Chapter 1

这一讲我们将回顾图论中的 Ramsey 定理, 并介绍一些相关结果. 首先我们陈述这个定理.

Theorem. (Ramsey 定理) 对任意正整数 s,t, 存在正整数 N, 使得完全图 K_N 的任意二染色 (下文中均指红蓝二染色) 必包含红色 K_s 或蓝色 K_t. 这样的最小的正整数 N 记为 $R(s,t)$.

Remark. 我们称图 G 包含图 H, 是指图 G 存在一个子图同构于 H. 在一种对边进行的染色中, 我们称图 G 为某种颜色的, 是指 G 的边均为这种颜色.

Proof. 我们对 $s+t=n$ 实行归纳法. $n=2$ 时结论显然. 假设命题对 $n-1$ 成立, 我们来看 n 的情况. 设 $n=R(s-1,t)+R(s,t-1)$. 任取 K_n 中的一个点 A, 并记集合 R 为与 A 用红色边相连的点组成的集合, B 为与 A 用蓝色边相连的点组成的集合. 那么, 若 $|R| \geq R(s-1,t)$, 由归纳假设, 这 n 个点诱导的子图包含红色 K_{s-1} 或蓝色 K_t. 若为后者, 则命题已经得证, 若为前者, 则这个 K_{s-1} 加上点 A 构成一个红色 K_s, 此时命题依然得证. 同理, 若 $|B| \geq R(s,t-1)$, 则命题依然得证. 而 $|R|+|B|+1=n=R(s-1,t)+R(s,t-1)$, 故上述两种情况至少会有一种发生, 结论得证. $\square$.

由上述证明, 我们立得下述的推论:

Corollary. 对任意正整数 $s,t \geq 2$, $R(s,t) \leq R(s,t-1)+R(s-1,t)$. 利用归纳法易得 $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$. 特别地, 有 $R(k,k) \leq \binom{2k-1}{k-1} \leq 4^k$.

通过将多种颜色合并成一种颜色反复运用 Ramsey 定理, 我们容易得出下面的结论:

Corollary. (一般形式的 Ramsey 定理) 对任意正整数 $s_1,s_2,\cdots,s_r$, 存在正整数 N, 使得 $n \geq N$ 时, 对于完全图 K_N 的任意 r 染色, 我们总能找到某个正整数 i 和 i 色的 K_{s_i}. 这样的最小的正整数 N 记为 $R(s_1,s_2,\cdots,s_r)$.

我们接下来介绍一个 Ramsey 定理的应用.

Theorem. (Schur's theorem) 对任意正整数 k, 存在正整数 N, 使得对任意 $1,2,\cdots,N$ 的 k 染色, 总存在同色的三个数 x,y,z, 满足 $x+y=z$.

Proof. 记 $N=R(3,3,\cdots,3)$(其中 3 有 k 个), 我们证明这样的 N 就符合条件. 对任意 $1,2,\cdots,N$ 的 k 染色, 我们对 K_N 按如下方式染色: 连接顶点 i,j 的边, 染 $|i-j|$ 所对应的颜色.

由 Rmasey 定理, K_N 中必然存在同色三角形. 不妨设存在正整数 $i<j<k$ 使得 $|i-j|$, $|j-k|$, $|k-i|$ 同色, 此时 $|j-k|+|i-j|=|k-i|$, 故 $(x,y,z)=(k-j,j-i,k-i)$ 满足条件. $\square$

由 Schur's theorem, 我们可以得到以下的推论:

Corollary. 对于任意正整数 n, 总存在正整数 N, 使得对于任意素数 $p \geq N$, 我们总能找到 $x,y,z \in (\mathbb{Z}/p)^\times$, 使得

$$x^n+y^n=z^n.$$

Proof. 记 $G = \{x^n : x \in (\mathbb{Z}/p)^\times\}$, 则 G 是 $(\mathbb{Z}/p)^\times$ 的子群. 设 $(\mathbb{Z}/p)^\times/G$ 的代表元为 $a_1, a_2, \cdots, a_l$, 则 $l \le n$. 我们构造 $\{1, 2, \ldots, p\}$ 上的一个 l 染色: 若 $x \in a_i G$, 则将 x 染为 i 色. 那么, 由 Schur's theorem, 存在正整数 N, 使得 $p \ge N$ 时一定存在同色的 x, y, z 满足 $x + y = z$. 因此, 存在 $X, Y, Z \in (\mathbb{Z}/p)^\times$ 满足

$$a_i X^n + a_i Y^n = a_i Z^n,$$

即

$$X^n + Y^n = Z^n.$$

□

Ramsey 定理也有在超图上的推广.

Theorem. 对任意正整数 $k, n_1, n_2, \cdots, n_r$, 存在正整数 N, 满足: 对于任意 N 元集合 S 和 S 上所有 k 元子集的 r 染色 χ, 总存在正整数 $t \le r$ 和 S 的 n_t 元子集 K, K 的所有 k 元子集均为 t 号色. 这样的最小的正整数 N 记为 $R^k(r, n_1, n_2, \cdots, n_r)$.

Proof. 显然我们只用讨论 $r = 2$ 和 n_k 均相等的情况. 以下我们设 S 为 $\mathbb{N}$ 的子集, 并简记 $R^k(n, n) = R^k(n)$. 我们对 k 归纳证明该命题. $k = 0$ 时命题成立. 设 $k - 1$ 的情况命题成立, 我们考虑 k 的情况.

我们证明下述结论: 对任意正整数 $p \le q$, 存在正整数 N, 使得对于任意 N 元集合 S 和 S 上所有 k 元子集的 r 染色 χ, 总存在 S 中的 q 元子集 Y, 使得 Y 中的一个 k 元子集若含 Y 中的最小的 p 个元素之一, 则 Y 的颜色仅由 Y 最小的元素决定. 若我们证明了这个结论, 取 $p = q = 2n - 1$, 注意到这 $2n - 1$ 个元素必有 n 个决定相同的颜色, 这 n 个元素就满足要求.

我们再对 p 实行归纳法. $p = 0$ 时命题成立. 设 $p - 1$ 的情况命题成立, 我们考虑 p 的情况. 取 $q' = R^{k-1}(q) + q$. 由归纳假设, 存在 S 中的 q' 元子集 Y, 使得 Y 中的一个 k 元子集若含 Y 中的最小的 $p - 1$ 个元素之一, 则 Y 的颜色仅由 Y 最小的元素决定. 设 Y 中第 p 小的元素为 t, 并考虑 Y 去掉最小的 p 个元素后得到的集合 Y' 上的 $k - 1$ 元集的染色 $\chi' : \chi'(X) = \chi(X \cup \{t\})$. 由归纳假设, Y' 中存在一个 q 元子集, 任意 $k - 1$ 元子集均同色. 那么, 此时易于验证 Y' 并上 Y 最小的 p 个元素就满足要求. 结论得证. □

现在我们开始介绍一些关于 Ramsey 数估计的相关结论. 关于各种 Ramsey 数的估计一直是图论中的一个重要问题. 例如, 2020 年 Ashwin Sah 关于对角 Ramsey 数的改进

$$R(k+1, k+1) \le \exp(-c(\log k)^2)\binom{2k}{k}$$

就被视为 2020 年组合数学界最重要的结果之一. 我们接下来简单介绍一些关于 Ramsey 数的传统估计理论.

关于 Ramsey 数的估计, 我们将使用的主要手法为概率方法. 一般来说, 我们构建一个合适的概

率空间, 并证明一个事件发生的概率为正, 从而证明这个事件的存在性. 以下的结果是经典的:

Theorem. $R(k,k) > 2^{[\frac{k}{2}]}$.

Proof. 记 $n = 2^{[\frac{k}{2}]}$. 考虑 K_n 的随机二染色. 对 K_n 的任意给定的 k 个顶点构成的子集 R, K_n 限制在 R 上同色 (即连接 R 中两点的边均同色) 的概率为 $2^{1-\binom{k}{2}}$. 注意到 R 共有 $\binom{n}{k}$ 种选择, 因此, 存在一个同色的 K_k 的概率就小于等于

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!}\cdot\frac{n^k}{2^{\frac{k}{2}}} < 1.$$

因此, 存在一种染色使得没有同色的 K_k, 故 $R(k,k) > n$. □

这个简单的例子向我们阐释了概率方法运作的原理. 我们并没有完全的构造出一个符合条件的染色, 而是通过概率的技巧, 以一种非构造的方式, 证明这种染色的存在性. 不过, 由于概率方法往往选取足够多的对象来进行估计, 因此这样放缩出来的界往往不是精确的.

在刚刚的估计中, 我们直接考察了所有具有精确结构的染色. 不过, 如果我们将一些具有 "瑕疵" 的染色纳入我们的目标, 再对这些染色进行一些处理, 可能我们得到的结果会更好.

Theorem. 对任意正整数 n,

$$R(k,k) > n - \binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Proof. 对任意正整数 n, 考虑 K_n 的随机二染色. 根据上一个定理的证明, 我们知道同色的 K_k 个数的期望即 $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$, 因此存在一种染色使得同色的 K_k 个数不超过 $\binom{n}{k}2^{1-\frac{k}{2}}$. 我们从每个同色的 K_k 中各去掉一个顶点 (可能重复), 剩下的顶点产生的诱导子图就不存在同色的 K_k, 即证得命题. □

事实上, 通过简单的估计, 取 $n \sim e^{-1}k2^{\frac{k}{2}}(1-o(1))$, 我们可以得到

$$R(k,k) > \frac{1}{e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{2}}.$$

我们刚刚使用的方法被称为 Alterations. 这种方法先考虑更大的一族结构, 然后再进行一些处理, 得到我们需要的结构. 尽管这种想法非常朴素, 然而通过引入更深刻的概率工具, 往往能够得到很强的结果.

在我们刚刚的证明中, 我们考察了 K_n 所含的每一个 K_k 同色的概率, 并实行了最朴素的概率估计. 然而, 由于 n 远大于 k, 因此有许多 K_k 互不相交, 那么它们同色这些事件事实上是独立的, 因此我们刚刚的放缩显得没有那么有力. 利用下面被称为 Lovasz local lemma 的技术, 我们可以给出一个新的估计.

Definition. 给定一族事件 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$. 给定以 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 为顶点集的图 G. 如果对任意正整数 i 和任意由若干与 i 不相邻的点构成的集合 S, B_i 和 $\bigwedge_{j\in S} B_j$ 无关, 则称 G 为这族事件的相关图.

Theorem. (Lovasz local lemma) 设图 G 为事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的相关图. 若存在实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$, 满足对任意正整数 i,

$$\mathbb{P}(B_i) \leqslant x_i \cdot \prod_{j:\ i \sim j \text{ in } G} (1 - x_j),$$

则

$$\mathbb{P}(\wedge_{i=1}^{n} \overline{B_i}) \geqslant \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \geqslant 0.$$

Proof. 我们先指出下面的命题: 对于任意 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集 S,

$$\mathbb{P}(B_i | \wedge_{j \in S} \overline{B_j}) \leqslant x_i. \tag{1}$$

我们分两步证明原题.

Step 1. 第一步, 我们先证明若我们指出的命题成立, 则原题成立. 此时

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{B_1} \wedge \cdots \wedge \overline{B_n}) &= \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1}) \cdots \mathbb{P}(\overline{B_n}|\overline{B_1} \wedge \cdots \overline{B_{n-1}}) \\
&= (1 - \mathbb{P}(B_1))(1 - \mathbb{P}(B_2|B_1)) \cdots (1 - \mathbb{P}(B_n|\overline{B_1} \wedge \cdots \overline{B_{n-1}})) \\
&= (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

因此原题成立.

Step 2. 我们对 $|S|$ 归纳证明该命题. $|S| = 0$ 时问题平凡. 若命题对 $|S| \leq k$ 成立, $|S| = k + 1$ 时, 记 $S_1 = \{j : i \sim j \text{ in } G\}$, $S_2 = \{j : i \nsim j \text{ in } G\}$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_i | \wedge_{j \in S} \overline{B_j}) &= \mathbb{P}\left(B_i | (\wedge_{j \in S_1} \overline{B_j}) \wedge (\wedge_{j \in S_2} \overline{B_j})\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(B_i \wedge (\wedge_{j \in S_1} \overline{B_j}) | \wedge_{j \in S_2} \overline{B_j}\right)}{\mathbb{P}\left(\wedge_{j \in S_1} \overline{B_j} | \wedge_{j \in S_2} \overline{B_j}\right)} \\
&\leqslant \frac{\mathbb{P}\left(B_i | \wedge_{j \in S_2} \overline{B_j}\right)}{\mathbb{P}\left(\wedge_{j \in S_1} \overline{B_j} | \wedge_{j \in S_2} \overline{B_j}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}\left(\wedge_{j \in S_1} \overline{B_j} | \wedge_{j \in S_2} \overline{B_j}\right)} \\
&\leqslant \frac{x_i \cdot \prod_{j:\ i \sim j \text{ in } G} (1 - x_j)}{\mathbb{P}\left(\wedge_{j \in S_1} \overline{B_j} | \wedge_{j \in S_2} \overline{B_j}\right)} \\
&= \frac{x_i \cdot \prod_{j:\ i \sim j \text{ in } G} (1 - x_j)}{\mathbb{P}\left(\overline{B_{i_1}} | \wedge_{j \in S_2} \overline{B_j}\right) \mathbb{P}\left(\overline{B_{i_2}} | (\wedge_{j \in S_2} \overline{B_j}) \wedge \overline{B_{i_1}}\right) \cdots \mathbb{P}\left(\overline{B_{i_k}} | (\wedge_{j \in S_2} \overline{B_j}) \wedge \overline{B_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{B_{i_{k-1}}}\right)} \\
&\leqslant \frac{x_i \cdot \prod_{j:\ i \sim j \text{ in } G} (1 - x_j)}{(1 - x_{i_1}) \cdots (1 - x_{i_k})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x_i \cdot \prod\limits_{j:\ i\sim j \text{ in } G} (1-x_j)}{\prod\limits_{j\in S_1} (1-x_j)} \\
&= x_i \cdot \prod_{j:\ i\sim j \text{ in } G,\, j\notin S_1} (1-x_j) \\
&\leqslant x_i.
\end{aligned}
$$

因此, 原命题成立. □

利用 Lovasz local lemma, 下面的推论是显然的:

Corollary. 给定一族事件 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$. 已知 B_i 发生的概率均小于等于 p, 且每个 B_i 均至多与 d 个其他的事件相关. 若 $ep(d+1) \le 1$, 则 B_i 均不发生的概率为正.

我们接下来利用 Lovasz local lemma 来给出 $R(k,k)$ 的一个估计.

Theorem.

$$R(k,k) > \frac{\sqrt{2}}{e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{2}}.$$

Proof. 对于任意正整数 n, 将 K_n 随机二染色. 对每个 K_n 的 k 个顶点构成的集合 S, 考虑 S 同色这一事件 A_S. 则 $\mathbb{P}(A_S) = 2^{1-\frac{k}{2}}$, 且每个 A_S 最多和 $d = \binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$ 个其他的事件 A_T 相关 ($|S \cap T| \ge 2$ 时才相关.) 由上一个推论, $ep(d+1) \le 1$ 时存在一种染色使得 A_i 均不发生, 即 $R(k,k) > n$. 简单估计即可证得结论. □

值得注意的是, 我们以上所述的技术不止适用于 $R(k,k)$, 也适用于一般的 $R(k,l)$. 例如, 我们可以用 Lovasz local lemma 证明, 存在正实数 c, 使得对任意正整数 k, 均有 $R(3,k) \ge c\frac{k^2}{\ln^2 k}$.

最后, 我们再看一个极其精妙的运用概率方法的例子. 这个例子通过构造一种非常特殊的结构, 给出了关于 $R(3,k)$ 上界的一个精确刻画.

Theorem. 存在正实数 c_1, 使得对任意正整数 k,

$$R(3,k) \le c_1 \frac{k^2}{\ln k}.$$

Proof. 我们证明 $c_1 = 8$ 满足条件. 为此, 我们只需证明, 若图 $G(V,E)$ 不含三角形且顶点数 n 大于 $8\frac{k^2}{\ln k}$, 则必有 k 个点两两不相邻, 即 $\alpha(G) \ge k$. 由于 G 中不存在三角形, 故若 G 存在一个顶点 v 度数大于等于 $k+1$, 则 v 的邻居中存在 k 个点两两不相邻, 此时已经证得命题. 下设 G 的每个点的度数均小于等于 k.

$k \le 16$ 时, 利用平凡的估计 $\alpha(G)(k+1) \ge n$ 即证. 若 $k > 16$, 我们从 G 的所有独立集中随机取一个集合 W. 对于 G 的任意顶点 v, 定义随机变量 X_v 如下:

- 若 $v \notin W$, 则 $X_v = |N(v) \cap W|$.

- 若 $v \in W$, 则 $X_v = k$.

若固定 W, 则

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} X_v = \sum_{v\in W} k + \sum_{v\notin W} X_v \\ &= k|W| + \sum_{v\notin W} |N(v)\cap W| \\ &= k|W| + \sum_{v\in W} |N(v)| \\ &\le 2k|W|.\end{aligned}$$

因此, 为了证明存在 $|W|$ 使得 $W \ge k$, 我们只需证明

$$\mathbb{E}(\sum_{v\in V} X_v) \ge 2k^2,$$

也即只需证明对任意顶点 v, 均有 $\mathbb{E}(X_v) \ge \frac{\ln k}{4}$. 注意到 X_v 的取值只与 W 和 $v \cup N(v)$ 的交有关, 因此, 记 H 为 G 在 $V-(N(v)\cup v)$ 上的诱导子图, 我们只需证明, 对任意 H 中的独立集 S, 均有

$$\mathbb{E}(X_v|W\cap V(H)=S) \ge \frac{\ln k}{4}.$$

不妨设 $|N(v)| = x$. 由于 $N(v)$ 中的点两两不相邻, 因此 S 固定后, W 恰有 2^x+1 种可能: $S\cup\{v\}$, 或是 S 并上一个 $N(v)$ 的子集. 对于前者, X_v 的期望为 $\frac{k}{2^x+1}$; 对于后者, X_v 的期望为 $\frac{x2^{x-1}}{2^x+1}$. 因此, 我们只需证明, 对任意正整数 x, 均有

$$\frac{k}{2^x+1} + \frac{x2^{x-1}}{2^x+1} \ge \frac{\ln k}{4},$$

求导结合 $k \ge 16$ 易证. □

这个问题通过构造一个非常巧妙的随机变量 X_v 来作为桥梁进行概率估计解决了问题. 事实上, 1995 年, Jeong Han Kim 证明了上述的界的阶是最佳的, 即存在正实数 c_2, 使得对任意正整数 k,

$$R(3,k) \ge c_2 \frac{k^2}{\ln k}.$$

Chapter 2

这一讲我们来看一些研究不包含某种特定结构的图的相关的结果. 首先我们来回顾 Turán 定理与其证明.

Theorem. (Turán 定理) 若图 $G(V,E)$ 不包含 K_{r+1} 作为子图, 且 $|V|=n$. 则 G 为一个每个部分的边数为 $[\frac{n}{r}]$ 或 $[\frac{n}{r}]+1$ 的完全 r 部图时, $|E|$ 取最大值.

Proof. 若 v 和 w 不相连, 不妨设 $d(v)\geq d(w)$. 我们考虑以下操作: 将 w 所连出的边全部删去, 并将 w 与所有 v 的邻居全部连接. 那么, 容易验证, 以此法新得到的图 G' 的边数大于等于 G, 且 G' 依然无 K_{r+1}.

显然, 我们可以通过若干次上述操作使得不相邻的点度数相同且邻域相同. 此时 G 为完全 r 部图, 容易由凸性知 G 的各部分顶点数之差小于等于 1 时 G 的边数取最大值. 证毕. $\square$

Turán 定理有很多个证明, 这种使用调整法的证明是其中比较简洁的一种. 事实上, Turán 定理给出了图 G 不含完全图 K_r 作为子图时, G 的边数的最大值的刻画. 自然地, 我们想把完全图推广到一般的图上. 对于图 H, 我们记 $\mathrm{ex}(n,H)$ 为一切具有 n 个顶点且不包含 H 作为子图的图 G 的边数的最大值. 关于 $\mathrm{ex}(n,H)$ 的研究一直是组合数学界一个非常关键的问题, 在此上面有许许多多的结果和很多尚待解决的猜想. 我们本讲就来研究和 $\mathrm{ex}(n,H)$ 相关的问题.

首先我们来看看 H 为树的情况. 下文中均用字母 T 来表示树. 不妨设 T 为一个具有 $t+1$ 个顶点的树. 当 $t\mid n$ 时, 我们考虑一个由 $\frac{n}{t}$ 个 K_t 构成的图, 此时我们有 $\mathrm{ex}(n,T)=\frac{n(t-1)}{2}$. 事实上, Erdös 猜测这个界是最紧的, 不过目前我们仍然没有完全解决这个猜想. 不过, 我们可以证明下述的特殊情形:

Theorem. 设 P_{t+1} 为具有 $t+1$ 个顶点的链, 则 $\mathrm{ex}(n,P_{t+1})\leq\frac{n(t-1)}{2}$.

Proof. 我们对 n 归纳. $n\leq t$ 时命题平凡, 下设 $n\geq t+1$. 首先, 我们不妨设 G 是连通的, 否则对 G 的连通分支运用归纳假设即可. 若 G 有一个顶点的度数小于等于 $\frac{t-1}{2}$, 我们去掉该顶点运用归纳假设即可证明问题. 下设 G 的每个顶点的度数均大于等于 $\frac{t}{2}$. 我们取出 G 中的最长链 $l=x_1x_2\cdots x_k$. 则 l 的两个端点的所有邻居都在 l 上. 若 $k\leq t$, 由抽屉原理, 易见要么 x_1,x_k 相连, 要么存在 i,j 使得 x_1 和 x_i 相连, x_j 和 x_k 相连, 且 $|i-j|=1$. 因此, 无论如何都存在长度为 k 的圈, 而其中必有一点和圈外的点相连 (连通性), 故产生更长的链, 矛盾! 因此 $k\geq t+1$. 结论得证. $\square$

对于一般的情况, 我们有以下的结果:

Theorem. 设 T 是一个具有 $t+1$ 个顶点的树, 则 $\mathrm{ex}(n,T)<(t-1)n$.

Proof. 我们分两步证明该结论. 第一步, 我们证明, 若图 G 的每个顶点的度数均大于等于 t, 则对于任意一个有 $t+1$ 个顶点的树 T, G 均含 T. 我们对 t 归纳. $t=1$ 时命题平凡; 若 $t-1$ 时命题成立, 对于 t 的情形, 我们先考虑 T 删掉一片叶子得到的树 T', 由归纳假设 G 含 T', 再补上这片叶子 (由于每个顶点的度数均大于等于 t 这显然可以做到) 即可.

第二步, 我们证明, 对于任意图 G, 若 G 有 m 条边, 则 G 有一个子图 H, 满足 $\delta(H) > \frac{m}{n}$. 此时结合这两步结果立即证得原题. 注意到, 若 G 存在一个顶点 v 满足 $d(v) < \frac{m}{n}$, 去掉该顶点后 G 的平均度数增加, 因此这种操作不能一直进行下去, 操作停止时我们就找到了一个满足条件的子图 H. 结论得证. $\square$

我们接下来考虑 H 不是树的情况. 我们首先指出如下的结果:

Theorem. 对任意至少有两条边的图 H, 总有

$$\mathrm{ex}(n, H) \gtrsim n^{2-\frac{v(H)-2}{e(H)-1}}.$$

Proof. 待定实数 p. 考虑随机图 $G = G(n, p)$, 即 G 的顶点个数为 n, 每条边出现的概率为 p. 对于任意图 H, 显然 G 中含 H 的个数的期望小于等于 $n^{v(H)}p^{e(H)}$, 而 G 的边数的期望为 $p\binom{n}{2}$. 因此, 记 G 中含 H 的个数为 X, 取 $p = \frac{1}{2}n^{-\frac{v(H)-2}{e(H)-1}}$, 则

$$E(e(G) - X) \geq p\binom{n}{2} - n^{v(H)}p^{e(H)} \geq \frac{1}{16}n^{2-\frac{v(H)-2}{e(H)-1}}.$$

因此, 总存在图 G 使得 $e(G) - X \geq \frac{1}{16}n^{2-\frac{v(H)-2}{e(H)-1}}$. 我们在 G 所含的每个 H 中均去掉一条边, 剩下的图就不包含 H 作为子图, 即证得原题. $\square$

Remark. 有时候我们取 H 的子图, $\frac{v(H)-2}{e(H)-1}$ 可能会变小, 因此这个时候给出的界会更好一点.

由于若 H 连通且不是树时 $v(H) \leq e(H)$, 这一结果指出, H 不是森林时, $\mathrm{ex}(n, H)$ 当 n 趋于无穷时, 不是 n 的一阶量. 事实上, Turán 定理指出, 当 H 为三角形时, $\mathrm{ex}(n, H)$ 当 n 趋于无穷时是 n^2 级别的量. 关于这一问题, 我们有以下著名的结果:

Theorem. (Erdös–Stone–Simonovits 定理) 对任意至少有 1 条边的图 H, 有

$$\mathrm{ex}(n, H) \leq \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right) + o(n^2),$$

其中 $\chi(H)$ 是图 H 的色数.

Example. 完全图 K_n 的色数是 n, 此时符合 Erdös–Stone–Simonovits 定理. 事实上, Turán 定理的阶的估计可以看成 Erdös–Stone–Simonovits 定理的一个特殊情况.

我们将在第五讲中证明这个结果. 我们可以看到, Erdös–Stone–Simonovits 定理给出了当图 H 的色数大于等于 2 的时候, 关于 $\mathrm{ex}(n, H)$ 的阶的一个基础的刻画. 然而, 不幸的是, 对于色数为 2 的图, 我们仍然无法完全弄清楚 $\mathrm{ex}(n, H)$ 的阶. 关于这一问题, 有以下著名的猜想:

Conjecture. (Turán 有理指数猜想) 对于任意有理数 $1 \leq a < 2$, 存在图 H, 使得 $\mathrm{ex}(n, H) = \Theta(n^a)$.

本节和下一节我们接下来将研究一些关于这一问题的一些经典结果. 本节我们研究 H 为 $K_{s,t}$ 时候的情形. 事实上, 注意到若 $H \subseteq G$, 则 $\mathrm{ex}(n,H) \le \mathrm{ex}(n,G)$, 因此如果我们能够理解 $\mathrm{ex}(n,K_{s,t})$ 的阶, 我们就可以获得关于一般的图的 $\mathrm{ex}(n,H)$ 的一些刻画. Kövári, Sós, Turán 对于这一问题有以下经典的结果:

Theorem. 对每个正整数 $1 \le s \le t$, 存在正实数 $C = C(s,t)$, 使得

$$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \le Cn^{2-1/s}.$$

Proof. 假设 G 是一个 n 个顶点且不包含 $K_{s,t}$ 的图, 我们对 G 中 $K_{s,1}$ 的个数算两次, 即考虑一切 $s+1$ 元顶点对 $(v, v_1, v_2, \cdots, v_s)$ 的个数 T, 其中 v 与顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_s$ 相连. 一方面, 注意到对于任意的 s 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_s$, 由于 G 不含 $K_{s,t}$, 这样的 v 至多 $(t-1)$ 个, 因此

$$H \le (t-1)\binom{n}{s}.$$

另一方面, 对每个顶点 v, 这样的顶点对恰有 $\binom{d(v)}{s}$ 个, 因此, 由凸性, 我们有

$$H = \sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{s} \ge n \binom{\frac{m}{n}}{s}.$$

利用 $\binom{x}{s} = (1+o(1))\frac{x^s}{s!}$, 我们可以得到

$$m \le \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)(t-1)^{1/s} n^{2-1/s}.$$

□

这一定理里中的界被猜想是紧的. 然而, 目前仍然无法完全证明这一猜想 (例如, 我们仍然不知道对于 $K_{4,4}$ 的情况, 这一界是否是紧的.) 不过, 我们能够确定, 对于一部分的 s, t, 这个界的确是紧的. 目前我们使用的构造主要来自于以下三种技巧:

- 概率方法. 概率方法是基本而有效的, 不过往往概率方法给出的界不是紧的.
- 代数方法. 这一方法利用一些数论或代数结构来给出一些构造. 不过, 这些构造往往只能运用于少数的情形.
- 随机代数构造. 这一方法结合以上两种技巧, 能够同时吸收这两种方法的优点.

我们前面已经运用概率方法给出了一个关于 $\mathrm{ex}(n, K_{s,t})$ 的下界. 不过, 这个方法给出的界和我们前文中所述的定理的界有一定差距. 本节我们再给出另外两种方法的构造.

对于素数 p 和正整数 $s \geq 2$, 考虑图 $\text{ProjNormGraph}_{p,s} = G(V, E)$, 其中 $V = \mathbb{F}_{p^{s-1}} \times \mathbb{F}_p^{\times}$. 此时, $n = (p-1)p^{s-1}$. 对于点 (X, x) 和 (Y, y), 连接这两点间有边当且仅当

$$N(X+Y) = xy,$$

其中映射 $N : \mathbb{F}_{p^{s-1}} \to \mathbb{F}_p^{\times}$ 按如下法则定义:

$$N(x) = x^{\frac{p^{s-1}-1}{p-1}}.$$

Theorem. 在图 $\text{ProjNormGraph}_{p,s}$ 中, 有以下结论:

a. 若 $|V| = n$, 则
$$|E| = (\frac{1}{2} - o(1))n^{2-1/s}.$$

b. 图 $\text{ProjNormGraph}_{p,s}$ 不包含 $K_{s,(s-1)!+1}$ 作为子图.

Example. 我们来考虑一个例子. $s = 2$, 时, $V = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p^{\times}$, $N(x) = x$. 此时, 对于任意一点 (X, x) 和任意的 y, 恰存在唯一的 Y 使得 $X + Y = xy$, 故总边数为 $\frac{1}{2}p(p-1)^2$, 顶点数为 $p(p-1)$, 因此 a 成立; 若 $X + Y_1 = xy_1$, $X + Y_2 = xy_2$, 则要么 $y_1 = y_2$, 要么相减即解出唯一一组 (X, x), 故图中不存在 $K_{2,2}$. 因此这个构造符合条件.

Remark. 图 $\text{ProjNormGraph}_{p,s}$ 不一定是简单图, 可能有自己连自己的边. 但这样的边的数量至多为 n, 因此我们去掉这些边后就得到了满足条件的简单图.

事实上, 根据图 $\text{ProjNormGraph}_{p,s}$ 的构造, 我们可以看出, 若 $t \geq (s-1)! + 1$, 结合定理 1.2.2, 我们即知 $\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta(n^{2-\frac{1}{s}})$.

Proof. 为了证明这个结论, 我们先不加证明地指出代数几何中的如下引理.

Lemma. 设 $\mathbb{F}$ 是域, $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{F}$, 并且若 $i \neq i'$, 则 $a_{i,j} \neq a_{i,j'}$. 那么, 如下的方程组

$$\begin{aligned}
(x_1 - a_{11})(x_2 - a_{12}) \cdots (x_s - a_{1s}) &= b_1 \\
(x_1 - a_{21})(x_2 - a_{22}) \cdots (x_s - a_{2s}) &= b_2 \\
&\vdots \\
(x_1 - a_{s1})(x_2 - a_{s2}) \cdots (x_s - a_{ss}) &= b_s
\end{aligned}$$

至多只有 $s!$ 组解.

回到原题. 首先, 对于任意满足 $N(X+Y) \neq 0$ 的 Y, 均存在唯一的 y 使得 $xy = N(X+Y)$, 故每个顶点 (X, x) 的度数是 $p^{s-1} - 1$, 这就显然推出了 a.

接下来我们证明 b. 固定 s 个点 (Y_i, y_i), 那么与它们均相连的 (X, x) 满足方程组 $N(X+Y_i) = y_i (1 \le i \le s)$. 将这些式子均与最后一式相除, 方程组化为

$$N(\frac{X+Y_i}{X+Y_s}) = \frac{y_i}{y_s},$$

两边同时除以 $N(Y_i - Y_s)$, 方程组即

$$N(\frac{1}{X+Y_s} + \frac{1}{Y_i - Y_s}) = \frac{y_i}{y_s N(Y_i - Y_s)}.$$

注意到

$$\begin{aligned} N(x+y) = (x+y)^{\frac{p^{s-1}-1}{p-1}} &= (x+y)(x+y)^p \cdots (x+y)^{p^{s-1}} \\ &= (x+y)(x^p + y^p) \cdots (x^{p^{s-1}} + y^{p^{s-1}}), \end{aligned}$$

因此, 记

$$x_i = (\frac{1}{X+Y_s})^{p^{i-1}}, \ \ a_{ij} = -(\frac{1}{Y_i - Y_s})^{p^{j-1}}, \ \ b_i = \frac{y_i}{y_s N(Y_i - Y_s)},$$

上式就化成引理所述形式, 至多只有 $(s-1)!$ 组解, 且每一组至多对应一组满足条件的 (X, x). 因此 b 得证. $\square$

我们接下来给出关于 $\mathrm{ex}(n, K_{s,t})$ 的一个随机代数构造. Bukh 在 2015 年运用这一方法证明, 存在函数 $t_0(s)$, 使得若 $t \ge t_0(s)$, 则 $\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta(n^{2-\frac{1}{s}})$. 注意, 目前这一结果给出的 t_0 远大于我们上一个方法中给出的界 $(s-1)! + 1$. 尽管如此, 这一方法由于结合了代数构造和概率方法, 因此比纯粹的代数方法更加具有一般性, 也有更多的推广价值.

在进行我们的构造之前, 我们首先需要陈述一个代数几何中的引理作为我们的准备工作. 这个引理的证明需要用到复杂的代数几何知识, 因此不会在这里给出.

Lemma. 对于任意正整数 s, d, 存在实数 $C = C(s, d)$, 满足: 若 $f_1(Y), \cdots, f_s(Y)$ 是 $\mathbb{F}_q^s$ 上的次数不超过 d 的多项式, 则它们的公共零点个数要么少于 C, 要么多于 $q - C\sqrt{q}$.

现在我们来介绍 Bukh 的构造. 对于任意正整数 $s \ge 4$, 记 $d = s^2 - s + 2$, 并待定一个素数 q. 我们从一切满足下述条件的多项式 $f \in \mathbb{F}_q[x_1, x_2, \cdots, x_s, y_1, y_2, \cdots, y_s]$ 中随机选取一个多项式 f: f 关于 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_s)$ 和 $Y = (y_1, \cdots, y_s)$ 的次数均不超过 d. 对于给定的 f, 构造二部图 G 如下: G 的两个部分 $L = R = \mathbb{F}_q^s$, 当 $f(X, Y) = 0$ 时, 连接边 $(X, Y) \in L \times R$. 记 n 为 G 一个部分的顶点数. 注意到对任意给定的 u, v, $f(u, v) = 0$ 的概率恰为 $\frac{1}{q}$(对于任意 f, 恰有唯一常数 c 使得 $f(u, v) + c = 0$), 因此我们有 $\mathbb{E}(e(G)) = \frac{n^2}{q}$.

对任意正整数 $r \le d$, 我们考虑集合 $U, V \in \mathbb{F}_q^s$, 其中 $|U| = r, |V| = s$. 我们指出, $f(u, v) = 0$ 对一切 $u \in U, v \in V$ 的概率为 q^{-sr}. 首先, 我们取一个映射 $F : \mathbb{F}_q^s \to \mathbb{F}_q$, 使得对于一切 $u \in U$, $F(u)$ 两两不同. 注意到对于不同的 u, v, 满足 $f(u) = f(v)$ 的映射占全部映射的 $\frac{1}{q}$, 而我们可以取 $q > s^2$,

此时 F 显然可以找到. 于是, 我们可以把 F 延拓成 $F':\mathbb{F}_q^s\to\mathbb{F}_q^s$, 使得对于一切 $u\in U$, $F'(u)$ 的第一个分量两两不同. 因此, 用 $F'(u)$ 代替 u, 我们可以不妨设一切 $u\in U$ 的第一个分量两两不同. 同理, 我们可以不妨设一切 $v\in V$ 的第一个分量两两不同. 记

$$g(x_1,y_1)=\sum_{\substack{0\le i\le s-1\\0\le j\le r-1}}a_{ij}x_1^iy_1^j=\sum_{0\le j\le r-1}a_j(x_1)y_1^j,$$

其中 a_{ij} 为 $\mathbb{F}_q$ 上的独立均匀分布随机变量, a_j 为关于 x_1 的多项式. 注意到 f 和 $f+g$ 有相同的分布, 因此我们只需证明, 对于任意 $b_{uv}\in\mathbb{F}_q(u\in U,v\in V)$, 均存在 a_{ij} 使得 $g(u,v)=b_{uv}$, 即证明了 $f(u,v)=0$ 对一切 $u\in U,v\in V$ 的概率为 q^{-sr}. 对一切 $u\in U$, 由拉格朗日插值公式, 我们可以取一个次数不超过 $r-1$ 的多项式 $g_u(y_1)$ 使得对一切 $v\in V$, 有 $g_u(v)=b_{uv}$, 再用拉格朗日插值公式依次取出多项式 a_i 使得 $g(u,y_1)=g_u(y_1)$, 就有 $g(u,v)=b_{uv}$. 因此, 我们证明了 $f(u,v)=0$ 对一切 $u\in U,v\in V$ 的概率为 q^{-sr}.

任取 L 的一个 s 元子集 U, 并设 X 为 U 中所有点的公共邻居个数. 对于 $v\in R$, 若 v 与 U 中所有点均相邻, 记 $I(v)=1$, 否则记 $I(v)=0$. 此时

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^d)=\mathbb{E}(\sum_{v\in R}I(v))^d)&=\sum_{v_1,\cdots,v_d\in\mathbb{F}_q^s}\mathbb{E}(I(v_1)\cdots I(v_d))\\&=\sum_{r\le d}\binom{q^s}{r}q^{-rs}M_r\le\sum_{r\le d}M_r,\end{aligned}$$

其中 M_r 为从 $\{1,2,\cdots,d\}$ 到 $\{1,2,\cdots,r\}$ 的满射个数. 记 $M=\sum_{r\le d}M_r$. 设多项式 $f_1(Y),f_2(Y),\cdots,f_s(Y)$ 为一切多项式 $f(u,Y)$, 其中 $u\in U$. 对 $f_i(Y)$ 用引理 1.2.7 知, 存在实数 $C=C(s,d)$, 使得 $X>C$ 时 $X>q-C\sqrt{q}$. 我们取 q 充分大使得 $q-C\sqrt{q}\ge\frac{q}{2}$. 因此, 由马尔可夫不等式,

$$\mathbb{P}(X\ge C)=\mathbb{P}(X\ge\frac{q}{2})\le\frac{\mathbb{E}(X^d)}{(\frac{q}{2})^d}\le\frac{M}{(\frac{q}{2})^d}.$$

我们从 R 的每个公共邻居个数大于等于 C 的 s 元子集中去掉一个顶点, 剩下的图就不包含 $K_{s,C+1}$ 作为子图. 此时, 剩下的图 G' 的顶点个数的期望

$$\mathbb{E}(e(G'))\ge\frac{n^2}{q}-\binom{n}{s}\frac{M}{(\frac{q}{2})^d},$$

注意到 $n=q^s,d=s^2-s+2$, 代入知 $\mathbb{E}(e(G'))\ge(1-o(1))n^{2-\frac{1}{s}}$, $v(G')\le 2n$. 因此我们的构造就符合要求. 结论得证. $\square$.

Chapter 3

这一讲我们首先讨论一些关于 $\mathrm{ex}(n,H)$ 的其他结果.

Theorem. 设 $H=A\cup B$ 为二部图, 并且对于任意 $v\in A$, $d(v)\le r$. 那么, 存在 $C=C_H$ 使得

$$\mathrm{ex}(n,H)\le Cn^{2-1/r}.$$

Proof. 记 $a=|A|, b=|B|$. 我们先证明如下的引理:

Lemma. 设 $H=A\cup B$ 为二部图, 并且对于任意 $v\in A$, $d(v)\le r$. 那么, 对任意图 G, 如果 G 中存在 b 个顶点, 其中任意 r 个的公共邻居个数大于等于 $a+b$, 则 G 包含 H 作为子图.

Proof. 我们先选取这 b 个顶点作为 B(顺序任意). 接下来, 我们再按顺序在 G 中选取 A 中的顶点. 每次选取一个顶点时, 只需要其邻域包含给定的不超过 r 个点. 注意到这些点的公共邻居个数大于等于 $a+b$, 故必可以从中选出一个与已经选取的点均不同的点作为该顶点. 引理证毕.

回到原题. 我们证明 C 充分大时满足条件. 由引理, 我们只需从 G 中选出 b 个顶点, 其中任意 r 个的公共邻居个数大于等于 $a+b$. 对任意边数大于 $Cn^{2-1/r}$ 的图 $G(V,E)$, 我们随机地依次取其 r 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_r$(允许重复), 并记这些顶点构成的集合为 T, 它们的邻域为 A. 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|A|)&=\sum_{v\in V}\mathbb{P}(v\in A)\\
&=\sum_{v\in V}\mathbb{P}(T\subseteq N(v))\\
&=\sum_{v\in V}(\frac{d(v)}{n})^r\\
&\ge n(\frac{1}{n}\sum_{v\in V}(\frac{d(v)}{n}))^r\\
&=(\frac{C}{2})^r.
\end{aligned}$$

我们接下来试图从 A 中选出这 b 个顶点. 称 V 的一个 r 元子集为坏的, 如果其公共邻居个数小于 $a+b$. 设 A 中所含坏的子集的个数为 X. 如果我们证明了 $\mathbb{E}(|A|)-\mathbb{E}(X)>b$, 那么, 我们就可以选出一个 A, 使得其中所含的坏子集个数小于 $|A|-b$, 然后我们对于每个坏子集, 依次删去 A 中的一个元素, 剩下的元素就满足要求.

对于 V 的一个 r 元子集 Q, 我们来考察它是坏子集且属于 A 的概率. 若 Q 属于 A, 则 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 必须均在 Q 的邻域中, 而 Q 的公共邻居个数小于 $a+b$, 因此这一概率就小于 $(\frac{a+b}{n})^r$, 故

$$\mathbb{E}(X)<\binom{n}{r}(\frac{a+b}{n})^r<(a+b)^r.$$

因此, 我们可以选取充分大的实数 C 使得了 $\mathbb{E}(|A|)-\mathbb{E}(X)>b$. 结论证毕. $\square$

Remark. 这一例子相较于前面的例子有一些变化, 但是再次向我们展示了 Alterations 的威力: 我们适当的选取了一个集合 A 作为桥梁, 使得我们能够在 A 中进行满足条件的选取. 这样的 A 的构造正是 Alterations 的精妙之处.

Theorem. 对于偶圈 C_{2k}, 存在实数 c_k, 使得

$$\mathrm{ex}(n,C_{2k})\le c_k n^{1+1/k}.$$

Proof. 我们来证明, 存在实数 c_k, 若图 G 的边数大于等于 $c_k n^{1+\frac{1}{k}}$, 则 G 含 C_{2k}. 我们先进行一些预处理. 首先, 我们可以不妨设 G 为二部图, 这是由于下述经典的引理:

Lemma. 对于任意图 G, 存在 G 的一个二部子图 H, 满足: 对于任意 $v\in H$, $2e_H(v)\ge e_G(v)$. 特别地, 此时即有 $2e(H)>e(G)$.

Proof. 我们选取一切 G 的二部子图中边数最多的那个. 若存在 $v\in H$, 使得 $2e_H(v)<e_G(v)$, 我们将 v 移到另一个部分, 这样诱导的二部子图边数更多, 矛盾. 因此结论成立. $\square$

由该引理, 我们可以不妨设 G 为二部图 (此时 c_k 减半). 接下来, 我们可以把条件加强为图 G 每个顶点的度数大于等于 $c_k n^{\frac{1}{k}}$. 事实上, 我们可以对 n 实行归纳法: $n=1$ 时命题平凡. 若命题对 $n-1$ 的情形成立, 对于 n 的情形, 如果 G 中一个顶点的度数小于等于 $c_k n^{\frac{1}{k}}$, 那么去掉该点后, 剩下的边数多于 $c_k n^{1+\frac{1}{k}}-n^{\frac{1}{k}}\ge c_k(n-1)^{1+\frac{1}{k}}$, 因此使用归纳假设, 就存在 C_{2k}. 故我们可以把条件加强为图 G 每个顶点的度数大于等于 $c_k n^{\frac{1}{k}}$.

我们现在来证明, 若 $G(V,E)$ 满足 $|V|=n$. 若 G 每个顶点的度数均大于等于 $s=40kn^{\frac{1}{k}}$, 则 G 含 C_{2k} 作为子图, 这就证明了原结论. 我们用反证法. 假设 G 中不含 C_{2k}. 任取 G 中一顶点 x, 并把 G 中的点按到 x 的距离分类为集合 $V_0,V_1,\cdots$, 即 $V_0=\{x\}$, V_i 表示到点 x 距离为 i 的集合. 任取正整数 $1\le i\le k$. 我们归纳证明: $\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|}>n^{\frac{1}{k}}$, 这样就有 $|V_k|>n$, 就推出了矛盾.

$i=1$ 时问题显然. 设命题对 $i-1$ 的情况成立, 我们考虑 i 的情况. 设 $H=V_i\cup V_{i-1}$, 且 H 被分为连通分支 $H_1,H_2,\cdots,H_q$, 并记 W_1 为 H_1 在 V_{i-1} 的那一部分, X_1 为另一部分. 我们首先证明 $e(H_1)<4kv(H_1)$.

$|W_1|=0,1$ 和 $|H_1|=0,1$ 时命题均显然. 下设 $|W_1|,|H_1|\ge 2$. 称 G 中的一条路为单调的, 如果其不经过两个到 x 距离相同的顶点. 我们选最小的整数 q, 使得 V_q 中存在一个顶点 a, 有两条只相交于 a 的单调路连接 a 与 W_1 中一点 (由于 $|W_1|>2$, 故易于验证这样的路存在), 并记这两条路为 C,D. 若 $x\ne q$, 对于 W_1 中任意一点 w, w 与 x 有一条单调路相连, 且这条路必须与 a 到 W_1 的单调路相交 (否则, 将 a 到 W_1 的单调路任意扩展成 a 到 x 的路, 考察它与 w 到 x 的这条单调路的距 x 最远的交点即与 q 的最小性矛盾.) 因此, W_1 中所有点均与 a 有单调路相连.

对于 W_1 中任意一点, 如果存在从它到 a 的单调路, 只与路 C 交于点 a, 则称该点为好的, 否则称其为坏的. 那么, 路 C,D 的顶点分别为好的和坏的, 因此好的和坏的顶点均存在; 对于一个好的

顶点 p 和坏的顶点 q, 考察从 p 到 a 的一条只与路 C 交于点 a 的单调路和 q 到 a 的任意一条单调路. 由于 q 是坏的, 它与路 C 有别的交点, 我们考察其中距 x 最远的那个点 r. 我们断言: 从 q 到 r 再沿着 C 走的这条路与从 p 到 a 的这条路没有除 a 以外的交点. 否则, 若它还有交点 s, 则 s 肯定比 r 离 x 更远, 因此从 q 到 s 再沿着 p 到 a 的这条路就与路 C 没有交点, 这与 q 是坏的矛盾! 结论得证.

因此, 对于任意一个好的顶点和坏的顶点, 它们均可以用一条的通过 a 的长度为 $2(q+1-i)$ 的路连接. 由于 G 中没有 C_{2l}, 因此它们不能在 H_1 中用长度为 $2(t+i-q-1)$ 的路连接. 于是, 我们可以把 H_1 按好的, 坏的, 和 X_1 中的点来三染色. 由奇偶性, 一条长度为 $2(t+i-q-1)$ 的路只能连接两个 W_1 中的点或 X_1 中的点, 因此只能好的连好的, 坏的连坏的, X_1 中的连 X_1 中的. 我们接下来说明这就可以导出我们想要的不等式.

Lemma. 给定正整数 t. 若连通图 G 满足 $e(G) \geq 2tv(G)$, 则无论怎么将 G 的顶点三染色, 一定存在一条长度为 t 的路, 端点异色.

Proof. 我们对 $|V(G)|$ 归纳. $|V(G)| = 4t+1$ 时 G 为完全图, 结论成立. 假设 $|V(G)| = k$ 时结论成立, 考虑 $|V(G)| = k+1$ 的情况. 我们分三种情况讨论:

- 若 G 中存在一个点 v, 去掉它之后的每个连通分支均有三种颜色点, 且 $d(v) < 2t$, 则去掉该点后必存在一个连通分支 G', 有三种颜色的点, 且 $e(G') \geq 2tv(G')$, 此时由归纳假设即证;
- 若 G 中存在一个点 v, 去掉它之后的某个连通分支不存在某种颜色的点, 不妨设为黄色. 则距 v 最近的黄点到 v 的距离若超过 t, 则该黄点到 v 有一条长度至少为 t 的路, 这上面没有其他黄点, 这就产生了一个从黄点出发到一个非黄点的长度为 t 的路; 若不超过 t, 不妨设为 r, 我们再在不含黄点的这个连通分支中找一条从 v 出发的长度为 $t-r$ 的路, 就诱导了一条从黄点出发到一个非黄点的长度为 t 的路. 而这样的路一定能找到, 是因为若我们选取一条在该连通分支中的从 v 出发的最长路, 则其另一个端点若不是割点, 则 $d(v) \geq 2t$, 因此就可以继续再连一个其他的点; 若为割点, 则由于该割点是第一次经过, 必然可以再连向一个新的连通分支. 因此这种情况证毕.
- 若 G 中每个点均满足 $d(v) \geq 2t$, 则对于任意一点 r 和两个其邻域中的点 p, q, 我们可以从 r 出发, 连出一条不经过点 p, q 的长度为 $t-1$ 的路, 设其端点为 s. 那么, 点 p, q 中若有点与 s 异色, 结论得证; 否则, 任意两个具有公共顶点的点均同色. 此时, 递推易见所有到 s 距离为偶数的点均同色, 到 s 距离为奇数的点也均同色, 因此所有点只能有两种颜色, 矛盾! 因此这种情况也证毕.

  综上所述, 根据归纳原理, 引理得证. □

因此, 根据引理, 我们就有 $e(H_1) < 4kv(H_1)$. 对所有连通分支求和, 我们有 $e(H) < 4kv(H)$. 类似地, 记 $H' = V_{i-1} \cup V_{i-2}$, 则 $e(H') < 4kv(H')$. 将两式相加, 我们有

$$4k(|V_{i-1}| + |V_i| + |V_i| + |V_{i+1}|) = 4t(v(H) + v(H')) > e(H) + e(H') \geq 40kn^{\frac{1}{k}}|V_i|.$$

由归纳假设, $\frac{|V_{i-1}|}{|V_{i-2}|} > n^{\frac{1}{k}}$, 故 $|V_{i-1}| \geq |V_{i-2}|$. 因此, 我们有

$$|V_{i+1}| > 10n^{\frac{1}{k}}|V_i| - 2|V_i| - |V_{i-1}| \geq n^{\frac{1}{k}}|V_i|.$$

因此命题得证. □

这个界是目前最好的上界. 然而, 我们目前只能证明, $k = 2, 3, 5$ 时我们可以取到这个上界. 我们已经证明了 $k = 2$ 的情况, 我们在这里陈述 $k = 3$ 的构造.

我们考虑 $\mathbb{F}_q$ 上的 4 维射影空间中的二次超曲面 $S : x_0^2 + x_1x_2 + x_3x_4 = 0$. 我们作一个二部图 $G(V, E)$, 顶点集分别是 $\mathcal{L}$ 和 S, 其中 $\mathcal{L}$ 是 S 中所有直线的集合. 对于 $\mathcal{L}$ 中一条直线 ℓ, 我们连接它和 S 中一点 s 当且仅当 ℓ 经过 s. 我们来考虑这个图.

首先, 这个图中没有 C_6. 这只需说明, 任意三条直线均不共面. 注意到任何二次曲面若不包含于该超曲面, 和该超曲面的交就是一个二次曲线, 故不可能含三条直线. 而 $x_0^2 + x_1x_2$ 为不可约多项式, 故显然没有任何二次曲面包含于其中.

我们接下来研究这个二部图. 显然 $|S| = \Theta(q^3)$; 我们只需说明 S 中任意一点在 $q+1$ 条直线上, 注意一条直线显然经过 $q+1$ 个点, 这就说明 $|\mathcal{L}| = \Theta(q^3)$, 从而 $|V| = \Theta(q^3), |E| = \Theta(q^4)$, 这就说明了结论.

我们首先考虑 S 中一点 $[0, 1, 0, 0, 0]$. 过该点的直线可以写为 $[a_1t, 0, a_2t, a_3t, a_4t]$. 代入二次曲面的方程, 我们有 $a_2 = 0$ 且 $a_1^2 + a_3a_4 = 0$. 注意到 a_1, a_3, a_4 差一个比表示同一直线, 显然此时直线共有 $q+1$ 条 ($a_4 = 0$ 时一条, $a_4 \neq 0$ 时 q 条).

我们最后说明, S 中所有点均可以通过一个保持 S 不动的线性变换变成这个点, 从而说明过 S 中所有点的直线数目相等. 对于任意一点 $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4]$, 我们首先不妨设 $a_1 \neq 0$. 考虑线性变换:

$$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \to [x_0 + kx_1, x_1, x_2 - (k^2 + ml)x_1 - 2kx_0 - lx_3 - mx_4, x_3 + mx_1, x_4 + lx_1],$$

易于验证该线性变换保证 S 不动. 因此, 我们可以选取合适的 k, m, l, 将 $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4]$ 变为 $[0, a_1, a_2, 0, 0]$, 此时自然 $a_2 = 0$, 因此即变换到点 $[0, 1, 0, 0, 0]$. $a_1 = 0$ 的情形只需先复合一个线性变换使 $a_1 \neq 0$ 即可. 结论得证.

本讲的最后我们来讨论 Erdös-Turán 问题. 我们知道, 图 G 没有 K_t 时, G 的边数的最大值在 G 为完全 $t-1$ 部图时取等. 然而, 在这种取等中, G 有一个很大的独立集. 一个问题是, 我们限制 G 的最大独立集元素个数, 例如设 G 的最大独立集的元素个数是 $o(n)$ 级别且 G 中没有 K_t, G 最多能有几条边? 我们定义 $RT(n, K_t, o(n))$ 为 G 的最大独立集的元素个数是 $o(n)$ 级别且 G 中没有 K_t 时 G 边数的最大值. 为对于三角形的情形, 这个问题是不困难的: 由于 G 中任意一个点的邻域都是独立集, 所以最多 $o(n)$ 条边, 因此总边数最多 $o(n^2)$. 对于 $t > 3$, 这个问题就没有那么明显了. 事实上, 在本讲中, 我们要证明以下的结果:

Theorem. 当 t 为奇数时, $RT(n,K_t,o(n))=(\frac{t-3}{2t-2}+o(1))n^2$.

t 为偶数的情形比较复杂, 且需要使用 Regularity lemma, 因此我们将在第五讲中证明. 我们本节中先来解决奇数的情况.

Proof. 我们首先给出构造. 首先, 我们考虑一个完全 $K_{\frac{t-1}{2}}$ 部图, 每个部分的点数均为 $\frac{2n}{t-1}$. 此时有 $\frac{t-3}{2t-2}n^2$ 条边. 接下来, 我们证明, 对任意正整数 n, 存在一个有 n 个顶点的图 H, 无三角形, 最大独立集数为 $o(n)$. 如果这样的图 H 存在, 我们在这个完全 $K_{\frac{t-1}{2}}$ 部图的每个部分放入一个 H, 得到的新的图的最大的独立集数为 $o(n)$, 且无 K_t(否则, 由抽屉原理, 必有一个部分有三个点, 矛盾.) 这样就构造出了一个边数大于等于 $\frac{t-3}{2t-2}n^2$ 的, 无 K_t, 最大独立集数为 $o(n)$ 的图.

我们运用概率方法. 我们考虑随机图 $G(n,p)$, p 待定. 那么, 对任意实数 $c<0.1$, G 中含一个大小为 cn 的独立集的概率不超过

$$\binom{n}{cn}(1-p)^{\frac{cn(cn-1)}{2}}<e^{-pcn^2+cn\ln n},$$

而 G 中含三角形的个数的期望为 p^3n^3. 因此, 取 $p=1/(n^{\frac{3}{4}})$, 那么 G 含大小为 cn 的独立集的概率就不超过 0.1, G 中含超过 cn 个三角形的概率也不超过 0.1. 我们取 G 使得 G 不含超过 cn 个三角形, 且不含大小为 cn 的独立集, 那么我们从 G 中每个三角形中删去一条边, 剩下的图就不含三角形, 也不含大小为 $3cn$ 的独立集. 结论得证.

我们接下来证明, 如果图 G 的边数大于等于 $(\frac{t-3}{2t-2}+2r)n^2$, 且 $nr>10$, 则图 G 就至少有一个大小为 $\frac{r\sqrt{r}}{2}n$ 的独立集, 或一个 K_t. 注意, 这就导出了原结论. 我们首先证明一个引理:

Lemma. 给定实数 ϵ, c. 若图 $G(V,E)$ 满足 $|V|=n, |E|=\frac{c}{2}n^2$, $n\epsilon>2$, 则图 G 存在一个子图 $G'(V',E')$, 满足 $n'\geq\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}n$, 且 G' 的每个顶点度数均大于等于 $(c-\epsilon)n'$.

Proof. 首先, 我们可以不妨设 $\epsilon<c<1$. 我们执行如下操作: 记 $G_0=G$. 若 G_i 的某个顶点度数大于等于 $(c-\epsilon)|G_i|$, 则去掉该顶点, 剩下的图记为 G_{i+1}. 假设最后操作结束时为 G_{n-k}. 则

$$\frac{c}{2}n^2\leq\sum_{i=0}^{n-k-1}(n-i)(c-\epsilon)+\frac{k(k-1)}{2}\leq\frac{1}{2}(k^2+(c-\epsilon)(n^2-k^2+n-k)),$$

移项变形, 我们有

$$\epsilon n^2\leq(1+\epsilon-c)k^2+n-k<2k^2+\frac{1}{2}\epsilon n^2,$$

即 $k>\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}n$. 引理得证. □

由引理, 我们取 $\epsilon=r$, 我们就只需证明, 若图 G 每个顶点的度数均大于等于 $(\frac{t-3}{t-1}+r)n$, 则含 K_t 或含大小为 rn 的独立集. 我们用反证法. 考察 G 中的最大团 U, 并设其顶点为 $v_1,v_2,\cdots,v_m$, 剩下的点构成集合 V, 则 $m\leq t-1$.

我们现在来对 $e(U,V)$ 算两次. 一方面, 对 U 计算, 我们有

$$e(U,V) \geq (\frac{t-3}{t-1}+r)mn - \frac{m(m-1)}{2}.$$

另一方面, 我们把 V 中的点分成两类: 第一类, 和 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 中至多 $m-2$ 个点相连的点. 第二类, 和 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 中 $m-1$ 个点相连的点. 那么, 和 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 中固定的 $m-1$ 个点相连的点构成独立集, 因此至多 rn 个, 即第二类的点总共至多 $(m-1)rn$ 个. 因此, 我们有

$$e(U,V) \leq (m-2)|V| + (m-1)rn = (m-2)(n-m) + (m-1)rn.$$

联立两式, 我们有

$$\frac{t-3}{t-1}mn - \frac{m(m-1)}{2} \leq (m-2)(n-m) - rn.$$

由于 $t \geq m+1$, 故 $\frac{t-3}{t-1} \leq \frac{m-2}{m}$, 代入整理得

$$(m-2)m + rn \leq \frac{m(m-1)}{2},$$

矛盾! 因此反证假设不成立, 结论得证. □

Chapter 4

本讲我们来讨论 Szemerédi Regularity lemma(以后简称 Regularity lemma). 作为图论中最重要的结果之一, Regularity lemma 能够很好的给出关于边比较多的图的一个形状的刻画. 事实上, Regularity lemma 指出, 如果图 G 的边比较多, 我们就能将 G 划分为若干个部分, 任意两个部分之间的连边具有某种" 随机性".

我们首先来给出一些定义并陈述这个定理.

Definition. 给定图 $G(V,E)$. 对于任意两个 V 的不同子集 A,B, 定义 A,B 之间的边密度为

$$d(A,B) = \frac{|e(A,B)|}{|A||B|},$$

其中 $e(A,B)$ 为图 G 中两端点分别在 A 与 B 之间的边数.

Definition. 在图 $G(V,E)$ 中, V 的两个不交子集 (A,B) 被称为是 ϵ-*regular* 的, 如果对于任意满足 $|A'| \geqslant \epsilon|A|$ 的 A 的子集 A', $|B'| \geqslant \epsilon|B|$ 的 B 的子集 B', 均有

$$|d(A',B') - d(A,B)| \leqslant \epsilon.$$

我们可以从定义中看到, ϵ-*regular* 的定义即 A,B 之间的边密度和它们子部分之间的边密度差距很小, 即 A,B 之间的结构具有某种正规性.

接下来我们陈述 Regularity lemma.

Theorem. 对每个实数 $0 < \epsilon < 0.1$, 存在正整数 $M = M(\epsilon)$, 满足: 对任意图 $G(V,E)$, 只要 $|V| \geq M(\epsilon)$, 就存在 V 的分划 $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_t$, 满足:

- $V_1, V_2, \cdots, V_t$ 的元素个数一样;
- $|V_0| < \epsilon n$;
- $\frac{1}{\epsilon} < t < M$;
- 至多 ϵt^2 对 (V_i, V_j) 不是 ϵ-*regular* 的.

我们可以看到, Regularity lemma 指出, 我们可以把 G 的顶点集去掉一个很小的部分后, 将剩下的顶点均匀的分成若干个两两之间几乎都是 ϵ-*regular* 的部分. 有时候我们简称这种划分为 ϵ-*regular* 的划分.

我们首先简单给出一个关于 Regularity lemma 的证明的概要. 首先, 我们取一个同时满足条件 123 的划分, 通过考察一个能够刻画分划正规性的量来进行递降, 逐渐地对原分划进行加细, 并一直保证分划是好的, 最终得到一个满足条件 4 的分划. 我们的操作过程能同时保证条件 1,2,3 成立.

我们来首先对这样的量进行刻画. 下面的定义是关键的:

Definition. 给定 n 个顶点的图 G. 对于任意两个 V 的不同子集 U,W, 定义

$$q(U,W) = \frac{|U||W|}{n^2} d^2(U,W);$$

对于 U 的一个划分 $P_U = \{U_1, U_2, \cdots, U_k\}$, W 的一个划分 $P_W = \{W_1, W_2, \cdots, W_l\}$, 定义

$$q(P_U, P_W) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} q(U_i, V_j).$$

特殊地, 对于 $V(G)$ 的一个划分 $\mathcal{P}$, 定义划分 $\mathcal{P}$ 的能量 $q(\mathcal{P}) = q(\mathcal{P}, \mathcal{P})$.

我们来解释一下这个定义. 我们随机取 $x \in U, y \in W$, 并考察随机变量 $Z = q(U_i, V_j)$, 其中 $x \in U_i, y \in V_j$. 那么,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{|U_i|}{|U|} \frac{|W_j|}{|W|} d(U_i, W_j) = \frac{e(U,W)}{|U||W|} = d(U,W),$$
$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{|U_i|}{|U|} \frac{|W_j|}{|W|} d(U_i, W_j)^2 = \frac{n^2}{|U||W|} q(P_U, P_W).$$

由于 $\mathbb{E}(Z^2) \geq \mathbb{E}(Z)^2$, 我们就有 $q(P_U, P_W) \geq q(U,W)$. 这也立刻说明, 对于一个分划 $\mathcal{P}$ 和它的加细 $\mathcal{P}'$, 有 $q(\mathcal{P}) \geq q(\mathcal{P}')$, 也就是说, 划分的能量是一个在加细中不减的量.

我们接下来研究 $q(\mathcal{P})$ 怎么刻画正规性. 若 U,W 不 ϵ-*regular*, 设 U,W 的两个子集 U', W' 满足

$$|U'| \geq \epsilon |U|, |W'| \geq \epsilon |V|, |d(U,W) - d(U',W')| \geq \epsilon.$$

那么, 我们考虑 U 的划分 $P_U = \{U', U \setminus U'\}$, W 的划分 $P_W = \{W', W \setminus W'\}$, 则

$$\begin{aligned} q(P_U, P_W) - q(U,W) &= \frac{|U||W|}{n^2} (\mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2) \\ &= \frac{|U||W|}{n^2} (\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}(Z))^2) \\ &\geq \frac{|U||W|}{n^2} \frac{|U'|}{|U|} \frac{|W'|}{|W|} (d(U',W') - d(U,W))^2 \\ &\geq \epsilon^4 \frac{|U||W|}{n^2}. \end{aligned}$$

也就是说, 对于不正规的部分, 能量在划分中将会逐渐增大. 然而, 设 $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$, 则

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d^2(V_i, V_j) \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} = 1,$$

因此, 能量不可能一直增长, 即我们总可以找到满足条件的分划. 具体来说, 我们需要下面的引理:

Lemma. 给定 V 的分划 $\mathcal{P}=\{V_0,V_1,V_2,\cdots,V_k\}$, 其中 $k\epsilon^6>1$, 且 $|V_1|=\cdots=|V_k|$. 若存在 ϵk^2 对 (V_i,V_j) 不是 ϵ-*regular* 的, 则存在好分划 $\mathcal{P}'''=\{V_0''',V_1''',V_2''',\cdots,V_{k_3}'''\}$, 满足: $|V_1'''|=\cdots=|V_{k_3}'''|$, $k\le k_3\le k4^k$, $|V_0'''|<|V_0|+\frac{n}{2^k}$, 且 $q(\mathcal{P}''')>q(\mathcal{P})+\frac{1}{4}\epsilon^5$.

显然, 我们只要证明了上述引理, 就可以从任意一个满足 $k\epsilon^6>1$ 的分划开始 ($|V|\ge M(\epsilon)$ 保证了这样的分划存在), 逐步操作, 就得到了一个满足 Regularity lemma 的分划. 注意, $k\epsilon^6>1$ 的条件容易说明 Regularity lemma 中的条件 2 始终满足; 而操作次数的有限性和开始时 $k\epsilon^6>1$ 也保证了条件 3.

我们分三步来进行. 不妨设 $|V_1|=m$. 对于每一对不是 ϵ-*regular* 的 V_i,V_j, 我们总是可以选取 $V_i'\subseteq V_i$, $V_j'\subseteq V_j$, 满足

$$|V_i'|\ge\epsilon|U|,|V_j'|\ge\epsilon|V_j|,|d(V_i,V_j)-d(V_i',V_j')|\ge\epsilon.$$

我们将 V_i 分为 V_i' 和 $V_i\setminus V_i'$, V_j 分为 V_j' 和 $V_j\setminus V_j'$, 并记这个 V_i 的划分为 $P_{i,j}$, V_j 的划分为 $P_{j,i}$. 我们同时对所有的 V_i,V_j 执行上述操作 (注意, 一个 V_i 可能被同时执行多次, 执行 t 次就划分为 2^t 个子集合, 这里划分多次按维恩图的方式划分), 得到一个 V 的分划 $\mathcal{P}'$. 我们来比较 $q(\mathcal{P}')$ 与 $q(\mathcal{P})$. 注意到, 对于任意一对若 V_i,V_j 不是 ϵ-*regular* 的, 设 V_i 最终被划分为 P_i, V_j 最终被划分为 P_j, 则

$$q(P_i,P_j)\ge q(P_{i,j},P_{j,i})\ge q(V_i,V_j)+\frac{|V_i||V_j|}{n^2}=q(V_i,V_j)+\epsilon^4\frac{m^2}{n^2},$$

注意, P_i, P_j 均表示分划. 其中第一个不等式是因为 P_i 是 $P_{i,j}$ 的加细, P_j 是 $P_{j,i}$ 的加细. 若 V_i,V_j 是 ϵ-*regular* 的, 也有 $q(P_i,P_j)\ge q(V_i,V_j)$. 将所有这些不等式求和, 我们有

$$q(\mathcal{P}')=\sum q(P_i,P_j)\ge\sum q(V_i,V_j)+\epsilon^4t^2\frac{m^2}{n^2}\ge q(\mathcal{P})+\frac{1}{2}\epsilon^5,$$

其中最后一个不等式是由于 $mt=(1-\epsilon)n>\frac{\sqrt{2}}{2}n$.

设 $\mathcal{P}'=\{V_0',V_1',V_2',\cdots,V_{k_1}'\}$. 则 $k_1\le k2^k$. 我们接下来对 $\mathcal{P}'$ 再进行加细: 将 $V_1',V_2',\cdots,V_{k_1}'$ 中元素个数大于 $\frac{n}{2^kk_1}$ 的进行加细, 将其按 $[\frac{n}{2^kk_1}]$ 个一组分 (可能会剩下若干个元素个数不超过 $[\frac{n}{2^kk_1}]$ 的), 得到一个新的划分 $\mathcal{P}''=\{V_0'',V_1'',V_2',\cdots,V_{k_2}''\}$. 注意这里 V_i'' 由许多元素个数为 $[\frac{n}{2^kk_1}]$ 的集合, 和不超过 k_1 个元素个数小于 $[\frac{n}{2^kk_1}]$ 的集合构成. 此时, $k_2\le 2^kk_1\le k4^k$, $q(P'')\ge q(P')$.

我们接下来把 $V_1'',V_2'',\cdots,V_{k_2}''$ 中元素个数不等于 $\frac{n}{k_1^2}$ 的全部并入 V_0 得到分划 $\mathcal{P}'''=\{V_0''',V_1''',V_2''',\cdots,V_{k_3}'''\}$. 那么, $|V_1'''|=\cdots=|V_{k_3}'''|$; $k_3\le k_2\le k^24^k$; $|V_0'''|\le|V_0|+k_1\frac{n}{2^kk_1}\le|V_0|+\frac{n}{2^k}$. 于是我们只需验证 $q(P''')+\frac{1}{4}\epsilon^5>q(P'')$.

我们将 $q(P'')$ 中元素个数不等于 $\frac{n}{2^kk_1}$ 的集合全部加细为单元集得到分划 $q(P'''')$, 此时这样的单元集个数不超过 $\frac{n}{2^k}$, 故不超过 $\frac{1}{4}\epsilon^5n$. 下证 $q(P''')+\frac{1}{4}\epsilon^5>q(P'''')$. 注意到 $q(P'''')$ 是从 $q(P''')$ 中分出若干个单元集得到的加细, 故我们只需证明, 从任意划分 $\mathcal{F}$ 中的某个集合中分出一个单元集, 能量至多增加 $\frac{1}{n}$. 设 $\mathcal{F}=\{F_0,F_1,F_2,\cdots,F_r\}$. 从 F_0 中分出一个元素 a 后, 能量的变化 S 为

$$S=\sum_{i=1}^{r}(q(F_0\setminus\{a\},F_i)+q(\{a\},F_i)-q(F_0,F_i)).$$

为了证明 $S\le\frac{1}{n}$, 我们只需证明局部不等式

$$q(F_0\setminus\{a\},F_i)+q(\{a\},F_i)-q(F_0,F_i))\le\frac{|F_i|}{n^2}.$$

将上式展开整理即

$$((e(F_0\setminus\{a\},F_i)-(|F_0|-1)e(\{a\},F_i))^2\le(|F_0|-1)|F_0||F_i|^2,$$

利用 $e(A,B)\le|A||B|$, 我们有 $|e(F_0\setminus\{a\},F_i)-(|F_0|-1)e(\{a\},F_i)|\le(|F_0|-1)|F_i|$, 即证得上式. 至此我们证完了 Regularity lemma. □

我们接下来介绍三个和 Regularity 相关的定理.

Theorem. (Graph Counting Theorem) 设图 H 的顶点为 $1,2,\cdots,k$. 图 G 的顶点集有子集 $V_1,V_2,\cdots,V_k$, 满足: 若 i,j 相连, 则 V_i,V_j 是 ϵ-*regular* 的. 独立随机选取 $v_i\in V_i$. 考虑事件 T: 若 i,j 相连, 则 v_i,v_j 相连. 则

$$|\mathbb{P}(T)-\prod_{i\sim j}d(V_i,V_j)|\le\epsilon e(H).$$

Proof. 我们对 $|H|$ 用归纳法. $|H|=0,1$ 时命题显然成立, 下设 $|H|\ge 2$. 由对称性, 不妨设 1,2 相连. 我们考虑事件 T': 若 i,j 相连, 且 $\{i,j\}\ne\{1,2\}$, 则 v_i,v_j 相连. 那么, 由归纳假设,

$$|\mathbb{P}(T')-\frac{\prod_{i\sim j}d(V_i,V_j)}{d(V_1,V_2)}|\le\epsilon(e(H)-1),$$

因此, 我们只需证明

$$|\mathbb{P}(T)-d(V_1,V_2)\mathbb{P}(T')|\le\epsilon.$$

由于 T,T' 的定义, 我们事实上只需证明固定 $v_3,\cdots,v_k$, v_1,v_2 随机选取时的上述不等式. 定义

$$A_1=\{v_1|v_1\in V_1,\text{对于一切}i>2,\text{若}i\text{与}1\text{相连},\text{则}v_i\text{与}v_1\text{相连}\},$$
$$A_2=\{v_2|v_2\in V_2,\text{对于一切}i>2,\text{若}i\text{与}2\text{相连},\text{则}v_i\text{与}v_2\text{相连}\}.$$

则固定 $v_3,\cdots,v_k$ 后, $p(T)$ 为从 V_1 中随机选一个元素, 它在 A_1 中, 从 V_2 中随机选一个元素, 它在 A_2 中, 且这两个元素相连的概率; $p(T')$ 为从 V_1 中随机选一个元素, 它在 A_1 中, 从 V_2 中随机选一个元素, 它在 A_2 中的概率. 即我们只需证明

$$|\frac{e(A_1,A_2)}{|V_1||V_2|}-d(V_1,V_2)\frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|}|\le\epsilon.$$

我们下面分情况讨论证明这个不等式. 若 $|A_1| \le \epsilon|V_1|$, 则

$$\frac{e(A_1,A_2)}{|V_1||V_2|} \le \frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|} \le \frac{|A_1|}{|V_1|} \le \epsilon,$$

且

$$d(V_1,V_2)\frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|} \le \frac{|A_1|}{|V_1|} \le \epsilon,$$

因此命题得证; $|A_2| \le \epsilon|V_2|$ 时同理. 若 $|A_1| \ge \epsilon|V_1|, |A_2| \ge \epsilon|V_2|$, 由于 V_1, V_2 为 ϵ-*regular* 的, 我们有

$$|\frac{e(A_1,A_2)}{|V_1||V_2|} - d(V_1,V_2)\frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|}| = |d(A_1,A_2) - d(V_1,V_2)\frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|}| \le \epsilon.$$

因此该不等式得证. □

下一个定理是 Graph Counting Theorem 和 Regularity lemma 的综合运用.

Theorem. (Graph Removing Theorem) 给定图 H 和 $\epsilon > 0$. 则存在实数 δ, 满足: 对于任意具有 n 个顶点的图 G, 若其含 H 的个数不超过 $\delta n^{v(H)}$, 则可以从 G 中去掉至多 ϵn^2 条边, 使得剩下的图不含 H.

Proof. 我们首先待定 ϵ_0, δ. 我们总是可以不妨设 $\delta n^{v(H)} > 1$. 因此, 我们取 δ 充分小, 此时 n 充分大, 由 Regularity lemma, 就可以不妨设 $V(G)$ 存在 ϵ_0-*regular* 的划分 $\{V_0, V_1, V_2, \cdots, V_k\}$. 我们现在去掉 G 中如下的边:

- 所有 V_0 中的点连出的边, 这样的边至多 $\epsilon_0 n^2$ 条.
- V_i 中内部点连的边, 这样的边至多 $k\frac{n^2}{k^2} < \epsilon_0 n^2$ 条.
- 不 ϵ_0-*regular* 的对 (V_i, V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\epsilon_0 k^2 \frac{n^2}{k^2} = \epsilon_0 n^2$ 条.
- $d(V_i, V_j) < \frac{\epsilon}{4}$ 的对 (V_i, V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\frac{\epsilon}{4}k^2\frac{n^2}{k^2} = \frac{\epsilon}{4}n^2$ 条.

因此, 我们可以选取 ϵ_0 使得删去的边不超过 ϵn^2 条.

接下来我们证明剩下的图中没有 H. 若剩下的图中含 H, 不妨设 H 的顶点 v_i 属于集合 T_i. (注意, T_i 是 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 之一, 但 T_i 可能相同.) 此时, 若 i, j 连边, 则 T_i, T_j 之间连了边, 根据我们删去的边的条件知, T_i, T_j 是 ϵ_0-*regular* 的, 且 $d(T_i, T_j) \ge \frac{\epsilon}{4}$. 因此, 对集合 T_i 使用 Graph Counting Theorem, 知

$$\mathbb{P}(T) \ge \prod_{i\sim j} d(T_i, T_j) - \epsilon_0 e(H) \ge (\frac{\epsilon}{4})^{e(H)} - \epsilon_0 e(H).$$

取 ϵ_0 使 $(\frac{\epsilon}{4})^{e(H)} - \epsilon_0 e(H) = t > 0$. 注意到事件 T 发生就诱导一个图 H, 因此图中 H 的个数

$\#(H)$ 就满足

$$\#(H) = t\prod_{i=1}^{k}|T_i| \geq t(\frac{1-\epsilon}{k})^k n^t.$$

而 $k \leq M(\epsilon_0)$ 对某个函数 M, 故 H 的个数大于等于 $\delta(\epsilon, H)n^t$. 结论得证. □

Graph Removing Theorem 的证明是经典的运用 Regularity lemma 的手法: 我们首先取一个满足 Regularity lemma 的分划 $\{V_0, V_1, V_2, \cdots, V_k\}$, 再去掉一些性质比较差的边, 剩下的图就会具有非常良好的结构. 我们将在下一节中再次看到这一技术的运用.

最后一个定理是在图 G 中寻找特定子图 H 的相关结论.

Theorem. (Graph Embedding Theorem) 对于任意 $d > 0$ 和 Δ, 存在 $\epsilon = \epsilon(d, \Delta)$ 和 $c = c(d, \Delta)$, 使得下述命题成立:

给定正整数 h, r 和图 H, 顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_h$, 色数不超过 r, 最大度数小于 Δ. 那么, 若图 G 的顶点集 $V_1, V_2, \cdots, V_r$ 满足: 元素个数均大于 ch, V_i, V_j 两两之间均 ϵ-*regular* 且 $d(V_i, V_j) \geq d$, 则 G 含 H.

Proof. 证明: 我们先待定 ϵ 和 c. 假设 H 的一个 r 染色将 H 的顶点分成集合 $U_1, U_2, \cdots, U_r$. 我们现在来找一个 U_i 到 V_i 的嵌入. 假设 H 的顶点 v_i 将被嵌入集合 $V_{\sigma(i)}$. 我们接下来逐步选出 v_i.

对于 $0 \leq j < i \leq h$, 记 $b_{j,i}$ 为 $v_1, \cdots, v_j$ 中与 v_i 相连的点的个数. 假设我们已经选出了 G 中的点 $x_1, x_2, \cdots, x_j$ 作为 $v_1, v_2, \cdots, v_j$. 对于 $i > j$, 记 Y_i^j 为此时 x_i 的可能的选择, 即 Y_i^j 为集合 $V_{\sigma(i)}$ 中满足下述条件的点 x 所构成的集合: 对于任意 $m \leq j$, 若 v_i 与 v_m 相连, 则 x 与 x_m 相连. 我们对 j 归纳证明, 我们总能保证 $|Y_i^j| \geq (d-\epsilon)^{b_{j,i}}|V_{\sigma(i)}|$.

$j = 0$ 时命题显然. 设 $j-1$ 时已经证明问题, 考虑 j 的情形. 首先, 若 v_i 与 v_j 不相邻, 我们取 $Y_i^j = Y_i^{j-1}$ 即可. 由对称性, 不妨设和 v_j 相邻的顶点为 $v_k, \cdots, v_h$. 我们先指出下述显然的引理:

Lemma. 若图 G 中, 顶点集 A, B 是 ϵ-*regular* 的, 且 $d(A, B) = d$. 若 $B_1 \subseteq B$ 满足 $|B_1| \geq \epsilon|B|$, 那么 A 中至多有 $\epsilon|A|$ 个元素, 在 B_1 中的邻居数少于 $(d-\epsilon)|B_1|$.

考虑 A 中在 B_1 中的邻居数少于 $(d-\epsilon)|B_1|$ 的元素构成的子集即显然证得引理. 回到原题. 我们首先使 $(d-\epsilon)^\Delta > \epsilon(\Delta+1)$. 因此, 对任意正整数 $k \leq i \leq h$, 在引理中分别取 $A = V_{\sigma(j)}$, $B = V_{\sigma(i)}$, $B_1 = Y_i^{j-1}$, 即知 $Y_{\sigma(j)}$ 中至多只有 $\epsilon|Y_i^{j-1}|$ 个点, 在 Y_i^{j-1} 中与不超过 $(d-\epsilon)|Y_i^{j-1}|$ 个点相连. 那么, 去掉这些点后, Y_j^{j-1} 中至少还剩

$$|Y_j^{j-1}| - \delta\epsilon|Y_{\sigma(j)}| \geq (d-\epsilon)|Y_{\sigma(j)}| - \delta\epsilon|Y_{\sigma(j)}| \geq \epsilon|Y_{\sigma(j)}| = \epsilon ch$$

个点. 取 $c = \frac{1}{\epsilon}$, 则 Y_j^{j-1} 中至少还剩 h 个点, 必定能选出一个作为 x_j. 此时, 由 x_j 的定义, 对于任意正整数 $k \leq i \leq h$, 就有 $|Y_i^j| \geq (d-\epsilon)|Y_i^{j-1}| \geq (d-\epsilon)^{b_{j,i}}|V_{\sigma(i)}|$.

综上所述, 结论得证. □

Chapter 5

这一讲我们来利用上一讲中提到的技术来证明一些结果. 首先是 Roth 定理.

Theorem. 设 $\{0,1,\cdots,n\}$ 的子集 A 无非平凡的三项等差数列. 则 $|A|=o(n)$.

Remark. Roth 定理是著名的 Szemerédi 定理的特殊情况. Szemerédi 定理指出, 对任意正整数 k, 若 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集 A 无非平凡的 k 项等差数列. 则 $|A|=o(n)$. Roth 定理即 $k=3$ 的情形.

Proof. 我们首先来证明一个引理.

Lemma. 假设图 G 有 n 个顶点, 并且每条边恰在一个三角形中. 则图 G 有 $o(n^2)$ 条边.

Proof. 设 G 有 m 条边. 由于每条边恰在一个三角形中, 故 G 中含三角形的个数为 $\frac{m}{3}<n^2$. 因此, 对 H 为三角形的情况用 Graph Removing Theorem, 我们可以去掉 $o(n^2)$ 条边来使得图 G 中没有三角形. 而去掉一条边只能最多去掉图 G 中一个三角形, 故图 G 中三角形的个数为 $o(n^2)$, 也即图 G 的边数为 $o(n^2)$. 证毕. $\square$

回到原题. 首先通过平移可以不妨设 $0\in A$. 记 $m=2n+1$. 我们将 A 中的元素视为 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 中的元素. 考虑一个三部图 G, 其三个部分 $X=Y=Z=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. 对于 $x\in X, y\in Y, z\in Z$, x 和 y 相连当且仅当 $y-x\in A$, y 和 z 相连当且仅当 $z-y\in A$, x 和 z 相连当且仅当 $\frac{z-x}{2}\in A$. 我们来考察这个三部图 G. 若 G 中存在顶点分别为 x,y,z 的三角形, 则 $y-x, z-y, \frac{z-x}{2}$ 均属于 A, 而它们恰好构成一个等差数列, 除非 $y-x=z-y=\frac{z-x}{2}$, 即 $x=y=z$. 因此, 每个点恰且仅在一个三角形中 (x,x,x 构成一个三角形). 由引理, G 中的边数为 $o(n^2)$. 而 G 中的边数为 $3m|A|$, 因此 $|A|=o(n)$. 结论证毕. $\square$

Remark. 目前关于 Roth 定理最好的结果, 是 2020 年 Thomas F. Bloom 和 Olof Sisask 证明的, 设 $\{0,1,\cdots,n\}$ 的子集 A 无非平凡的三项等差数列, 则 $|A|\le\frac{N}{(\ln n)^{1+c}}$ 对某个常数 $c>0$. Erdös 曾经猜想, 对任意正整数 k, $\{0,1,\cdots,n\}$ 的子集 A 无非平凡的 k 项等差数列的充分必要条件是 A 中所有元素的倒数和发散. 这个结果证明了 Erdös 的猜想的 $k=3$ 的情形.

另一方面, 关于无非平凡三项等差数列的集合的元素个数的下界, 我们有以下的构造:

Theorem. 存在常数 C, 满足: 对于任意正整数 N, 存在 $\{1,2,\cdots,N\}$ 的子集 A, 满足: A 中无三项等差数列, 且 $|A|\ge Ne^{-c\sqrt{\ln N}}$.

Proof. 待定正整数 m,d. 对于任意正整数 $L\le dm^2$, 考虑集合

$$X_L=\{(x_1,x_2,\cdots,x_d)|x_i\in\mathbb{N},1\le x_i\le m,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2=L\}.$$

由抽屉原理, 存在集合 L_0, 使得 $|X_{L_0}|\ge\frac{m^d}{md^2}$. 记 $X=X_{L_0}$. 考虑映射 $\phi:X\to\mathbb{N}$ 如下:

$$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_d)=\sum_{i=1}^{d}x_i(2m)^{d-1}.$$

记 $A=\phi(X)$, 并取 $m=\frac{1}{2}[e^{\sqrt{\ln N}}]$, $d=[\sqrt{\ln N}]$. 则 A 是 $\{1,2,\cdots,N\}$ 的子集, 且

$$|A|=|X|\geq\frac{m^d}{md^2}\geq Ne^{-c\sqrt{\ln N}},$$

其中 c 为某个确定的常数. 最后我们证明 A 中无非平凡的三项等差数列. 若 A 中有非平凡的三项等差数列 u,v,w, 设 $\phi^{-1}(u)=(u_1,u_2,\cdots,u_d),\phi^{-1}(v)=(v_1,v_2,\cdots,v_d),\phi^{-1}(w)=(w_1,u_2,\cdots,w_d)$, 则对任意正整数 i, u_i,v_i,w_i 构成等差数列, 故 $\phi^{-1}(u),\phi^{-1}(v),\phi^{-1}(w)$ 三点共线, 而它们位于 R^d 中的同一个球面上, 矛盾! 结论得证. □

利用本题中所述的引理, 我们还可以证明下述结论:

Theorem. ((6,3)-problem) 假设一个 3-uniform 的超图 H 有 n 个顶点, 满足任意 6 个顶点之间连的边数小于 3. 则 H 的边数为 $o(n^2)$.

Proof. 首先设 H 的每个顶点的度数均大于等于 2. 此时, H 中若有两条边有两个公共元素, 不妨设这两条边为 $\{a,b,c\}$ 和 $\{a,b,d\}$, 则我们选取一条包含点 c 的边即知矛盾. 因此任何两个元素至多只有一个公共边经过.

作一个图 G: 顶点为 H' 中的顶点, 若 H 中有一条边 $\{a,b,c\}$, 则连接点 a,b. 显然图 G 中每条边恰在一个三角形中, 故图 G 的边数为 $o(n^2)$, 三角形数也为 $o(n^2)$. 而图 G 中的三角形数即图 H 的边数, 故 H 的边数为 $o(n^2)$.

若 H 中有度数小于等于 1 的点, 去掉该点和该点所连出的边. 设执行 k 次操作后剩下的图 H 的每个顶点的度数均大于等于 2. 则 $e(H)\leq e(H')+k=o((n-k)^2)+k=o(n^2)$. 结论得证.

下一个结果是第二讲中提到的 Erdös–Stone–Simonovits 定理.

Theorem. (Erdös–Stone–Simonovits 定理) 对任意至少有 1 条边的图 H, 有

$$\mathrm{ex}(n,H)\leq\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}\right)+o(n^2),$$

其中 $\chi(H)$ 是图 H 的色数.

Proof. 我们证明, 对任意 $\delta>0$, 存在 n_0, 使得 $n>n_0$ 时, n 个点的图 G 若含 $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+\delta)n^2$ 条边, 则 G 含图 H. 待定 ϵ,c. 那么, 存在 n_0, 使得 $n>n_0$ 时, G 的顶点集存在 ϵ-*regular* 的分划 $\{V_0,V_1,V_2,\cdots,V_k\}$. 我们接下来去掉 G 中以下的边:

- 所有 V_0 中的点连出的边, 这样的边至多 ϵn^2 条.
- V_i 中内部点连的边, 这样的边至多 $k\frac{n^2}{k^2}<\epsilon n^2$ 条.
- 不 ϵ-*regular* 的对 (V_i,V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\epsilon k^2\frac{n^2}{k^2}=\epsilon n^2$ 条.

- $d(V_i,V_j)<\frac{\delta}{4}$ 的对 (V_i,V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\frac{\delta}{4}k^2\frac{n^2}{k^2}=\frac{\delta}{4}n^2$ 条.

因此, 我们可以选取 ϵ 使得删去的边不超过 δn^2 条. 由 Turán 定理, 剩下的图含 K_{r+1}. 这 $r+1$ 个点必须在 $V_1,V_2,\cdots,V_r$ 中每个子集各一个, 所以 V_i 之间两两 ϵ-*regular* 且 $d(V_i,V_j)>\frac{\delta}{4}$. 因此, 我们可以选取满足 Graph Embedding lemma 的 ϵ,c, 使得剩下的图中一定含 H. 结论得证. $\square$

下一个结果是关于 Ramsey 问题的推广. 我们将 Ramsey 问题所要求的完全图推广到一般的图, 即: 对于任意图 H,K, 记 $R(H,K)$ 为满足下述条件的最小的正整数 n: 完全图 K_n 的任意红蓝二染色一定存在红色的 H 或者蓝色的 K. 这里 H,K 均为完全图时即 Ramsey 问题. 关于 $R(H,K)$, 我们有以下的结果:

Theorem. 对任意 Δ, 存在实数 c, 满足: 若 $\Delta(H)\le\Delta$, $\Delta(K)\le\Delta$, $|V(H)=|V(K)|=m$, 则 $R(G,H)\le c'm$.

Proof. 首先注意到一个基本的事实: 对于 G 的两个不交子集 A,B, 若它们关于它们中连的红边是 ϵ-*regular* 的, 则它们关于蓝边也是. 因此, 我们可以在这个图中讨论 ϵ-*regular* 的分划. 设 $|G|=n$. 待定 ϵ,c,r. 那么, 存在 n_0, 使得 $n>n_0$ 时, G 的顶点集存在 ϵ-*regular* 的分划 $\{V_0,V_1,V_2,\cdots,V_k\}$. 此时, 不 ϵ-*regular* 的对 (V_i,V_j) 至多 ϵk^2 对.

我们重新构造一个图 G': G' 的顶点为 $1,2,\cdots,k$; 若 V_i,V_j 是 ϵ-*regular* 的, 我们就将 i,j 连边. 那么, G' 中至少有 $\binom{k}{2}-\epsilon k^2$ 条边. 因此, $\epsilon<\frac{1}{10r}$ 时, 由 Turán 定理, 图 G' 中就存在 K_r. 由对称性, 不妨设点 $1,2,\cdots,r$ 之间两两相连.

我们对于这个 K_r 染色: 若 $d(V_i,V_j)\ge\frac{1}{2}$(关于红边), 我们就染红色, 否则, 我们就染蓝色. 那么, $r\ge 4^{\Delta+1}$ 时, 这个图中存在同色的 K_Δ. 由对称性, 不妨设点 $1,2,\cdots,\Delta$ 构成红色的 K_Δ. 那么, 我们可以取 ϵ 和 c, 对 $V_1,V_2,\cdots,V_\Delta$ 使用 Graph Embedding lemma, 就可以找到红色的 H. 结论得证. $\square$

上面两个结果都是结合 Graph Embedding lemma 和 Regularity lemma 的经典运用: 我们先利用 Regularity lemma 进行分块, 去掉那些性质不优秀的边, 然后利用一些计数来说明剩下的边满足 Graph Embedding lemma 的条件, 最后运用 Graph Embedding lemma 解决问题.

最后我们来讨论第三讲中讨论过的 Erdös-Turán 问题. 我们要证明如下结果:

Theorem. 当 t 为偶数时, $RT(n,K_t,o(n))=(\frac{3t-10}{6t-8}+o(1))n^2$.

Proof. 我们首先给出构造. 首先是 $t=4$ 的情形. 选取充分大的正整数 d,n_0, 并设 $n>n_0$ 为偶数. 记 $\mu=\frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$. 我们将单位球面 S^d 划分为 $\frac{n}{2}$ 个等测度的区域 $D_1,D_2,\cdots,D_{\frac{n}{2}}$, 每个的直径均小于等于 $\frac{\mu}{10}$. 我们在每个 D_i 中选取两个点 x_i,y_i. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_{\frac{n}{2}}\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_{\frac{n}{2}}\}$. 我们以 $X\cup Y$ 为顶点构造一个图 G. 其连边规则如下: X 或 Y 中的两个点相邻当且仅当它们的距离大于等于 $2-\mu$, X 中的一个点和 Y 中的一个点相邻当且仅当它们的距离小于等于 $\sqrt{2}-\mu$.

我们接下来验证这个图 G 满足条件. 我们仅给出证明概要. 首先, 若图中有 K_4, 显然不能有三个 X 或 Y 中的点, 因此必须是两个 X 中的点和两个 Y 中的点, 不妨设为 x_1, x_2 和 y_1, y_2. 那么, 当 μ 很小时, x_1, x_2 接近球的两极, 而 y_1 必须和 x_1, x_2 均在同一个半球中, 因此易推出矛盾.

接下来验证 G 的最大独立集数为 $o(n)$. 我们任取 $x_1, x_2, \cdots, x_{cn}$, 那么这些点所在区域之并 U 的测度就大于等于 c. 因此, 当 d 充分大时, 由 isoperimetric theorem, U 就包含两个点 A, B, 使得 $d(A,B) \geq 2 - \frac{2}{mu}$. 此时我们在这两个区域中找出点 x_i, x_j 就连边, 因此其最大独立集数为 $o(n)$.

最后, 我们注意到 X, Y 内部连的边数为 $o(n^2)$, 而每个 $x \in X$ 均与在与其同半球的点连边, 故近似与一半的点连边, 故每个点的度数均几乎为 $\frac{4}{n}$, 因此总边数为 $(\frac{1}{8} + o(1))n^2$. 证毕.

对于一般的情形, 我们首先待定两个参数 x, y. 取一个完全 $r = \frac{t-4}{2}$ 部图 A, 每个部分 x 个点; 在其每个部分嵌入一个图 H, 其中 H 无三角形且最大独立集数为 $o(x)$(这样的 H 的存在性我们已经在第三讲中证明过). 接下来, 我们再取一个无 K_4, 最大独立集数为 $o(y)$, 边数为 $(\frac{1}{8} + o(1))y^2$ 的图 B, 并将 B 中的点与 A 中所有点连接, 形成一个新的图 G.

我们接下来说明可以取 x, y 使得图 G 满足条件. 一方面, 对于图 G 中的一个团, 其在 A 的每个部分最多有 2 个点, 在 B 部分中最多 3 个点, 因此最多 $2r + 3 = t - 1$ 个点, 因此图 G 中无 K_t.

另一方面, 简单计算知

$$|V(G)| = rx + y; \quad |e(G)| = \frac{1}{8}y^2 + rxy + \frac{1}{2}r(r-1)x^2 + o(1)y^2.$$

固定 $n = rx + y$, 代入计算得

$$|e(G)| = \frac{1}{8}(n^2 - r((3r+4)x^2 - 6nx)) + o(1)n^2.$$

我们取 n 为 $3r + 4$ 的倍数 (不为倍数时考虑比 n 小的最大的 $3r + 4$ 的倍数 n', 在 n' 个点的图中进行构造即可), $x = \frac{3}{3r+4}n$, 代入计算得 $e(G) = (\frac{3t-10}{6t-8} + o(1))n^2$. 因此对于一般的 t 我们就构造完毕.

接下来我们给出证明. 同 q 为奇数的情况, 事实上我们要证明下述结论: 存在函数 f, g, 使得如果图 G 的边数大于等于 $(\frac{3t-10}{6t-8} + r)n^2$, 且 $n > f(r)$, 则图 G 就至少有一个大小为 $g(r)n$ 的独立集, 或一个 K_t.

我们首先证明如下的 Graph Embedding Theorem 型的引理:

Lemma. 给定正整数 $m \leq k$, 和正实数 d. 则存在实数 ϵ, ϵ_0, 使得下述命题成立:

若图 G 的顶点集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 满足: 对于 $1 \leq i \leq k$, $|A_i| = t$; A_i, A_j 之间两两 *ϵ-regular*; 对于 $k + 1 - m \leq i \leq j \leq k$, $d(A_i, A_j) > \frac{1}{2} + d$; 对于 $1 \leq i \leq j \leq k$, $d(A_i, A_j) > d$. 则图 G 要么含一个 K_{m+k}, 要么含一个元素个数大于等于 $\epsilon_0 t$ 的独立集.

注意, $m = 0$ 时此即 H 为完全图时的嵌入定理.

Proof. 其证明基本类似于的 Graph Embedding Theorem. 我们依然首先待定 ϵ, c, ϵ_0 并逐步选出选出 v_i. 注意, 我们此时在集合 $A_{k+1-m}, \cdots, A_m$ 中要选出 2 个元素, 才能选取出 K_{m+k}.

假设我们已经选出了 G 中的点 $x_1, x_2, \cdots, x_j$ 作为 $v_1, v_2, \cdots, v_j$. 对于 $i > j$, 记 Y_i^j 为此时 x_i 的可能的选择. 我们对 j 归纳证明, 我们总能保证 $|Y_i^j| \geq t(d-2\epsilon)^j$. 此时, 我们取 $\epsilon_0 = (d-2\epsilon)^k$, 则要么 Y_i^j 是一个元素个数大于等于 $\epsilon_0 t$ 的独立集, 要么存在两个相邻的元素可以被我们取出.

记 $t = k+1-m$. 我们仅陈述 v_t 和 v_{t+1} 的选择, 其余同理. 我们考虑 A_t 中如下的元素 a: 对于一切 $i > t$, a 在 Y_i^{t-1} 中的邻居个数大于等于 $(\frac{1}{2} + d - \epsilon)|Y_i^{t-1}|$. 仍然由 Graph Embedding Theorem 的证明中所述引理, 这样的元素个数至少有 $(d-2\epsilon)|Y_t^{t-1}|$ 个, 且其中任选两个在 Y_i^{t-1} 中的公共邻居数均大于等于 $(d-2\epsilon)|Y_i^{t-1}|$, 因此可以作为 v_t 和 v_{t+1}. 结论得证. $\square$

回到原题. 我们待定 ϵ. 那么, 存在 n_0, 使得 $n > n_0$ 时, G 的顶点集存在 ϵ-*regular* 的分划 $\{V_0, V_1, V_2, \cdots, V_k\}$. 我们接下来去掉 G 中以下的边:

- 所有 V_0 中的点连出的边, 这样的边至多 ϵn^2 条.
- V_i 中内部点连的边, 这样的边至多 $k\frac{n^2}{k^2} < \epsilon n^2$ 条.
- 不 ϵ-*regular* 的对 (V_i, V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\epsilon k^2 \frac{n^2}{k^2} = \epsilon n^2$ 条.
- $d(V_i, V_j) < \epsilon$ 的对 (V_i, V_j) 之间连的边, 这样的边至多 $\epsilon k^2 \frac{n^2}{k^2} = \epsilon n^2$ 条.

我们可以选取 ϵ 使得删去的边不超过 $\frac{r}{2}n^2$ 条. 那么, 剩下还有 $(\frac{3t-10}{6t-8} + \frac{r}{2})n^2$ 条边.

我们重新作一个图 G': G' 的顶点为 $1, 2, \cdots, k$; 若 $\frac{1}{2} + \epsilon > d(V_i, V_j) > \epsilon$, 则在 v_i, v_j 之间连边; 若 $d(V_i, V_j) > \frac{1}{2} + \epsilon$, 则在 v_i, v_j 之间将这条边染红. 设边的总数为 u, 染红的边的数目为 v. 则

$$(\frac{3t-10}{6t-8} + \frac{r}{2})n^2 \geq (\frac{n}{k})^2((\frac{1}{2} + \epsilon)(u-v) + v),$$

即 $u + v \leq (\frac{3t-10}{3t-4} + o(1))k^2$.

我们接下来证明, 存在正整数 a, b, 满足: 图 G 中存在一个完全 K_a, 内部包含一个红色的完全 K_b, 且 $a + b = t$. 此时, 我们运用引理, 即知存在一个 K_t 或者一个大小超过 $f(r)n$ 的独立集. 利用反证法, 我们只需证明下述引理:

Lemma. 给定正整数 k, t, 且 t 为偶数. 设顶点数为 k 的图 G 中某些边被染为红色, 并设红色的边数与 G 的边数之和为 $e'(G)$. 若不存在非负整数 $a \geq b$, $a + b = t$, 使得图 G 中存在一个完全 K_a, 内部包含一个红色的完全 K_b, 则 $e'(G) \leq (\frac{3t-10}{6t-8} + o(1))k^2$.

Proof. 对于顶点 u, 记 $d'(u)$ 为 u 连出的边与红边数之和. 若 v 和 w 不相连, 不妨设 $d'(v) \geq d'(w)$. 当 $d'(v) = d'(w)$ 时, 我们不妨设 v 连处的红边不少于 w 连出的. 我们考虑以下操作: 将 w 所连出的边全部删去, 并将 w 与所有 v 的邻居全部连接, 原来用红边连接的我们也染红. 这样操作不会改变 G 中的最大团和最大红色团的大小, 且 $e'(G)$ 不减.

显然, 我们可以通过若干次上述操作使得不相邻的点度数相同且邻域相同, 并且连出的边的颜色均相同. 此时 G 为完全 r 部图, 且此时任意两个部分之间连的边要么全是红色, 要么全不是红色.

我们接下来再进行一次操作: 如果两个部分之间没有连红色边, 我们考虑连出的红色边比另一个边少的部分, 将这个部分每个顶点连出的红边改为和另一个部分一样. 这样操作也不会改变 G 中的最大团和最大红色团的大小, 且 $e'(G)$ 不减. 故我们可以不妨设没有连红边的任意两个部分连出的边均完全一致.

因此, 最后我们可以不妨设图 G 被分为 n 个部分, 任何两个部分之间连了红色的边; 每个部分之间连了若干块, 所有的部分加起来有 m 块, 且两个不同块之间连了没有染为红色的边; 且 $n+m \le t-1$. 此时, 我们设图 G 的每个部分的顶点数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 每一个部分中含 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 块. 由简单的凸性不等式知, 固定 x_i, y_i 后, 每一个部分的每个块数至多差 1 时 $e'(G)$ 最大. 因此, 我们有

$$e'(G) = (1+o(1))k^2 - \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{x_i^2}{r_i}).$$

注意, 我们把所有的一次项全部放入了 $o(1)k^2$. 与原式比较并代入条件, 我们只需证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 (\frac{y_i+1}{y_i}) \ge \frac{12}{3t-4} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2.$$

由柯西不等式, 我们只需证明

$$3t \ge 4 + 12 \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{y_i+1},$$

也即

$$(t-n-m-1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i-1)^2}{y_i+1} \ge \frac{1}{3}.$$

若 y_i 不全为 1, 此时后面的和式就大于等于 $\frac{1}{3}$; 否则, $n=m$, 而 t 为偶数, 因此 $t-n-m-1 \ge 1$, 故该不等式亦得证. 因此引理成立, 我们就证完了本结论. $\square$

Chapter 6

这一讲我们来简单介绍一下一些代数方法在极值图论中的应用. 代数方法, 顾名思义, 就是使用一些代数技巧 (如线性代数, 多项式) 来解决图论中的问题. 在前面的章节中, 我们已经运用代数中的一些结构, 来给出了图论中的构造. 本节将选取几个例子来展示代数方法在图论中的威力. 我们首先介绍一个概念.

Definition. 设图 G 的顶点为 $1, 2, \cdots, k$, 则我们定义 $k \times k$ 的矩阵

$$M_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{若在}G\text{中}u \sim v \\ 0, & \text{若在}G\text{中}u \nsim v \end{cases}.$$

为图 G 的邻接矩阵.

Theorem. 设 K_n 为 m 个互不相交的完全二部图的并. 则 $m \geq n-1$.

Proof. 设 K_n 为图 $G_1.G_2, \cdots, G_m$ 的并, 且设 K_n 的邻接矩阵为 M, G_i 的邻接矩阵为 M_i, 则

$$M = \sum_{i=1}^{m} M_i.$$

一方面, 由于 M 为 K_n 的邻接矩阵, 故 $M = J_n - I_n$, 其中 I_n 为单位矩阵, J_n 为所有元素均为 1 的矩阵.

另一方面, 我们不妨设 G_i 的两个部分为 A_i, B_i. 定义矩阵 L_i 如下:

$$(L_i)_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{若}u \in A_i \text{ 且}v \in B_i \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}.$$

则 $M_i = L_i + L_i^{\top}$. 因此, 我们有

$$I_n = J_n - \sum_{i=1}^{m} (L_i + L_i^{\top}).$$

若 $m \leq n-2$, 我们就可以找到一个向量 $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 满足下述条件:

$$\begin{cases} L_i\vec{x} = \vec{0} \\ J_n\vec{x} = \vec{0} \end{cases}.$$

此时我们有

$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}^\top I_n \vec{x} = \vec{x}^\top (J_n - \sum_{i=1}^{m}(L_i + L_i^\top))\vec{x} = -\sum_{i=1}^{m} \vec{x}^\top (L_i + L_i^\top)\vec{x} = 0,$$

这就导出了矛盾. □

这一简单的例子向我们展示了代数方法的威力. 在上一个例子中, 我们同时结合了矩阵的技巧以及线性代数的技巧, 通过图本身矩阵良好的结构, 导出了矛盾, 解决了问题. 下一个例子也是这一方法的典型运用.

Theorem. 设简单图 G 有 n 个顶点. 若 G 的任意两个顶点都有且恰有一个公共邻居, 则 G 有一个顶点有 $n-1$ 个邻居.

Proof. 我们用反证法. 假设 $\Delta(G) < n-1$. 对 G 中任意两个不相邻的顶点 x, y, 它们有一个公共的邻居 z. 对于 x 的任一不同于 z 的邻居 v, v 和 y 有一个公共的邻居 $f(v)$, 并且 $f(v)$ 和 x 有唯一公共的邻居 v, 因此对不同的 v, $f(v)$ 两两不同, 且显然 $f(v) \neq z$. 因此, 这就诱导了一个 $N(x) \setminus \{z\}$ 到 $N(y) \setminus \{z\}$ 的单射, 故 $d(x) \leq d(y)$. 同理, $d(y) \leq d(x)$, 故 $d(x) = d(y)$.

考虑 G 的补图 $\bar{G}$, 则 $\bar{G}$ 中任意两个相邻顶点度数相同. 若 $\bar{G}$ 不是连通图, 由于 $\Delta(G) < n-1$, 故 $\bar{G}$ 没有顶点个数为 1 的连通分支. 对于 $\bar{G}$ 中任意两个连通分支, 从两个连通分支中各取两个点 u, v 和 r, s, 则在图 G 中 u, v 均和点 r, s 相邻, 矛盾! 故 $\bar{G}$ 是连通图, 因此 $\bar{G}$ 中所有顶点度数相同, 即 G 中所有顶点度数相同.

设 G 的每个顶点的度数均为 k. 考虑 G 中如下的三元组 (u, v, w): u 和 v, w 均相邻, 且 $v \neq w$. 我们对这样的三元组的个数算两次. 一方面, 对所有对 (v, w), 均有唯一的 u 使得 u 与 v, w 均相邻, 因此这样的三元组有 $n(n-1)$ 个; 另一方面, 对于任意的 u, 这样的三元对有 $k(k-1)$ 个, 因此 $n(n-1) = nk(k-1)$, 故 $n = k^2 - k + 1$.

设 G 的邻接矩阵为 A, 我们考虑 $B = A^2$. 则我们有

$$b_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{rj},$$

即 b_{ij} 表示同时与 i, j 相连的点的个数. 因此, B 的每个对角元为 k, 其余元为 1. 设 J_n 为所有元素均为 1 的矩阵, 故我们有

$$A^2 = J_n + (k-1)I_n.$$

注意到 J_n 的特征值为 0(重数 $n-1$) 和 n(重数 1), I_n 的特征值为 1(重数 $n-1$), 因此 A^2 的特征值为 $k-1$(重数 $n-1$) 和 $n+k-1 = k^2$(重数 1). 而 A 是图的邻接矩阵, 故 $\mathrm{tr}\,(A) = 0$, 因此存在正整数 t 使得

$$t\sqrt{k-1} = k.$$

由整除关系知只能 $k=2, n=3$, 而此时有一个顶点度数为 2, 矛盾! 因此反证假设不成立, 故 $\Delta(G)=n-1$. $\square$

这一问题结合了传统的图论技巧和矩阵技巧, 充分展现了代数方法的魅力. 下一个结果看似简单, 却是困扰了数学家们非常多年的著名猜想, 其在 2019 年才由我国数学家黄皓使用矩阵技巧一举解决.

Theorem. 对任意正整数 $n \geqslant 1$, 设 H 为任一 Q^n 的 $(2^{n-1}+1)$ 个顶点的导出子图, 其中 Q^n 为 n 维 cube graph(顶点集为一切长度为 n 的 $0,1$ 向量构成的集合, 两个顶点相邻当且仅当它们只有一个分量不同). 则

$$\Delta(H) \geqslant \sqrt{n},$$

且 n 为完全平方数时等号可以成立.

Proof. 首先, 我们证明 n 为完全平方数时等号成立. 自然地视 Q^n 的顶点集为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有子集, 则此时 A_i 与 A_j 相邻当且仅当 $|A_i \Delta A_j| \leqslant 1$.

设 $n=k^2$. 记 $G_i=\{ik+j | j=1,2,...,k\}, i=0,1,...,k-1$. 定义

$$X_1=\{X|\ |X|-k\text{为奇数, 且至少存在一个}G_i\text{满足}G_i \cap X=\varnothing;\}$$

$$X_2=\{X|\ |X|-k\text{为偶数, 且对一切}G_i, G_i \cap X \neq \varnothing.\}$$

我们下面说明, 由 $X=X_1 \cup X_2$ 诱导的图 X' 就满足条件. 为此, 我们只需证明以下两个事实:

事实 *1.* $|X|=2^{n-1}+1$. 为此, 记

$$X_3=\{X|\ |X|-k\text{为奇数, 且对一切}G_i, G_i \cap X \neq \varnothing.\}$$

则 $X_1 \cup X_3$ 为一切元素个数与 k 同奇偶的集合, 共 2^{n-1} 个, 因此我们只需证明 $|X_2|-|X_3|=1$. 为此, 记 $G=\{ik+1 | i=0,1,...,k-1\} \in X_2$, 则我们只需建立 X_3 到 $X_2 \setminus \{G\}$ 的双射. 对任意 $X \in X_3$, 取 i 为最小的使得 $X \cap G_i \neq \{ik+1\}$ 的正整数 i(由于 $|X|-k$ 是奇数, 这可以做到). 考虑映射 $X \mapsto X \Delta \{ik+1\}$. 显然这是一个 X_3 到 $(X_2 \setminus \{G\})$ 的可逆映射, 因此它是双射. 事实 1 得证.

事实 *2.* $\Delta(X') \leqslant k$. 由奇偶性易知 X_1 或 X_2 中的点两两不相邻. 对于任意 X_1 中的点, 其只能通过加一个元素来和 X_2 中的点相邻, 且该元素只能选自唯一的 G_i, 否则会有两个 $G_i \cap X=\varnothing$, 这个点就不可能与 X_2 中的点相邻了; 因此这个元素只有至多 k 种选择, 故 X_1 中的点的度数均小于等于 k. 同理有 X_2 中的点的度数均小于等于 k. 事实 2 得证.

接下来我们证明该不等式. 为此, 我们首先指出下面的引理:

Lemma. 设 A 为 n 阶对称矩阵, B 为 A 的 m 阶主子阵. 设 A 的特征值为 $\lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1$, B 的特征值为 $\mu_{n-1} \leq \cdots \leq \mu_1$, 则对任意正整数 $i \leq n-1$, 我们有 $\lambda_{i+n-m} \leq \mu_i \leq \lambda_i$.

这个引理的证明需要繁复的线性代数技巧, 故我们在此略去. 我们直接使用该引理来证明命题. 为此, 我们考虑如下定义的矩阵序列:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & I \\ I & -A_{n-1}. \end{bmatrix}.$$

那么, 我们有 $A_1^2 = I$. 注意到

$$A_n^2 = \begin{bmatrix} A_{n-1}^2 + I & 0 \\ 0 & A_{n-1}^2 + I \end{bmatrix},$$

故由数学归纳法, 我们显然有 $A_n^2 = nI$, 因此 A_n 的特征值只能为 $\sqrt{n}$ 或 $-\sqrt{n}$. 又因为 $Tr(A_n) = 0$, 故 A_n 的特征值有一半为 $\sqrt{n}$, 一半为 $-\sqrt{n}$.

如果将 A_n 中的所有 -1 改成 1, 我们不难发现, 此时得到的矩阵 B_n 就是 Q^n 的邻接矩阵. 因此, 对于任意 Q^n 的 $2^{n-1}+1$ 阶子图 H, 我们考虑由 H 诱导的主子阵 A_H. 由柯西交错定理, 设 A_H 最大的特征值为 $\lambda_1(A_H)$, 则我们有

$$\lambda_1(A_H) \geq \sqrt{n}.$$

最后我们说明 $\Delta(H) \geq \lambda_1(A_H)$ 来完成本结论的证明. 为此, 我们设图 H 的邻接矩阵为 B_H, 则 B_H 与 A_H 每个元素的绝对值均相同. 设 $\vec{v}$ 为 $\lambda_1(A_H)$ 对应的特征向量, 并设 v_1 为 v 的所有分量中绝对值最大的一项. 简记 $A = A_H$, 则我们有

$$|\lambda_1(A)v_1| = |(A\vec{v})_1| = \left|\sum_{j=1}^{m} A_{1,j}v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{m} |A_{1,j}||v_1| \leq \Delta(H)|v_1|.$$

最后一个不等式是由于 B_H 与 A_H 每个元素的绝对值均相同, 故

$$\sum_{j=1}^{m} |A_{1,j}|$$

就表示图 H 中顶点 1 的度数, 因此自然小于等于 $\Delta(H)$. 因此, 我们就推出 $\Delta(H) \geq \lambda_1(A_H)$. 结论得证. □

除了矩阵技巧, 多项式技巧也是一种重要的解决图论问题的代数方法. 下面这个例子向我们展示了多项式方法的威力.

Definition. 对于图 G_1, G_2, 定义 $G_1 \times G_2$ 如下: 其顶点集为 $U_1 \times U_2$, (v_1, v_2) 和 (w_1, w_2) 连边当且仅当 v_1 和 w_1 相连, v_2 也和 w_2 相连. 对于图 G, 定义图 G 的维数 $d(G)$ 如下: $d(G)$ 为最小的整数 n, 使得存在完全图 $T_1, T_2, \cdots, T_n$, 使得 G 为 $T_1 \times T_2 \cdots \times T_n$ 的导出子图.

Theorem. 对于非平凡的完全图 $T_1, T_2, \cdots, T_n$, $T_1 \times T_2 \cdots \times T_n$ 的维数为 n.

Proof. 我们只需证明其维数大于等于 n. 注意到 A 为 B 的导出子图时, $d(A) \leq d(B)$, 因此我们只需证明一切 T_i 都为 K_2 的情形. 此时该图 G 为 2^{n-1} 个 K_2 的无交并.

设 $d(G) = d$, 则存在完全图 $T_1, T_2, \cdots, T_d$ 使得 G 为 $T_1 \times T_2 \cdots \times T_d$ 的导出子图. 因此, 我们总是可以改设 G 的任意一个顶点 v 为向量 $x(v) = (x_1(v), x_2(v), \cdots, x_d(v))$, 其中 G 中两个点 v, w 相邻当且仅当对于任意 $1 \leq i \leq d$, 均有 $x_i(v) \neq x_i(w)$.

考虑多项式

$$f_v(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} (x_i - x_i(v)),$$

则 $f_v(x(w)) = 0$ 为 v, w 不相邻的充要条件. 考虑所有的多项式 f_v 和所有向量 $x(w)$, 由于每个点在图 G 中与且只与一个其他点相邻, 故 f_v 恰在唯一的 $x(w)$ 处非零, 因此 f_v 线性无关. 而 f_v 对于每个变量的次数均分别不超过 1, 故 $2^n \leq 2^d$, 即 $d \geq n$. 因此原命题得证. □

接下来介绍的另一例子则结合了著名的 Chevalley-Warning 定理, 导出了一个关于图的子图的漂亮的结果.

Lemma. (Chevalley-Warning) 设 p 为素数, $q = p^m$, $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 为 $\mathbb{F}_q[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 上的多项式. 若 $\deg(P_1 P_2 \cdots P_m) < n$, 则 P_i 的公共根个数为 p 的倍数.

Proof. 记

$$P = \prod_{i=1}^{m} (1 - P_i^{q-1}).$$

则 x 为 P_i 的公共根时 $P(x) = 1$, 否则 $P(x) = 0$. 另一方面, 由于 $d < q - 1$ 时,

$$\sum_{x \in F_q} x^d = 0,$$

而 $\deg(P) < n(q-1)$, 因此 P 的各单项式中必有一个变量次数小于 $q - 1$, 因此全部求和知

$$\sum_{x \in F_q^n} P(x) = 0,$$

引理得证. □

由引理, 我们可以证明下述结论:

Theorem. 给定素数 p. 若图 $G(V,E)$ 的平均度数大于等于 $2p-2$, 且 G 中每个顶点的度数均小于等于 $2p-1$, 则 G 存在一个子图, 每个顶点的度数均为 p. (这种子图也被称为 p-regular 的子图.)

Proof. 考虑 $\mathbb{F}_p[x_e : e \in E]$. 对于每个 $v \in V$, 记

$$P_v = \sum_{v \in e \in E} x_e^{p-1}.$$

那么 0 为 P_v 的公共根. 显然我们可以不妨设 G 中无孤立点. 因此 $\deg P_v = p-1$, 故

$$\sum_{v \in V} \deg P_v = (p-1)|V| < |E|.$$

因此, 由 Chevalley-Warning Theorem, 我们可以找到 P_v 的另一个公共根 c. 记 $c = (c_e)_{e \in E}$, 并记

$$E' = \{e \in E : c_e \neq 0\}.$$

那么, 对于任意 $v \in e \in E'$, 由于 c 为 P_v 的公共根, 我们有

$$0 = \sum_{v \in e \in E} c_e^{p-1} = \sum_{v \in e \in E'} c_e^{p-1} = \sum_{v \in e \in E'} 1,$$

故 E' 中含包含点 v 的边数为 p 的倍数, 故只能为 p, 因此 E' 就诱导一个每个顶点的度数均为 p 的子图. $\square$

这个定理的条件看似限制很大, 应用范围不广泛, 然而事实上, 使用上一个定理, 结合一些图论技术, 可以证明下述结论:

Corollary. (Pyber Theorem) 给定正整数 n. 设图 $G(V,E)$ 满足 $|V| = n, |E| \geq Cn \ln n$, 其中 $C(k)$ 是只和 k 相关的常数. 则 G 含一个 k-regular 的子图.

注意, 这一定理并不要求素数, 并且其条件比上一定理的限制要少得多, 因此这一定理给了我们一个在一般的图中寻找正则图的重要工具.