



数学分析教程

作者: *ww7ide*

组织: *Kitauji Math Dept.*

时间: *Jan. 2024*



星星之火，可以燎原。

目录

第 1 章 预备知识	1
1.1 逻辑基础	1
1.2 集合	1
1.3 函数	1
1.4 关系与运算	1
1.5 自然数	1
Peano 公理	1
自然数的计算	1
除法	1
数学归纳法	1
递归定义	2
1.6 可数性	2
1.7 群与同态	2
1.8 环、域与多项式	2
1.9 有理数	2
整数	2
有理数	2
多项式的有理零点	2
平方根	2
1.10 实数	2
序完备性	2
Dedekind 对实数的构造	2
\mathbb{R} 上的自然序结构	2
扩展实数线	2
上确界与下确界的刻画	2
Archimedes 公理	2
有理数在 \mathbb{R} 中的稠密性	2

目录	3
n 次方根	3
无理数在 \mathbb{R} 中的稠密性	3
区间	3
1.11 复数	3
复数的构造	3
基本性质	3
复数的运算	3
\mathbb{K} 中的球	3
1.12 向量空间、仿射空间与代数	3
第 2 章 收敛	4
2.1 收敛序列	5
序列	5
度量空间	6
聚点	9
收敛	10
有界集合	11
极限的唯一性	12
子序列	12
练习	13

第 1 章 预备知识

1.1 逻辑基础

1.2 集合

1.3 函数

1.4 关系与运算

1.5 自然数

Peano 公理

自然数的计算

除法

数学归纳法

命题 1.5.1 (良序原理).

递归定义

1.6 可数性

1.7 群与同态

1.8 环、域与多项式

1.9 有理数

整数

有理数

命题 1.9.1.

多项式的有理零点

平方根

1.10 实数

序完备性

Dedekind 对实数的构造

\mathbb{R} 上的自然序结构

扩展实数线

上确界与下确界的刻画

Archimedes 公理

推论 1.10.1.

有理数在 \mathbb{R} 中的稠密性

命题 1.10.2.

n 次方根

无理数在 \mathbb{R} 中的稠密性

区间

1.11 复数

复数的构造

基本性质

复数的运算

命题 1.11.1.

推论 1.11.2 (反三角不等式).

\mathbb{K} 中的球

1.12 向量空间、仿射空间与代数

第 2 章 收敛

从本章开始, 我们终于进入分析的领域. 数学的这一分支在很大程度上是建立在“收敛”这一概念之上的. 借助收敛, 我们在某种意义上得以把无穷多个数(或向量)“加”在一起. 能够处理这样的无限运算, 正是分析与代数之间本质区别之所在.

试图把关于数列收敛的朴素想法加以公理化, 会自然地引出“距离”、“点的邻域”以及“度量空间”等概念——这正是第 1 节的主题. 在数列这一特殊情形中, 我们可以利用数域 \mathbb{K} 的向量空间结构, 对这种情形下各种证明的分析表明: 只要有某种类似“绝对值”的概念可用, 其中大多数证明都可以推广到向量空间中的向量序列. 于是我们很自然地被引向去定义“赋范向量空间”——度量空间中一个尤其重要的类别.

在所有赋范向量空间中, 内积空间由于其结构更为丰富而显得格外重要, 并且它们的几何性质与我们熟悉的平面 Euclidean 几何非常相似. 事实上, 在初等分析中, 最重要的一类内积空间就是 m -维 Euclidean 空间 \mathbb{R}^m 和 \mathbb{C}^m .

在第 4 和第 5 节中, 我们回到最简单的情形, 也就是在 \mathbb{R} 中的收敛问题. 借助实数的序结构, 尤其是 \mathbb{R} 的序完备性, 我们推导出第一批“具体的收敛判别准则”. 这些准则使我们能够求出许多重要数列的极限. 除此之外, 我们还将从 \mathbb{R} 的序完备性出发, 得到一个根本性的存在性原理——Bolzano-Weierstrass 定理.

第 6 节专门讨论度量空间中的“完备性”概念. 将这一概念限制到赋范向量空间, 就得到了“Banach 空间”的定义. 这类空间最基本的例子就是 \mathbb{K}^m , 但我们还将说明: 有界函数构成的函数空间也是 Banach 空间.

Banach 空间在分析中无处不在, 因此在本书的叙述中居于核心地位. 即便如此, 它们的结构仍然足够简单, 使得初学者可以在不太费力的情况下, 从理解实数自然过渡到理解 Banach 空间. 再者, 对这些空间的较早引入, 也使得我们在后面章节中能够给出简洁而优美的证明.

为了内容的完整性, 也为了读者整体(数学)素养的培养, 我们在第 6 节中给出 Cantor 关于“序完备的有序域存在性”的证明, 这个证明是通过对 \mathbb{Q} 进行“完备化”而得到的.

在本章余下的各节中, 我们将讨论级数的收敛性. 在第 7 节里, 我们会学习级数的基本性质, 并讨论若干最重要的例子. 这样一来, 我们就能够研究实数的十进制表示以及其他形式的表示, 从而证明实数集是不可数集.

在所有收敛级数当中, 绝对收敛的级数具有尤为重要的地位. 绝对收敛往往比较容易判别, 这类级数在运算与处理上也相对简单. 此外, 在实际应用中许多重要的级数都是绝对收敛的. 对于本章最后一节将要引入和研究的幂级数, 这一点尤为明显. 其中最重要的例子是指数级数, 它的重要性将在后续章节中逐渐显现出来.

2.1 收敛序列

在本节中, 我们考虑定义在自然数集上的函数, 因此这类函数只会取到可数多个值. 对这样的函数 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$, 我们特别关心的是它在“当 n 趋于无穷大时”各个取值 $\varphi(n)$ 的行为. 由于我们实际上只能对 φ 进行有限次求值, 也就是说, 我们永远不可能真正“到达无穷大”, 因此必须发展出一些方法, 使我们能够对“靠近无穷远处”的无穷多个函数值建立命题并加以证明. 这样的方法就构成了收敛序列的理论, 本节将对其进行介绍.

序列

定义 2.1.1 (序列). 设 X 是集合. 称函数

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$$

是 X 中的序列, 记作

$$(x_n), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{或} \quad (x_0, x_1, x_2, \dots),$$

并称

$$x_n := \varphi(n)$$

是序列的第 n 项.

定义 2.1.2 (数列). \mathbb{K} 中的序列称为数列, 并将 \mathbb{K} -向量空间中的所有数列记作 s 或 $s(\mathbb{K})$. 进一步, \mathbb{R} 中的序列称为实数列, \mathbb{C} 中的序列称为复数列.

注 2.1.1. 1. 区分序列 (x_n) 和它的像 $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ 是很重要的. 例如, 若对于任意 n 有 $x_n = x$, 也就是说 (x_n) 是一个常数列, 此时 $(x_n) = (x, x, x, \dots)$, 而 $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ 是单点集 $\{x\}$.

2. 设 (x_n) 是 X 中的序列, E 是某个性质. 称 E 对 (x_n) 的几乎所有项都成立, 若存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq m$ 时命题 $E(x_n)$ 都成立. 也就是说, 除了至多有限多个 x_n 以外, E 对其余所有 x_n 都成立. 当然, E 也可以对若干个 (甚至全部) $n < m$ 的项成立. 若存在 $N \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $|N| = \aleph_0$ 且 $E(x_n)$ 对所有 $n \in N$ 都成立, 则称 E 对 (x_n) 的无穷多项都成立. 例如, 实数列

$$\left(-5, 4, -3, 2, -1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}, \dots\right)$$

有无穷多个正项, 无穷多个负项, 并且对于几乎所有项都有其绝对值小于 1.

3. 对于任意 $m \in \mathbb{N}^*$, 函数

$$\psi: m + \mathbb{N} \rightarrow X$$

也称为 X 中的序列。也就是说,

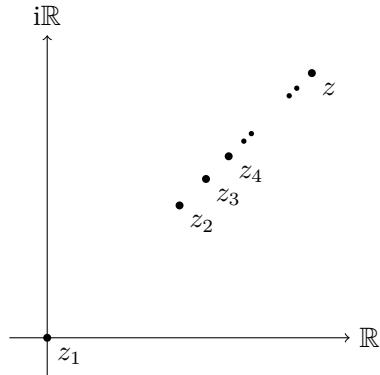
$$(x_j)_{j \geq m} = (x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$$

是 X 中的序列, 尽管其下标不是从 0 开始. 这种约定是合理的, 因为通过映射

$$\mathbb{N} \rightarrow m + \mathbb{N}, \quad n \mapsto m + n$$

对下标进行“重新编号”之后, 这个“平移后的序列” $(x_j)_{j \geq m}$ 就可以与通常意义下的序列 $(x_{m+k})_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ 对应起来.

如果把复数列 $(z_n)_{n \geq 1}$ 的前几项画在复平面上, 其中 $z_n := (1 - 1/n)(1 + i)$, 就会发现: 当 n 增大时, 这些点 z_n 会“任意接近” $z := 1 + i$. 换句话说, 随着 n 的增大, z_n 到 z 的距离会变得“任意小”. 本节的目标, 就是把我们对于这类数列收敛的直观几何想法加以公理化, 使之能够推广应用到向量空间中的序列, 以及更抽象的集合中的序列上.



首先我们要意识到, “距离”这一概念居于核心地位. 在数域 \mathbb{K} 中, 我们可以借助绝对值函数来确定两点之间的距离. 若要研究某个任意集合 X 中序列的收敛性, 我们首先需要在 X 上赋予一种结构, 使得可以在 X 的任意两个元素之间定义“距离”.

度量空间

公理 2.1.3 (度量). 设 X 是集合, 其上定义了函数

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}.$$

若对于任意 $x, y, z \in X$ 都有

$$(M_1) \text{ (同一性)} \quad d(x, y) = 0 \text{ 当且仅当 } x = y.$$

(M₂) (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$.

(M₃) (三角不等式) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

则称 d 是 X 上的度量. 进一步, 称 (X, d) 是度量空间. 最后, 称 $d(x, y)$ 是度量空间 X 中点 x 和 y 之间的距离.

(M₁)-(M₃) 显然是对“距离函数”非常自然的要求. 举例来说, (M₃) 可以被看作这样一条规则的公理化表述: “从 x 到 y 的‘直达路径’比先从 x 到 z 再从 z 到 y 的路径更短”.

命题 2.1.1 (度量的非负性). 设 (X, d) 是度量空间. 则

$$d(x, y) \geq 0, \quad x, y \in X.$$

证明. 设 $x, y \in X$. 由度量的性质可得

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y).$$

□

定义 2.1.4 (开球和闭球). 设 (X, d) 是度量空间, $a \in X$, $r > 0$. 称集合

$$\mathbb{B}(a, r) := \{x \in X ; d(x, a) < r\}$$

是以 a 为中心, r 为半径的开球. 并称集合

$$\bar{\mathbb{B}}(a, r) := \{x \in X ; d(x, a) \leq r\}$$

是以 a 为中心, r 为半径的闭球.

例 2.1.1. 1. 函数

$$|\cdot| : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto |x - y|$$

是 \mathbb{K} 上的度量, 称为自然度量. 除非另有说明, 否则默认 \mathbb{K} 配备该度量, 并将其视为一个度量空间.

2. 设 (X, d) 是度量空间, Y 是 X 的非空子集. 则把 d 限制在 $Y \times Y$ 上所得的函数

$$d_Y := d|_{Y \times Y}$$

是 Y 上的度量, 称为诱导度量. 进一步, 称 (Y, d_Y) 是 (X, d) 的子空间. 在不会引起混淆的情况下, 我们往往直接写 d , 而不特别区分 d_Y .

3. \mathbb{C} 的任意非空子集, 在从 \mathbb{C} 的自然度量诱导出来的度量之下, 都是度量空间. 以这种方式在 \mathbb{R} 上得到的度量, 正好就是在例 2.1.1.1 中定义的那个自然度量.

4. 设 X 是非空集合. 则函数

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

是 X 上的度量, 称为离散度量.

5. 设 (X_j, d_j) , $1 \leq j \leq m$ 是度量空间, $X := X_1 \times \cdots \times X_m$. 则函数

$$d(x, y) := \max_{1 \leq j \leq m} d_j(x_j, y_j), \quad x := (x_1, \dots, x_m) \in X, \quad y := (y_1, \dots, y_m) \in X$$

是 X 上的度量, 称为积度量. 进一步, 称 (X, d) 是 (X_j, d_j) , $1 \leq j \leq m$ 的积空间. 可以验证, 对于任意 $a := (a_1, \dots, a_m) \in X$ 以及 $r > 0$, 都有

$$\mathbb{B}_X(a, r) = \prod_{j=1}^m \mathbb{B}_{X_j}(a_j, r), \quad \bar{\mathbb{B}}_X(a, r) = \prod_{j=1}^m \bar{\mathbb{B}}_{X_j}(a_j, r).$$

证明. 1. 由命题 1.11.1 可以直接验证 $|\cdot|$ 满足度量公理. \square

度量公理的一个重要结论是反三角不等式 (见推论 1.11.2).

命题 2.1.2 (反三角不等式). 设 (X, d) 是度量空间. 则

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|, \quad x, y, z \in X.$$

证明. 设 $x, y, z \in X$. 由 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 可得

$$d(x, y) \geq d(x, z) - d(z, y),$$

交换 x 和 y 可得

$$d(x, y) = d(y, x) \geq d(y, z) - d(z, x) = -(d(x, z) - d(z, y)),$$

即 $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$. \square

定义 2.1.5 (邻域). 设 X 是度量空间, $U \subseteq X$, $a \in X$. 若存在 $r > 0$ 使得 $\mathbb{B}(a, r) \subseteq U$, 则称 U 是 a 的邻域. 进一步, 将 a 的邻域的全体记作

$$\mathcal{N}(a) := \{U \subseteq X ; U \text{ 是 } a \text{ 的邻域}\}.$$

例 2.1.2. 设 X 是度量空间, $a \in X$.

1. 对于每个 $\varepsilon > 0$, $\mathbb{B}(a, \varepsilon)$ 和 $\bar{\mathbb{B}}(a, \varepsilon)$ 都是 a 的邻域, 称为 a 的开 ε -邻域和闭 ε -邻域.
2. 显然 $X \in \mathcal{N}(a)$. 若 $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(a)$, 则 $U_1 \cap U_2$ 和 $U_1 \cup U_2$ 也是 a 的邻域. 任意包含了 a 的邻域的集合同样是 a 的邻域.

3. 设 $X := [0, 1]$ 配备了在 \mathbb{R} 上诱导的度量. 则 $[1/2, 1]$ 是 1 的邻域, 但不是 $1/2$ 的邻域.

证明. 2. 设 $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(a)$. 故存在 $r_1, r_2 > 0$ 使得 $\mathbb{B}(a, r_1) \subseteq U_1$ 和 $\mathbb{B}(a, r_2) \subseteq U_2$. 令 $r = \min\{r_1, r_2\}$, 于是

$$\mathbb{B}(a, r) \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \cup U_2 ,$$

即 $U_1 \cap U_2$ 和 $U_1 \cup U_2$ 是 a 的邻域. \square

在本节的其余部分里, 设 $X := (X, d)$ 是度量空间, (x_n) 是 X 中的序列.

聚点

定义 2.1.6 (聚点). 称 $a \in X$ 是 (x_n) 的聚点, 若 a 的每个邻域都包含了 (x_n) 的无穷多项.

在讨论一些具体例子之前, 先给出下面这个关于聚点的刻画会对之后的讨论很有帮助.

命题 2.1.3. 以下命题是等价的.

1. a 是 (x_n) 的聚点.
2. 对于任意 $U \in \mathcal{N}(a)$ 和 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $n \geq m$ 使得 $x_n \in U$.
3. 对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $n \geq m$ 使得 $x_n \in \mathbb{B}(a, \varepsilon)$.

证明. 由聚点的定义可以直接得到. \square

例 2.1.3. 1. 实数列 $((-1)^n)$ 有两个聚点, 1 和 -1 .

2. 复数列 (i^n) 有四个聚点, ± 1 和 $\pm i$.
3. 常序列 (x, x, x, \dots) 有唯一的聚点 x .
4. 自然数序列 (n) 没有聚点.

5. 设 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ 是双射 (由命题 1.9.1 可知这样的函数存在). 定义序列 (x_n) , 其中 $x_n := \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$. 则每个实数都是 (x_n) 的聚点.

证明. 5. 假设 $a \in \mathbb{R}$ 不是 (x_n) 的聚点. 由命题 2.1.3 可知, 存在 $\varepsilon > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$, 使得

$$x_n \notin \mathbb{B}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) , \quad n \geq m .$$

这意味着区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 仅包含了有限多个有理数, 这与命题 1.10.2 矛盾. \square

收敛

定义 2.1.7 (收敛). 称序列 (x_n) 收敛, 若存在 $a \in X$ 使得 a 的任意邻域都包含了 (x_n) 的几乎所有项. 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty),$$

并称当 n 趋于无穷大时, (x_n) 收敛到 a 或以 a 为极限. 若 (x_n) 不收敛, 则称 (x_n) 发散.

这个定义中最核心的部分是要求: 极限的每个邻域都包含该序列的几乎所有项. 在 $X = \mathbb{K}$ 的情形下, 这一要求正对应于那种 x_n 到 a 的距离 “变得任意小” 的几何直觉. 如果 a 是 (x_n) 的聚点且 U 是 a 的邻域, 那么当然, U 会包含序列的无穷多项, 但同时也有可能序列的无穷多项也不落在 U 中.

下一个命题是对收敛的等价刻画.

命题 2.1.4. 以下命题是等价的.

1. $\lim x_n = a$.
2. 对于任意 $U \in \mathcal{N}(a)$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时 $x_n \in U$.
3. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时 $x_n \in \mathbb{B}(a, \varepsilon)$.

证明. 由收敛的定义可以直接得到. □

下面这些例子都比较简单. 对于更复杂的例子, 我们需要第 4 节发展出的那些方法.

例 2.1.4. 1. 设实数列 $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, 则 $\lim 1/n = 0$.

2. 设复数列 (z_n) , 其中

$$z_n := \frac{n+2}{n+1} + i \frac{2n}{n+2},$$

则 $\lim z_n = 1 + 2i$.

3. 常序列 (a, a, a, \dots) 收敛到 a .

4. 实数列 $((-1)^n)$ 发散.

5. 设 X 是度量空间 (X_j, d_j) , $1 \leq j \leq m$ 的积空间. 则序列 $(x_n) = ((x_n^1, \dots, x_n^m))$ 收敛到点 $a := (a^1, \dots, a^m) \in X$ 当且仅当对于每个 $j \in \{1, \dots, m\}$ 都有序列 (x_n^j) 收敛到点 $a^j \in X_j$.

证明. 1. 任取 $\varepsilon > 0$. 由推论 1.10.1 可知, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $1/N < \varepsilon$, 于是

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

即当 $n \geq N$ 时 $1/n \in \mathbb{B}(0, \varepsilon)$.

2. 任取 $\varepsilon > 0$. 由推论 1.10.1 可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $1/N < \varepsilon/8$, 此时有

$$\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 < \frac{1}{N^2} < \frac{\varepsilon^2}{64} < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad n \geq N,$$

和

$$\left(\frac{2n}{n+2} - 2\right)^2 = \left(\frac{4}{n+2}\right)^2 < \frac{16}{N^2} < \frac{\varepsilon^2}{4} < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad n \geq N,$$

于是

$$\begin{aligned} |z_n - (1 + 2i)| &= \left| \frac{1}{n+1} - i \frac{4}{n+2} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(-\frac{4}{n+2}\right)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} < \varepsilon, \quad n \geq N, \end{aligned}$$

即当 $n \geq N$ 时 $z_n \in \mathbb{B}((1 + 2i), \varepsilon)$.

5. \implies . 设 (x_n) 收敛到点 a . 则任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m) \in \mathbb{B}_X(a, \varepsilon) = \prod_{j=1}^m \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon), \quad n \geq N,$$

即当 $n \geq N$ 时, 对于每个 j 都有 $x_n^j \in \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon)$.

\Leftarrow . 设对于每个 j 都有 (x_n^j) 收敛到点 a^j . 任取 $\varepsilon > 0$, 对于每个 j 都存在 $N_j \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N_j$ 时 $x_n^j \in \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon)$. 令 $N = \max_{1 \leq j \leq m} N_j$, 于是

$$(x_n^1, \dots, x_n^m) = x_n \in \prod_{j=1}^m \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon) = \mathbb{B}_X(a, \varepsilon), \quad n \geq N.$$

□

有界集合

定义 2.1.8 (有界性). 称集合 $Y \subseteq X$ 在 X 中 d -有界或有界, 若存在 $M > 0$ 使得对于任意 $x, y \in Y$ 都有 $d(x, y) \leq M$. 进一步, 称

$$\text{diam } Y := \sup_{x, y \in Y} d(x, y)$$

是 Y 的直径. 最后, 称序列 (x_n) 有界, 若它的像 $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ 有界.

例 2.1.5. 1. 对于任意 $a \in X$ 和 $r > 0$, $\mathbb{B}(a, r)$ 和 $\bar{\mathbb{B}}(a, r)$ 在 X 中有界.

2. 有界集合的每个子集都是有界的. 有界集合的有限并是有界的.

3. 集合 $Y \subseteq X$ 在 X 中有界, 当且仅当存在 $x \in X$ 和 $r > 0$ 使得 $Y \subseteq \mathbb{B}_X(x, r)$. 若 $Y \neq \emptyset$, 则存在 $x \in Y$ 也满足该性质.

4. 有界区间是有界的.

5. 集合 $Y \subseteq \mathbb{K}$ 有界, 当且仅当存在 $M > 0$ 使得对于任意 $y \in Y$ 都有 $|y| \leq M$.

命题 2.1.5 (有界性). 收敛序列必有界.

证明. 设序列 (x_n) 收敛到点 a . 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于任意 $n \geq N$ 有 $x_n \in \mathbb{B}(a, 1)$. 由三角不等式可得

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < 2, \quad m, n \geq N.$$

令 $M = \max_{m, n < N} d(x_n, x_m)$, 有

$$d(x_n, x_m) \leq M, \quad m, n < N.$$

于是对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$ 都有 $d(x_n, x_m) \leq M + 2$. \square

极限的唯一性

命题 2.1.6. 设序列 (x_n) 收敛到点 a . 则 a 是 (x_n) 唯一的聚点.

证明. 显然 a 是 (x_n) 的聚点, 现证明唯一性. 假设 b 是 (x_n) 的聚点且 $a \neq b$. 取 $\varepsilon = d(a, b)/2$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时 $x_n \in \mathbb{B}(a, \varepsilon)$. 而 b 是 (x_n) 的聚点, 故存在 $m \geq N$ 使得 $x_m \in \mathbb{B}(b, \varepsilon)$. 由命题 2.1.2 可知

$$d(a, x_m) \geq |d(a, b) - d(b, x_m)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

即 $x_m \notin \mathbb{B}(a, \varepsilon)$, 矛盾, 因此 b 不是 (x_n) 的聚点. \square

注 2.1.2. 命题 2.1.6 的逆命题不成立, 也就是说, 存在发散但具有唯一聚点的序列. 例如, $(1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4, \dots)$.

推论 2.1.7 (唯一性). 收敛序列的极限唯一.

证明. 由命题 2.1.6 可以直接得到. \square

子序列

定义 2.1.9 (子序列). 设 $\varphi = (x_n)$ 是 X 中的序列, $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是严格递增函数. 称 $\varphi \circ \psi$ 是 φ 的子序列, 记作

$$(x_{n_k}) \quad \text{或} \quad (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}},$$

其中 $n_k := \psi(k)$.

因为 ψ 是严格递增的, 故 $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$

例 2.1.6. 数列 $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ 有两个常子数列, $((-1)^{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots)$ 和 $((-1)^{2k+1})_{k \in \mathbb{N}} = (-1, -1, -1, \dots)$.

命题 2.1.8. 若序列 (x_n) 收敛到点 a , 则 (x_n) 的每个子序列 (x_{n_k}) 也收敛且以 a 为极限.

证明. 任取 $U \in \mathcal{N}(a)$. 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时 $x_n \in U$. 由子序列的定义可知, 对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 有 $n_k \geq k$, 因此当 $k \geq N$ 时 $n_k \geq N$, 于是 $x_{n_k} \in U$. 即 (x_{n_k}) 收敛到 a . \square

例 2.1.7. 当 $m \geq 2$ 时,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^m} = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m^k} = 0.$$

证明. 令 $\psi_1(k) := k^m$, $\psi_2(k) := m^k$. 由于 $\psi_i: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $i = 1, 2$ 是单调递增的, 因此 (k^{-m}) 和 (m^{-k}) 是 $(1/n)$ 的子序列. 于是由例 2.1.4.1 和命题 2.1.8 可得. \square

下面的命题是对聚点的进一步刻画.

命题 2.1.9. 点 a 是序列 (x_n) 的聚点, 当且仅当存在 (x_n) 的子序列 (x_{n_k}) 收敛到 a .

证明. \Rightarrow . 设 a 是 (x_n) 的聚点. 下面递归构造序列 (n_k) ,

$$n_0 := 0, \quad n_k := \min\{m \in \mathbb{N}; m > n_{k-1} \text{ 且 } x_m \in \mathbb{B}(a, 1/k)\}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

由于 a 是 (x_n) 的聚点, 故

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq n_{k-1} \text{ 且 } x_m \in \mathbb{B}(a, 1/k)\} \neq \emptyset, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

由 良序原理 可知, 对于每个 $k \in \mathbb{N}^*$, n_k 是良定义的. 于是 (n_k) 是良定义且严格递增的. 任取 $\varepsilon > 0$, 由推论 1.10.1 可知, 存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得 $1/K < \varepsilon$, 由 n_k 的定义可知

$$x_{n_k} \in \mathbb{B}(a, 1/k) \subseteq \mathbb{B}(a, \varepsilon), \quad k \geq K,$$

即 (x_{n_k}) 收敛到 a .

\Leftarrow . 设 (x_n) 的子序列 (x_{n_k}) 收敛到 a . 任取 $U \in \mathcal{N}(a)$, $m \in \mathbb{N}$. 存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得当 $k \geq \max\{m, K\}$ 时 $x_{n_k} \in U$, 因此 a 是 (x_n) 的聚点. \square

练习

1. 设 d 是 \mathbb{K} 上的离散度量, $X := (\mathbb{K}, d)$.

1. 设 $a \in X$ 和 $r > 0$, 给出 $\mathbb{B}_X(a, r)$ 和 $\bar{\mathbb{B}}_X(a, r)$ 的具体描述.
2. 描述 X 中任意序列的聚点.
3. 设 $a \in X$, 描述 X 中所有收敛到 a 的序列.

2. 证明例 2.1.1.5 的断言.

3. 证明序列 $(z_n)_{n \geq 1}$ 其中 $z_n := (1 - 1/n)(1 + i)$ 收敛到 $1 + i$.

4. 证明例 2.1.5 的断言.

5. 找出复数列 (z_n) 在下列情况下的全部聚点.

$$1. z_n := ((1 + i)/\sqrt{2})^n.$$

$$2. z_n := (1 + (-1)^n)(n + 1)n^{-1} + (-1)^n.$$

$$3. z_n := (-1)^n n/(n + 1).$$

6. 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$a_n := n + \frac{1}{k} - \frac{k^2 + k - 2}{2},$$

其中 $k \in \mathbb{N}^*$ 满足

$$k^2 + k - 2 \leq 2n \leq k^2 + 3k - 2.$$

证明 (a_n) 是良定义的并找出其所有的聚点. (提示: 先把该数列的前几项具体算出来, 以便更好的把握整个数列的行为.)

7. 对每个 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 定义

$$d(m, n) := \begin{cases} (m + n)/mn, & m \neq n, \\ 0, & m = n, \end{cases}$$

证明 (\mathbb{N}^*, d) 是度量空间, 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 描述 $A_n := \bar{\mathbb{B}}(n, 1 + 1/n)$.

8. 设 $X := \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 3\}$ 并配备自然度量. 描述 $\bar{\mathbb{B}}_X(0, 3)$ 和 $\bar{\mathbb{B}}_X(2, 4)$, 并证明 $\bar{\mathbb{B}}_X(2, 4) \subset \bar{\mathbb{B}}_X(0, 3)$.

9 (度量的等价). 集合 X 上的度量 d_1 和 d_2 被称为等价度量, 若对于每个 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $r_1, r_2 > 0$ 使得

$$\mathbb{B}_1(x, r_1) \subseteq \mathbb{B}_2(x, \varepsilon), \quad \mathbb{B}_2(x, r_2) \subseteq \mathbb{B}_1(x, \varepsilon),$$

其中 \mathbb{B}_j 是 (X, d_j) , $j = 1, 2$ 中的开球. 现在, 设 (X, d) 是度量空间,

$$\delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

证明 d 和 δ 是 X 上的等价度量. (提示: 函数 $t \mapsto t/(1 + t)$ 是递增的.)

10. 设 $X := (0, 1)$. 证明以下命题.

1. $d(x, y) := |(1/x) - (1/y)|$ 是 X 上的度量.
2. 自然度量和 d 是等价的.
3. 在 \mathbb{R} 上不存在这样一个度量: 它与自然度量等价, 并且在 X 上诱导出的度量是 d .

11. 设 (X_j, d_j) , $1 \leq j \leq n$ 是度量空间, $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ 且 d 是 X 上的积度量. 证明

$$\delta(x, y) := \sum_{j=1}^n d_j(x_j, y_j), \quad x := (x_1, \dots, x_m) \in X, \quad y := (y_1, \dots, y_m) \in X$$

是 X 上的度量且与 d 等价.

12 (SNCF-度量). 对于每个 $z, w \in \mathbb{C}$, 定义

$$\delta(z, w) := \begin{cases} |z - w|, & \text{若存在 } \lambda > 0 \text{ 使得 } z = \lambda w, \\ |z| + |w|, & \text{其余情况.} \end{cases}$$

证明 δ 是 \mathbb{C} 上的度量, 称为 SNCF-度量.

13. 设 (x_n) 是 \mathbb{C} 中的序列且对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\Re x_n = 0$. 证明, 若 (x_n) 收敛到 x , 则 $\Re x = 0$.