Chapter 1

这一讲我们将回顾图论中的 Ramsey 定理, 并介绍一些相关结果. 首先我们陈述这个定理.

Theorem. (Ramsey 定理) 对任意正整数 s, t, 存在正整数 N, 使得完全图 K_N 的任意二染色 (下文中均指红蓝二染色) 必包含红色 K_s 或蓝色 K_t. 这样的最小的正整数 N 记为 $R(s,t)$.

Remark. 我们称图 G 包含图 H, 是指图 G 存在一个子图同构于 H. 在一种对边进行的染色中, 我们称图 G 为某种颜色的, 是指 G 的边均为这种颜色.

Proof. 我们对 $s+t=n$ 实行归纳法. $n=2$ 时结论显然. 假设命题对 $n-1$ 成立, 我们来看 n 的情况. 设 $n = R(s-1,t)+R(s,t-1)$. 任取 K_n 中的一个点 A, 并记集合 R 为与 A 用红色边相连的点组成的集合, B 为与 A 用蓝色边相连的点组成的集合. 那么, 若 $|R| \geq R(s-1,t)$, 由归纳假设, 这 n 个点诱导的子图包含红色 K_{s-1} 或蓝色 K_t. 若为后者, 则命题已经得证, 若为前者, 则这个 K_{s-1} 加上点 A 构成一个红色 K_s, 此时命题依然得证. 同理, 若 $|B| \geq R(s,t-1)$, 则命题依然得证. 而 $|R|+|B|+1 = n = R(s-1,t)+R(s,t-1)$, 故上述两种情况至少会有一种发生, 结论得证. $\square$.

由上述证明, 我们立得下述的推论:

Corollary. 对任意正整数 $s,t \geq 2$, $R(s,t) \leq R(s,t-1)+R(s-1,t)$. 利用归纳法易得 $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$. 特别地, 有 $R(k,k) \leq \binom{2k-1}{k-1} \leq 4^k$.

通过将多种颜色合并成一种颜色反复运用 Ramsey 定理, 我们容易得出下面的结论:

Corollary. (一般形式的 Ramsey 定理) 对任意正整数 $s_1, s_2, \cdots, s_r$, 存在正整数 N, 使得 $n \geq N$ 时, 对于完全图 K_N 的任意 r 染色, 我们总能找到某个正整数 i 和 i 色的 K_{s_i}. 这样的最小的正整数 N 记为 $R(s_1, s_2, \cdots, s_r)$.

我们接下来介绍一个 Ramsey 定理的应用.

Theorem. (Schur's theorem) 对任意正整数 k, 存在正整数 N, 使得对任意 $1, 2, \cdots, N$ 的 k 染色, 总存在同色的三个数 x, y, z, 满足 $x+y=z$.

Proof. 记 $N = R(3,3,\cdots,3)$(其中 3 有 k 个), 我们证明这样的 N 就符合条件. 对任意 $1, 2, \cdots, N$ 的 k 染色, 我们对 K_N 按如下方式染色: 连接顶点 i, j 的边, 染 $|i-j|$ 所对应的颜色.

由 Rmasey 定理, K_N 中必然存在同色三角形. 不妨设存在正整数 $i<j<k$ 使得 $|i-j|$, $|j-k|$, $|k-i|$ 同色, 此时 $|j-k|+|i-j| = |k-i|$, 故 $(x,y,z) = (k-j, j-i, k-i)$ 满足条件. $\square$

由 Schur's theorem, 我们可以得到以下的推论:

Corollary. 对于任意正整数 n, 总存在正整数 N, 使得对于任意素数 $p \geq N$, 我们总能找到 $x, y, z \in (\mathbb{Z}/p)^\times$, 使得

$$x^n + y^n = z^n.$$

Proof. 记 $G=\{x^n : x\in(\mathbb{Z}/p)^\times\}$, 则 G 是 $(\mathbb{Z}/p)^\times$ 的子群. 设 $(\mathbb{Z}/p)^\times/G$ 的代表元为 $a_1,a_2,\cdots,a_l$, 则 $l\le n$. 我们构造 $\{1,2,\ldots,p\}$ 上的一个 l 染色: 若 $x\in a_iG$, 则将 x 染为 i 色. 那么, 由 Schur's theorem, 存在正整数 N, 使得 $p\ge N$ 时一定存在同色的 x,y,z 满足 $x+y=z$. 因此, 存在 $X,Y,Z\in(\mathbb{Z}/p)^\times$ 满足

$$a_iX^n+a_iY^n=a_iZ^n,$$

即

$$X^n+Y^n=Z^n.$$

□

Ramsey 定理也有在超图上的推广.

Theorem. 对任意正整数 $k,n_1,n_2,\cdots,n_r$, 存在正整数 N, 满足: 对于任意 N 元集合 S 和 S 上所有 k 元子集的 r 染色 χ, 总存在正整数 $t\le r$ 和 S 的 n_t 元子集 K, K 的所有 k 元子集均为 t 号色. 这样的最小的正整数 N 记为 $R^k(r,n_1,n_2,\cdots,n_r)$.

Proof. 显然我们只用讨论 $r=2$ 和 n_k 均相等的情况. 以下我们设 S 为 $\mathbb{N}$ 的子集, 并简记 $R^k(n,n)=R^k(n)$. 我们对 k 归纳证明该命题. $k=0$ 时命题成立. 设 $k-1$ 的情况命题成立, 我们考虑 k 的情况.

我们证明下述结论: 对任意正整数 $p\le q$, 存在正整数 N, 使得对于任意 N 元集合 S 和 S 上所有 k 元子集的 r 染色 χ, 总存在 S 中的 q 元子集 Y, 使得 Y 中的一个 k 元子集若含 Y 中的最小的 p 个元素之一, 则 Y 的颜色仅由 Y 最小的元素决定. 若我们证明了这个结论, 取 $p=q=2n-1$, 注意到这 $2n-1$ 个元素必有 n 个决定相同的颜色, 这 n 个元素就满足要求.

我们再对 p 实行归纳法. $p=0$ 时命题成立. 设 $p-1$ 的情况命题成立, 我们考虑 p 的情况. 取 $q'=R^{k-1}(q)+q$. 由归纳假设, 存在 S 中的 q' 元子集 Y, 使得 Y 中的一个 k 元子集若含 Y 中的最小的 $p-1$ 个元素之一, 则 Y 的颜色仅由 Y 最小的元素决定. 设 Y 中第 p 小的元素为 t, 并考虑 Y 去掉最小的 p 个元素后得到的集合 Y' 上的 $k-1$ 元集的染色 $\chi':\chi'(X)=\chi(X\cup\{t\})$. 由归纳假设, Y' 中存在一个 q 元子集, 任意 $k-1$ 元子集均同色. 那么, 此时易于验证 Y' 并上 Y 最小的 p 个元素就满足要求. 结论得证. □

现在我们开始介绍一些关于 Ramsey 数估计的相关结论. 关于各种 Ramsey 数的估计一直是图论中的一个重要问题. 例如, 2020 年 Ashwin Sah 关于对角 Ramsey 数的改进

$$R(k+1,k+1)\le\exp(-c(\log k)^2)\binom{2k}{k}$$

就被视为 2020 年组合数学界最重要的结果之一. 我们接下来简单介绍一些关于 Ramsey 数的传统估计理论.

关于 Ramsey 数的估计, 我们将使用的主要手法为概率方法. 一般来说, 我们构建一个合适的概

率空间, 并证明一个事件发生的概率为正, 从而证明这个事件的存在性. 以下的结果是经典的:

Theorem. $R(k,k) > 2^{[\frac{k}{2}]}$.

Proof. 记 $n = 2^{[\frac{k}{2}]}$. 考虑 K_n 的随机二染色. 对 K_n 的任意给定的 k 个顶点构成的子集 R, K_n 限制在 R 上同色 (即连接 R 中两点的边均同色) 的概率为 $2^{1-\binom{k}{2}}$. 注意到 R 共有 $\binom{n}{k}$ 种选择, 因此, 存在一个同色的 K_k 的概率就小于等于

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} \cdot \frac{n^k}{2^{\frac{k}{2}}} < 1.$$

因此, 存在一种染色使得没有同色的 K_k, 故 $R(k,k) > n$. □

这个简单的例子向我们阐释了概率方法运作的原理. 我们并没有完全的构造出一个符合条件的染色, 而是通过概率的技巧, 以一种非构造的方式, 证明这种染色的存在性. 不过, 由于概率方法往往选取足够多的对象来进行估计, 因此这样放缩出来的界往往不是精确的.

在刚刚的估计中, 我们直接考察了所有具有精确结构的染色. 不过, 如果我们将一些具有 "瑕疵" 的染色纳入我们的目标, 再对这些染色进行一些处理, 可能我们得到的结果会更好.

Theorem. 对任意正整数 n,

$$R(k,k) > n - \binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Proof. 对任意正整数 n, 考虑 K_n 的随机二染色. 根据上一个定理的证明, 我们知道同色的 K_k 个数的期望即 $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$, 因此存在一种染色使得同色的 K_k 个数不超过 $\binom{n}{k}2^{1-\frac{k}{2}}$. 我们从每个同色的 K_k 中各去掉一个顶点 (可能重复), 剩下的顶点产生的诱导子图就不存在同色的 K_k, 即证得命题. □

事实上, 通过简单的估计, 取 $n \sim e^{-1}k2^{\frac{k}{2}}(1-o(1))$, 我们可以得到

$$R(k,k) > \frac{1}{e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{2}}.$$

我们刚刚使用的方法被称为 Alterations. 这种方法先考虑更大的一族结构, 然后再进行一些处理, 得到我们需要的结构. 尽管这种想法非常朴素, 然而通过引入更深刻的概率工具, 往往能够得到很强的结果.

在我们刚刚的证明中, 我们考察了 K_n 所含的每一个 K_k 同色的概率, 并实行了最朴素的概率估计. 然而, 由于 n 远大于 k, 因此有许多 K_k 互不相交, 那么它们同色这些事件事实上是独立的, 因此我们刚刚的放缩显得没有那么有力. 利用下面被称为 Lovasz local lemma 的技术, 我们可以给出一个新的估计.

Definition. 给定一族事件 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$. 给定以 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 为顶点集的图 G. 如果对任意正整数 i 和任意由若干与 i 不相邻的点构成的集合 S, B_i 和 $\bigwedge_{j\in S} B_j$ 无关, 则称 G 为这族事件的相关图.

Theorem. (Lovasz local lemma) 设图 G 为事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的相关图. 若存在实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$, 满足对任意正整数 i,

$$\mathbb{P}(B_i) \leqslant x_i \cdot \prod_{j:\ i\sim j \text{ in } G} (1-x_j),$$

则

$$\mathbb{P}(\wedge_{i=1}^n \overline{B_i}) \geqslant \prod_{i=1}^n (1-x_i) \geqslant 0.$$

Proof. 我们先指出下面的命题: 对于任意 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集 S,

$$\mathbb{P}(B_i | \wedge_{j\in S} \overline{B_j}) \leqslant x_i. \tag{1}$$

我们分两步证明原题.

Step 1. 第一步, 我们先证明若我们指出的命题成立, 则原题成立. 此时

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{B_1} \wedge \cdots \wedge \overline{B_n}) &= \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1}) \cdots \mathbb{P}(\overline{B_n}|\overline{B_1} \wedge \cdots \overline{B_{n-1}}) \\
&= (1-\mathbb{P}(B_1))(1-\mathbb{P}(B_2|B_1)) \cdots (1-\mathbb{P}(B_n|\overline{B_1} \wedge \cdots \overline{B_{n-1}})) \\
&= (1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

因此原题成立.

Step 2. 我们对 $|S|$ 归纳证明该命题. $|S| = 0$ 时问题平凡. 若命题对 $|S| \leq k$ 成立, $|S| = k+1$ 时, 记 $S_1 = \{j : i \sim j \text{ in } G\}$, $S_2 = \{j : i \nsim j \text{ in } G\}$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_i | \wedge_{j\in S} \overline{B_j}) &= \mathbb{P}\left(B_i | (\wedge_{j\in S_1}\overline{B_j}) \wedge (\wedge_{j\in S_2}\overline{B_j})\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(B_i \wedge (\wedge_{j\in S_1}\overline{B_j}) | \wedge_{j\in S_2} \overline{B_j}\right)}{\mathbb{P}\left(\wedge_{j\in S_1}\overline{B_j} | \wedge_{j\in S_2} \overline{B_j}\right)} \\
&\leqslant \frac{\mathbb{P}\left(B_i | \wedge_{j\in S_2} \overline{B_j}\right)}{\mathbb{P}\left(\wedge_{j\in S_1}\overline{B_j} | \wedge_{j\in S_2} \overline{B_j}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}\left(\wedge_{j\in S_1}\overline{B_j} | \wedge_{j\in S_2} \overline{B_j}\right)} \\
&\leqslant \frac{x_i \cdot \prod_{j:\ i\sim j \text{ in } G} (1-x_j)}{\mathbb{P}\left(\wedge_{j\in S_1}\overline{B_j} | \wedge_{j\in S_2} \overline{B_j}\right)} \\
&= \frac{x_i \cdot \prod_{j:\ i\sim j \text{ in } G} (1-x_j)}{\mathbb{P}\left(\overline{B_{i_1}} | \wedge_{j\in S_2} \overline{B_j}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B_{i_2}} | (\wedge_{j\in S_2}\overline{B_j}) \wedge \overline{B_{i_1}}\right) \cdots \mathbb{P}\left(\overline{B_{i_k}} | (\wedge_{j\in S_2}\overline{B_j}) \wedge \overline{B_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{B_{i_{k-1}}}\right)} \\
&\leqslant \frac{x_i \cdot \prod_{j:\ i\sim j \text{ in } G} (1-x_j)}{(1-x_{i_1})\cdots(1-x_{i_k})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x_i \cdot \prod\limits_{j:\ i \sim j \text{ in } G} (1 - x_j)}{\prod\limits_{j \in S_1} (1 - x_j)} \\
&= x_i \cdot \prod_{j:\ i \sim j \text{ in } G,\, j \notin S_1} (1 - x_j) \\
&\leqslant x_i.
\end{aligned}
$$

因此, 原命题成立. □

利用 Lovasz local lemma, 下面的推论是显然的:

Corollary. 给定一族事件 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$. 已知 B_i 发生的概率均小于等于 p, 且每个 B_i 均至多与 d 个其他的事件相关. 若 $ep(d+1) \leq 1$, 则 B_i 均不发生的概率为正.

我们接下来利用 Lovasz local lemma 来给出 $R(k,k)$ 的一个估计.

Theorem.

$$
R(k,k) > \frac{\sqrt{2}}{e}(1 + o(1))k2^{\frac{k}{2}}.
$$

Proof. 对于任意正整数 n, 将 K_n 随机二染色. 对每个 K_n 的 k 个顶点构成的集合 S, 考虑 S 同色这一事件 A_S. 则 $\mathbb{P}(A_S) = 2^{1-\frac{k}{2}}$, 且每个 A_S 最多和 $d = \binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$ 个其他的事件 A_T 相关 ($|S \cap T| \geq 2$ 时才相关.) 由上一个推论, $ep(d+1) \leq 1$ 时存在一种染色使得 A_i 均不发生, 即 $R(k,k) > n$. 简单估计即可证得结论. □

值得注意的是, 我们以上所述的技术不止适用于 $R(k,k)$, 也适用于一般的 $R(k,l)$. 例如, 我们可以用 Lovasz local lemma 证明, 存在正实数 c, 使得对任意正整数 k, 均有 $R(3,k) \geq c\frac{k^2}{\ln^2 k}$.

最后, 我们再看一个极其精妙的运用概率方法的例子. 这个例子通过构造一种非常特殊的结构, 给出了关于 $R(3,k)$ 上界的一个精确刻画.

Theorem. 存在正实数 c_1, 使得对任意正整数 k,

$$
R(3,k) \leq c_1 \frac{k^2}{\ln k}.
$$

Proof. 我们证明 $c_1 = 8$ 满足条件. 为此, 我们只需证明, 若图 $G(V,E)$ 不含三角形且顶点数 n 大于 $8\frac{k^2}{\ln k}$, 则必有 k 个点两两不相邻, 即 $\alpha(G) \geq k$. 由于 G 中不存在三角形, 故若 G 存在一个顶点 v 度数大于等于 $k+1$, 则 v 的邻居中存在 k 个点两两不相邻, 此时已经证得命题. 下设 G 的每个点的度数均小于等于 k.

$k \leq 16$ 时, 利用平凡的估计 $\alpha(G)(k+1) \geq n$ 即证. 若 $k > 16$, 我们从 G 的所有独立集中随机取一个集合 W. 对于 G 的任意顶点 v, 定义随机变量 X_v 如下:

- 若 $v \notin W$, 则 $X_v = |N(v) \cap W|$.

- 若 $v \in W$, 则 $X_v = k$.

若固定 W, 则

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} X_v &= \sum_{v\in W} k + \sum_{v\notin W} X_v \\ &= k|W| + \sum_{v\notin W} |N(v)\cap W| \\ &= k|W| + \sum_{v\in W} |N(v)| \\ &\le 2k|W|.\end{aligned}$$

因此, 为了证明存在 $|W|$ 使得 $W \ge k$, 我们只需证明

$$\mathbb{E}(\sum_{v\in V} X_v) \ge 2k^2,$$

也即只需证明对任意顶点 v, 均有 $\mathbb{E}(X_v) \ge \frac{\ln k}{4}$. 注意到 X_v 的取值只与 W 和 $v \cup N(v)$ 的交有关, 因此, 记 H 为 G 在 $V - (N(v)\cup v)$ 上的诱导子图, 我们只需证明, 对任意 H 中的独立集 S, 均有

$$\mathbb{E}(X_v|W \cap V(H) = S) \ge \frac{\ln k}{4}.$$

不妨设 $|N(v)| = x$. 由于 $N(v)$ 中的点两两不相邻, 因此 S 固定后, W 恰有 $2^x + 1$ 种可能: $S \cup \{v\}$, 或是 S 并上一个 $N(v)$ 的子集. 对于前者, X_v 的期望为 $\frac{k}{2^x+1}$; 对于后者, X_v 的期望为 $\frac{x2^{x-1}}{2^x+1}$. 因此, 我们只需证明, 对任意正整数 x, 均有

$$\frac{k}{2^x+1} + \frac{x2^{x-1}}{2^x+1} \ge \frac{\ln k}{4},$$

求导结合 $k \ge 16$ 易证. □

这个问题通过构造一个非常巧妙的随机变量 X_v 来作为桥梁进行概率估计解决了问题. 事实上, 1995 年, Jeong Han Kim 证明了上述的界的阶是最佳的, 即存在正实数 c_2, 使得对任意正整数 k,

$$R(3,k) \ge c_2\frac{k^2}{\ln k}.$$