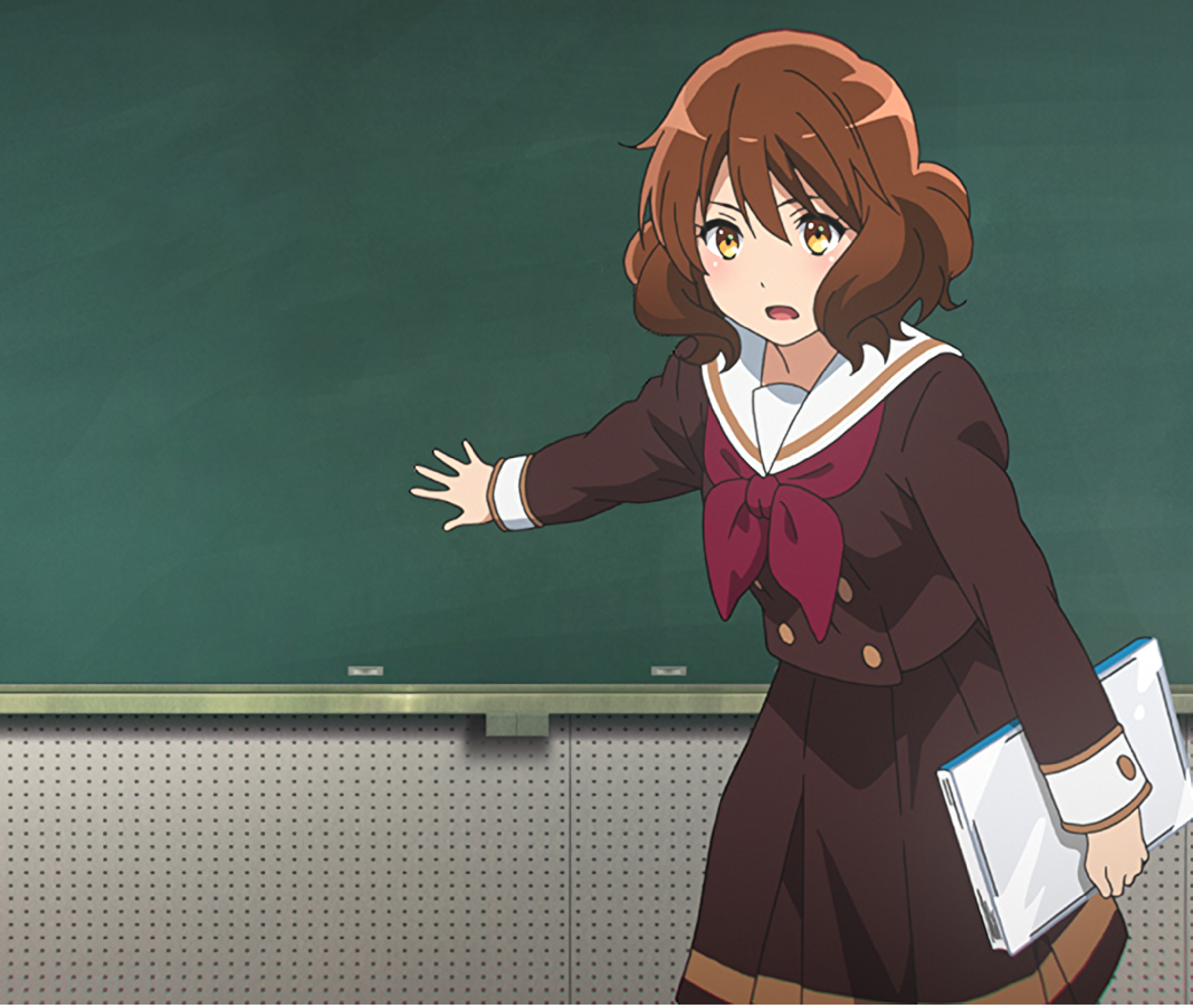


数学分析教程

作者：*ww7ide*

组织：*Kitauji Math Dept.*

时间：*Jan.* 2024

© 2024–2025 Kitauji Math Dept. All rights reserved.

星星之火，可以燎原。

目录

目录 3

第 1 章　预备知识

1.1　逻辑基础

1.2　集合

1.3　函数

1.4　关系与运算

1.5　自然数

Peano 公理

自然数的计算

除法

数学归纳法

命题 1.5.1 (良序原理)**.**

递归定义

1.6　可数性

1.7　群与同态

1.8　环、域与多项式

1.9　有理数

整数

有理数

命题 1.9.1.

多项式的有理零点

平方根

1.10　实数

序完备性

Dedekind 对实数的构造

$\mathbb{R}$ 上的自然序结构

扩展实数线

上确界与下确界的刻画

Archimedes 公理

推论 1.10.1.

有理数在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性

命题 1.10.2.

n 次方根

无理数在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性

区间

1.11　复数

复数的构造

基本性质

复数的运算

命题 1.11.1.

推论 1.11.2 (反三角不等式)**.**

$\mathbb{K}$ 中的球

1.12　向量空间、仿射空间与代数

向量空间

线性映射

例 1.12.1.

向量空间的基

仿射空间

仿射映射

多项式插值

代数

差分算子与求和公式

Newton 插值多项式

第 2 章　收敛

从本章开始, 我们终于进入分析的领域. 数学的这一分支在很大程度上是建立在 “收敛” 这一概念之上的. 借助收敛, 我们在某种意义上得以把无穷多个数 (或向量) “加” 在一起. 能够处理这样的无限运算, 正是分析与代数之间本质区别之所在.

试图把关于数列收敛的朴素想法加以公理化, 会自然地引出 “距离”、“点的邻域” 以及 “度量空间” 等概念——这正是第 1 节的主题. 在数列这一特殊情形中, 我们可以利用数域 $\mathbb{K}$ 的向量空间结构, 对这种情形下各种证明的分析表明: 只要有某种类似 “绝对值” 的概念可用, 其中大多数证明都可以推广到向量空间中的向量序列. 于是我们很自然地被引向去定义 “赋范向量空间”——度量空间中一个尤其重要的类别.

在所有赋范向量空间中, 内积空间由于其结构更为丰富而显得格外重要, 并且它们的几何性质与我们熟悉的平面 Euclidean 几何非常相似. 事实上, 在初等分析中, 最重要的一类内积空间就是 m-维 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{C}^m$.

在第 4 和第 5 节中, 我们回到最简单的情形, 也就是在 $\mathbb{R}$ 中的收敛问题. 借助实数的序结构, 尤其是 $\mathbb{R}$ 的序完备性, 我们推导出第一批 “具体的收敛判别准则”. 这些准则使我们能够求出许多重要数列的极限. 除此之外, 我们还将从 $\mathbb{R}$ 的序完备性出发, 得到一个根本性的存在性原理——Bolzano-Weierstrass 定理.

第 6 节专门讨论度量空间中的 “完备性” 概念. 将这一概念限制到赋范向量空间, 就得到了 “Banach 空间” 的定义. 这类空间最基本的例子就是 $\mathbb{K}^m$, 但我们还将说明: 有界函数构成的函数空间也是 Banach 空间.

Banach 空间在分析中无处不在, 因此在本书的叙述中居于核心地位. 即便如此, 它们的结构仍然足够简单, 使得初学者可以在不太费力的情况下, 从理解实数自然过渡到理解 Banach 空间. 再者, 对这些空间的较早引入, 也使得我们在后面章节中能够给出简洁而优美的证明.

为了内容的完整性, 也为了读者整体 (数学) 素养的培养, 我们在第 6 节中给出 Cantor 关于 “序完备的有序域存在性” 的证明, 这个证明是通过对 $\mathbb{Q}$ 进行 “完备化” 而得到的.

在本章余下的各节中, 我们将讨论级数的收敛性. 在第 7 节里, 我们会学习级数的基本性质, 并讨论若干最重要的例子. 这样一来, 我们就能够研究实数的十进制表示以及其他形式的表示, 从而证明实数集是不可数集.

在所有收敛级数当中, 绝对收敛的级数具有尤为重要的地位. 绝对收敛往往比较容易判别, 这类级数在运算与处理上也相对简单. 此外, 在实际应用中许多重要的级数都是绝对收敛的. 对于本章最后一节将要引入和研究的幂级数, 这一点尤为明显. 其中最重要的例子是指数级数, 它的重要性将在后续章节中逐渐显现出来.

2.1　收敛序列

在本节中, 我们考虑定义在自然数集上的函数, 因此这类函数只会取到可数多个值. 对这样的函数 $\varphi\colon \mathbb{N} \to X$, 我们特别关心的是它在 "当 n 趋于无穷大时" 各个取值 $\varphi(n)$ 的行为. 由于我们实际上只能对 φ 进行有限次求值, 也就是说, 我们永远不可能真正 "到达无穷大", 因此必须发展出一些方法, 使我们能够对 "靠近无穷远处" 的无穷多个函数值建立命题并加以证明. 这样的方法就构成了收敛序列的理论, 本节将对其进行介绍.

序列

定义 2.1.1 (序列)**.** *设 X 是集合. 称函数*

$$\varphi\colon \mathbb{N} \to X$$

是 X 中的序列, 记作

$$(x_n)\ , \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{或} \quad (x_0, x_1, x_2, \dots)\ ,$$

并称

$$x_n \coloneqq \varphi(n)$$

是序列的第 n 项.

定义 2.1.2 (数列)**.** *$\mathbb{K}$ 中的序列称为数列, 并将 $\mathbb{K}$ 中所有数列构成的 $\mathbb{K}$-向量空间 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ 记作 s 或 $s(\mathbb{K})$ (见例 1.12.1.5). 进一步, $\mathbb{R}$ 中的序列称为实数列, $\mathbb{C}$ 中的序列称为复数列.*

注 2.1.1.

1. 区分序列 (x_n) 和它的像 $\{\, x_n \,;\, n \in \mathbb{N} \,\}$ 是很重要的. 例如, 若对于任意 n 有 $x_n = x$, 也就是说 (x_n) 是一个常数列, 此时 $(x_n) = (x, x, x, \dots)$, 而 $\{\, x_n \,;\, n \in \mathbb{N} \,\}$ 是单点集 $\{x\}$.

2. 设 (x_n) 是 X 中的序列, E 是某个性质. 称 E 对 (x_n) 的几乎所有项都成立, 若存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq m$ 时命题 $E(x_n)$ 都成立. 也就是说, 除了至多有限多个 x_n 以外, E 对其余所有 x_n 都成立. 当然, E 也可以对若干个 (甚至全部) $n < m$ 的项成立. 若存在 $N \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $|N| = \aleph_0$ 且 $E(x_n)$ 对所有 $n \in N$ 都成立, 则称 E 对 (x_n) 的无穷多项都成立. 例如, 实数列

$$\Big(-5, 4, -3, 2, -1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}, \dots\Big)$$

有无穷多个正项, 无穷多个负项, 并且对于几乎所有项都有其绝对值小于 1.

3. 对于任意 $m \in \mathbb{N}^*$, 函数

$$\psi\colon m+\mathbb{N} \to X$$

也称为 X 中的序列。也就是说,

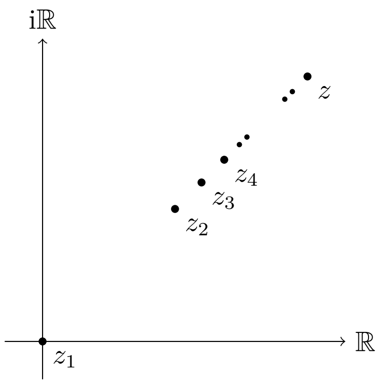
$$(x_j)_{j\geq m} = (x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$$

是 X 中的序列, 尽管其下标不是从 0 开始. 这种约定是合理的, 因为通过映射

$$\mathbb{N} \to m+\mathbb{N}\ , \quad n \mapsto m+n$$

对下标进行 “重新编号” 之后, 这个 “平移后的序列” $(x_j)_{j\geq m}$ 就可以与通常意义下的序列 $(x_{m+k})_{k\in N} \in X^{\mathbb{N}}$ 对应起来.

如果把复数列 $(z_n)_{n\geq 1}$ 的前几项画在复平面上, 其中 $z_n \coloneqq (1-1/n)(1+\mathrm{i})$, 就会发现: 当 n 增大时, 这些点 z_n 会 “任意接近” $z \coloneqq 1+\mathrm{i}$. 换句话说, 随着 n 的增大, z_n 到 z 的距离会变得 “任意小”. 本节的目标, 就是把我们对于这类数列收敛的直观几何想法加以公理化, 使之能够推广应用到向量空间中的序列, 以及更抽象的集合中的序列上.



首先我们要意识到, “距离” 这一概念居于核心地位. 在数域 $\mathbb{K}$ 中, 我们可以借助绝对值函数来确定两点之间的距离. 若要研究某个任意集合 X 中序列的收敛性, 我们首先需要在 X 上赋予一种结构, 使得可以在 X 的任意两个元素之间定义 “距离”.

度量空间

公理 2.1.3 (度量)**.** *设 X 是集合, 其上定义了函数*

$$d\colon X\times X \to \mathbb{R}\ .$$

若对于任意 $x, y, z \in X$ 都有

(M$_1$) *(同一性) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$.*

(M$_2$) *(对称性)* $d(x,y)=d(y,x)$.

(M$_3$) *(三角不等式)* $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

则称 d 是 X 上的度量. 进一步, 称 (X,d) 是度量空间. 最后, 称 $d(x,y)$ 是度量空间 X 中点 x 和 y 之间的距离.

(M$_1$)-(M$_3$) 显然是对 “距离函数” 非常自然的要求. 举例来说, (M$_3$) 可以被看作这样一条规则的公理化表述: “从 x 到 y 的 ‘直达路径’ 比先从 x 到 z 再从 z 到 y 的路径更短”.

命题 2.1.1 (度量的非负性)**.** *设 (X,d) 是度量空间. 则*

$$d(x,y)\ge 0\ ,\quad x,y\in X\ .$$

证明. 设 $x,y\in X$. 由度量的性质可得

$$0=d(x,x)\le d(x,y)+d(y,x)=d(x,y)+d(x,y)=2d(x,y)\ .$$

□

定义 2.1.4 (开球和闭球)**.** *设 (X,d) 是度量空间, $a\in X$, $r>0$. 称集合*

$$\mathbb{B}(a,r)\coloneqq\{\,x\in X\ ;\ d(x,a)<r\,\}$$

是以 a 为中心, r 为半径的开球. 并称集合

$$\bar{\mathbb{B}}(a,r)\coloneqq\{\,x\in X\ ;\ d(x,a)\le r\,\}$$

是以 a 为中心, r 为半径的闭球.

例 2.1.1.

1. 函数
$$|\cdot|\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{R}\ ,\quad (x,y)\mapsto|x-y|$$
是 $\mathbb{K}$ 上的度量, 称为自然度量. 除非另有说明, 否则默认 $\mathbb{K}$ 配备该度量, 并将其视为一个度量空间.

2. 设 (X,d) 是度量空间, Y 是 X 的非空子集. 则把 d 限制在 $Y\times Y$ 上所得的函数
$$d_Y\coloneqq d|_{Y\times Y}$$
是 Y 上的度量, 称为诱导度量. 进一步, 称 (Y,d_Y) 是 (X,d) 的子空间. 在不会引起混淆的情况下, 我们往往直接写 d, 而不特别区分 d_Y.

3. $\mathbb{C}$ 的任意非空子集, 在从 $\mathbb{C}$ 的自然度量诱导出来的度量之下, 都是度量空间. 以这种方式在 $\mathbb{R}$ 上得到的度量, 正好就是在例 2.1.1.1 中定义的那个自然度量.

4. 设 X 是非空集合. 则函数

$$d\colon X\times X\to\mathbb{R}\ ,\quad (x,y)\mapsto\begin{cases}1\ , & x\neq y\ ,\\ 0\ , & x=y\ ,\end{cases}$$

   是 X 上的度量, 称为离散度量.

5. 设 (X_j,d_j), $1\le j\le m$ 是度量空间, $X\coloneqq X_1\times\cdots\times X_m$. 则函数

$$d(x,y)\coloneqq\max_{1\le j\le m}d_j(x_j,y_j)\ ,\quad x\coloneqq(x_1,\ldots,x_m)\in X\ ,\quad y\coloneqq(y_1,\ldots,y_m)\in X$$

   是 X 上的度量, 称为积度量. 进一步, 称 (X,d) 是 (X_j,d_j), $1\le j\le m$ 的积空间. 可以验证, 对于任意 $a\coloneqq(a_1,\ldots,a_m)\in X$ 以及 $r>0$, 都有

$$\mathbb{B}_X(a,r)=\prod_{j=1}^m\mathbb{B}_{X_j}(a_j,r)\ ,\quad \bar{\mathbb{B}}_X(a,r)=\prod_{j=1}^m\bar{\mathbb{B}}_{X_j}(a_j,r)\ .$$

证明. 1. 由命题 1.11.1 可以直接验证 $|\cdot|$ 满足度量公理. □

度量公理的一个重要结论是反三角不等式 (见推论 1.11.2).

命题 2.1.2 (反三角不等式)**.** 设 (X,d) 是度量空间. 则

$$d(x,y)\ge|d(x,z)-d(z,y)|\ ,\quad x,y,z\in X\ .$$

证明. 设 $x,y,z\in X$. 由 $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ 可得

$$d(x,y)\ge d(x,z)-d(z,y)\ ,$$

交换 x 和 y 可得

$$d(x,y)=d(y,x)\ge d(y,z)-d(z,x)=-\big(d(x,z)-d(z,y)\big)\ ,$$

即 $d(x,y)\ge|d(x,z)-d(z,y)|$. □

定义 2.1.5 (邻域)**.** 设 X 是度量空间, $U\subseteq X$, $a\in X$. 若存在 $r>0$ 使得 $\mathbb{B}(a,r)\subseteq U$, 则称 U 是 a 的邻域. 进一步, 将 a 的邻域的全体记作

$$\mathcal{N}(a)\coloneqq\{\,U\subseteq X\ ;\ U\ \text{是}\ a\ \text{的邻域}\,\}\ .$$

例 2.1.2. 设 X 是度量空间, $a\in X$.

1. 对于每个 $\varepsilon>0$, $\mathbb{B}(a,\varepsilon)$ 和 $\bar{\mathbb{B}}(a,\varepsilon)$ 都是 a 的邻域, 称为 a 的开 ε-邻域和闭 ε-邻域.

2. 显然 $X\in\mathcal{N}(a)$. 若 $U_1,U_2\in\mathcal{N}(a)$, 则 $U_1\cap U_2$ 和 $U_1\cup U_2$ 也是 a 的邻域. 任意包含了 a 的邻域的集合同样是 a 的邻域.

3. 设 $X := [0,1]$ 配备了在 $\mathbb{R}$ 上诱导的度量. 则 $[1/2,1]$ 是 1 的邻域, 但不是 1/2 的邻域.

证明. 2. 设 $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(a)$. 故存在 $r_1, r_2 > 0$ 使得 $\mathbb{B}(a,r_1) \in U_1$ 和 $\mathbb{B}(a,r_2) \in U_2$. 令 $r = \min\{r_1, r_2\}$, 于是

$$\mathbb{B}(a,r) \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \cup U_2 \ ,$$

即 $U_1 \cap U_2$ 和 $U_1 \cup U_2$ 是 a 的邻域. □

在本节的其余部分里, 设 $X := (X,d)$ 是度量空间, (x_n) 是 X 中的序列.

聚点

定义 2.1.6 (聚点). *称 $a \in X$ 是 (x_n) 的聚点, 若 a 的每个邻域都包含了 (x_n) 的无穷多项.*

在讨论一些具体例子之前, 先给出下面这个关于聚点的刻画会对之后的讨论很有帮助.

命题 2.1.3. *以下命题是等价的.*

1. *a 是 (x_n) 的聚点.*

2. *对于任意 $U \in \mathcal{N}(a)$ 和 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $n \geq m$ 使得 $x_n \in U$.*

3. *对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $n \geq m$ 使得 $x_n \in \mathbb{B}(a,\varepsilon)$.*

证明. 由聚点的定义可以直接得到. □

例 2.1.3. 1. 实数列 $\big((-1)^n\big)$ 有两个聚点, 1 和 -1.

2. 复数列 (i^n) 有四个聚点, ± 1 和 $\pm \mathrm{i}$.

3. 常序列 $(x, x, x, \ldots)$ 有唯一的聚点 x.

4. 自然数序列 (n) 没有聚点.

5. 设 $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ 是双射 (由命题 1.9.1 可知这样的函数存在). 定义序列 (x_n), 其中 $x_n := \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$. 则每个实数都是 (x_n) 的聚点.

证明. 5. 假设 $a \in \mathbb{R}$ 不是 (x_n) 的聚点. 由命题 2.1.3 可知, 存在 $\varepsilon > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$, 使得

$$x_n \notin \mathbb{B}(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \ , \quad n \geq m \ .$$

这意味着区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 仅包含了有限多个有理数, 这与命题 1.10.2 矛盾. □

收敛

定义 2.1.7 (收敛)**.** *称序列 (x_n) 收敛, 若存在 $a \in X$ 使得 a 的任意邻域都包含了 (x_n) 的几乎所有项. 记作*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \ (n \to \infty) \ ,$$

并称当 n 趋于无穷大时, (x_n) 收敛到 a 或以 a 为极限. 若 (x_n) 不收敛, 则称 (x_n) 发散.

这个定义中最核心的部分是要求: 极限的每个邻域都包含该序列的几乎所有项. 在 $X = \mathbb{K}$ 的情形下, 这一要求正对应于那种 x_n 到 a 的距离 “变得任意小” 的几何直觉. 如果 a 是 (x_n) 的聚点且 U 是 a 的邻域, 那么当然, U 会包含序列的无穷多项, 但同时也有可能序列的无穷多项也不落在 U 中.

下一个命题是对收敛的等价刻画.

命题 2.1.4. *以下命题是等价的.*

1. $\lim x_n = a$.
2. *对于任意 $U \in \mathcal{N}(a)$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时 $x_n \in U$.*
3. *对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时 $x_n \in \mathbb{B}(a, \varepsilon)$.*

证明. 由收敛的定义可以直接得到. □

下面这些例子都比较简单. 对于更复杂的例子, 我们需要第 4 节发展出的那些方法.

例 2.1.4.

1. 设实数列 $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, 则 $\lim 1/n = 0$.
2. 设复数列 (z_n), 其中
$$z_n \coloneqq \frac{n+2}{n+1} + \mathrm{i}\frac{2n}{n+2} \ ,$$
则 $\lim z_n = 1 + 2\mathrm{i}$.
3. 常序列 $(a, a, a, \ldots)$ 收敛到 a.
4. 实数列 $\big((-1)^n\big)$ 发散.
5. 设 X 是度量空间 (X_j, d_j), $1 \leq j \leq m$ 的积空间. 则序列 $(x_n) = \big((x_n^1, \ldots, x_n^m)\big)$ 收敛到点 $a \coloneqq (a^1, \ldots, a^m) \in X$ 当且仅当对于每个 $j \in \{1, \ldots, m\}$ 都有序列 (x_n^j) 收敛到点 $a^j \in X_j$.

证明. 1. 任取 $\varepsilon > 0$. 由推论 1.10.1 可知, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $1/N < \varepsilon$, 于是

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \ , \quad n \geq N \ ,$$

即当 $n \geq N$ 时 $1/n \in \mathbb{B}(0, \varepsilon)$.

2. 任取 $\varepsilon > 0$. 由推论 1.10.1 可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $1/N < \varepsilon/8$, 此时有

$$\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 < \frac{1}{N^2} < \frac{\varepsilon^2}{64} < \frac{\varepsilon^2}{2} , \quad n \geq N ,$$

和

$$\left(\frac{2n}{n+2} - 2\right)^2 = \left(\frac{4}{n+2}\right)^2 < \frac{16}{N^2} < \frac{\varepsilon^2}{4} < \frac{\varepsilon^2}{2} , \quad n \geq N ,$$

于是

$$\begin{aligned} |z_n - (1+2\mathrm{i})| &= \left| \frac{1}{n+1} - \mathrm{i}\frac{4}{n+2} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(-\frac{4}{n+2}\right)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} < \varepsilon , \quad n \geq N , \end{aligned}$$

即当 $n \geq N$ 时 $z_n \in \mathbb{B}\big((1+2\mathrm{i}), \varepsilon\big)$.

5. $\Longrightarrow$. 设 (x_n) 收敛到点 a. 则任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m) \in \mathbb{B}_X(a, \varepsilon) = \prod_{j=1}^m \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon) , \quad n \geq N ,$$

即当 $n \geq N$ 时, 对于每个 j 都有 $x_n^j \in \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon)$.

$\Longleftarrow$. 设对于每个 j 都有 (x_n^j) 收敛到点 a^j. 任取 $\varepsilon > 0$, 对于每个 j 都存在 $N_j \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N_j$ 时 $x_n^j \in \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon)$. 令 $N = \max_{1 \leq j \leq m} N_j$, 于是

$$(x_n^1, \ldots, x_n^m) = x_n \in \prod_{j=1}^m \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon) = \mathbb{B}_X(a, \varepsilon) , \quad n \geq N .$$

□

有界集合

定义 2.1.8 (有界性)**.** 称集合 $Y \subseteq X$ 在 X 中 d-有界或有界, 若存在 $M > 0$ 使得对于任意 $x, y \in Y$ 都有 $d(x,y) \leq M$. 进一步, 称

$$\operatorname{diam} Y \coloneqq \sup_{x,y \in Y} d(x,y)$$

是 Y 的直径. 最后, 称序列 (x_n) 有界, 若它的像 $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ 有界.

例 2.1.5. 1. 对于任意 $a \in X$ 和 $r > 0$, $\mathbb{B}(a,r)$ 和 $\bar{\mathbb{B}}(a,r)$ 在 X 中有界.

2. 有界集合的每个子集都是有界的. 有界集合的有限并是有界的.

3. 集合 $Y \subseteq X$ 在 X 中有界, 当且仅当存在 $x \in X$ 和 $r > 0$ 使得 $Y \subseteq \mathbb{B}_X(x,r)$. 若 $Y \neq \varnothing$, 则存在 $x \in Y$ 也满足该性质.

4. 有界区间是有界的.

5. 集合 $Y \subseteq \mathbb{K}$ 有界, 当且仅当存在 $M > 0$ 使得对于任意 $y \in Y$ 都有 $|y| \leq M$.

命题 2.1.5 (有界性)**.** 收敛序列必有界.

证明. 设序列 (x_n) 收敛到点 a. 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于任意 $n \geq N$ 有 $x_n \in \mathbb{B}(a,1)$. 由三角不等式可得

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < 2 \ , \quad m, n \geq N \ .$$

令 $M = \max_{m,n<N} d(x_n, x_m)$, 有

$$d(x_n, x_m) \leq M \ , \quad m, n < N \ .$$

于是对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$ 都有 $d(x_n, x_m) \leq M + 2$. □

极限的唯一性

命题 2.1.6. 设序列 (x_n) 收敛到点 a. 则 a 是 (x_n) 唯一的聚点.

证明. 显然 a 是 (x_n) 的聚点, 现证明唯一性. 假设 b 是 (x_n) 的聚点且 $a \neq b$. 取 $\varepsilon = d(a,b)/2$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时 $x_n \in \mathbb{B}(a, \varepsilon)$. 而 b 是 (x_n) 的聚点, 故存在 $m \geq N$ 使得 $x_m \in \mathbb{B}(b, \varepsilon)$. 由命题 2.1.2 可知

$$d(a, x_m) \geq |d(a,b) - d(b, x_m)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \ ,$$

即 $x_m \notin \mathbb{B}(a, \varepsilon)$, 矛盾, 因此 b 不是 (x_n) 的聚点. □

注 2.1.2. 命题 2.1.6 的逆命题不成立, 也就是说, 存在发散但具有唯一聚点的序列. 例如, $(1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4, \ldots)$.

推论 2.1.7 (唯一性)**.** 收敛序列的极限唯一.

证明. 由命题 2.1.6 可以直接得到. □

子序列

定义 2.1.9 (子序列)**.** 设 $\varphi = (x_n)$ 是 X 中的序列, $\psi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是严格递增函数. 称 $\varphi \circ \psi$ 是 φ 的子序列, 记作

$$(x_{n_k}) \quad \text{或} \quad (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \ ,$$

其中 $n_k \coloneqq \psi(k)$.

因为 ψ 是严格递增的, 故 $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$.

例 2.1.6. 数列 $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ 有两个常子数列, $\big((-1)^{2k}\big)_{k\in\mathbb{N}} = (1,1,1,\ldots)$ 和 $\big((-1)^{2k+1}\big)_{k\in\mathbb{N}} = (-1,-1,-1,\ldots)$.

命题 2.1.8. *若序列 (x_n) 收敛到点 a, 则 (x_n) 的每个子序列 (x_{n_k}) 也收敛且以 a 为极限.*

证明. 任取 $U\in\mathcal{N}(a)$. 则存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时 $x_n\in U$. 由子序列的定义可知, 对于任意 $k\in\mathbb{N}$ 有 $n_k\geq k$, 因此当 $k\geq N$ 时 $n_k\geq N$, 于是 $x_{n_k}\in U$. 即 (x_{n_k}) 收敛到 a. □

例 2.1.7. 当 $m\geq 2$ 时,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^m}=0 \quad 且 \quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{m^k}=0\ .$$

证明. 令 $\psi_1(k) := k^m$, $\psi_2(k) := m^k$. 由于 $\psi_i\colon \mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, $i=1,2$ 是单调递增的, 因此 (k^{-m}) 和 (m^{-k}) 是 $(1/n)$ 的子序列. 于是由例 2.1.4.1 和命题 2.1.8 可得. □

下面的命题是对聚点的进一步刻画.

命题 2.1.9. *点 a 是序列 (x_n) 的聚点, 当且仅当存在 (x_n) 的子序列 (x_{n_k}) 收敛到 a.*

证明. $\Longrightarrow$. 设 a 是 (x_n) 的聚点. 下面递归构造序列 (n_k),

$$n_0 := 0\ , \quad n_k := \min\{\, m\in\mathbb{N}\,;\ m > n_{k-1}\ 且\ x_m\in\mathbb{B}(a,1/k)\,\}\ , \quad k\in\mathbb{N}^*\ .$$

由于 a 是 (x_n) 的聚点, 故

$$\{\, m\in\mathbb{N}\,;\ m\geq n_{k-1}\ 且\ x_m\in\mathbb{B}(a,1/k)\,\}\neq\varnothing\ , \quad k\in\mathbb{N}^*\ ,$$

由 良序原理 可知, 对于每个 $k\in\mathbb{N}^*$, n_k 是良定义的. 于是 (n_k) 是良定义且严格递增的. 任取 $\varepsilon>0$, 由推论 1.10.1 可知, 存在 $K\in\mathbb{N}$ 使得 $1/K<\varepsilon$, 由 n_k 的定义可知

$$x_{n_k}\in\mathbb{B}(a,1/k)\subseteq\mathbb{B}(a,\varepsilon)\ , \quad k\geq K\ ,$$

即 (x_{n_k}) 收敛到 a.

$\Longleftarrow$. 设 (x_n) 的子序列 (x_{n_k}) 收敛到 a. 任取 $U\in\mathcal{N}(a)$, $m\in\mathbb{N}$. 存在 $K\in\mathbb{N}$ 使得当 $k\geq\max\{m,K\}$ 时 $x_{n_k}\in U$, 因此 a 是 (x_n) 的聚点. □

练习

1. 设 d 是 $\mathbb{K}$ 上的离散度量, $X := (\mathbb{K},d)$.

1. 设 $a\in X$ 和 $r>0$, 给出 $\mathbb{B}_X(a,r)$ 和 $\bar{\mathbb{B}}_X(a,r)$ 的具体描述.
2. 描述 X 中任意序列的聚点.
3. 设 $a\in X$, 描述 X 中所有收敛到 a 的序列.

2. 证明例 2.1.1.5 的断言.

3. 证明序列 $(z_n)_{n\geq 1}$ 其中 $z_n \coloneqq (1-1/n)(1+\mathrm{i})$ 收敛到 $1+\mathrm{i}$.

4. 证明例 2.1.5 的断言.

5. 找出复数列 (z_n) 在下列情况下的全部聚点.

1. $z_n \coloneqq \big((1+\mathrm{i})/\sqrt{2}\big)^n$.
2. $z_n \coloneqq \big(1+(-1)^n\big)(n+1)n^{-1}+(-1)^n$.
3. $z_n \coloneqq (-1)^n n/(n+1)$.

6. 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 定义

$$a_n \coloneqq n+\frac{1}{k}-\frac{k^2+k-2}{2}\ ,$$

其中 $k\in\mathbb{N}^*$ 满足

$$k^2+k-2\leq 2n\leq k^2+3k-2\ .$$

证明 (a_n) 是良定义的并找出其所有的聚点. (提示: 先把该数列的前几项具体算出来, 以便更好的把握整个数列的行为.)

7. 对每个 $m,n\in\mathbb{N}^*$, 定义

$$d(m,n)\coloneqq\begin{cases} (m+n)/mn\ , & m\neq n\ ,\\ 0\ , & m=n\ ,\end{cases}$$

证明 $(\mathbb{N}^*,d)$ 是度量空间, 对 $n\in\mathbb{N}^*$ 描述 $A_n\coloneqq\bar{\mathbb{B}}(n,1+1/n)$.

8. 设 $X\coloneqq\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|\leq 3\}$ 并配备自然度量. 描述 $\bar{\mathbb{B}}_X(0,3)$ 和 $\bar{\mathbb{B}}_X(2,4)$, 并证明 $\bar{\mathbb{B}}_X(2,4)\subset\bar{\mathbb{B}}_X(0,3)$.

9 (度量的等价)**.** 集合 X 上的度量 d_1 和 d_2 被称为等价度量, 若对于每个 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$, 存在 $r_1,r_2>0$ 使得

$$\mathbb{B}_1(x,r_1)\subseteq\mathbb{B}_2(x,\varepsilon)\ ,\quad \mathbb{B}_2(x,r_2)\subseteq\mathbb{B}_1(x,\varepsilon)\ ,$$

其中 $\mathbb{B}_j$ 是 (X,d_j), $j=1,2$ 中的开球. 现在, 设 (X,d) 是度量空间,

$$\delta(x,y)\coloneqq\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\ ,\quad x,y\in X\ .$$

证明 d 和 δ 是 X 上的等价度量. (提示: 函数 $t\mapsto t/(1+t)$ 是递增的.)

10. 设 $X\coloneqq(0,1)$. 证明以下命题.

1. $d(x,y) \coloneqq |(1/x)-(1/y)|$ 是 X 上的度量.

2. 自然度量和 d 是等价的.

3. 在 $\mathbb{R}$ 上不存在这样一个度量: 它与自然度量等价, 并且在 X 上诱导出的度量是 d.

11. 设 (X_j, d_j), $1 \le j \le n$ 是度量空间, $X \coloneqq X_1 \times \cdots \times X_n$ 且 d 是 X 上的积度量. 证明

$$\delta(x,y) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j)\ , \quad x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m) \in X\ , \quad y \coloneqq (y_1, \ldots, y_m) \in X$$

是 X 上的度量且与 d 等价.

12 (SNCF-度量)**.** 对于每个 $z, w \in \mathbb{C}$, 定义

$$\delta(z,w) \coloneqq \begin{cases} |z-w\ , & \text{若存在 } \lambda > 0 \text{ 使得 } z = \lambda w\ , \\ |z| + |w|\ , & \text{其余情况}\ . \end{cases}$$

证明 δ 是 $\mathbb{C}$ 上的度量, 称为 SNCF-度量.

13. 设 (x_n) 是 $\mathbb{C}$ 中的序列且对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\Re x_n = 0$. 证明, 若 (x_n) 收敛到 x, 则 $\Re x = 0$.