# 基础力学进阶第二次习题课

吴振铭 PB22051040

## 第十二章 微振动

### 知识点

**小角度时有近似关系：**

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}.$$

**解题方法：**

- 拉二法（单/多自由度，原理性方法）

$$L = T - U \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad a\ddot{q} + cq = 0.$$

- 能量法（单自由度，拉二的简化）

$$T = \frac{a}{2}\dot{q}^2, \quad U = \frac{c}{2}q^2, \quad T^* = \frac{a}{2}q_{max}^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{U_{\max}}{T^*}}.$$

- 静伸长法（单自由度，弹簧 + 重力）

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\delta = \text{相对原长静位移}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

- 二阶常系数常微分方程的解法（齐次和非齐次）

**多自由度：**分别对各广义坐标使用拉二法。

**阻尼振动：**

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = 0$$

小阻尼时有解：

$$q = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}t + \alpha)$$

**受迫振动**：有微分方程

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t) = H\sin(\kappa t).$$

令 $\omega^2 = \frac{c}{a}$，$2n = \frac{b}{a}$，并且设 $h = \frac{H}{a}$，则上式可写成

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = h\sin(\kappa t).$$

通解为：

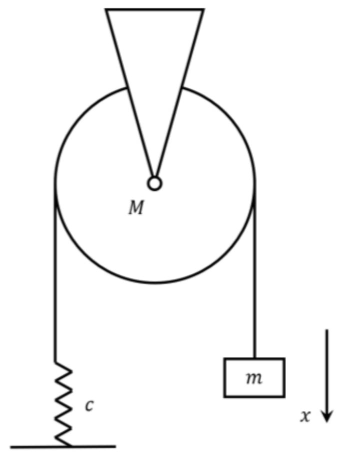
$$q = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}t + \alpha) + B\sin(\kappa t - \varphi)$$

将后者代入微分方程，有：

$$B = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \kappa^2)^2 + 4n^2\kappa^2}}; \quad \tan\varphi = \frac{2n\kappa}{\omega^2 - \kappa^2}$$

## 题 12.2

质量为 $m$ 的物体悬挂于不可伸长的绳子上，该绳另一端跨过定滑轮后与弹簧相连，弹簧刚性系数为 $c$；滑轮可视为均质圆柱，质量为 $M$，半径为 $R_0$。求该系统作微振动的微分方程及振动频率。




题 12.2 示意图

## 解

取广义坐标为物体距离平衡位置的距离 $x$（也可以用滑轮的转角 $\theta$），再取系统平衡时的位置为零势能点，则可以给出动能和势能表达式：

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{2m+M}{4}\dot{x}^2$$

$$U = -mgx + \frac{1}{2}c(x+\delta)^2 = \frac{1}{2}c(x^2+\delta^2), \quad \delta = \frac{mg}{c}$$

代入拉格朗日方程化简得：

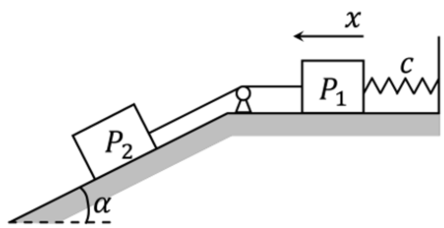
$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{x} + cx = 0$$

振动频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m + M/2}}$$

## 题 12.3

物体 $A$ 和 $B$ 重量分别为 $P_1$ 和 $P_2$，用弹簧和滑轮连接构成振动系统。系统平衡时，水平弹簧伸长为 $\delta$，斜面倾角为 $\alpha$，不计摩擦，求系统微振动的周期。




题 12.3 示意图

## 解

取 $A$ 到平衡位置的距离 $x$ 为广义坐标，以平衡位置为零重力势能点，则有：

$$T = \frac{P_1 + P_2}{2g}\dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2}c(x+\delta)^2 - P_2 \sin\alpha x = \frac{1}{2}c(x^2+\delta^2)$$

$$\delta = \frac{P_2 \sin\alpha}{c}$$

代入拉格朗日方程化简即得

$$(P_1 + P_2)\ddot{x} + cgx = 0$$

故得振动周期

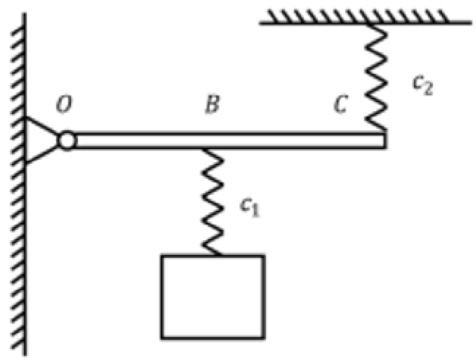
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{P_1+P_2}{cg}}$$

代入 $c = \frac{P_2 \sin\alpha}{\delta}$，得到

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(P_1+P_2)\delta}{P_2 g \sin\alpha}}.$$

## 题 12.6

无重杆铰接于 $O$，重物 $A$ 通过弹簧挂在杆上 $B$ 点，振动系统如图所示。已知两弹簧的刚度系数为 $c_1$ 和 $c_2$，$OB=a$，$OC=b$，求系统的固有频率。




题 12.6 示意图

## 解

**拉二法**

取杆 $OC$ 相对水平位置的转角 $\theta$ 为广义坐标，则系统的总势能为

$$U=\frac{1}{2}c_1\delta_1^2+\frac{1}{2}c_2\delta_2^2,$$

其中 $\delta_1,\delta_2=\theta b$ 分别为两根弹簧的伸长量。又知杆为无重杆，故杆受合外力矩必为零，即：

$$c_1\delta_1 a=c_2\delta_2 b \implies \delta_1=\frac{c_2b^2}{c_1a}\theta.$$

代入势能表达式中可得

$$U=\frac{c_2b^2(c_1a^2+c_2b^2)}{2c_1a^2}\theta^2,$$

而重物相对弹簧为原长时的位移可以表示为

$$x=\theta a+\delta_1=\frac{c_1a^2+c_2b^2}{c_1a}\theta,$$

故动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{m(c_1a^2+c_2b^2)^2}{2c_1^2a^2}\dot{\theta}^2,$$

代入第二类拉格朗日方程整理后可得：

$$m(c_1a^2+c_2b^2)\ddot{\theta}+c_1c_2b^2\theta=0 \implies \omega=\sqrt{\frac{c_1c_2b^2}{m(c_1a^2+c_2b^2)}}.$$

**能量法**

设: 弹簧 c1 伸长量为 x1，弹簧 c2 伸长量为 x2.

重物位移为：

$$x=\frac{a}{b}x_2+x_1$$

O 点力矩守恒，有：

$$c_2x_2b=c_1x_1a$$

故

$$x=\left(\frac{a^2c_1}{b^2c_2}+1\right)x_1$$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{a^2c_1}{b^2c_2}+1\right)^2\dot{x}_1^2$$

$$U=\frac{1}{2}c_1x_1^2+\frac{1}{2}c_2x_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2c_1^2}{b^2c_2}+c_1\right)x_1^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{U_{\max}}{T^*}}=\sqrt{\frac{c_1}{m\left(\frac{a^2c_1}{b^2c_2}+1\right)}}$$

**静伸长法**

系统静止时，物体相对两弹簧均为原长时的位移为

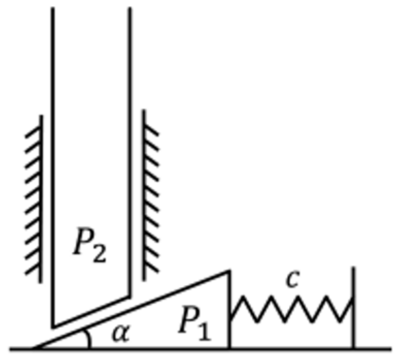
$$\delta=\frac{mg}{c_1}+\frac{mga^2}{c_2b^2}=\frac{mg(c_1a^2+c_2b^2)}{c_1c_2b^2}$$

故由静伸长法，得固有频率

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\delta}}=\sqrt{\frac{c_1c_2b^2}{m(c_1a^2+c_2b^2)}}.$$

## 题 12.7

模块 $A$ 重 $P_1$，$B$ 重 $P_2$，它分别可以在水平面和铅锤滑道内滑动。弹簧刚性系数为 $c$，$A$ 块斜角为 $\alpha$。当系统平衡时 $A$ 块获得一水平速度 $v_0$，求 $B$ 块的运动方程。




题 12.7 示意图

## 解

由几何关系（接触面垂直方向速度相同）可以得到 $\Delta x_A = \Delta x_B \cot\alpha$，故写出动能和势能表达式为：

$$T = \frac{P_1 \cot^2\alpha + P_2}{2g}\dot{x}_B^2$$

$$U = \frac{1}{2}c(x_B^2 \cot^2\alpha + \delta^2), \quad \delta = \frac{P_2 \tan\alpha}{c}$$

代入拉格朗日方程即可得到 $B$ 的运动方程

$$\left(P_1 + P_2 \tan^2\alpha\right)\ddot{x}_B + cgx_B = 0$$

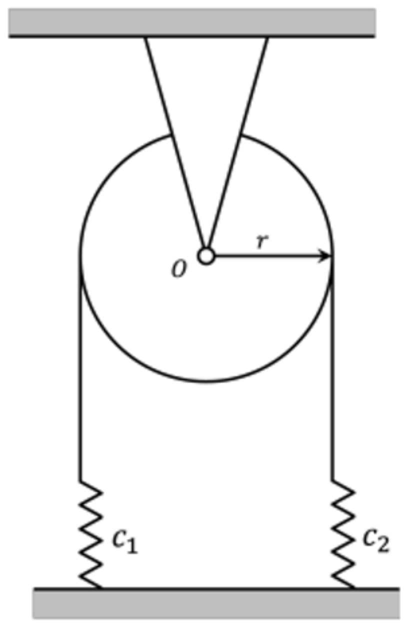
有初始条件

$$\dot{x}_A = v_0$$

可进一步求解。

## 题 12.9

半径为 $r$ 的轮子重 $P$，对于转动轴 $O$ 的回转半径为 $\rho$，一不可伸长的轻绳跨过滑轮，两端分别与二弹簧相连。二弹簧刚性系数分别为 $c_1, c_2$。调整底座的位置，使滑轮轴 $O$ 受力为 $2P$，求系统作微振动的固有频率（摩擦不计）。




题 12.9 示意图

## 解

已知回转半径 $\rho$，转动惯量可以通过回转半径计算得到：

$$I = m\rho^2$$

取轮的转角 $\theta$ 为广义坐标，由于系统为单自由度，故系统动能和势能：

$$T = \frac{P}{2g}\rho^2\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}c_1(\theta r + l_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(l_2 - \theta r)^2$$

其中 $l_1, l_2$ 满足 $c_1 l_1 = P/2, \quad c_2 l_2 = P/2$。代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0$$

则有：

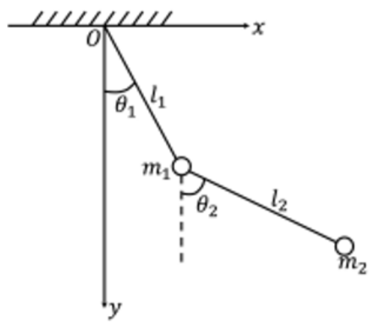
$$\frac{P}{g}\rho^2\ddot{\theta}+(c_1+c_2)r^2\theta=0$$

即得系统微振动频率：

$$\omega=\sqrt{\frac{(c_1+c_2)r^2g}{P\rho^2}}$$

## 题 12.12

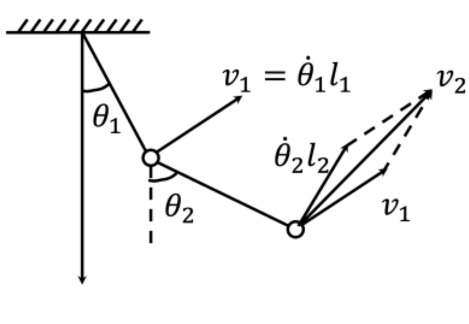
质量为 $m_1$ 和 $m_2$ 的两个小球分别用长 $l_1$ 和 $l_2$ 的轻绳连接成双摆振动系统，如图所示。用角度 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 为广义坐标推导系统在铅垂平面内微振动微分方程和频率方程。并求当 $m_1=m_2=m, l_1=l_2=l$ 时系统的主频率，画出主振型图。




题 12.12 示意图

## 解

如解图所示：




题 12.12 解图

系统动能和势能：

$$T=\frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2+\frac{1}{2}m_2\left[(l_1\dot{\theta}_1)^2+(l_2\dot{\theta}_2)^2+2\cos(\theta_1-\theta_2)l_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2\right]$$

$$U=m_1gl_1(1-\cos\theta_1)+m_2g\left[l_1(1-\cos\theta_1)+l_2(1-\cos\theta_2)\right]$$

小角度约化，有：$\cos\theta\approx 1-\frac{\theta^2}{2}$ 则有：

$$T\approx\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$U\approx\frac{1}{2}g(m_1+m_2)l_1\theta_1^2+\frac{1}{2}gm_2l_2\theta_2^2$$

$$L=T-U=\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right]-\left[\frac{1}{2}g(m_1+m_2)l_1\theta_1^2+\frac{1}{2}gm_2l_2\theta_2^2\right]$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial(T-U)}{\partial q_j}=0$$

其中 $q_j$ 为广义坐标，本题取 $q_1=\theta_1,q_2=\theta_2$，即得：

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2+g(m_1+m_2)l_1\theta_1=0$$

$$m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1+m_2l_2^2\ddot{\theta}_2+gm_2l_2\theta_2=0$$

此即所求的运动微分方程。

设解为：

$$\theta_1=A\sin(\omega t+\beta),\quad \theta_2=B\sin(\omega t+\beta)$$

代入后得到频率方程：

$$g(m_1+m_2)l_1A=\omega^2\left[(m_1+m_2)l_1^2A+m_2l_1l_2B\right]$$

$$gm_2l_2B=\omega^2\left(m_2l_1l_2A+m_2l_2^2B\right)$$

令 $m_1=m_2=m$，以及 $l_1=l_2=l$，则上式可以化为：

$$2(g-\omega^2l)A-\omega^2lB=0$$

$$-\omega^2lA+(g-\omega^2l)B=0$$

上述方程要有非零解，系数矩阵行列式必须为零，由此可得频率方程：

$$\begin{vmatrix}2(g-\omega^2l) & -\omega^2l\\ -\omega^2l & g-\omega^2l\end{vmatrix}=0$$

展开行列式得：

$$2(g-\omega^2 l)^2-(\omega^2 l)^2=0$$

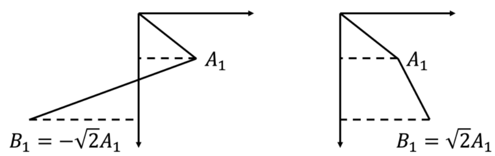
解得：

$$\omega^2=\frac{\sqrt{2}g}{(\sqrt{2}\pm 1)l}$$

代入式 (1) 中即可得到主振型：

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{l}{2(g-\omega_1^2 l)}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{A_2}{B_2}=\frac{l}{2(g-\omega_2^2 l)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

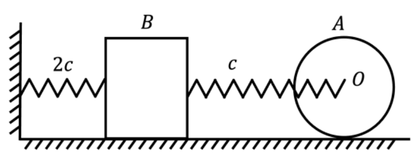
此即两个主振型，绘出振型图如下：




题 12.12 振型示意图

## 题 12.15

均质圆柱 $A$ 质量为 $m$，半径为 $r$，物块 $B$ 质量为 $3m$，它们在水平面上用刚性系数为 $c$ 和 $2c$ 的两个弹簧连接成振动系统。圆柱只滚不滑，物体 $B$ 与平面之间的摩擦可略。初始时。轴 $O$ 偏离平衡位置的距离为 $x_0$，$B$ 位移为零，初速度均为零。求系统的微振动方程和主频率。




题 12.15 示意图

## 解

取水平方向右为正方向，则可写出系统动能和势能：

$$T=\frac{3}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2r^2}\left(I+mr^2\right)\dot{x}_2^2$$

$$U=\frac{1}{2}\cdot 2cx_1^2+\frac{1}{2}c(x_2-x_1)^2$$

代入拉格朗日方程即可得到

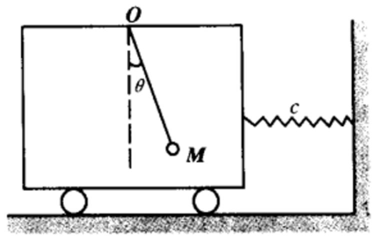
$$\begin{cases} 3m\ddot{x}_1 + 3cx_1 - cx_2 = 0 \\ \frac{3}{2}m\ddot{x}_2 + cx_2 - cx_1 = 0 \end{cases}$$

从而可以求得主频率

$$\omega^2 = \frac{4c}{3m} \ or \ \frac{c}{3m}$$

## 题 12.17

小车重 24 kN，用刚性系数 $c = 200\,\mathrm{N/cm}$ 的弹簧与墙壁连接。车内顶上悬挂单摆，摆长 $OM = 1.2\,\mathrm{m}$，摆球（质点）重 2 kN。求系统微振动的主频率。




题 12.17 示意图

## 解

系统参数如下：

$$m_1 = \frac{24}{9.8} \approx 2449\,\mathrm{kg}, \quad m_2 = \frac{2}{9.8} \approx 204\,\mathrm{kg}, \quad l = 1.2\,\mathrm{m}, \quad c = 2 \times 10^4\,\mathrm{N/m}, \quad g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

以小车位移 $x$ 和摆球角度 $\theta$ 为广义坐标，动能表达式（在小角度近似下）为：

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}^2$$

势能包括弹簧势能和单摆重力势能：

$$U = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}m_2 gl\theta^2$$

代入拉格朗日方程：

对 $x$ 和 $\theta$ 分别有：

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\theta} + cx = 0$$

$$m_2l\ddot{x}+m_2l^2\ddot{\theta}+m_2gl\theta=0$$

将上述方程整理为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2l \\ m_2l & m_2l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & m_2gl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}=0$$

假设简谐振动解形式 $x(t),\theta(t)\propto\sin(\omega t)$，代入后得到特征方程：

$$\begin{vmatrix} c-\omega^2(m_1+m_2) & -\omega^2m_2l \\ -\omega^2m_2l & m_2gl-\omega^2m_2l^2 \end{vmatrix}=0$$

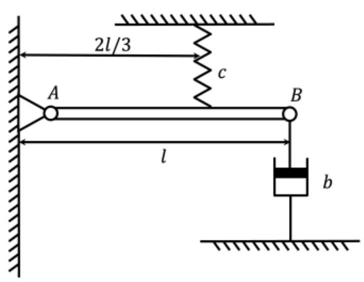
$$\omega_1\approx\sqrt{11.2}\approx3.35\,\mathrm{rad/s},\quad \omega_2\approx\sqrt{6.0}\approx2.45\,\mathrm{rad/s}$$

因此，该系统的两个主振频分别为：

$$\omega_1\approx3.35\,\mathrm{rad/s},\quad \omega_2\approx2.45\,\mathrm{rad/s}$$

## 题 12.19

计算图示系统的固有频率和有阻尼的自由振动的频率。设弹簧刚性系数为 $c$，广义阻尼系数为 $b$，$B$ 球（质点）质量为 $m$，杆 $AB$ 质量不计，其余参数如图所示。




题 12.19 示意图

## 解

取杆转角 $\theta$ 为广义坐标，则容易得到固有频率 $\omega^2=\frac{4c}{9m}$，再由广义阻尼系数的定义可以得到运动方程

$$\ddot{\theta}+\frac{b}{m}\dot{\theta}+\frac{4c}{9m}\theta=0$$

故 $n=b/2m$，即得阻尼振动的频率

$$\omega'=\sqrt{\omega^2-n^2}=\sqrt{\frac{4c}{9m}-\frac{b^2}{4m^2}}$$

## 题 12.23

一台机器重 3500N，由四根刚度系数为 400N/cm 的弹簧支持。作用于机器的周期激振力的最大值为 100N，频率为 2.5Hz，广义阻尼系数值为 16N·s/cm，求该机器受迫振动的振幅。

## 解

容易得到系统的运动方程

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \sin(2\pi f t)$$

由受迫振动公式可得到振幅

$$B = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \kappa^2)^2 + 4n^2\kappa^2}}$$

其中 $\omega^2 = c/M, \quad 2n = b/M, \quad h = F_0/M, \quad \kappa = 2\pi f$，计算得到 $B = 1.313\,\mathrm{mm}$。

# 第十三章　碰撞

## 知识点

**碰撞的两个特点：**

1. 碰撞过程中，碰撞力非常大，非碰撞力（如重力）可以忽略不计；

2. 碰撞前后物体的位移可以忽略不计。

**冲量定律：**

$$mu - mv = S,$$
$$S = \int_0^{\tau} F(t)\,dt.$$

**冲量矩定律：**

$$\mathbf{H}_{O2} - \mathbf{H}_{O1} = \sum_{t=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i^{(\mathrm{e})}$$

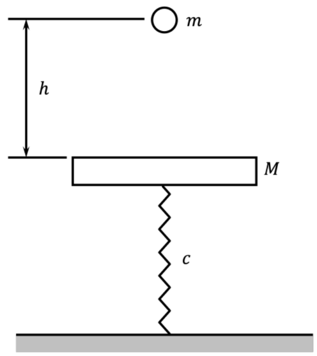
**恢复系数：**

$$k = \left|\frac{\Delta u}{\Delta v}\right| = \left|\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}\right|$$

完全弹性碰撞是理想的情况，此时 $k = 1$；完全塑性碰撞是另一种极限情况，碰撞后物体变形完全不能恢复，两物体碰撞后具有同一速度 $u_2 = u_1$，即两物体粘合在一起运动，这时 $k = 0$；一般情况下，$0 < k < 1$。

## 题 13.1

质量为 $m$ 的小球自高度 $h$ 自由下落，与质量为 $M$ 的板发生正碰撞。支持 $M$ 的弹簧刚性系数为 $c$，碰撞恢复系数为 $k$，求弹簧压缩的最大距离。当 $k$ 取何值时，碰撞后小球速度恰为零？




题 13.1 示意图

## 解

设碰撞前小球速度为 $v_1$，板速度为 $v_2 = 0$。

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

碰撞前后动量守恒，设碰后小球速度为 $u_1$，板速度为 $u_2$

$$mv_1 + Mv_2 = mu_1 + Mu_2$$

$$k = \left|\frac{\Delta u}{\Delta v}\right| = \frac{u_2 - u_1}{v_1} \quad \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{m-kM}{m+M}v_1 \\ u_2 = \frac{(1+k)m}{m+M}v_1 \end{cases}$$

设弹簧初始形变为 $\delta = \frac{Mg}{c}$，设板最低点与平衡位置的距离为 $x$，设最低点重力势能为 0，则根据能量守恒，有：

$$\frac{1}{2}Mu_2^2 + Mgx + \frac{1}{2}c\delta^2 = \frac{1}{2}c(x+\delta)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{M}{c}}u_2 = \sqrt{2\frac{Mgh}{c}} \cdot \frac{(1+k)m}{M+m} \quad \Rightarrow x_{\max} = x + \delta$$

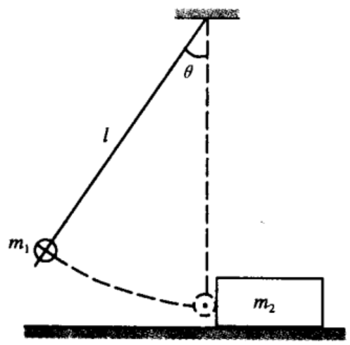
若碰后小球速度为 0，即 $u_1 = 0$。

$$\Rightarrow \frac{m-kM}{m+M}v_1 = 0 \Rightarrow k = \frac{m}{M}$$

求解过程中忽略了二次碰撞。

## 题 13.6

一单摆的摆长为 $l$，摆球质量为 $m_1$。将摆偏离平衡位置，使摆角等于 $\theta$，然后无初速释放。当运动到平衡位置时，与放在水平桌面上的物体相撞，该物体质量为 $m_2$，若碰撞恢复系数为 $k$，物体与水平面间摩擦系数为 $f$。求摆弹回的角度以及物体 $m_2$ 移动的最大距离。




题 13.6 示意图

## 解

摆球质量为 $m_1$，长度为 $l$，初始偏离平衡位置角度为 $\theta$，无初速度释放。下落到最低点时，有机械能守恒：

$$m_1gl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}m_1v_1^2$$

解得碰撞前速度为：

$$u_1=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

之后与质量为 $m_2$ 的物体发生碰撞，恢复系数为 $k$ ，设碰后摆球速度为 $v_1$，物体速度为 $v_2$。

动量守恒：

$$m_1v_1=m_1v_1+m_2v_2$$

$$k=\frac{v_2-v_1}{u_1}$$

联立以上两式可解出：

$$v_1=\frac{(m_1-km_2)u_1}{m_1+m_2},\quad v_2=\frac{(1+k)m_1u_1}{m_1+m_2}$$

物体在水平面上运动, 有摩擦系数为 $f$，设最大滑行距离 $s$ ，有：

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2=m_2fgs$$

解得：

$$s = \frac{v_2^2}{2fg} = \frac{(\frac{(1+k)m_1u_1}{m_1+m_2})^2}{2fg}$$

摆球碰后速度为 $v_1$，上升到最高点时速度为零，此时有高度 $h$：

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = m_1gh$$

得到：

$$h = \frac{u_1^2}{2g}$$

对应的最大回摆角度 $\theta'$ 满足：

$$h = l(1 - \cos\theta')$$

即：

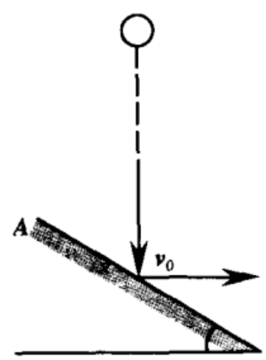
$$\cos\theta' = 1 - \frac{u_1^2}{2gl}$$

因此，摆球回摆角度为：

$$\theta' = \arccos\left(1 - \frac{u_1^2}{2gl}\right)$$

## 题 13.10

一钢球以速度 $v_0$ 垂直落下，与斜面 $A$ 相撞，然后水平地回跳，设恢复系数为 $k$，求斜面的倾角 $\theta$ 以及碰撞后钢球的速度。




题 13.10 示意图

### 解

设：碰后速度为 $u$ 由碰后速度水平，有

$$v_{0n} = v_0 \cos\theta, \quad v_{0\tau} = v_0 \sin\theta$$

$$u_n = u \sin\theta, \quad u_\tau = u \cos\theta$$

在斜面方向上，速度不变，

$$v_{0\tau} = u_\tau \Rightarrow v_0 \sin\theta = u \cos\theta \Rightarrow u = v_0 \tan\theta$$

有恢复系数，

$$\therefore k = \frac{u \sin\theta}{v_0 \cos\theta} = \frac{v_0 \cdot \tan^2\theta}{v_0} = \tan^2\theta$$

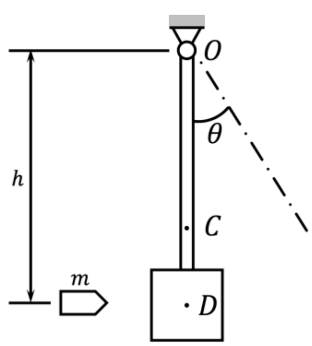
得解：

$$\Rightarrow \theta = \arctan\sqrt{k}$$

$$\therefore u = v_0 \cdot \tan\theta = v_0 \cdot \sqrt{k}$$

## 题 13.15

测定子弹速度的冲击摆由摆杆和沙袋构成。摆的质量为 $M$，其重心到悬挂点的距离 $OC = l$；摆对于转动轴 $O$ 的回转半径为 $\rho$；子弹质量为 $m$，射入砂袋后子弹到 $O$ 轴之距离 $OD = h$；为使轴 $O$ 处不产生碰撞约束反力，令 $hl = \rho^2$。若子弹射入后使摆偏开某一角度 $\theta$，求子弹的速度。




题 13.15 示意图

## 解

轴 $O$ 处不产生碰撞约束反力，因此，系统碰撞前后对 $O$ 轴动量矩守恒。设子弹初速度为 $v_0$，碰撞结束时摆的角速度为 $\omega$，碰撞后子弹速度为 $v$，摆对 $O$ 轴的转动惯量为 $J_0$

$$\begin{cases} m\cdot v_0\cdot h = J_0\cdot\omega + mvh \\ v=\omega h \\ J_0 = M\rho^2 = Mhl \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{mv_0}{Ml+mh}.$$

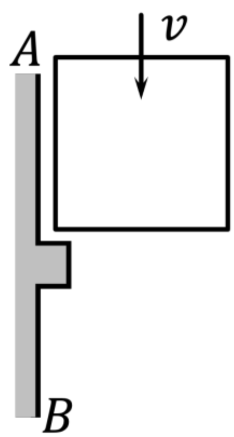
碰撞结束后，由能量守恒

$$\frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = Mgl(1-\cos\theta) + mgh(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{(Ml+mh)}{m}\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta)}{h}}$$

## 题 13.25

质量为 $m$ 的物块呈正方体，边长为 $a$，以速度 $v$ 平行落下时，在 $B$ 点撞在小凸缘上，设碰撞是完全弹性的，求碰撞后质心的速度和物块的角速度。




题 13.25 示意图

## 解

设小凸缘对物块的冲量为 $S$，方向竖直向上，物块碰撞后的速度为 $u$。动量定理：

$$mu - mv = -S$$

动量矩定理：（对物块的质心）

$$I_c \cdot \omega = S \cdot \frac{1}{2}a$$

能量守恒：（完全弹性）

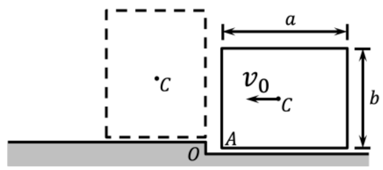
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \quad 其中 \quad I_c = \frac{1}{6}ma^2$$

联立可以解得，

$$\begin{cases} \omega = \frac{12v}{5a} \\ u_c = \frac{1}{5}v \end{cases}$$

## 题 13.28

图示矩形物块长为 $a$，宽为 $b$，在水平面上以匀速 $v_0$ 滑动时撞在一凸台上，设恢复系数为零。为使物块能绕凸台翻转上去，并立在凸台上，物块的速度 $v_0$ 至少应为多大？




题 13.28 示意图

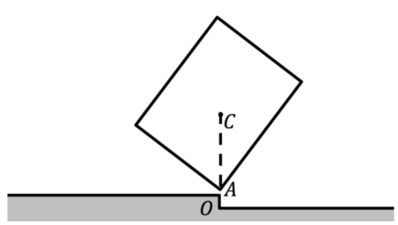
## 解一

设凸台高度为 $h$，凸台角点 $O$ 与物块 $A$ 点碰撞后物块角速度为 $\omega$。因为恢复系数为 0，所以碰后 $A$ 点速度为 0。碰撞过程中关于 $O$ 点角动量守恒：

$$mv_0\left(\frac{1}{2}b - h\right) = I_A\omega$$

其中，

$$I_A = I_C + m|AC|^2 = \frac{1}{12}m\left(a^2 + b^2\right) + m\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - h\right)^2\right)$$



题 13.28 解图

若物块能翻转到凸台上，$C$ 点运动到最高点（$AC$ 与地面垂直）时，物块速度至少为 0，此时根据能量守恒：

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2+mg\frac{b}{2}=mg(h+|AC|)$$

联立上述各式可以解得：

$$v_{0\min}=\frac{1}{m\left(\frac{b}{2}-h\right)}\sqrt{2mgI_A\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+\left(\frac{b}{2}-h\right)^2}-\frac{b}{2}+h\right)}$$

若 $h\to 0$ 则有

$$v_{0\min}=\frac{2}{\sqrt{3}b}\sqrt{g\left(a^2+b^2\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-b\right)}$$

## 解二

令 $h=0$，则

$$I_0=I_C+m|AC|^2=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)+m\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\right)=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$$

$$mv_0\frac{b}{2}=I_0\omega\Rightarrow\omega=\frac{mv_0b}{2I_0}$$

能越过最高点，可认为有

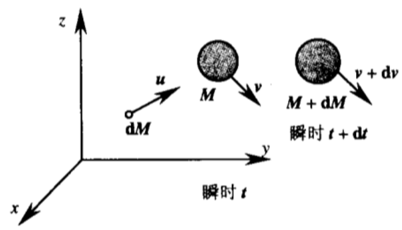
$$E_r=\frac{1}{2}I_0\omega^2\geq mg\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}-\frac{b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow v_0\geq\frac{2}{\sqrt{3}b}\sqrt{g(a^2+b^2)\left(\sqrt{a^2+b^2}-b\right)}$$

# 第十五章 变质量体动力学

## 知识点

变质量质点的运动微分方程：




教材图 15.1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) - u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = F$$

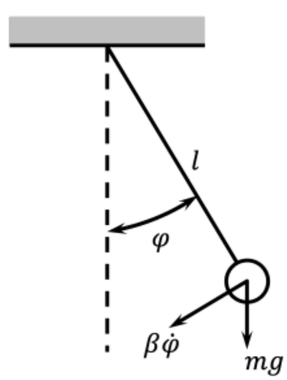
$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F + (u - v)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

式中 $(u-v)$：当 $u=0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}(Mv+0)}{\mathrm{d}t} = F$$

## 题 15.4

一个变质量摆在阻力与速度成正比的介质中运动，摆的质量由于质点的离散，按已知规律 $m=m(t)$ 而变化，且质点离散的相对速度为 0。已知摆线的长为 $l$，摆球受到与其角速度 $\omega$ 成正比的阻力 $R=-\beta\dot{\varphi}$ 的作用。试写出摆的运动方程。



题 15.4 示意图

### 解

利用物理量的对称关系，由式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) - u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = F \quad \Longrightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F + v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

得到角速度下的变质量体运动微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} - \omega'\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = M \quad \Longrightarrow \quad I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M + \omega_r\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

其中 $\omega'$ 为分离后微粒的角速度，而 $\omega_r$ 则为分离后微粒的相对速度。在本题中，微粒分离后的相对速度等于零，即 $\omega_r = 0$，故有：

$$ml^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\beta\omega l - mgl\sin\varphi$$

整理即得摆的运动方程：

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{ml}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

## 题 15.6

火箭在真空均匀重力场中以匀加速度 $a = 4g$ 铅直向上运动。喷射气流的相对速度 $u = 2.5\,\mathrm{km/s}$。试求火箭质量减至原有质量的三分之一所经过的时间。

### 解

由变质量体的运动微分方程：

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F + v_r\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

以竖直向上方向为正方向，则有：

$$\begin{aligned}
Ma &= -Mg - u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}M}{M} = -\frac{a+g}{u}\ \mathrm{d}t \\
&\Rightarrow \int_M^{M'} \frac{\mathrm{d}M}{M} = -\int_0^{t'} \frac{a+g}{u}\ \mathrm{d}t' \\
&\Rightarrow \ln M' - \ln M = -\frac{a+g}{u}t' \\
&\Rightarrow \ln M' = \ln M - \frac{a+g}{u}t'
\end{aligned}$$

当 $M' = \frac{1}{3}M$ 时，

$$t' = \frac{u \ln 3}{a+g} = 56.05\,\mathrm{s} \quad (g = 9.8\,\mathrm{m/s^2})$$

## 题 15.12

一气球重为 $Q$，牵引一堆在地面上的绳子沿铅垂方向上升。作用在气球上的力有三个：升力 $R$，重力 $Q$ 以及与速度平方成正比的阻力 $F = -\beta \dot{x}^2$，$\beta$ 为阻力系数。绳子的单位长度重为 $\gamma$。求气球的运动方程。

## 解

由题意有：

$$M = \frac{Q}{g} + \frac{\gamma}{g}x, \quad v_r = u - v = -v$$

且受的合外力

$$F_M = R - Q + F - \gamma x = R - Q - \beta \dot{x}^2 - \gamma x$$

代入运动微分方程：

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_M + v_r \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

即可得到：

$$M\left(\frac{Q}{g} + \frac{\gamma}{g}x\right)\ddot{x} = R - Q - \beta \dot{x}^2 - \gamma x - \frac{v\gamma}{g}\dot{x}$$

整理即得气球的运动方程：

$$\left(\frac{Q}{g} + \frac{\gamma}{g}x\right)\ddot{x} + \left(\beta + \frac{\gamma}{g}\right)\dot{x}^2 + \gamma x + Q - R = 0$$

设绳总长为 $l$，当 $x > l$ 时，绳子完全脱离地面，此时有运动微分方程：

$$\left(\frac{Q}{g} + \frac{\gamma l}{g}\right)\ddot{x} + \beta \dot{x}^2 + \gamma l + Q - R = 0$$

## 题 15.14

一枚火箭总质量为 $1000\,\mathrm{kg}$，其中包括燃料质量 $900\,\mathrm{kg}$。在 $t = 0$ 时，火箭垂直地向上发射。已知燃料消耗量为 $10\,\mathrm{kg/s}$，并以 $v_r = 2100\,\mathrm{m/s}$ 的相对速度喷出，当 (1) $t = 0$；(2) $t = 45\,\mathrm{s}$；(3) $t = 90\,\mathrm{s}$ 时，试求火箭的速度和加速度。

## 解

取火箭运动方向为正方向，由变质量体的运动微分方程有：

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Mg + v_r\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

其中 $M = M(t) = 1000 - 10t\,(\mathrm{kg})$，$v_r = -2100\,\mathrm{m/s}$，代入 (1) 中即得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{2100}{100-t}\,\mathrm{m/s^2}$$

积分即得速度与时间的关系：

$$v = -gt + 2100\ln\left(\frac{100}{100-t}\right)\,\mathrm{m/s}$$

取 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，代入题中时刻，即得：

$$\begin{aligned}
t = 0\,\mathrm{s}: &\quad a = 11.20\,\mathrm{m/s^2}, \quad v = 0\,\mathrm{m/s}\\
t = 45\,\mathrm{s}: &\quad a = 28.38\,\mathrm{m/s^2}, \quad v = 814.5\,\mathrm{m/s}\\
t = 90\,\mathrm{s}: &\quad a = 200.2\,\mathrm{m/s^2}, \quad v = 3953\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

## 题 15.16

变质量物体沿与水平面成 30° 角的光滑斜面以匀加速度 $g$ 向下运动，其初始速度是 $v_0$。设分离微粒的绝对速度等于零，物体的初始质量等于 $m_0$，试求物体的质量变化规律。

## 解

取沿斜面向下为正方向，则由变质量体的运动微分方程：

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}Mg + v_r\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

其中 $v_r = -v$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$，$v = gt + v_0$ 为物体的速度大小，代入上式即可解得

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{gt/v_0 + 1}}$$

# 第十六章 非惯性系动力学

## 知识点

**质点相对运动微分方程：**

在非惯性系中，有运动微分方程：

$$m(\boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_k) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N},$$

或

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + (-m\boldsymbol{a}_e) + (-m\boldsymbol{a}_k)$$

令

$$\boldsymbol{S}_e = -m\boldsymbol{a}_e, \quad \boldsymbol{S}_k = -m\boldsymbol{a}_k.$$

即有

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_k$$

上式就是非惯性坐标系中质点动力学的基本定律，并称为质点相对运动微分方程。

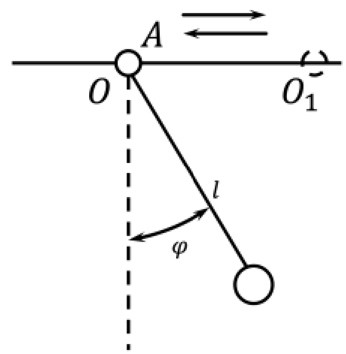
上述矢量形式的方程在动坐标系的投影方程为：

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{x_1} + N_{x_1} + S_{ex_1} + S_{kx_1}, \\ m\ddot{y}_1 &= F_{y_1} + N_{y_1} + S_{ey_1} + S_{ky_1}, \\ m\ddot{z}_1 &= F_{z_1} + N_{z_1} + S_{ez_1} + S_{kz_1}. \end{aligned}$$

式中 $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1$ 和 $\ddot{z}_1$ 分别是质点的相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 在动坐标系各轴 $O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1$ 上的投影。

## 题 16.2

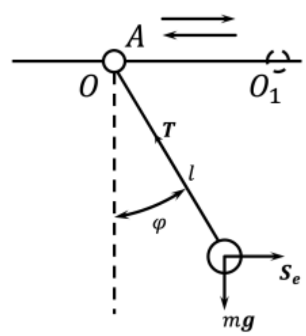
图示单摆 $AB$ 长 $l$，已知点 $A$ 在固定点 $O$ 的附近沿水平作谐振动：$OO_1 = a\sin pt$，其中 $a$ 与 $p$ 为常数。设初瞬时摆静止，求摆的相对运动规律。




题 16.2 示意图

## 解

建立固连在点 A 上的动系，如题 16.2 解图所示：




题 16.2 解图

则有：

$$ma_r = F + N + S_e + S_k$$

$$S_e = -ma_e = map^2 \sin pt, \quad S_k = 0$$

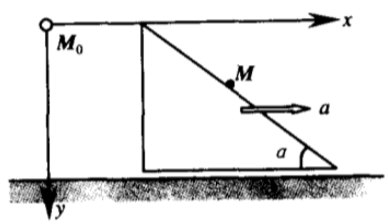
沿切向 $\tau$ 投影，

$$m\ddot{\varphi}l = S_e\cos\varphi - mg\sin\varphi = map^2\sin pt\cdot\cos\varphi - mg\sin\varphi$$
$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{a}{l}p^2\sin pt\cdot\cos\varphi = 0$$

## 题 16.4

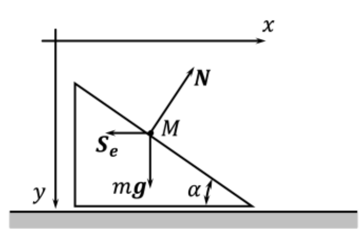
倾角为 $\alpha$ 的光滑直角棱柱体，沿一水平面作匀加速直线运动，加速度大小为 $a$，初速为零（见图）。一重量为 $P$ 的小球 $M$ 无初速地沿棱柱体的斜面向下运动。求小球的相对加速度、绝对加速度、绝对轨迹及斜面的反作用力 $N$。讨论下列特殊情况：

(1) $a = g\tan\alpha$；(2) $a = -g\cot\alpha$。




题 16.4 示意图

**解**




题 16.4 解图

如图，相对速度方向沿 x 轴负方向，相对速度沿斜面向下。则有：

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N} + \vec{S}_e + \vec{S}_k$$

向斜面方向投影有：

$$ma_r = mg\sin\alpha - ma\cos\alpha$$

$$\Rightarrow a_r = g\sin\alpha - a\cos\alpha$$

$$\therefore \vec{a}_{绝} = \vec{a}_r + \vec{a}_e = \vec{a}_r + \vec{a}$$

$$\therefore a_{绝x} = a_r\cos\alpha + a = g\sin\alpha\cos\alpha - a\cos^2\alpha + a = g\sin\alpha\cos\alpha + a\sin^2\alpha$$

$$a_{绝y} = a_r\sin\alpha = g\sin^2\alpha - a\cos\alpha\sin\alpha$$

加速度恒定，故轨迹为直线，设斜率为 $k$，有

$$k = \frac{a_{绝y}}{a_{绝x}} = \frac{g\sin\alpha - a\cos\alpha}{g\cos\alpha + a\sin\alpha}$$

反作用力为：

$$N = mg\cos\alpha + ma\sin\alpha$$

特殊情况：

(1) $a = g\tan\alpha$

$$\therefore a_r = g\sin\alpha - a\cos\alpha = 0$$

$$a_{绝x} = a \ a_{绝y} = 0$$

轨迹直线斜率 $k = 0$ 轨迹水平向右，

$$N = mg\cos\alpha + mg\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

(2) $a = -g\cot\alpha$

$$\therefore a_r = g\sin\alpha - a\cos\alpha = \frac{g}{\sin\alpha}$$

$$\therefore a_{绝x} = 0 \ a_{绝y} = g \quad \text{(向下)}$$

轨迹直线斜率 $k = \infty$ 轨迹竖直向下，

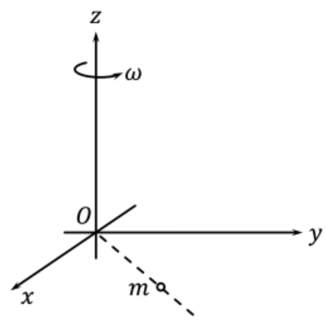
$$N = mg\cos\alpha + m\sin\alpha\left(-\frac{g}{\cot\alpha}\right) = 0$$

## 题 16.8

一质点放在光滑水平面 $Oxy$ 上，此平面绕固定竖直轴 $Oz$ 以等角速度 $\omega$ 转动。现给质点一水平初速度，证明在质点相对运动中，以下的等式成立：

(1) $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\omega^2(x^2+y^2)=$ 常量;

(2) $y\dot{x}-x\dot{y}-\omega(x^2+y^2)=$ 常量.




题 16.8 示意图

## 解

由题意有如上图所示的坐标系, 故有:

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}_e+\boldsymbol{S}_k$$

$$\boldsymbol{S}_e=-m\boldsymbol{a}_e=m\omega^2\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{S}_k=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r=2m\omega\dot{y}\hat{\imath}-2m\omega\dot{x}\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m\ddot{x}=m\omega^2x+2m\omega\dot{y} \\ m\ddot{y}=m\omega^2y-2m\omega\dot{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}=\omega^2x+2\omega\dot{y} & (1)\\ \ddot{y}=\omega^2y-2\omega\dot{x} & (2)\end{cases}$$

(1)

$$(1)\cdot\dot{x}+(2)\cdot\dot{y}\Rightarrow\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=\omega^2\dot{x}x+\omega^2\dot{y}y$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\dot{x}^2}{dt}+\frac{d\dot{y}^2}{dt}\right)=\frac{1}{2}\omega^2\left(\frac{dx^2}{dt}+\frac{dy^2}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow\dot{x}^2+\dot{y}^2=\omega^2(x^2+y^2)+c_1$$

(2)

$$(1)\cdot y\Rightarrow\dot{x}y=\frac{d(x\dot{y})}{dt}-x\ddot{y}=\omega^2xy+2\omega\dot{y}y\quad(3)$$

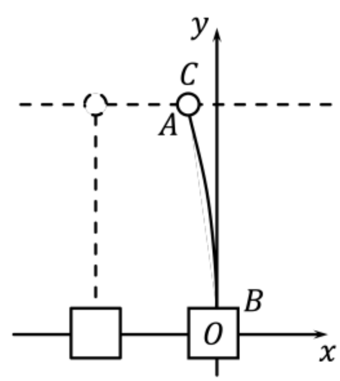
$$(2)\cdot x \Rightarrow x\ddot{y} = \frac{d(x\dot{y})}{dt} - x\ddot{y} = \omega^2 xy - 2\omega\dot{x}x \quad (4)$$

$$(3)-(4) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{x}y - x\dot{y}) = \omega\frac{d}{dt}(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \dot{x}y - x\dot{y} = \omega(x^2+y^2) + c_2$$

## 题 16.10

在竖直的弹性杆 $AB$ 的一端 $A$ 上附有重物 $C$，其重量为 2.5 公斤。重物 $C$ 能在平衡位置附近作简谐振动（见图），弹性力的大小与重物到平衡位置的距离成正比。杆 $AB$ 的刚度是：使 $A$ 端离开平衡位置 1 厘米，需用力 0.1 公斤。求当杆 $AB$ 的 $B$ 端沿水平线作振幅为 1 毫米，周期为 1.1 秒的简谐振动时，重物 $C$ 作强迫振动的振幅。




题 16.10 示意图

## 解一-非惯性系

以杆 $B$ 端为参考系，对物体 $A$ 进行分析：

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{S}_e$$

其中

$$S_e = 2.5\,\mathrm{kg} \times \left(\frac{2\pi}{1.1\,\mathrm{s}}\right)^2 \times 1\,\mathrm{mm} \times \sin\left(\frac{2\pi}{1.1\,\mathrm{s}}t\right) \quad (1)$$

由课本式 (12.55)，强迫振动的振幅公式为：

$$B = \frac{h}{\sqrt{\left(\omega^2-\kappa^2\right)^2 + 4n^2\kappa^2}} \quad (2)$$

下面来计算上式中的参数：首先，由 $B$ 端进行简谐振动的条件可知激振力的频率 $\kappa = 2\pi/1.1\,\mathrm{s}$；由于系统不受阻尼，即阻尼系数 $b=0$，从而可以得到 $n=b/2a=0$；由杆 $AB$ 的刚度条件，可以计算得到系统的固有频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{0.1\,\mathrm{kg}\times g/1\,\mathrm{cm}}{2.5\,\mathrm{kg}}} = 2\sqrt{g}\,\mathrm{rad/s}$$

最后来计算 $h$：由式 (1) 可知激振力的振幅为

$$H = 2.5\,\mathrm{kg}\times\left(\frac{2\pi}{1.1\,\mathrm{s}}\right)^2\times 1\,\mathrm{mm} \implies h = H/2.5\,\mathrm{kg} = \left(\frac{2\pi}{1.1\,\mathrm{s}}\right)^2\times 1\,\mathrm{mm}$$

代入式 (2) 中即得：

$$B = \frac{\pi^2/1.1^2}{g-\pi^2/1.1^2}\,\mathrm{mm} = 4.9636\,\mathrm{mm}$$

## 解二-惯性系

设 $x$ 表示物体 C 离开其平衡位置的位移，$x_B$ 表示物体 B 的位移。假设两者均作简谐振动，形式如下：

$$x_B = A\sin(\omega t),\quad x = B\sin(\omega t)$$

根据题意，弹簧的劲度系数 $k$ 由静力平衡确定：

$$k = \frac{0.1\,\mathrm{kg}\cdot 9.8\,\mathrm{N/kg}}{1\,\mathrm{cm}} = 0.98\,\mathrm{N/cm}$$

考虑系统动力学行为，C 相对于 B 的相对位移为 $x - x_B = x - A\sin(\omega t)$，因此系统的运动方程为：

$$m\ddot{x} = -k(x - A\sin(\omega t))$$

若设解为：

$$x(t) = B\sin(\omega t)$$

将其代入运动方程，可得：

$$m(-B\omega^2\sin(\omega t)) = -k(B\sin(\omega t) - A\sin(\omega t))$$

化简后得到：

$$-mB\omega^2 = -k(B-A)$$

即：

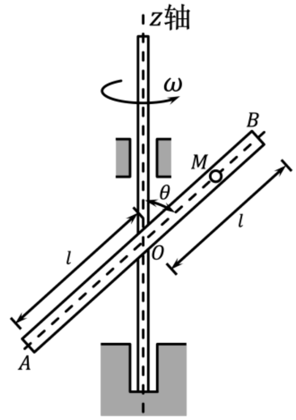
$$B = \frac{kA}{k-m\omega^2}$$

将角频率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 代入，最终结果为：

$$B = \frac{kA}{k-m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = 5.96\,\mathrm{mm}$$

## 题 16.27

如图所示，球 $M$ 质量为 $m$，重 $P$，在一光滑斜管中从点 $B$ 开始自由下滑。已知斜管 $AB$ 长为 $2l$，对铅直轴的转动惯量为 $I$，它与铅直轴的夹角为 $\theta$，斜管的初角速度为 $\omega_0$，摩擦不计。



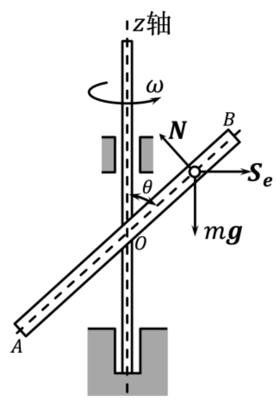

题 16.27 图

题 16.27 示意图

求：(1) 小球对点 $O$ 位置 $x$ 与斜管转速 $\omega$ 之间的关系；

(2) 小球沿管道的运动微分方程。

## 解




题 16.27 解图

(1)

设小球与 $O$ 点之间的距离为 $x$，则有：斜管与小球组成的系统对 $z$ 轴动量矩守恒

$$I\omega_0 + m\omega_0(l\sin\theta)^2 = I\omega + m\omega(x\sin\theta)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{I(\omega_0-\omega)+m\omega_0 l^2\sin^2\theta}{m\omega\sin^2\theta}}$$

(2)

在动系中有：

$$ma_r = F + N + S_e + S_k$$

$$S_e = m\omega^2 x\sin\theta$$

沿斜管方向投影，得到：

$$m\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} = -mg\cos\theta + m\omega^2 x\sin\theta\cdot\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{x} - \omega^2 x\sin^2\theta + g\cos\theta = 0$$

此即所求的运动微分方程。

# 第十七章 哈密顿力学

## 知识点

- 广义动量 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$，哈密顿量 $H = p\dot{q} - L$.
- $H$ 必须表示为 $H(q,p,t)$（消去 $\dot{q}$）

$$H(q_j, p_j, t) = -L(q_j, \dot{q}_j, t) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j$$

- 哈密顿正则方程

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

## 题 17.2

已知系统的拉格朗日函数具有下列各种形式，求哈密顿函数的表达式。

(1) $L = a\dot{x}^2 + b\dot{y}^2 - x^2 - cy^2 - xy$ （$a, b, c$ 为常数）；

(2)$L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1^2 - q_2^2 - \frac{1}{2}q_1q_2$；

(3)$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m(x^2 + y^2)\omega^2 + m(x\dot{y} - y\dot{x})\omega - \pi(x,y,z)$ （其中 $m, \omega$ 为常数）。

## 解

(1)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2a\dot{x} \implies \dot{x} = \frac{p_x}{2a}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2b\dot{y} \implies \dot{y} = \frac{p_y}{2b}$$

故

$$H = -L + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} = \frac{p_x^2}{4a} + \frac{p_y^2}{4b} + x^2 + cy^2 + xy$$

(2)

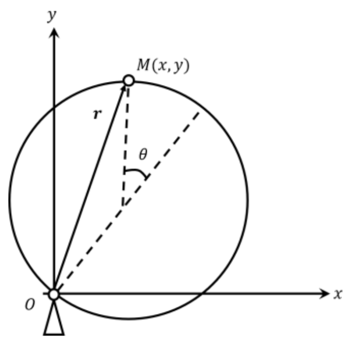
$$H = -L + p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 = \frac{1}{3}(p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2) + q_1^2 + q_2^2 + \frac{1}{2}q_1q_2$$

(3)

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \omega(yp_x - xp_y) + \pi(x,y,z)$$

## 题 17.6

半径为 $R$ 的光滑大圆环在水平面内以匀角速度 $\omega$ 绕环上一点 $O$ 转动。圆环上有一个小环 $M$ 可沿大环滑动，并可视为质点，其质量为 $m$ 。求小环沿大圆环切线方向运动的正则方程。




题 17.6 示意图

## 解

取大圆环为参考系，$\theta$ 为广义坐标，如图所示。在该参考系下，小圆环受惯性离心力 $\mathbf{F}_e = -m\omega^2\mathbf{r}$，其中 $\mathbf{r}$ 为小圆环相对大环上固定点的位矢。则有：

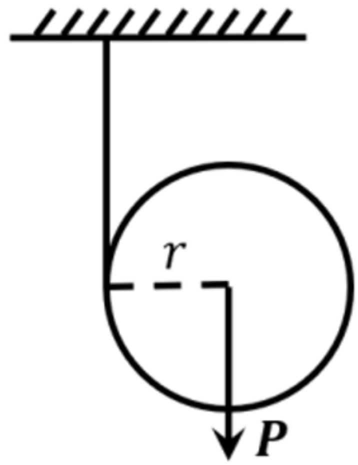
$$U = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = -m\omega^2 R^2(1+\cos\theta) \implies L = T - U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + m\omega^2 R^2(1+\cos\theta)$$

从而得到广义动量 $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \implies H = -L + p_\theta\dot{\theta} = \frac{p^2}{2mR^2} - m\omega^2 R^2(1+\cos\theta)$ 即得正则方程：

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{mR^2} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = m\omega^2 R^2 \sin\theta \end{cases}$$

## 题 17.9

均质圆柱体质量为 $m$，半径为 $r$，圆柱中部绕有细线，线的另一端固结在天花板上，圆柱体初始静止释放，在重力作用下运动，西线逐渐展开，下降过程中线保持铅直。试用正则方程求 $t = t_1$ 时圆柱的角速度 $\omega$ 和柱中心下降的高度 $h$。




题 17.9 示意图

## 解

在下降时，有：

$$h = r\theta \implies \dot{h} = r\dot{\theta} = r\omega$$

转动惯量 $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{4}m\dot{h}^2$, 故：

$$T = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3}{4}m\dot{h}^2$$

$$U = -mgh$$

$$L = T - U = \frac{3}{4}m\dot{h}^2 + mgh$$

可得广义动量：

$$p = \frac{3}{2}m\dot{h}$$

得哈密顿函数：

$$H = p\dot{h} - L = \frac{2}{3m}p^2 - \frac{1}{3m}p^2 - mgh$$

故有正则方程：

$$\begin{cases}\dot{h}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{2p}{3m}\\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial h}=mg\end{cases}$$

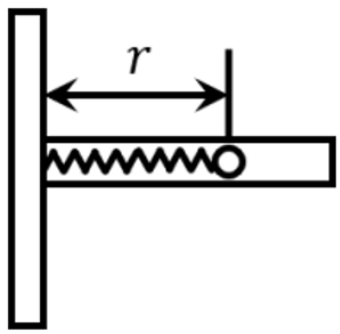
即得到 $\ddot{h}=\frac{2}{3}g \implies h=\frac{1}{3}gt^2$

故当 $t=t_1$ 时，

$$h=\frac{1}{3}gt_1^2,\omega=\frac{\dot{h}}{r}=\frac{2gt_1}{3r}$$

## 题 17.11

水平管中放入一光滑小球，质量为 $m$，小球用刚度系数为 $c$ 的弹簧与铅直轴相连接。当水平管绕管端的铅直轴以匀角速度 $\omega$ 旋转时，求质点相对运动的正则方程。




题 17.11 示意图

## 解

取小球离开轴线的距离 $r$ 为广义坐标，在与圆管固连的参考系下，有势能和动能：

$$U=-\frac{1}{2}m\omega^2r^2+\frac{1}{2}c(r-l_0)^2,\quad T=\frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

故有

$$L=\frac{1}{2}m\omega^2r^2-\frac{1}{2}c(r-l_0)^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \implies p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r}$$

故哈密顿函数

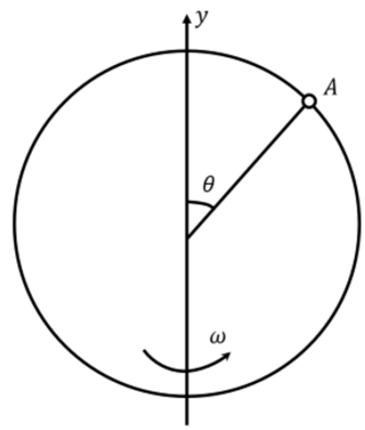
$$H=-L+p_r\dot{r}=\frac{1}{2}m\omega^2r^2+\frac{1}{2}c(r-l_0)^2+\frac{p_r^2}{2m}$$

正则方程：

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{p}_r=m\omega^2x-cx+cl_0$$

## 题 17.24

半径为 $a$ 的光滑圆环以匀角速如绕铅垂直直径旋转。圆环上有一质量为 $m$ 的小质点 $A$ 从圆环顶点沿环自由滑下，用哈密顿原理求质点 $A$ 的运动微分方程。设质点与环中心连线与铅垂直直径（向上为正向）的夹角为 $\theta$。




题 17.24 示意图

## 解

取图中 $\theta$ 为广义坐标，在与圆环固连的参考系下，有拉氏方程

$$L=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\omega^2a^2\sin^2\theta-mga(1+\cos\theta)$$

由哈密顿原理 $\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,\mathrm{d}t=0 \implies \delta L=0$，即 $L$ 满足欧拉方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

即得运动微分方程

$$\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta\cos\theta-\frac{g}{a}\sin\theta=0$$