ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20109

אלגברה לינארית 1

חוברת הקורס-אביב 2016ב

כתבה: ד"ר מרים רוסט

מרץ 2016 - סמסטר אביב- תשע"ו

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "אלגברה לינארית 1".

כדי להקל עליכם את לימוד הקורס, שאינו קל, השקענו מאמץ ניכר בבניית מערכת מסייעת ללימוד העצמי. תיאור המערכת כלול בחוברת זו. אנו ממליצים שתקראו את החוברת עוד בטרם תיגשו ללימוד עצמו.

בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://telem.openu.ac.il .
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכזת ההוראה בקורס היא ד"ר מרים רוסט.
ניתן לפנות אליה באופן הבא:

- בטלפון 09-7781423, בימי ג', בין השעות 10:00-12:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - myriamr@openu.ac.il.
- פקס: 09-7780631.

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיך.

ב ב ר כ ה ,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20109 /2016ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	 ממ"ן (למנחה)
1	11.3.2016-6.3.2016	יחידה 2			
2	18.3.2016-13.3.2016	יחידות 2, 3			
3	25.3.2016-20.3.2016 (ה-ו פורים)	יחידות 3, 4			
4	1.4.2016-27.3.2016	יחידה 4		ממ"ח 01 3.4.2016	ממ"ן 11 3.4.2016
5	8.4.2016-3.4.2016	יחידה 5			
6	15.4.2016-10.4.2016	יחידות 6, 7		ממ"ח 02 17.4.2016	ממ"ן 12 17.4.2016
7	22.4.2016-17.4.2016 (ו ערב פסח)	יחידה 7			
8	29.4.2016-24.4.2016 (א-ו פסח)	יחידה 7			
9	6.5.2016-1.5.2016 (ה יום הזכרון לשואה)	יחידה 8		ממ"ח 03 8.5.2016	
10	13.5.2016-8.5.2016 (ד יום הזכרון, ה יום העצמאות)	יחידה 8			ממ"ן 13 15.5.2016
11	20.5.2016-15.5.2016	יחידה 8			
12	27.5.2016-22.5.2016 (ה ל"ג בעומר)	יחידה 9		ממ"ח 04 29.5.2016	
13	3.6.2016-29.5.2016	יחידות 9, 10			ממ"ן 14 5.6.2016
14	10.6.2016-5.6.2016 (א יום ירושלים)	יחידות 10, 11			
15	17.6.2016-12.6.2016 (א שבועות)	יחידה 11			ממ"ן 15 19.6.2016
16	24.6.2016-19.6.2016	יחידה 12		ממ"ח 05 26.6.2016	ממ"ן 16 26.6.2016

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם :

1. להגיש מטלות במשקל כולל של **15 נקודות לפחות**.
2. לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.
3. לקבל בציון הסופי של הקורס **60 נקודות לפחות**.

פירוט המטלות בקורס

בקורס אלגברה לינארית 1, 5 ממ"חים ו-6 ממ"נים.

בטבלה שלפניכם מופיעה רשימת הממ"נים והממ"חים, סימוליהם, היחידות בהן הם עוסקים ומשקליהם.

אין מטלות העוסקות ביחידת ההכנה - יחידה 1 (ראה פרטים נוספים בעמ' VII של היחידה).

	נושא המטלה	משקל המטלה
ממ"ח 01	יחידות 2, 3	1 נקודות
ממ"ח 02	יחידות 4, 5	1 נקודות
ממ"ח 03	יחידות 6, 7 עד עמ' 19	1 נקודות
ממ"ח 04	יחידות 7, 8	1 נקודות
ממ"ח 05	יחידות 9-12	1 נקודות
ממ"ן 11	יחידות 2, 3	3 נקודות
ממ"ן 12	יחידות 4, 5	4 נקודות
ממ"ן 13	יחידות 6, 7, 8 עד עמ' 35	4 נקודות
ממ"ן 14	יחידות 7, 8	4 נקודות
ממ"ן 15	יחידות 9, 10	5 נקודות
ממ"ן 16	יחידות 11, 12	5 נקודות

תאריכי הגשת המטלות מופיעים בלוח זמנים ופעילויות וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא תילקחנה בחשבון בחישוב הציון הסופי. המטלות תיבדקנה על ידי המנחים כדי שהסטודנטים יוכלו לקבל משוב על עבודתם. במקרים מיוחדים של אי עמידה בלוח הזמנים, ניתן לפנות אל מרכז ההוראה.

חשוב לדעת!

- **יחידה מס' 1** (שיעור ראשון) היא יחידת הכנה לקורס והיא מיועדת ללימוד עצמי. לא יהיה תרגול על החומר הזה במסגרת המפגש.
  בנוסף תמצאו תדריך לימוד ליחידה זו ותוכלו לבדוק את עצמכם בשאלון "בחנו את עצמכם" הנמצא באתר.

- **למפגש הראשון** יש לקרוא באופן מעמיק את **יחידה 2.**

- **פתרון המטלות** הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

  כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:
  בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר.
  ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
  ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

  זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

- **מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.**

עליכם להשאיר לעצמך העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20109- אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2, 3

מספר השאלות: 13 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2016ב **מועד אחרון להגשה:** 3.4.2016

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות בממ"ח זה מופיעות שתי טענות. סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה.
ב - אם רק טענה 2 נכונה.
ג - אם שתי הטענות נכונות.
ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

נתונה המערכת הלינארית

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+y-2z=1 \\ 2x+4y+2z=4 \\ 4x-3y-z=3 \end{cases}.$$

1. למערכת זו אין פתרון.
2. יש אינסוף פתרונות למערכת שמתקבלת לאחר מחיקת המשוואה הרביעית.

שאלה 2

נתונה מערכת הלינארית

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+3y+2z+4w=0 \\ 2x+z-w=0 \end{cases} \quad (*).$$

1. למערכת יש 3 משתנים חופשיים ומשתנה אחד קשור.
2. לכל מערכת אי-הומוגנית בעלת אותה מטריצה מצומצמת כמו (*) יש פתרון.

שאלה 3

נתונה המערכת הלינארית

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ (a-1)x+(a+1)y+(a+1)z=a+1 \\ ax-(a+2)y-az=1 \end{cases},\ a \text{ פרמטר.}$$

1. למערכת זו יש פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq \pm 1, 2$.
2. אם $a=-1$ יש משתנה חופשי אחד בלבד.

שאלה 4

בשאלה זו נתייחס למערכת משוואות הומוגנית של k משוואות ב- n נעלמים.

1. אם $k<n$ אז למערכת יש אינסוף פתרונות.
2. אם למערכת יש אינסוף פתרונות אז $k<n$.

שאלה 5

יהיו $\underline{x}$ ו- $\underline{y}$ פתרונות למערכת של k משוואות ב- n נעלמים.

1. אם קיים צירוף לינארי של $\underline{x}$ ו- $\underline{y}$ שהוא פתרון למערכת, אז המערכת הומוגנית.
2. אם המערכת הומוגנית, אז כל צירוף לינארי של $\underline{x}$ ו- $\underline{y}$ הוא פתרון של המערכת.

שאלה 6

בשאלה זו נתייחס למערכת אי-הומוגנית של k משוואות ב- n נעלמים.

1. אם למערכת אין פתרון אז $k \geq n$.
2. אם המטריצה המורחבת שקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים, אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

שאלה 7

ידוע ש- $\underline{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ פתרון למערכת נתונה של k משוואות ב- n נעלמים, כאשר $k \geq 2$.

1. אם מוחקים משוואה למערכת אז יש אינסוף פתרונות למערכת שמתקבלת .
2. אם מוסיפים משוואה למערכת אז $\underline{c}$ כבר לא פתרון למערכת שמתקבלת.

שאלה 8

1. הנקודה $(1,-1,2)$ נמצאת במישור המוגדר על-ידי הנקודות $\underline{a}=(2,1,3)$ ו- $\underline{b}=(-1,4,1)$ ו- $(0,0,0)$.
2. לא קיים מספר ממשי a כך שהנקודות $\underline{c}_1=(3,a,-2)$, $\underline{c}_2=(1,0,a)$, $\underline{c}_3=(2,-1,2)$ נמצאות על אותו ישר.

שאלה 9

1. הקבוצה $\{(1,1,1,1),(2,3,1,0),(4,6,-1,0),(0,-2,5,4),(1,1,1,0)\}$ פורשת את $\mathbf{R}^4$.
2. הקבוצה $\{(-1,2,3),(2,1,1),(3,0,4),(4,-5,2)\}$ בלתי תלויה לינארית.

שאלה 10

יהי $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ בסיס ל- $\mathbf{R}^3$.

1. $\{\underline{a}+\underline{b},\underline{b}+2\underline{c},\underline{c}+3\underline{a}\}$ בסיס ל- $\mathbf{R}^3$.
2. $\{\underline{a}-2\underline{b},\underline{b}-2\underline{c},4\underline{c}-\underline{a}\}$ בסיס ל- $\mathbf{R}^3$.

שאלה 11

תהי $A=\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ קבוצת וקטורים החלקית ל- $\mathbf{R}^n$.

1. אם $k>n$ אז A פורשת את $\mathbf{R}^n$.
2. אם $k<n$ אז A בלתי תלויה לינארית.

שאלה 12

תהי A המטריצה המצומצמת של המערכת המופיעה בשאלה 2.

1. וקטורי העמודות של המטריצה A פורשים את $\mathbf{R}^3$.
2. וקטורי השורות של המטריצה A פורשים את $\mathbf{R}^4$.

שאלה 13

נסמן ב- A את המטריצה המצומצמת של מערכת לינארית אי-הומוגנית (M) וב- A' את המטריצה המורחבת שלה.

1. אם וקטורי העמודות של A' תלויים לינארית אז קיים פתרון למערכת (M).
2. אם קיים פתרון יחיד למערכת (M) אז וקטורי עמודות של A בלתי תלויים לינארית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2, 3

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2016ב **מועד אחרון להגשה:** 3.4.2016

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

אנא הקפד לנמק היטב את כל טענותיך.

שאלה 1 (15 נקודות)

פתור את המערכות הלינאריות הבאות:

א. $\begin{cases} 2x-y+4z=1 \\ x+2y-3z=6 \\ x-y+z=3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 2x+2y+8z+w+18t=0 \\ 3x+3y+3z+13w+5t=0 \\ 2x+2y+4z+3w+2t=0 \end{cases}$

לכל אחת מהן ציין מהם המשתנים הקשורים ומהם המשתנים החופשיים. נמק.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x+ay+z=1 \\ ax+a^2y+z=2+a \\ ax+3ay+z=2-t \end{cases}$$

, כאשר a,t פרמטריים ממשיים.

מצא את כל ערכי a,t עבורם:

א. יש פתרון יחיד למערכת.

ב. יש אינסוף פתרונות. מצא את הפתרון הכללי במקרה הזה.

ג. אין פתרון למערכת.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון שהווקטורים $\underline{u} = (-2,4,4,-2)$ ו- $\underline{v} = (4,-2,-2,4)$ הם פתרונות של מערכת ליניארית (M) בארבעה נעלמים, וידוע ש- $(2,2,2,2)$ אינו פתרון שלה.

א. הוכח שהמערכת אינה הומוגנית.

ב. הוכח ש- $(0,2,2,0)$ פתרון למערכת.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ בסיס ל- $\mathbf{R}^4$. נגדיר את הווקטורים

$v_3 = 4u_2 + ku_3 - 6u_4$, $v_2 = u_1 + u_2 - u_4$, $v_1 = ku_1 - u_3 + u_4$, k מספר ממשי.

א. עבור אילו ערכי k הווקטורים v_1,v_2,v_3 בלתי תלויים לינארית? תלויים לינארית?

ב. במקרים בהם v_1,v_2,v_3 תלויים לינארית, רשום את v_3 כצרוף לינארי של v_1 ו- v_2.

ג. עבור אילו ערכי k הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3,v_1,v_2\}$ פורשת את $\mathbf{R}^4$?

שאלה 5 (20 נקודות)

יהיו $u_1,\ldots,u_k,v$ וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$. נניח שניתן להציג את הווקטור v כצרוף לינארי של הווקטורים $u_1,\ldots,u_k$ ושההצגה הזאת יחידה.

א. הוכח כי הווקטורים $u_1,\ldots,u_k$ בלתי תלויים לינארית.

בסעיפי ב', ג' נניח שקיים וקטור $w \in \mathbf{R}^n$ כך שלמשוואה $x_1u_1 + \ldots + x_ku_k = w$ אין פתרון.

ב. הסק כי $k < n$.

ג. הוכח כי הקבוצה $\{u_1,\ldots,u_k,w\}$ בלתי תלויה לינארית.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20109- אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 4, 5

מספר השאלות: 15 | **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2016ב | **מועד אחרון להגשה:** 17.4.2016

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות בממ"ח זה מופיעות שתי טענות. סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה.
ב - אם רק טענה 2 נכונה.
ג - אם שתי הטענות נכונות.
ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

במטלה זו כל מטריצה בעלת איברים ממשיים.

שאלה 1

תהיינה A מטריצה מסדר $m\times n$ ו- B מטריצה מסדר $n\times m$.

1. אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.
2. אם $AB=0$ אז $BA=0$.

שאלה 2

תהיינה B,A שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר.

1. $A^2-4I=(A-2I)(A+2I)$.
2. $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

שאלה 3

תהיינה B,A שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר.

1. המטריצה AB^t+BA^t סימטרית.
2. אם A סימטרית ו- B אנטיסימטרית אז $A^5B^3-B^3A^5$ אנטיסימטרית.

<u>תזכורת</u>: מטריצה C היא **אנטיסימטרית** אם ורק אם היא מקיימת $C^t=-C$.

שאלה 4

1. אם A סינגולרית אז יש בה שורת אפסים.
2. אם A שקולת שורות למטריצה סינגולרית אז גם A סינגולרית.

שאלה 5

1. אם A מטריצה רגולרית סימטרית אז A^{-1} סימטרית.
2. לכל מטריצה A המטריצה AA^t היא סימטרית.

שאלה 6

1. אם A היא מטריצה מסדר 2×1 ו- B היא מטריצה 1×2 אז BA היא רגולרית.
2. אם A רגולרית אז A^n רגולרית.

שאלה 7

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n .

1. אם יש פתרון יחיד למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ אז קבוצת העמודות של A הינה בסיס ל- $\mathbf{R}^n$.
2. אם $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$ בסיס ל- $\mathbf{R}^n$ ואם לכל $1\le i\le n$ יש פתרון למערכת $A\underline{x}=\underline{b}_i$ אז A רגולרית.

שאלה 8

תהיינה A ו- B מטריצות הפיכות מאותו סדר. אז :

1. $ABA^{-1}=B$.
2. $(ABA^{-1})^5=AB^5A^{-1}$.

שאלה 9

1. אם A מטריצה הפיכה ו- B מטריצה שקולת שורות ל- A אז B הפיכה.
2. לא קיימת מטריצה C הפיכה כך ש-

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -5\\ -14 & -7 & 35\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & -13\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

שאלה 10

1. אם A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר כך ש- $\det A=\det B$ אז $\det(A+B)=2\det A$.
2. אם A,B מטריצות ריבועיות מסדר 3 כך ש- $\det A=2$ ו- $\det B=-1$ אז $\det(-2(A^{-1})^4B^3)=\frac{1}{8}$.

שאלה 11

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 22$.

2. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

שאלה 12

1. המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ היא סינגולרית.

2. המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$ היא רגולרית לכל x שונה מ-1.

שאלה 13

תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות מאותו סדר n.

1. אם $A^2 = A$ ואם $|A| \neq 0$ אז $A = I$.
2. אם $ABA = -B$ ואם n אי- זוגי אז B סינגולרית.

שאלה 14

תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות מאותו סדר n.

1. אם קיים $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ כך ש- $B\underline{x} \neq 0, A\underline{x} = \underline{0}$ אז A ו- B אינן שקולות שורות.
2. אם למערכת $A\underline{x} = \underline{0}$ יש הפתרון הטריוויאלי בלבד, אז כל וקטור ב- $\mathbf{R}^n$ הוא צירוף לינארי של עמודות A.

שאלה 15

תהיינה A, B שתי מטריצות מאותו סדר.

1. אם $AB = 0$ אז יש פתרון לא טריוויאלי למערכת הומוגנית $A\underline{x} = \underline{0}$.
2. אם A סינגולרית, אז קיימת מטריצה B שונה מאפס כך ש- $A^5 B = A^2 B$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 4, 5

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2016ב **מועד אחרון להגשה:** 17.4.2016

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (10 נקודות)

תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת $A^3=0$ ו- $A^2\neq 0$.

א. הוכח שיש וקטור v ב- $\mathbf{R}^3$ כך ש- $A^2v\neq \underline{0}$.

<u>**רמז**</u>: הערה בתחילת עמ' 10 בנספח ההדרכה.

ב. היעזר בסעיף א' כדי להוכיח שקיים וקטור v ב- $\mathbf{R}^3$ כך שהקבוצה $\{v, Av, A^2v\}$ היא בסיס של $\mathbf{R}^3$.

שאלה 2 (12 נקודות)

תהיינה A,B,C,D מטריצות מסדר $n\times n$ המקיימות $ABCD=I$.

הוכח שמתקיים $ABCD=DABC=CDAB=BCDA=I$.

שאלה 3 (12 נקודות)

תהיינה A מטריצה מסדר $m\times m$ ו- B מטריצה מסדר $m\times n$.

הוכח **בשתי דרכים שונות** שאם A הפיכה אז למערכות ההומוגניות $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ו- $AB\mathbf{x}=\mathbf{0}$ יש אותו מרחב פתרונות.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהיו $a_1,\dots,a_n$ מספרים ממשיים שונים מ-0. נתונה המטריצה הבאה מסדר $n\times n$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

הוכח ש- A הפיכה וחשב את A^{-1} .

שאלה 5 (15 נקודות)

תהיינה A, B מטריצות מסדר 3×3 כך ש- $B^2A=-2B^3$ וגם $B^3+AB^2=3I$.

הוכח ש- A ו- B הפיכות ובטאו את A^{-1} ו- B^{-1} באמצעות B .

שאלה 6 (20 נקודות)

א. חשב את הדטרמיננטה הבאה:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & 2 \\ . & . & . & . & 1 & 3 & 1 \\ . & . & . & . & 4 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & n-1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & n & 1 & . & . & . & 1 \end{vmatrix} .$$

ב. יהיו $a_1,\dots,a_n$ מספרים ממשיים. נגדיר:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & 1+a_1^n \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & 1+a_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & 1+a_{n-1}^n \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & 1+a_n^n \end{vmatrix} \quad \text{ו-} \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & 1 \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & 1 \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix} .$$

הוכח שאם $\Delta=0$ ו- $\Delta_1\neq 0$ אז המכפלה $a_1\cdots a_n$ של המספרים $a_1,\dots,a_n$ שווה ל- (-1).

<u>רמז</u>: משפט III.40 ב'

שאלה 7 (16 נקודות)

תהיינה A , B מטריצות ממשיות מסדר 3×3 כך ש- $A^t=-A$.

א. הוכח שקיים פתרון לא טריוויאלי למערכת $(A^2B)\underline{x}=\underline{0}$.

ב. נניח גם ש- $B^t=B$ ושתי המטריצות A , B שונות ממטריצת האפס.

האם המטריצה $(A+B)^2$ סימטרית? הפיכה?

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20109- אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6, 7 עד עמ' 19

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: **2016ב** **מועד אחרון להגשה:** 8.5.2016

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות בממ"ח זה מופיעות שתי טענות.סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה.
ג - אם שתי הטענות נכונות.
ב - אם רק טענה 2 נכונה.
ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

במטלה זו z, z_1, z_2, z_3 **ו-** w **הם מספרים מרוכבים,** x **ו-** y **הם מספרים ממשיים.**

שאלה 1

1. קבוצת כל המטריצות המשולשיות (גם עליון וגם תחתון) מסדר $n\times n$ מעל שדה F היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל של מטריצות.
2. קבוצת כל המטריצות הסקלריות מסדר $n\times n$ מעל שדה F היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל של מטריצות.

שאלה 2

1. $x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$.
2. $(2+i)^3=2-11i$.

שאלה 3

1. $(1+i)^{200}=2^{100}$.
2. $\left|\frac{(2+3i)^6}{(3+i)^4(3-2i)^5}\right|=\frac{\sqrt{13}}{10}$.

שאלה 4

1. $\mathrm{Re}\left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4\right)=2$.

2. $\mathrm{Im}\frac{z-1}{z+1}=\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z+1|^2}$ לכל $z\in\mathbf{C}$, $z\neq -1$.

שאלה 5

1. אם z_1 הוא פתרון למשוואה $z^2+iz+2=0$ אז גם $\overline{z}_1$ פתרון שלה.

2. אם z_2 הוא פתרון למשוואה $3z^5-z^4+7z+2=0$, אז גם $\overline{z}_2$ הוא פתרון שלה.

שאלה 6

1. ההצגה הטריגונומטרית של $-1-i$ היא $-\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

2. ההצגה הטריגונומטרית של $\sqrt{3}-i$ היא $2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$.

שאלה 7

1. כל הפתרונות של המשוואה $z^4=-4$ הם $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.

2. כל הפתרונות של המשוואה $z^3+1=0$ הם $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$, $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$, -1 .

שאלה 8

1. למערכת $\begin{cases}(1+i)z_1+iz_2+z_3=1\\ iz_1-z_2+iz_3=i\\ iz_1+iz_2+z_3=1\end{cases}$ יש אינסוף פתרונות.

2. אם $w\neq 1$, $w^3=1$ אז המטריצה $\begin{bmatrix}1 & w & w^2\\ w & 1 & w^2\\ w^2 & w & 1\end{bmatrix}$ היא הפיכה.

רמז: לכל $z\in\mathbf{C}$ מתקיים $z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1)$.

שאלה 9

1. הקבוצה $A=\{(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2 \mid \alpha\geq 0\}$ היא תת-מרחב של $\mathbf{R}^2$ עבור הפעולות הרגילות.

2. הקבוצה $\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2 \mid z_2\in\mathbf{R}\}$ היא תת-מרחב של $\mathbf{C}^2$ (מעל $\mathbf{C}$) עבור הפעולות הרגילות.

שאלה 10

1. הקבוצה $\left\{X \in \mathbf{M}_{n\times n}^{\mathbf{R}} \mid X = X^t\right\}$ היא תת-מרחב של $\mathbf{M}_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ עבור הפעולות הרגילות.
2. הקבוצה $B = \left\{A \in \mathbf{M}_{n\times n}^{\mathbf{C}} \mid A_{\downarrow 1} = (1-2i)A_{\downarrow 2}\right\}$ היא תת-מרחב של $\mathbf{M}_{n\times n}^{\mathbf{C}}$, $n \geq 2$ עבור הפעולות הרגילות.

   (סימון: $A_{\downarrow j}$ היא העמודה ה- j ב- A)

שאלה 11

1. הקבוצה $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ היא תת-מרחב של $\mathbf{R}^2$ עבור הפעולות הרגילות.
2. הקבוצה $\{p(x) \in \mathbf{C}[x] \mid p(x) = p(\overline{x})\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbf{C}[x]$ (מעל $\mathbf{R}$) עבור הפעולות הרגילות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 7,6 עד עמ' 35

מספר השאלות: 6   **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2016ב   **מועד אחרון להגשה:** 15.5.2016

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (15 נקודות)

א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^3 + 3i\,\overline{z} = 0$.

ב. יהיו z_1, z_2 מספרים מרוכבים.

הוכח שאם $z_1 z_2 \neq -1$ ו- $|z_1| = |z_2| = 1$ אז המספר $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ממשי.

שאלה 2 (10 נקודות)

נסמן ב- $\mathbf{Q}$ שדה המספרים הרציונליים.

האם הקבוצה $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ היא שדה ביחס לפעולות חיבור וכפל הרגילות של המטריצות?

שאלה 3 (20 נקודות)

עבור כל אחד מהמקרים הבאים בדוק האם הקבוצה V מהווה מרחב לינארי מעל השדה F ביחס לפעולות הנתונות:

א. $V = M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$, $F = \mathbf{C}$, עם החיבור הרגיל והכפל בסקלר מסומן $*$ ומוגדר ע"י $\lambda * A = |\lambda| A$.

ב. $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 2x\}$, $F = \mathbf{R}$, עם החיבור הרגיל ב- $\mathbf{R}^2$ והכפל בסקלר מסומן $\otimes$ ומוגדר ע"י $\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, 0)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונות הקבוצות :

א. $K = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+y-z+t=0 \;\; and \;\; 2x+y+z-3t=0 \right\}$.

ב. $L = \{ f \in V \mid f(\frac{1}{2}) > f(2) \}$, כאשר V הוא מרחב הפונקציות מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$.

ג. $M = \{ p(x) \in \mathbf{R}_4[x] \mid p(-3) = 0 \}$.

ד. $R = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0 \}$.

ה. $S = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0 \}$.

בדוק אלו מהקבוצות האלה הן מרחבים לינאריים, ביחס לפעולות הרגילות. אם תשובתך שלילית, נמק אותה, אם היא חיובית, הוכח אותה <u>בשתי הדרכים</u> הבאות :

(i) באמצעות אחד הבחנים לתת-מרחב, V.8 או V.8'.

(ii) ע"י מציאת קבוצה סופית S של וקטורים, כך שהקבוצה בנדון שווה ל- $\mathrm{Sp}(S)$.

שאלה 5 (15 נקודות)

יהי מרחב לינארי V ויהיו v_1, v_2, v_3 וקטורים ב- V, שונים זה מזה.

הוכח או הפרך, ע"י דוגמה נגדית, כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם $Sp\{v_1, v_2\} = Sp\{v_1, v_3\}$ אז הווקטורים v_2, v_3 תלויים לינארית.

ב. אם $v_1 - 2v_2 + v_3 = \mathbf{0}$ אז $Sp\{v_1, v_2\} = Sp\{v_1, v_3\}$.

ג. אם הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ תלויה לינארית, אז $Sp\{v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ $= Sp\{v_1, v_2\}$.

שאלה 6 (15 נקודות)

נתונים התת-מרחבים הבאים של $\mathbf{R}^4$:

$U = Span\{(1,1,2),(2,2,1)\}$ ו- $W = Sp\{(1,3,4),(2,5,1)\}$.

מצא קבוצה פורשת עבור $U \cap W$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 7, 8

מספר השאלות: 12   **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2016ב   **מועד אחרון להגשה:** 29.5.2016

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות בממ"ח זה מופיעות שתי טענות.סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה.

ב - אם רק טענה 2 נכונה.

ג - אם שתי הטענות נכונות.

ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

בשאלות 1-4 V הוא מרחב לינארי, K ו- T הן תת- קבוצות של V ו- U, W, W' הם תת-מרחבים של V.

שאלה 1

1. אם $S \neq T$ אז $Sp(S) \neq Sp(T)$.
2. אם $Sp(S) \cap Sp(T) = \{\mathbf{0}\}$ אז $S \cap T = \varnothing$.

שאלה 2

1. $\mathrm{Sp}(K) + \mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(K+T)$.
2. אם $V = \mathrm{Sp}(K) + \mathrm{Sp}(T)$ אז $K \cup T$ בסיס של V.

שאלה 3

1. אם $K \cap T = \varnothing$, אז הסכום $\mathrm{Sp}(K) + \mathrm{Sp}(T)$ הוא סכום ישר.
2. אם הסכום $\mathrm{Sp}(K) + \mathrm{Sp}(T)$ הוא סכום ישר ומתקיים $\mathrm{Sp}(K \cup T) = \mathrm{Sp}(K) \oplus \mathrm{Sp}(T)$ אז $K \cup T$ בלתי תלויה.

שאלה 4

נסמן ב- K את קבוצת השורות וב- T את קבוצת העמודות של מטריצה A מסדר $m\times n$.

נסמן ב- K_1 את קבוצת השורות וב- T_1 את קבוצת העמודות של מטריצה שקולת שורות ל-A.

1. $\mathrm{Sp}(K)=\mathrm{Sp}(K_1)$.
2. $\mathrm{Sp}(T)=\mathrm{Sp}(T_1)$.

שאלה 5

1. $Sp\{(1,-2,-1,2),(1,0,-1,0),(0,2,1,0)\}\oplus\{(-a-b,a,b,0)\mid a,b\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}^4$.
2. יהי V מרחב לינארי ויהיו v_1,v_2,v_3,v_4 וקטורים ב-V, שונים זה מזה.

   אם $V=Sp\{v_1,v_2\}\oplus Sp\{v_3,v_4\}$ אז הווקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 בלתי תלויים לינארית.

שאלה 6

נניח שהסכום של U ו- W ישר וגם הסכום של U ו- W'.

1. אם $x\in U\oplus W$ ואם $x\notin U$ אז $x\in W$.
2. אם $U\oplus W=U\oplus W'$ אז $W=W'$.

שאלה 7

1. $\{(3-2i,1+i),(2,1-5i)\}$ בלתי תלויה במרחב $\mathbf{C}^2$ מעל $\mathbf{R}$.
2. הקבוצה $\{ix^2+x-i,\, x^2-ix+1,\, x^2-ix\}$ בלתי תלויה מעל $\mathbf{C}$ וגם מעל $\mathbf{R}$.

שאלה 8

1. לכל שני תת-מרחבים ממימד 4 ב- $\mathbf{R}^7$ יש וקטור משותף שונה מ- 0.
2. קיים תת-מרחב $U\neq\{0\}$ ב- $\mathbf{R}^3$ כך ש-

$$U\cap\mathrm{Sp}\{(1,0,0),(0,1,0)\}=U\cap\mathrm{Sp}\{(0,1,0),(0,0,1)\}=U\cap\mathrm{Sp}\{(1,0,0),(0,0,1)\}=\{0\}$$

שאלה 9

יהיו U, W תת-מרחבים של מרחב לינארי נוצר סופית V.

1. אם $\dim(U\cap W)=\dim U$ אז $U\subseteq W$.
2. אם $\dim U=2$, $\dim W=3$, $\dim V=4$ ואם $U\not\subseteq W$ אז $\dim(U\cap W)=1$.

שאלה 10

יהי B_0 הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^3$ ו- $B_1 = ((1,0,-1),(0,-1,1),(1,1,0))$ בסיס אחר של $\mathbf{R}^3$.

1. וקטור הקואורדינטות של $(1,0,2)$ בבסיס B_1 הוא $(2,1,-1)$.
2. מטריצת המעבר מ- B_1 ל- B_0 היא $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

שאלה 11

1. מטריצת המעבר מהבסיס (v_1, v_2, v_3) לבסיס $(v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_1)$ של מרחב לינארי ממימד 3 היא $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. אם M היא מטריצת המעבר מבסיס B_1 לבסיס B_2 של מרחב לינארי V,
ואם P היא מטריצת המעבר מבסיס B_2 לבסיס B_3 של אותו מרחב, אז PM היא מטריצת המעבר מ- B_1 ל- B_3.

שאלה 12

תהיינה A, B שתי מטריצות מאותו סדר. נניח ש- $\rho(A) = \rho(B) = \rho(AB)$.

1. מרחב הפתרונות של המערכת $B\underline{x} = \underline{0}$ שווה למרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x} = \underline{0}$.
2. מרחב הפתרונות של המערכת $AB\underline{x} = \underline{0}$ שווה למרחב הפתרונות של המערכת $B\underline{x} = \underline{0}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 8,7

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: **2016ב** **מועד אחרון להגשה:** 5.6.2016

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (15 נקודות)

בסעיפים הבאים f,g,h הן פונקציות מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$.

בכל אחד מהמקרים הבאים בדוק האם הפונקציות בלתי תלויות לינארית:

א. $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $h(x)=x\cos x$.

ב. $f(x)=x(x-1)$, $g(x)=x(x-2)$, $h(x)=(x-1)(x-2)$.

ג. $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=\cos^2 x$, $h(x)=3$.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונות תת-הקבוצות הבאות של $\mathbf{R}^4$:

$$U=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid x-y+z=0 \;\; and \;\; x-y-2t=0\right\}$$

ו- $W=\mathrm{Sp}\left\{(1,0,1,1),(0,1,0,-1),(1,0,1,0)\right\}$.

א. הוכח ש- U ו- W הם תת-מרחבים של $\mathbf{R}^4$.

ב. מצא בסיס ל- U, בסיס ל- W ובסיס ל- $U+W$.

ג. מצא בסיס ל- $U\cap W$.

ד. מצא תת-מרחב T של $\mathbf{R}^4$ שמקיים $U\oplus T=\mathbf{R}^4$.

שאלה 3 (15 נקודות)

יהיו $v_1, v_2, \ldots, v_k, w$ וקטורים במרחב לינארי V.

נתון שהקבוצה $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ בלתי תלויה לינארית וגם ש- $w \notin Sp\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

הוכח ש- $v_1 \notin Sp\{v_1 + w, v_2 + w, \ldots, v_k + w\}$.

שאלה 4 (10 נקודות)

יהיו U, W שני תת-מרחבים שונים של $\mathbf{R}^5$, ממימד 3. נניח ש- $(2,1,0,1), (1,0,1,1) \in U \cap W$.

מהו מימדו של $U + W$?

שאלה 5 (20 נקודות)

תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מסדר n, $n \geq 2$.

א. נניח ש- A ו- B מדרגה 1. מהן האפשרויות עבור הדרגה של $A + B$?
תן דוגמה לכל אחת מהאפשרויות האלה.

ב. אותה שאלה כאשר A ו- B מדרגה 2.

ג. הוכח שניתן לרשום כל מטריצה מדרגה 2 כסכום של 2 מטריצות מדרגה 1.

שאלה 6 (15 נקודות)

נתונים הבסיסים $B = (u_1, u_2, u_3)$ ו- $C = (v_1, v_2, v_3)$ של $\mathbf{R}^3$, כאשר

$u_1 = (2,1,1), u_2 = (2,-1,1), u_3 = (1,2,1)$ ו- $v_1 = (3,1,-5), v_2 = (1,1,-3), v_3 = (-1,0,2)$.

א. רשום את מטריצת המעבר מ- B ל- C ומטריצת המעבר מ- C ל- B.

ב. חשב את וקטור הקואורדינטות $[w]_B$ של הווקטור $w = (-5,8,-5)$ ביחס לבסיס B.

ג. השתמש במטריצת המעבר המתאים לחישוב של $[w]_C$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 10,9

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה**: 4 נקודות

סמסטר: **2016ב** **מועד אחרון להגשה**: 19.6.2016

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (10 נקודות)

לכל אחת מההעתקות הבאות בדוק האם היא טרנספורמציה לינארית:

א. $T:\mathbf{R}_2[x]\to\mathbf{R}_4[x]$ המוגדרת על-ידי $T(f(x))=(x^3-x)f(x^2)$

ב. $T:\mathbf{M}_{n\times n}^{\mathbf{R}}\to\mathbf{M}_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ המוגדרת על-ידי $T(X)=AXA$ כאשר $A\in\mathbf{M}_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ מטריצה נתונה.

שאלה 2 (15 נקודות)

א. האם קיים איזומורפיזם $T:\mathbf{R}_3[x]\to\mathbf{R}^3$ המקיים:

$T(x^2-2)=(1,0,-1)$, $T(x+1)=(0,1,1)$, $T(x^2+2x)=(1,2,1)$.

ב. נניח כי V מרחב לינארי ו- $S,T:V\to V$ טרנספורמציות לינאריות.
הוכח את הטענה הבאה:
אם המימד של V סופי ו- $\ker S=\{0\}$ אז $\mathrm{Im}TS=\mathrm{Im}T$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $T:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^5$ טרנספורמציה לינארית שמקיימת $T^2=0$.

א. הוכיחו כי $\mathrm{Im}T\subseteq\ker T$.

ב. מהן האפשרויות עבור המימד של $\ker T$?

ג. יהי U תת-מרחב של $\mathbf{R}^5$ כך ש- $\dim U=3$. הוכח כי $U\cap\ker T\neq\{\underline{0}\}$.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי $a \in \mathbf{R}$ ותהי $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ טרנספורמציה לינארית המיוצגת בבסיס הסדור $B=\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ על ידי המטריצה $[T]_B = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ a & 2a & 2a+2 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{pmatrix}$.

נתון כי $(2,2,2) \in \ker T$.

א. מצא את ערך הקבוע a וחשב את $T(x,y,z)$ לכל $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

ב. מצא את המטריצה המייצגת את T בבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^3$.

ג. מצא בסיסים ל- $\operatorname{Im} T$ ול- $\ker T$.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ העתקה הלינארית המוגדרת על- ידי $T(x,y)=(x+2y,y)$.

א. מצא בסיס B של $\mathbf{R}^2$ כך שמטריצת הייצוג $[T]_B$ של T ביחס לבסיס B היא $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ב. הסק שהמטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ דומות.

שאלה 6 (15 נקודות)

יהיו $a,b,c \in \mathbf{R}$. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות זו לזו:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 11 ו- 12

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: **2016ב** **מועד אחרון להגשה:** 26.6.2016

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי $T:\mathbf{R}_3[x]\to\mathbf{R}_3[x]$ טרנספורמציה לינארית המוגדרת על-ידי:

$$T(1)=3+2x+4x^2,\ T(x)=2+2x^2,\ T(x^2)=4+2x+3x^2$$

א. מצא בסיס לכל אחד מהמרחבים העצמיים של T.

ב. האם הטרנספורמציה T לכסינה? נמק את תשובתך.

שאלה 2 (15 נקודות)

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

א. עבור אילו ערכי b,a המטריצה הזאת לכסינה? נמק היטב.

ב. בכל אחד מהמקרים ש- A לכסינה, רשום מטריצה אלכסונית ש- A דומה לה.

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי A מטריצה סינגולרית מסדר 3×3 שמקיימת $\rho(A+5I)<\rho(A)$.

האם A לכסינה? נמק היטב את תשובתך.

שאלה 4 (15 נקודות)

תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3, עם פולינום אופייני $p(t)=t^3+2t^2-3t$.

א. הוכח שהמטריצה A^2+A-2I לכסינה ומצא מטריצה D אלכסונית הדומה לה.

ב. מצאו את העקבה של A^2.

שאלה 5 (15 נקודות)

תהי A מטריצה מסדר 6×6 בעלת עקבה 6 וכך ש- $\rho(A-2I)=4$ ו- $\rho(A-I)=3$.

האם A לכסינה?

שאלה 6 (15 נקודות)

תן דוגמה לטרנספורמציה לינארית $T:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ שמקיימת

$\left(\ker T\right)^{\perp}=Sp\{(1,2,0,4),(-1,0,1,0)\}$ וגם $T(1,0,1,1)=(1,2,1,1)$.

(מספיק להגדיר את $T(x,y,z,t)$ על בסיס מתאים)

שאלה 7 (10 נקודות)

יהיו v_1,v_2 שני וקטורים שונים מ-0 ושונים זה מזה ב- $\mathbf{R}^n$.

הוכח ש- $\{v_1\}^{\perp}=\{v_2\}^{\perp}$ אם ורק אם הקבוצה $\{v_1,v_2\}$ תלויה לינארית.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 9- 12

מספר השאלות: 18 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2016ב **מועד אחרון להגשה:** 26.6.2016

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות בממ"ח זה מופיעות שתי טענות.

סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה.

ב - אם רק טענה 2 נכונה.

ג - אם שתי הטענות נכונות.

ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. אם $T{:}\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ מוגדרת על-ידי: $T(x,y,z)=(x-y+2z,2y-z,x+y+z)$,
אז $\operatorname{Im} T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x+y=z\}$.
2. אם $T{:}\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ היא טרנספורמציה לינארית המקיימת $T(0,1,1)=(-1,1,1)$,
$T(1,0,1)=(1,-1,1)$ ו- $T(1,1,0)=(1,-1,0)$, אז $\ker T = \operatorname{Sp}(\{(1,-1,1)\})$.

שאלה 2

1. קיימת טרנספורמציה לינארית $T{:}\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ כך ש- $\ker T = \operatorname{Im} T$.
2. קיימת טרנספורמציה לינארית $T : \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}_3[x]$ כך ש-
$T(x^2-1)=1, T(x^2+x)=x, T(x+1)=2x-2$.

שאלה 3

בשאלות זו, V הוא מרחב לינארי **נוצר סופית** ו- $S,S_1,T:V\to V$ הן טרנספורמציות לינאריות.

1. אם $TS=TS_1$ אז $S=S_1$.
2. אם $ST=S_1T$ ואם $\ker T=\{0\}$ אז $S=S_1$.

שאלה 4

יהיו U, W מרחבים לינאריים ממימד סופי ותהי $T: U \to W$ טרנספורמציה לינארית.

1. אם $\dim U < \dim W$ אז T אינה על.
2. אם $\dim U > \dim W$ אז $\ker T \neq \{0\}$.

שאלה 5

1. כל העתקה לינארית מ- $\mathbf{R}^9$ ל- $M_{3\times 3}^{\mathbf{R}}$ היא איזומורפיזם.
2. קיים תת-מרחב של $M_{2\times 3}^{\mathbf{R}}$ איזומורפי ל- $\mathbf{R}_4[x]$.

בשאלות 6-7 נתונות טרנספורמציות לינאריות $T, S: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ המוגדרות על-ידי $T(x, y) = (x - y, x + 2y)$, $S(x, y) = (x - 2y, x + y)$. נסמן ב- B את הבסיס הסדור $((1,1), (-1,1))$ וב- E את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$.

שאלה 6

1. $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\left[T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$

שאלה 7

1. $[TS]_B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.
2. $M^{-1}[T]_E[S]_E M = [TS]_B$, כאשר $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

שאלה 8

1. כל שתי מטריצות רגולריות מאותו הסדר דומות זו לזו.
2. כל שתי מטריצות שקולות שורות מאותו הסדר דומות זו לזו.

שאלה 9

1. כל מטריצה ריבועית סינגולרית דומה למטריצה בעלת עמודת אפסים.
2. כל מטריצה רגולרית דומה למטריצת היחידה.

שאלה 10

תהיינה A , B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$.

1. AB דומה ל- BA .
2. אם A ו- B דומות אז לכל שתי מטריצות רגולריות P, Q מסדר $n\times n$, המטריצות $P^{-1}AP$ ו- $Q^{-1}BQ$ דומות.

שאלה 11

יהי V מרחב לינארי ממימד סופי ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.

1. אם $\lambda=0$ ערך עצמי יחיד של T ואם $T\neq 0$ אז T אינה לכסינה.
2. אם קיים $m>1$ טבעי כך ש- $T^m=0$ ואם T לכסינה אז $T=0$.

בשאלות הבאות השדה הוא R או C.

שאלה 12

תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר.

1. אם המטריצות A ו- B דומות אז לכל ערך עצמי שלהן יש אותו ריבוב אלגברי.
2. יש אותם ערכים עצמיים ל- A ולמטריצה המדרגות הקנונית השקולה לה.

שאלה 13

תהי A מטריצה ריבועית.

1. אם הפולינום האופייני של A הוא $p(t)=t^2+1$ אז A הפיכה.
2. אם 0 הוא ערך עצמי של A אז העמודות של A תלויות לינארית.

שאלה 14

תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר.

1. אם A ו- B ניתנות ללכסון על-ידי אותה מטריצה מלכסנת אז $AB=BA$.
2. אם קיימת מטריצה P שמלכסנת את A וגם את B אז $A+B$ לכסינה.

שאלה 15

1. המטריצות $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ דומות.
2. המטריצות $\begin{pmatrix}i\sqrt{2} & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -i\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}i & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -i\end{pmatrix}$ אינן דומות.

שאלה 16

יהיו U, W תת מרחבים של $\mathbf{R}^n$.

1. אם $U \subseteq W$ אז $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$.
2. $U^{\perp} \cap W^{\perp} = (U \cap W)^{\perp}$.

שאלה 17

יהי $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 0\}$.

1. המשלים האורתוגונלי של U הוא תת-מרחב ממימד 2.
2. ההיטל האורתוגונלי של $v = (1,0,1)$ על $U^{\perp}$ הוא $(-0.5, 0.5, 0)$.

שאלה 18

1. הקבוצה $B = \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right)$ היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbf{R}^3$.
2. הקואורדינטה השנייה של הווקטור $v = (2,0,5)$ ביחס לבסיס B היא $\frac{8}{3}$.