

האוניברסיטה הפתוחה

20407

**מבני נתונים**

**ומבוא לאלגוריתמים**

חוברת הקורס – אביב 2016

כתב: ד"ר ג'ק וינשטין

מרץ 2016 – סמסטר אביב – תשע"ו

**פנימי – לא להפצה.**

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

## תוכן העניינים

א	אל הסטודנט
ב	1. לוח זמנים ופעילויות
ד	2. תיאור המטלות
ד	2.1 מבנה המטלות
ד	2.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות
ה	2.3 ניקוד המטלות
ה	2.4 הנחיות לכתיבת אלגוריתמים
ו	2.5 הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה
ח	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
7	ממ"ן 14 - פרויקט 1
9	ממ"ן 15
11	ממ"ן 16
13	ממ"ן 17
15	ממ"ן 18 - פרויקט 2



## אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך לקורס "מבני-נתונים ומבוא לאלגוריתמים" באוניברסיטה הפתוחה. על מנת לסייע לך לעבור את הקורס בהצלחה, ברצוננו להפנות את תשומת לבך למספר נקודות חשובות:

- כידוע לך, נוכחות במפגשי ההנחיה אינה חובה. יחד עם זאת, **מומלץ מאד** להגיע באופן סדיר למפגשי ההנחיה. המפגשים כוללים תרגול רב והשתתפות בהם תסייע לך בפתרון המטלות. כמו כן, ניסיון העבר מלמד, כי קיים מתאם גבוה בין נוכחות סדירה במפגשי ההנחיה לבין הצלחה במבחן הסופי.
- במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. כדי להיות זכאי לגשת לבחינה, יש להגיש שלוש מתוך המטלות 11, 12, 13, 15, 16, 17. פרויקט 1 (ממ"ן 14) הוא אופציונלי; פרויקט 18 הוא חובה, אך ניתן להגיש אותו גם אחרי מועדי א' של הבחינות. הכנת תרגילי הבית מהווה הכנה מצוינת לבחינה ולכן מומלץ להגיש כמה שיותר תרגילים. (כל ממ"ן נוסף שיוגש מעבר למינימום הנדרש יוכל רק **לשפר** את ציון המגן).

יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ס בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט [www.openu.ac.il/Library](http://www.openu.ac.il/Library).

מומלץ לעקוב אחרי ההודעות המתפרסמות בלוח ההודעות שבאתר. מאגר המשאבים שבאתר מתעדכן באופן שוטף במהלך הסמסטר, והוא מכיל פתרונות לשאלות מספר הלימוד, בחינות לדוגמה וכדומה.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות למנחים בשעות ההנחיה הטלפונית שלהם, או אל מרכז הקורס ד"ר ג'ק וינסטין ביום ב' בשעות 17:00-15:00 בטלפון 09-7781270, או במייל [jack-weinstein@hotmail.com](mailto:jack-weinstein@hotmail.com) פגישות יש לתאם מראש.

### לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר.

הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

אנו מאחלים לך לימוד פורה ומהנה.

בברכה,

ד"ר ג'ק וינסטין  
מרכז ההוראה בקורס

א

**לוח זמנים ופעילויות** (20407 \ 2016ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	11.3.2016-6.3.2016	פרקים א', ב' (מדריך הלמידה) פרקים 1, 2, 3 (ספר הלימוד)	מפגש ראשון	
2	18.3.2016-13.3.2016	פרק ג' (מדריך הלמידה) פרק 4 (ספר הלימוד)		ממ"ן 11 20.3.2016
3	25.3.2016-20.3.2016 (ה-ו פורים)	פרק ד' (מדריך הלמידה) פרק 6 (ספר הלימוד)	מפגש שני	
4	1.4.2016-27.3.2016	פרק ה' (מדריך הלמידה) פרק 7 (ספר הלימוד)		ממ"ן 12 3.4.2016
5	8.4.2016-3.4.2016	פרקים ה', ו' פרקים 7, 9	מפגש שלישי	
6	15.4.2016-10.4.2016	פרק ו' (מדריך הלמידה) פרק 9 (ספר הלימוד)		ממ"ן 13 17.4.2016
7	22.4.2016-17.4.2016 (ו ערב פסח)	פרק ז' (מדריך הלמידה) פרק 8 (ספר הלימוד)		
8	29.4.2016-24.4.2016 (א-ו פסח)	פרקים ז', ח' פרקים 8, 10	מפגש רביעי	ממ"ן 14 1.5.2016
9	6.5.2016-1.5.2016 (ה יום הזכרון לשואה)	פרק ח' (מדריך הלמידה) פרק 10 (ספר הלימוד)		

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
10	13.5.2016-8.5.2016 (ד יום הזיכרון) (ה יום העצמאות)	פרק ט' (מדריך הלמידה) פרק 11 (ספר הלימוד)	מפגש חמישי	ממ"ן 15 15.5.2016
11	20.5.2016-15.5.2016	פרק י' (מדריך הלמידה) פרק 12 (ספר הלימוד)		
12	27.5.2016-22.5.2016 (ה ל"ג בעומר)	פרק י"א (מדריך הלמידה) פרק 13 (ספר הלימוד)	מפגש שישי	ממ"ן 16 29.5.2016
13	3.6.2016-29.5.2016	פרק י"א (מדריך הלמידה) פרק 13 (ספר הלימוד)		
14	10.6.2016-5.6.2016 (א יום ירושלים)	פרק י"ב (מדריך הלמידה) פרק 14 (ספר הלימוד)		ממ"ן 17 12.6.2016
15	17.6.2016-12.6.2016 (א שבועות)	פרק י"ב (מדריך הלמידה) פרק 14 (ספר הלימוד)	מפגש שביעי	
16	24.6.2016-19.6.2016	חזרה		ממ"ן 18 28.7.2016

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

## 2. תיאור המטלות

קרא היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות

חוברת זו מכילה שש מטלות "יבשות" ושני פרויקטים שניתן להגיש במהלך הקורס. **פרויקט ההרצה 2 הוא חובה!** מבין שש המטלות הנותרות יש לפתור **שלוש לפחות**.

### 2.1 מבנה המטלות

#### ממ"ן רגיל

מטלה זו מורכבת מכמה שאלות. פתרון השאלות במטלה כזו אינו דורש הרצת תוכניות במחשב. את הפתרון יש לכתוב **בעט** על דף נייר, **בכתב ברור** ובצורה מסודרת. רצוי לכתוב ברווחים ולהשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרונות למטלה.) אם שאלה כלשהי בממ"ן אינה ברורה די הצורך, תוכל להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס, או להתקשר לאחד המנחים (בשעת ההנחיה הטלפונית).

#### פרויקט הרצה

במטלה כזו עליך לכתוב ולהריץ במחשב תוכנית בשפת C/C++ או Java. מובן שעל התוכנית לעבור הידור (קומפילציה) ולבצע את הנדרש ממנה ללא טעויות. עליך לשלוח למנחה:

1. הדפסה של קובץ התוכנית
2. דוגמאות מייצגות של קלטים/פלטים אפשריים
3. קובץ התוכנית וקובץ exe של התוכנית.

**הערה:** מומלץ להתחיל לעבוד על הפרויקטים לפחות שבועיים לפני מועד ההגשה.

### 2.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות

מ ט ל ה	חומר הלימוד הנדרש לפתרונה (במדריך הלמידה)
ממ"ן רגיל 11	פרקים 1, 2, 3
ממ"ן רגיל 12	פרקים 4, 6
ממ"ן רגיל 13	פרקים 7, 9
ממ"ן 14 - פרויקט הרצה 1	
ממ"ן רגיל 15	פרקים 8, 10
ממ"ן רגיל 16	פרקים 11, 12
ממ"ן רגיל 17	פרקים 13, 14
ממ"ן 18 - פרויקט הרצה 2	פרקים 13, 14

**הערות:** 1. לצורך פתרון המטלה, יש להשתמש רק בחומר שנלמד עד למועד הגשת המטלה ולא בחומר הנמצא בפרקים מתקדמים יותר.



2. כעיקרון, בעת פתרון שאלות, אין להסתמך על תוצאות משאלות בלתי-פתורות בספר הלימוד בלי להוכיחן, אלא אם ניתן לכך היתר מפורש, או אם פתרונות לאלה מופיעים במדריך הלמידה, מחומר הנלמד במפגשי ההנחיה, באתר הקורס וכדומה (ובמקרה זה יש להזכיר את המקור עליו מסתמכים). עם זאת, ניתן לחרוג מכלל זה, ככל שמדובר בתוצאות מוכרות וקלות, או שאין בהן כדי להפוך את השאלה המקורית לקלה מדי ולחסרת עניין.

### 2.3 ניקוד המטלות

משקל כל אחד מהממ"נים 11, 12, 13, 15, 16, 17 - 4 נקודות.

משקלו של פרויקט 1 (ממ"ן 14) - 2 נקודות

משקלו של פרויקט 2 (ממ"ן 18) - 4 נקודות

כאמור, חובה להגיש את ממ"ן 18 ועוד שלושה ממ"נים רגילים. כלומר, כדי לגשת לבחינה עליך לצבור לפחות 16 נקודות מתוך 30 הנקודות האפשריות.

הכנת המטלות הרגילות חייבת להיעשות על-ידי כל תלמיד **בנפרד**. במקרה שתוגשנה שתי מטלות זהות, המטלות תיפסלנה ותוגש תלונה לוועדת המשמעת.

**הכנת הפרויקטים (ממ"נים 14 ו-18) יכולה להיעשות בזוגות.**

#### לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן תצליחו להשיב באופן חלקי בלבד.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי. ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

**זכרו!** ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

## 2.4 הנחיות לכתיבת אלגוריתמים

בחלק מהשאלות בממ"נים הרגילים יש לכתוב **אלגוריתם**. להלן מספר הנחיות:

1. הסבר בקצרה את אופן הפעולה של האלגוריתם (אלא אם כן האלגוריתם מאוד פשוט). אלגוריתם ללא הסבר - לא יתקבל!
2. כתוב את האלגוריתם בפסידו-קוד, בדומה לספר. מותר לשלב בפסידו-קוד הוראות בעברית, במידה שהמימוש שלהן חד-משמעי וברור. (לדוגמה: ניתן לכתוב "בחר את האיבר הראשון ברשימה; אם הוא גדול מ-7 אז...").
3. אסור בשום אופן לכתוב תוכניות בשפת תכנות במקום בפסידו-קוד.
4. אם נתבקשת להוכיח את נכונות האלגוריתם עשה זאת בצורה פורמלית ומדויקת (למשל, תוך שימוש באינדוקציה או בכלים מדויקים אחרים). **גם אם לא** נתבקשת להוכיח נכונות, יש להסביר באופן כללי מדוע האלגוריתם עובד כשורה.
5. בכל מקרה (גם אם הדבר לא צוין במפורש) יש לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם. כמו כן, **תמיד** נסה להגיע לאלגוריתם יעיל ככל שניתן.

## 2.5 הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה

ההנחיות נחלקות לשני נושאים עיקריים:

1. כתיבת הקוד: תכנות פשוט וקריא, מודולריות, תכנות מלמעלה למטה.
2. תיעוד: תיעוד כללי, תיעוד בגוף התוכנית.

### 1. כתיבת הקוד

#### תכנות פשוט וקריא

לאחר קריאת התיעוד, על התכנית להיות מובנת גם למי שלא היה שותף לכתיבתה!

לכן יש להקפיד על הכללים הבאים:

- א. יש לתת למשתנים שמות משמעותיים.
- ב. אין להשתמש באותו משתנה למטרות שונות (יוצאים מן הכלל בעניין זה הם משתנים המשמשים כאינדקסים).
- ג. אם משתנה מקבל במהלך התכנית ערכים בתחום מסוים, יש להגדיר תחום זה.
- ד. כדאי להשתמש ב- `enumerated type` בעל משמעות בכל מקום שאפשר. למשל, בשפת C/C++, במקום: `int month[12]` נשתמש ב- `enum month = {jan, feb, ..., dec}`.
- ה. מומלץ להעביר פרמטרים בין הפונקציות השונות ומותר להשתמש במשתנים גלובליים במקרה הצורך.

## מודלריות

את התוכנית יש לחלק לפונקציות בהתאם לכללים הבאים :

- א. אם קטע קוד או פעולה חוזרים על עצמם בשינויים קלים, יש לכתוב אותם פעם אחת כפונקציה.
- ב. מספר המשפטים בפונקציה צריך להיות מוגבל, כך שניתן לקרוא ולהבין את פעולתה בקלות.
- ג. יש להשתדל לרכז את פעולות הקלט/פלט בתוך פונקציות ספציפיות למטרות אלו.
- ד. הפונקציה הראשית צריכה להיות מורכבת אך ורק מקריאות לפונקציות.

## תכנות מלמעלה למטה (Top-Down)

לאחר כתיבת האלגוריתם לפתרון הבעיה המוצגת בממ"ן, יש "לתרגם" את האלגוריתם לתוכנית מחשב.

רצוי לכתוב את התוכנית באופן הבא :

- שלב א - תכנון המבנה הכללי של התוכנית, וחלוקה לפונקציות עיקריות (מודולים).
- שלב ב - תכנון כל מודול וחלוקה לתת-מודולים. (יש להחליט בשלב זה אילו ערכים מועברים בין המודולים).
- שלב ג - כתיבת הקוד לתוכנית בסדר שבו היא תוכננה : מתחילים בפונקציה הראשית ומסיימים בפונקציות העזר.
- שלב ד - ניפוי שגיאות, בדיקת נכונות התוכנית באמצעות הרצתה על קלטים שונים, כתיבת התייעוד.

## 2. תיעוד

התיעוד צריך להיות מורכב משני חלקים :

### 1. תיעוד כללי :

- תיאור הבעיה והגישה הכללית של התוכנית לפתרונה.
- תיאור מבני הנתונים העיקריים שבהם התוכנית משתמשת.
- תיאור כללי של הפונקציות המרכיבות את התוכנית והקשרים ביניהן (מי קורא למי וכו').

### 2. תיעוד בגוף התכנית :

לכל פונקציה יש להוסיף מספר שורות, המסבירות באופן כללי מה מבצעת השגרה ומהו תפקיד המשתנים המוגדרים בה. כמו כן יש להוסיף הסברים נוספים לפי הצורך.

### 3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

- א. הגשת פרויקט 2 (ממ"ן 18).
- ב. הגשת שלושה ממ"נים לפחות מתוך ששת הממ"נים הרגילים.
- ג. ציון של 50 לפחות בפרויקט 2.
- ד. ציון של 13 לפחות בכל מטלה אחרת הנלקחת בחשבון.
- ה. ציון של 60 לפחות בבחינת הגמר.
- ו. הציון המשוקלל של המטלות, הפרויקטים והבחינה נדרש להיות 60 לפחות.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20407 - מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1, 2, 3 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 20.3.2016

סמסטר: 2016ב

## קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

### שאלה 1 (25 נקודות)

חשבו את מספר ההשוואות (בין מפתחות בלבד) ואת מספר ההעסקות (של מפתחות בלבד) שהאלגוריתם מיון-הכנסה מבצע עבור הקלטים הבאים (הניחו  $n$  זוגי):

$$\text{א' } \frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1, \dots, 2, 1, n, n-1, \dots, \frac{n}{2}+1$$

$$\text{ב' } n, 1, n-1, 2, \dots, \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}$$

התוצאות יינתנו קודם בצורה מדויקת ואחר-כך בצורה אסימפטוטית.

### שאלה 2 (20 נקודות)

נתון מערך ממוין  $A[1..n]$  של מספרים שלמים; ידוע שכל מספר הנמצא במערך מופיע פעם אחת בלבד.

א' כתבו שגרה שזמן ריצתה  $\Theta(1)$ , העונה לשאלה הבאה: האם קיים מספר שלם  $v$  שלא מופיע

במערך ומקיים את התנאי  $A[1] < v < A[n]$ .

ב' בהנחה שהתשובה בסעיף הקודם חיובית, כתבו שגרה למציאת המספר  $v$ . זמן הריצה של

השגרה הזאת חייב להיות  $\Theta(\lg n)$ .

### שאלה 3 (15 נקודות)

נתונות שתי רשימות של מספרים ממשיים,  $S$  בת  $m$  איברים ו- $T$  בת  $n$  איברים; בנוסף נתון מספר ממשי  $z$ . כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים  $x \in S$ ,  $y \in T$ , כך שמתקיים  $x + y = z$ . זמן הריצה של האלגוריתם יהיה  $\Theta((m+n) \cdot \lg(\min(m,n)))$ .

### שאלה 4 (10 נקודות)

תנו דוגמה של פונקציה חיובית  $f(n)$  כך שמתקיים:  
 $f(n) \neq O(n)$  וגם  $f(n) \neq \Omega(n)$ .  
 הוכיחו את הטענה.

### שאלה 5 (30 נקודות)

נתונות הפונקציות הבאות:

$$f_1(n) = \max \left\{ \sqrt{n^3} \cdot \lg n, \sqrt[3]{n^4} \cdot \lg^5 n \right\}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} n \cdot \lg^3 n, & n = 2k \\ n^3 \cdot \lg n, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$f_3(n) = n^{\lg \lg n} + n^{1000000} \cdot \lg^{1000000} n$$

$$f_4(n) = \begin{cases} n^n \cdot 2^{n!}, & n \leq 2^{1000000} \\ \sqrt{n^{\lg n}}, & n > 2^{1000000} \end{cases}$$

עבור כל אחד מששת הזוגות  $\langle f_i, f_j \rangle$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , קבעו האם מתקיימים היחסים  $\Theta$ ,  $\Omega$ ,  $O$ ,  
 $\omega$ ,  $o$  (הסימון  $\theta$  לא קיים).

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4, 6 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 3.4.2016

סמסטר: ב2016

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

מצאו חסמים אסימפטוטיים הדוקים עבור  $T(n)$  בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן. הניחו כי  $T(n)$  קבועה עבור  $n = 1$  (או עבור כמה ערכים התחלתיים של  $n$ , לפי הצורך).

א'

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n + n^3$$

ב'

$$T(n) = kT\left(\frac{n}{2}\right) + (k-2)n^3$$

( $k \geq 2$ , שלם  $k$ )

ג'

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n} \cdot \lg n$$

ד'

$$T(n) = T(n-1) + n \lg n + n$$

ה'

$$T(n) = n^2 \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n^5 \cdot \lg^3 n + \lg^5 n$$

### שאלה 2 (20 נקודות)

פתרו את הבעיה 4-2 (מציאת השלם החסר) מספר הלימוד (עמוד 73).

### שאלה 3 (20 נקודות)

הציעו מבנה נתונים המבצע את הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים:

BUILD( $L, S$ ): בניית המבנה  $S$  מרשימה נתונה  $L$  בת  $n$  איברים לא ממוינת; זמן:  $O(n)$ ;

INSERT( $z, S$ ): הכנסת המפתח  $z$  לתוך המבנה  $S$ ; זמן:  $O(\lg n)$ ;

DEL-MAX( $S$ ): מחיקת האיבר המכסימלי מהמבנה  $S$ ; זמן:  $O(\lg n)$ ;

DEL-MED( $S$ ): מחיקת החציון (העליון) מהמבנה  $S$ ; זמן:  $O(\lg n)$ ;

DEL-MIN( $S$ ): מחיקת האיבר המינימלי מהמבנה  $S$ ; זמן:  $O(\lg n)$ .

### שאלה 4 (30 נקודות)

נתונה ערימה בינרית  $A$  בת  $n$  איברים.

א' הוכיחו שהשגרה HEAP-EXTRACT-MAX( $A$ ) מבצעת בערך  $2 \lg n$  השוואות בין איברי הערימה.

ב' כתבו שגרה חלופית למחיקת האיבר הגדול ביותר, המבצעת  $\lg n + \lg \lg n + O(1)$  השוואות בין איברים (אין צורך להקטין גם את מספר פעולות ההעתקה).

ג' שפרו את השגרה החלופית כך שתבצע  $\lg n + \lg \lg \lg n + O(1)$  השוואות בין איברים.

ד' האם ניתן להמשיך לשפר את השגרה? האם זה משתלם כנגד כמות הקוד שיש לכתוב?



# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7, 9 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 17.4.2016

סמסטר: 2016

## קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

### שאלה 1 (20 נקודות)

א' כמה פעולות השוואה מבצעת שגרת החלוקה (PARTITION) במערך  $A[1..n]$  הממוין מלכתחילה בסדר עולה?

ב' כמה פעולות השוואה מבצעת שגרת החלוקה (PARTITION) במערך  $A[1..n]$  הממוין מלכתחילה בסדר יורד?

הערה: בשני הסעיפים הניחו קודם שאיברי המערך שונים זה מזה. אחר-כך, בדקו האם קיומם של איברים החוזרים על עצמם משפיע על התוצאה ואיך, אם בכלל.

### שאלה 2 (20 נקודות)

מערך  $A[1..n]$  נקרא "כמעט ממוין עם שגיאה בגודל  $k$  ( $k < n$ ) אם  $A[j] \geq A[i]$  לכל  $j, i$  המקיימים  $j - i > k$ ; במילים אחרות, המערך לא חייב להיות ממוין, אבל כל שני איברים הנמצאים בסדר הפוך לא יכולים להיות רחוקים זה מזה יותר מ- $k$  מקומות. איך אפשר לשנות את האלגוריתם מיון-מהיר כך שיהפוך כל קלט לפלט כמעט ממוין עם שגיאה בגודל  $k$ ?

מהו זמן הריצה האסימפטוטי של האלגוריתם במקרה הטוב ביותר ובמקרה הגרוע ביותר? הערה: האלגוריתם החדש חייב להיות יעיל יותר מאשר האלגוריתם המקורי.

**שאלה 3 (10 נקודות)**

הדגימו את פעולתו של האלגוריתם RANDOMIZED-SELECT על הסדרה  
 $\langle 60, 70, 80, 90, 100, 1, 5, 9, 11, 15, 19, 21, 25, 29, 30 \rangle$

עבור  $k = 5$ .

**שאלה 4 (20 נקודות)**

נתונה סדרה  $S$  בת  $n$  מספרים.

א' הוכיחו את הטענה: ב- $S$  קיימים לכל היותר שלושה מספרים החוזרים על עצמם יותר מ- $\lfloor n/4 \rfloor$  פעמים.

ב' כתבו אלגוריתם למציאת כל האיברים המופיעים בסדרה יותר מ- $\lfloor n/4 \rfloor$  פעמים. זמן הריצה הנדרש הוא  $O(n)$ .

**שאלה 5 (30 נקודות)**

נתונה סדרה של מספרים ממשיים  $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ . נסמן:

$$m = \min \{a_i : i = 0, 1, \dots, n\}$$

$$M = \max \{a_i : i = 0, 1, \dots, n\}$$

א' הוכיחו שקיימים בסדרה שני איברים  $x$  ו- $y$  כך ש-

$$|x - y| \leq \frac{M - m}{n}$$

ב' כתבו אלגוריתם המוצא את שני האיברים כמתואר בסעיף הקודם. זמן הריצה הנדרש הוא  $O(n)$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6, 9 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 2 נקודות

מספר השאלות: 1

מועד אחרון להגשה: 1.5.2016

סמסטר: 2016ב

## קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

## מותר לעבוד בזוגות

מטרת הפרויקט היא לבדוק את עומק מחסנית הרקורסיה של האלגוריתם מיון-מהיר, ביחס לבחירת איבר הציר בשגרת החלוקה.

א' כתבו תכנית (בשפת Java או C/C++) המבצעת את הפעולות הבאות:

(1) בהינתן מערך  $A$  באורך  $n+1$ , יאוחסנו בו  $n$  שלמים שונים זה מזה (האיבר  $A[0]$  יישאר ללא שימוש).

(2) בכל קריאה רקורסיבית ייבחר ערך המיקום  $k$  כאיבר ציר; מציאת ערך המיקום זה יתבצע בעזרת השגרה  $\text{RANDOMIZED-SELECT}$ ; איבר הציר יועבר ל- $A[n]$  באמצעות פעולת החלפה במערך  $A$  המקורי.

(3) אחרי כל קריאה רקורסיבית יעודכן עומק הרקורסיה הנוכחי ועומק הרקורסיה המכסימלי; האלגוריתם יחזיר את העומק המכסימלי הסופי.

(4) עליכם להריץ את האלגוריתם עבור ערכים שונים של  $n$  (100, 200, 400) ועבור ערכים שונים של  $k$  (1,  $\lceil m/8 \rceil$ ,  $\lceil m/4 \rceil$ ,  $\lceil m/2 \rceil$ ;  $m$  מהווה את אורך התת-מערך).

ב' על סמך 12 התוצאות שקיבלתם, הסיקו מסקנות על הקשר בין עומק הרקורסיה המכסימלי לבין בחירת המיקום  $k$ .



# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8, 10 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 15.5.2016

סמסטר: 2016ב

## קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

### שאלה 1 (20 נקודות)

א' כמה השוואות במקרה הגרוע, במקרה הטוב ובממוצע מבצע QUICKSORT על קלט בגודל 3?

ב' ציירו את עץ ההחלטה של QUICKSORT עבור קלט בגודל 3. הסבירו בקצרה כיצד מבנה העץ מסתדר עם 3 התשובות שלכם לסעיף הקודם.

ג' כמה השוואות במקרה הגרוע ובמקרה הטוב מבצע HEAPSORT על מערך בגודל 4?

ד' כזכור, HEAPSORT הוא אלגוריתם מיון אופטימלי מבחינת סיבוכיות זמן אסימפטוטית במקרה הגרוע (זמן ריצתו  $\Theta(n \cdot \lg n)$ ). הראו, לאור תשובתכם לסעיף הקודם, ש-HEAPSORT אינו אופטימלי עבור קלטים בגודל 4 (לשם כך יש כמובן לחשב את החסם התחתון למספר ההשוואות במקרה הגרוע של אלגוריתם מיון מבוסס השוואות). הסבירו גם, במשפט אחד, מדוע אין כאן סתירה.

### שאלה 2 (25 נקודות)

הראו כיצד ניתן לממש "שני" דו-תורים  $DQ1$ ,  $DQ2$  באמצעות מערך מעגלי אחד  $A[1..n]$ . הגדירו את אוסף הפעולות המתאימות (הכנסות, מחיקות ובדיקת מצבי הגלישה והחמיקה).

### שאלה 3 (30 נקודות)

- נתונים קבוצה  $S$  של  $n$  מספרים שלמים ומספר שלם נוסף  $z$ ; נניח שכל איברי הקבוצה  $S$  שייכים לתחום  $[0 \dots n^k - 1]$  ( $k \geq 1$ , שלם).
- א' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- $S$  שני איברים שונים, שסכומם בדיוק  $z$ ; זמן הריצה הנדרש:  $\Theta(n \cdot \min(k, \lg n))$ .
- ב' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- $S$  שלושה איברים שונים זה מזה, שסכומם בדיוק  $z$ ; זמן הריצה הנדרש:  $\Theta(n^2)$ .
- ג' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- $S$  ארבעה איברים שונים זה מזה, שסכומם בדיוק  $z$ ; זמן הריצה הנדרש:  $\Theta(n^2 \cdot \min(k, \lg n))$ .
- ד' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- $S$  חמישה איברים שונים זה מזה, שסכומם בדיוק  $z$ ; זמן הריצה הנדרש:  $\Theta(n^3)$ .

### שאלה 4 (25 נקודות)

- נתונה קבוצה של  $n$  נקודות  $p_i = (x_i, y_i)$  בחצי הימני של עיגול היחידה; כלומר, כל נקודה  $p_i = (x_i, y_i)$  מקיימת את התנאים  $x_i > 0$ ,  $0 < x_i^2 + y_i^2 \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . נניח שהתפלגותן של הנקודות אחידה; כלומר, ההסתברות למצוא נקודה באזור נתון כלשהו של חצי העיגול נמצאת ביחס ישר לשטחו של אזור זה.
- נגדיר ב- $\theta_i$  את הזווית בין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  לבין הקרן היוצאת מהראשית אל הנקודה  $p_i$  ( $\tan \theta_i = y_i / x_i$ ). כתבו אלגוריתם שתוחלת זמן הריצה שלו היא  $\Theta(n)$ , למיון  $n$  הנקודות על-פי  $\theta_i$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 11, 12 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 29.5.2016

סמסטר: 2016ב

## קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

### שאלה 1 (20 נקודות)

א' נתונה טבלת גיבוב עם שרשור בת  $m$  תאים, ריקה מלכתחילה. מהי ההסתברות שאחרי הכנסת ארבעה מפתחות תיווצר שרשרת באורך 4?

ב' נתונה טבלת גיבוב עם מיעון פתוח בת  $m$  תאים, ריקה מלכתחילה. נכניס לטבלה את המפתח  $k_1$ , אחריו את המפתח  $k_2$ , ובסוף את המפתח  $k_3$ . מהי ההסתברות שהכנסת המפתח  $k_3$  תדרוש שלוש בדיקות?

ג' נתונה טבלת גיבוב שמקדם העומס שלה  $\alpha$  קשור למספר האיברים שבטבלה על ידי הנוסחה  $\alpha = 1 - 1/\lg n$ . בהנחה שהטבלה משתמשת במיעון פתוח, מהי תוחלת הזמן עבור חיפוש כושל כפונקציה של  $n$ ?

### שאלה 2 (20 נקודות)

בהינתן קבוצה  $S$  של  $n$  מספרים ממשיים ומספר ממשי נוסף  $z$ :

א' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- $S$  שני איברים שונים, שסכומם בדיוק  $z$ ; תוחלת זמן הריצה הנדרשת:  $\Theta(n)$ ;

ב' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- $S$  ארבעה איברים שונים זה מזה, שסכומם בדיוק  $z$ ; תוחלת זמן הריצה הנדרשת:  $\Theta(n^2)$ .

### שאלה 3 (30 נקודות)

ידוע שבעח"ב בן  $n$  צמתים קיימים  $n + 1$  מצביעי  $left$  ו-  $right$  שערכם  $NIL$  ; במילים אחרות, חצי מהזיכרון המכיל את הקישורים מבוזבז.

נבצע את השינוי הבא לכל צומת  $z$  בעץ :

אם  $left[z] = NIL$ , נותנים ל-  $left[z]$  את הערך של  $TREE-PREDECESSOR(z)$  ; אם

$right[z] = NIL$ , נותנים ל-  $right[z]$  את הערך של  $TREE-SUCCESSOR(z)$ . עץ בנוי בצורה הזאת נקרא עץ מחווט והקישורים החדשים נקראים חוטים.

א' איך ניתן להבדיל בין חוטים לבין מצביעים לבנים אמיתיים?

ב' כתבו שגרות עבור פעולות ההכנסה והמחיקה בעצים מחוטים.

ג' מהו היתרון העיקרי של השימוש בחוטים?

### שאלה 4 (30 נקודות)

נתון מערך  $A[1..n]$  של מספרים, המקיים את התנאים הבאים :

$$A[1] > \dots > A[p], \quad A[p+1] > \dots > A[q], \quad A[q+1] > \dots > A[n]$$

$$A[1] < A[q], \quad A[p+1] < A[n]$$

נכניס את איברי המערך  $A$  לעץ חיפוש בינרי  $T$  (ריק מלכתחילה) בסדר המקורי שלהם

$$[A[1], A[2], \dots, A[n]]$$

משמאל לימין.

א' מהו גובה העץ הבינרי  $T$  המתקבל?

ב' מוחקים את  $A[p+1]$  מהעץ ומכניסים אותו מחדש. איך משתנה העץ  $T$  ? (מהי הצורה

החדשה ומהו הגובה החדש?)



# מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 13, 14 (ספר הלימוד)

מספר השאלות: 4

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: 2016

מועד אחרון להגשה: 12.6.2016

## קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

### שאלה 1 (20 נקודות)

בהינתן שלם חיובי  $d$ , הציעו מבנה נתונים  $S$  שבאמצעותו ניתן לבצע את הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים ( $n$  מציין את מספר האיברים של  $S$ ):

$BUILD(S)$ : בניית המבנה  $S$  מתוך סדרה של  $n$  איברים; זמן הריצה:  $O(n \cdot \lg n)$ ;

$INSERT(S, k)$ : הכנסת איבר חדש בעל המפתח  $k$  למבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n + d)$ ;

$DELETE(S, p)$ : מחיקת האיבר שאליו מצביע  $p$  מהמבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n + d)$ ;

$D-SUCCESSOR(S, p)$ : מציאת העוקב ה- $d$  של האיבר שאליו מצביע  $p$ ; זמן הריצה:  $O(1)$ .

**הסבר:** העוקב ה- $d$  של איבר נתון ב- $S$  מוגדר באופן רקורסיבי: העוקב הראשון הוא העוקב הרגיל; העוקב ה- $d$  הוא העוקב הרגיל של העוקב ה- $(d-1)$ .

### שאלה 2 (20 נקודות)

האם קיים עץ אדום-שחור המכיל:

5 נק' א. 3 צמתים שחורים ו-4 צמתים אדומים;

5 נק' ב. 4 צמתים שחורים ו-3 צמתים אדומים;

5 נק' ג. 5 צמתים שחורים ו-2 צמתים אדומים;

10 נק' ד. 6 צמתים שחורים וצומת אחד אדום.

בכל מקרה תנו דוגמה, או הוכיחו שעץ כזה לא קיים.

**הערה:** הכוונה לצמתים פנימיים בלבד.

### שאלה 30 (30 נקודות)

הציעו מבנה נתונים  $S$  שבאמצעותו ניתן לבצע את הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים ( $n$  מציין את מספר האיברים של  $S$ ):

- INSERT( $S, k$ ) : הכנסת איבר חדש בעל המפתח  $k$  למבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ ;
- DELETE( $S, p$ ) : מחיקת האיבר שאליו מצביע  $p$  מהמבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ ;
- PAIR-DIFF( $S, d$ ) : מציאת שני איברים ב- $S$  כך שהפרש המפתחות שלהם הינו  $d > 0$ ; זמן הריצה:  $O(n)$ ;
- SUM( $S, k_1, k_2$ ) : החזרת סכום כל המפתחות ב- $S$  שערכיהם בין  $k_1$  לבין  $k_2$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ .

### שאלה 4 (30 נקודות)

הציעו מבנה נתונים  $S$  שבאמצעותו ניתן לממש כל אחת מהפעולות הבאות בסיבוכיות המבוקשת:

- SEARCH( $S, k$ ) : חיפוש אחר המפתח  $k$  במבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ ;
- INSERT( $S, k$ ) : הכנסת המפתח  $k$  למבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ ;
- DELETE( $S, k$ ) : מחיקת עותק כלשהו של המפתח  $k$  מהמבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ ;
- MODE( $S$ ) : החזרת ערך המפתח בעל השכיחות הגבוהה ביותר; זמן הריצה:  $O(1)$ ;
- MARK( $S, t$ ) : החזרת ערך המפתח בעל רישום הזמן  $t$ -ה- הקטן ביותר; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ .

**הערות:**  $n$  הוא מספר המפתחות השונים ב- $S$ ; אחרי כל הכנסת עותק של המפתח  $k$ , רישום הזמן של  $k$  משתנה (לפי זמן ההכנסה של העותק החדש), כלומר, רישום הזמן של מפתח הוא זמן ההכנסה של העותק החדש ביותר שלו.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 13, 14 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 1

מועד אחרון להגשה: 28.7.2016

סמסטר: 2016ב

## קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שמונה-עשרה ... שמונה-עשרה ... שמונה-עשרה

## מותר לעבוד בזוגות

### מבוא

בפרויקט זה עליכם לכתוב ולהריץ תכנית ב-Java או ב-C/C++, שתפקידה לנהל את ספריית האוניברסיטה. כלל מנוי בספרייה המאפיינים הבאים: שם משפחתו, מספר הזהות שלו וקודי הספרים שברשותו (כל קוד מורכב משתי אותיות וארבע ספרות). לכל מנוי לכל היותר 10 ספרים בו-זמנית. שמות משפחה עשויים, כמובן, לחזור. מספרי זהות וקודים של ספרים אינם חוזרים.

הקלט הבסיסי לתכנית הוא אוסף של שורות. בכל שורה יש הודעה או שאילתה. עליכם לבחור מבני נתונים יעילים לביצוע השינויים הנדרשים ושליפת המידע.

הדרישה העיקרית בתכנית היא לבחור מבנה נתונים יעיל ככל האפשר, כך שבעקבות הודעה חדשה על קורא ששאל או החזיר ספר, ניתן יהיה לבצע בצורה יעילה את השינוי הנדרש על מבנה הנתונים. כמו-כן, נדרש שהתשובות לשאילתות יוכלו להינתן ביעילות.

## אופן ייצוג הקלט

הקלט לתכנית מורכב מאוסף של שורות. כל שורה מכילה אחד מהשניים:

- הודעה על השאלתהחזרת ספר על ידי קורא;
- שאילתה.

### • ההודעות קלט אפשריות:

1. הודעה על השאלת ספר

למשל: + AB1132 112540783 Baraq

משמעות: ברק, בעל ת"ז 112540783, שואל ספר שהקוד שלו AB1132.

2. הודעה על החזרת ספר

למשל: - AB1132 112540783 Baraq

משמעות: ברק הנ"ל מחזיר את הספר שהקוד שלו AB1132.

3. הודעה על מנוי חדש

למשל: + Yizhaqi 356241173

משמעות: לקוח חדש, יצחקי, בעל מספר זהות 356241173, הצטרף לספרייה.

4. הודעה על סיום מינוי

למשל: - Yizhaqi 356241173

משמעות: הלקוח הנ"ל מסיים את מינויו בספרייה.

### • השאילתות אפשריות:

כל השאילתות מתחילות בסימן שאלה. יש שלושה סוגי שאילתות:

1. אילו ספרים נמצאים ברשותו של המנוי שמספר הזהות שלו רשום בשאילתה:

112540783 ?

2. אצל איזה מנוי נמצא הספר שהקוד שלו רשום בשאילתה:

AX2713 ?

3. מיהם כל הלקוחות שמחזיקים כרגע במספר הרב ביותר של ספרים:

! ?

**הערה:** אין צורך לבדוק את חוקיות הקלט. ההנחה היא כי הקלט חוקי (למשל: כאשר לקוח

מופיע פעמים רבות, תמיד יהיה לו אותו מספר זהות).

## צורת הפלט

יש להדפיס כל שינוי בצורה ברורה ומדויקת.

יש להדפיס בצורה ברורה כל שאילתה, ולאחריה את התשובה עליה.

### **יעילות**

הפרמטרים של הבעיה הם מספר הספרים  $m$  ומספר הקוראים  $n$ .  
ביצוע הפעולות השונות צריך להיות יעיל כפונקציה של  $m$  ו-  $n$ .

### **הרצה**

הריצו את התכנית על שני קלטים. כל קלט צריך להכיל 25 שורות לפחות.

### **תיעוד**

תעדו את התכנית בהתאם לכתוב בסעיף "הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה" בחוברת הקורס.  
תארו את מבנה הנתונים והסבירו איך מתבצעת כל פעולה.  
נתחו את זמן הביצוע של כל פעולה כפונקציה של  $m$  ו-  $n$ .

### **דרישה נוספת**

צרפו את דיונכם בסיבוכיות האלגוריתמים השונים שבהם התכנית משתמשת.