Chapter 3

这一讲我们首先讨论一些关于 $\mathrm{ex}(n, H)$ 的其他结果.

Theorem. 设 $H = A \cup B$ 为二部图, 并且对于任意 $v \in A$, $d(v) \leq r$. 那么, 存在 $C = C_H$ 使得

$$\mathrm{ex}(n, H) \leq Cn^{2-1/r}.$$

Proof. 记 $a = |A|, b = |B|$. 我们先证明如下的引理:

Lemma. 设 $H = A \cup B$ 为二部图, 并且对于任意 $v \in A$, $d(v) \leq r$. 那么, 对任意图 G, 如果 G 中存在 b 个顶点, 其中任意 r 个的公共邻居个数大于等于 $a + b$, 则 G 包含 H 作为子图.

Proof. 我们先选取这 b 个顶点作为 B(顺序任意). 接下来, 我们再按顺序在 G 中选取 A 中的顶点. 每次选取一个顶点时, 只需要其邻域包含给定的不超过 r 个点. 注意到这些点的公共邻居个数大于等于 $a + b$, 故必可以从中选出一个与已经选取的点均不同的点作为该顶点. 引理证毕.

回到原题. 我们证明 C 充分大时满足条件. 由引理, 我们只需从 G 中选出 b 个顶点, 其中任意 r 个的公共邻居个数大于等于 $a + b$. 对任意边数大于 $Cn^{2-1/r}$ 的图 $G(V, E)$, 我们随机地依次取其 r 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_r$(允许重复), 并记这些顶点构成的集合为 T, 它们的邻域为 A. 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|A|) &= \sum_{v \in V} \mathbb{P}(v \in A) \\
&= \sum_{v \in V} \mathbb{P}(T \subseteq N(v)) \\
&= \sum_{v \in V} (\frac{d(v)}{n})^r \\
&\geq n(\frac{1}{n} \sum_{v \in V} (\frac{d(v)}{n}))^r \\
&= (\frac{C}{2})^r.
\end{aligned}$$

我们接下来试图从 A 中选出这 b 个顶点. 称 V 的一个 r 元子集为坏的, 如果其公共邻居个数小于 $a + b$. 设 A 中所含坏的子集的个数为 X. 如果我们证明了 $\mathbb{E}(|A|) - \mathbb{E}(X) > b$, 那么, 我们就可以选出一个 A, 使得其中所含的坏子集个数小于 $|A| - b$, 然后我们对于每个坏子集, 依次删去 A 中的一个元素, 剩下的元素就满足要求.

对于 V 的一个 r 元子集 Q, 我们来考察它是坏子集且属于 A 的概率. 若 Q 属于 A, 则 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 必须均在 Q 的邻域中, 而 Q 的公共邻居个数小于 $a + b$, 因此这一概率就小于 $(\frac{a+b}{n})^r$, 故

$$\mathbb{E}(X) < \binom{n}{r}(\frac{a+b}{n})^r < (a+b)^r.$$

因此, 我们可以选取充分大的实数 C 使得了 $\mathbb{E}(|A|)-\mathbb{E}(X)>b$. 结论证毕. $\square$

Remark. 这一例子相较于前面的例子有一些变化, 但是再次向我们展示了 Alterations 的威力: 我们适当的选取了一个集合 A 作为桥梁, 使得我们能够在 A 中进行满足条件的选取. 这样的 A 的构造正是 Alterations 的精妙之处.

Theorem. 对于偶圈 C_{2k}, 存在实数 c_k, 使得

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \leq c_k n^{1+1/k}.$$

Proof. 我们来证明, 存在实数 c_k, 若图 G 的边数大于等于 $c_k n^{1+\frac{1}{k}}$, 则 G 含 C_{2k}. 我们先进行一些预处理. 首先, 我们可以不妨设 G 为二部图, 这是由于下述经典的引理:

Lemma. 对于任意图 G, 存在 G 的一个二部子图 H, 满足: 对于任意 $v \in H$, $2e_H(v) \geq e_G(v)$. 特别地, 此时即有 $2e(H) > e(G)$.

Proof. 我们选取一切 G 的二部子图中边数最多的那个. 若存在 $v \in H$, 使得 $2e_H(v) < e_G(v)$, 我们将 v 移到另一个部分, 这样诱导的二部子图边数更多, 矛盾. 因此结论成立. $\square$

由该引理, 我们可以不妨设 G 为二部图 (此时 c_k 减半). 接下来, 我们可以把条件加强为图 G 每个顶点的度数大于等于 $c_k n^{\frac{1}{k}}$. 事实上, 我们可以对 n 实行归纳法: $n=1$ 时命题平凡. 若命题对 $n-1$ 的情形成立, 对于 n 的情形, 如果 G 中一个顶点的度数小于等于 $c_k n^{\frac{1}{k}}$, 那么去掉该点后, 剩下的边数多于 $c_k n^{1+\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}} \geq c_k(n-1)^{1+\frac{1}{k}}$, 因此使用归纳假设, 就存在 C_{2k}. 故我们可以把条件加强为图 G 每个顶点的度数大于等于 $c_k n^{\frac{1}{k}}$.

我们现在来证明, 若 $G(V,E)$ 满足 $|V|=n$. 若 G 每个顶点的度数均大于等于 $s=40kn^{\frac{1}{k}}$, 则 G 含 C_{2k} 作为子图, 这就证明了原结论. 我们用反证法. 假设 G 中不含 C_{2k}. 任取 G 中一顶点 x, 并把 G 中的点按到 x 的距离分类为集合 $V_0, V_1, \cdots$, 即 $V_0=\{x\}$, V_i 表示到点 x 距离为 i 的集合. 任取正整数 $1 \leq i \leq k$. 我们归纳证明: $\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|} > n^{\frac{1}{k}}$, 这样就有 $|V_k| > n$, 就推出了矛盾.

$i=1$ 时问题显然. 设命题对 $i-1$ 的情况成立, 我们考虑 i 的情况. 设 $H=V_i \cup V_{i-1}$, 且 H 被分为连通分支 $H_1, H_2, \cdots, H_q$, 并记 W_1 为 H_1 在 V_{i-1} 的那一部分, X_1 为另一部分. 我们首先证明 $e(H_1) < 4kv(H_1)$.

$|W_1|=0,1$ 和 $|H_1|=0,1$ 时命题均显然. 下设 $|W_1|, |H_1| \geq 2$. 称 G 中的一条路为单调的, 如果其不经过两个到 x 距离相同的顶点. 我们选最小的整数 q, 使得 V_q 中存在一个顶点 a, 有两条只相交于 a 的单调路连接 a 与 W_1 中一点 (由于 $|W_1|>2$, 故易于验证这样的路存在), 并记这两条路为 C, D. 若 $x \neq q$, 对于 W_1 中任意一点 w, w 与 x 有一条单调路相连, 且这条路必须与 a 到 W_1 的单调路相交 (否则, 将 a 到 W_1 的单调路任意扩展成 a 到 x 的路, 考察它与 w 到 x 的这条单调路的距 x 最远的交点即与 q 的最小性矛盾.) 因此, W_1 中所有点均与 a 有单调路相连.

对于 W_1 中任意一点, 如果存在从它到 a 的单调路, 只与路 C 交于点 a, 则称该点为好的, 否则称其为坏的. 那么, 路 C, D 的顶点分别为好的和坏的, 因此好的和坏的顶点均存在; 对于一个好的

顶点 p 和坏的顶点 q, 考察从 p 到 a 的一条只与路 C 交于点 a 的单调路和 q 到 a 的任意一条单调路. 由于 q 是坏的, 它与路 C 有别的交点, 我们考察其中距 x 最远的那个点 r. 我们断言: 从 q 到 r 再沿着 C 走的这条路与从 p 到 a 的这条路没有除 a 以外的交点. 否则, 若它还有交点 s, 则 s 肯定比 r 离 x 更远, 因此从 q 到 s 再沿着 p 到 a 的这条路就与路 C 没有交点, 这与 q 是坏的矛盾! 结论得证.

因此, 对于任意一个好的顶点和坏的顶点, 它们均可以用一条的通过 a 的长度为 $2(q+1-i)$ 的路连接. 由于 G 中没有 C_{2l}, 因此它们不能在 H_1 中用长度为 $2(t+i-q-1)$ 的路连接. 于是, 我们可以把 H_1 按好的, 坏的, 和 X_1 中的点来三染色. 由奇偶性, 一条长度为 $2(t+i-q-1)$ 的路只能连接两个 W_1 中的点或 X_1 中的点, 因此只能好的连好的, 坏的连坏的, X_1 中的连 X_1 中的. 我们接下来说明这就可以导出我们想要的不等式.

Lemma. 给定正整数 t. 若连通图 G 满足 $e(G) \geq 2tv(G)$, 则无论怎么将 G 的顶点三染色, 一定存在一条长度为 t 的路, 端点异色.

Proof. 我们对 $|V(G)|$ 归纳. $|V(G)| = 4t+1$ 时 G 为完全图, 结论成立. 假设 $|V(G)| = k$ 时结论成立, 考虑 $|V(G)| = k+1$ 的情况. 我们分三种情况讨论:

- 若 G 中存在一个点 v, 去掉它之后的每个连通分支均有三种颜色点, 且 $d(v) < 2t$, 则去掉该点后必存在一个连通分支 G', 有三种颜色的点, 且 $e(G') \geq 2tv(G')$, 此时由归纳假设即证;
- 若 G 中存在一个点 v, 去掉它之后的某个连通分支不存在某种颜色的点, 不妨设为黄色. 则距 v 最近的黄点到 v 的距离若超过 t, 则该黄点到 v 有一条长度至少为 t 的路, 这上面没有其他黄点, 这就产生了一个从黄点出发到一个非黄点的长度为 t 的路; 若不超过 t, 不妨设为 r, 我们再在不含黄点的这个连通分支中找一条从 v 出发的长度为 $t-r$ 的路, 就诱导了一条从黄点出发到一个非黄点的长度为 t 的路. 而这样的路一定能找到, 是因为若我们选取一条在该连通分支中的从 v 出发的最长路, 则其另一个端点若不是割点, 则 $d(v) \geq 2t$, 因此就可以继续再连一个其他的点; 若为割点, 则由于该割点是第一次经过, 必然可以再连向一个新的连通分支. 因此这种情况证毕.
- 若 G 中每个点均满足 $d(v) \geq 2t$, 则对于任意一点 r 和两个其邻域中的点 p, q, 我们可以从 r 出发, 连出一条不经过点 p, q 的长度为 $t-1$ 的路, 设其端点为 s. 那么, 点 p, q 中若有点与 s 异色, 结论得证; 否则, 任意两个具有公共顶点的点均同色. 此时, 递推易见所有到 s 距离为偶数的点均同色, 到 s 距离为奇数的点也均同色, 因此所有点只能有两种颜色, 矛盾! 因此这种情况也证毕.

  综上所述, 根据归纳原理, 引理得证. □

因此, 根据引理, 我们就有 $e(H_1) < 4kv(H_1)$. 对所有连通分支求和, 我们有 $e(H) < 4kv(H)$. 类似地, 记 $H' = V_{i-1} \cup V_{i-2}$, 则 $e(H') < 4kv(H')$. 将两式相加, 我们有

$$4k(|V_{i-1}| + |V_i| + |V_i| + |V_{i+1}|) = 4t(v(H) + v(H')) > e(H) + e(H') \geq 40kn^{\frac{1}{k}}|V_i|.$$

由归纳假设, $\frac{|V_{i-1}|}{|V_{i-2}|} > n^{\frac{1}{k}}$, 故 $|V_{i-1}| \geq |V_{i-2}|$. 因此, 我们有

$$|V_{i+1}| > 10n^{\frac{1}{k}}|V_i| - 2|V_i| - |V_{i-1}| \geq n^{\frac{1}{k}}|V_i|.$$

因此命题得证. □

这个界是目前最好的上界. 然而, 我们目前只能证明, $k = 2, 3, 5$ 时我们可以取到这个上界. 我们已经证明了 $k = 2$ 的情况, 我们在这里陈述 $k = 3$ 的构造.

我们考虑 $\mathbb{F}_q$ 上的 4 维射影空间中的二次超曲面 $S : x_0^2 + x_1x_2 + x_3x_4 = 0$. 我们作一个二部图 $G(V, E)$, 顶点集分别是 $\mathcal{L}$ 和 S, 其中 $\mathcal{L}$ 是 S 中所有直线的集合. 对于 $\mathcal{L}$ 中一条直线 ℓ, 我们连接它和 S 中一点 s 当且仅当 ℓ 经过 s. 我们来考虑这个图.

首先, 这个图中没有 C_6. 这只需说明, 任意三条直线均不共面. 注意到任何二次曲面若不包含于该超曲面, 和该超曲面的交就是一个二次曲线, 故不可能含三条直线. 而 $x_0^2 + x_1x_2$ 为不可约多项式, 故显然没有任何二次曲面包含于其中.

我们接下来研究这个二部图. 显然 $|S| = \Theta(q^3)$; 我们只需说明 S 中任意一点在 $q + 1$ 条直线上, 注意一条直线显然经过 $q + 1$ 个点, 这就说明 $|\mathcal{L}| = \Theta(q^3)$, 从而 $|V| = \Theta(q^3), |E| = \Theta(q^4)$, 这就说明了结论.

我们首先考虑 S 中一点 $[0, 1, 0, 0, 0]$. 过该点的直线可以写为 $[a_1t, 0, a_2t, a_3t, a_4t]$. 代入二次曲面的方程, 我们有 $a_2 = 0$ 且 $a_1^2 + a_3a_4 = 0$. 注意到 a_1, a_3, a_4 差一个比表示同一直线, 显然此时直线共有 $q + 1$ 条 ($a_4 = 0$ 时一条, $a_4 \neq 0$ 时 q 条).

我们最后说明, S 中所有点均可以通过一个保持 S 不动的线性变换变成这个点, 从而说明过 S 中所有点的直线数目相等. 对于任意一点 $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4]$, 我们首先不妨设 $a_1 \neq 0$. 考虑线性变换:

$$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \to [x_0 + kx_1, x_1, x_2 - (k^2 + ml)x_1 - 2kx_0 - lx_3 - mx_4, x_3 + mx_1, x_4 + lx_1],$$

易于验证该线性变换保证 S 不动. 因此, 我们可以选取合适的 k, m, l, 将 $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4]$ 变为 $[0, a_1, a_2, 0, 0]$, 此时自然 $a_2 = 0$, 因此即变换到点 $[0, 1, 0, 0, 0]$. $a_1 = 0$ 的情形只需先复合一个线性变换使 $a_1 \neq 0$ 即可. 结论得证.

本讲的最后我们来讨论 Erdös-Turán 问题. 我们知道, 图 G 没有 K_t 时, G 的边数的最大值在 G 为完全 $t - 1$ 部图时取等. 然而, 在这种取等中, G 有一个很大的独立集. 一个问题是, 我们限制 G 的最大独立集元素个数, 例如设 G 的最大独立集的元素个数是 $o(n)$ 级别且 G 中没有 K_t, G 最多能有几条边? 我们定义 $RT(n, K_t, o(n))$ 为 G 的最大独立集的元素个数是 $o(n)$ 级别且 G 中没有 K_t 时 G 边数的最大值. 为对于三角形的情形, 这个问题是不困难的: 由于 G 中任意一个点的邻域都是独立集, 所以最多 $o(n)$ 条边, 因此总边数最多 $o(n^2)$. 对于 $t > 3$, 这个问题就没有那么明显了. 事实上, 在本讲中, 我们要证明以下的结果:

Theorem. 当 t 为奇数时, $RT(n,K_t,o(n))=(\frac{t-3}{2t-2}+o(1))n^2$.

t 为偶数的情形比较复杂, 且需要使用 Regularity lemma, 因此我们将在第五讲中证明. 我们本节中先来解决奇数的情况.

Proof. 我们首先给出构造. 首先, 我们考虑一个完全 $K_{\frac{t-1}{2}}$ 部图, 每个部分的点数均为 $\frac{2n}{t-1}$. 此时有 $\frac{t-3}{2t-2}n^2$ 条边. 接下来, 我们证明, 对任意正整数 n, 存在一个有 n 个顶点的图 H, 无三角形, 最大独立集数为 $o(n)$. 如果这样的图 H 存在, 我们在这个完全 $K_{\frac{t-1}{2}}$ 部图的每个部分放入一个 H, 得到的新的图的最大的独立集数为 $o(n)$, 且无 K_t(否则, 由抽屉原理, 必有一个部分有三个点, 矛盾.) 这样就构造出了一个边数大于等于 $\frac{t-3}{2t-2}n^2$ 的, 无 K_t, 最大独立集数为 $o(n)$ 的图.

我们运用概率方法. 我们考虑随机图 $G(n,p)$, p 待定. 那么, 对任意实数 $c<0.1$, G 中含一个大小为 cn 的独立集的概率不超过

$$\binom{n}{cn}(1-p)^{\frac{cn(cn-1)}{2}}<e^{-pcn^2+cn\ln n},$$

而 G 中含三角形的个数的期望为 p^3n^3. 因此, 取 $p=1/(n^{\frac{3}{4}})$, 那么 G 含大小为 cn 的独立集的概率就不超过 0.1, G 中含超过 cn 个三角形的概率也不超过 0.1. 我们取 G 使得 G 不含超过 cn 个三角形, 且不含大小为 cn 的独立集, 那么我们从 G 中每个三角形中删去一条边, 剩下的图就不含三角形, 也不含大小为 $3cn$ 的独立集. 结论得证.

我们接下来证明, 如果图 G 的边数大于等于 $(\frac{t-3}{2t-2}+2r)n^2$, 且 $nr>10$, 则图 G 就至少有一个大小为 $\frac{r\sqrt{r}}{2}n$ 的独立集, 或一个 K_t. 注意, 这就导出了原结论. 我们首先证明一个引理:

Lemma. 给定实数 ϵ,c. 若图 $G(V,E)$ 满足 $|V|=n,|E|=\frac{c}{2}n^2$, $n\epsilon>2$, 则图 G 存在一个子图 $G'(V',E')$, 满足 $n'\geq\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}n$, 且 G' 的每个顶点度数均大于等于 $(c-\epsilon)n'$.

Proof. 首先, 我们可以不妨设 $\epsilon<c<1$. 我们执行如下操作: 记 $G_0=G$. 若 G_i 的某个顶点度数大于等于 $(c-\epsilon)|G_i|$, 则去掉该顶点, 剩下的图记为 G_{i+1}. 假设最后操作结束时为 G_{n-k}. 则

$$\frac{c}{2}n^2\leq\sum_{i=0}^{n-k-1}(n-i)(c-\epsilon)+\frac{k(k-1)}{2}\leq\frac{1}{2}(k^2+(c-\epsilon)(n^2-k^2+n-k)),$$

移项变形, 我们有

$$\epsilon n^2\leq(1+\epsilon-c)k^2+n-k<2k^2+\frac{1}{2}\epsilon n^2,$$

即 $k>\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}n$. 引理得证. □

由引理, 我们取 $\epsilon=r$, 我们就只需证明, 若图 G 每个顶点的度数均大于等于 $(\frac{t-3}{t-1}+r)n$, 则含 K_t 或含大小为 rn 的独立集. 我们用反证法. 考察 G 中的最大团 U, 并设其顶点为 $v_1,v_2,\cdots,v_m$, 剩下的点构成集合 V, 则 $m\leq t-1$.

我们现在来对 $e(U,V)$ 算两次. 一方面, 对 U 计算, 我们有

$$e(U,V) \geq (\frac{t-3}{t-1}+r)mn - \frac{m(m-1)}{2}.$$

另一方面, 我们把 V 中的点分成两类: 第一类, 和 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 中至多 $m-2$ 个点相连的点. 第二类, 和 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 中 $m-1$ 个点相连的点. 那么, 和 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 中固定的 $m-1$ 个点相连的点构成独立集, 因此至多 rn 个, 即第二类的点总共至多 $(m-1)rn$ 个. 因此, 我们有

$$e(U,V) \leq (m-2)|V| + (m-1)rn = (m-2)(n-m) + (m-1)rn.$$

联立两式, 我们有

$$\frac{t-3}{t-1}mn - \frac{m(m-1)}{2} \leq (m-2)(n-m) - rn.$$

由于 $t \geq m+1$, 故 $\frac{t-3}{t-1} \leq \frac{m-2}{m}$, 代入整理得

$$(m-2)m + rn \leq \frac{m(m-1)}{2},$$

矛盾! 因此反证假设不成立, 结论得证. $\square$