

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20440

**אוטומטים ושפות פורמליות**  
חוברת הקורס – סתיו 2016א

כתב: יוסי קאופמן

אוקטובר 2015 - סמסטר סתיו – תשע"ו

**פנימי – לא להפצה.**

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

## תוכן העניינים

א	אל הסטודנט
ב	1. לוח זמנים ופעילויות
ד	2. תיאור המטלות
ד	מבנה המטלות
ד	ניקוד המטלות
ה	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
7	ממ"ן 13
9	ממ"ן 14
11	ממ"ן 15
13	ממ"ן 16
15	ממ"ן 17



## אל הסטודנט,

אני מקדם את פניך בברכה עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אוטומטים ושפות פורמליות".

בחוברת זו תמצא את הדרישות לקבלת נקודות זכות בקורס, לוח הזמנים ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט [www.openu.ac.il/Library](http://www.openu.ac.il/Library).

שעות הייעוץ שלי בכל יום ה', בשעות 10:30-12:30, בטלפון 09-7781237. פגישה יש לתאם מראש. ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: [yossi@openu.ac.il](mailto:yossi@openu.ac.il)

מילת התנצלות לסטודנטיות בקורס: פניות המופיעות בחומר הלימוד מנוסחות בלשון זכר - זהו למרבה הצער הנוהג המקובל. הפניות האלו מכוונות, כמובן, לכל קוראי החומר.

אני מאחל לך לימוד פורה ומהנה.

בברכה,

יוסי קאופמן

מרכז ההוראה בקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (20440 / א2016)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	23.10.2015-18.10.2015	1	מפגש ראשון	
2	30.10.2015-25.10.2015	2		
3	6.11.2015-1.11.2015	2	מפגש שני	
4	13.11.2015-8.11.2015	3		ממ"ן 11 11.11.2015
5	20.11.2015-15.11.2015	3	מפגש שלישי	
6	27.11.2015-22.11.2015	4		ממ"ן 12 25.11.2015
7	4.12.2015-29.11.2015	4	מפגש רביעי	
8	11.12.2015-6.12.2015 (ב-ו חנוכה)	5		ממ"ן 13 8.12.2015

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	18.12.2015-13.12.2015 (א-ב חנוכה)	5	מפגש חמישי	
10	25.12.2015-20.12.2015	6	מפגש שישי	ממ"ן 14 22.12.2015
11	1.1.2016-27.12.2015	6-7		ממ"ן 15 29.12.2015
12	8.1.2016-3.1.2016	7-8	מפגש שביעי	
13	15.1.2016-10.1.2016	8		ממ"ן 16 12.1.2016
14	22.1.2016-17.1.2016	9	מפגש שמיני	
15	29.1.2016-24.1.2016	9		ממ"ן 17 26.1.2016

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

## 2. תיאור המטלות

קרא היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה לך בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

### מבנה המטלות

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. בראש כל שאלה מצוין משקלה היחסי בקביעת ציון המטלה.

את הפתרונות למטלה עליך לרשום על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה.

אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, אל תהסס להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעות הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות והיחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות קודמות, שכבר נלמדו.

### ניקוד המטלות

בסמסטר זה מתקיים פיילוט בקורס בנושא הגשת מטלות.

ישנה חובת הגשת מטלות אולם ציוניהן לא ישוקללו בציון הסופי.

כדי לגשת למבחן חייב כל סטודנט להגיש לפחות 3 מטלות - כמובן שמומלץ לפתור ולהגיש את כל המטלות!

הסטודנטים יקבלו משוב על המטלות במטרה לשפר את ההבנה בקורס. הציון הפנימי שינתן על המטלות שיוגשו יהיה לצורך הערכה עצמית של הסטודנט בלבד ולא יכלל בציון הסופי. הציון הסופי יסתמך על הבחינה בלבד.

יש להדגיש כי לא ניתן להגיש מטלות לאחר המועד האחרון להגשה.

למטלות נקבע משקל 0, אך חובה להגיש לפחות 3 מהן

מאוד מומלץ לפתור ולהגיש את כולן!

ללא הגשת 3 מטלות לפחות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר



להלן פירוט הניקוד לכל מטלה :

ממ"ן	ניקוד
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0

### 3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

- א. הגשת לפחות 3 מטלות.
- ב. ציון של לפחות 60 נקודות בבחינת הגמר - ציון זה הוא גם הציון הסופי בקורס.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 1 ויחידה 2

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 0 נקודות

סמסטר: א' 2016 מועד אחרון להגשה: 11.11.2015

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

הערות:

1. אס"ם הוא סימון מקובל לאם ורק אם.
2. בחלק מהשאלות תתבקש לבנות אוטומט. במקרה שהפתרון מורכב, יש לצרף הסבר מילולי על דרך הבנייה ועל נכונות התשובה. תמיד רצוי להציג אוטומט פשוט וקומפקטי.

## שאלה 1 (13%)

נתונות השפות הבאות מעל  $\{a,b\}$ :

$$\begin{array}{lll} L_1 = \emptyset & L_3 = \{\varepsilon, a, aa, ab, abb\} & L_5 = \{\varepsilon, b, bbb, abab, abba, aabbb\} \\ L_2 = \{\varepsilon, aa\} & L_4 = \{aabb, aabbb, aa, aaa\} & L_6 = \{\varepsilon, bbaa, baba, aaab, aabba, aa\} \end{array}$$

א. מהן השפות הבאות?

$$1. L_4 L_4 \quad 2. (L_1 \cup L_2 \cup L_3)^R \quad 3. L_3 L_1 L_6$$

ב. נגדיר פעולת חזקה על שפות:  $\{y \in K \mid y \text{ שעבורה } |y| = |x|\}$   $L^K = \{x \in L \mid |y| = |x|\}$

מהי השפה  $L_4^{L_5}$ , ומהי השפה  $L_6^\emptyset$ ?

## שאלה 2 (14%)

תהיינה  $L_1, L_2$  ו-  $L_3$  שפות מעל א"ב  $\Sigma$ . הוכח או הפרך:

$$א. (L_1 \cup L_2)L_3 = L_1L_3 \cup L_2L_3$$

$$ב. (L_1 \cap L_2)L_3 = L_1L_3 \cap L_2L_3$$

הדרכה: כדי להוכיח שוויון יש להוכיח את שני כיווני ההכלה בין השפות הנתונות.

כדי להפריך שוויון מספיק להראות מקרה פרטי של השפות  $L_1, L_2$  ו-  $L_3$ , ולהציג מילה לדוגמה שנמצאת באחת השפות (המוגדרות מצדי השוויון) אך לא בשניה.

### שאלה 3 (18%)

יחס שקילות ב- $\Sigma^*$  ייקרא אינווריאנטי מימין אם"ם מתקיים:  $xzRyz \Leftarrow xRy$ . לכל  $z \in \Sigma^*$ .  
 לגבי כל אחד משלושת היחסים הבאים ב- $\{a,b\}^*$  ענה: האם הוא יחס שקילות? (ענה כן או לא - אם לא, אילו תכונות לא מתקיימות - טרנזיטיביות, רפלקסיביות או סימטריות? הצג דוגמה נגדית לכל תכונה שלא מתקיימת); אם הוא יחס שקילות, האם הוא אינווריאנטי מימין? אם הוא יחס שקילות אינווריאנטי מימין, הוכח שהוא אכן אינווריאנטי מימין, ולא - הצג דוגמה נגדית.  
 א.  $xRy$  אם"ם  $|x| \leq |y|$ .  
 ב.  $xRy$  אם"ם האות האחרונה שלהן קיימת וזהה או או שאורכי שתייהן 0.

### שאלה 4 (16%)

בנה אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים המקבלים את השפות הבאות מעל  $\Sigma = \{a,b\}$ :  
 א. כל המילים שבהן יש תת-מילה  $abb$ , ואין בהן תת-מילה  $aa$ .  
 ב. כל המילים שבהן לפני כל מופע של  $bb$  (אם יש) יש בצמוד לפניו מופע של  $aba$ .

### שאלה 5 (17%)

תהי  $w$  מילה מעל הא"ב  $\{0,1\}$  שלילה של  $w$  -  $Neg(w)$  - היא המילה המתקבלת מ- $w$  ע"י החלפת כל 0 ב-1, וכל 1 ב-0 (1's complement של מערכות ספרתיות). אם למשל  $w=001$ , אז  $Neg(w)=110$ .  
 לכל שפה  $L$  מעל הא"ב  $\{0,1\}$ ,  $Neg(L) = \{w \mid Neg(w) \text{ belongs to } L\}$ .  
 א. האם קיימת שפה  $L$  מעל  $\{0,1\}$  שעבורה  $Neg(L) = \bar{L}$ ?  
 ב. האם קיימת שפה  $L$  מעל  $\{0,1\}$  שעבורה  $Neg(L) = \bar{L} - \{\varepsilon\}$ ?

### שאלה 6 (22%)

א. נתון אוטומט סופי דטרמיניסטי  $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ . מציעים לבנות אוטומט סופי דטרמיניסטי  $B = (\Sigma, Q, q_0, F \cap (Q - \{q_0\}), \delta)$ . האם  $L(B) = L(A) \cap \Sigma^+$ ? נמק.  
 ב. נתון אוטומט סופי דטרמיניסטי  $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ .  
 בנה באמצעות אוטומט סופי דטרמיניסטי  $B$ , המקבל את שפת כל המילים ב- $L(A)$  שאורכן שונה מ-1.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

משקל המטלה: 0 נקודות

מספר השאלות: 7

מועד אחרון להגשה: 25.11.2015

סמסטר: א 2016

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

## הערות:

1. בחלק מהשאלות תתבקש לבנות אוטומט סופי או לרשום ביטוי רגולרי. צרף לפתרון הסבר מילולי המבהיר את דרך מחשבתך ומנמק את נכונות הפתרון.
2. השם "אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי" מתייחס הן לאוטומט כזה עם מסעי- $\epsilon$ , הן לאוטומט כזה בלי מסעי- $\epsilon$ .
3. אוטומט סופי דטרמיניסטי הוא מקרה פרטי של אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי. לפיכך כשהנך מתבקש לבנות אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מותר שהאוטומט כן יהיה דטרמיניסטי, ואולם, רצוי שהאוטומט יהיה פשוט ככל האפשר ולהשגת מטרה זו, במקרים רבים, האי-דטרמיניזם עוזר.
4. מותר לסמן בקיצור את השפה שמציין ביטוי רגולרי  $r$  על-ידי  $r$  עצמו - אין צורך בסימון המלא  $L[r]$ .

## שאלה 1 (28%)

בנה אוטומטים סופיים לא-דטרמיניסטיים המקבלים את השפות הבאות:

1. שפת כל המילים, מעל  $\Sigma = \{a, b\}$ , המתחילות ב- $bab$  ומסתיימות ב- $b$ .
  2. שפת כל המילים, מעל  $\Sigma = \{a, b, c\}$ , מן הצורה  $w = w_1 w_2 w_3$  שמקיימות:  $w_1 \in a^*$ ,  $w_3 \in c^*$ ,  $w_2 \in b^*$  ו- $|w|$  זוגי.
  3. שפת כל המילים, מעל  $\Sigma = \{a, b\}$ , שבהן יש לפחות שני רצפים  $aba$ .
- הערה: גם מילה שיש בה תת-מילה  $ababa$  בשפה, כי תת-מילה זו מכילה שני רצפים של  $aba$ .

**שאלה 2 (20%)**

לפניך 3 זוגות של ביטויים רגולריים. לגבי כל זוג קבע אם הביטויים מציינים אותה שפה. אם התשובה חיובית הוכח זאת, ולא - נמק בקצרה את קביעתך. הערה: בספר מפרקים בהוכחה באינדוקציה את המילה לאות אחרונה וכל השאר. לעתים נח יותר לפרק את המילה לאות ראשונה וכל השאר.

א. 
$$\begin{cases} (0(10^*)^*)^* + 1^* \\ (0+1)^* \end{cases}$$

ב. 
$$\begin{cases} (0+1)^+ \\ (0^*1)^*(1^*0)^+ + (0^*1)^+ \end{cases}$$

ג. 
$$\begin{cases} 1^*(0^*10^*)^* \\ (101^*)^*1^* \end{cases}$$

**שאלה 3 (10%)**

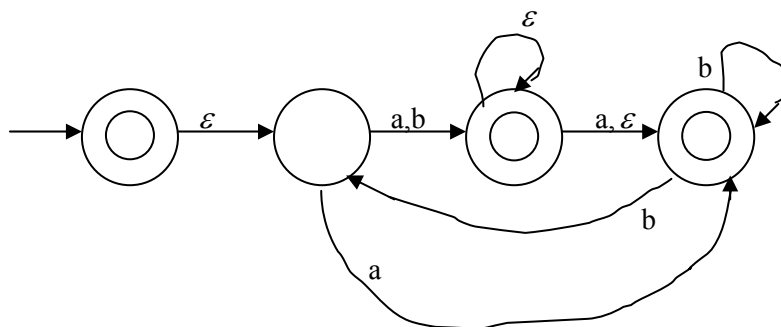
רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל  $\Sigma = \{a, b\}$  שאין בהן תת-מילה bab, ושהן מתחילות ברצף של aa או ברצף של bbb.

**שאלה 4 (10%)**

הצג אלגוריתם המקבל כקלט ביטוי רגולרי r שהפלט שלו הוא ביטוי רגולרי המציין את השפה  $\overline{L[r]}$ .

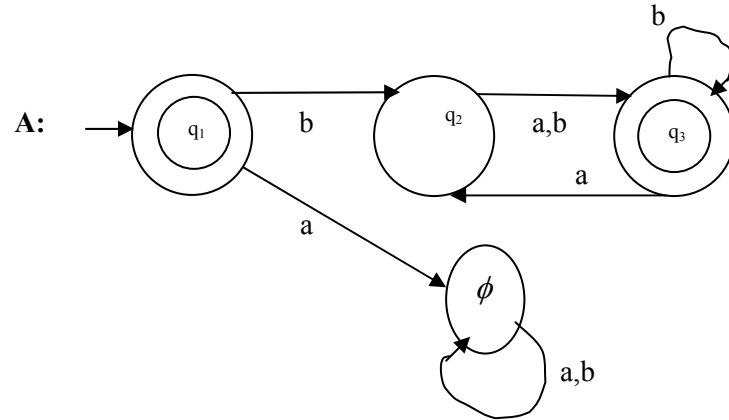
**שאלה 5 (10%)**

בנה באמצעות האלגוריתמים שביחידה אוטומט סופי דטרמיניסטי השקול לאוטומט הסופי הלא-דטרמיניסטי הבא:



שאלה 6 (10%)

רשום ביטוי רגולרי המציין את  $L(A)$  זו, עפ"י האלגוריתם המוצג במשפט 3.8 ובדוגמא 3.16 :



שאלה 7 (12%)

יהי  $r$  ביטוי רגולרי. תהי  $L$  שפה מעל  $\Sigma$  שמציין הביטוי הרגולרי  $r\Sigma^*$ .  
הוכח שאם  $L \neq \Sigma^*$  ו-  $L \neq \emptyset$  אז לא קיים ביטוי רגולרי  $s$  כך ש-  $s\Sigma^*$  מציין את  $\bar{L}$ .





# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 4

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 0 נקודות

סמסטר: 2016 מועד אחרון להגשה: 8.12.2015

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

**הערה:** אחת הדרכים להוכיח ששפה היא רגולרית, היא בניית אוטומט (או הצגת ביטוי רגולרי).  
במקרה שבחרת בדרך זו אינך נדרש להוכיח שאכן השפה שהאוטומט מקבל (או השפה שהביטוי יוצר) שווה לשפה המבוקשת.  
ואולם, הגדר את האוטומט במדויק, באופן פורמלי, וכן הסבר מדוע הבנייה מתאימה לשפה המבוקשת.

## שאלה 1 (16%)

הוכח שהשפה הבאה אינה רגולרית:

$$L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w = dv; v \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) \cdot \#_c(w) < \#_b(w)\}$$

## שאלה 2 (16%)

הוכח שהשפה הבאה אינה רגולרית:

$$L = \{w \in \{x, y\}^* \mid w = x^k (yxyxy)^{m!}, k, m \geq 2$$

או

$$w = y^{2^l}, l \geq 2 \}$$

**שאלה 3 (17%)**

תהי  $L$  שפה רגולרית מעל  $\Sigma$ . הוכח שגם השפה הבאה רגולרית:

$$\hat{L} = \left\{ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \mid \begin{array}{l} \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \in L^R, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \Sigma, 0 \leq n \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \Sigma, \\ \mu_1 \sigma_1 \xi_1 \mu_2 \sigma_2 \xi_2 \dots \mu_n \sigma_n \xi_n \in L \end{array} \right\}$$

ונחליט שאם  $\varepsilon \in L$  אז גם  $\varepsilon \in \hat{L}$ .

**שאלה 4 (17%)**

תהי  $L$  שפה רגולרית מעל  $\Sigma$ . הוכח שגם השפה הבאה רגולרית:

$$\frac{1}{3}L = \{w \in \Sigma^* \mid wxy \in L \mid x|=|y|=|w| \text{ שמקיימות } y \text{ ו- } x \text{ מילים } y \text{ ו- } x \text{ שמקיימות}\}$$

**הדרכה**

יהי  $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$  אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את  $L$ , ויהיו  $p, q \in Q$ . הגדר

$$L_{p,q} = \left\{ w \mid \begin{array}{l} |x|=|y|=|w| \text{ שמקיימות } y \text{ ו- } x \text{ מילים } y \text{ ו- } x \text{ שמקיימות} \\ \delta(q, y) \in F \text{ ו- } \delta(q_0, w) = p \end{array} \right\}$$

(השלם לבד את סימני השאלה)

הוכח ש- $L_{p,q}$  רגולרית, והסתמך על כך להוכחת רגולריות  $\frac{1}{3}L$ .

**שאלה 5 (34%)**

1. רשום ביטוי רגולרי המציין את השפה  $0^+01^*0^+$ .

2. הוכח שרגולריות  $L$  גוררת את רגולריות  $\vec{L} = \{xy \in \Sigma^* \mid yx \in L\}$ .

3. היו שהציעו את הפתרון הבא:  $\vec{L} = (\Sigma^* \setminus L) \cdot (L / \Sigma^*)$

ומסגירות לשרשור ולחלוקה מימין ומשמאל  $\vec{L}$  רגולרית.

מהי השגיאה בפתרון זה?

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

משקל המטלה: 0 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 22.12.2015

סמסטר: א 2016

י.ק

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

## שאלה 1 (48%)

רשום את מחלקות השקילות של היחס  $R_L$  עבור כל אחת מהשפות הבאות שמעל  $\Sigma = \{a, b\}$ , והצג מילים מפרידות בין מחלקות השקילות.

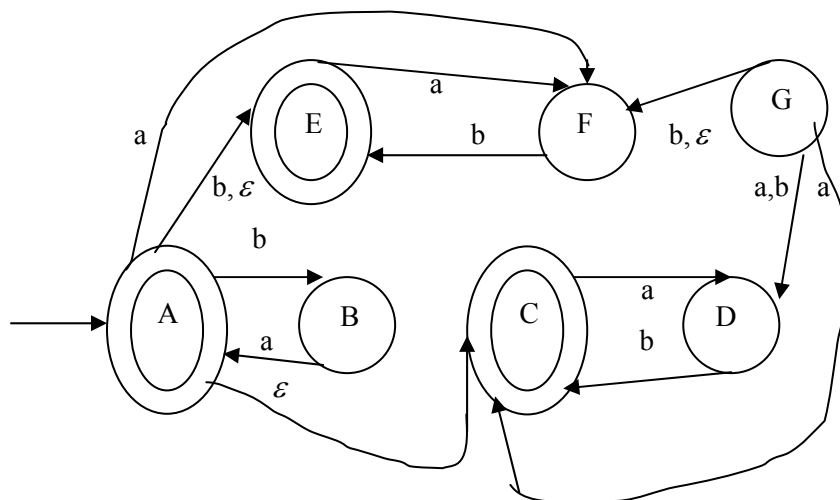
א.  $L = \{b, bb, bbb, bba\}$

ב. קבוצת כל המילים המתחילות ומסתיימות ב-  $ba$ .

ג.  $L = \{c^i b^i a^i \mid 1 \leq i\}$

## שאלה 2 (18%)

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי קשיר ומצומצם השקול לאוטומט הסופי הבא:



**שאלה 3 (16%)**

הוכח באמצעות משפט נרוד שהשפה  $L = \{0^r 1^s 2^t 0^{t+3} \mid 1 \leq r, s, t\}$  אינה רגולרית.

**שאלה 4 (18%)**

יהי  $\Sigma$  אי"ב המקיים  $|\Sigma| \geq 2$ ,  $0, 1 \in \Sigma$ . כמה מחלקות שקילות יש ליחס  $R_L$ , עבור  $L$  שמציין הביטוי הרגולרי  $\Sigma\Sigma^+10\Sigma$ ? לכל מחלקת שקילות כזו הצג מילה אחת השייכת למחלקה. צרף הסבר.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 0 נקודות

סמסטר: 2016 מועד אחרון להגשה: 29.12.2015

י.ק

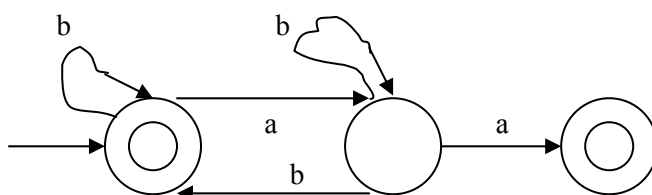
אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

הערה: כשהנך מתבקש להציג דקדוק מותר לך להשתמש בכללים מהצורה  $A \rightarrow \varepsilon$  גם ל-  $A \neq S$ .

שאלה 1 (20%)

א. הצג דקדוק לינארי ימני היוצר את השפה שמקבל האוטומט הסופי הבא:



ב. בנה אוטומט סופי המקבל את השפה שיוצר הדקדוק שכללי הגזירה שלו הם:

$$S \rightarrow bS \mid aR$$

$$R \rightarrow bS \mid aaR \mid aa \mid b$$

שאלה 2 (20%)

הצג דקדוק חופשי-הקשר היוצר את השפה  $\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

שאלה 3 (20%)

הצג דקדוק חופשי-הקשר היוצר את השפה

$$\{dw_1dw_2d\dots w_nd \mid 4 \leq n;$$

$$w_k \in \{a,b,c\}^*, k \text{ לכל};$$

$$\mid w_k \mid = \#_c(w_{k+2}) \text{ ש עבורו } 2 \leq k \leq n-2, k \text{ קיים} \}$$

**שאלה 4 (20%)**

כללי הגזירה של דקדוק חופשי-הקשר הם :

$$S \rightarrow ABC \mid bB \mid D$$

$$A \rightarrow a \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow bB \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow c$$

$$D \rightarrow aD \mid aDc \mid Dc \mid ac \mid a \mid c$$

א. האם הדקדוק חד-משמעי?

ב. מהי השפה שיוצר דקדוק זה? תאר את השפה באופן קצר וקולע ככל שתוכל.  
הצדק את תשובותיך.

**שאלה 5 (20%)**

הצג דקדוק היוצר את שפת כל המילים שצורתן  $x+yz$ , כאשר  $x$  הוא מספר אי-שלילי בבסיס 2 (למשל 000111 שערכו 7, או 1101 שערכו 13),  $y$  גם הוא מספר אי-שלילי בבסיס 2, לשניהם אותו מספר ספרות; ו- $z$  הוא האות O במקרה שתוצאת החיבור אי-זוגית, או האות E במקרה שתוצאת החיבור זוגית. דוגמא למילה בשפה:  $110000+000100E$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 7 וסעיפים 8.1, 8.2

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 0 נקודות

סמסטר: א 2016 מועד אחרון להגשה: 12.1.2016

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

**להזכיר:** הבניות צריכות להיות פשוטות ובהירות, ולכן ברור שכשהנך מתבקש להציג דקדוק או אוטומט לשפה מסויימת, הכוונה היא שתבנה זאת ישירות, ולא תעבור מדקדוק לאוטומט או להפך...

**הערה:** קל יותר לתכנן אוטומט-מחסנית באיור ולא כפונקציית דלתא - ראה את החוקים באתר הקורס.

## שאלה 1 (11%)

בדקדוק חופשי-הקשר  $V = \{S, M, N, W, X, Y, Z\}$ ,  $T = \{0, 1\}$ ,  
וכללי הגזירה הם:

$$S \rightarrow M \mid XN \mid W \mid 0N \mid 1Z1$$

$$M \rightarrow 0M0 \mid N$$

$$N \rightarrow N0 \mid 0$$

$$W \rightarrow 0W \mid 00W0$$

$$X \rightarrow 0X1 \mid 0 \mid 0Y0$$

$$Z \rightarrow W$$

א. האם הדקדוק חד-משמעי? נמק.

ב. הצג דקדוק שקול שאין בו סימנים מיותרים, כללי-יחידה וכללי- $\varepsilon$ .

**שאלה 2 (13%)**

בדקדוק חופשי-הקשר  $V = \{S, W, X, Y, Z\}$  ,  $T = \{0, 1\}$  ,  
 וכללי הגזירה הם :

$$S \rightarrow 0W11 \mid 0X1 \mid 0Y$$

$$W \rightarrow S \mid Z$$

$$X \rightarrow S \mid W$$

$$Y \rightarrow 1$$

$$Z \rightarrow X$$

- א. הצג דקדוק שקול בצורה הנורמלית של חומסקי.  
 ב. מהי השפה שיוצר דקדוק זה?

**שאלה 3 (19%)**

בנה אוטומט-מחסנית המקבל ע"י ריקון המחסנית את השפה

$$L = \{a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \dots a^{i_m} b^{j_m} \mid$$

$$1 \leq m ;$$

$$1 \leq j_k \leq i_k : k \text{ לכל} ;$$

$$\} \text{ קיים } k \text{ שעבורו } j_k < i_k$$

**שאלה 4 (19%)**

בנה אוטומט-מחסנית המקבל ע"י הגעה למצב מקבל את השפה

$$\{dw_1 dw_2 d \dots w_n d \mid$$

$$3 \leq n ;$$

$$w_k \in \{a, b, c\}^*, k \text{ לכל} ;$$

$$\} \text{ קיים } k, 1 \leq k \leq n-2, \text{ שעבורו } |w_k| = \#_c(w_{k+2})$$

**שאלה 5 (19%)**

בנה אוטומט-מחסנית **דטרמיניסטי** המקבל את השפה  $L = \{a^k b^i c^j d^{j-i} e^k \mid 1 \leq i \leq j, 2 \leq k\}$

**שאלה 6 (19%)**

בהינתן אוטומט-מחסנית M המקבל שפה L על-ידי הגעה למצב מקבל, בנה אוטומט מחסנית M\* המקבל את השפה L\*.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידות 8-9

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 0 נקודות

סמסטר: א' 2016 מועד אחרון להגשה: 26.1.2016

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

ההערה המופיעה בתחילת ממ"ן 13 תקפה גם כאן, לגבי שפות חופשיות-הקשר ושפות לינאריות (עם דקדוקים או אוטומטי-מחסנית).

שאלה 1 (13%)

הוכח שהשפה  $L = \{a^i b^{i+j} c^j \mid 1 \leq i \leq j\}$  אינה חופשית-הקשר.

שאלה 2 (14%)

הוכח שמשפחת השפות חופשיות-ההקשר אינה סגורה למקסימום.

שאלה 3 (18%)

הוכח באמצעות תכונות סגירות, ואחת השפות שבממ"ן 16 שהשפה הבאה  $\hat{L} = \{a^i b^2 c^j \mid i = 2j\}$  חופשית-הקשר.

שאלה 4 (33%)

הוכח כל אחת מהטענות הבאות, או הצג דוגמא נגדית, ונמק את היותה דוגמא נגדית:

א.  $L$  היא שפה חופשית-הקשר שאינה רגולרית.  $G$  היא שפה שאינה חופשית-הקשר. טענה:

$L \cap G$  היא שפה שאינה חופשית-הקשר.

ב.  $L_1$  ו- $L_2$  הן שפות חופשיות-הקשר שאינן רגולריות המקיימות  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ . טענה:

$L_1 \cap L_2$  היא שפה חופשית-הקשר שאינה רגולרית.

ג.  $L$  היא שפה רגולרית מעל  $\Sigma$ .  $G$  היא שפה שאינה חופשית-הקשר. נגדיר הצבה  $f$ : לכל

$\sigma \in \Sigma$   $f(\sigma) = G$ . טענה:  $f(L)$  היא שפה שאינה חופשית-הקשר.

שאלה 5 (22%)

תהי  $L$  שפה חופשית-הקשר מעל  $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$ . הוכיחו שגם השפה  $L''$  הבאה חופשית-הקשר:  $L''$  היא שפת כל המילים שנוצרות ממילים ב- $L$ , באורך זוגי, גדול או שווה ל-4, על-ידי החלפת שתי אותיות במילה - אחת ב- $z$ , והאחרת ב- $a$ . האות שהוחלפה ב- $z$  היתה כמובן שונה מ- $z$ , והאות שהוחלפה ב- $a$  היתה כמובן שונה מ- $a$ .