

中华白海豚卷入漩涡

摘要

关键词:

目录

1	介绍	4
1.1	问题背景	4
1.2	问题重述	4
1.3	我们的工作	5
2	假设和理由	5
3	符号表示法	6
4	模型准备	6
4.1	获取信息指南	6
4.2	阶跃载荷相互作用模型	7
5	将力学与数学建模相结合	8
5.1	摩擦模型	8
5.2	弯曲模型	8
6	阶梯坑模型	10
6.1	模型准备	10
6.2	行走模式与着地点分析	10
6.3	单步磨损深度分析	11
6.4	结论	11
7	网格分析模型	11
8	结论与问题解决	13
8.1	问题 A	13
8.2	问题 B	13
8.3	对于问题 C	14
9	基于楼梯间使用情况和环境因素的引导	14
9.1	问题 E	14
9.2	问题 F	15
9.3	关于问题 G	16
9.4	问题 H	16
10	敏感性分析	18

11 优势与劣势	18
11.1 优势	18
11.2 劣势	18
12 结论	18
参考文献	19
附录	20

1 简介

1.1 问题背景

楼梯是我们日常生活中常见的建筑元素，也是建筑史中不可或缺的一部分。从现代建筑到古老的寺庙和教堂，楼梯随处可见，它们是人类历史的见证。然而，随着时间的推移，楼梯表面由于长期使用而逐渐出现不均匀的磨损。这些磨损不仅反映了楼梯的使用频率和方式，还包含了楼梯的建造时间和所用材料等信息，为考古学家提供了有关建筑历史的重要线索。

尽管楼梯磨损具有重要的研究价值，但针对这一问题的系统性研究仍相对较少。迄今为止，大多数分析都依赖于定性观察，缺乏能够量化磨损模式及其影响的分析框架。为了填补这一研究空白，迫切需要开发将楼梯磨损特性与人流量、体重分布和环境因素等信息相结合的数学模型。

如图 n 所示，楼梯的磨损痕迹呈现出复杂多样的形态。结合这些特征，本文旨在通过构建数学模型为考古学家提供一种可行的楼梯磨损测量方法和定量分析，以挖掘楼梯磨损中蕴含的历史文化信息。

1.2 问题重述

楼梯的磨损是一个受多种因素共同影响的复杂研究对象。通过深入分析问题背景并结合具体限制条件，该问题可以重新表述为：

- 问题 1：明确数据需求

在假定考古学家能够采用低成本、简便且无损的测量手段的前提下，明确需要获取的关键类型的数据。

- 问题 2：构建一个分析模型

利用问题 1 中获取的关键数据类型，建立数学模型来分析楼梯的磨损情况，并预测目标楼梯的使用情况。具体包括：

- A. 楼梯的使用频率；
- B. 楼梯主要使用的方向（向上或向下）；
- C. 同时使用楼梯的人数以及他们的使用方式（例如，并排行走或单人通过）。

- 问题 3：对特定条件相关问题的进一步探究

基于……模型，假定能够估算出年代，明确楼梯间的使用方式，并了解该建筑内的日常生活模式，深入分析以下方面：

- D. 磨损痕迹是否与现有信息相符；
- E. 对楼梯的使用年限及其可靠性的评估；
- F. 说明所进行的维修或翻新工作；
- G. 确定材料来源是否与假设相符；
- H. 可以确定的信息包括在普通日子里使用楼梯的人数以及使用频率（是短时间内大量人员使用还是长时间内少量人员使用）。

1.3 我们的工作

2 假设与理由

楼梯所用材料具有恒定的机械性能，并且

同样的材料，使得整座楼梯的机械性能保持一致。

解释：材料的机械性能随时间或空间的变化会导致分析复杂度增加以及精确建模的难度加大。因此，假设材料性能恒定且一致，能够简化研究过程，并提高模型的科学性和可操作性。

- 未考虑诸如高跟鞋之类的特殊鞋类对楼梯磨损的影响

在分析中，仅研究了普通鞋底的作用。

解释：诸如高跟鞋之类的特殊鞋款的磨损通常集中在局部区域，且磨损频率较低，对整体磨损模式的影响不大。

- 文中通过模拟考察所获取的数据准确无误，能够真实地反映情况。

反映出楼梯的磨损情况和使用模式。

解释：对数据做出准确反映楼梯磨损情况和使用模式的假设，将防止数据质量问题干扰研究。

该研究仅针对由石材或木材制成的楼梯因不均匀磨损而产生的问题展开。

长期使用。

解释：问题陈述明确指出，该研究仅限于长期使用后出现磨损不均的石质或木质楼梯。

- 所有使用楼梯的人都以正常步态行走，且不存在故意摩擦或其他异常情况的影响。

楼梯的使用行为对楼梯的磨损情况未予考虑。

解释：假设所有使用楼梯的人都以正常步态行走，这使得研究能够专注于常规使用和自然磨损，从而简化模型，避免因异常行为（如故意摩擦或快速奔跑）而引入不必要的复杂性。

此外，为了简化分析，引入了额外的假设，并在相关章节中进行了讨论。

3 符号说明

4 模型准备

4.1 获取信息指南

在研究楼梯磨损情况之前，考古学家必须收集有关目标楼梯的各种信息，以支持后续的建模和分析。这包括以下三个部分：测量、文献检索和数据预处理。1.测量 为确保测量过程无损、成本低廉，并且能够由少数人员使用最少的工具完成，同时最大限度地提高测量精度，特选择以下工具和测量方法：

1.楼梯磨损深度的测量与数据预处理

选择目标楼梯的 20 级台阶，使用激光测距仪和游标卡尺对每级台阶完成以下操作：

- ★使用滑动台将激光测距仪固定在恒定的水平面上，并将楼梯根部的高度设为基准高度；
- ★对楼梯平面每平方米随机选取 100 个样本点，并记录每个样本点的二维坐标（x，y）及其测量高度。
- ★对于激光测距仪无法测量的角落和其他数据，则使用游标卡尺进行测量。

接下来，根据测量所得的数据，我们可以使用以下公式来计算每个采样点的磨损深度：

$$CE = h_{\text{sampling point}} - h_{\text{reference}}$$

所有采样点的 X、Y、 ΔZ 数据将被整合起来，以构建后续的理想阶梯磨损模型。

步长测量与数据预处理

从目标楼梯中随机选取 10 级台阶，用米尺测量每级台阶的长、宽、高，记录每组数据并计算平均值，从而得出台阶的标准尺寸：

$$L_{\text{average}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} L_i}{10}$$

$$W_{\text{average}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} W_i}{10}$$

$$H_{\text{average}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} H_i}{10}$$

2.从文献和资料中检索数据

所需信息包括考古团队给出的施工期以及检查时对当时所用材料类型的粗略判断。同时，根据对材料的粗略判断，查询数据表并获取表 1 所示的材料机械参数。

表 1：分析用材料属性

财产	符号
弹性模量	E
泊松比	ν
磨损系数	k
材料硬度	H

4.2 步加载交互模型

要分析楼梯的磨损情况，关键在于研究人在楼梯上行走时力的作用方式。基于以往的研究，我们建立了楼梯载荷交互模型（SLIM），用于分析人在楼梯上行走时力的作用方式。当人在楼梯上行走时，鞋是唯一直接接触地面的部分。基于假设 n，在不考虑高跟鞋等会显著改变力的作用方式的鞋类，并忽略鞋自身的质量的情况下，可以认为鞋对地面的作用力等同于脚对鞋的作用力。也就是说，在这种简化的条件下，鞋不会影响力的大小和分布。

通过文献回顾，我们获得了一个人上下楼梯时足部受力的红外压力分布图^[1]。该图的蓝色部分表示压力最小，橙色和红色部分表示压力最大。压力最大的部分对应于足部的三个区域，即拇趾区（第一跖骨）、第二和第三跖骨区以及第四和第五跖骨区，还有内侧和外侧跟骨区，这些区域被定义为主要受力区。为了进一步研究主要受力区的面积及其与足部总面积的关系，我们首先在红外分布图上用黑线勾勒出足部的投影轮廓。随后，采用网格法处理图像：当某个网格被图像覆盖面积达到或超过一半时，计为一个网格，否则忽略。

然后，我们统计出主要受力区域覆盖了 32 个网格，而整个脚部投影覆盖了 118 个网格，主要受力部分的面积占比约为 0.2712。基于美国公民的平均脚部面积（约 245 平方厘米），

因此，我们可以将脚对楼梯的作用力抽象为主力作用区域的力。根据假设 n，人在楼梯上行走时所施加的力可以进一步简化为图 n 所示的模型。

图 n 显示，一段楼梯的踏步面可以分为两部分：实际踏步部分和风化部分。为了简化模型，我们假设所有的踩踏都发生在实际踏步部分，并且在正式建模时仅分析该部分的磨损情况。

5 将力学与数学建模相结合

5.1 摩擦模型

米尔斯模型用于表征材料在多种载荷条件下的磨损情况，通过考虑材料表面的微观变化及其弹性恢复特性，适用于复杂的磨损场景。

对于在稳定条件下（例如，人员流量恒定以及步态特征不变）使用的楼梯而言，由于滑动速度较低，摩擦过程主要由滑动磨损主导。在这种情况下，楼梯表面的接触状态（包括压力和温度分布）在摩擦过程中保持稳定。基于这一假设，磨损量 W 通常与滑动速度 V 的 n 次幂呈线性关系，其中 n 为速度系数，与材料特性和接触条件有关。

在此基础上，为了更准确地分析楼梯材料（如石材或木材）的磨损行为，我们将对经典的米尔斯模型进行改进，并开发一个适用于楼梯磨损分析的数学模型。

首先，作用于楼梯材料表面的正常载荷 F 可通过以下表达式计算得出：

$$F(t) = \frac{F_q \cdot \mu}{1 + e^{t-\varepsilon}}$$

其中 F_q 为正常压力的平均值， ε represents 为调整系数， μ 表示动摩擦系数。上述获得的 F 作为独立变量用于磨损体积模型，以进一步计算材料磨损量 W ：

$$W = \int_0^t \frac{K \cdot V^n \cdot F(t)}{H} dt$$

其中 V 代表产生摩擦的接触面的平均滑动速度， K 和 H 分别为楼梯材料的磨损系数和硬度。

5.2 弯曲模型

为了更准确地描述楼梯的磨损行为，基于梁弯曲理论建立了一个数学模型，通过挠度与载荷之间的关系来预测不同条件下的磨损情况。

1. 变量描述

※注释：挠度，指在外部力作用下发生的变形深度，单位为米（m）。

※ ν : 泊松比。

※ K : 剪力修正系数。

※ Q : 均布荷载, 单位为牛顿每米 (N/m)。

※ E : 弹性模量, 以帕斯卡 (Pa) 为单位进行测量。

※ I : 楼梯横截面的转动惯量, 单位为米的四次方 (m⁴)。

※ A : 楼梯的横截面积, 以平方米为单位测量 (m²)。

※ G : 重力加速度, 其值为 9.8 米每秒平方 (m/s²)。

※ X : 力的作用点的水平坐标, 以米 (m) 为单位进行测量。

2. 坐标轴说明

楼梯的坐标轴采用左手直角坐标系, 楼梯外边缘与 Y 轴重合, Z 轴沿楼梯的垂直方向, 表示变形和挠度的变化, 坐标系的原点位于楼梯底部, 如图 n 所示。

3. 模型构建

首先, 我们将楼梯简化为两端固定的梁模型 (两端均由支撑固定, 其中一个支撑配有滑轮, 以允许沿轴向滑动) [2][3]。基于这一假设, 该模型的挠度方程可表示为:

$$W_r = \frac{9X}{24EI} \left[X^3 - 2LEN \cdot X^2 + LEN^3 - \frac{12EI}{kgA} (X - LEN) \right]$$

由上述方程, 我们建立了挠度 W_r 与力作用点的水平坐标 X 之间的函数关系, 并绘制了相应的图 n。该图表明, 挠度在 $X \approx X_{\max}$ 附近达到最大值。

我们进一步将楼梯的整体弯曲变形抽象为以 X_{\max} 为中心的凹陷区域, 该区域对应于最大挠度 W_r 。假设该区域的横截面轮廓符合悬链线的形状 (同时忽略其他位置的变形和凹陷)。由每个法向载荷引起的凹陷对应的周长通过以下公式计算:

$$b = 2W_r \sinh \left(\frac{L_1}{2W_r} \right)$$

其中, L_1 指的是由每个法向载荷引起的缩进对应的宽度。(b 和 L_1 在图 n 中有具体标注)

通过计算, 每次施加载荷所导致的磨损宽度 L_1 确定为 0.1 ± 0.01 。为了简化后续计算, 将 L_1 视为常数值 0.1。

6 分步坑模型

为了进一步探究楼梯的磨损情况，我们首先需要明确人在行走时对楼梯施加的机械作用机制。为此，本文开发了“踏步 - 踏坑”模型，以量化人在行走时每一步对楼梯造成的磨损。

6.1 模型准备

基于 SLIM，我们简化了人在楼梯上行走时所施加的力。通过使用网格法分析红外压力分布图，可以得到整个脚部的长度和面积以及三个主要受力区域，具体如下：

其中 L_I represents 表示区域 I 的长度， S_I refers 表示区域 I 的面积。

然后，在每级台阶的轮廓上建立坐标轴，以第 i 级台阶为例（如图 n 所示）。根据相关研究，楼梯的平均踏步宽度约为 32.5 厘米，高度约为 14.5 厘米^[4]

因此，若以图 n 中网格边长的一半作为度量单位，那么楼梯踏步的宽度约为 48 个单位长度，高度约为 21 个单位长度。

为确保着陆点始终位于楼梯台面范围内，其值的范围必须满足以下约束条件（由于篇幅限制，此处仅给出点 M 的坐标范围。点 U 和点 C 的坐标范围将在后续根据三点之间的关系进行推导并详细说明）：

表 2：着陆坐标 M 的范围		
	前脚掌着地	全脚掌着地
上升	[0, 14]	(18, 30)
下降		(4, 14)

地点：

U：拇趾的压力中心

M：第二、三跖骨的压力中心 第四、五跖骨的压力中心
C：内侧跟骨的压力中心 外侧跟骨的压力中心

本节为后续分析奠定了几何基础，并提供了一个合理的坐标系。

6.2 行走模式与着地点分析

在这个模型中，假定一个人上下楼梯只有两种方式，且仅此两种方式：

- 全脚掌行走：整个脚掌用力踩在楼梯上。
- 前脚掌行走：只有前脚掌区域施力，而后脚掌则悬空。
在空中。

此外，每位个体在完整的一段楼梯中仅采用一种行走方式。为使分析标准化，以 M 作为基准。

☒ 标准坐标的计算

在第 $i+1$ 步的标准坐标可以通过第 i 步的标准坐标递归得出：尽管行走方式各不相同，但无论何种方式，人的步长往往会使下一步的落脚点保持在“舒适区”内。当预期的落脚点超出舒适区时，行走者会调整步长，使其回到合理范围内。舒适区可以表示为：

在此基础上，第 $i+1$ 级台阶的标准坐标需要根据舒适区的约束条件进行调整。具体的计算过程如图 N 所示。

经过多次迭代，该模型生成了楼梯踏步上表面下部第二主应力区压力的概率分布曲线（关于变量 x ，详情见图 N）。

结合三个主要力区的坐标关系，第一力区和第三力区的概率分布可进一步绘制在图 N 中。

6.3 单步磨损深度分析

☒ 全足行走文献^[5]提供了人在楼梯上行走时，足部三个主要受力区域所施加力的比例关系。这些比例反映了不同区域对楼梯施加力的大小。结果以三角形坐标图的形式绘制如下：

其中 FG_i 表示区域 i 对楼梯施加的垂直压力， G 表示总垂直压力。

假设磨损体积可近似为一个正四棱锥，那么根据其几何特征，区域 m 内的磨损深度计算为：

其中 W_m 和 S_m 分别表示第 m 个区域的磨损体积和磨损面积。

前脚掌行走

前脚掌行走的磨损分析与全脚掌行走的磨损分析相似，但由于只有两个主要受力区域施力，所以力的分布比例与全脚掌行走不同。在图 N 中，绘制了一个三线图来展示这两个区域的力分布关系。前脚掌行走的磨损深度计算方法与全脚掌行走相同，只是参数有所调整。

6.4 结论

7 MESH 分析模型

为研究人行走时楼梯因摩擦而产生的磨损情况，构建了 MESH 分析模型。人在楼梯上行走的通道宽度至少等于平均肩宽（不考虑极度拥挤的情况），且不会紧贴楼梯边缘行走。

在此基础上，我们将楼梯平面划分为若干条通道，每条通道的宽度约等于平均肩宽。多条通道几乎覆盖了楼梯的整个宽度，超出的宽度在楼梯的左右两侧沿行走方向平均分配。

楼梯目标区域的划定

结合实际行走模式，人在楼梯上的行走力可分为以下四种类型：

为了更准确地分析楼梯行走模式的影响，将楼梯每级台阶与走道相交的实际落脚区域定义为目标区域。在楼梯的平面图中，根据行走模式的功能特点将目标区域分为 1、2、3、4 四个子区域（如图 n 所示）。

子区域 1、2 和 3：这些区域对应于不同行走模式的综合影响，其磨损情况需要根据不同模式的力的特征分别进行分析。

子区域 4：位于楼梯边缘，由于受偶然因素影响的面积较大且相对较小，因此在本研究中未对其影响加以考虑。

通过上述划分，我们结合四种行走模式，明确了不同子区域的力的特征。

首先，使用以下公式处理考古学家所测量的数据：

$$X_1 = CE_1 - Wr^{\frac{35+28}{2}} \cdot (k_A + k_B + k_C + k_D)$$

$$X_2 = CE_2 - Wr^{\frac{24+34}{2}} \cdot (k_A + k_B + k_C + k_D)$$

$$X_3 = CE_3 - Wr^{\frac{12+23}{2}} \cdot (k_A + k_B + k_C + k_D)$$

$$X_4 = CE_4 - Wr^{\frac{6+11}{2}} \cdot (k_A + k_B + k_C + k_D)$$

$$X_5 = CE_5 - Wr^{\frac{3+5}{2}} \cdot (k_A + k_B + k_C + k_D)$$

接下来，利用相关公式对每个子区域所受的力进行定量计算：

$$X_1 = K_A \cdot A_{35 \rightarrow 38} - \alpha \quad (1)$$

$$X_2 = K_A \cdot A_{24 \rightarrow 24} + K_B \cdot B_{24 \rightarrow 34} - \alpha \quad (2)$$

$$X_3^* = K_A \cdot A_{12 \rightarrow 23} + K_C \cdot C_{12 \rightarrow 23} + K_D \cdot D_{12 \rightarrow 23} - \alpha \quad (3)$$

$$X_3^{**} = K_A \cdot A_{6 \rightarrow 11} + K_B \cdot B_{6 \rightarrow 11} + K_C \cdot C_{6 \rightarrow 11} + K_D \cdot D_{6 \rightarrow 11} - \alpha \quad (4)$$

$$X_3^{***} = K_A \cdot A_{3 \rightarrow 5} + K_B \cdot B_{3 \rightarrow 5} + K_C \cdot C_{3 \rightarrow 5} + K_D \cdot D_{3 \rightarrow 5} - \alpha \quad (5)$$

其中 X_i represents 表示子区域 i 因摩擦造成的总磨损深度； K 表示人数； $A_{i \rightarrow j}$ refers 表示从楼梯边缘的 i 到 j 距离范围内某时刻因摩擦造成的磨损深度；而 α 则表示目标区域因环境因素（例如温度变化、湿度波动、极端天气等）造成的磨损量。

上面已经给出了子区域 1 和 2 的公式，由于没有直接计算子区域 3 中 X_3 的函数，因此设计了基于概率的拟合方法来计算由于摩擦造成的总磨损深度。伪代码如下：

8 结论与问题解决

最初，我们假设当只有一个人在楼梯上行走时，每级台阶的走道选择保持不变，也就是说，他们将始终沿着同一条走道行走。根据.....模型中的公式 n 以及从伪代码中得出的结果，我们可以推导出每条走道上的人数总和如下：

$$K_i = K_{Ai} + K_{Bi} + K_{Ci} + K_{Di}$$

利用这个表达式，我们可以计算出每条路径上的人数总和，然后用柱状图直观地展示出来（如图 n 所示）。

在计算出每段楼梯上的人数总和之后，我们再将这些数值相加，以得出使用楼梯的总人数，其表达式为：

$$K_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n K_i$$

8.1 针对问题 A

“楼梯使用频率是多少？”这一问题被量化为楼梯在总使用时间内平均每单位时间的使用次数，其计算公式如下：

$$\text{usage frequency} = \frac{K_{\text{total}}}{\text{total usage time}}$$

在此基础上，得出使用楼梯的平均时间间隔为.....

8.2 针对问题 B

下楼梯的总人数可以表示为：

$$K_{\text{downstairs}} = K_B + K_D$$

上楼梯的总人数可以表示为：

$$K_{\text{upstairs}} = K_A + K_C$$

通过比较上行和下行的总人数，我们可以得出关于使用楼梯的人群更倾向于哪个方向的如下结论：

- 如果.....，则表明使用楼梯的人群更倾向于**向上行进**。
- 如果.....，则表明使用楼梯的人群更倾向于**向下走**。

8.3 针对问题 C

Z 分数公式可用于确定数据中的异常值。当数据集中第 i 个数据对应的 Z_i 满足 $Z_i > 3.5$ [6] 这一条件时，即可认为该数据点存在峰值。Z 分数公式如下：

$$Z_i = \frac{K_i - \bar{K}}{\sqrt{\text{Var}(K)}}$$

其中 $\text{Var}(k)$ 表示走道上人数的方差， \bar{K} 表示走道上人数的平均值。

Z 分数公式可用于确定在各条通道上人数的柱状图中是否存在峰值：

如果存在峰值，这表明某条人行道上的人数明显多于其他通道，这表明人们倾向于排成一行行走；

如果没有峰值，则表明人们在人行道上的分布相对均匀，这说明人们更喜欢并肩行走。

9 基于楼梯间使用情况和环境因素的指导方针

9.1 关于问题 E

根据（图 x）所示的磨损数据，39 至 48 范围内的磨损主要受环境因素影响，表现出轻微的风化效果，假定对楼梯未造成显著磨损。

在此基础上，运用概率论原理，我们可以假定楼梯每年的磨损量服从高斯分布。

楼梯的总磨损率由平均年磨损率和时间（即自建成以来的年数）共同决定，它们之间的关系可表示为：

$$R_{\text{total}} = R_{\text{year}} \cdot T$$

其中 R_{total} represents 表示总磨损量， R_{daily} is 表示年磨损量， T 表示时间跨度，即楼梯建成以来的总年数。

由于除法运算不会改变高斯分布的分布模式，所以楼梯建造年份的估计值也遵循高斯分布。因此，我们可以在这一估计的高斯分布中进一步计算考古学家所提供的时间段的概率。概率越高，估计值就越可靠。

9.2 关于问题 F

修复建筑材料的主要方法是通过用聚合物材料填充裂缝来加固裂缝^[7]。此外，在正常工作条件和静载荷下，钢板粘贴法常用于增强受弯或受拉构件（如楼梯平台梁、平台板和楼梯板）。将原有楼梯构件用钢板包裹起来进行封闭保护也是一种选择。对于那些肉眼可见的修复或改造，通常可以通过直接观察来确定其存在。然而，对于那些用肉眼难以察觉的聚合物加固方法，我们设计了以下检测方法：

我们首先计算表面凹陷处实测原始深度数据与从.....优化得出的深度数据之间的差值，将差值显著为正的点识别为异常凹陷点。这些点可能表明存在因维修或翻新而造成的异常凹陷。

接下来，我们对出现异常凹陷点的胎面进行二次采样，显著提高采样密度至每平方米 300 个样本。对新采集的数据重复进行异常点分析。如果新识别出的异常点呈现出圆形或条状的聚集分布（如参考图所示），则初步判断该区域可能采用了聚合物加固方法进行修复。为了进一步验证是否使用了聚合物材料进行加固，我们采用 Torrent 渗透性测试方法来测量建筑材料的透气性^[8]。聚合物材料通常具有很强的粘结性、无粉状残留物、耐水性和可抛光性。然而，其透气性与基底石材材料有显著差异。通过比较透气性数值，我们可以进一步确认修复区域的存在及范围。

在进一步分析透气性异常的区域时，我们会对相关的楼梯踏步进行吸水性测试。具体方法如下：

为了进一步研究透气性异常的区域，我们对相关的楼梯踏步进行了吸水试验。具体步骤如下：

☒测试程序

- 1.将浸透水并已呈粉红色的氯化钴试纸分别贴在楼梯踏步的异常聚集点和正常区域。
- 2.用大小合适的盖子盖住试纸，以防水分蒸发。
- 3.使用 d345 相机持续监测并记录测试纸的颜色变化。

☒测试结果分析

氯化钴试纸遇水会变蓝。通过观察试纸变蓝的速度，我们可以评估石材不同区域的吸水能力。如果

在聚合物加固区域，测试纸在异常聚集点处变蓝的速度较慢，这表明该区域的吸水能力较差，进一步证实了聚合物加固的存在。最后，通过将测试结果与材料表面的透水特性相结合，并比较异常聚集点与正常区域的吸水差异，可以进一步确认聚合物材料修复的存在及其空间分布。

通过上述多级检测方法，不仅能科学地判定是否存在修缮或改造，还能准确识别出修缮的区域。

9.3 关于问题 G

为了确定目标材料的来源是否与考古学家的假设相符，我们建议从考古学家认为是原始来源的地方取样，并进行破坏性的机械实验以获取精确的材料参数。然后用实验获得的参数替换表格中的值，并重新整合到阶梯坑模型中以得出最佳拟合结果。最后，将此结果与使用表格参数获得的拟合结果进行比较，以决定系数 R^2 作为评估标准。

拟合优度计算公式：

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}, \quad 0 \leq R^2 \leq 1$$

误差平方和（SSE）：实际值与预测值之间差值的平方和。

以及预测值，反映误差的大小。

· 回归平方和（SSR）：预测值与平均值之间差值的平方和。
值与实际值均值之间的差值，代表模型所解释的变异程度。

· 总平方和（SST）：实际值与平均值之间差值的平方和。
它们的平均值，相当于总变化量。该关系满足：

$$SST = SSE + SSR$$

R^2 表示模型能够解释的总变异的比率。 R^2 值越接近 1，模型的一致性就越高。 R^2 值可用于评估考古学家假设的材料来源与实际结果之间的匹配程度。当 R^2 超过 0.8 时，表明目标材料的来源与考古学家的假设一致。

9.4 关于问题 H

1. 楼梯间典型日使用人数

在……（所引用的分析）中，我们已经得到了楼梯运营期间的总用户数。假设在此期间每天使用楼梯的人数保持不变，那么在典型的一天中使用楼梯的人数可以表示为：

$$\text{Number of Users in a Typical Day} = \frac{\text{Total Number of Users}}{\text{Total Days of Usage}}$$

2.短时高流量或长时低流量

疲劳强度受加载频率的影响显著，加载频率指的是施加于 material^{[9]. [10]. [11]} 上的力的频率。较高的加载频率会加速材料内部微裂纹的形成，这些微裂纹会在短时间内 period^{[12]. [13]} 迅速扩展，最终导致断裂。这表明较高的加载频率会通过加快裂纹扩展直接增加断裂的概率。因此，当大量人员在短时间内使用楼梯时，加载频率的增加会使楼梯内部裂纹的形成和扩展更有可能发生，从而增加断裂的风险。

此外，由于几何形状的突变，楼梯的外边缘常常出现应力集中，这进一步加速了疲劳损伤。这种应力集中使得裂纹更容易扩展，最终导致材料断裂。对实际结构的观察证实了这一现象，因为裂纹主要集中在楼梯的外边缘，这证实了应力集中的作用。

总之，在短时间内大量人员使用楼梯时，载荷频率的增加以及外边缘处应力的集中是导致裂缝形成和扩展的主要原因，最终会造成材料损坏甚至断裂。

为了量化这种效应，我们使用以下方程来评估阶梯 0 - 3 步区域的压陷深度 X_6 ：

$$\text{LFP} = X_6 - k_A A_{0-3} - k_B B_{0-3} - k_C C_{0-3} - k_D D_{0-3}$$

在出现明显正常磨损的情况下，该区域的断裂风险会显著增加。

为评估 X_6 与加载频率参数 LFP 之间的关系，采用曼 - 惠特尼 U 检验。由于 X_6 与 $X_6 + \text{LFP}$ 具有相似的数据分布，且无需完全相同的分布，因此应用该检验来确定 $X_6 + \text{LFP}$ 是否显著大于 X_6 。假设如下：

- 零假设 (H_0): $X_6 + \text{LFP}$ 不显著大于 X_6 。
- 备择假设 (H_1): $X_6 + \text{LFP}$ 显著大于 X_6 。

U 统计量的计算方法如下：

$$U = n^2 + \frac{n}{2}(n+1) - R(X_6)$$

在显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 时，拒绝域为 $U < 8$ 。决策标准为：

- 若 $U < 8$ ，则接受备择假设 H_1 ，表明楼梯边缘有材料损失。
由骨折引起。
- 若 $U \geq 8$ ，则接受零假设 H_0 ，表明楼梯边缘的材料损耗情况符合预期；
主要是由于正常磨损和弯曲造成的，没有其他骨折。

根据曼 - 惠特尼 U 检验的结果，可以得出以下结论：

如果 X_6 与 LFP 之间存在显著差异，这表明楼梯边缘的材料损耗并非仅仅由正常磨损和弯曲造成，还由于短时间内大量人员使用楼梯所致。

如果 X_6 与 LFP 之间不存在显著差异，这表明只有少数人长时间使用楼梯。

通过将曼 - 惠特尼 U 检验的结果与理论分析相结合，这种方法能够合理判断出楼梯是在短时间内被大量人员使用，还是在长时间内被少量人员使用。

10 敏感性分析

11 优势与劣势

11.1 优势

11.2 弱点

12 结论

参考文献

- [1] Y. Ke, L. Yihui, Z. Zeyi, Z. Meizhen, W. Xiaogang, and C. Weiyi, “The effects of backpack types on the kinematics of stair walking and plantar pressure of college students,” *Medical Biomechanics*, vol. 38, no. 03, pp. 580–593, 2023.
- [2] M. Levinson, “A new rectangular beam theory,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 74, no. 1, pp. 81–87, 1981.
- [3] M. Weili, P. Fan, S. Zexin, L. Xianfang, and D. Jingbo, “Research on the analysis of beam bending behavior based on the comparison of two classical beam theory and higher-order beam theory,” *Journal of Shijiazhuang University of Railway Technology (Natural Science Edition)*, no. 04, pp. 1–9, 2024.
- [4] F. Diker, M. Arslan, and I. Erkan, “Estimating tread width values for stair design appropri-ated to people’ s comfort and safety needs with adaptive network-based fuzzy inference system,” *International Journal of Architectural Computing*, vol. 21, pp. 188–205, Mar 2023.
- [5] Z. Ping, M. Zhidong, W. Pengyu, and D. Zhihong, “Pedestrian stride-length estimation based on bidirectional lstm network,” pp. 3358–3363, 2020. Chinese Automation Congress (CAC), Shanghai, People’ s R China, Nov 06-08, 2020.
- [6] A. E. Curtis, T. A. Smith, B. A. Ziganshin, and J. A. Elefteriades, “The mystery of the z-score,” *Aorta*, vol. 4, no. 04, pp. 124–130, 2016.
- [7] D. Wuxiu, C. Jianping, F. Xianting, Z. Hui, and W. Shimin, “Research on the weathering charac-teristics of surrounding rock of longmen grottoes in luoyang,” *Rock and Soil Mechanics*, no. 01, pp. 145–148, 2004.
- [8] B. Sena da Fonseca, A. Castela, R. Duarte, R. Neves, and M. Montemor, “Non-destructive and on site method to assess the air-permeability in dimension stones and its relationship with other transport-related properties,” *Materials and Structures*, vol. 48, pp. 3795–3809, 2015.
- [9] T. Yokobori and K. Sato, “Title of the paper,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 8, p. 81, 1976.
- [10] S. Takezono, K. Tao, and K. Kanezaki, “Title of the paper,” *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 102, p. 257, 1980.
- [11] H. Heimbach and H. Heimbach, “Zum einfluß der belastungsfrequenz auf die zeit- und dauer-festigkeit von stahl/ influence of loading frequency on the fatigue strength of steel for finite and infinite life/ l’ influence de la fréquence des contraintes sur la résistance à la fatigue de p’ acier pour une durée de vie finie et infinie,” *Materials Testing*, vol. 12, no. 11, pp. 377–380, 1970.
- [12] R. Zeng, E. Han, and W. Ke, “A critical discussion on influence of loading frequency on fatigue crack propagation behavior for extruded mg–al–zn alloys,” *International Journal of Fatigue*, vol. 36, no. 1, pp. 40–46, 2011.

- [13] Y. Nakai and C. Hiwa, “Effects of loading frequency and environment on delamination fatigue crack growth of cfrp,” *International Journal of Fatigue*, vol. 24, no. 2, pp. 161–170, 2002.
- [14] ueotek, “Ansys mechanical.” <https://blog.csdn.net/ueotek/article/details/138184946>, 2024. Accessed: 2025-01-27.

附录