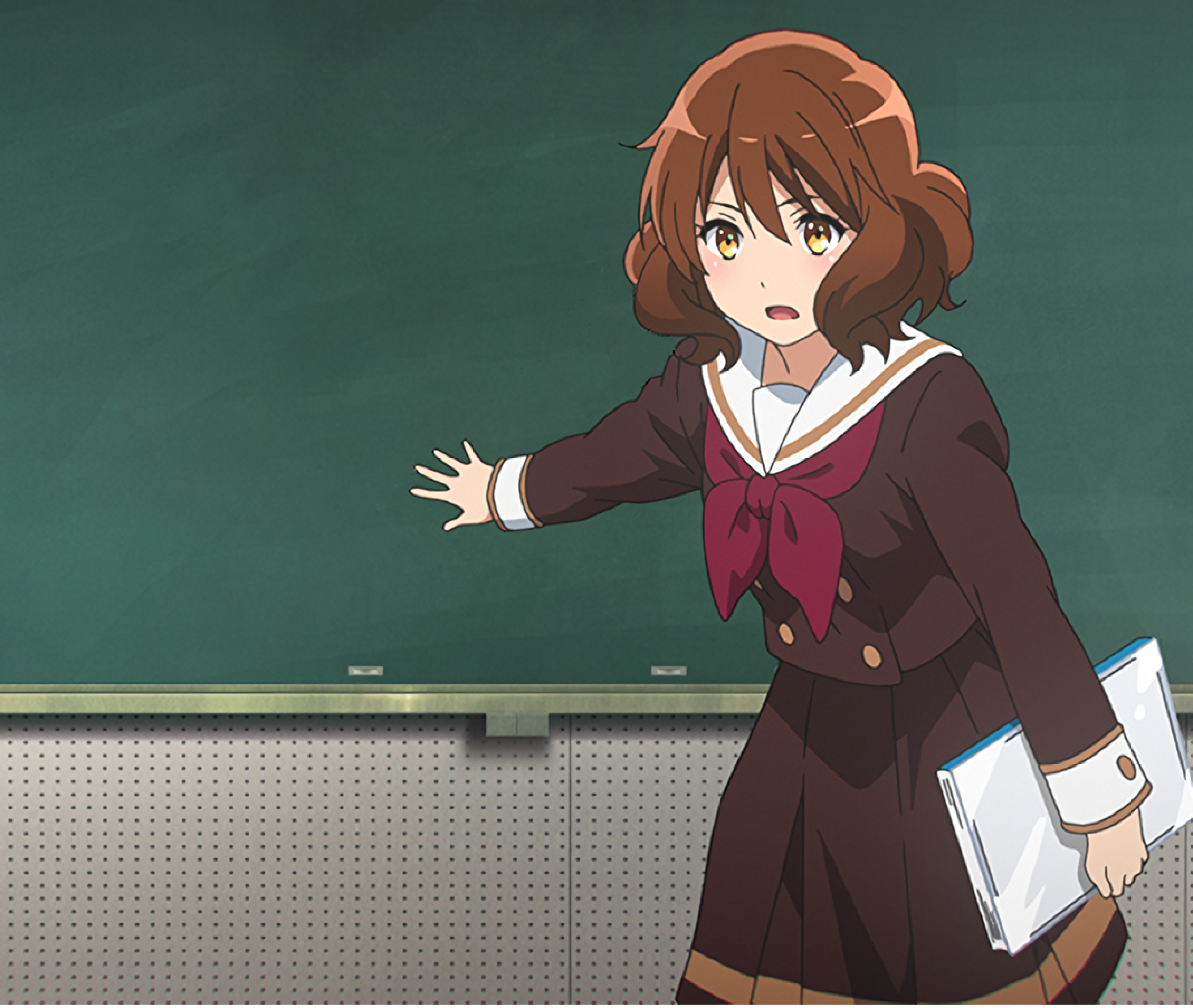


数学分析教程

作者：ww7ide
组织：Kitauji Math Dept.
时间：Jan. 2024

星星之火，可以燎原。

目录

第 1 章　预备知识

第 2 章　收敛

从本章开始, 我们终于进入分析的领域. 数学的这一分支在很大程度上是建立在 "收敛" 这一概念之上的. 借助收敛, 我们在某种意义上得以把无穷多个数 (或向量) "加" 在一起. 能够处理这样的无限运算, 正是分析与代数之间本质区别之所在.

试图把关于数列收敛的朴素想法加以公理化, 会自然地引出 "距离"、"点的邻域" 以及 "度量空间" 等概念——这正是第 1 节的主题. 在数列这一特殊情形中, 我们可以利用数域 $\mathbb{K}$ 的向量空间结构, 对这种情形下各种证明的分析表明: 只要有某种类似 "绝对值" 的概念可用, 其中大多数证明都可以推广到向量空间中的向量序列. 于是我们很自然地被引向去定义 "赋范向量空间"——度量空间中一个尤其重要的类别.

在所有赋范向量空间中, 内积空间由于其结构更为丰富而显得格外重要, 并且它们的几何性质与我们熟悉的平面 Euclidean 几何非常相似. 事实上, 在初等分析中, 最重要的一类内积空间就是 m-维 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{C}^m$.

在第 4 和第 5 节中, 我们回到最简单的情形, 也就是在 $\mathbb{R}$ 中的收敛问题. 借助实数的序结构, 尤其是 $\mathbb{R}$ 的序完备性, 我们推导出第一批 "具体的收敛判别准则". 这些准则使我们能够求出许多重要数列的极限. 除此之外, 我们还将从 $\mathbb{R}$ 的序完备性出发, 得到一个根本性的存在性原理——Bolzano-Weierstrass 定理.

第 6 节专门讨论度量空间中的 "完备性" 概念. 将这一概念限制到赋范向量空间, 就得到了 "Banach 空间" 的定义. 这类空间最基本的例子就是 $\mathbb{K}^m$, 但我们还将说明: 有界函数构成的函数空间也是 Banach 空间.

Banach 空间在分析中无处不在, 因此在本书的叙述中居于核心地位. 即便如此, 它们的结构仍然足够简单, 使得初学者可以在不太费力的情况下, 从理解实数自然过渡到理解 Banach 空间. 再者, 对这些空间的较早引入, 也使得我们在后面章节中能够给出简洁而优美的证明.

为了内容的完整性, 也为了读者整体 (数学) 素养的培养, 我们在第 6 节中给出 Cantor 关于 "序完备的有序域存在性" 的证明, 这个证明是通过对 $\mathbb{Q}$ 进行 "完备化" 而得到的.

在本章余下的各节中, 我们将讨论级数的收敛性. 在第 7 节里, 我们会学习级数的基本性质, 并讨论若干最重要的例子. 这样一来, 我们就能够研究实数的十进制表示以及其他形式的表示, 从而证明实数集是不可数集.

在所有收敛级数当中, 绝对收敛的级数具有尤为重要的地位. 绝对收敛往往比较容易判别, 这类级数在运算与处理上也相对简单. 此外, 在实际应用中许多重要的级数都是绝对收敛的. 对于本章最后一节将要引入和研究的幂级数, 这一点尤为明显. 其中最重要的例子是指数级数, 它的重要性将在后续章节中逐渐显现出来.

2.1　收敛序列

在本节中, 我们考虑定义在自然数集上的函数, 因此这类函数只会取到可数多个值. 对这样的函数 $\varphi : \mathbb{N} \to X$, 我们特别关心的是它在 "当 n 趋于无穷大时" 各个取值 $\varphi(n)$ 的行为. 由于我们实际上只能对 φ 进行有限次求值, 也就是说, 我们永远不可能真正 "到达无穷大", 因此必须发展出一些方法, 使我们能够对 "靠近无穷远处" 的无穷多个函数值建立命题并加以证明. 这样的方法就构成了收敛序列的理论, 本节将对其进行介绍.

序列

定义 (序列)**.** *设 X 是一个集合. 称函数*

$$\varphi : \mathbb{N} \to X$$

是 X 中的序列, 记作

$$(x_n)\,, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{或} \quad (x_0, x_1, x_2, \dots)\,,$$

并称

$$x_n := \varphi(n)$$

是序列的第 n 项.

定义 (数列)**.** *$\mathbb{K}$ 中的序列称为数列, 并将 $\mathbb{K}$-向量空间中的所有数列记作 s 或 $s(\mathbb{K})$. 进一步, $\mathbb{R}$ 中的序列称为实数列, $\mathbb{C}$ 中的序列称为复数列.*

注 2.1.

1. 区分序列 (x_n) 和它的像 $\{\, x_n \,;\, n \in \mathbb{N} \,\}$ 是很重要的. 例如, 若对于任意 n 有 $x_n = x$, 也就是说 (x_n) 是一个常数列, 此时 $(x_n) = (x, x, x, \dots)$, 而 $\{\, x_n \,;\, n \in \mathbb{N} \,\}$ 是单点集 $\{\, x \,\}$.
2. 设 (x_n) 是 X 中的序列, E 是某个性质. 称 E 对 (x_n) 的几乎所有项都成立, 若存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得对所有 $n \geq m$ 命题 $E(x_n)$ 都为真. 也就是说, 除了至多有限多个 x_n 以外, E 对其余所有 x_n 都成立. 当然, E 也可以对若干个 (甚至全部) $n < m$ 的项成立. 若存在 $N \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $|N| = \aleph_0$ 且 $E(x_n)$ 对所有 $n \in N$ 都成立, 则称 E 对 (x_n) 的无穷多项都成立. 例如, 实数列
$$\Big(-5, 4, -3, 2, -1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}, \dots\Big)$$
有无穷多个正项, 无穷多个负项, 并且对于几乎所有项都有其绝对值小于 1.

3. 对于任意 $m \in \mathbb{N}^*$, 函数

   $$\psi : m + \mathbb{N} \to X$$

   也称为 X 中的序列。也就是说,

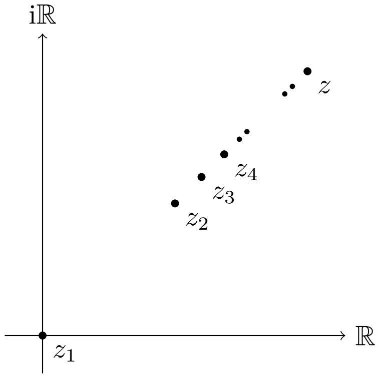
   $$(x_j)_{j \geq m} = (x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$$

   是 X 中的序列, 尽管其下标不是从 0 开始. 这种约定是合理的, 因为通过映射

   $$\mathbb{N} \to m + \mathbb{N}, \quad n \mapsto m + n$$

   对下标进行 "重新编号" 之后, 这个 "平移后的序列" $(x_j)_{j \geq m}$ 就可以与通常意义下的序列 $(x_{m+k})_{k \in N} \in X^{\mathbb{N}}$ 对应起来.

如果把复数列 $(z_n)_{n \geq 1}$ 的前几项画在复平面上, 其中 $z_n := (1 - 1/n)(1 + \mathrm{i})$, 就会发现: 当 n 增大时, 这些点 z_n 会 "任意接近" $z := 1 + \mathrm{i}$. 换句话说, 随着 n 的增大, z_n 到 z 的距离会变得 "任意小". 本节的目标, 就是把我们对于这类数列收敛的直观几何想法加以公理化, 使之能够推广应用到向量空间中的序列, 以及更抽象的集合中的序列上.



首先我们要意识到, "距离" 这一概念居于核心地位. 在数域 $\mathbb{K}$ 中, 我们可以借助绝对值函数来确定两点之间的距离. 若要研究某个任意集合 X 中序列的收敛性, 我们首先需要在 X 上赋予一种结构, 使得可以在 X 的任意两个元素之间定义 "距离".

度量空间

公理 (度量). *设 X 是一个集合, 其上定义了函数*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}.$$

若对于任意 $x, y, z \in X$ 都有

1. $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$.

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

则称 d 是 X 上的度量. 进一步, 称 (X, d) 是度量空间. 最后, 称 $d(x, y)$ 是度量空间 X 中点 x 和 y 之间的距离.

公理 1-3 显然是对 “距离函数” 非常自然的要求. 举例来说, 公理 3 可以被看作这样一条规则的公理化表述: “从 x 到 y 的 ‘直达路径’ 比先从 x 到 z 再从 z 到 y 的路径更短”.