ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20109

אלגברה לינארית 1

חוברת הקורס-סתיו א2015

כתבה: ד״ר מרים רוסט

אוקטובר 2014 - סמסטר סתיו- תשע״ה

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "אלגברה לינארית 1".

כדי להקל עליכם את לימוד הקורס, שאינו קל, השקענו מאמץ ניכר בבניית מערכת מסייעת ללימוד העצמי. תיאור המערכת כלול בחוברת זו. אנו ממליצים שתקראו את החוברת עוד בטרם תיגשו ללימוד עצמו.

בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://telem.openu.ac.il .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכזת ההוראה בקורס היא ד"ר מרים רוסט.
ניתן לפנות אליה באופן הבא:

- בטלפון 09-7781423, בימי ג', בין השעות 10:00-12:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - myriamr@openu.ac.il.
- פקס: 09-7780631.

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיך.

ב ב ר כ ה ,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20109/ 2015א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	24.10.2014-21.10.2014	יחידות 1, 2			
2	31.10.2014-26.10.2014	יחידות 2, 3			
3	7.11.2014-2.11.2014	יחידות 3, 4		ממ"ח 01 9.11.2014	
4	14.11.2014-9.11.2014	יחידה 4			ממ"ן 11 16.11.2014
5	21.11.2014-16.11.2014	יחידה 5			
6	28.11.2014-23.11.2014	יחידות 6, 7		ממ"ח 02 30.11.2014	ממ"ן 12 30.11.2014
7	5.12.2014-30.11.2014	יחידה 7			
8	12.12.2014-7.12.2014	יחידה 8		ממ"ח 03 14.12.2014	
9	19.12.2014-14.12.2014 (ד-ו חנוכה)	יחידה 8			ממ"ן 13 21.12.2014
10	26.12.2014-21.12.2014 (א-ד חנוכה)	יחידה 8		ממ"ח 04 28.12.2014	
11	2.1.2015-28.12.2014	יחידה 9			ממ"ן 14 4.1.2015
12	9.1.2015-4.1.2015	יחידות 9, 10			
13	16.1.2015-11.1.2015	יחידות 10, 11			ממ"ן 15 18.1.2015
14	23.1.2015-18.1.2015	יחידה 11			
15	2.2.2015-25.1.2015	יחידה 12		ממ"ח 05 4.2.2015	ממ"ן 16 4.2.2015

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם :

1. להגיש מטלות במשקל כולל של **15 נקודות לפחות**.
2. לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.
3. לקבל בציון הסופי של הקורס **60 נקודות לפחות**.

פירוט המטלות בקורס

בקורס אלגברה לינארית 1, 5 ממ״חים ו-6 ממ״נים.

בטבלה שלפניכם מופיעה רשימת הממ״נים והממ״חים, סימוליהם, היחידות בהן הם עוסקים ומשקליהם.

אין מטלות העוסקות ביחידת ההכנה - יחידה 1 (ראה פרטים נוספים בעמ׳ VII של היחידה).

	נושא המטלה	**משקל המטלה**
ממ״ח 01	יחידות 2, 3	1 נקודות
ממ״ח 02	יחידות 4, 5	1 נקודות
ממ״ח 03	יחידות 6, 7	1 נקודות
ממ״ח 04	יחידות 7, 8	1 נקודות
ממ״ח 05	יחידות 9-12	1 נקודות
ממ״ן 11	יחידות 2, 3	4 נקודות
ממ״ן 12	יחידות 4, 5	4 נקודות
ממ״ן 13	יחידות 6, 7, 8	4 נקודות
ממ״ן 14	יחידה 8	4 נקודות
ממ״ן 15	יחידות 9, 10	4 נקודות
ממ״ן 16	יחידות 11, 12	5 נקודות

תאריכי הגשת המטלות מופיעים בלוח זמנים ופעילויות וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא תילקחנה בחשבון בחישוב הציון הסופי. המטלות תיבדקנה על ידי המנחים כדי שהסטודנטים יוכלו לקבל משוב על עבודתם. במקרים מיוחדים של אי עמידה בלוח הזמנים, ניתן לפנות אל מרכז ההוראה.

חשוב לדעת!

- **יחידה מס׳ 1** (שיעור ראשון) היא יחידת הכנה לקורס והיא מיועדת ללימוד עצמי. לא יהיה תרגול על החומר הזה במסגרת המפגש.
בנוסף תמצאו תדריך לימוד ליחידה זו ותוכלו לבדוק את עצמכם בשאלון ״בחנו את עצמכם״ הנמצא באתר.

- **למפגש הראשון** יש לקרוא באופן מעמיק את **יחידה 2.**

- **פתרון המטלות** הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:
בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר.
ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

- **מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.**

עליכם להשאיר לעצמך העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: **20109-אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2, 3

מספר השאלות: 13   **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: **2015א**   **מועד אחרון להגשה:** 9.11.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה
ב – אם רק טענה 2 נכונה
ג – אם שתי הטענות נכונות
ד – אם שתי הטענות לא נכונות

שאלה 1

למערכת הלינארית:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

1. יש אינסוף פתרונות.
2. למערכת ההומוגנית המתאימה (כלומר בעלת אותה מטריצת מקדמים מצומצמת) יש אינסוף פתרונות.

שאלה 2

נתונה המערכת הלינארית:

$$(*)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 6x_5 = -1 \end{cases}$$

1. אין פתרון למערכת (*).
2. אין פתרון למערכת (**) בעלת שלוש המשוואות האחרונות.

שאלה 3

נתונה המערכת :

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$$, כאשר a,b,c ממשיים.

1. קיימים a,b,c עבורם למערכת יש פתרון יחיד.
2. קיימים a,b,c עבורם למערכת אין פתרון.

בשאלות 4- 8 נתייחס למערכת משוואות הומוגנית (*O*) ומערכת אי הומוגנית (*M*). שתיהן בעלות *m* משוואות, *n* נעלמים ואותה מטריצת מקדמים מצומצמת.

שאלה 4

1. אם למערכת (O) יש אינסוף פתרונות אז $m\le n$.
2. אם $m<n$ אז למערכת (M) יש אינסוף פתרונות.

שאלה 5

1. אם $\underline{c},\underline{d}$ פתרונות של (M) וגם $\lambda\underline{c}+\mu\underline{d}$ פתרון של (M), אז מתקיים $\lambda+\mu=1$.
2. אם $\underline{c}$ פתרון של (M) ו- $\underline{d}$ פתרון של (O), אז $\underline{c}-3\underline{d}$ פתרון של (M).

שאלה 6

1. אם ל- (M) אין פתרון אז יתכן שקיים פתרון יחיד ל- (O) וגם יתכן שקיימים אינסוף פתרונות ל- (O).
2. אם ל- (O) יש אינסוף פתרונות אז ל- (M) יש אינסוף פתרונות.

שאלה 7

1. אם $\underline{c}\in\mathbf{R}^n$ פתרון של (M) אז $\underline{c}\neq\underline{0}$.
2. אם כל $\underline{c}\in\mathbf{R}^n$ הוא פתרון של (O) אז ל -(M) אין פתרון.

שאלה 8

אם מטריצת המקדמים (המורחבת) של (M) מדורגת ובעלת שורת אפסים אחת בדיוק, אז

1. יש ל- (O) אינסוף פתרונות
2. אם $m=n+1$ יש ל- (M) פתרון יחיד.

שאלה 9

תהי $\{u,v,w\}$ תת- קבוצה של $\mathbf{R}^n$ בלתי תלויה לינארית . אז :

1. הקבוצה $\{u-v-w\,,\,2u+w\,,\,3u+v+3w\}$ תלויה לינארית.
2. אם $n=3$ אז הקבוצה $\{u-v\,,\,v-w\,,\,w-u\}$ היא בסיס ל- $\mathbf{R}^3$.

בשאלות 10- 11 נתייחס לקבוצת וקטורים $A=\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ ב- $\mathbf{R}^n$.

שאלה 10

1. אם $k>n$ אז A פורשת את $\mathbf{R}^n$.
2. אם A תלויה לינארית ופורשת את $\mathbf{R}^n$, אז $k>n$.

שאלה 11

1. אם A תלויה לינארית אז $\underline{a}_k$ הוא צרוף לינארי של הווקטורים $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_{k-1}$.
2. אם A בלתי תלויה לינארית ו- $\underline{b}\in\mathbf{R}^n$ אינו צרוף לינארי של וקטורי A אז $A\cup\{\underline{b}\}$ בלתי תלויה לינארית.

שאלה 12

1. הקבוצה $\{(1,6,4),(1,14,-5),(2,4,-1),(-1,2,5)\}$ פורשת את $\mathbf{R}^3$.
2. קיימים $a,b\in\mathbf{R}$ כך שהווקטור $v=(a,b,2b-a,-2a+3b)$ ב- $\mathbf{R}^4$ <u>אינו</u> צרוף לינארי של הווקטורים $u_2=(1,2,3,4)$, $u_1=(4,3,2,1)$.

שאלה 13

תהי A המטריצה המצומצמת של המערכת הלינארית בשאלה 1.

1. וקטורי העמודות של A מהווים קבוצה בלתי תלויה לינארית ב- $\mathbf{R}^5$.
2. וקטורי העמודות של A פורשים את $\mathbf{R}^5$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: **20109 - אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: יחידות 3,2

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: **2015א** **מועד אחרון להגשה:** 16.11.2014

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה ב- 3 נעלמים:

$$\begin{cases} x+2y+az=-3-a \\ x+(2-a)y-z=1-a \\ ax+ay+z=6 \end{cases}$$

, כאשר a מספר ממשי.

עבור אילו ערכים של a למערכת:

(i) אין פתרון?

(ii) יש פתרון יחיד?

(iii) יש אינסוף פתרונות? רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה ב- 4 נעלמים:

$$\begin{cases} x+ay+bz+aw=b \\ x+(a+1)y+(a+b)z+(a+b)w=a+b \\ ax+a^2y+(ab+1)z+(a+a^2)w=b+ab \\ 2x+(2a+1)y+(a+2b)z+aw=2b-2a-ab \end{cases}$$

b , a מספרים ממשיים.

עבור אילו ערכי b , a למערכת זו:

1. יש פתרון יחיד?
2. יש אינסוף פתרונות? רשום את הפתרון הכללי.
3. אין פתרון?

שאלה 3 (15 נקודות)

פתור את המערכת הבאה עם נעלמים x, y, z :

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=1 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{8}{z}=0 \\ -\frac{1}{x}+\frac{9}{y}+\frac{10}{z}=5 \end{cases}$$

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $U=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית ב- $\mathbf{R}^5$. נגדיר את הווקטורים :

$\mathbf{v}_1 = 8a\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = 16a\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_3 + a\mathbf{u}_4$, a מספר ממשי.

א. מצא את כל ערכי a שעבורם הקבוצה $V=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ תלויה ליניארית.

ב. עבור כל ערך של a שמצאת בסעיף א׳ רשום את $\mathbf{v}_2$ כצירוף ליניארי של $\mathbf{v}_1$ ו- $\mathbf{v}_3$.

ג. האם ניתן לצרף אחד הווקטורים $\mathbf{v}_i$ ל- U כך שהקבוצה $U\cup\{\mathbf{v}_i\}$ תהיה בסיס ל- $\mathbf{R}^5$?

שאלה 5 (20 נקודות)

נתונים $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k$ ו- $\underline{b}$ וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$ כך ש- $\underline{b}\neq\underline{0}$ והווקטורים $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k$ שונים זה מזה.

נניח גם שקיימים אינסוף פתרונות למשוואה $x_1\underline{a}_1+\ldots+x_k\underline{a}_k=\underline{b}$.

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות :

א. אם $k\geq n+1$, אז הקבוצה $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ פורשת את $\mathbf{R}^n$.

ב. הקבוצה $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ תלויה לינארית.

ג. קיים וקטור $\underline{c}\in\mathbf{R}^n$ כך שיש למשוואה $x_1\underline{a}_1+\ldots+x_k\underline{a}_k=\underline{c}$ פתרון יחיד.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20109-אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 4, 5

מספר השאלות: 13 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 30.11.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה

ב – אם רק טענה 2 נכונה

ג – אם שתי הטענות נכונות

ד – אם שתי הטענות לא נכונות

בשאלות 1-13 A,B,C הן מטריצות <u>ממשיות</u> מסדר $n \times n$, אלא אם כן צוין אחרת.

שאלה 1

1. אם $\mathbf{v}$ וקטור עמודה מסדר $n\times 1$ המקיים $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$ אז $A=0$ או $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.
2. אם $AB=AC$ אז $B=C$ או $A=0$.

שאלה 2

1. אם $AB=0$ וגם A הפיכה אז $BA=0$.
2. אם $AB=0$ ו- $B\neq 0$ אז $A=0$.

שאלה 3

1. $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ אם ורק אם $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.
2. $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

שאלה 4

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n, $n \geq 2$.

1. אם A סינגולרית אז יש ב- A שורת אפסים.
2. אם A סינגולרית אז יש ב- A שתי שורות פרופורציונליות (כלומר שורה אחת כפולה של השנייה).

שאלה 5

1. אם A מטריצה ריבועית בעלת עמודת אפסים לפחות, אז A שקולת שורות למטריצה בעלת שורת אפסים לפחות.
2. אם A מטריצה ריבועית כך שלכל $\underline{e}_i \in \mathbf{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, יש פתרון יחיד למערכת $A\underline{x} = \underline{e}_i$ אז A הפיכה.

שאלה 6

1. אם $|A^3| = -|A|$ אז A סינגולרית.
2. אם $AB = A$ ו- $|A| \neq 0$ אז $B = I$.

שאלה 7

1. קיים מספר טבעי n, $n \geq 1$, כך ש- $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.
2. קיימת מטריצה הפיכה A מסדר 3×3 כך ש- $A^2 = -I$.

שאלה 8

1. אם למערכת $AB\underline{x} = \underline{b}$ יש אינסוף פתרונות, אז גם למערכת $A\underline{x} = \underline{b}$ אינסוף פתרונות.
2. עבור כל מטריצה A מסדר 4×3 אין פתרון למערכת $A\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 9

תהי A מטריצה מסדר 3×3 כך ש- $\det A = -2$. אז:

1. $\det(-2A^2) = -2^5$.
2. $\det(-2A)^3 = -64$.

שאלה 10

יהי x מספר ממשי. אז:

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5x+2$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = (x^2+x-1)(x^2-x-1)$$

שאלה 11

נתון כי המטריצה $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ רגולרית. אז:

1. המטריצה $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 1 & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 3 & \alpha_{23} & \alpha_{33} \\ -\alpha_{12} & 4 & -\alpha_{22} & -\alpha_{32} \end{bmatrix}$ רגולרית.

2. המטריצה $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{11}+\alpha_{21} & -\alpha_{12}-\alpha_{22} & \alpha_{13}+\alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{33} \end{bmatrix}$ סינגולרית

שאלה 12

1. אם A ו- B שקולות שורות אז $|A| = \pm|B|$.
2. אם $|A+C| = |B+C|$ אז $|A| = |B|$.

שאלה 13

1. קיימות 3 מטריצות A אלכסוניות מסדר 2×2 המקיימות $A^3 = iI_2$.
2. אם $AB = -BA$ ו- n אי-זוגי אז A או B סינגולרית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 4, 5

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 30.11.2014

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (15 נקודות)

נתונות שתי מערכות משוואות ב-3 נעלמים, (O) הומוגנית ו- (M) אי-הומוגנית:

$$(M)\ \begin{cases} ax+by+cz=d \\ fx+gy+hz=k \end{cases} \quad \text{ו-} \quad (O)\ \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ fx+gy+hz=0 \end{cases},$$

ידוע ש- $(1,0,1)$ ו- $(-1,1,1)$ פתרונות ל- (O) וגם ש- $(2,-3,1)$ פתרון ל- (M). מצא את הפתרון הכללי של המערכת (O) והשתמש בשאלה 20 בספר III על מנת למצוא את הפתרון הכללי של המערכת (M).

שאלה 2 (15 נקודות)

נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

א. השתמש בפעולות אלמנטריות כדי למצוא מטריצה C הפיכה כך ש- $B=CA$.

ב. רשום את C כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. נניח שמתקיים $A^2+A+I=0$.

(i) הוכח ש- A הפיכה ו- $A^{-1}=A^2$. (ii) הוכח שגם A^2-A+I הפיכה.

ב. יהיו B,A מטריצות מסדר $n\times n$.

הוכח כי אם AB^2-A הפיכה אז $BA-A$ הפיכה.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהיו $p(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ פולינום ו- A מטריצה ריבועית מסדר n.

נסמן ב- $p(A)$ את המטריצה $p(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0I_n$.

נתון כי $p(A)=0$ וכן $p(0)\neq 0$.

א. הוכח כי A הפיכה.

ב. הוכח כי $g(A^{-1})=0$ כאשר $g(x)=a_0x^k+a_1x^k+\cdots+a_{k-1}x+a_k$.

שאלה 5 (20 נקודות)

חשב את הדטרמיננטות הבאות מסדר $n\times n$, $n>1$:

$$D_1=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

ו-

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

הדטרמיננטה D_1 מוגדרת כך: $d_{ij}=\begin{cases} a & if \quad i=j \\ b & if \quad j=i+1 \ \ and \ \ i\leq n-1 \\ b & if \quad i=n \ \ and \ \ j=1 \end{cases}$

והדטרמיננטה D_2 מוגדרת כך: לכל i, $1\leq i\leq n$, $d_{ij}=\begin{cases} i+j-1 & if \ i+j-1\leq n \\ n & if \ i+j-1>n \end{cases}$.

שאלה 6 (10 נקודות)

תהי $\mathbf{Q}$ קבוצת המספרים הרציונליים ותהי $A\in M_n(\mathbf{Q})$. אז $A\in M_n(\mathbf{R})$.

הוכח שאם המטריצה A הפיכה ב- $M_n(\mathbf{R})$ אז היא הפיכה גם ב- $M_n(\mathbf{Q})$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20109-אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6, 7 עד עמ' 19

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 14.12.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה
ב – אם רק טענה 2 נכונה
ג – אם שתי הטענות נכונות
ד – אם שתי הטענות לא נכונות

שאלה 1

1. קבוצת המטריצות הממשיות האלכסוניות מסדר $n \times n$ היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל של מטריצות.
2. המרחב הלינארי $\mathbf{R}^2$ הוא גם שדה ביחס לפעולת החיבור הרגילה ופעולת הכפל המוגדרת ע"י: $(a,b)(c,d) = (ac,bd)$ לכל a,b,c,d ממשיים.

שאלה 2

1. $\left|\left(3+\sqrt{2}i\right)^2\right| = 121$
2. $\left|\dfrac{\left(\sqrt{3}+2i\right)^2}{\left(1-\sqrt{2}i\right)^3}\right| = \dfrac{7}{\sqrt{27}}$

שאלה 3

1. $(2-i)^4 = (1+2i)^4$
2. $\left|\left(1+\sqrt{3}i\right)^{20}\right| = 4^{20}$

שאלה 4

1. אם $z_0 \in \mathbf{C}$ פתרון למשוואה $z^{11} - 3z^2 + 17 = 0$ אז גם $\bar{z}_0$ פתרון שלה.
2. אם $z_1 \in \mathbf{C}$ פתרון למשוואה $z^2 + iz - 3 = 0$ אז גם $\bar{z}_1$ פתרון שלה.

שאלה 5

1. ההצגה הטריגונומטרית של $-1-i$ היא $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
2. ההצגה הטריגונומטרית של $-\sqrt{3}+i$ היא $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

שאלה 6

1. כל פתרונות המשוואה $z^3 = -1$ הם:

$$-1 \ , \ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \ , \ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

2. כל פתרונות המשוואה $z^2 = i$ הם:

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{ו-} \quad \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}.$$

שאלה 7

1. לכל $w \in \mathbf{C}$
$\begin{vmatrix} 1 & \overline{w} & \overline{w} \\ w & 1 & \overline{w} \\ w & w & 1 \end{vmatrix}$
הוא מספר ממשי.

2. למערכת
$$\begin{cases} z_2 + (1-i)z_3 = 1 \\ iz_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ iz_1 + iz_3 = 1 \end{cases}$$
אין פתרון.

שאלה 8

1. $V = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbf{R}\}$ הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$ ביחס לפעולות הבאות:

חיבור: $(\alpha_1,\alpha_2) + (\beta_1,\beta_2) = (\alpha_1 + \beta_2 , \alpha_2 + \beta_1)$, לכל $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in \mathbf{R}$.

כפל בסקלר: $\lambda(\alpha,\beta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$ לכל $\lambda,\alpha,\beta \in \mathbf{R}$.

2. $V = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbf{R}\}$ הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$ ביחס לפעולות הבאות:

חיבור: $(\alpha,\beta) + (\alpha',\beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$.

כפל בסקלר: $\lambda(\alpha,\beta) = (\alpha, \lambda\beta)$.

שאלה 9

1. $\mathbf{C}^2$ עם הפעולות הרגילות הוא מרחב לינארי מעל שדה המספרים הרציונליים $\mathbf{Q}$.
2. $\mathbf{Q}^2$ עם הפעולות הרגילות הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{Z}$.

שאלה 10

1. הקבוצה $W=\{A\in M_n(\mathbf{R}) \mid A=A^t\}\cup\{A\in M_n(\mathbf{R}) \mid A=-A^t\}$ הוא תת-מרחב של $M_2(\mathbf{R})$.
2. הקבוצה $U=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \mid f(2x)=f(x)\}$ היא תת-מרחב של מרחב הפונקציות מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: **20109 - אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6, 7 ו- 8 עד עמ' 52

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: **2015א** **מועד אחרון להגשה:** 21.12.2014

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (20 נקודות)

א. נתונים $t=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$ ו- $w=1-i$.

פתור ב- $\mathbf{C}$ את המשוואה $z^3=\frac{w}{\overline{t}}$.

ב. יהיו $z_1,z_2,\dots,z_n$ כל הפתרונות ב- $\mathbf{C}$ של המשוואה $z^n=1$.

הוכח שמכפלתם שווה ל-1, כלומר $z_1z_2\dots z_n=1$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $A=\{(x,1)\mid x\in\mathbf{R}\}$ תת-קבוצה של $\mathbf{R}^2$.

א. מעל A מגדירים את הפעולות הבאות:

חיבור, מסומן ב- $\oplus$: $(x,1)\oplus(y,1)=(x+y,1)$ לכל $x,y\in\mathbf{R}$

כפל בסקלר, מסומן ב- $\odot$: $k\odot(x,1)=(k^2x,1)$ לכל $x\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{R}$.

האם A הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$ עבור הפעולות האלה?

ב. מעל A נגדיר גם כפל שנסמן ב- $*$: $(x,1)*(y,1)=(xy,1)$ לכל $x,y\in\mathbf{R}$.

האם $(A,\oplus,*)$ הוא שדה?

שאלה 3 (25 נקודות)

א. קבע אלו מהקבוצות הבאות הן מרחבים ליניאריים מעל F , ביחס לפעולות הרגילות:

$U = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \mid 2z = 3w\}$, כאשר $F = \mathbf{C}$

$W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x+1) = f(x) + 1 \quad$ לכל $x \in \mathbf{R}\}$, כאשר $F = \mathbf{R}$

$M = \{p(x) \in \mathbf{R}_4[x] \mid p(x) = p(x-1)\}$, כאשר $F = \mathbf{R}$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \mid ad = 0 \right\}$, כאשר $F = \mathbf{R}$.

ב. עבור כל אחד מהמרחבים שמצאת, הצג קבוצה פורשת סופית.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. יהיו u,v,w וקטורים במרחב לינארי V מעל שדה F . האם מתקיים

$Sp\{u + v - w, u - v + 2w, v + w\} = Sp\{u,v,w\}$? <u>רמז</u>: שאלה 45 ספר חמישי.

ב. יהיו $U = Sp\{(1,2,5),(1,1,3)\}$ ו- $W = Sp\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ תת- מרחבים של $\mathbf{R}^3$.

האם $U = W$?

שאלה 5 (15 נקודות)

יהיו W,U תת-מרחבים של מרחב לינארי V המקיימים $V = U \oplus W$.

תהיינה $S \subseteq U$ ו- $T \subseteq W$ שתי קבוצות סופיות, בלתי תלויה לינארית .

הוכח כי הקבוצה $S \cup T$ בלתי תלויה לינארית.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20109-אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 7, 8

מספר השאלות: 12 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 28.12.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה
ב – אם רק טענה 2 נכונה
ג – אם שתי הטענות נכונות
ד – אם שתי הטענות לא נכונות

בשאלות 2- 4 T, K הן תת-קבוצות של מרחב לינארי V.

שאלה 1

תהי $A = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ תת-קבוצה של מרחב לינארי V.

1. $Sp\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v}-\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}-3\mathbf{w}\} = Sp\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.
2. אם A בלתי תלויה לינארית אז $\dim Sp\{2\mathbf{u}-5\mathbf{w}\,, 3\mathbf{u}+2\mathbf{v}\,, \mathbf{u}+\mathbf{v}-8\mathbf{w}\} = 2$.

שאלה 2

1. אם $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathrm{Sp}(K)$ אז $T \subseteq K$.
2. אם $T \subseteq \mathrm{Sp}(K)$ ו- $K \subseteq \mathrm{Sp}(T)$ אז $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(K)$.

שאלה 3

1. אם $v \in V$, $v \notin T$ ו- T בלתי תלויה, אז $T \cup \{v\}$ בלתי תלויה.
2. אם $u, v \in V$, $u \in \mathrm{Sp}(T \cup \{v\})$ ו- $u \notin \mathrm{Sp}(T)$ אז קיים סקלר λ כך ש- $u = \lambda v$.

שאלה 4

1. אם $K \subset T$ (חלקית ממש) ואם $\mathrm{Sp}(K) = \mathrm{Sp}(T)$ אז T תלויה לינארית.
2. אם $K \cap T = \varnothing$ אז $\mathrm{Sp}(T \cup K) = \mathrm{Sp}(T) \oplus \mathrm{Sp}(K)$.

שאלה 5

1. מימד התת-מרחב $\mathrm{Sp}\{(1,-1,0,1),(2,0,1,-1),(1,1,1,2),(0,2,1,-3)\}$ של $\mathbf{R}^4$ הוא 3.
2. מימד התת-מרחב $\mathrm{Sp}(\{-x^3+x^2+2,\ -x^2+x+1, x^3+x+1, x^2+x+1\})$ של $\mathbf{R}_4[x]$ הוא 3

שאלה 6

1. אם V מרחב כל המטריצות מסדר (3×3) מעל $\mathbf{R}$, אשר סכום האיברים בכל שורה ובכל עמודה הוא 0, אז $\dim V = 4$.
2. אם $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbf{R}\right\}$, $W=\left\{\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0\end{pmatrix} \middle| c,d\in\mathbf{R}\right\}$ אז $U\oplus W = M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$.

שאלה 7

1. הקבוצה $\{(1,i),(0,-1)\}$ היא בסיס של $\mathbf{C}^2$ כמרחב לינארי מעל $\mathbf{C}$.
2. הקבוצה $\{(1,i),(0,-1),(i,0),(1,0)\}$ אינה בסיס של $\mathbf{C}^2$ כמרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$.

שאלה 8

1. אם U, W תת-מרחבים של $\mathbf{R}^{10}$, $\dim U = 8$, $\dim W = 9$ אז $\dim(U\cap W) = 7$.
2. אם U, W תת-מרחבים של $\mathbf{R}^5$, $\dim U = 3$, $\dim W = 4$ ו- $U \not\subseteq W$ אז $\dim(U\cap W) = 2$.

שאלה 9

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -2\end{pmatrix}$, k מספר ממשי.

1. קיים k ממשי כך ש- $\rho(A)=2$.
2. קיים k ממשי כך ש- $\rho(A)=1$.

שאלה 10

1. אם A ו- B מטריצות מסדר 3×3 כך ש- $\rho(A)=\rho(B)=2$ אז $AB\neq 0$.
2. אם A מטריצה מסדר 3×2 ו- B מטריצה מסדר 2×3 אז המטריצה AB סינגולרית.

שאלה 11

יהיו: $B_1 = ((2,1,0,1), (1,1,0,-1), (1,0,1,1), (1,1,0,0))$

$B_2 = ((1,1,0,1), (2,1,0,-1), (0,0,1,1), (2,1,0,0))$

בסיסים של $\mathbf{R}^4$.

1. $[(5,3,1,1)]_{B_1} = [(5,3,1,1)]_{B_2}$

2. $[(1,1,1,1)]_{B_1} = (5,3,1,1)^t$

שאלה 12

יהיו $B = (v_1, v_2, v_3)$, $B_1 = (v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3)$ שני בסיסים של מרחב V.

1. $[v_1 - 2v_2 + v_3]_{B_1} = (1, -3, 3)^t$.

2. מטריצת המעבר מ- B ל-B_1 היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 8

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 4.1.2015

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (20 נקודות)

יהיו U ו- W התת-מרחבים הבאים של $\mathbf{R}_4[x]$:

$$U = Sp\{x^3 + 4x^2 - x + 3, x^3 + 5x^2 + 5, 3x^3 + 10x^2 + 5\}$$

$$.W = Sp\{x^3 + 4x^2 + 6, x^3 + 2x^2 - x + 5, 2x^3 + 2x^2 - 3x + 9\}$$

א. מצא בסיס ומימד עבור כל אחד מתת-המרחבים $U + W, W, U$.

ב. מהו המימד של $U \cap W$? מצא בסיס ל- $U \cap W$.

ג. מצא תת-מרחב T של $\mathbf{R}_4[x]$ כך שמתקיים $\mathbf{R}_4[x] = W \oplus T$.

שאלה 2 (15 נקודות)

יהיו U ו- W תת-מרחבים של $\mathbf{R}^4$ שמקיימים $\dim U > \dim W$.

נתון כי $U \cap W = Sp\{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(-1,0,1,2)\}$ ו- $(0,0,1,0) \notin U + W$.

מצא את מימדו של $U + W$ ולאחר מכן בסיס ל- W. נמק היטב.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונים התת- מרחבים הבאים של $\mathbf{R}^4$:

$U = Sp\{(a, a-1, 1, -4), (2,2,1,-3)\}$ ו- W מרחב הפתרונות של המערכת $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$.

מצא את ערכי a עבורם מתקיים $\dim(U \cap W) = 1$. הצג בסיס ל- $U \cap W$ במקרה זה.

שאלה 4 (15 נקודות)

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $B=\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ בסיס ל- V ו- $U\subseteq V$ תת-מרחב ממימד k, $k\le n$ אז קיימים k וקטורים ב- B הפורשים את U.

ב. אם V מרחב לינארי ממימד n ואם $m\le n$ (m מספר טבעי) אז קיים תת-מרחב U של V כך ש- $\dim U=m$.

שאלה 5 (15 נקודות)

בשדה F נתונים $a_1,a_2,...,a_m$ איברים לא כולם אפס וגם $b_1,b_2,...,b_n$ איברים לא כולם אפס.

מהי דרגתה של המטריצה $M=(m_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ כאשר $m_{ij}=a_ib_j$? נמק היטב.

שאלה 6 (15 נקודות)

יהי V מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$ ממימד 3 ויהי B בסיס שלו.

נתונים v_1,v_2,v_3,w וקטורים ב- V כך ש-

$$[v_1]_B=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},[v_2]_B=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix},[v_3]_B=\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix},[w]_B=\begin{pmatrix}5\\5\\16\end{pmatrix}$$

הוכח ש- $C=(v_1,v_2,v_3)$ בסיס ל- V ומצא את $[w]_C$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: **20109 - אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: יחידות 10,9

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: **2015א** **מועד אחרון להגשה:** 18.1.2015

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת. **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".**

שאלה 1 (15 נקודות)

בדוק אם ההעתקות הבאות הן לינאריות:

1. $T_1:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $T_1(x,y)=(\sin y,x)$.
2. $T_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $T_2(x)=[x]$, כאשר $[x]$ מסמן את הערך השלם של x .
3. $T_3:\mathbf{R}[x]\to\mathbf{R}[x]$, $T_3(p(x)=(x+1)p'(x)-p(x)$.

שאלה 2 (15 נקודות)

האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ שונה מאפס כך ש-

$T(1,0,1)=T(1,2,1)=T(0,1,1)=T(2,3,3)$?

אם כן, תן דוגמה של העתקה כזו (מספיק להגדיר אותה על בסיס). אם לא, הסבר מדוע.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ תת- קבוצת בלתי תלויה לינארית במרחב לינארי V .

תהי $T:V\to V$ היא טרנספורמציה לינארית. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

1. אם הקבוצה $\{Tv_1,Tv_2,\ldots,Tv_k\}$ בלתי תלויה לינארית אז $\dim\operatorname{Im}T=k$.
2. אם הקבוצה $\{Tv_1,Tv_2,\ldots,Tv_k\}$ פורשת את V אז $\dim V=k$.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

ותהי $T : \mathbf{M}^{\mathbf{R}}_{3\times3} \to \mathbf{M}^{\mathbf{R}}_{3\times3}$ העתקה המוגדרת על-ידי $T(X) = AX$ לכל $X \in \mathbf{M}^{\mathbf{R}}_{3\times3}$.

נסמן ב- $T_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ את הטרנספורמציה הלינארית המוגדרת על-ידי A.

(כלומר $T_A x = Ax$ לכל $x \in \mathbf{R}^3$).

א. מצא בסיס ל- $\ker T_A$ ובסיס ל- $\operatorname{Im} T_A$.

ב. הוכח ש- T טרנספורמציה לינארית לא הפיכה.

ג. מצא בסיס ל- $\ker T$ ובסיס ל- $\operatorname{Im} T$.

ד. הוכח שאם $Y \in \operatorname{Im} T$, אז $\rho(Y) \le \dim \operatorname{Im}(T_A)$.

ה. הוכח שאם $X \in \ker T$, אז $\rho(X) \le \dim \ker(T_A)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ טרנספורמציה לינארית. נתון כי $\dim(\operatorname{Im} T) < \dim(\ker T)$ וכי המטריצה המייצגת את T בבסיס $B = ((1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0))$ היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

א. מצא את a_i, b_i, c_i $(1 \le i \le 3)$.

ב. מצא בסיסים ל- $\ker T$ ול- $\operatorname{Im} T$.

שאלה 6 (15 נקודות)

א. יהי V מרחב לינארי נוצר סופית ותהי $T{:}V \to V$ טרנספורמציה לינארית.
הוכח כי אם T אינה איזומורפיזם, אז יש בסיס B של V כך ש- $[T]_B$ היא מטריצה בעלת עמודת אפסים.

ב. הוכח כי אם A היא מטריצה סינגולרית, אז A דומה למטריצה בעלת עמודת אפסים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 11, 12

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 4.2.2015

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, כאשר a מספר ממשי.

א. עבור אילו ערכי a המטריצה A לכסינה?

ב. **נקבע** $a = 1$. מצא מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש- $D = P^{-1}AP$.

שאלה 2 (25 נקודות)

<u>שאלה זו עוסקת בפולינום אופייני. אין קשר בין הסעיפים.</u>

א. הוכח שלא קיימת מטריצה מדרגה 3 עם פולינום אופייני $p(x) = x^7 - x^5 + x^3$.

ב. תהי $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ טרנספורמציה לינארית עם פולינום אופייני $p(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. הוכח שההעתקה הלינארית $2T + I$ הוא איזומורפיזם.
2. מהו הפולינום האופייני של T^3?

ג. תהי A מטריצה מסדר 5×5 כך ש- $trA = 0$ ו- $\rho(A) = 1$.
מצא את כל הערכים העצמיים שלה. <u>**רמז**</u>**:** השתמש בשאלה 26, יחידה 11.
האם A לכסינה?

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכח או הפרך ע"י דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם למטריצות A ו- B יש אותו פולינום אופייני אז יש להן אותה דרגה.

ב. יהי m מספר טבעי, $m>1$. אם $A^m = 0$, אז $\lambda = 0$ הוא הערך העצמי **היחיד** של A.

ג. המטריצות $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ו- $A = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$ דומות.

ד. המטריצות $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ דומות.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהיו $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ שני וקטורים שונים מווקטור האפס ב- $\mathbf{R}^n$. נתון כי $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ אורתוגונליים ו- $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.
מצא את כל הערכים של המספר הממשי a כך שהווקטור $\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ אורתוגונלי לווקטור $\mathbf{u} - a\mathbf{v}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

יהיו U_2, U_1 תת-מרחבים של $\mathbf{R}^n$.

א. נניח כי $\mathbf{R}^n = U_1 \oplus U_2$. הוכח כי $U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} = \{\underline{0}\}$ והסק כי $\mathbf{R}^n = U_1^{\perp} \oplus U_2^{\perp}$.

ב. נניח כי $\mathbf{R}^n = U_1 + U_2$. האם נכון כי $\mathbf{R}^n = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$?

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: **20109-אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: יחידות 9-12

מספר השאלות: 14 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: **2015א** **מועד אחרון להגשה:** 4.2.2015

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה

ב – אם רק טענה 2 נכונה

ג – אם שתי הטענות נכונות

ד – אם שתי הטענות לא נכונות

שאלה 1

נתונה ההעתקה הלינארית $T:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ המוגדרת על ידי

$T(x,y,z,t)=(x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-3t, y+z-2t)$. אז:

1. $\operatorname{Im} T = \{(1,1,1,0),(0,1,2,1)\}$

2. $\ker T = \operatorname{Sp}\{(1,-1,1,1),(0,1,1,-2)\}$.

שאלה 2

1. קיימת טרנספורמציה לינארית $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ כך ש:

$T(1,-3,2)=(1,0,2)$, $T(1,1,1)=(0,1,1)$, $T(3,-1,4)=(2,1,5)$

2. קיימת טרנספורמציה לינארית $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ כך ש:

$T(1,0,1)=(1,-1)$, $T(2,1,-1)=(1,2)$, $T(1,1,-2)=(0,3)$

שאלה 3

תהי $T:M_{2\times3}(\mathbf{R}) \to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ העתקה לינארית.

1. לא יתכן ש- T על.

2. לא יתכן ש- T חד-חד-ערכית.

שאלה 4

תהי $\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ תת-קבוצה בת"ל במרחב לינארי V ו- $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית.

1. אם $\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ לא פורשת את V אז קיימת טרנספורמציה לינארית $S:V\to V$ כך ש- $Sv_i=Tv_i$ לכל $1\le i\le k$ אך $S\ne T$.
2. אם $\{Tv_1,Tv_2,\dots,Tv_k\}$ היא בלתי תלויה אז T היא חד-חד-ערכית.

שאלה 5

תהי $T:\mathbf{R}_3[x]\to\mathbf{R}$ מוגדרת על-ידי: $T(p(x))=p(1)$.

1. $\ker T=\{(x-1)(ax+b)\,|\,a,b\in\mathbf{R}\}$.
2. $\operatorname{Im}T\subseteq\ker T$.

בשאלות 6 - 7 V הוא מרחב לינארי נוצר סופית ו- $S,T:V\to V$ הן העתקות לינאריות.

שאלה 6

1. אם $\operatorname{Im}S=\operatorname{Im}T$ ו- $\ker S=\ker T$ אז $S=T$.
2. $\ker T+\operatorname{Im}T=V$.

שאלה 7

1. $\ker S\subseteq\ker TS$.
2. $\operatorname{Im}S\subseteq\operatorname{Im}TS$.

שאלה 8

תהי $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ העתקה הלינארית שמטריצת הייצוג שלה היא $[T]_B=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&6\end{pmatrix}$

ביחס לבסיס $B=((1,1),(1,-1))$.

1. $\ker T=Sp\{(3,1)\}$.
2. $\operatorname{Im}T^2=Sp\{(-1,3)\}$.

בשאלות 9- 11 , A, B הן מטריצות מסדר $n \times n$ ו- $T: V \to V$ היא טרנספורמציה לינארית, כאשר V מרחב לינארי ממימד סופי.

שאלה 9

1. אם $\lambda = 0$ ערך עצמי יחיד של T ואם $T \neq 0$ אז T אינה לכסינה.
2. אם קיים $m > 1$ טבעי כך ש- $T^m = 0$ ואם T לכסינה אז $T = 0$.

שאלה 10

1. אם למטריצות A ו- B אותו פולינום אופייני ואותה דרגה, אז המטריצות דומות.
2. אם המטריצות A ו- B לכסינות ויש להן אותם ערכים עצמיים ולכל ערך עצמי אותו ריבוב גיאומטרי, אז המטריצות האלה דומות.

שאלה 11

1. אם $P(t)$ הפולינום האופייני של מטריצה A אז $P(0) = |A|$.
2. אם $P(t)$ הפולינום האופייני של A אז $P(t-1)$ הפולינום האופייני של $I + A$.

שאלה 12

תהי $K \neq \varnothing$ קבוצת וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$ ויהי v וקטור ב- $\mathbf{R}^n$.

1. $(K^{\perp})^{\perp} = K$
2. אם $v \notin Sp(K)$, אז $v \in (Sp(K))^{\perp}$.

שאלה 13

1. הקבוצה $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$
היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbf{R}^3$.
2. הקבוצה B מסעיף 1, מתקבלת על-ידי תהליך גרם-שמידט מ-
$\{v_1 = (1,1,1) \ , \ v_2 = (0,1,1) \ , \ v_3 = (0,0,1)\}$.

שאלה 14

יהי $W = Sp\{(1,-1,-1,1)\}$ תת-מרחב של $\mathbf{R}^4$.

1. ההיטל האורתוגונלי של $v = (1,0,1,1)$ על W הוא $(1,-1,-1,1)$.
2. ההיטל האורתוגונלי של $v = (1,0,1,1)$ על $W^{\perp}$ הוא $\frac{1}{4}(3,1,5,3)$.