

מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 8 עד סעיף 8.23 כולל

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2015 מועד אחרון להגשה: 15.6.2015

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

$$P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ יהי}$$

הוכיחו כי אם ל- P יש שורש בנקודה x_0 ו- $P'(x_0) \neq 0$, אז ל- P יש לפחות שני שורשים.

שאלה 2 (15 נקודות)

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) ויהי $x_0 \in (a, b)$.

הוכיחו שקיימת סדרה (x_n) המקיימת:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f'(x_0) \text{ ו- } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, n \text{ לכל } x_n \neq x_0$$

רמז: לכל n טבעי, התבוננו בקטע $[x_0, x_0 + \frac{1}{n}]$ והיעזרו במשפט הערך הממוצע של לגרנז'.

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$ המקיימת $0 \leq f'(x) \leq 1$ לכל x בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה x ב- $[0, \frac{\pi}{2}]$ כך ש- $f'(x) = \sin x$.

שאלה 4 (25 נקודות)

- א. הוכיחו כי $\sin x + \cos x \geq 1$ לכל x בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- והסיקו שהאי-שוויון הנ"ל נכון בכל קטע $\left[2\pi k, 2\pi k + \frac{\pi}{2}\right]$, k מספר טבעי.
- ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^x \sin x$ אינה רציפה במידה שווה ב- $[0, \infty)$.
- רמז:** היעזרו בסעיף א' ובמשפט הערך הממוצע של לגרנז'.
- ג. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^x \sin x$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, 0]$.

שאלה 5 (15 נקודות)

- תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע (a, b) המקיימת לכל x בקטע $f''(x) > 0$.
- הוכיחו שלכל שתי נקודות x ו- y בקטע מתקיים $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$.

שאלה 6 (15 נקודות)

- תהי f פונקציה רציפה ב- \mathbb{R} .
- הוכיחו כי בין כל שתי נקודות מקסימום מקומי של f קיימת ל- f נקודת מינימום מקומי.
- רמז:** הסתמכו על המשפט השני של ויירשטראס (שימו לב **שלא נתון** ש- f גזירה!).