



数学分析教程

作者: *ww7ide*

组织: *Kitauji Math Dept.*

时间: *Jan. 2024*



星星之火，可以燎原。

目录

第 1 章 预备知识	1
第 2 章 收敛	2
2.1 收敛序列	3

第 1 章 预备知识

第 2 章 收敛

从本章开始，我们终于进入分析的领域。数学的这一分支在很大程度上是建立在“收敛”这一概念之上的。借助收敛，我们在某种意义上得以把无穷多个数（或向量）“加”在一起。能够处理这样的无限运算，正是分析与代数之间本质区别之所在。

试图把关于数列收敛的朴素想法加以公理化，会自然地引出“距离”、“点的邻域”以及“度量空间”等概念——这正是第 1 节的主题。在数列这一特殊情形中，我们可以利用数域 \mathbb{R} 的向量空间结构，对这种情形下各种证明的分析表明：只要有某种类似“绝对值”的概念可用，其中大多数证明都可以推广到向量空间中的向量序列。于是我们很自然地引向去定义“赋范向量空间”——度量空间中一个尤其重要的类别。

在所有赋范向量空间中，内积空间由于其结构更为丰富而显得尤为重要，并且它们的几何性质与我们熟悉的平面 Euclidean 几何非常相似。事实上，在初等分析中，最重要的一类内积空间就是 m -维 Euclidean 空间 \mathbb{R}^m 和 \mathbb{C}^m 。

在第 4 和第 5 节中，我们回到最简单的情形，也就是在 \mathbb{R} 中的收敛问题。借助实数的序结构，尤其是 \mathbb{R} 的序完备性，我们推导出第一批“具体的收敛判别准则”。这些准则使我们能够求出许多重要数列的极限。除此之外，我们还将从 \mathbb{R} 的序完备性出发，得到一个根本性的存在性原理——Bolzano-Weierstrass 定理。

第 6 节专门讨论度量空间中的“完备性”概念。将这一概念限制到赋范向量空间，就得到了“Banach 空间”的定义。这类空间最基本的例子就是 \mathbb{R}^m ，但我们还将说明：有界函数构成的函数空间也是 Banach 空间。

Banach 空间在分析中无处不在，因此在本书的叙述中居于核心地位。即便如此，它们的结构仍然足够简单，使得初学者可以在不太费力的情况下，从理解实数自然过渡到理解 Banach 空间。再者，对这些空间的较早引入，也使得我们在后面章节中能够给出简洁而优美的证明。

为了内容的完整性，也为了读者整体（数学）素养的培养，我们在第 6 节中给出 Cantor 关于“序完备的有序域存在性”的证明，这个证明是通过对 \mathbb{Q} 进行“完备化”而得到的。

在本章余下的各节中，我们将讨论级数的收敛性。在第 7 节里，我们会学习级数的基本性质，并讨论若干最重要的例子。这样一来，我们就能够研究实数的十进制表示以及其他形式的表示，从而证明实数集是不可数集。

在所有收敛级数当中，绝对收敛的级数具有尤为重要的地位。绝对收敛往往比较容易判别，这类级数在运算与处理上也相对简单。此外，在实际应用中许多重要的级数都是绝对收敛的。对于本章最后一节将要引入和研究的幂级数，这一点尤为明显。其中最重要的例子是指数级数，它的重要性将在后续章节中逐渐显现出来。

2.1 收敛序列

序列