Chapter 2

这一讲我们来看一些研究不包含某种特定结构的图的相关的结果. 首先我们来回顾 Turán 定理与其证明.

Theorem. (Turán 定理) 若图 $G(V,E)$ 不包含 K_{r+1} 作为子图, 且 $|V|=n$. 则 G 为一个每个部分的边数为 $[\frac{n}{r}]$ 或 $[\frac{n}{r}]+1$ 的完全 r 部图时, $|E|$ 取最大值.

Proof. 若 v 和 w 不相连, 不妨设 $d(v)\geq d(w)$. 我们考虑以下操作: 将 w 所连出的边全部删去, 并将 w 与所有 v 的邻居全部连接. 那么, 容易验证, 以此法新得到的图 G' 的边数大于等于 G, 且 G' 依然无 K_{r+1}.

显然, 我们可以通过若干次上述操作使得不相邻的点度数相同且邻域相同. 此时 G 为完全 r 部图, 容易由凸性知 G 的各部分顶点数之差小于等于 1 时 G 的边数取最大值. 证毕. $\square$

Turán 定理有很多个证明, 这种使用调整法的证明是其中比较简洁的一种. 事实上, Turán 定理给出了图 G 不含完全图 K_r 作为子图时, G 的边数的最大值的刻画. 自然地, 我们想把完全图推广到一般的图上. 对于图 H, 我们记 $\mathrm{ex}(n,H)$ 为一切具有 n 个顶点且不包含 H 作为子图的图 G 的边数的最大值. 关于 $\mathrm{ex}(n,H)$ 的研究一直是组合数学界一个非常关键的问题, 在此上面有许许多多的结果和很多尚待解决的猜想. 我们本讲就来研究和 $\mathrm{ex}(n,H)$ 相关的问题.

首先我们来看看 H 为树的情况. 下文中均用字母 T 来表示树. 不妨设 T 为一个具有 $t+1$ 个顶点的树. 当 $t\mid n$ 时, 我们考虑一个由 $\frac{n}{t}$ 个 K_t 构成的图, 此时我们有 $\mathrm{ex}(n,T)=\frac{n(t-1)}{2}$. 事实上, Erdös 猜测这个界是最紧的, 不过目前我们仍然没有完全解决这个猜想. 不过, 我们可以证明下述的特殊情形:

Theorem. 设 P_{t+1} 为具有 $t+1$ 个顶点的链, 则 $\mathrm{ex}(n,P_{t+1})\leq\frac{n(t-1)}{2}$.

Proof. 我们对 n 归纳. $n\leq t$ 时命题平凡, 下设 $n\geq t+1$. 首先, 我们不妨设 G 是连通的, 否则对 G 的连通分支运用归纳假设即可. 若 G 有一个顶点的度数小于等于 $\frac{t-1}{2}$, 我们去掉该顶点运用归纳假设即可证明问题. 下设 G 的每个顶点的度数均大于等于 $\frac{t}{2}$. 我们取出 G 中的最长链 $l=x_1x_2\cdots x_k$. 则 l 的两个端点的所有邻居都在 l 上. 若 $k\leq t$, 由抽屉原理, 易见要么 x_1,x_k 相连, 要么存在 i,j 使得 x_1 和 x_i 相连, x_j 和 x_k 相连, 且 $|i-j|=1$. 因此, 无论如何都存在长度为 k 的圈, 而其中必有一点和圈外的点相连 (连通性), 故产生更长的链, 矛盾! 因此 $k\geq t+1$. 结论得证. $\square$

对于一般的情况, 我们有以下的结果:

Theorem. 设 T 是一个具有 $t+1$ 个顶点的树, 则 $\mathrm{ex}(n,T)<(t-1)n$.

Proof. 我们分两步证明该结论. 第一步, 我们证明, 若图 G 的每个顶点的度数均大于等于 t, 则对于任意一个有 $t+1$ 个顶点的树 T, G 均含 T. 我们对 t 归纳. $t=1$ 时命题平凡; 若 $t-1$ 时命题成立, 对于 t 的情形, 我们先考虑 T 删掉一片叶子得到的树 T', 由归纳假设 G 含 T', 再补上这片叶子 (由于每个顶点的度数均大于等于 t 这显然可以做到) 即可.

第二步, 我们证明, 对于任意图 G, 若 G 有 m 条边, 则 G 有一个子图 H, 满足 $\delta(H) > \frac{m}{n}$. 此时结合这两步结果立即证得原题. 注意到, 若 G 存在一个顶点 v 满足 $d(v) < \frac{m}{n}$, 去掉该顶点后 G 的平均度数增加, 因此这种操作不能一直进行下去, 操作停止时我们就找到了一个满足条件的子图 H. 结论得证. $\square$

我们接下来考虑 H 不是树的情况. 我们首先指出如下的结果:

Theorem. 对任意至少有两条边的图 H, 总有

$$\mathrm{ex}(n,H) \gtrsim n^{2-\frac{v(H)-2}{e(H)-1}}.$$

Proof. 待定实数 p. 考虑随机图 $G = G(n,p)$, 即 G 的顶点个数为 n, 每条边出现的概率为 p. 对于任意图 H, 显然 G 中含 H 的个数的期望小于等于 $n^{v(H)}p^{e(H)}$, 而 G 的边数的期望为 $p\binom{n}{2}$. 因此, 记 G 中含 H 的个数为 X, 取 $p = \frac{1}{2}n^{-\frac{v(H)-2}{e(H)-1}}$, 则

$$E(e(G)-X) \geq p\binom{n}{2} - n^{v(H)}p^{e(H)} \geq \frac{1}{16}n^{2-\frac{v(H)-2}{e(H)-1}}.$$

因此, 总存在图 G 使得 $e(G) - X \geq \frac{1}{16}n^{2-\frac{v(H)-2}{e(H)-1}}$. 我们在 G 所含的每个 H 中均去掉一条边, 剩下的图就不包含 H 作为子图, 即证得原题. $\square$

Remark. 有时候我们取 H 的子图, $\frac{v(H)-2}{e(H)-1}$ 可能会变小, 因此这个时候给出的界会更好一点.

由于若 H 连通且不是树时 $v(H) \leq e(H)$, 这一结果指出, H 不是森林时, $\mathrm{ex}(n,H)$ 当 n 趋于无穷时, 不是 n 的一阶量. 事实上, Turán 定理指出, 当 H 为三角形时, $\mathrm{ex}(n,H)$ 当 n 趋于无穷时是 n^2 级别的量. 关于这一问题, 我们有以下著名的结果:

Theorem. (Erdös–Stone–Simonovits 定理) 对任意至少有 1 条边的图 H, 有

$$\mathrm{ex}(n,H) \leq \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1}\right) + o(n^2),$$

其中 $\chi(H)$ 是图 H 的色数.

Example. 完全图 K_n 的色数是 n, 此时符合 Erdös–Stone–Simonovits 定理. 事实上, Turán 定理的阶的估计可以看成 Erdös–Stone–Simonovits 定理的一个特殊情况.

我们将在第五讲中证明这个结果. 我们可以看到, Erdös–Stone–Simonovits 定理给出了当图 H 的色数大于等于 2 的时候, 关于 $\mathrm{ex}(n,H)$ 的阶的一个基础的刻画. 然而, 不幸的是, 对于色数为 2 的图, 我们仍然无法完全弄清楚 $\mathrm{ex}(n,H)$ 的阶. 关于这一问题, 有以下著名的猜想:

Conjecture. (Turán 有理指数猜想) 对于任意有理数 $1 \leq a < 2$, 存在图 H, 使得 $\mathrm{ex}(n,H) = \Theta(n^a)$.

本节和下一节我们接下来将研究一些关于这一问题的一些经典结果. 本节我们研究 H 为 $K_{s,t}$ 时候的情形. 事实上, 注意到若 $H \subseteq G$, 则 $\mathrm{ex}(n,H) \le \mathrm{ex}(n,G)$, 因此如果我们能够理解 $\mathrm{ex}(n,K_{s,t})$ 的阶, 我们就可以获得关于一般的图的 $\mathrm{ex}(n,H)$ 的一些刻画. Kövári, Sós, Turán 对于这一问题有以下经典的结果:

Theorem. 对每个正整数 $1 \le s \le t$, 存在正实数 $C = C(s,t)$, 使得

$$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \le Cn^{2-1/s}.$$

Proof. 假设 G 是一个 n 个顶点且不包含 $K_{s,t}$ 的图, 我们对 G 中 $K_{s,1}$ 的个数算两次, 即考虑一切 $s+1$ 元顶点对 $(v, v_1, v_2, \cdots, v_s)$ 的个数 T, 其中 v 与顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_s$ 相连. 一方面, 注意到对于任意的 s 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_s$, 由于 G 不含 $K_{s,t}$, 这样的 v 至多 $(t-1)$ 个, 因此

$$H \le (t-1)\binom{n}{s}.$$

另一方面, 对每个顶点 v, 这样的顶点对恰有 $\binom{d(v)}{s}$ 个, 因此, 由凸性, 我们有

$$H = \sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{s} \ge n\binom{\frac{m}{n}}{s}.$$

利用 $\binom{x}{s} = (1+o(1))\frac{x^s}{s!}$, 我们可以得到

$$m \le \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)(t-1)^{1/s} n^{2-1/s}.$$

□

这一定理里中的界被猜想是紧的. 然而, 目前仍然无法完全证明这一猜想 (例如, 我们仍然不知道对于 $K_{4,4}$ 的情况, 这一界是否是紧的.) 不过, 我们能够确定, 对于一部分的 s, t, 这个界的确是紧的. 目前我们使用的构造主要来自于以下三种技巧:

- 概率方法. 概率方法是基本而有效的, 不过往往概率方法给出的界不是紧的.
- 代数方法. 这一方法利用一些数论或代数结构来给出一些构造. 不过, 这些构造往往只能运用于少数的情形.
- 随机代数构造. 这一方法结合以上两种技巧, 能够同时吸收这两种方法的优点.

我们前面已经运用概率方法给出了一个关于 $\mathrm{ex}(n, K_{s,t})$ 的下界. 不过, 这个方法给出的界和我们前文中所述的定理的界有一定差距. 本节我们再给出另外两种方法的构造.

对于素数 p 和正整数 $s \geq 2$, 考虑图 $\mathrm{ProjNormGraph}_{p,s} = G(V,E)$, 其中 $V = \mathbb{F}_{p^{s-1}} \times \mathbb{F}_p^\times$. 此时, $n = (p-1)p^{s-1}$. 对于点 (X,x) 和 (Y,y), 连接这两点间有边当且仅当

$$N(X+Y) = xy,$$

其中映射 $N : \mathbb{F}_{p^{s-1}} \to \mathbb{F}_p^\times$ 按如下法则定义:

$$N(x) = x^{\frac{p^{s-1}-1}{p-1}}.$$

Theorem. 在图 $\mathrm{ProjNormGraph}_{p,s}$ 中, 有以下结论:

a. 若 $|V| = n$, 则
$$|E| = (\frac{1}{2} - o(1))n^{2-1/s}.$$

b. 图 $\mathrm{ProjNormGraph}_{p,s}$ 不包含 $K_{s,(s-1)!+1}$ 作为子图.

Example. 我们来考虑一个例子. $s = 2$, 时, $V = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p^\times$, $N(x) = x$. 此时, 对于任意一点 (X,x) 和任意的 y, 恰存在唯一的 Y 使得 $X + Y = xy$, 故总边数为 $\frac{1}{2}p(p-1)^2$, 顶点数为 $p(p-1)$, 因此 a 成立; 若 $X + Y_1 = xy_1$, $X + Y_2 = xy_2$, 则要么 $y_1 = y_2$, 要么相减即解出唯一一组 (X,x), 故图中不存在 $K_{2,2}$. 因此这个构造符合条件.

Remark. 图 $\mathrm{ProjNormGraph}_{p,s}$ 不一定是简单图, 可能有自己连自己的边. 但这样的边的数量至多为 n, 因此我们去掉这些边后就得到了满足条件的简单图.

事实上, 根据图 $\mathrm{ProjNormGraph}_{p,s}$ 的构造, 我们可以看出, 若 $t \geq (s-1)! + 1$, 结合定理 1.2.2, 我们即知 $\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta(n^{2-\frac{1}{s}})$.

Proof. 为了证明这个结论, 我们先不加证明地指出代数几何中的如下引理.

Lemma. 设 $\mathbb{F}$ 是域, $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{F}$, 并且若 $i \neq i'$, 则 $a_{i,j} \neq a_{i,j'}$. 那么, 如下的方程组

$$\begin{aligned}
(x_1 - a_{11})(x_2 - a_{12}) \cdots (x_s - a_{1s}) &= b_1 \\
(x_1 - a_{21})(x_2 - a_{22}) \cdots (x_s - a_{2s}) &= b_2 \\
&\vdots \\
(x_1 - a_{s1})(x_2 - a_{s2}) \cdots (x_s - a_{ss}) &= b_s
\end{aligned}$$

至多只有 $s!$ 组解.

回到原题. 首先, 对于任意满足 $N(X+Y) \neq 0$ 的 Y, 均存在唯一的 y 使得 $xy = N(X+Y)$, 故每个顶点 (X,x) 的度数是 $p^{s-1} - 1$, 这就显然推出了 a.

接下来我们证明 b. 固定 s 个点 (Y_i, y_i), 那么与它们均相连的 (X, x) 满足方程组 $N(X+Y_i) = y_i (1 \le i \le s)$. 将这些式子均与最后一式相除, 方程组化为

$$N(\frac{X+Y_i}{X+Y_s}) = \frac{y_i}{y_s},$$

两边同时除以 $N(Y_i - Y_s)$, 方程组即

$$N(\frac{1}{X+Y_s} + \frac{1}{Y_i - Y_s}) = \frac{y_i}{y_s N(Y_i - Y_s)}.$$

注意到

$$\begin{aligned} N(x+y) = (x+y)^{\frac{p^{s-1}-1}{p-1}} &= (x+y)(x+y)^p \cdots (x+y)^{p^{s-1}} \\ &= (x+y)(x^p + y^p) \cdots (x^{p^{s-1}} + y^{p^{s-1}}), \end{aligned}$$

因此, 记

$$x_i = (\frac{1}{X+Y_s})^{p^{i-1}}, \ \ a_{ij} = -(\frac{1}{Y_i - Y_s})^{p^{j-1}}, \ \ b_i = \frac{y_i}{y_s N(Y_i - Y_s)},$$

上式就化成引理所述形式, 至多只有 $(s-1)!$ 组解, 且每一组至多对应一组满足条件的 (X, x). 因此 b 得证. $\square$

我们接下来给出关于 $\text{ex}(n, K_{s,t})$ 的一个随机代数构造. Bukh 在 2015 年运用这一方法证明, 存在函数 $t_0(s)$, 使得若 $t \ge t_0(s)$, 则 $\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta(n^{2-\frac{1}{s}})$. 注意, 目前这一结果给出的 t_0 远大于我们上一个方法中给出的界 $(s-1)!+1$. 尽管如此, 这一方法由于结合了代数构造和概率方法, 因此比纯粹的代数方法更加具有一般性, 也有更多的推广价值.

在进行我们的构造之前, 我们首先需要陈述一个代数几何中的引理作为我们的准备工作. 这个引理的证明需要用到复杂的代数几何知识, 因此不会在这里给出.

Lemma. 对于任意正整数 s, d, 存在实数 $C = C(s, d)$, 满足: 若 $f_1(Y), \cdots, f_s(Y)$ 是 $\mathbb{F}_q^s$ 上的次数不超过 d 的多项式, 则它们的公共零点个数要么少于 C, 要么多于 $q - C\sqrt{q}$.

现在我们来介绍 Bukh 的构造. 对于任意正整数 $s \ge 4$, 记 $d = s^2 - s + 2$, 并待定一个素数 q. 我们从一切满足下述条件的多项式 $f \in \mathbb{F}_q[x_1, x_2, \cdots, x_s, y_1, y_2, \cdots, y_s]$ 中随机选取一个多项式 f: f 关于 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_s)$ 和 $Y = (y_1, \cdots, y_s)$ 的次数均不超过 d. 对于给定的 f, 构造二部图 G 如下: G 的两个部分 $L = R = \mathbb{F}_q^s$, 当 $f(X, Y) = 0$ 时, 连接边 $(X, Y) \in L \times R$. 记 n 为 G 一个部分的顶点数. 注意到对任意给定的 u, v, $f(u, v) = 0$ 的概率恰为 $\frac{1}{q}$(对于任意 f, 恰有唯一常数 c 使得 $f(u, v) + c = 0$), 因此我们有 $\mathbb{E}(e(G)) = \frac{n^2}{q}$.

对任意正整数 $r \le d$, 我们考虑集合 $U, V \in \mathbb{F}_q^s$, 其中 $|U| = r, |V| = s$. 我们指出, $f(u, v) = 0$ 对一切 $u \in U, v \in V$ 的概率为 q^{-sr}. 首先, 我们取一个映射 $F: \mathbb{F}_q^s \to \mathbb{F}_q$, 使得对于一切 $u \in U$, $F(u)$ 两两不同. 注意到对于不同的 u, v, 满足 $f(u) = f(v)$ 的映射占全部映射的 $\frac{1}{q}$, 而我们可以取 $q > s^2$,

此时 F 显然可以找到. 于是, 我们可以把 F 延拓成 $F' : \mathbb{F}_q^s \to \mathbb{F}_q^s$, 使得对于一切 $u \in U$, $F'(u)$ 的第一个分量两两不同. 因此, 用 $F'(u)$ 代替 u, 我们可以不妨设一切 $u \in U$ 的第一个分量两两不同. 同理, 我们可以不妨设一切 $v \in V$ 的第一个分量两两不同. 记

$$g(x_1, y_1) = \sum_{\substack{0\le i\le s-1\\0\le j\le r-1}} a_{ij} x_1^i y_1^j = \sum_{0\le j\le r-1} a_j(x_1) y_1^j,$$

其中 a_{ij} 为 $\mathbb{F}_q$ 上的独立均匀分布随机变量, a_j 为关于 x_1 的多项式. 注意到 f 和 $f+g$ 有相同的分布, 因此我们只需证明, 对于任意 $b_{uv} \in \mathbb{F}_q(u \in U, v \in V)$, 均存在 a_{ij} 使得 $g(u,v) = b_{uv}$, 即证明了 $f(u,v) = 0$ 对一切 $u \in U, v \in V$ 的概率为 q^{-sr}. 对一切 $u \in U$, 由拉格朗日插值公式, 我们可以取一个次数不超过 $r-1$ 的多项式 $g_u(y_1)$ 使得对一切 $v \in V$, 有 $g_u(v) = b_{uv}$, 再用拉格朗日插值公式依次取出多项式 a_i 使得 $g(u, y_1) = g_u(y_1)$, 就有 $g(u,v) = b_{uv}$. 因此, 我们证明了 $f(u,v) = 0$ 对一切 $u \in U, v \in V$ 的概率为 q^{-sr}.

任取 L 的一个 s 元子集 U, 并设 X 为 U 中所有点的公共邻居个数. 对于 $v \in R$, 若 v 与 U 中所有点均相邻, 记 $I(v) = 1$, 否则记 $I(v) = 0$. 此时

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^d) = \mathbb{E}(\sum_{v\in R} I(v))^d) &= \sum_{v_1,\cdots,v_d\in\mathbb{F}_q^s} \mathbb{E}(I(v_1)\cdots I(v_d)) \\ &= \sum_{r\le d} \binom{q^s}{r} q^{-rs} M_r \le \sum_{r\le d} M_r,\end{aligned}$$

其中 M_r 为从 $\{1,2,\cdots,d\}$ 到 $\{1,2,\cdots,r\}$ 的满射个数. 记 $M = \sum_{r\le d} M_r$. 设多项式 $f_1(Y), f_2(Y), \cdots, f_s(Y)$ 为一切多项式 $f(u,Y)$, 其中 $u \in U$. 对 $f_i(Y)$ 用引理 1.2.7 知, 存在实数 $C = C(s,d)$, 使得 $X > C$ 时 $X > q - C\sqrt{q}$. 我们取 q 充分大使得 $q - C\sqrt{q} \ge \frac{q}{2}$. 因此, 由马尔可夫不等式,

$$\mathbb{P}(X \ge C) = \mathbb{P}(X \ge \frac{q}{2}) \le \frac{\mathbb{E}(X^d)}{(\frac{q}{2})^d} \le \frac{M}{(\frac{q}{2})^d}.$$

我们从 R 的每个公共邻居个数大于等于 C 的 s 元子集中去掉一个顶点, 剩下的图就不包含 $K_{s,C+1}$ 作为子图. 此时, 剩下的图 G' 的顶点个数的期望

$$\mathbb{E}(e(G')) \ge \frac{n^2}{q} - \binom{n}{s} \frac{M}{(\frac{q}{2})^d},$$

注意到 $n = q^s, d = s^2 - s + 2$, 代入知 $\mathbb{E}(e(G')) \ge (1 - o(1)) n^{2-\frac{1}{s}}$, $v(G') \le 2n$. 因此我们的构造就符合要求. 结论得证. $\square$.