作一个图 G': G' 的顶点为 $1, 2, \cdots, k$; 若 $\frac{1}{2}+\epsilon > d(V_i, V_j) > \epsilon$, 则在 v_i, v_j 之间连边; 若 $d(V_i, V_j) > \frac{1}{2}+\epsilon$, 则在 v_i, v_j 之间将这条边染红. 设边的总数为 u, 染红的边的数目为 v. 则

$$(\frac{3t-10}{6t-8}+\frac{r}{2})n^2 \geq (\frac{n}{k})^2((\frac{1}{2}+\epsilon)(u-v)+v),$$

即 $u+v \leq (\frac{3t-10}{3t-4}+o(1))k^2$.

我们接下来证明, 存在正整数 a, b, 满足: 图 G 中存在一个完全 K_a, 内部包含一个红色的完全 K_b, 且 $a+b=t$. 此时, 我们运用引理, 即知存在一个 K_t 或者一个大小超过 $f(r)n$ 的独立集. 利用反证法, 我们只需证明下述引理:

Lemma. 给定正整数 k, t, 且 t 为偶数. 设顶点数为 k 的图 G 中某些边被染为红色, 并设红色的边数与 G 的边数之和为 $e'(G)$. 若不存在非负整数 $a \geq b$, $a+b=t$, 使得图 G 中存在一个完全 K_a, 内部包含一个红色的完全 K_b, 则 $e'(G) \leq (\frac{3t-10}{6t-8}+o(1))k^2$.

Proof. 对于顶点 u, 记 $d'(u)$ 为 u 连出的边与红边数之和. 若 v 和 w 不相连, 不妨设 $d'(v) \geq d'(w)$. 当 $d'(v) = d'(w)$ 时, 我们不妨设 v 连处的红边不少于 w 连出的. 我们考虑以下操作: 将 w 所连出的边全部删去, 并将 w 与所有 v 的邻居全部连接, 原来用红边连接的我们也染红. 这样操作不会改变 G 中的最大团和最大红色团的大小, 且 $e'(G)$ 不减.

显然, 我们可以通过若干次上述操作使得不相邻的点度数相同且邻域相同, 并且连出的边的颜色均相同. 此时 G 为完全 r 部图, 且此时任意两个部分之间连的边要么全是红色, 要么全不是红色.

我们接下来再进行一次操作: 如果两个部分之间没有连红色边, 我们考虑连出的红色边比另一个边少的部分, 将这个部分每个顶点连出的红边改为和另一个部分一样. 这样操作也不会改变 G 中的最大团和最大红色团的大小, 且 $e'(G)$ 不减. 故我们可以不妨设没有连红边的任意两个部分连出的边均完全一致.

因此, 最后我们可以不妨设图 G 被分为 n 个部分, 任何两个部分之间连了红色的边; 每个部分之间连了若干块, 所有的部分加起来有 m 块, 且两个不同块之间连了没有染为红色的边; 且 $n+m \le t-1$. 此时, 我们设图 G 的每个部分的顶点数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 每一个部分中含 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 块. 由简单的凸性不等式知, 固定 x_i, y_i 后, 每一个部分的每个块数至多差 1 时 $e'(G)$ 最大. 因此, 我们有

$$e'(G) = (1+o(1))k^2 - \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{x_i^2}{r_i}).$$

注意, 我们把所有的一次项全部放入了 $o(1)k^2$. 与原式比较并代入条件, 我们只需证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 (\frac{y_i+1}{y_i}) \ge \frac{12}{3t-4} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2.$$

由柯西不等式, 我们只需证明

$$3t \ge 4 + 12 \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{y_i+1},$$

也即

$$(t-n-m-1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i-1)^2}{y_i+1} \ge \frac{1}{3}.$$

若 y_i 不全为 1, 此时后面的和式就大于等于 $\frac{1}{3}$; 否则, $n=m$, 而 t 为偶数, 因此 $t-n-m-1 \ge 1$, 故该不等式亦得证. 因此引理成立, 我们就证完了本结论. $\square$