האוניברסיטה הפתוחה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס אביב 2015ב

כתב: איתי הראבן

מרץ 2015- סמסטר אביב תשע"ה

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

ברוכים הבאים לקורס "מתמטיקה בדידה".
לפני שתתחילו בלימוד, אנא קראו עמודים אלה בעיון.

על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283.
חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים והדרכה ללמידה. אתר הקורס הוא גם ערוץ תקשורת אפשרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
אתרי הקורסים נמצאים בכתובת http://opal.openu.ac.il .
הסבר על למידה מתוקשבת אפשר למצוא כאן: http://telem.openu.ac.il .
מערכות אחרות של האו"פ זמינות כאן:
https://sheilta.apps.openu.ac.il/pls/dmyopt2/sheilta.myop.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה: www.openu.ac.il/Library .

פרטים לגבי נהלי האוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי. תיאורי הקורסים מופיעים בקטלוג הקורסים. אלה ועוד זמינים באתר הכללי של האו"פ: http://www.openu.ac.il

מרכז ההוראה בקורס הוא איתי הראבן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בדואר אלקטרוני itaiha@openu.ac.il
- דרך מערכת המסרים באתר הקורס.
- בטלפון **052-5277220** בימי ד' בין השעות 19:00 - 20:00.
- פקס: **09-7780631** , לרשום "עבור איתי"

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20476 /2015ב)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	13.3.2015-10.3.2015	החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"			
2	20.3.2015-15.3.2015	תורת הקבוצות פרק 1		ממ"ח 01 יום ו' 20.3.2015	
3	27.3.2015-22.3.2015	תורת הקבוצות סעיפים 2.1- 2.4			ממ"ן 11 יום ה' 26.3.2015
4	3.4.2015-29.3.2015 (ו ערב פסח)	תורת הקבוצות סעיפים 2.5 -3.1		ממ"ח 02 יום ה' 2.4.2015	
5	10.4.2015-5.4.2015 (א-ו פסח)	חזרה על החומר			
6	17.4.2015-12.4.2015 (ה יום הזכרון לשואה)	תורת הקבוצות סעיפים 3.2- 3.5		ממ"ח 03 יום ו' 17.4.2015	
7	24.4.2015-19.4.2015 (ד יום הזכרון) (ה יום העצמאות)	תורת הקבוצות סעיף 4.1			ממ"ן 12 יום ו' 24.4.2015
8	1.5.2015-26.4.2015	תורת הקבוצות פרק 5 (חוברת נפרדת)			
9	8.5.2015-3.5.2015 (ה ל"ג בעומר)	קומבינטוריקה סעיפים 1.1- 2.3			ממ"ן 13 יום ג 5.5.2015

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ״ח (לאו״פ)	 ממ״ן (למנחה)
10	15.5.2015-10.5.2015	קומבינטוריקה סעיפים 2.4- 3.2		ממ״ח 04 יום ו׳ 15.5.2015	
11	22.5.2015-17.5.2015 (א יום ירושלים)	קומבינטוריקה פרקים 4 - 5			
12	29.5.2015-24.5.2015 (א שבועות)	קומבינטוריקה פרקים 6- 7			ממ״ן 14 יום ג׳ 26.5.2015
13	5.6.2015-31.5.2015	תורת הגרפים פרקים 1-2			ממ״ן 15 יום א׳ 31.5.2015
14	12.6.2015-7.6.2015	תורת הגרפים פרקים 3-4			
15	23.6.2015-14.6.2015			ממ״ח 05 יום ו׳ 23.6.2015	ממ״ן 16 יום ג׳ 27.6.2015

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממ"ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ"חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. משקל כל השאלות זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ"ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחילופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

ניקוד המטלות

בקורס 6 מטלות מנחה (ממ"נים) ו- 5 מטלות מחשב (ממ"חים).
משקלי המטלות: משקל כל ממ"ן הוא 3 נקודות .
משקל כל ממ"ח הוא 2 נקודות.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 28 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות

חובה להגיש מטלות במשקל של 16 נקודות לפחות.
בין המטלות שתגישו חייבות להיות לפחות שלוש מטלות מנחה (ממ"נים)

התנאים לקבלת נקודות זכות

א. להגיש מטלות במשקל של 16 נק' לפחות. כאשר מתוכן **לפחות שלוש מטלות מנחה (ממ"נים)**

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ״ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: החוברת ״מבוא מהיר ללוגיקה״

מספר השאלות: 14 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 20.3.2015

את התשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:
א - אם רק טענה 1 נכונה,
ב - אם רק טענה 2 נכונה,
ג - אם שתי הטענות נכונות,
ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. "משה הכה בסלע ויצאו ממנו מים" - זהו פסוק.
2. "ארבעים שנה" - זהו פסוק.

שאלה 2

1. **שלילת** הפסוק אברסט הוא ההר הגבוה ביותר בכדור הארץ.
   היא הפסוק אברסט הוא ההר הנמוך ביותר בכדור הארץ.
2. **שלילת** הפסוק $1+1>2$ היא הפסוק $1+1<2$.

שאלה 3

1. הפסוק $1+1=2$ **או** $2+3>5$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $3+3>2$ הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק **אם** $3 > 2$ **אז** $3 < 2$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $3 > 2$ **אז** $4 = 2$ הוא אמת.

שאלה 5

1. הפסוק **אם** $3 < 2$ **אז** $4 < 3$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $3 < 2$ **אז** $3 < 4$ הוא אמת.

שאלה 6

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \to q) \wedge (p \to r)$ הוא:

p	q	r	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \wedge \neg(p \to q)$ הוא סתירה.

שאלה 7

1. $\neg\big((p \wedge q) \vee r\big)$ שקול טאוטולוגית ל- $\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big) \vee \neg r$.
2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $q \wedge \neg(q \wedge p)$.

שאלה 8

1. **שלילת** הפסוק **היום חם ולח** שקולה לפסוק **היום לא חם או היום לא לח.**
2. **שלילת** הפסוק **אסע לתאילנד השנה או בשנה הבאה**
שקולה לפסוק **לא אסע לתאילנד השנה ולא אסע לתאילנד בשנה הבאה.**

שאלה 9

1. מתוך הפסוק $p \wedge (q \to r) \wedge (p \to q)$ נובע טאוטולוגית הפסוק r .

2. מתוך הפסוק r נובע טאוטולוגית הפסוק $p \wedge (q \to r) \wedge (p \to q)$.

שאלה 10

1. אם מ- α נובע β אז $\alpha \wedge \neg\beta$ הוא סתירה.

2. אם מ- $\alpha \wedge \neg\beta$ נובעת סתירה אז מ- α נובע $\neg\beta$.

שאלה 11

נתבונן בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x\big(x > 1 \ \wedge \ x^2 > x\big)$

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x\big(x > 1 \ \to \ x^2 > x\big)$

שאלה 12

נתבונן שוב בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\big(\forall x\ (x > 1)\big) \ \wedge \ x^2 > x$

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\big(\forall x\ (x > 1)\big) \ \to \ \forall x(x^2 > x)$

שאלה 13

1. את **שלילת** הפסוק **לכל x קיים y שהריבוע שלו הוא x**
ניתן לנסח כך: **לכל x לא קיים y שהריבוע שלו הוא x.**

2. את **שלילת** הפסוק **לכל x קיים y שהריבוע שלו הוא x**
ניתן לנסח כך: **קיים x, כך שלכל y, הריבוע של y שונה מ- x.**

שאלה 14

1. את **שלילת** הפסוק **כל מספר עירבולי אינו לפלפי**
ניתן לנסח כך: **כל מספר עירבולי הוא לפלפי.**

2. את **שלילת** הפסוק **קיים מספר לפלפי שאינו עירבולי**
ניתן לנסח כך: **כל מספר לפלפי הוא עירבולי.**

מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2015ב | **מועד אחרון להגשה: יום ה׳ 26.3.2015**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (28 נק׳. כל סעיף: 3.5 נקודות. בסיכום ניקוד לשאלה כולה, חצי נקודה עודפת תעוגל לנקודה שלמה)

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבינן בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).

* מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.

* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

בכל אחד מהזוגות $x\,;\,y$ הבאים, קבעו אם $x \in y$ וקבעו אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\{1,2\} \;;\; \{1,2,3\}$

ב. $\{3\} \;;\; \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

ג. $\{1,2\} \;;\; \{\{1,2\},3\}$

ד. $\{1,3\} \;;\; \{\{1,2\},3\}$

ה. $\varnothing \;;\; \varnothing$

ו. $\{\varnothing\} \;;\; \{\varnothing\}$

ז. $\{1\} \;;\; \{1,2\}$

ח. $\varnothing \;;\; P(\{1,2,3\})$

שאלה 2 (27 נק׳)

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת המסתמכת בכל צעד על טענות והגדרות בספר .

א. $(A-B)-B = A-B$

ב. $A-(B-A) = A$

ג. $A \subseteq P(A)$

שאלה 3 (12 נק׳)

הוכח את הטענה הבאה בעזרת **״אלגברה של קבוצות״**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג ״איבר״. במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A-B=A\cap B'$ (עמ׳ 23 בספר הלימוד).
בכל צעד, ציין באופן ברור את הזהויות עליהן אתה מסתמך.

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cap B_2) \;=\; (A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2) \cup (A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$$

הצעה: נוח לסמן $B = B_1 \cap B_2$ ולהציב בחזרה את B_1, B_2 בשלב מאוחר.

שאלה 4 (33 נק׳)

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות: $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ אםם $\exists i\big(i \in I \,\wedge\, x \in A_i\big)$

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות: $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ אםם $\forall i\big(i \in I \,\rightarrow\, x \in A_i\big)$

השאלה שלפניכם מתרגלת את השימוש בשני המושגים הללו.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0), $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2n+2\}$, ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

(3 נק׳) א. חשבו את A_0, A_1, A_2, A_3 ואת B_0, B_1, B_2.

(5 נק׳) ב. רשמו ביטוי מפורש עבור B_n (ביטוי מפורש: ביטוי בעל צורה דומה להגדרה של A_n).

(9 נק׳) ג. חשבו את $\bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} B_n$. הוכיחו את תשובתכם בעזרת הכלה דו-כיוונית.

(10 נק׳) ד. בעזרת ההגדרות של איחוד וחיתוך כלליים בתחילת השאלה **ובעזרת כללי דה-מורגן לכמתים** $\forall,\exists$, אותם למדנו בלוגיקה, נסחו והוכיחו הכללה של כללי דה-מורגן לקבוצות, עבור **איחוד וחיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות**, שכולן חלקיות לקבוצה אוניברסלית U:

$$\bigcup_{i\in I}(A_i') = ? \quad , \quad \bigcap_{i\in I}(A_i') = ? \,.$$

(6 נק׳) ה. נסמן $D_n = \mathbf{R} - B_n$. חשבו בעזרת הסעיפים הקודמים את $\bigcap_{2\le n\in\mathbf{N}} D_n$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 2
מספר השאלות: 11 | **משקל המטלה: 2 נקודות**
סמסטר: 2015ב | **מועד אחרון להגשה: יום ה' 2.4.2015**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1 (שאלה זו בלבד מתייחסת לתחילת פרק 1)

נסמן $A = \{n \in \mathbf{N} |\ \ 3 < n < 8 \quad \wedge \quad 10 < n < 14\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\ |\ \ x^2 < -5\}$,
$C =$ קבוצת בני האדם החיים כיום, שגובהם מעל 5 מטר.

א. A,B,C הן 3 קבוצות שונות זו מזו.
ב. $A = B$ אבל $A \neq C$
ג. $B = C$ אבל $A \neq B$
ד. $A = B = C$
ה. חלק מהקבוצות האלה לא קיימות כלל ולכן אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

שאר השאלות בממ"ח זה עוסקות בפרק 2.

שאלה 2

יהי $R = \left(\{1,2,3\} \times \{1,2\}\right) \cup \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

א. $R = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$
ב. $R = \{1,2,3\} \times \{1,2\}$
ג. $R = \{1,2\} \times \{1,2,3\}$
ד. השוויון $R = X \times Y$ מתקיים עבור X,Y מסוימים, שאינם אלה שהוצגו בתשובות הקודמות.
ה. לא קיימות קבוצות X,Y כך ש- $R = X \times Y$.

שאלה 3

תהי $A = \{1,2,3,4\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A: $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,2)\}$.

ההפרש $Domain(R) - Range(R)$ שווה:

א. $\varnothing$ ב. A ג. $\{3\}$ ד. $\{1,2,3\}$ ה. אף אחד מאלה.

שאלה 4

R,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 3. טענה (*i*) : $RR^{-1} = I_A$. טענה (*ii*) : $R^{-1}R = I_A$.

א. רק טענה (*i*) נכונה.
ב. רק טענה (*ii*) נכונה.
ג. שתי הטענות (*i*) , (*ii*) נכונות.
ד. אף אחת מהטענות (*i*), (*ii*) אינה נכונה.

שאלה 5

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 3.

א. $R = R^2$.
ב. $R \neq R^2$ אבל $R^2 = R^3$.
ג. $R^2 \neq R^3$ אבל $R^3 = R^4$.
ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 6

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 3.

טענה (*i*) : $R \cup R^2$ הוא רפלקסיבי. טענה (*ii*) : $R \cup R^2$ הוא סימטרי.

א. רק טענה (*i*) נכונה.
ב. רק טענה (*ii*) נכונה.
ג. שתי הטענות (*i*) , (*ii*) נכונות.
ד. אף אחת מהטענות (*i*), (*ii*) אינה נכונה.

שאלה 7

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 3.

טענה (*i*) : $R \cup R^2$ הוא אנטי-סימטרי. טענה (*ii*) : $R \cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.

א. רק טענה (*i*) נכונה.
ב. רק טענה (*ii*) נכונה.
ג. שתי הטענות (*i*) , (*ii*) נכונות.
ד. אף אחת מהטענות (*i*), (*ii*) אינה נכונה.

שאלה 8

היחס $R = \{(1,1),(2,2)\}$ מעל $A = \{1,2,3\}$ הוא :

א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
ב. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.
ג. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.
ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.
ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

שאלה 9

R,S הם יחסים מעל קבוצה A ומתקיים $S \subseteq R$.

טענה (***i***) : אם R סימטרי אז S סימטרי.

טענה (***ii***) : אם R אנטי-סימטרי אז S אנטי-סימטרי

א. רק טענה (***i***) נכונה.
ב. רק טענה (***ii***) נכונה.
ג. שתי הטענות (***i***) , (***ii***) נכונות.
ד. אף אחת מהטענות (***i***), (***ii***) אינה נכונה.

שאלה 10

R הוא יחס **טרנזיטיבי וסימטרי** מעל קבוצת הטבעיים **N**.

ידוע שב- R יש לפחות שני זוגות סדורים. מכאן ניתן להסיק :

א. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים.

ב. ב- R יש לפחות 4 זוגות סדורים.

ג. ב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ד. $R^2 = R$.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 11

R הוא יחס מעל קבוצה כלשהי, וידוע ש- R **אינו** טרנזיטיבי.

מכאן ניתן להסיק :

א. ב- R יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק שני זוגות.

ב. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק 3 זוגות.

ג. ב- R יש לפחות 4 זוגות סדורים.

ד. מהנתון נובע ש- A אינסופית וב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3
מספר השאלות: 11
משקל המטלה: 2 נקודות
סמסטר: 2015ב
מועד אחרון להגשה: יום ו' 17.4.2015

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1

יהיו: $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(4,5)\}$, $E = I_A \cup R \cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

א. $\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$
ב. $\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$
ג. $\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\},\{7\}\}$
ד. $\{\{1,2,3,4,5\}\}$
ה. $\{\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$
ו. $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{4,5\}\}$

שאלה 2

מספר יחסי השקילות השונים מעל הקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$, בהם 1, 2 נמצאים באותה מחלקת שקילות (לאו דוקא לבדם), ו- 3 **אינו** נמצא איתם באותה מחלקה, הוא:

א. 9 ב. 10 ג. 11 ד. 12 ה. 13

שאלה 3

נגדיר יחס M מעל $\mathbf{N} - \{0\}$:

עבור n,m טבעיים חיוביים, $(n,m) \in M$ אםם $n \cdot m$ הוא מספר זוגי או $n = m$.

מספר מחלקות השקילות ש- M משרה ב- $\mathbf{N} - \{0\}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.
ה. M אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 4

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת השלמים $\mathbf{Z} = \{\ldots -3,-2,-1, 0, 1, 2, 3,\ldots\}$.

$n \in \mathbf{Z}$ נקרא זוגי אם ורק אם קיים $k \in \mathbf{Z}$ כך ש- $n = 2k$.

נגדיר יחס L מעל קבוצת השלמים $\mathbf{Z}$: $(n,m) \in L$ אסם $n + m$ הוא מספר זוגי.

מספר מחלקות השקילות ש- L משרה ב- $\mathbf{Z}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. L אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 5

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים. נגדיר פונקציה f מ- $\mathbf{Z}$ ל- $\mathbf{Z}$: $f(k) = k(k+1)(k-1)$.

f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{Z}$ ל- $\mathbf{Z}$.

שאלה 6

נסמן $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. תהי $g(x) = 10(x-10)^2$, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$.

g היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}^+$ ל- $\mathbf{R}^+$.

שאלה 7

תהי $f(X) = X - \mathbf{N}$, $f: P(\mathbf{R}) \to P(\mathbf{R})$.

f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbf{R})$ ל- $P(\mathbf{R})$.

שאלה 8

תהיינה $A,B \subseteq U$ שונות זו מזו, ומתקיים: $\{A,B\}$ היא **חלוקה** של U.

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A, **הפונקציה האופיינית** של A ב- U.

טענה ***(i)***: מהנתון נובע שלכל $x \in U$, $\varphi_A(x)+\varphi_B(x)=1$.

טענה ***(ii)***: מהנתון נובע שלכל $x \in U$, $\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)=0$.

א. רק טענה ***(i)*** נכונה.

ב. רק טענה ***(ii)*** נכונה.

ג. שתי הטענות ***(i)*** , ***(ii)*** נכונות.

ד. אף אחת מהטענות ***(i)***, ***(ii)*** אינה נכונה.

שאלה 9

עבור $X,Y \subseteq \mathbf{N}$, נאמר ש- $(X,Y) \in D$ **אסם (אם ורק אם)** $Y \subseteq X$. היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$ ואינו סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

ד. יחס מעל $P(\mathbf{N})$, שאינו סדר חלקי.

ה. אינו יחס מעל $P(\mathbf{N})$.

שאלה 10

עבור $X,Y \subseteq \mathbf{N}$, נאמר ש- $(X,Y) \in S$ **אסם (אם ורק אם)** $Y \subseteq X$ או $X \subseteq Y$.

היחס S הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$ ואינו סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

ד. יחס מעל $P(\mathbf{N})$, שאינו סדר חלקי.

ה. אינו יחס מעל $P(\mathbf{N})$.

שאלה 11

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים מינימליים לגבי R. מכאן נובע:

א. $|A|=2$.

ב. R אינו סדר מלא מעל A.

ג. R הוא סדר מלא מעל A.

ד. A היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרקים 2- 3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 24.4.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי M קבוצת היחסים (הרלציות) מעל $A = \{1,2,3\}$.

(7 נק') א. כמה אברים יש ב- M ?

(18 נק') ב. נגדיר יחס S מעל M (שימו לב, מעל M ולא מעל A):

עבור $R_1, R_2 \in M$: $(R_1, R_2) \in S$ אםם $R_1R_2 = R_2R_1$.

הוכיחו ש- S <u>אינו</u> יחס שקילות מעל M.

שאלה 2 (24 נק')

תהי $A = \{1, 2, 3\}$. תהי M קבוצת כל היחסים מעל A.

תהי $s : M \to M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הסימטרי שלו.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. s היא חד-חד-ערכית.

ב. s היא **על** M.

ג. לכל $R_1, R_2 \in M$, $s(R_1R_2) = s(R_1)s(R_2)$ (הכפל כאן הוא כפל יחסים).

ד. לכל $R \in M$, $s(s(R)) = s(R)$.

שאלה 3 (28 נקודות)

תהי F קבוצת כל הפונקציות של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$. נגדיר יחס K מעל F :

עבור $f,g \in F$: $(f,g) \in K$ אםם **<u>לכל</u>** $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$.

(5 נק׳) א. הוכח ש- K הוא סדר-חלקי מעל F.

(5 נק׳) ב. הוכח ש- K **אינו** סדר-מלא מעל F .

(5 נק׳) ג. האם יש ב- F איברים מקסימליים לגבי היחס K ?
האם יש איבר גדול ביותר? הוכח.

(5 נק׳) ד. האם יש ב- F איברים מינימליים לגבי היחס K ?
האם יש איבר קטן ביותר? הוכח.

(8 נק׳) ה. הוכח שלכל $f \in F$ קיים $g \in F$ **שמכסֶה** את f (הגדרה 3.6 בעמ׳ 88 בספר) .
הוכח שלכל $f \in F$ קיים יותר מ- g אחד כזה.

שאלה 4 (23 נקודות)

פונקציה $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ מוגדרת ברקורסיה כך :

$f(0)=0$, $f(1)=10$, ולכל $n \in \mathbf{N}$: $f(n+2) = f(n+1)+6f(n)$

(15 נק׳) א. הוכיחי באינדוקציה (ולא בדרך אחרת) : $f(n) = 2\cdot 3^n + (-2)^{n+1}$.

(8 נק׳) ב. האם f היא **<u>על</u>** $\mathbf{N}$? הוכיחי את תשובתך.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4-5

מספר השאלות: 4
משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2015ב
מועד אחרון להגשה: יום ג' 5.5.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.
חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (22 נקודות)

תני דוגמא לקבוצות A,B כך ש**חמש הקבוצות** $A,\ B,\ A-B,\ A\oplus B,\ A\cup B$ שונות כולן זו מזו, אבל לכל חמש הקבוצות האלה אותה עוצמה. הוכיחי שהקבוצות שונות זו מזו והוכיחי שיש להן אותה עוצמה. **ההפרש הסימטרי** $A\oplus B$ הוגדר בפרק 1, שאלה 1.22 בעמ' 27.

שאלה 2 (30 נקודות)

א. יהי n מספר טבעי חיובי.
הראו כי קבוצת התת-קבוצות של $\mathbf{N}$ שגודלן בדיוק n, היא בת-מנייה.
הערה: קבוצת **הסדרות** באורך n מעל $\mathbf{N}$ היא כידוע בת-מנייה.
ניתן להיעזר בכך, אך שימו לב שהשאלה כאן היא על **תת-קבוצות** ולא על סדרות.

ב. הראו כי קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$ היא בת-מנייה.

ג. בהסתמך על טענות מסעיף 4.1 (עמ' 116 – 128 בספר) בצירוף הטענה ש- $P(\mathbf{N})$ אינה בת-מניה (טענה שמוכחת בפרק 5), הראו כי קבוצת כל התת-קבוצות **האינסופיות** של $\mathbf{N}$ **אינה** בת-מנייה. אין להיעזר בטענות אחרות מפרק 5 פרט לעובדה הנ"ל.

ד. בעזרת פרק 5 מיצאו את עוצמת הקבוצה מהסעיף הקודם. הוכיחו את תשובתכם.

המשך השאלה - בעמוד הבא

ה. הנוסחה $\aleph_0 = \Big| \{X \in P(\mathbf{N}) \mid |X| = n\} \Big|$

מביעה בכתיב פורמלי את הטענה של סעיף א.

(*i*) כתבו נוסחה דומה המביעה את הטענה של סעיף ב.

(*ii*) כתבו נוסחה דומה המביעה את הטענה שמצאתם בסעיף ד.

בכתיבת הנוסחאות אפשר להסתמך על כך שקבוצה של מספרים טבעיים, עוצמתה חייבת להיות אחד משני אלה: מספר טבעי או $\aleph_0$.

שאלה 3 (20 נקודות)

מצאו **מה לא תקין** בהגדרה הבאה.

בדומה להגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות בפרק 5, נגדיר הפרש סימטרי בין עוצמות:

תהיינה k,m עוצמות, לא בהכרח שונות זו מזו. נגדיר את $k \oplus m$ באופן הבא:

תהיינה A,B קבוצות המקיימות $|A| = k$, $|B| = m$,

נגדיר את ההפרש הסימטרי של העוצמות k,m להיות עוצמת ההפרש הסימטרי של הקבוצות A,B:

$k \oplus m = |A \oplus B|$.

הגדרה כזו אינה אפשרית. עליכם להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע"י דוגמא שההגדרה **אינה תקינה**. הדרכה: ראו ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.

שימו לב: התשובה אינה יכולה להיות "ההפרש הסימטרי של העוצמות לא יוצא מה שהוא צריך להיות": לא ברור מראש מה הוא צריך להיות, ובכל מקרה מדובר בנסיון להגדיר מושג חדש. השאלה שאתם מתבקשים לענות עליה אינה אם ההגדרה תואמת לציפיות (אם יש כאלה) אלא האם בכלל הצלחנו להגדיר כאן משהו.

שאלה 4 (28 נקודות)

(12 נקי) א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות.

הוכח שאם $k_1 \le k_2$ ו- $m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

(8 נקי) ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

(8 נקי) ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 11
סמסטר: 2015ב

חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד אחרון להגשה: יום ו' 15.5.2015

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות 1 – 4 A,B הן קבוצות סופיות, $|A|=4$, $|B|=3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של A ל- B הוא:

א. 4 ב. 7 ג. 20 ד. 64 ה. 81

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של A ל- B הוא:

א. 1 ב. 3 ג. 4 ד. 24 ה. 0 (אין פונקציות כאלה)

שאלה 3

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 1 ב. 3 ג. 4 ד. 24 ה. 0 (אין פונקציות כאלה)

שאלה 4

מספר הפונקציות של A **על** B הוא:

א. 3 ב. 4 ג. 12 ד. 36 ה. 0 (אין פונקציות כאלה)

בשאלות 5 – 6 A היא קבוצה בת 10 אברים.

שאלה 5

מספר הקבוצות החלקיות של A אשר בכל אחת מהן בדיוק 3 אברים הוא:

א. 7 ב. 120 ג. 720 ד. 1,000 ה. 3^{10}

שאלה 6

מספר יחסי הסדר המלא מעל קבוצה A בת 10 אברים הוא:

א. 1 ב. 100 ג. 1,024 ד. !10 ה. 2^{10}

שאלות 7- 9 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת AAABBCCDD (להלן: "המחרוזת").

שאלה 7

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

א. 24 ב. 48 ג. 7,560 ד. 15,120 ה. 362,880

שאלה 8

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר צמד האותיות BB חייב להופיע ברצף?

א. 7 ב. 24 ג. 1,680 ד. 5,040 ה. 40,320

שאלה 9

בנוסף לדרישה שבשאלה 8, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף AAA.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 8. **בכמה הוא קטן?**

א. 24 ב. 60 ג. 120 ד. 180 ה. 360

שאלות 10 – 12 עוסקות בארבע משפחות שיצאו יחד למנגל והכינו 8 סטֵייקים **זהים** ו- 10 שיפודים **זהים**. המשפחות **אינן** נחשבות זהות. כמו כן, סטייק **אינו** זהה לשיפוד.

שאלה 10

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לחלק את 8 הסטייקים בין המשפחות?
יש לחלק את כל הסטייקים. ייתכן שמשפחה לא רוצה סטייקים כלל.

א. 4,096 ב. 65,536 ג. $D(4,8)=\binom{11}{7}$ ד. $D(4,8)=\binom{11}{3}$ ה. $D(8,4)$

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x. בכמה דרכים ניתן לחלק את **כל האוכל** בין המשפחות?
יש לחלק את כל השיפודים ואת כל הסטייקים. ייתכן שמשפחה לא רוצה אוכל כלל.

א. $x+715$ ב. $x+286$ ג. $x\cdot 715$ ד. $x\cdot 286$

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

בכמה דרכים ניתן לחלק רק את 10 השיפודים בין המשפחות, אם כל משפחה חייבת לקבל לפחות שיפוד אחד ומשפחת כהן חייבת לקבל לפחות שני שיפודים?

א. 4 ב. 5 ג. 20 ד. 56 ה. 1,204

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של **אי-השוויון** $x_1+x_2+x_3\le 10$?

תזכורת: בקורס זה, 0 הוא מספר טבעי. **הדרכה**: נסמן $x_4=10-(x_1+x_2+x_3)$.

א. 10 ב. 66 ג. 210 ד. 286 ה. 540

מטלת מנחה (ממ״ן) 14

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 3-4

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2015ב | **מועד אחרון להגשה:** יום ג׳ 26.5.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (20 נקודות)

א. השוויון הבא מובן מאליו: לכל n טבעי, $(3-2)^n = 1$.

פתחו את אגף שמאל של השוויון בעזרת הבינום של ניוטון והשלימו את החסר בזהות הבאה:

$\sum_{i=0}^{n} \binom{?}{?} 3^{?} \cdot (??)^{?} = 1$. בידקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה $n = 4$.

ב. כידוע, מספר הדרכים לחלק k כדורים זהים ל- 10 תאים שונים הוא $D(10,k)$.

נחלק את התאים לשתי קבוצות: נחליט ששלושה תאים הם אדומים ושבעה תאים הם ירוקים.
התאים עדיין שונים זה מזה (!), רק הוספנו להם צבע.

קבלו בעזרת החלוקה הזו זהות מהצורה $D(10,k) = \sum_{i=0}^{k} ???$.

בידקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה $k = 3$.

שאלה 2 (30 נקודות)

בשאלות 7 – 9 בממ״ח 04 עסקנו בסידורים של המחרוזת AAABBCCDD.

בכמה דרכים ניתן לסדר מחרוזת זו, אם אסור שיופיע הרצף AAA, אסור שיופיע BB,
אסור שיופיע CC ואסור DD? הצמד AA יכול להופיע.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית. הדרכה: הכלה והפרדה.

שאלה 3 (30 נקודות)

המשפחות שהכינו שיפודים וסטייקים בממ"ח 04 החליטו לחלק את האוכל בדרך אחרת:
כל האוכל יחולק בין המשפחות, כאשר כל משפחה חייבת לקבל **משהו** - שיפוד או סטייק אחד לפחות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?
יש להגיע לתשובה סופית מספרית. הדרכה: הכלה והפרדה.
תזכורת: השיפודים זהים, הסטייקים זהים, אך שיפוד אינו זהה לסטייק.

שאלה 4 (20 נקודות)

רמי מציע לדינה את האתגר הבא:
דינה תבחר 8 מספרים טבעיים שונים כלשהם בתחום $10 \le n \le 36$.
רמי ינסה ליצור, תוך שימוש **רק במספרים שדינה בחרה או בחלק מהם,** שני סכומים שווים.
למשל, אם דינה בחרה את המספרים $10, 11, 12, 15, 18, 25, 32, 36$
רמי יכול לרשום את השוויון $36 = 25 + 11$.
לחלופין, הוא יכול לרשום $25 + 15 = 18 + 12 + 10$.
כל המספרים צריכים להילקח מהרשימה של דינה, ואין חזרות על אותו מספר.
אם רמי מצליח לרשום שוויון כזה – הוא מנצח. אם הוא לא מצליח – דינה מנצחת.

בהנחה שאחרי שדינה בוחרת יש לרמי די זמן - או מחשב - לבדוק את כל האפשרויות,
הוכיחו כי רמי תמיד ינצח!

הדרכה: עקרון שובך היונים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 6-7

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** יום א' 31.5.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,

אשר אין בהן הופעה של **00** ואין בהן הופעה של **01** (מותרת הופעה של 10) .

דוגמאות לסדרות **מותרות** באורך 5 : 12211 , 11110 .

דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 5 : 12011 , 11100.

(10 נק') א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את $a_0\,, a_1, a_2$. רשמי יחס נסיגה עבור a_n .
בדקי שהערכים שרשמת עבור $a_0\,, a_1, a_2$ מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n .
ביטויים כגון $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ יש להשאיר כפי שהם.
ביטויים כגון $\sqrt{12}$ יש להעביר לצורה $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$.

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ"ן רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24$,

כאשר שניים מהמשתנים הם מספרים טבעיים **אי-זוגיים**,

3 המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים **זוגיים**,

ואף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1 .

לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.

אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרך אחרת. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית**.

שאלה 3

יהושע נוטל תרופות שונות: כדור נגד כאב-ראש: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). כדור מרץ: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). ויטמין B ללא הגבלה (אפשר 0), ויטמין C ללא הגבלה (אפשר 0), כל זה בכפוף לתנאי הבא, שלגביו הוא מחויב כחבר באגודת ההיפוכונדרים: מספר הכדורים הכולל, מכל 4 הסוגים יחד, שהוא לוקח כל יום יהיה בדיוק n. ערכו של n מוגדר מדי פעם בפרסומי האגודה.

נסמן ב- a_n את מספר ההרכבים השונים של n כדורים שיכול יהושע לקחת ביום אחד, כאשר אין חשיבות לסדר נטילת התרופות, ותרופות מאותו סוג הן זהות.

(10 נק׳) א. מצא את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $\{ a_n \}$. הסבר!

(15 נק׳) ב. מצא ביטוי מפורש עבור a_n (שאלה 7.10 בעמ׳ 129 בספר הלימוד יכולה לסייע).

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ ״מבוא לפונקציות יוצרות״ שבאתר הקורס.

חשב את המקדם של x^{2m} בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית: $\frac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} = (1+x)^n$.

קבל מכאן זהות על סכומים של מקדמים בינומיים, מהצורה: $\sum_{k=0}^{?} ?? = \binom{n}{2m}$.

בדוק את תשובתך עבור המקרה $n=5\,, m=2$ ועבור המקרה $n=5\,, m=3$.

הדרכה: את אגף שמאל בזהות האלגברית הנתונה רשום כמכפלה.

היעזר בנוסחאות שבתחתית העמוד.

להלן כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

!(i) סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

!(ii) כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

!(iii) $\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\dots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ׳ 129 בספר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3
מספר השאלות: 11
משקל המטלה: 2 נקודות
סמסטר : 2015ב
מועד אחרון להגשה: יום ו' 23.6.2015

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 15 צמתים, שבו צומת אחד מִדַרגה 1, שני צמתים מדרגה 2, שלושה צמתים מדרגה 3, ארבעה צמתים מדרגה 4 וחמישה צמתים מדרגה 5.

(הביטוי "צומת מִדַרגה n" פירושו "צומת שדרגתו היא n").

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

נתאר לעצמנו גרף על 7 צמתים, אשר אחד מהם בעל דרגה 0, אחד מהם מדרגה 1, שנים מהם מדרגה 5, ושלושת הצמתים הנותרים בעלי דרגות כלשהן שאינן 0, 1, או 5.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 3

הגרף G מוגדר כך: הצמתים של G הם הקבוצות בנות בדיוק 3 אברים מתוך $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

למשל הקבוצה $\{1,4,7\}$ היא צומת של G. מספר הצמתים של G הוא אפוא $\binom{7}{3}$.

בין שני צמתים שונים A,B יש קשת אם ורק אם $|A\cap B|=1$.

למשל יש קשת בין $\{1,4,7\}$ לבין $\{2,3,4\}$. דרגת כל צומת ב- G היא:

א. 6 ב. 18 ג. 35 ד. 36 ה. 70

שאלה 4

נסמן באות d את התשובה לשאלה הקודמת. בהתייחס לאותו גרף, מספר הקשתות בגרף הוא:

א. d^2-d ב. $d/2$ ג. $\binom{d}{2}$ ד. $6d$ ה. $17.5d$

שאלה 5

השאלה מתייחסת למושגים שונים שהוגדרו ב"תורת הגרפים", הגדרה 1.4.

בגרף המלא K_9 נצבע ארבעה צמתים באדום ואת חמשת הצמתים האחרים בירוק.

תהי A קבוצת הצמתים האדומים, B קבוצת הצמתים הירוקים. נסמן:

G_1: הגרף המושרה על-ידי A ב- K_9. G_2: הגרף המושרה על-ידי B ב- K_9.

G_3: איחוד הגרפים G_1, G_2,

כלומר גרף על $A \cup B$ שקבוצת הקשתות שלו היא $E(G_1) \cup E(G_2)$.

G_4: גרף על $A \cup B$, שהקשתות שלו הן רק אלה המחברות צומת אדום עם צומת ירוק.

להלן כמה טענות:

(*i*) G_1 הוא גרף דו-צדדי

(*ii*) G_4 הוא גרף דו-צדדי

(*iii*) G_3 הוא קשיר

(*iv*) G_4 הוא קשיר

(*v*) G_1 הוא גרף מלא על 4 צמתים

(*vi*) K_9 הוא גרף דו-צדדי

(*vii*) G_3 הוא גרף פורש של K_9

(*viii*) G_4 הוא גרף פורש של K_9

מתוך 8 טענות אלה, הטענות הנכונות הן בדיוק:

א. (*ii*), (*iv*), (*vi*)

ב. (*i*), (*iii*), (*vi*), (*vii*), (*viii*).

ג. (*i*), (*iii*), (*v*)

ד. (*ii*), (*iv*), (*v*), (*vii*), (*viii*).

ה. אף אחד מארבעת הסעיפים הקודמים אינו מציג את כל הטענות הנכונות ורק אותן.

שאלה 6

השאלה עוסקת באיזומורפיזם של גרפים שאינם מתויגים ("תורת הגרפים" הגדרה 2.7).

נזכור שלכל גרף G, המשלים שלו ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) מסומן $\overline{G}$.

C_n הוא גרף שהוא מעגל פשוט על n צמתים.

טענה (*i*): $\overline{C_4}$ איזומורפי לגרף הבנוי משתי קשתות זרות: 

טענה (*ii*): $\overline{C_5}$ איזומורפי ל- C_5 .

א. רק טענה (***i***) נכונה.

ב. רק טענה (***ii***) נכונה.

ג. שתי הטענות (***i***) , (***ii***) נכונות.

ד. אף אחת מהטענות (***i***), (***ii***) אינה נכונה.

שאלה 7

משפט 1.6 ב"תורת הגרפים" אומר:

"גרף בעל לפחות שני צמתים הוא דו-צדדי **אם ורק אם** אין בו מעגל באורך אי-זוגי".

כידוע, ביער, ובפרט בעץ, אין מעגלים כלל. איזו מהאמירות הבאות נכונה?

א. כל יער על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

ב. הטענה הקודמת אינה נכונה, אבל כל עץ על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

ג. עץ על מספר אי-זוגי של צמתים לעולם **אינו** גרף דו-צדדי.

ד. אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 8

בפרק 2 של החוברת "תורת הגרפים", בתשובה לשאלה 8, מופיע עץ מתויג.

נוסיף לעץ הזה עלה שמספרו 9 ונחבר אותו לצומת שמספרה 6.

סדרת Prüfer של העץ החדש היא:

א. $(4,4,3,4,4,2,6)$ ב. $(4,4,3,4,4,2,9)$ ג. $(6,4,4,3,4,4,2)$

ד. $(6,4,4,4,3,2,4)$ ה. $(4,4,4,4,3,2,6)$ ו. $(4,4,4,2,4,3,6)$

שאלה 9

G הוא גרף אוילרי (כלומר יש בו מעגל אוילר), ויש ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף אוילרי יש גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 10

G הוא גרף המילטוני (כלומר יש בו מעגל המילטון), ויש ב- G גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף המילטוני יש גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 11

הגרף הדו-צדדי המלא $K_{p,q}$ הוגדר ב"תורת הגרפים" הגדרה 1.5 .

$K_{2,9}$ הוא:

א. אוילרי והמילטוני. ב. אוילרי אבל אינו המילטוני.

ג. המילטוני אבל אינו אוילרי. ד. אינו אוילרי ואינו המילטוני.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** יום ג' 27.6.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (30 נקודות)

השאלה מתייחסת לגרף שהוגדר בממ"ח 05 שאלה 3. אפשר להסתמך על פתרון הממ"ח.

(8 נק') א. הוכח ש- G קשיר. הדרכה: הפרד למקרים לפי גודל החיתוך בין שני צמתים.

(8 נק') ב. הוכח ש- G **אינו** דו-צדדי.

(6 נק') ג. האם G הוא אוילרי? הוכח.

(8 נק') ד. הוכח ש- G הוא המילטוני.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. שרטט גרף אוילרי על מספר זוגי של צמתים, שאין בו זיווג מושלם.
הוכח שהגרף ששירטטת עונה על הדרישות.

ב. הוכח: אם G הוא גרף המילטוני על מספר זוגי של צמתים אז יש ב- G זיווג מושלם.

שאלה 3 (15 נקודות)

א. כמה זיווגים מושלמים יש בגרף המלא K_5 ?

ב. כמה זיווגים מושלמים יש בגרף הדו-צדדי המלא $K_{5,5}$?

ג. בגרף הדו-צדדי המלא $K_{5,5}$ בחרנו אחד הצמתים ומחקנו מהגרף 4 מהקשתות השכנות לצומת זה. כמה זיווגים מושלמים יש בגרף שקיבלנו?

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי P גרף על 10 צמתים, שהוא מסלול פשוט (ובפרט - עץ):

$$x \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } y$$

x,y הם העלים של P.

נוסיף לגרף P שני צמתים חדשים u,v.

נחבר (נוסיף קשת בין) **כל אחד** מהצמתים החדשים u,v **לכל אחד** מעשרת הצמתים של P,

ונוסיף גם קשת בין u ל- v.

לגרף על 12 הצמתים, המתקבל לאחר כל התוספות האלה, נקרא G.

(8 נק׳) א. הראו ש- G הוא מישורי, על-ידי שרטוט של G במישור או בדרך אחרת.

(12 נק׳) ב. לגרף G שהגדרנו למעלה נוסיף צומת חדש, w.

נחבר את w בקשתות עם כל אחד מארבעת הצמתים x,y,u,v.

קיבלנו גרף על 13 צמתים, נקרא לו H.

הוכיחו ש- H אינו מישורי.

שאלה 5 (15 נקודות)

א. מהו מספר הצביעה של הגרף P מהשאלה הקודמת? הוכח.

ב. מהו מספר הצביעה של הגרף G מהשאלה הקודמת? הוכח.

ג. מהו מספר הצביעה של הגרף W מהשאלה הקודמת? הוכח.