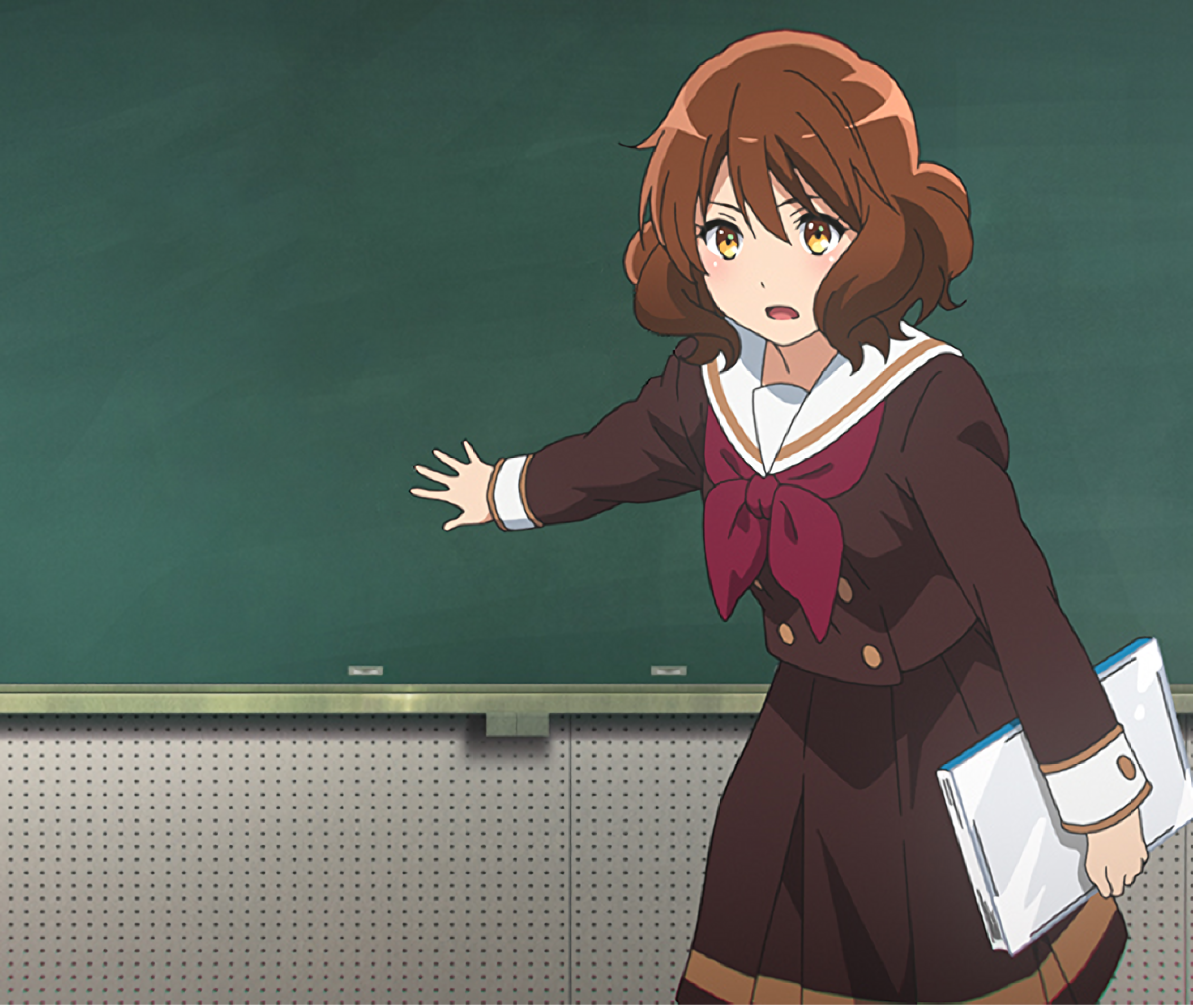


数学分析教程

作者：*ww7ide*

组织：*Kitauji Math Dept.*

时间：*Jan.* 2024

星星之火，可以燎原。

目录

第 1 章　预备知识

1.1　逻辑基础

1.2　集合

1.3　函数

1.4　关系与运算

1.5　自然数

1.6　可数性

1.7　群与同态

1.8　环、域与多项式

1.9　有理数

1.10　实数

1.11　复数

Constructing the Complex Numbers

Elementary Properties

Computation with Complex Numbers

推论 1.11.1 (反三角不等式).

Balls in $\mathbb{K}$

1.12　向量空间、仿射空间与代数

第 2 章　收敛

从本章开始, 我们终于进入分析的领域. 数学的这一分支在很大程度上是建立在 “收敛” 这一概念之上的. 借助收敛, 我们在某种意义上得以把无穷多个数 (或向量) “加” 在一起. 能够处理这样的无限运算, 正是分析与代数之间本质区别之所在.

试图把关于数列收敛的朴素想法加以公理化, 会自然地引出 “距离”、“点的邻域” 以及 “度量空间” 等概念——这正是第 1 节的主题. 在数列这一特殊情形中, 我们可以利用数域 $\mathbb{K}$ 的向量空间结构, 对这种情形下各种证明的分析表明: 只要有某种类似 “绝对值” 的概念可用, 其中大多数证明都可以推广到向量空间中的向量序列. 于是我们很自然地被引向去定义 “赋范向量空间”——度量空间中一个尤其重要的类别.

在所有赋范向量空间中, 内积空间由于其结构更为丰富而显得格外重要, 并且它们的几何性质与我们熟悉的平面 Euclidean 几何非常相似. 事实上, 在初等分析中, 最重要的一类内积空间就是 m-维 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{C}^m$.

在第 4 和第 5 节中, 我们回到最简单的情形, 也就是在 $\mathbb{R}$ 中的收敛问题. 借助实数的序结构, 尤其是 $\mathbb{R}$ 的序完备性, 我们推导出第一批 “具体的收敛判别准则”. 这些准则使我们能够求出许多重要数列的极限. 除此之外, 我们还将从 $\mathbb{R}$ 的序完备性出发, 得到一个根本性的存在性原理——Bolzano-Weierstrass 定理.

第 6 节专门讨论度量空间中的 “完备性” 概念. 将这一概念限制到赋范向量空间, 就得到了 “Banach 空间” 的定义. 这类空间最基本的例子就是 $\mathbb{K}^m$, 但我们还将说明: 有界函数构成的函数空间也是 Banach 空间.

Banach 空间在分析中无处不在, 因此在本书的叙述中居于核心地位. 即便如此, 它们的结构仍然足够简单, 使得初学者可以在不太费力的情况下, 从理解实数自然过渡到理解 Banach 空间. 再者, 对这些空间的较早引入, 也使得我们在后面章节中能够给出简洁而优美的证明.

为了内容的完整性, 也为了读者整体 (数学) 素养的培养, 我们在第 6 节中给出 Cantor 关于 “序完备的有序域存在性” 的证明, 这个证明是通过对 $\mathbb{Q}$ 进行 “完备化” 而得到的.

在本章余下的各节中, 我们将讨论级数的收敛性. 在第 7 节里, 我们会学习级数的基本性质, 并讨论若干最重要的例子. 这样一来, 我们就能够研究实数的十进制表示以及其他形式的表示, 从而证明实数集是不可数集.

在所有收敛级数当中, 绝对收敛的级数具有尤为重要的地位. 绝对收敛往往比较容易判别, 这类级数在运算与处理上也相对简单. 此外, 在实际应用中许多重要的级数都是绝对收敛的. 对于本章最后一节将要引入和研究的幂级数, 这一点尤为明显. 其中最重要的例子是指数级数, 它的重要性将在后续章节中逐渐显现出来.

2.1　收敛序列

在本节中, 我们考虑定义在自然数集上的函数, 因此这类函数只会取到可数多个值. 对这样的函数 $\varphi : \mathbb{N} \to X$, 我们特别关心的是它在 "当 n 趋于无穷大时" 各个取值 $\varphi(n)$ 的行为. 由于我们实际上只能对 φ 进行有限次求值, 也就是说, 我们永远不可能真正 "到达无穷大", 因此必须发展出一些方法, 使我们能够对 "靠近无穷远处" 的无穷多个函数值建立命题并加以证明. 这样的方法就构成了收敛序列的理论, 本节将对其进行介绍.

序列

定义 2.1.1 (序列)**.** *设 X 是集合. 称函数*

$$\varphi\colon \mathbb{N} \to X$$

是 X 中的序列, 记作

$$(x_n)\,, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{或} \quad (x_0, x_1, x_2, \dots)\,,$$

并称

$$x_n := \varphi(n)$$

是序列的第 n 项.

定义 2.1.2 (数列)**.** *$\mathbb{K}$ 中的序列称为数列, 并将 $\mathbb{K}$-向量空间中的所有数列记作 s 或 $s(\mathbb{K})$. 进一步, $\mathbb{R}$ 中的序列称为实数列, $\mathbb{C}$ 中的序列称为复数列.*

注 2.1.1.

1. 区分序列 (x_n) 和它的像 $\{\, x_n \,;\, n \in \mathbb{N} \,\}$ 是很重要的. 例如, 若对于任意 n 有 $x_n = x$, 也就是说 (x_n) 是一个常数列, 此时 $(x_n) = (x, x, x, \dots)$, 而 $\{\, x_n \,;\, n \in \mathbb{N} \,\}$ 是单点集 $\{\, x \,\}$.

2. 设 (x_n) 是 X 中的序列, E 是某个性质. 称 E 对 (x_n) 的几乎所有项都成立, 若存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得对所有 $n \geq m$ 命题 $E(x_n)$ 都为真. 也就是说, 除了至多有限多个 x_n 以外, E 对其余所有 x_n 都成立. 当然, E 也可以对若干个 (甚至全部) $n < m$ 的项成立. 若存在 $N \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $|N| = \aleph_0$ 且 $E(x_n)$ 对所有 $n \in N$ 都成立, 则称 E 对 (x_n) 的无穷多项都成立. 例如, 实数列

$$\Big(-5, 4, -3, 2, -1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}, \dots\Big)$$

有无穷多个正项, 无穷多个负项, 并且对于几乎所有项都有其绝对值小于 1.

3. 对于任意 $m \in \mathbb{N}^*$, 函数

$$\psi\colon m+\mathbb{N} \to X$$

也称为 X 中的序列。也就是说,

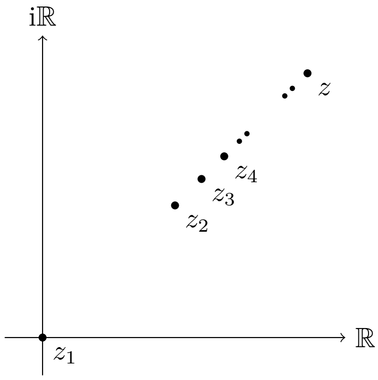
$$(x_j)_{j\geq m} = (x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$$

是 X 中的序列, 尽管其下标不是从 0 开始. 这种约定是合理的, 因为通过映射

$$\mathbb{N} \to m+\mathbb{N}\,,\quad n \mapsto m+n$$

对下标进行 “重新编号” 之后, 这个 “平移后的序列” $(x_j)_{j\geq m}$ 就可以与通常意义下的序列 $(x_{m+k})_{k\in N} \in X^{\mathbb{N}}$ 对应起来.

如果把复数列 $(z_n)_{n\geq 1}$ 的前几项画在复平面上, 其中 $z_n \coloneqq (1-1/n)(1+\mathrm{i})$, 就会发现: 当 n 增大时, 这些点 z_n 会 “任意接近” $z \coloneqq 1+\mathrm{i}$. 换句话说, 随着 n 的增大, z_n 到 z 的距离会变得 “任意小”. 本节的目标, 就是把我们对于这类数列收敛的直观几何想法加以公理化, 使之能够推广应用到向量空间中的序列, 以及更抽象的集合中的序列上.



首先我们要意识到, “距离” 这一概念居于核心地位. 在数域 $\mathbb{K}$ 中, 我们可以借助绝对值函数来确定两点之间的距离. 若要研究某个任意集合 X 中序列的收敛性, 我们首先需要在 X 上赋予一种结构, 使得可以在 X 的任意两个元素之间定义 “距离”.

度量空间

公理 2.1.3 (度量)**.** *设 X 是集合, 其上定义了函数*

$$d\colon X\times X \to \mathbb{R}\,.$$

若对于任意 $x, y, z \in X$ 都有

1. $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

2. $d(x,y) = d(y,x)$.

3. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

则称 d 是 X 上的度量. 进一步, 称 (X,d) 是度量空间. 最后, 称 $d(x,y)$ 是度量空间 X 中点 x 和 y 之间的距离.

公理 1-3 显然是对 “距离函数” 非常自然的要求. 举例来说, 公理 3 可以被看作这样一条规则的公理化表述: “从 x 到 y 的 ‘直达路径’ 比先从 x 到 z 再从 z 到 y 的路径更短”.

定义 2.1.4 (开球和闭球)**.** 设 (X,d) 是度量空间, $a \in X$, $r > 0$. 称集合

$$\mathbb{B}(a,r) \coloneqq \{\, x \in X \;;\; d(x,a) < r \,\}$$

是以 a 为中心, r 为半径的开球. 并称集合

$$\bar{\mathbb{B}}(a,r) \coloneqq \{\, x \in X \;;\; d(x,a) \le r \,\}$$

是以 a 为中心, r 为半径的闭球.

例 2.1.1. 1. 函数

$$|\cdot|\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto |x-y|$$

是 $\mathbb{K}$ 上的度量, 称为自然度量. 除非另有说明, 否则默认 $\mathbb{K}$ 配备该度量, 并将其视为一个度量空间.

2. 设 (X,d) 是度量空间, Y 是 X 的非空子集. 则把 d 限制在 $Y \times Y$ 上所得的函数

$$d_Y \coloneqq d|_{Y \times Y}$$

是 Y 上的度量, 称为诱导度量. 进一步, 称 (Y, d_Y) 是 (X,d) 的子空间. 在不会引起混淆的情况下, 我们往往直接写 d, 而不特别区分 d_Y.

3. $\mathbb{C}$ 的任意非空子集, 在从 $\mathbb{C}$ 的自然度量诱导出来的度量之下, 都是度量空间. 以这种方式在 $\mathbb{R}$ 上得到的度量, 正好就是在 1 中定义的那个自然度量.

4. 设 X 是非空集合. 则函数

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1\,, & x \ne y\,, \\ 0\,, & x = y\,, \end{cases}$$

是 X 上的度量, 称为离散度量.

5. 设 (X_j, d_j), $1 \le j \le m$ 是度量空间, $X \coloneqq X_1 \times \cdots \times X_m$. 则函数

$$d(x,y) \coloneqq \max_{1 \le j \le m} d_j(x_j, y_j)$$

其中 $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m) \in X$, $y \coloneqq (y_1, \ldots, y_m) \in X$ 是 X 上的度量, 称为积度量. 进一步, 称 (X, d) 是 (X_j, d_j), $1 \le j \le m$ 的积空间. 可以验证, 对于任意 $a \coloneqq (a_1, \ldots, a_m) \in X$ 以及 $r > 0$, 都有

$$\mathbb{B}_X(a,r) = \prod_{j=1}^{m} \mathbb{B}_{X_j}(a_j, r)\ , \quad \bar{\mathbb{B}}_X(a,r) = \prod_{j=1}^{m} \bar{\mathbb{B}}_{X_j}(a_j, r)\ .$$

度量公理的一个重要结论是反三角不等式 (见推论 1.11.1).

命题 2.1.1 (反三角不等式)**.** 设 (X, d) 是度量空间. 则

$$d(x,y) \ge |d(x,z) - d(z,y)|\ , \quad x, y, z \in X\ .$$

定义 2.1.5 (邻域)**.** 设 X 是度量空间, $U \subseteq X$, $a \in X$. 若存在 $r > 0$ 使得 $\mathbb{B}(a,r) \subseteq U$, 则称 U 是 a 的邻域. 进一步, 将 a 的邻域的全体记作

$$\mathcal{N}(a) \coloneqq \{\, U \subseteq X\ ;\ U \text{ 是 } a \text{ 的邻域} \,\}\ .$$