



# 数学分析教程

作者: *ww7ide*

组织: *Kitauji Math Dept.*

时间: *Jan. 2024*



星星之火，可以燎原。

# 目录

<b>第 1 章 预备知识</b>	<b>1</b>
1.1 逻辑基础 . . . . .	1
1.2 集合 . . . . .	2
基本概念 . . . . .	2
幂集 . . . . .	2
集合的运算 . . . . .	2
Cartesian 积 . . . . .	2
集族 . . . . .	2
1.3 函数 . . . . .	3
简单例子 . . . . .	3
函数的复合 . . . . .	3
交换图表 . . . . .	3
单射、满射和双射 . . . . .	3
反函数 . . . . .	3
集值函数 . . . . .	3
1.4 关系与运算 . . . . .	4
等价关系 . . . . .	4
序关系 . . . . .	4
运算 . . . . .	4
1.5 自然数 . . . . .	5
Peano 公理 . . . . .	5
自然数的计算 . . . . .	5
除法 . . . . .	5
数学归纳法 . . . . .	5
递归定义 . . . . .	5
1.6 可数性 . . . . .	6
排列 . . . . .	6

目录	3
集合的等势	6
可数集	6
无穷 Cartesian 积	6
1.7 群与同态	7
群	7
子群	8
陪集	8
同态	8
同构	8
1.8 环、域与多项式	9
环	9
二项式定理	9
多项式定理	10
域	10
有序域	10
形式幂级数	10
多项式	10
多项式函数	10
多项式的除法	10
线性因子	10
多变量多项式	10
1.9 有理数	11
整数	11
有理数	11
多项式的有理零点	11
平方根	11
1.10 实数	12
序完备性	12
Dedekind 对实数的构造	12
$\mathbb{R}$ 上的自然序结构	12
广义实数	12
上确界与下确界的刻画	12
Archimedes 公理	12
有理数在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性	12
$n$ 次方根	12
无理数在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性	12

目录	4
区间	12
1.11 复数	13
复数的构造	13
基本性质	13
复数的运算	13
$\mathbb{K}$ 中的球	13
1.12 向量空间、仿射空间与代数	14
向量空间	14
线性映射	15
向量空间的基	16
仿射空间	16
仿射映射	16
多项式插值	16
代数	16
差分算子与求和公式	16
Newton 插值多项式	16
第 2 章 收敛性	17
2.1 序列的收敛性	18
序列	18
度量空间	19
聚点	22
收敛性	23
有界集合	24
极限的唯一性	25
子序列	25
练习	26
2.2 实数列与复数列	29
无穷小量	29
基本法则	29
比较审敛法	31
复数列	32
练习	32

# 第 1 章 预备知识

## 1.1 逻辑基础

## 1.2 集合

基本概念

幂集

集合的运算

Cartesian 积

集族

### 1.3 函数

简单例子

函数的复合

交换图表

单射、满射和双射

反函数

集值函数

## 1.4 关系与运算

等价关系

序关系

运算

**例 1.4.1.** 设  $\circledast$  是集合  $Y$  上的运算,  $X$  是非空集合. 则我们通过  $\circledast$  在  $\text{Funct}(X, Y)$  上诱导运算

$$(f \odot g)(x) := f(x) \circledast g(x), \quad x \in X.$$

显然, 当  $\circledast$  具有结合性和交换性时,  $\odot$  也具有. 若  $Y$  关于  $\circledast$  具有单位元  $e$ , 则常值函数

$$X \rightarrow Y, \quad x \mapsto e$$

是  $\text{Funct}(X, Y)$  关于  $\odot$  的单位元.

## 1.5 自然数

Peano 公理

自然数的计算

定理 1.5.1.

除法

数学归纳法

命题 1.5.2 (良序原理). 自然数集  $\mathbb{N}$  是良序的, 即  $\mathbb{N}$  的每个非空子集都包含一个最小元.

递归定义

## 1.6 可数性

排列

集合的等势

可数集

无穷 Cartesian 积

## 1.7 群与同态

在定理 1.5.1 中, 我们在  $m \leq n$  的前提下, 定义了两个自然数  $m$  和  $n$  的差  $n - m$ . 同时, 在  $m$  是  $n$  约数的前提下, 我们也定义了两个自然数  $m$  和  $n$  的商  $n/m$ . 在这两种情形中, 对  $m$  和  $n$  加上的这些限制正是为了保证所得的差和商仍然是自然数. 如果我们希望对任意自然数  $m$  和  $n$  定义“差”  $n - m$  或“商”  $n/m$ , 那么就必须离开自然数这一范围. 在第 9-11 节中, 我们将构造新类型的数, 把自然数集扩展到更大的数系之中, 在这些数系里, 这些运算可以(几乎)不受限制地使用.

当然, 这些新的数系必须被构造得仍然满足加法与乘法的通常法则. 为此, 脱离对某个具体数系的依赖, 而对这些运算法则本身进行研究是极其有用的. 这样的研究也为我们提供了进一步的训练: 如何从给定的定义和公理中, 以逻辑方式推演出命题.

对这里以及接下来几节中所出现问题的深入讨论, 严格来说属于代数学的范畴而非分析学, 因此我们在叙述会相对简略, 只证明其中少数最重要的定理. 我们的目标是: 能够识别那些一次又一次以不同形式出现的一般代数结构. 从少量公理出发推导出大量算术运算法则, 使我们得以在本来杂乱庞大的公式和结论中建立起某种秩序, 并将注意力集中在真正本质的内容上. 从这些公理推出的命题, 只要公理成立, 那么它们就成立, 而与所处的具体背景无关. 已经证明过一次的结论, 就不必在每一个特殊情形中重新证明.

在本节以及接下来的各节中, 我们只给出少数几个具体的例子. 我们的主要目的是提供一套语言, 并希望读者在后面的章节中能够体会到这套语言的用处, 同时也能看到这套形式主义背后真正的数学内容.

### 群

**公理 1.7.1 (群).** 设  $G$  是非空集合, 其上定义了运算

$$\odot: G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g \odot h.$$

若

(G<sub>1</sub>)  $\odot$  具有结合律.

(G<sub>2</sub>)  $\odot$  具有单位元  $e$ .

(G<sub>3</sub>) 每个  $g \in G$  都有逆元  $h \in G$  使得  $g \odot h = h \odot g = e$ .

则称  $(G, \odot)$  是群.

**定义 1.7.2 (Abel 群).** 称群  $(G, \odot)$  是交换群或 Abel 群, 若  $\odot$  具有交换律.

子群

陪集

同态

注 1.7.1.

同构

## 1.8 环、域与多项式

本节中, 我们考虑在其上定义了两种运算的集合. 在这里我们假定: 对于其中一种运算, 这个集合构成一个 Abel 群, 并且这两种运算满足某种合适的“分配律”. 由此发展出“环”和“域”的概念, 它们把运算法则加以形式化. 作为环的特别重要的例子, 我们将考察幂级数环以及单变量(和多变量)多项式环, 并推导它们的一些基本性质. 多项式函数在运算上相对容易处理, 在分析中也具有重要地位, 因为“复杂函数可以被多项式任意逼近”, 这一说法我们将在后文中以更精确的形式加以表述.

### 环

**公理 1.8.1 (环).** 设  $R$  是非空集合, 其上定义了加法运算

$$+: R \times R \rightarrow R, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

和乘法运算

$$\times: R \times R \rightarrow R, \quad (a, b) \mapsto a \times b.$$

若

(R<sub>1</sub>)  $(R, +)$  是 Abel 群.

(R<sub>2</sub>)  $\times$  具有结合律.

(R<sub>3</sub>)  $\times$  对  $+$  具有分配律:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c, \quad c \times (a + b) = c \times a + c \times b, \quad a, b, c \in R.$$

则称  $(R, +, \times)$  是环.

**定义 1.8.2 (交换环).** 称环  $(R, +, \times)$  是交换环, 若  $\times$  具有交换律.

**定义 1.8.3 (单位环).** 称环  $(R, +, \times)$  是单位环, 若  $\times$  具有单位元.

**例 1.8.1.**

### 二项式定理

**定理 1.8.2 (二项式定理).** 设  $a$  和  $b$  是单位环  $R$  的两个可交换元(即,  $ab = ba$ ). 则

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**多项式定理****域**

**公理 1.8.4.** 设  $K$  是非空集合, 其上定义了加法运算

$$+: K \times K \rightarrow K, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

和乘法运算

$$\times: K \times K \rightarrow K, \quad (a, b) \mapsto a \times b.$$

若

(F<sub>1</sub>)  $(K, +, \times)$  是具有单位元的交换环.

(F<sub>2</sub>) 加法单位元 0 不等于乘法单位元 1.

(F<sub>3</sub>) 每个  $a \in K \setminus \{0\}$  都有逆元  $b \in K \setminus \{0\}$  使得  $a \times b = b \times a = 1$ .

则称  $(K, +, \times)$  是域.

**有序域****形式幂级数****多项式****多项式函数****多项式的除法****线性因子****多变量多项式**

## 1.9 有理数

整数

有理数

命题 1.9.1.  $\mathbb{Z}$  和  $\mathbb{Q}$  是可数集.

多项式的有理零点

平方根

## 1.10 实数

序完备性

Dedekind 对实数的构造

$\mathbb{R}$  上的自然序结构

广义实数

上确界与下确界的刻画

Archimedes 公理

**命题 1.10.1** (Archimedes 公理).  $\mathbb{N}$  在  $\mathbb{R}$  中没有上界, 即对于每个  $x \in \mathbb{R}$  都存在  $n \in \mathbb{N}$  使得  $n > x$ .

**推论 1.10.2.** 1. 设  $a \in \mathbb{R}$ . 若对于任意  $n \in \mathbb{N}^*$  都有  $0 \leq a \leq 1/n$ , 则  $a = 0$ .

2. 对于每个  $a \in \mathbb{R}$  且  $a > 0$  都存在  $n \in \mathbb{N}^*$  使得  $1/n < a$ .

有理数在  $\mathbb{R}$  中的稠密性

**命题 1.10.3.** 对于任意  $a, b \in \mathbb{R}$  使得  $a < b$ , 都存在  $r \in \mathbb{Q}$  使得  $a < r < b$ .

$n$  次方根

无理数在  $\mathbb{R}$  中的稠密性

区间

## 1.11 复数

复数的构造

基本性质

复数的运算

**命题 1.11.1.** 设  $z, w \in \mathbb{C}$ .

1.  $|zw| = |z||w|$ .
2. 对于任意  $z \in \mathbb{R}$  都有  $|z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$ .
3.  $|\Re z| \leq |z|$ ,  $|\Im z| \leq |z|$ ,  $|z| = |\bar{z}|$ .
4.  $|z| = 0$  当且仅当  $z = 0$ .
5. (三角不等式)  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .
6. 对于任意  $z \in \mathbb{C}^*$  都有  $z^{-1} = 1/z = \bar{z}/|z|^2$ .

**推论 1.11.2** (反三角不等式).

$$|z - w| \geq ||z| - |w||, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

$\mathbb{K}$  中的球

## 1.12 向量空间、仿射空间与代数

线性代数无疑是所有数学研究领域中最为肥沃的一支，并且为数学各个分支中许多影响深远的理论奠定了基础。尤其是，线性代数是分析学的主要工具之一，因此本节将介绍其基本概念，并配以例子加以说明。我们的目标依然是：能够识别那些在后续章节中以不同形式频繁出现的简单代数结构。若要作更深入的研究，读者可参阅线性代数的丰富文献，例如：[Art91]、[Gab96]、[Koe83]、[Wal82] 和 [Wal85]。

在下文中， $K$  表示一个任意的域。

### 向量空间

**公理 1.12.1** (向量空间). 设  $V$  是非空集合，其上定义了“内”运算向量加法

$$\oplus: V \times V \rightarrow V, \quad (v, w) \mapsto v \oplus w,$$

和“外”运算标量乘法

$$\cdot: K \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v.$$

若

(VS<sub>1</sub>)  $(V, \oplus)$  是 Abel 群。

且对于任意  $\lambda, \mu \in K$  和  $v, w \in V$  都有

(VS<sub>2</sub>) 域乘法单位元  $1 \in K$  是  $\cdot$  的单位元：

$$1 \cdot v = v.$$

(VS<sub>3</sub>)  $\cdot$  对  $\oplus$  具有分配律：

$$\lambda \cdot (v \oplus w) = \lambda \cdot v \oplus \lambda \cdot w.$$

(VS<sub>4</sub>)  $\cdot$  对域加法  $+$  具有分配律：

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v.$$

(VS<sub>5</sub>)  $\cdot$  和域乘法  $\times$  相容：

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v.$$

则称  $(V, \oplus, \cdot)$  是域  $K$  上的向量空间或  $K$ -向量空间。

## 线性映射

**定义 1.12.2** (线性映射). 设  $V$  和  $W$  是  $K$ -向量空间. 则称函数  $T: V \rightarrow W$  是  $K$ -线性映射或  $K$ -线性的, 若

$$T(\lambda v + \mu w) = \lambda T v + \mu T w, \quad \lambda, \mu \in K, \quad v, w \in V.$$

**注 1.12.1.** 1. 对于线性映射  $T: V \rightarrow W$ , 当  $v \in V$  时, 在不会引起混淆的情况下, 通常把  $T(v)$  记作  $Tv$ .

2. 向量空间同态  $T: V \rightarrow W$ , 特别的, 还是群同态  $T: (V, +) \rightarrow (W, +)$ . 因此,  $T0 = 0$  且对于任意  $v \in V$  都有  $T(-v) = -Tv$ .  $T$  的核或零空间就是这个群同态的核, 即

$$\ker T = \{v \in V; T v = 0\} = T^{-1}0.$$

因此,  $T$  是单射当且仅当其核是平凡的, 即  $\ker T = \{0\}$  (见注 1.7.1 的 1 和 4).

**例 1.12.2.** 设  $V$  和  $W$  是  $K$ -向量空间.

1. 一个零或平凡 (向量) 空间只包含一个向量 0, 通常直接记作 0. 任何其他向量空间都是非平凡的.

2. 设  $U$  是  $V$  的非空子集. 若

(SS<sub>1</sub>)  $U$  对向量加法封闭, 即  $U + U \subseteq U$ .

(SS<sub>2</sub>)  $U$  对标量乘法封闭, 即  $K \cdot U \subseteq U$ .

则称  $U$  是  $V$  的子空间.

3. 设  $T: V \rightarrow W$  是线性映射. 则  $\ker T$  是  $V$  的子空间,  $\text{im } T$  是  $W$  的子空间. 若  $T$  是单射, 则  $T^{-1} \in \text{Hom}(\text{im } T, V)$ .

4. 当把域上的运算视为向量空间上的运算时,  $K$  自身就是以  $K$  为数域的向量空间.

5. 设  $X$  是集合. 则  $V^X$  在定义如下运算 (见例 1.4.1) 后是  $K$ -向量空间.

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x), \quad x \in X, \quad \lambda \in K, \quad f, g \in V^X.$$

特别的,  $K^m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) 在定义如下运算后是  $K$ -向量空间.

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m), \quad \lambda \cdot x := (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_m), \quad \lambda \in K, \quad x, y \in K^m.$$

显然,  $K^1$  和  $K$  (作为  $K$ -向量空间) 是相同的.

## 向量空间的基

### 仿射空间

### 仿射映射

### 多项式插值

### 代数

**公理 1.12.3** (代数). 设  $A$  是  $K$ -向量空间, 其上定义了向量乘法

$$\otimes: A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a \otimes b.$$

若

(A<sub>1</sub>)  $(A, \oplus, \otimes)$  是环.

(A<sub>2</sub>)  $\otimes$  和标量乘法  $\cdot$  相容:

$$\lambda \cdot (v \otimes w) = (\lambda \cdot v) \otimes w = v \otimes (\lambda \cdot w), \quad \lambda \in K, \quad v, w \in A.$$

则称  $(A, \oplus, \cdot, \otimes)$  是域  $K$  上的代数或  $K$ -代数.

**例 1.12.3.** 1. 设  $B$  是  $A$  的非空子集. 若

(SA<sub>1</sub>)  $B$  是  $A$  的子空间.

(SA<sub>2</sub>)  $B$  对向量乘法封闭, 即  $B \otimes B \subseteq B$ .

则称  $B$  是  $A$  的子代数.

2. 设  $X$  是非空集合. 则  $K^X$  在定义例 1.8.1.2 和例 1.12.2.5 的运算后是具有单位元的交换  $K$ -代数.

## 差分算子与求和公式

### Newton 插值多项式

## 第 2 章 收敛性

从本章开始, 我们终于进入分析的领域. 数学的这一分支在很大程度上是建立在“收敛”这一概念之上的. 借助收敛, 我们在某种意义上得以把无穷多个数(或向量)“加”在一起. 能够处理这样的无限运算, 正是分析与代数之间本质区别之所在.

试图把关于数列收敛的朴素想法加以公理化, 会自然地引出“距离”、“点的邻域”以及“度量空间”等概念—这正是第 1 节的主题. 在数列这一特殊情形中, 我们可以利用数域  $\mathbb{K}$  的向量空间结构, 对这种情形下各种证明的分析表明: 只要有某种类似“绝对值”的概念可用, 其中大多数证明都可以推广到向量空间中的向量序列. 于是我们很自然地被引向去定义“赋范向量空间”—度量空间中一个尤其重要的类别.

在所有赋范向量空间中, 内积空间由于其结构更为丰富而显得格外重要, 并且它们的几何性质与我们熟悉的平面 Euclidean 几何非常相似. 事实上, 在初等分析中, 最重要的一类内积空间就是  $m$ -维 Euclidean 空间  $\mathbb{R}^m$  和  $\mathbb{C}^m$ .

在第 4 和第 5 节中, 我们回到最简单的情形, 也就是在  $\mathbb{R}$  中的收敛问题. 借助实数的序结构, 尤其是  $\mathbb{R}$  的序完备性, 我们推导出第一批“具体的收敛判别准则”. 这些准则使我们能够求出许多重要数列的极限. 除此之外, 我们还将从  $\mathbb{R}$  的序完备性出发, 得到一个根本性的存在性原理—Bolzano-Weierstrass 定理.

第 6 节专门讨论度量空间中的“完备性”概念. 将这一概念限制到赋范向量空间, 就得到了“Banach 空间”的定义. 这类空间最基本的例子就是  $\mathbb{K}^m$ , 但我们还将说明: 有界函数构成的函数空间也是 Banach 空间.

Banach 空间在分析中无处不在, 因此在本书的叙述中居于核心地位. 即便如此, 它们的结构仍然足够简单, 使得初学者可以在不太费力的情况下, 从理解实数自然过渡到理解 Banach 空间. 再者, 对这些空间的较早引入, 也使得我们在后面章节中能够给出简洁而优美的证明.

为了内容的完整性, 也为了读者整体(数学)素养的培养, 我们在第 6 节中给出 Cantor 关于“序完备的有序域存在性”的证明, 这个证明是通过对  $\mathbb{Q}$  进行“完备化”而得到的.

在本章余下的各节中, 我们将讨论级数的收敛性. 在第 7 节里, 我们会学习级数的基本性质, 并讨论若干最重要的例子. 这样一来, 我们就能够研究实数的十进制表示以及其他形式的表示, 从而证明实数集是不可数集.

在所有收敛级数当中, 绝对收敛的级数具有尤为重要的地位. 绝对收敛往往比较容易判别, 这类级数在运算与处理上也相对简单. 此外, 在实际应用中许多重要的级数都是绝对收敛的. 对于本章最后一节将要引入和研究的幂级数, 这一点尤为明显. 其中最最重要的例子是指数级数, 它的重要性将在后续章节中逐渐显现出来.

## 2.1 序列的收敛性

在本节中, 我们考虑定义在自然数集上的函数, 因此这类函数只会取到可数多个值. 对这样的函数  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$ , 我们特别关心的是它在“当  $n$  趋于无穷大时”各个取值  $\varphi(n)$  的行为. 由于我们实际上只能对  $\varphi$  进行有限次求值, 也就是说, 我们永远不可能真正“到达无穷大”, 因此必须发展出一些方法, 使我们能够对“靠近无穷远处”的无穷多个函数值建立命题并加以证明. 这样的方法就构成了收敛序列的理论, 本节将对其进行介绍.

### 序列

**定义 2.1.1** (序列). 设  $X$  是集合. 称函数

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$$

是  $X$  中的序列, 记作

$$(x_n), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{或} \quad (x_0, x_1, x_2, \dots),$$

并称

$$x_n := \varphi(n)$$

是序列的第  $n$  项.

**定义 2.1.2** (数列).  $\mathbb{K}$  中的序列称为数列. 进一步, 将  $\mathbb{K}$  中的所有数列, 即  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  记作  $s$  或  $s(\mathbb{K})$ , 于是  $s$  构成了  $\mathbb{K}$ -向量空间 (见例 1.12.2.5). 最后,  $\mathbb{R}$  中的数列称为实数列,  $\mathbb{C}$  中的数列称为复数列.

**注 2.1.1.** 1. 区分序列  $(x_n)$  和它的像  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  是很重要的. 例如, 若对于任意  $n$  有  $x_n = x$ , 也就是说  $(x_n)$  是一个常序列, 此时  $(x_n) = (x, x, x, \dots)$ , 而  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  是单点集  $\{x\}$ .

2. 设  $(x_n)$  是  $X$  中的序列,  $E$  是某个性质. 称  $E$  对  $(x_n)$  的几乎所有项都成立, 若存在  $m \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq m$  时命题  $E(x_n)$  都成立. 也就是说, 除了至多有限多个  $x_n$  以外,  $E$  对其余所有  $x_n$  都成立. 当然,  $E$  也可以对若干个 (甚至全部)  $n < m$  的项成立. 若存在  $N \subseteq \mathbb{N}$  满足  $|N| = \aleph_0$  且  $E(x_n)$  对于所有  $n \in N$  都成立, 则称  $E$  对  $(x_n)$  的无穷多项都成立. 例如, 实数列

$$\left(-5, 4, -3, 2, -1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, -\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2n+1}, \dots\right)$$

有无穷多个正项, 无穷多个负项, 并且对于几乎所有项都有其绝对值小于 1.

3. 对于任意  $m \in \mathbb{N}^*$ , 函数

$$\psi: m + \mathbb{N} \rightarrow X$$

也称为  $X$  中的序列。也就是说,

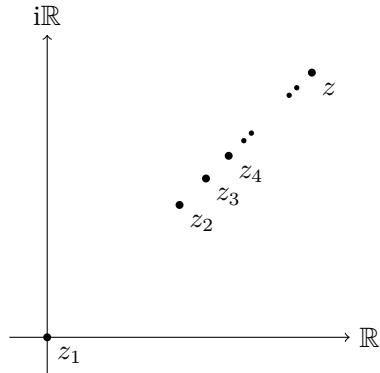
$$(x_j)_{j \geq m} = (x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$$

是  $X$  中的序列, 尽管其下标不是从 0 开始. 这种约定是合理的, 因为通过映射

$$\mathbb{N} \rightarrow m + \mathbb{N}, \quad n \mapsto m + n$$

对下标进行“重新编号”之后, 这个“平移后的序列”  $(x_j)_{j \geq m}$  就可以与通常意义下的序列  $(x_{m+k})_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  对应起来.

如果把复数列  $(z_n)_{n \geq 1}$  的前几项画在复平面上, 其中  $z_n := (1 - 1/n)(1 + i)$ , 就会发现: 当  $n$  增大时, 这些点  $z_n$  会“任意接近”  $z := 1 + i$ . 换句话说, 随着  $n$  的增大,  $z_n$  到  $z$  的距离会变得“任意小”. 本节的目标, 就是把我们对于这类数列收敛的直观几何想法加以公理化, 使之能够推广应用到向量空间中的序列, 以及更抽象的集合中的序列上.



首先我们要意识到, “距离”这一概念居于核心地位. 在数域  $\mathbb{K}$  中, 我们可以借助绝对值函数来确定两点之间的距离. 若要研究某个任意集合  $X$  中序列的收敛性, 我们首先需要在  $X$  上赋予一种结构, 使得可以在  $X$  的任意两个元素之间定义“距离”.

## 度量空间

**公理 2.1.3 (度量).** 设  $X$  是集合, 其上定义了函数

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}.$$

若对于任意  $x, y, z \in X$  都有

(M<sub>1</sub>) (同一性)  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ .

(M<sub>2</sub>) (对称性)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

(M<sub>3</sub>) (三角不等式)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

则称  $d$  是  $X$  上的度量. 进一步, 称  $(X, d)$  是度量空间. 最后, 称  $d(x, y)$  是度量空间  $X$  中点  $x$  和  $y$  之间的距离.

(M<sub>1</sub>)-(M<sub>3</sub>) 显然是对“距离函数”非常自然的要求. 举例来说, (M<sub>3</sub>) 可以被看作这样一条规则的公理化表述: “从  $x$  到  $y$  的‘直达路径’比先从  $x$  到  $z$  再从  $z$  到  $y$  的路径更短”.

**命题 2.1.2** (度量的非负性). 设  $(X, d)$  是度量空间. 则

$$d(x, y) \geq 0, \quad x, y \in X.$$

**证明.** 设  $x, y \in X$ . 由度量的性质可得

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y).$$

□

**定义 2.1.4** (开球和闭球). 设  $(X, d)$  是度量空间,  $a \in X$ ,  $r > 0$ . 称集合

$$\mathbb{B}(a, r) := \{x \in X ; d(x, a) < r\}$$

是以  $a$  为中心,  $r$  为半径的开球. 并称集合

$$\bar{\mathbb{B}}(a, r) := \{x \in X ; d(x, a) \leq r\}$$

是以  $a$  为中心,  $r$  为半径的闭球.

**例 2.1.3.** 1. 函数

$$|\cdot| : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto |x - y|$$

是  $\mathbb{K}$  上的度量, 称为自然度量. 除非另有说明, 否则默认  $\mathbb{K}$  配备该度量, 并将其视为一个度量空间.

2. 设  $(X, d)$  是度量空间,  $Y$  是  $X$  的非空子集. 则把  $d$  限制在  $Y \times Y$  上所得的函数

$$d_Y := d|_{Y \times Y}$$

是  $Y$  上的度量, 称为诱导度量. 进一步, 称  $(Y, d_Y)$  是  $(X, d)$  的子空间. 在不会引起混淆的情况下, 我们往往直接写  $d$ , 而不特别区分  $d_Y$ .

3.  $\mathbb{C}$  的任意非空子集, 在从  $\mathbb{C}$  的自然度量诱导出来的度量之下, 都是度量空间. 以这种方式在  $\mathbb{R}$  上得到的度量, 正好就是在例 2.1.3.1 中定义的那个自然度量.

4. 设  $X$  是非空集合. 则函数

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

是  $X$  上的度量, 称为离散度量.

5. 设  $(X_j, d_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$  是度量空间,  $X := X_1 \times \cdots \times X_m$ . 则函数

$$d(x, y) := \max_{1 \leq j \leq m} d_j(x_j, y_j), \quad x := (x_1, \dots, x_m) \in X, \quad y := (y_1, \dots, y_m) \in X$$

是  $X$  上的度量, 称为积度量. 进一步, 称  $(X, d)$  是  $(X_j, d_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$  的积空间. 可以验证, 对于任意  $a := (a_1, \dots, a_m) \in X$  以及  $r > 0$ , 都有

$$\mathbb{B}_X(a, r) = \prod_{j=1}^m \mathbb{B}_{X_j}(a_j, r), \quad \bar{\mathbb{B}}_X(a, r) = \prod_{j=1}^m \bar{\mathbb{B}}_{X_j}(a_j, r).$$

**证明.** 1. 由命题 1.11.1 可以直接验证  $|\cdot|$  满足度量公理.  $\square$

度量公理的一个重要结论是反三角不等式 (见推论 1.11.2).

**命题 2.1.4 (反三角不等式).** 设  $(X, d)$  是度量空间. 则

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|, \quad x, y, z \in X.$$

**证明.** 设  $x, y, z \in X$ . 由  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  可得

$$d(x, y) \geq d(x, z) - d(z, y),$$

交换  $x$  和  $y$  可得

$$d(x, y) = d(y, x) \geq d(y, z) - d(z, x) = -(d(x, z) - d(z, y)),$$

即  $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$ .  $\square$

**定义 2.1.5 (邻域).** 设  $X$  是度量空间,  $U \subseteq X$ ,  $a \in X$ . 若存在  $r > 0$  使得  $\mathbb{B}(a, r) \subseteq U$ , 则称  $U$  是  $a$  的邻域. 进一步, 将  $a$  的邻域的全体记作

$$\mathcal{N}(a) := \{U \subseteq X; U \text{ 是 } a \text{ 的邻域}\}.$$

**例 2.1.5.** 设  $X$  是度量空间,  $a \in X$ .

1. 对于每个  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbb{B}(a, \varepsilon)$  和  $\bar{\mathbb{B}}(a, \varepsilon)$  都是  $a$  的邻域, 称为  $a$  的开  $\varepsilon$ -邻域和闭  $\varepsilon$ -邻域.

2. 显然  $X \in \mathcal{N}(a)$ . 若  $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(a)$ , 则  $U_1 \cap U_2$  和  $U_1 \cup U_2$  也是  $a$  的邻域. 任意包含了  $a$  的邻域的集合同样也是  $a$  的邻域.
3. 设  $X := [0, 1]$  配备了在  $\mathbb{R}$  上诱导的度量. 则  $[1/2, 1]$  是 1 的邻域, 但不是 1/2 的邻域.

**证明.** 2. 设  $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(a)$ . 故存在  $r_1, r_2 > 0$  使得  $\mathbb{B}(a, r_1) \in U_1$  和  $\mathbb{B}(a, r_2) \in U_2$ . 令  $r = \min\{r_1, r_2\}$ , 于是

$$\mathbb{B}(a, r) \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \cup U_2,$$

即  $U_1 \cap U_2$  和  $U_1 \cup U_2$  是  $a$  的邻域. □

在本节的其余部分里, 设  $X := (X, d)$  是度量空间,  $(x_n)$  是  $X$  中的序列.

## 聚点

**定义 2.1.6** (聚点). 称  $a \in X$  是  $(x_n)$  的聚点, 若  $a$  的每个邻域都包含了  $(x_n)$  的无穷多项.

在讨论一些具体例子之前, 先给出下面这个关于聚点的刻画会对之后的讨论很有帮助.

**命题 2.1.6.** 以下命题是等价的.

1.  $a$  是  $(x_n)$  的聚点.
2. 对于任意  $U \in \mathcal{N}(a)$  和  $m \in \mathbb{N}$ , 存在  $n \geq m$  使得  $x_n \in U$ .
3. 对于任意  $\varepsilon > 0$  和  $m \in \mathbb{N}$ , 存在  $n \geq m$  使得  $x_n \in \mathbb{B}(a, \varepsilon)$ .

**证明.** 由聚点的定义可以直接得到. □

**例 2.1.7.** 1. 实数列  $((-1)^n)$  有两个聚点, 1 和 -1.

2. 复数列  $(i^n)$  有四个聚点,  $\pm 1$  和  $\pm i$ .
3. 常序列  $(x, x, x, \dots)$  有唯一的聚点  $x$ .
4. 自然数序列  $(n)$  没有聚点.
5. 设  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  是双射 (由命题 1.9.1 可知这样的函数存在). 定义序列  $(x_n)$ , 其中  $x_n := \varphi(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . 则每个实数都是  $(x_n)$  的聚点.

**证明.** 5. 假设  $a \in \mathbb{R}$  不是  $(x_n)$  的聚点. 由命题 2.1.6 可知, 存在  $\varepsilon > 0$  和  $m \in \mathbb{N}$ , 使得

$$x_n \notin \mathbb{B}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \quad n \geq m.$$

这意味着区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  仅包含了有限多个有理数, 这与命题 1.10.3 矛盾. □

## 收敛性

**定义 2.1.7** (收敛). 称序列  $(x_n)$  收敛, 若存在  $a \in X$  使得  $a$  的任意邻域都包含了  $(x_n)$  的几乎所有项. 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty),$$

并称当  $n$  趋于无穷大时,  $(x_n)$  收敛到  $a$  或以  $a$  为极限. 若  $(x_n)$  不收敛, 则称  $(x_n)$  发散.

这个定义中最核心的部分是要求: 极限的每个邻域都包含该序列的几乎所有项. 在  $X = \mathbb{K}$  的情形下, 这一要求正对应于那种  $x_n$  到  $a$  的距离“变得任意小”的几何直觉. 如果  $a$  是  $(x_n)$  的聚点且  $U$  是  $a$  的邻域, 那么当然,  $U$  会包含序列的无穷多项, 但同时也有可能序列的无穷多项也不落在  $U$  中.

下一个命题是对收敛的等价刻画.

**命题 2.1.8.** 以下命题是等价的.

1.  $\lim x_n = a$ .
2. 对于任意  $U \in \mathcal{N}(a)$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时  $x_n \in U$ .
3. 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时  $x_n \in \mathbb{B}(a, \varepsilon)$ .

**证明.** 由收敛的定义可以直接得到. □

下面这些例子都比较简单. 对于更复杂的例子, 我们需要第 4 节发展出的那些方法.

**例 2.1.9.** 1. 设实数列  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , 则  $\lim 1/n = 0$ .

2. 设复数列  $(z_n)$ , 其中

$$z_n := \frac{n+2}{n+1} + i \frac{2n}{n+2},$$

则  $\lim z_n = 1 + 2i$ .

3. 常序列  $(a, a, a, \dots)$  收敛到  $a$ .

4. 实数列  $((-1)^n)$  发散.

5. 设  $X$  是度量空间  $(X_j, d_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$  的积空间. 则序列  $(x_n) = ((x_n^1, \dots, x_n^m))$  收敛到点  $a := (a^1, \dots, a^m) \in X$  当且仅当对于每个  $j \in \{1, \dots, m\}$  都有序列  $(x_n^j)$  收敛到点  $a^j \in X_j$ .

**证明.** 1. 任取  $\varepsilon > 0$ . 由推论 1.10.2 可知, 存在  $N \in \mathbb{N}^*$  使得  $1/N < \varepsilon$ , 于是

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

即当  $n \geq N$  时  $1/n \in \mathbb{B}(0, \varepsilon)$ .

2. 任取  $\varepsilon > 0$ . 由推论 1.10.2 可知, 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $1/N < \varepsilon/8$ , 此时有

$$\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 < \frac{1}{N^2} < \frac{\varepsilon^2}{64} < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad n \geq N,$$

和

$$\left(\frac{2n}{n+2} - 2\right)^2 = \left(\frac{4}{n+2}\right)^2 < \frac{16}{N^2} < \frac{\varepsilon^2}{4} < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad n \geq N,$$

于是

$$\begin{aligned} |z_n - (1 + 2i)| &= \left| \frac{1}{n+1} - i \frac{4}{n+2} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(-\frac{4}{n+2}\right)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} < \varepsilon, \quad n \geq N, \end{aligned}$$

即当  $n \geq N$  时  $z_n \in \mathbb{B}((1 + 2i), \varepsilon)$ .

5.  $\Rightarrow$ . 设  $(x_n)$  收敛到点  $a$ . 则任取  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得

$$x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m) \in \mathbb{B}_X(a, \varepsilon) = \prod_{j=1}^m \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon), \quad n \geq N,$$

即当  $n \geq N$  时, 对于每个  $j$  都有  $x_n^j \in \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon)$ .

$\Leftarrow$ . 设对于每个  $j$  都有  $(x_n^j)$  收敛到点  $a^j$ . 任取  $\varepsilon > 0$ , 对于每个  $j$  都存在  $N_j \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N_j$  时  $x_n^j \in \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon)$ . 令  $N = \max_{1 \leq j \leq m} N_j$ , 于是

$$(x_n^1, \dots, x_n^m) = x_n \in \prod_{j=1}^m \mathbb{B}_{X_j}(a^j, \varepsilon) = \mathbb{B}_X(a, \varepsilon), \quad n \geq N.$$

□

## 有界集合

**定义 2.1.8** (有界性). 称集合  $Y \subseteq X$  在  $X$  中  $d$ -有界或有界, 若存在  $M > 0$  使得对于任意  $x, y \in Y$  都有  $d(x, y) \leq M$ . 进一步, 称

$$\text{diam } Y := \sup_{x, y \in Y} d(x, y)$$

是  $Y$  的直径. 最后, 称序列  $(x_n)$  有界, 若它的像  $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$  有界.

**例 2.1.10.** 1. 对于任意  $a \in X$  和  $r > 0$ ,  $\mathbb{B}(a, r)$  和  $\bar{\mathbb{B}}(a, r)$  在  $X$  中有界.

2. 有界集合的每个子集都是有界的. 有界集合的有限并是有界的.

3. 集合  $Y \subseteq X$  在  $X$  中有界, 当且仅当存在  $x \in X$  和  $r > 0$  使得  $Y \subseteq \mathbb{B}_X(x, r)$ . 若  $Y \neq \emptyset$ , 则存在  $x \in Y$  也满足该性质.

4. 有界区间是有界的.

5. 集合  $Y \subseteq \mathbb{K}$  有界, 当且仅当存在  $M > 0$  使得对于任意  $y \in Y$  都有  $|y| \leq M$ .

**命题 2.1.11** (有界性). 收敛序列必有界.

**证明.** 设序列  $(x_n)$  收敛到点  $a$ . 则存在  $N \in \mathbb{N}$  使得对于任意  $n \geq N$  有  $x_n \in \mathbb{B}(a, 1)$ . 由三角不等式可得

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < 2, \quad m, n \geq N.$$

令  $M = \max_{m, n < N} d(x_n, x_m)$ , 有

$$d(x_n, x_m) \leq M, \quad m, n < N.$$

于是对于任意  $m, n \in \mathbb{N}$  都有  $d(x_n, x_m) \leq M + 2$ .  $\square$

### 极限的唯一性

**命题 2.1.12.** 设序列  $(x_n)$  收敛到点  $a$ . 则  $a$  是  $(x_n)$  唯一的聚点.

**证明.** 显然  $a$  是  $(x_n)$  的聚点, 现证明唯一性. 假设  $b$  是  $(x_n)$  的聚点且  $a \neq b$ . 取  $\varepsilon = d(a, b)/2$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时  $x_n \in \mathbb{B}(a, \varepsilon)$ . 而  $b$  是  $(x_n)$  的聚点, 故存在  $m \geq N$  使得  $x_m \in \mathbb{B}(b, \varepsilon)$ . 由命题 2.1.4 可知

$$d(a, x_m) \geq |d(a, b) - d(b, x_m)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

即  $x_m \notin \mathbb{B}(a, \varepsilon)$ , 矛盾, 因此  $b$  不是  $(x_n)$  的聚点.  $\square$

**注 2.1.13.** 命题 2.1.12 的逆命题不成立, 也就是说, 存在发散但具有唯一聚点的序列. 例如,  $(1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4, \dots)$ .

**推论 2.1.14** (唯一性). 收敛序列的极限唯一.

**证明.** 由命题 2.1.12 可以直接得到.  $\square$

### 子序列

**定义 2.1.9** (子序列). 设  $\varphi = (x_n)$  是  $X$  中的序列,  $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  是严格递增函数. 称  $\varphi \circ \psi$  是  $\varphi$  的子序列, 记作

$$(x_{n_k}) \quad \text{或} \quad (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}},$$

其中  $n_k := \psi(k)$ .

因为  $\psi$  是严格递增的, 故  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$

**例 2.1.15.** 数列  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  有两个子数列,  $((-1)^{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots)$  和  $((-1)^{2k+1})_{k \in \mathbb{N}} = (-1, -1, -1, \dots)$ .

**命题 2.1.16.** 若序列  $(x_n)$  收敛到点  $a$ , 则  $(x_n)$  的每个子序列  $(x_{n_k})$  也收敛且以  $a$  为极限.

**证明.** 任取  $U \in \mathcal{N}(a)$ . 则存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时  $x_n \in U$ . 由子序列的定义可知, 对于任意  $k \in \mathbb{N}$  有  $n_k \geq k$ , 因此当  $k \geq N$  时  $n_k \geq N$ , 于是  $x_{n_k} \in U$ . 即  $(x_{n_k})$  收敛到  $a$ .  $\square$

**例 2.1.17.** 当  $m \geq 2$  时,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^m} = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m^k} = 0.$$

**证明.** 令  $\psi_1(k) := k^m$ ,  $\psi_2(k) := m^k$ . 由于  $\psi_i: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ ,  $i = 1, 2$  是严格递增的, 因此  $(k^{-m})$  和  $(m^{-k})$  是  $(1/n)$  的子数列. 于是由例 2.1.9.1 和命题 2.1.16 可得.  $\square$

下面的命题是对聚点的进一步刻画.

**命题 2.1.18.** 点  $a$  是序列  $(x_n)$  的聚点, 当且仅当存在  $(x_n)$  的子序列  $(x_{n_k})$  收敛到  $a$ .

**证明.**  $\Rightarrow$ . 设  $a$  是  $(x_n)$  的聚点. 下面递归构造序列  $(n_k)$ ,

$$n_0 := 0, \quad n_k := \min\{m \in \mathbb{N}; m > n_{k-1} \text{ 且 } x_m \in \mathbb{B}(a, 1/k)\}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

由于  $a$  是  $(x_n)$  的聚点, 故

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq n_{k-1} \text{ 且 } x_m \in \mathbb{B}(a, 1/k)\} \neq \emptyset, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

由良序原理可知, 对于每个  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $n_k$  是良定义的. 于是  $(n_k)$  是良定义且严格递增的. 任取  $\varepsilon > 0$ , 由推论 1.10.2 可知, 存在  $K \in \mathbb{N}$  使得  $1/K < \varepsilon$ , 由  $n_k$  的定义可知

$$x_{n_k} \in \mathbb{B}(a, 1/k) \subseteq \mathbb{B}(a, \varepsilon), \quad k \geq K,$$

即  $(x_{n_k})$  收敛到  $a$ .

$\Leftarrow$ . 设  $(x_n)$  的子序列  $(x_{n_k})$  收敛到  $a$ . 任取  $U \in \mathcal{N}(a)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . 存在  $K \in \mathbb{N}$  使得当  $k \geq \max\{m, K\}$  时  $x_{n_k} \in U$ , 因此  $a$  是  $(x_n)$  的聚点.  $\square$

## 练习

1. 设  $d$  是  $\mathbb{K}$  上的离散度量,  $X := (\mathbb{K}, d)$ .

1. 设  $a \in X$  和  $r > 0$ , 给出  $\mathbb{B}_X(a, r)$  和  $\bar{\mathbb{B}}_X(a, r)$  的具体描述.
2. 描述  $X$  中任意序列的聚点.
3. 设  $a \in X$ , 描述  $X$  中所有收敛到  $a$  的序列.

2. 证明例 2.1.3.5 的断言.
3. 证明数列  $(z_n)_{n \geq 1}$  其中  $z_n := (1 - 1/n)(1 + i)$  收敛到  $1 + i$ .
4. 证明例 2.1.10 的断言.
5. 找出复数列  $(z_n)$  在下列情况下的全部聚点.
  1.  $z_n := ((1 + i)/\sqrt{2})^n$ .
  2.  $z_n := (1 + (-1)^n)(n + 1)n^{-1} + (-1)^n$ .
  3.  $z_n := (-1)^n n/(n + 1)$ .

6. 对于每个  $n \in \mathbb{N}$ , 定义

$$a_n := n + \frac{1}{k} - \frac{k^2 + k - 2}{2},$$

其中  $k \in \mathbb{N}^*$  满足

$$k^2 + k - 2 \leq 2n \leq k^2 + 3k - 2.$$

证明  $(a_n)$  是良定义的并找出其所有的聚点. (提示: 先把该数列的前几项具体算出来, 以便更好的把握整个数列的行为.)

7. 对于每个  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , 定义

$$d(m, n) := \begin{cases} (m + n)/mn, & m \neq n, \\ 0, & m = n, \end{cases}$$

证明  $(\mathbb{N}^*, d)$  是度量空间, 对  $n \in \mathbb{N}^*$  描述  $A_n := \bar{\mathbb{B}}(n, 1 + 1/n)$ .

8. 设  $X := \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 3\}$  并配备自然度量. 描述  $\bar{\mathbb{B}}_X(0, 3)$  和  $\bar{\mathbb{B}}_X(2, 4)$ , 并证明  $\bar{\mathbb{B}}_X(2, 4) \subset \bar{\mathbb{B}}_X(0, 3)$ .

- 9 (度量的等价). 集合  $X$  上的度量  $d_1$  和  $d_2$  被称为等价度量, 若对于每个  $x \in X$  和  $\varepsilon > 0$ , 存在  $r_1, r_2 > 0$  使得

$$\mathbb{B}_1(x, r_1) \subseteq \mathbb{B}_2(x, \varepsilon), \quad \mathbb{B}_2(x, r_2) \subseteq \mathbb{B}_1(x, \varepsilon),$$

其中  $\mathbb{B}_j$  是  $(X, d_j)$ ,  $j = 1, 2$  中的开球. 现在, 设  $(X, d)$  是度量空间,

$$\delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

证明  $d$  和  $\delta$  是  $X$  上的等价度量. (提示: 函数  $t \mapsto t/(1 + t)$  是递增的.)

10. 设  $X := (0, 1)$ . 证明以下命题.

1.  $d(x, y) := |(1/x) - (1/y)|$  是  $X$  上的度量.
2. 自然度量和  $d$  是等价的.
3. 在  $\mathbb{R}$  上不存在这样一个度量: 它与自然度量等价, 并且在  $X$  上诱导出的度量是  $d$ .

**11.** 设  $(X_j, d_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$  是度量空间,  $X := X_1 \times \cdots \times X_n$  且  $d$  是  $X$  上的积度量. 证明

$$\delta(x, y) := \sum_{j=1}^n d_j(x_j, y_j), \quad x := (x_1, \dots, x_m) \in X, \quad y := (y_1, \dots, y_m) \in X$$

是  $X$  上的度量且与  $d$  等价.

**12** (SNCF-度量). 对于每个  $z, w \in \mathbb{C}$ , 定义

$$\delta(z, w) := \begin{cases} |z - w|, & \text{若存在 } \lambda > 0 \text{ 使得 } z = \lambda w, \\ |z| + |w|, & \text{其余情况.} \end{cases}$$

证明  $\delta$  是  $\mathbb{C}$  上的度量, 称为 SNCF-度量.

**13.** 设  $(x_n)$  是  $\mathbb{C}$  中的数列且对于任意  $n \in \mathbb{N}$  有  $\Re x_n = 0$ . 证明, 若  $(x_n)$  收敛到  $x$ , 则  $\Re x = 0$ .

## 2.2 实数列与复数列

在本节中, 我们要推导出关于收敛数列计算的最重要的法则. 如果我们把这些数列看作向量空间  $s = s(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  中的向量, 那么这些法则将证明所有收敛数列构成了  $s$  的子空间. 在实数列的情形下, 我们将利用  $\mathbb{R}$  的序结构来推导比较收敛法, 而这是研究  $s(\mathbb{R})$  中数列收敛性的主要工具.

### 无穷小量

**定义 2.2.1** (无穷小量). 称  $\mathbb{K}$  中的数列  $(x_n)$  是无穷小量, 若  $(x_n)$  收敛到 0. 进一步, 将  $\mathbb{K}$  中的所有无穷小量记作

$$c_0 := c_0(\mathbb{K}) := \{ (x_n) \in s ; (x_n) \text{ 收敛且 } \lim x_n = 0 \} .$$

**注 2.2.1.** 设  $(x_n)$  是  $\mathbb{K}$  中的数列,  $a \in \mathbb{K}$ .

1.  $(x_n)$  是无穷小量, 当且仅当其绝对值数列  $(|x_n|)$  是  $\mathbb{R}$  中的无穷小量.
2.  $(x_n)$  收敛到  $a$ , 当且仅当“平移后的数列”  $(x_n - a)$  是无穷小量.
3. 若存在  $\mathbb{R}$  中的无穷小量  $(r_n)$  使得对于几乎所有  $n \in \mathbb{N}$  都有  $|x_n| \leq r_n$ , 则  $(x_n)$  是无穷小量.

**证明.** 1. 由无穷小量的定义可以直接得到.

2. 由命题 2.1.8 可以直接得到.
3. 任取  $\varepsilon > 0$ . 由假设可知存在  $M, N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq M$  时  $|x_n| \leq r_n$ , 当  $n \geq N$  时  $|r_n| < \varepsilon$ . 于是当  $n \geq \max\{M, N\}$  时  $|x_n| \leq r_n \leq |r_n| < \varepsilon$ .  $\square$

### 基本法则

**命题 2.2.2.** 设  $(x_n)$  和  $(y_n)$  是  $\mathbb{K}$  中的收敛数列且  $\lim x_n = a$ ,  $\lim y_n = b$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . 则

1. 数列  $(x_n + y_n)$  收敛且  $\lim(x_n + y_n) = a + b$ .
2. 数列  $(\alpha x_n)$  收敛且  $\lim \alpha x_n = \alpha a$ .

**证明.** 任取  $\varepsilon > 0$ .

1. 存在  $M, N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq M$  时  $|x_n - a| < \varepsilon/2$ , 当  $n \geq N$  时  $|y_n - b| < \varepsilon/2$ . 于是
$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n \geq \max\{M, N\} .$$
2. 若  $\alpha = 0$  显然成立, 假设  $\alpha \neq 0$ . 则存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时  $|x_n - a| < \varepsilon/|\alpha|$ . 于是

$$|\alpha x_n - \alpha a| = |\alpha||x_n - a| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon, \quad n \geq N .$$

□

**注 2.2.3.** 将  $\mathbb{K}$  中的所有收敛数列记作

$$c := c(\mathbb{K}) := \{ (x_n) \in s ; (x_n) \text{ 收敛} \} .$$

于是, 由命题 2.2.2 可以得到:  $c$  是  $s$  的子空间且函数

$$\lim: c \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x_n) \mapsto \lim x_n$$

是线性的. 显然  $\ker \lim = c_0$ , 于是, 由例 1.12.2.3 可知,  $c_0$  是  $c$  的子空间.

下面的命题表明, 对于收敛数列, 我们可以“逐项”相乘.

**命题 2.2.4.** 设  $(x_n)$  和  $(y_n)$  是  $\mathbb{K}$  中的数列.

1. 若  $(x_n)$  是无穷小量且  $(y_n)$  有界, 则  $(x_n y_n)$  是无穷小量.
2. 若  $\lim x_n = a$ ,  $\lim y_n = b$ , 则  $\lim x_n y_n = ab$ .

**证明.** 1. 由于  $(y_n)$  有界, 故存在  $M > 0$  使得对于任意  $n \in \mathbb{N}$  都有  $|y_n| \leq M$ . 任取  $\varepsilon > 0$ . 由于  $(x_n)$  是无穷小量, 故存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时  $|x_n| < \varepsilon/M$ . 于是

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

2. 由于  $(x_n)$  收敛到  $a$ , 故  $(x_n - a)$  是无穷小量. 由命题 2.1.11 可知,  $(y_n)$  有界. 于是由 1 可得  $((x_n - a)y_n)$  是无穷小量, 同理可得  $(a(y_n - b))$  是无穷小量. 由命题 2.2.2 可知

$$\lim(x_n y_n - ab) = \lim((x_n - a)y_n + a(y_n - b)) = 0,$$

于是  $(x_n y_n)$  收敛到  $ab$ . □

**注 2.2.5.** 1. 命题 2.2.4.1 中, 关于序列  $(y_n)$  有界的假设不能去除.

2. 由例 1.12.3.2 可知  $s$  是  $\mathbb{K}$ -代数. 于是, 结合注 2.2.3 和命题 2.2.4.2 可以得到:  $c$  是  $s$  的子代数且函数

$$\lim: c \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x_n) \mapsto \lim x_n$$

是代数同态. 最后, 由命题 2.1.11 和命题 2.2.4.1 可知  $c_0$  也是  $c$  的理想.

**证明.** 1. 设  $x_n := 1/n$ ,  $y_n := n^2$ . 则  $(x_n)$  是无穷小量, 但  $(x_n y_n)$  发散. □

下面的命题和注 2.2.5.2 表明, 商数列的极限是分子的极限除以分母的极限, 若这些极限存在的话.

**命题 2.2.6.** 设  $(x_n)$  是  $\mathbb{K}$  中的收敛数列且  $\lim x_n = a \neq 0$ . 则  $(x_n)$  的几乎所有项都非零且  $\lim 1/x_n = 1/a$ .

**证明.** 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时  $|x_n - a| < |a|/2$ . 由反三角不等式可得

$$|a| - |x_n| \leq ||a| - |x_n|| \leq |x_n - a| < \frac{|a|}{2}, \quad n \geq N,$$

即当  $n \geq N$  时  $|x_n| > |a|/2 > 0$ , 即  $(x_n)$  的几乎所有项都非零. 而

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x_n - a|}{|a||x_n|} < \frac{2}{|a|^2} |x_n - a|, \quad n \geq N,$$

由于  $(x_n)$  收敛到  $a$ , 因此  $(x_n - a)$  是无穷小量, 进一步,  $2|x_n - a|/|a|^2$  是无穷小量. 于是由注 2.2.1.3 可得  $(1/x_n - 1/a)$  是无穷小量, 故  $\lim 1/x_n = 1/a$ .  $\square$

## 比较审敛法

接下来我们将研究收敛实数列与  $\mathbb{R}$  的序结构之间的关系. 我们将推导出来夹逼定理—这是一种简单但非常有效的判定实数列极限的方法.

**命题 2.2.7 (保序性).** 设  $(x_n)$  和  $(y_n)$  是  $\mathbb{R}$  中的收敛数列且有无穷多项  $n \in \mathbb{N}$  使得  $x_n \leq y_n$ . 则

$$\lim x_n < \lim y_n.$$

**证明.** 设  $\lim x_n = a$ ,  $\lim y_n = b$ . 假设  $a > b$ . 令  $\varepsilon = a - b$ , 故存在  $M, N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq M$  时  $x_n > a - \varepsilon/2$ ,  $n \geq N$  时  $y_n < b + \varepsilon/2$ , 故存在  $n \geq \max\{M, N\}$  使得

$$a - \varepsilon/2 < x_n \leq y_n < b + \varepsilon/2,$$

于是  $\varepsilon = a - b < \varepsilon$ , 矛盾.  $\square$

**注 2.2.8.** 命题 2.2.7 在严格不等于下不成立, 即若有无穷多项  $n \in \mathbb{N}$  使得  $x_n < y_n$  并不蕴含  $\lim x_n < \lim y_n$ .

**证明.** 设  $x_n := -1/n$ ,  $y_n := 1/n$ . 则对于所有  $n \in \mathbb{N}^*$  都有  $x_n < y_n$ , 但  $\lim x_n = \lim y_n = 0$ .  $\square$

**命题 2.2.9 (夹逼定理).** 设  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  和  $(z_n)$  是实数列且对于几乎所有  $n \in \mathbb{N}$  都有  $x_n \leq y_n \leq z_n$ . 若  $\lim x_n = \lim z_n = a$ , 则  $\lim y_n = a$ .

**证明.** 设  $M \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq M$  时  $x_n \leq y_n \leq z_n$ . 任取  $\varepsilon > 0$ , 故存在  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N_1$  时  $a - \varepsilon < x_n$ , 当  $n \geq N_2$  时  $z_n < a + \varepsilon$ . 于是

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon, \quad n \geq \max\{M, N_1, N_2\},$$

即当  $n \geq \max\{M, N_1, N_2\}$  时  $|y_n - a| < \varepsilon$ .  $\square$

## 复数列

### 练习

1. 判断下列  $\mathbb{R}$  中的数列  $(x_n)$  是否收敛. 若收敛计算其极限.

1.  $x_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$
2.  $x_n := (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$
3.  $x_n := \frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}.$
4.  $x_n := \frac{(2-1/\sqrt{n})^{10} - (1+1/n^2)^{10}}{1-1/n^2 - 1/\sqrt{n}}.$
5.  $x_n := (100 + 1/n)^2.$

证明. 1. 收敛到 0.

2. 发散.
3. 收敛到  $-1/2$ .
4. 收敛到  $2^{10} - 1$ .
5. 收敛到  $100^2$ . □

2. 使用  $(1+1)^n$  的二项式展开, 证明  $(n^3/2^n)$  是无穷小量.

证明. 注意到

$$0 \leq \frac{n^3}{2^n} = \frac{n^3}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}} \leq \frac{n^3}{\binom{n}{4}}, \quad n \geq 4.$$

而当  $n \geq 6$  时  $n-3 \geq n/2$ , 于是

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \geq \frac{(n/2)^4}{24}, \quad n \geq 6,$$

因此

$$\frac{n^3}{\binom{n}{4}} \leq \frac{n^3}{(n/2)^4/24} = \frac{384}{n} \rightarrow 0.$$

故由夹逼定理可知  $n^3/2^n \rightarrow 0$ . □

3 (保号性). 设实数列  $(x_n)$  有正极限. 证明该数列的几乎所有项都为正.

证明. 设  $\lim x_n = a$ . 故存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时  $|x_n - a| < a/2$ , 于是

$$-\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2}, \quad n \geq N,$$

即当  $n \geq N$  时  $x_n > a/2 > 0$ . □

4. 设  $(x_j)$  是  $\mathbb{K}$  中的收敛数列且以  $a$  为极限. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = a .$$

**证明.** 只用证

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - a \right| \rightarrow 0 .$$

注意到

$$0 \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - a \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - a) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_j - a| ,$$

任取  $\varepsilon > 0$ . 由于  $\lim x_j = a$ , 故存在  $N \in \mathbb{N}^*$  使得当  $j \geq N$  时  $|x_j - a| < \varepsilon$ , 于是

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_j - a| = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N-1} |x_j - a| + \frac{1}{n} \sum_{j=N}^n |x_j - a| .$$

令

$$A_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N-1} |x_j - a| , \quad B_n := \frac{1}{n} \sum_{j=N}^n |x_j - a| .$$

由于  $\sum_{j=1}^{N-1} |x_j - a|$  是一个固定的有限和, 因此  $\lim A_n = 0$ . 而

$$|B_n| = \frac{1}{n} \sum_{j=N}^n |x_j - a| < \frac{1}{n} \sum_{j=N}^n \varepsilon = \frac{n-N+1}{n} \varepsilon \leq \varepsilon , \quad n \geq N ,$$

因此  $\lim B_n = 0$ . 于是

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_j - a| = A_n + B_n \rightarrow 0 ,$$

故由夹逼定理可知

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - a \right| \rightarrow 0 .$$

□

5. 设  $\mathbb{K}^m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) 是配备积度量 (见例 2.1.3.5) 的度量空间,

$$s(\mathbb{K}^m) := (\mathbb{K}^m)^{\mathbb{N}} , \quad c(\mathbb{K}^m) := \{ (x_n) \in s(\mathbb{K}^m) ; (x_n) \text{ 收敛} \} .$$

证明

1.  $c(\mathbb{K}^m)$  是  $s(\mathbb{K}^m)$  的子空间.

## 2. 函数

$$\lim: c(\mathbb{K}^m) \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad (x_n) \mapsto \lim x_n$$

是线性的.

3. 设  $(\lambda_n) \in c(\mathbb{K})$ ,  $(x_n) \in c(\mathbb{K}^m)$  且  $\lim \lambda_n = \alpha$ ,  $\lim x_n = a$ . 则  $\lim \lambda_n x_n = \alpha a \in \mathbb{K}^m$  (提示: 例 2.1.9.5).