מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: ב2015 **מועד אחרון להגשה:** 27.4.2015

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>ענו על ארבע מחמש השאלות</u>

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי (a_n) סדרה המקיימת: $0 < a_1 < 6$ ו- $a_{n+1} = \sqrt{6a_n}$ לכל n.

הוכיחו כי (a_n) מתכנסת וחשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

שאלה 2 (25 נקודות)

חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים. בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-5)^n - 2^n + 2}{3^n + (-2)^n - 2}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n - 2}{(-5)^n - 2^n + 2}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty} (\lfloor 2n \rfloor - 2\lfloor n \rfloor)$

ד. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

הדרכה: הגדירו $(a_n) = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$, חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ והסתמכו על שאלה 51 מיחידה 2.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות מלעיל.

א. הוכיחו: $\sup\{a_n+b_n \mid n\in N\}\le \sup\{a_n \mid n\in N\}+\sup\{b_n \mid n\in N\}$

ב. הדגימו סדרות (a_n) ו- (b_n) שעבורן מתקיים שוויון בסעיף א'.

ג. הדגימו סדרות (a_n) ו- (b_n) שעבורן מתקיים אי-שוויון חזק ($<$) בסעיף א'.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $(a_n)=n-\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש- 0 הוא גבול חלקי של (a_n).

ג. מצאו את $\inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מינימום.

נמקו את תשובתכם.

ד. יהי ℓ מספר טבעי. הוכיחו שכמעט לכל n מתקיים: $n<\sqrt{n^2+\ell}<n+1$.

ה. היעזרו בטענת סעיף ד' כדי להוכיח שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n).

ו. האם (a_n) חסומה מלעיל? נמקו את תשובתכם.

ז. חשבו את $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

שאלה 5 (25 נקודות)

יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות.

א. נניח ש- $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=L$ (L סופי). הוכיחו שאם (a_n) חסומה, אז גם (b_n) חסומה.

ב. נניח ש- $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=L$ (L סופי).

הוכיחו שאם a הוא גבול חלקי של (a_n), אז $L-a$ הוא גבול חלקי של (b_n).

ג. נניח של- (a_n) יש 20106 גבולות חלקיים ול- (b_n) יש 20474 גבולות חלקיים.

הוכיחו שהסדרה (a_n+b_n) מתבדרת.