מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 2

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: ב2015 **מועד אחרון להגשה:** 6.4.2015

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

א. הוכיחו ישירות מהגדרת הגבול בלשון $\varepsilon - N$ ומבלי להסתמך על אף משפט או טענה אחרת מיחידה 2: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = L$.

הכוונה ב- "**הגדרת הגבול בלשון** $\varepsilon - N$" היא להגדרה שמופיעה בעמוד 92:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי N,

כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

ב. הוכיחו ישירות מהגדרת השאיפה ל- ∞ בלשון $M - N$ (הגדרה 2.36):

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n+2} = \infty$.

ג. תהי (a_n) סידרה ויהי L מספר ממשי.

נסחו בלשון $M - N$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \infty$.

כלומר, עליכם לנסח בלשון $M - N$ את הטענה: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ אינו שווה ל- ∞.

ד. הוכיחו ישירות בהסתמך על סעיף ג' ש- $\lim\limits_{n\to\infty} (n\sqrt{2} + (-1)^n \lfloor n\sqrt{2} \rfloor) \neq \infty$.

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים. בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, הוכיחו זאת.

א. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{a}{n}}$, $a\in\mathbb{R}$.

ב. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}\cdot\sqrt{n+b}-n)$, $a,b>0$.

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^7-2n^4-1}{n^4-3n^6+7}$

ד. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)$

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי (a_n) סדרה כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

א. הוכיחו שאם קיים קבוע $c>0$ כך שלכל n מתקיים $|a_n|\ge c$, אז מתקיים:

כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.

ב. הראו (באמצעות דוגמא) שאם מסתפקים בדרישה ש- $|a_n|>0$ לכל n,

אז טענת סעיף א' אינה נכונה.

ג. היעזרו בסעיף א' כדי להוכיח שאם לכל n מתקיים $|a_n|\ge n$,

אז (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

שאלה 4 (30 נקודות)

יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ או $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}b_n=1$, אז קיים $N>0$ כך ש- $a_n<\frac{1}{2}$ לכל $n>N$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}b_n=1$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ד. אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty}a_n\ne\infty$.

ה. אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ו. אם קיים קבוע $c>0$ כך ש- $b_n\ge c$ כמעט לכל n, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.