数学分析 B3 习题课讲义

作者：左一泓 & 吴东润

组织：USTC

时间：January 5, 2025

ElegantLATEX Program

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

目录

第一章 习题课

1.1 第一次习题课

1.1.1 第一周作业答案

例题 1.1(14.1.3(1))

解 任意正整数 N, 存在正偶数不能表示成不超过 N 个素数之和。

例题 1.2(14.1.4)

解 逐点收敛:

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

不一致收敛:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N \text{ and } x_0 \in E, s.t. |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

例题 1.3(14.1.6)

解 注意这题是要求找到一列不同的一一对应，很多同学只找了一个。我们可以基于一个构造一列.

首先考虑 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \varphi(n) = (-1)^n [\frac{n+1}{2}]$, 容易验证其为一一对应。

下面再考虑 $\pi_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, 满足

$$\pi_i(n) = \begin{cases} -i, n = i \\ i, n = -i \\ n, others \end{cases}$$

则 $\{\pi_i \circ \varphi\}_{i=1}^{\infty}$ 为一列两两不同的一一对应。

例题 1.4(14.1.7)

解 记 $\mathbb{N}$ 所有有限子集为 S, 所有元素个数为 n 的子集为 A_n, 则有 $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, 下面只需证明 A_n 为可数集。

由书上结论，我们知道 $\mathbb{N}^n$ 为可数集，考虑映射：$\phi : A_n \to \mathbb{N}^n, \phi(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}) = (a_{[1]}, a_{[2]}, \cdots, a_{[n]})$, 其中 $a_{[1]}, a_{[2]}, \cdots, a_{[n]}$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 从小到大的排列，容易验证该映射是良定（即同一个元素只会映到同一个像）和单的，故 A_n 也是可数集。

例题 1.5(14.1.9)

解 我们使用反证法，若一个不可数集 A 的可数子集 B 的余集 C 是可数或者有限的，则 $A = B \cup C$, 由于两个可数集合的并仍然为可数集合，故 $B \cup C$ 可数，与 A 不可数矛盾。

例题 1.6(14.1.10)

解 首先证明对 $A_i = \{a_1, a_2\}, \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 是不可数的，我们只需建立一个 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 到 $2^{\mathbb{N}}$ 的一一对应。

考虑 $\varphi:\prod_{n=1}^{\infty}A_n\to 2^{\mathbb{N}}, \varphi((a_{j_1},a_{j_2},\cdots))=\{i:j_i=1\}$。容易验证其为一一对应。

对于一般的可数集合，很容易建立一个其只有两个元素的子集的可列直积到其自身可列直积的单射，故可列个可列集合的直积不可数。

当然本题也可以直接用对角线法来证明。

1.1.2 其他例题

书上例 2.5-2.7；例 3.3.

1.2 第二次习题课

1.2.1 第二周作业答案

本次习题课将从"实数为有理 Cauchy 列等价类"这一定义出发，在不使用完备性的情况下完成习题的证明。现在能够利用的性质：

1. $a \sim \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \Leftrightarrow |x_i - y_i| \to 0$
2. $x \geq y \Leftrightarrow \exists \{x_i\} \sim x, \{y_i\} \sim y, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq y_n$

例题 1.7(14.1.8) 有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是可数集合.

解

$$\mathbb{Q} = \{0\} \cup (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_k)$$

$$\mathbb{Q}_k = \{\pm\frac{j}{k} | j \in \mathbb{N}\}(k \in \mathbb{N})$$

$\mathbb{Q}_k$ 到整数集合有一一对应，则为可数集。可数个可数集合的并集也为可数集，所以 $\mathbb{Q}$ 为可数集。

例题 1.8(14.2.2) 任意实数都可以被有理 Cauchy 列表示，其中 Cauchy 列每个元素都不是整数.

解

构造性证明：$\forall a \in \mathbb{R}$，存在有理数 Cauchy 列 $\{c_1, c_2, ...\}$ 表示 a. 满足条件的 Cauchy 列如下构造：

$$r_i = \begin{cases} c_i, c_i \notin \mathbb{Z} \\ c_i + \frac{1}{i+1}, c_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

那么 $\{r_1, r_2, ...\}$ 满足

1. $|r_n - c_n| \to 0 \ (n \to \infty)$，即 $\{r_1, r_2, ...\}$ 与 $\{c_1, c_2, ...\}$ 等价，也为 a 的代表元。
2. $r_n \notin \mathbb{Z}$

例题 1.9(14.2.4) 两个 Cauchy 列的混合数列为 Cauchy 列的充要条件是两个 Cauchy 列等价.

解

充分性：记混合数列为 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\forall \epsilon > 0$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ s.t. \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \ s.t. \forall n, m > N, |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \Rightarrow \exists N_3 \in \mathbb{N} \ s.t. \forall n > N, |x_n - y_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\forall n, m > 2max\{N_1, N_2, N_3\},$$

$$|z_n - z_m| = \begin{cases} |x_{[\frac{n}{2}]} - x_{[\frac{m}{2}]}| < \frac{\epsilon}{3}(n \equiv m \equiv 1 \mod 2) \\ |y_{[\frac{n}{2}]} - y_{[\frac{m}{2}]}| < \frac{\epsilon}{3}(n \equiv m \equiv 0 \mod 2) \\ |y_{[\frac{n}{2}]} - x_{[\frac{m}{2}]}| \le |y_{[\frac{n}{2}]} - y_{[\frac{m}{2}]}| + |y_{[\frac{m}{2}]} - x_{[\frac{m}{2}]}| < \frac{2\epsilon}{3}(n \equiv 0, m \equiv 1 \mod 2) \\ |x_{[\frac{n}{2}]} - y_{[\frac{m}{2}]}| \le |x_{[\frac{n}{2}]} - x_{[\frac{m}{2}]}| + |x_{[\frac{m}{2}]} - y_{[\frac{m}{2}]}| < \frac{2\epsilon}{3}(n \equiv 1, m \equiv 0 \mod 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon$$

必要性：$\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n, m > N, |z_n - z_m| < \epsilon$

则当 $n > N$，有 $|x_n - y_n| = |z_{2n-1} - z_{2n}| < \epsilon$，所以两个 Cauchy 列等价。

例题 1.10(14.2.7) 代表一个实数的有理数 Cauchy 列的集合是不可数集合.

解

反证法。假设存在 $a \in \mathbb{R}$，代表 a 的有理 Cauchy 列集合是可数集，记为 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$，其中 $A_i = \{a_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$.

构造如下数列：

$$b_i = \begin{cases} a_{1i}, a_{1i} \neq a_{ii} \\ a_{1i} + \frac{1}{i}, a_{1i} = a_{ii} \end{cases}$$

显然，$\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ 与 $\{a_{1i}\}_{i=1}^{\infty}$ 等价，故其代表 a，但其不等于任何一个 A_i，矛盾！

注意：很多同学用对角线法的构造是没法保证其为 Cauchy 列的，需要对此方法进行如上修改。

例题 1.11(14.2.9) 代表两个实数 x, y 的有理数 Cauchy 列的集合分别是 A, B，证明：A, B 具有相同的基数。

解

本题本质上就是找出一个 A 到 B 的一一映射。

分别取 x 和 y 的一个有理 Cauchy 列代表元 $\{x_i^0\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{y_i^0\}_{i=1}^{\infty}$，构造下列映射 ϕ:

$$\phi : A \to B$$

$$\phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = \{x_i + y_i^0 - x_i^0\}_{i=1}^{\infty}$$

注意到，$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{x_i^0\}_{i=1}^{\infty} \Leftrightarrow |x_i - x_i^0| \to 0 \Leftrightarrow |x_i - x_i^0 + y_i^0 - y_i^0| \to 0 \Leftrightarrow \{x_i + y_i^0 - x_i^0\}_{i=1}^{\infty} \sim \{y_i^0\}_{i=1}^{\infty}$

有理条件显然满足，那么 ϕ 构成了 A 到 B 的一个一一映射。

注意：$\phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = \{x_i + y - x\}_{i=1}^{\infty}$ 不满足有理数列的条件

例题 1.12(14.2.11) 对实数 x 存在一列严格增的有理 Cauchy 列。

解

（法一）利用稠密性性质。

先证明：两个不同实数 x, y 之间一定存在有理数。

不妨设 $x < y$，(Archimedes 公理) 存在自然数 N 满足 $y - x > \frac{1}{N}$. 由有理数的稠密性，存在一个有理数 r 满足 $|\frac{x+y}{2} - r| < \frac{1}{2N} < \frac{y-x}{2} \Rightarrow x < r < y$

回到原题，设 $x_0 = x - 1$，对 $k = 1, 2, \ldots$ 作：找到一个符合 $max(x_{k-1}, x - \frac{1}{k}) < r < x$ 的有

理数 r，令 $x_k = r$. 于是得到一个有理数列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足：

1. $x_k < x_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$

2. $x - \frac{1}{k} < x_k < x$

容易验证，其为符合条件的有理 Cauchy 列。

（法二）利用定义：实数是有理 Cauchy 列的等价类。

若 x 为有理数，$\{x - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 符合题意。

若 x 为无理数，设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 x 其中一个有理 Cauchy 列，不妨设其满足 $|x_n - x_m| < 1, \forall n, m \in \mathbb{N}$，定义：

$$\delta_n = \frac{1}{max\{M \in \mathbb{N} | \forall i, j \geq n, |x_i - x_j| < \frac{1}{M}\}}$$

容易验证，δ_n 存在，且有 $\delta_n \to 0\ (n \to \infty)$，记 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n - \delta_n\}_{n=1}^{\infty}$，则其满足：

1.$|y_n - x_n| \to 0 \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim x$

2.$x_j - y_n = x_j - x_n + \delta_n > 0,\ \forall j > n \Rightarrow y_n \leq x \Rightarrow y_n < x$

于是我们取出了一个代表 x 的 Cauchy 列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足每一项都小于 x（14.2.10）。$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在一个严格增的子列，否则 $\exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ y_i \leq y_N, \forall i \geq N \Rightarrow y_N \geq x$，矛盾！那么此严格增子列为符合题意的 Cauchy 列。

例题 1.13(14.2.12) 两个不同实数之间存在无限多个有理数.

解

设 $y < x$，由上题结论，存在代表 x 的严格增的有理 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \frac{x-y}{2} \Rightarrow x_n > x_m - \frac{x-y}{2} \Rightarrow x_n \geq x - \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} > y$

则 $\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ 都为 x, y 之间的有理数且互不相等。

例题 1.14(14.2.13) 设 x 为正实数，证明存在一个代表 x 的有理数 Cauchy 列它每一项都是一个有理数的平方。

解

直接构造：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为代表 x 的一个有理 Cauchy 列。

$$\exists M \in \mathbb{N},\ s.t.\ x_n \leq M^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists j_n \in \{0, 1, \ldots, nM^2\}\ s.t.\ \frac{j_n^2}{n^2} \leq x_n < \frac{(j_n+1)^2}{n^2}$$

$$y_n = \frac{j_n^2}{n_2} \Rightarrow 0 \leq x_n - y_n < \frac{2j_n + 1}{n^2} \leq \frac{2M^2 n + 1}{n^2} \to 0(n \to 0) \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

容易验证，$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为满足条件的 Cauchy 列。

1.3 第三次习题课

1.3.1 作业答案

例题 1.15(14.2:16、17) 证明 Hardy-Landau 不等式: 设 $p > 1, a_j > 0, j = 1, 2, \cdots$, 证明

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{m} a_n^p.$$

解 设 $A_k = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}, A_0 = 0$, 由 Hölder 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} a_k$$

只需证明:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} a_k \geq \frac{p-1}{p} \sum_{k=1}^{n} A_k^p (16\text{ 题})$$

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1}(kA_k - (k-1)A_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kA_k^p - \sum_{k=1}^{n}(k-1)A_k^{p-1}A_{k-1} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} kA_k^p - \sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{(p-1)A_k^p}{p} + \frac{A_{k-1}^p}{p}\right) (\text{Young不等式}) \\
&= \frac{p-1}{p}\sum_{k=1}^{n-1} A_k^p + (n - \frac{(p-1)(n-1)}{p})A_n^p \\
&\geq \frac{p-1}{p}\sum_{k=1}^{n} A_k^p
\end{aligned}$$

注 大家可以利用这个不等式来证明如下的 Carleman 不等式。

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛正项级数，则有：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} < e\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。

例题 1.16(14.3.1) 证明每个实数有唯一的实立方根

解 我们来证明对于一般的 $n \in \mathbb{N}^+$, 一个正实数 a 的 n 次根号存在且唯一（若 n 为奇数，则对于任意实数都有 n 次根号存在唯一）。

（唯一性）若存在 $b, c > 0$, 使得 $b^n = c^n = a$, 则有

$$(b-c)(b^{n-1} + \cdots c^{n-1}) = 0$$

两边乘以 $(b^{n-1} + \cdots c^{n-1})^{-1}$, 有 $b = c$ 成立。

（存在性）我们使用确界原理来证明存在性，考虑集合 $E = \{b | b \geq 0, b^n \leq a\}$, 由于 $0 \leq a$, 故 E 非空。当 $a \leq 1$ 时，对任意 $b \in E$, 有 $b \leq 1$, 当 $a > 1$, 对任意 $b \in E$, 有 $b \leq a$。故 E 非空且有上界，由确界原理，存在 $c = \sup E$。下面只需证明 $c^n = a$。首先我们给一个两个实数的

n 次方之差的估计，对于 $0 < x < y$，我们有:

$$y^n - x^n = (y-x)(\sum_{i=0}^{n-1} y^i x^{n-1-i}) \leq n(y-x)y^{n-1}$$

若 $c^n < a$, 我们取 $0 < \varepsilon < 1 \wedge \frac{a-c^n}{n(c+1)^{n-1}}$, 则有 $(c+\varepsilon)^n - c^n < \varepsilon \cdot n(c+\varepsilon)^{n-1} < \varepsilon \cdot n(c+1)^{n-1} < a - c^n$, 则 $c+\varepsilon \in E$, 与 c 是上确界矛盾。

若 $c^n > a$, 取 $0 < \varepsilon < \frac{c^n - a}{n(c)^{n-1}}$。我们断言 $c-\varepsilon$ 也是 E 的一个上界。事实上，若不是上界，则存在 $\hat{c}$ 使得 $c - \varepsilon \leq \hat{c}, \hat{c}^n \leq a$ 故

$$a - c^n \geq \hat{c}^n - c^n \geq -(c^n - (c-\varepsilon)^n) \geq -(\varepsilon.nc^{n-1}) > a - c^n$$

矛盾!

综上，我们得到了 $c^n = a$。

例题 1.17(14.3.2) 设 $x_1, \cdots$ 是满足 $|x_i| \leq \frac{1}{2^i}$ 的实数列，证明数列 $y_n = x_1 + \cdots + x_n$ 收敛。

解 直接检验其为柯西列即可。对任意 $i < j$,

$$|y_i - y_j| = |x_{i+1} + \cdots x_j| \leq |x_{i+1}| + \cdots |x_j| \leq \frac{1}{2^i}$$

例题 1.18(14.3.4) 证明无理数集合在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

解 我们只需证明对于任意 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 存在无理数 c, 使得 $c \in (a,b)$。

由有理数的稠密性，存在 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $\sqrt{2}a < r < \sqrt{2}b$, 则有 $a < \frac{r}{\sqrt{2}} < b$, 其中 $\frac{r}{\sqrt{2}}$ 是无理数，则命题得证。

例题 1.19(14.3.6) . 设一个有界数列 x_n 是一个单调增数列 y_n 与单调减数列 z_n 的和。问 x_n 收敛吗? 如果再假设 y_n, z_n 有界呢?

解 第一问不一定收敛，反例如下:

$$y_n = 2^n + (-1)^n, z_n = -2^n$$

则 y_n 单调增且 z_n 单调减，但 $x_n = (-1)^n$ 不收敛。

当有界时，由于 y_n 单调增且 z_n 单调减，存在 $y, z \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim y_n = y, \lim z_n = z$, 则 x_n 收敛至 $y+z$。这是因为:

$$|x_n - (y+z)| \leq |y_n - y| + |z_n - z|$$

例题 1.20(14.3.7) 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，且 y 是两个数列 x_n, y_n 的共同极限，其中 $x_n \in E$, y_n 是 E 的上界，证明 $y = \sup E$.

解 首先由于 E 存在上界 y_1, 则 $\sup E$ 存在。由于 y_n 是上界，$y_n \geq \sup E$, 可以得到 $y \geq \sup E$。又由于 $x_n \in E$, 有 $x_n \leq \sup E$, 可以得到 $y \leq \sup E$。结合上面两式，我们得到 $\sup E = y$。

例题 1.21(14.3.10) 约定空集的 sup 为 $-\infty$, 设 A, B 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集. 证明

$$\sup(A \cup B) \geq \sup(A), \sup(A \cap B) \leq \sup(A)$$

解 任意 $A \cup B$ 的上界都是 A 的上界，故 $\sup(A \cup B) \geq \sup(A)$。

若 $A \cap B$ 为空集合，则 $\sup(A \cap B) = -\infty \leq \sup(A)$。若 $A \cap B$ 非空集合，则任意 A 的上界都是 $A \cap B$ 的上界, 故有 $\sup(A \cap B) \leq \sup(A)$。

例题 1.22(14.3.19) 设 $c\in\mathbb{R}$, 定义数列:

$$x_1=\frac{c}{2}, x_n=\frac{c}{2}+\frac{x_{n-1}^2}{2}$$

讨论数列 x_n 的敛散性。

解 首先考虑极限存在的必要条件，若存在 $x\in\mathbb{R}, \lim x_n=x$, 我们有 $x=\frac{c}{2}+\frac{x^2}{2}$, 这个式子有实数解的充要条件为 $1\geq c$。故若 $c>1$, 该数列一定不收敛。下面分情况考虑 $c\leq 1$ 时数列的收敛性。

case 1:$0\leq c\leq 1$, 我们归纳证明 $1\geq x_{n+1}\geq x_n, n=1,2,\cdots$。$n=1$ 时有 $1\geq x_2\geq x_1$。若 n 时上式成立则: $x_{n+2}=\frac{c}{2}+\frac{x_n^2}{2}\leq\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\leq 1$ 且有

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{2}\geq 0$$

故 x_n 单增有界收敛至 $1-\sqrt{1-c}$(因为 $1+\sqrt{1-c}\geq 1$)

case 2:$-4<c<0$, 注意到此时有 $\frac{c}{2}\leq x_n\leq 0$, 我们归纳证明，对于 $n=2$

$$\frac{c}{2}\leq x_2=\frac{c}{2}+\frac{c^2}{8}=\frac{1}{8}c(4+c)\leq 0$$

若 $n-1$ 成立，对于 n:

$$\frac{c}{2}\leq x_n=\frac{c}{2}+\frac{x_{n-1}^2}{2}\leq\frac{c}{2}+\frac{c^2}{8}=\frac{1}{8}c(4-c)\leq 0$$

记 $\Delta=1-\sqrt{1-c}$，有:

$$|x_n-\Delta|=|\frac{x_{n-1}^2-\Delta^2}{2}|\leq|x_{n-1}-\Delta|\frac{|c+2\Delta|}{4}$$

subcase 2.1: $-3<c<0$, 容易验证此时 $\frac{|c+2\Delta|}{4}<1$, 故数列收敛至 Δ。

subcase 2.2: $-4<c<-3$,

$$x_{2k+3}-x_{2k+1}=\frac{x_{2k+2}^2-x_{2k}^2}{2}, x_{2k+4}-x_{2k+2}=\frac{x_{2k+3}^2-x_{2k+1}^2}{2}$$

我们可以得到 x_{2k+1} 单增，x_{2k} 单减，故若收敛，则 x_{2k+1} 单增收敛至 Δ，x_{2k} 单减收敛至 Δ。但是由

$$|x_{2k+3}-x_{2k+1}|=|(x_{2k+2}-x_{2k})\frac{x_{2k+2}+x_{2k}}{2}|=|(x_{2k+1}-x_{2k-1})\frac{x_{2k+1}+x_{2k-1}}{2}\frac{x_{2k+2}+x_{2k}}{2}|$$

由于此时 $\Delta<-1$, 当 k 充分大时 $|\frac{x_{2k+1}+x_{2k-1}}{2}\frac{x_{2k+2}+x_{2k}}{2}|>1$, 这将导致 x_{2k+1} 不为柯西列，故该数列不收敛。

case 3: $-8<c<-4$, 容易验证此时 $|x_n|\leq\frac{|c|}{2}<1+\sqrt{1-c}$。若数列收敛，则有:

$$|x_{n+1}-x_n|=|x_n-x_{n-1}|\frac{|x_n+x_{n-1}|}{2}>1.1|x_n-x_{n-1}|$$

当 n 充分大时。这是因为 $|1-\sqrt{1-c}|\geq\sqrt{5}-1$。故若此时 $|x_n-x_{n-1}|$ 不为 0，则 x_n 不是柯西列，矛盾！故我们得到，若收敛，则 x_n 将在有限项后取到 Δ。

记 $E=\{c,\exists n, s.t. x_n=\Delta\}$, 则 x_n收敛 $\Leftrightarrow c\in E$。对于 E，我们似乎无法继续分析其中具体有哪些元素了，但我们可以证明其为一个可数集。令 $E_N=\{c,\exists n\leq N, s.t. x_n=\Delta\}$, 由于每一个 x_n 是关于 c 的多项式，故 $x_n=\Delta$ 至多有有限个零点，故 E_N 是有限集合。故 $E=\cup_N E_N$ 是可数集合。

case 4: $c<-8$, 容易验证此时 $x_n>\frac{-c}{2}\geq 1+\sqrt{1-c}$, 故数列发散。

例题 1.23(14.3.20) 设 $\lim x_n=x, \lim y_n=y$, 求:

$$\lim \frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$$

解 我们先假设 $x=0$, 由于 $\lim x_n=x, \lim y_n=y$, 故存在 M，使得 $|x_n|\leq M, |y_n|\leq M, \forall n\in\mathbb{N}$, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得 $|x_n|\leq\varepsilon, \forall n>N$。则我们有

$$|\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}|\leq\frac{NM^2}{n}+\frac{\varepsilon(n-N)M}{n}$$

令 n 趋于无穷再令 ε 趋于 0，我们得到 $\lim\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=0$。

下面考虑一般的 x,

$$\begin{aligned}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}&=\frac{(x_1-x)y_n+(x_2-x)y_{n-1}+\cdots+(x_n-x)y_1}{n}+x\frac{y_n+y_{n-1}+\cdots+y_1}{n}\\&\to xy\end{aligned}$$

当 n 趋于无穷。第一项使用的是前面 $x=0$ 的情况，第二项是常用的收敛结论。

1.3.2 其他例题

书上例 14.3.3 与例 15.1.5。

1.4 第四次习题课

1.4.1 第四周作业答案

例题 1.24(14.3.11) 证明：$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$

解

由定理 14.38，

$$liminf_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{j>n}\{x_j\}$$

$$limsup_{n\to\infty}(-x_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{j>n}\{-x_j\}$$

容易验证，

$$-\sup_{j>n}\{-x_j\} = \inf_{j>n}\{x_j\}$$

所以，

$$liminf_{n\to\infty}x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$$

例题 1.25(14.3.12)

证明：

1. $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty}x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty}y_n$

2.$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty}y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty}x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty}y_n$

3.$x \ge 0, y \ge 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty}x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty}y_n$

并说明等号可以不成立。

解

1.

$$x_i + y_i \le \sup_{j>n}\{x_j\} + \sup_{j>n}\{y_j\}(\forall i > n) \Rightarrow \sup_{j>n}\{x_j + y_j\} \le \sup_{j>n}\{x_j\} + \sup_{j>n}\{y_j\}$$
$$\Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty}x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty}y_n$$

不取等的例子：$x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^{n-1} \Rightarrow LHS = 0, RHS = 2$

2.

由（1）和 14.3.11，

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\overline{\lim}_{n\to\infty}(-x_n - y_n) \ge -\overline{\lim}_{n\to\infty}(-x_n) - \overline{\lim}_{n\to\infty}(-y_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty}x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty}y_n$$

$$\forall i > n, x_i + y_i \le \sup_{j>n}\{x_j\} + y_i \Rightarrow \inf_{j>n}\{x_j + y_j\} \le \inf_{j>n}\{\sup_{j>n}\{x_j\} + y_j\} = \sup_{j>n}\{x_j\} + \inf_{j>n}\{y_j\}$$
$$\Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty}x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty}y_n$$

不取等的例子：

$$x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^{n-1} \Rightarrow -2 = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n < \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$$

$$x_n = y_n = (-1)^n \Rightarrow -2 = \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) < \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 0$$

3.

$$\forall i > n, x_i \cdot y_i \le \sup_{j>n}\{x_j\} \cdot \sup_{j>n}\{y_j\} \Rightarrow \sup_{j>n}\{x_j \cdot y_j\} \le \sup_{j>n}\{x_j\} \cdot \sup_{j>n}\{y_j\}$$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

不取等的例子：$x_n = 1 + (-1)^n, y_n = 1 - (-1)^n \Rightarrow 0 = LHS < RHS = 4$

例题 1.26(14.3.14) 证明：$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ 当且仅当对任意的 ϵ，(1) 存在无穷多 n 满足 $x_n > a - \epsilon$；(2) 当 n 充分大时，$x_n < a + \epsilon$

解

必要性：若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{j>n}\{x_j\} = a$，假设只有有限个 n 满足 $x_n > a - \epsilon$，设其中最大的 n 为 N，则 $\forall n > N, x_n \le a - \epsilon \Rightarrow \sup\limits_{j>n}\{x_j\} \le a - \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{j>n}\{x_j\} \le a - \epsilon < a$，矛盾！所以 (1) 成立。又 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{j>n}\{x_j\} = a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n > N, \sup\limits_{j>n}\{x_j\} < a + \epsilon \Rightarrow \forall n > N, x_n < a + \epsilon$，故 (2) 成立。

充分性：

$$(1) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{j>n}\{x_j\} > a - \epsilon \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \ge a - \epsilon$$

$$(2) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \sup_{j>N}\{x_j\} \le a + \epsilon \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le a + \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知，$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$

例题 1.27(14.3.15(2)) 证明：如果数列 $\{x_j\}$ 在扩充的实数系只有一个极限点 $+\infty$，那么 $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = +\infty$.

解

反证法。假设命题不成立，那么 $\exists M \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N\ s.t.\ x_n < M$，故可以取出一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得每一项都小于 M，由列紧性知该子列存在一个有限极限点，所以该有限极限点也是 $\{x_j\}$ 的极限点，与命题中“只有一个极限点 $+\infty$”矛盾！

例题 1.28(14.3.16) 任取所有有理数的一个排列 $r_1, r_2, \cdots$，证明：此数列的极限点集合是扩充的实数系.

解

$\forall a \in \mathbb{R}$，按下面方法依次取出一列 $\{n_1, n_2, \cdots\}$：设 $n_0 = 0$，在 n_k 取出的情况下，由有理数的稠密性知，存在无穷多个有理数使得其与 a 距离小于 $\frac{1}{k+1}$，则必有一个有理数 r 落在 $\{r_{n_k+1}, r_{n_k+2}, \cdots\}$ 内，记其下标为 n_{k+1}。于是，我们取出了一个子列 $\{r_{n_1}, r_{n_2}, \cdots\}$ 其满足 $|r_{n_k} - a| < \frac{1}{k+1}$，易验证其极限为 a，所以 a 是原数列的一个极限点。

若 $a = +\infty$，按下面方法依次取出一列 $\{n_1, n_2, \cdots\}$：设 $n_0 = 0$，在 n_k 取出的情况下，

由有理数的稠密性知，存在无穷多个有理数使得其大于 $k+1$，则必有一个有理数 r 落在 $\{r_{n_k+1}, r_{n_k+2}, \cdots\}$ 内，记其下标为 n_{k+1}。于是，我们取出了一个子列 $\{r_{n_1}, r_{n_2}, \cdots\}$ 其满足 $r_{n_k} > k$，易验证其极限为 $+\infty$，所以 $+\infty$ 是原数列的一个极限点。对 $a = -\infty$ 同理。

综上所述，此数列的极限点集合是扩充的实数系。

例题 1.29(14.3.17) 证明：数列 $\{x_j\}$，$\{y_j\}$ 的混合数列的极限点集合是 $\{x_j\}$ 与 $\{y_j\}$ 极限点集合的并.

解

首先验证：$\{x_j\}$ 的极限点都是混合数列的极限点。因为 $\{x_j\}$ 的子列都是混合数列的子列，所以 $\{x_j\}$ 子列的极限都是混合数列子列的极限，由此得证。对 $\{y_j\}$ 同理，所以 $\{x_j\}$ 与 $\{y_j\}$ 极限点集合的并包含于混合数列的极限点集合。

其次验证：混合数列的极限点是 $\{x_j\}$ 的极限点或者 $\{y_j\}$ 的极限点。对混合数列的极限点 a，存在一个混合数列的子列 $\{z_{n_k}\}$ 使其极限为 a，那么该子列属于 $\{x_j\}$ 的点或属于 $\{y_j\}$ 的点有无穷个。不妨设其有无穷个属于 $\{x_j\}$ 的点，将这些点取出来，得到一个 $\{z_{n_k}\}$ 的子列 $\{x_{m_k}\}$，则 $\{x_{m_k}\}$ 的极限也为 a，由于 $\{x_{m_k}\}$ 还是 $\{x_j\}$ 的子列，所以 a 是 $\{x_j\}$ 的极限点。由此可知，混合数列的极限点集合包含于 $\{x_j\}$ 与 $\{y_j\}$ 极限点集合的并。

综上所述，数列 $\{x_j\}$，$\{y_j\}$ 的混合数列的极限点集合是 $\{x_j\}$ 与 $\{y_j\}$ 极限点集合的并.

例题 1.30(14.3.18) 无限矩阵中每一行或每一列构成的数列的极限点是其反对角线行进得到的数列的极限点。

解

我们观察到：反对角线行进得到的数列下标和是单调增的，且其遍历无限矩阵每一个元素。那么对每一行或列构成的数列，其下标和都是严格增的，所以其为反对角线数列的一个子列。由子列的极限点一定是其父列的极限点可以得到本题结论。

下面反例说明：不可以通过这种方式得到此数列的所有极限点。

$$a_{ij} = \delta_{|i-j|}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

那么，每一行和列的极限都为 0，但是反对角线数列存在极限点 1.

例题 1.31(14.3.21) 设 $\{x_n\}$ 为单调递减的正数列，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 设 P 表示从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 中任意抽取有限或无限项求和所得数的全体. 证明：P 是一个区间当且仅当对任意 n 有

$$x_n \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j$$

解

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \Rightarrow x_n \to 0(n\to\infty)$$

由此易知，

$$inf(P) = 0$$

显然，

$$sup(P) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

所以 P 是区间等价于：

$$\forall r \in (0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n), r \in P$$

下面证明充分性：假设 $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \le \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j$，则对 $\forall r \in (0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n)$ 按如下方式依次选出 $\{n_k\}$:

在已知 $\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ 的情况下，

1. 若 $\sum_{i=1}^{k} x_{n_i} = r$，则 $r \in P$ 成立.

2. 若 $\sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \neq r$，从下面构造过程可知 $\sum_{i=1}^{k} x_{n_i} < r$，取 $n_{k+1} = inf\{m > n_k | \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} + x_m \le r\}$(由于 $x_n \to 0(n\to\infty)$ 且 $r - \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} > 0$，此集合非空，则 n_{k+1} 良定)。依次操作：若原数列加上这个数的和小于 r，就把这个和加上这个数.

下证若 1 一直不成立，那么 $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} = r$.

假设 $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} < r$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \sum_{i=M}^{\infty} x_i < r - \sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} \Rightarrow \{M, M+1, \cdots\} \subset \{n_k\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n_i < M} x_{n_i} + \sum_{n=M}^{\infty} x_n < r \Rightarrow \sum_{n_i<M} x_{n_i} + x_{M-1} < r \Rightarrow M-1 \in \{n_k\}$$

一直进行下去可以得到，$\{n_k\} = \mathbb{N}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < r$，矛盾！所以 $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} = r$.

下面证明必要性：反证法。若 $\exists n \in \mathbb{N}\ s.t.\ x_n > \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j$，令 $r = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \frac{\sum_{j=n}^{\infty} x_j}{2}$，由命题知，存在一个 $\mathbb{N}$ 的子集 Q 使得 $r = \sum_{i\in Q} x_i$，对于 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，若 $i \notin Q$，则 $r \le \sum_{j\neq i} x_j \le \sum_{j\neq n} x_j = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j < r$，矛盾！所以 $\{1, 2, \cdots, n\} \subset Q$，所以 $r \ge \sum_{i=1}^{n} x_i > r$，矛盾！必要性成立！

必要性更简单的取法：$r \in (\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j, x_n)$ 即可。

例题 1.32(定理 (14.43) 的证明细节) 包含于 A 中、且包含点 x 的开区间全体的并集也是一个区间。

$$J_x = \bigcup_{x\in I_x \subset A} I_x$$

解

$$\forall y < x, y \in J_x, \exists I_x\ s.t.\ x, y \in I_x \subset A \Rightarrow (y, x) \subset I_X \subset J_x$$

$$\forall y > x, y \in J_x, \exists I_x\ s.t.\ x, y \in I_x \subset A \Rightarrow (x, y) \subset I_X \subset J_x$$

$$x \in J_x$$

由以上三条式子可以推出：

$$\forall y, z \in J_x, y < z, (y, z) \subset J_x$$

所以 J_x 是一个区间.

例题 1.33(14.4.1) A 为开集，B 为 A 的有限子集，证明 $A\backslash B$ 是开集. 若 B 为可数集合，同样的结论是否还成立?

解

$$\forall x \in A\backslash B, \exists r > 0\ s.t.\ B_r(x) \subset A$$

$$d = inf\{|x-y||y \in B\} = min\{|x-y||y \in B\} > 0$$

$$\Rightarrow B_d(x) \cap B = \emptyset$$

$$\Rightarrow B_{r'}(x) \subset A\backslash B,\ r' = min\{r, d\} > 0$$

所以 $A\backslash B$ 是开集。

当 B 为可数子集时可以举出反例：$A = B_2(0), B = \{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\}$，则 $0 \in A\backslash B$，但 0 不是 $A\backslash B$ 内点，所以 $A\backslash B$ 不是开集。

例题 1.34(14.4.2) 一族开区间的交非空，则它们的并集也为开区间.

解

开集的并也为开集（不要求可列并）。在这一族开区间的交集取一个点，再用同上面 (定理 (14.43) 的证明细节) 相同的证法，可知它们的并集为区间，所以它们的并集是开区间。

例题 1.35(14.4.3(2)) 证明：如果 A 的每点都在数列中只出现有限次，那么数列的实数极限点是集合的聚点.

解

任意数列的实数极限点 a，存在一个子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $x_{n_k} \to a\ (k \to \infty)$, 则有，

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall t > N, |x_{n_t} - a| < \epsilon$$

由于每个点都只在数列中出现有限次，所以 a 也只有有限次，那么就有：$\exists t > N, 0 < |x_{n_t} - a| < \epsilon$，由于 $x_{n_t} \in A$，所以 a 是 A 的聚点。

例题 1.36(14.4.5)

(1) 证明：如果 B 是 A 的稠密子集，那么 A 与 B 有相同的极限点集。

(2) 证明：$\mathbb{R}$ 的每个无限子集都存在一个可数的稠密子集。举例说明存在集合 A 使得它与 $\mathbb{Q}$ 的交集不在 A 中稠密.

解

(1) 由于 B 为 A 的子集，所以 B 的极限点都是 A 的极限点.

对任意 A 中极限点 a，$\forall\epsilon>0,\exists x\in A\ s.t.\ 0<|x-a|<\epsilon/2$. 由于 B 在 A 中稠密，$\exists y\in B\ s.t.|x-y|<min\{\epsilon/2,\frac{|x-a|}{2}\}$，所以 $0<\frac{|x-a|}{2}<|x-a|-|x-y|\le|y-a|\le|x-a|+|x-y|<\epsilon\Rightarrow\forall\epsilon>0,\exists y\in B\ s.t.\ 0<|y-a|<\epsilon/2$，所以 a 也为 B 中极限点。

所以 A 与 B 有相同的极限点集。

(2) 设 A 为 $\mathbb{R}$ 中一个无限子集，$E_{nm}=[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}]$，则有 $\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}E_{nm}=\mathbb{R}$，且 $\mathcal{E}=\{E_{nm},m\in Z,n\in\mathbb{N}\}$ 为一个可数集族。下面构造 A 的一个可数子集 B，若 $E_{nm}\cap A\neq\emptyset$，任取其中一个元素 b_{nm} 放入 B 中. 由于 $\mathcal{E}$ 可数，那么 B 可数.$\forall a\in A,\forall n\in\mathbb{N},\exists m\in\mathbb{Z}\ s.t.\ a\in E_{nm}\Rightarrow|a-b_{nm}|<\frac{1}{n}$(由 $E_{nm}\cap A\neq\emptyset$ 知 b_{nm} 存在). 所以 B 为 A 的可数稠密子集.

举例：无理数集，其与有理数集交集为空集，当然不在无理数集中稠密。

例题 1.37(14.4.6) 证明：一个数列的实数极限点集是闭集。

解

设 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限点集，对 A 的任意聚点 a，存在 $\{a_k\}\subset A\ s.t.\ a_k\to a$.

$$\forall n>0,\exists K_n\in\mathbb{N}\ s.t.\ \forall k>K_n,|a_k-a|<\frac{1}{2n}$$

按如下方式取出下标集 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$：记 $n_0=0$，当 n_{i-1} 已经取出时，由于 a_i 为一个极限点，所以 $\{x_n\}$ 中存在子列趋于 a_i，则该子列存在无穷项与 a_i 距离小于 $\frac{1}{2i}$，则一定存在一项的下标大于 n_{i-1}，取其为 n_i。由取法可知：$|x_{n_i}-a_i|<\frac{1}{2i}$.

$$\forall n>0,\forall i>max\{n,K_n\},|x_{n_i}-a|\le|x_{n_i}-a_i|+|a_i-a|<\frac{1}{n}$$

所以存在子列 $\{x_{n_i}\}$ 以 a 为极限，所以 $a\in A$，所以 A 为闭集。

例题 1.38(14.4.7) Cantor 集是不含任何开区间的完全集，且它是不可数集合.

解

设第 n 步去掉的有限个开区间的并为 J_n，$J_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$J_2=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$，等等。令 $J=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$，则 $C=[0,1]\backslash J$.

C 不含任何开区间：归纳可证，$[0,1]\backslash J_n$ 为 2^n 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间的不交并。若存在开区间 A 属于 C，记其长度为 $r>0$，则存在 $N\in\mathbb{N}\ s.t.\ r>\frac{1}{3^N}$，所以 $A\not\subset[0,1]\backslash J_N$，又 $C\subset[0,1]\backslash J_N,A\subset C$，矛盾！

C 为完全集：注意到，$[0,1]\backslash J_n$ 中 2^n 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的区间的端点一定属于 C，则 $a\in C\Rightarrow a\in[0,1]\backslash J_n\Rightarrow\exists b_n\in C\ s.t.\ 0<|b_n-a|<\frac{1}{3^n}$($b_n$ 取 a 所在长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间的端点中的一个)，所以 a 是聚点，故 C 为完全集.

C 为不可数集合：反证法。假设 C 是可数的，则 C 中的数可以排成一列 $\{x_n\}$。那么在区间 $[0,1/3]$ 和 $[2/3,1]$ 中总有一个不含 x_1，记它为 $[a_1,b_1]$。将 $[a_1,b_1]$ 三等分，则其左右两个闭区间至少有一个不包含 x_2(同时它也不包含 x_1)，设为 $[a_2,b_2]$。依次类推，$[a_n,b_n]$ 不包含 $x_1,\cdots,x_n$。由闭区间套定理，存在一个点 c，$c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。所以 c 是 C 的一个聚点，所以 $c\in C=\{x_n\}\Rightarrow\exists k\in\mathbb{N},c=x_k\Rightarrow c\notin[a_k,b_k]$，矛盾！

注：Cantor 集可用三进制法简便表示，且有 Cantor 集到 [0,1] 的一一映射。

例题 1.39(14.4.9) 有限个紧集的并是紧集，任意个紧集的交是紧集。

解

有限个紧集的并是紧集：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为紧集，$A = \cup_{k=1}^n A_k$，设 $\mathcal{B}$ 为一个开集族，且为 A 的覆盖，那么其也为 A_k 的开覆盖，所以存在 $\mathcal{B}$ 的有限子集 $\mathcal{B}_k$ 为 A_k 的开覆盖。所以 $\cup_{k=1}^n \mathcal{B}_k$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个有限子集，且其为 A 的开覆盖，所以 A 为紧集.

任意个紧集的交是紧集：设 $\mathcal{A}$ 为一个紧集族，设 $E = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$，那么取出一个 $A_0 \in \mathcal{A}$，E 中任意点列 $\{x_n\}$ 都是 A 中的点列，所以存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 A_0 中的点 a，那么 $\forall A \in \mathcal{A}, \{x_{n_k}\} \subset A \Rightarrow a \in A(\{x_{n_k}\}$ 的任意子列都以 a 为极限). 所以 $a \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = E$，所以集合 E 中任意子列收敛到 E 中的点，故 E 列紧.

例题 1.40(14.4.10) 证明实数的集合 A 紧致等价于它具有如下的有限交性质：如果 $\mathcal{B}$ 是任意闭集族，且其中任意有限个闭集的交都含有 A 中的点，那么 B 中所有的闭集的交都含有 A 中的点。

解

由于紧致集是有关开覆盖的并集，而有限交性质是关于闭集族的交，那么我们可以想到对其取补集，并通过有限交性质的逆否命题进行证明。

充分性：对 A 任意开覆盖 $\mathcal{A}$，设 $\mathcal{B} = \{A^c | A \in \mathcal{A}\}$ 为一个闭集族.

$$A \subset \bigcup_{E\in\mathcal{A}} E \Rightarrow A \cap \bigcap_{E\in\mathcal{B}} E = A \cap \bigcap_{E\in\mathcal{A}} E^c = \emptyset$$

由有限交性质的逆否命题知，存在 $\mathcal{B}$ 中有限个闭集 $\{B_1, \cdots, B_m\}$ 的交不含有 A 中的点，所以

$$\bigcap_{k=1}^m B_k \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^m B_k^c = \bigcup_{k=1}^m A_k$$

所以 A 的任意开覆盖具有有限子覆盖，故 A 为紧集。

必要性：设 A 为紧集，$\mathcal{B}$ 为任意闭集族，若 $\mathcal{B}$ 中所有闭集的交不含有 A 中的点，设 $\mathcal{A} = \{B^c | B \in \mathcal{B}\}$

$$\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B^c = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$

所以 $\mathcal{A}$ 为 A 的一个开覆盖，所以存在有限子覆盖 $\{A_1, \cdots, A_m\}$.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^m A_k \Rightarrow A \cap \bigcap_{k=1}^m B_k = \emptyset$$

那么 $\mathcal{B}$ 中存在有限个闭集的交不含有 A 中的点，所以有限交性质的逆否命题成立。

例题 1.41(14.4.11)

(1) 若 A 为开集，$A + B$ 为开集。

(2) 若 A, B 均为紧集，$A + B$ 为紧集。

(3) 给出一个 A, B 均为闭集，$A + B$ 不为闭集的例子。

解

(1)

$$\forall c \in A+B, \exists a \in A, b \in B \ s.t. \ c = a+b$$

$$\exists r > 0, \forall x \in (a-r, a+r), x \in A$$

$$\Rightarrow (c-r, c+r) \subset A+B$$

(2) 任取 $A+B$ 中一个数列 $\{c_n = a_n + b_n\}$，则存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛到 A 中的点 a，则 $\{b_{n_k}\}$ 有一个子列 $\{b_{m_k}\}$ 收敛到 B 中的点 b，那么容易得到 $\{c_{m_k}\}$ 收敛到 $A+B$ 中的点 $a+b$，所以 $A+B$ 是一个紧集。

(3)$A = \mathbb{N}*, B = \{-n + \frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N}*\} \Rightarrow 0 \notin A+B, \frac{1}{n+1} \in A+B$

例题 1.42(14.4.12) 证明：如果 A 为非空紧集，那么 $supA$ 和 $infA$ 都属于 A，给出一个非紧集 A，但是 $supA$ 和 $infA$ 都属于 A.

解

A 为非空紧集，意味着其为有界闭集，所以 $a = supA$ 有限，若 $supA \notin A, \forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A \ s.t. \ 0 < a - a_n < \frac{1}{n}$，所以 a 为 A 中聚点，所以 $a \in A$，矛盾！所以 $supA \in A$. 同理可得，$infA \in A$.

例子：$A = [-1, 1] \backslash \{0\}$

例题 1.43(14.4.13) 每个无限紧集都有一个聚点。同样的结论对闭集成立吗？

解

反证法。若无限紧集 A 没有聚点，即 $\forall a \in \Omega, \exists r_a > 0 \ s.t. \ B_a(r_a) \cap A$ 只有有限个点。显然 $\{B_a(r_a) | a \in \Omega\}$ 构成了 A 的一个开覆盖，所以其存在一个子覆盖 $\{B_{a_1}(r_{a_1}), \cdots, B_{a_m}(r_{a_m})\}$，由于每个开集内部仅有 A 中的有限个点，所以它们的并也仅包含 A 中有限个点，所以 A 是有限点集，矛盾！

闭集的反例：$\mathbb{N}$ 为无限闭集，但其无聚点。

例题 1.44(14.4.14) 如果 B 是紧集，那么存在有限闭区间 $[a, b]$ 和开集 A 使得 $B = [a, b] \backslash A$.

解

若 B 为空集，结论显然成立。

若 B 非空，由 14.4.12，$supB \in B, infB \in B$，设 $a = infB, b = supB, A = [a, b] \backslash B$，下证 A 是开集。

$\forall x \in A, x \notin B, a < x < b$. 由于 B 为紧集，x 不是 B 的聚点，$\exists r > 0 \ s.t. \ \forall |y - x| < r, y \notin B \Rightarrow \forall |y - x| < min(r, x-a, b-x), y \in A$，所以 A 为开集。

例题 1.45(14.4.15) $A \subset B_1 \cup B_2$，B_1, B_2 为不交开集，且 A 为紧集，证明：$A \cap B_1$. 若 B_1 与 B_2 相交，结论仍成立吗？

解

反证法。若 $A \cap B_1$ 不为紧集，那么存在一个数列 $\{x_n\} \subset A \cap B_1$，其不存在子列收敛到 $A \cap B_1$ 中的点。由 A 为紧集，所以存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 A 中的点 a，由假设可知，$a \notin A \cap B_1$，

又由于 $A \subset B_1 \cup B_2$，所以 $a \in A \cap B_2$.

$$\exists r > 0, B_r(a) \subset B_2$$

$$\exists K \in \mathbb{N}, \forall k > K, |x_{n_k} - a| < r \Rightarrow x_{n_k} \in B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$$

矛盾!

若 B_1 与 B_2 相交，结论不再成立。例子如下：$A = [-1, 1], B_1 = (-\infty, 1), B_2 = (-1, \infty)$.

例题 1.46(14.4.16) A 是 $\mathbb{R}$ 的不可数子集。证明：A 含有不可数个 A 的聚点。

解

由于聚点比较难处理，而 A 中的点分为聚点和孤立点，于是我们只需证明其孤立点可数即可。

对任意 A 的一个孤立点 a，存在一个小邻域 B 使得 $a \in B, B \cap A = \{a\}$，于是从每一个邻域取其中一个有理数作为代表元，由此可以得到一个孤立点集到有理数的单射，所以孤立点集可数。由 A 为不可数集可知，A 含有的的聚点不可数。

1.4.2 课本例题

定理 15.31

例 15.2.6

1.5 第五次习题课

1.5.1 作业答案

习题 15.1: 1,3,4,8-10, 11,13-18,20

例题 1.47(15.1.1) f 为定义在闭集上的函数，证明：f 为连续函数当且仅当每个闭集的原像为闭集。

解 我们只需证明对于定义在闭集上的 f, 每个闭集的原像为闭集等价于每个开集的原像为开集。

若每个闭集的原像为闭集, 则对任意开集 A，A^C 为闭集，故 $f^{-1}(A^C) = f^{-1}(A)^C$ 为闭集，故 $f^{-1}(A)$ 为开集。

若每个开集的原像为开集, 则对任意闭集 A，A^C 为开集，故 $f^{-1}(A^C) = f^{-1}(A)^C$ 为开集，故 $f^{-1}(A)$ 为闭集。

例题 1.48(15.1.3) 给出 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y$ 的定义，并证明：它成立当且仅当对于取值在 f 的定义域中的并且发散到正无穷的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$。

解 定义：对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_\varepsilon > 0$, 使得任意 $x > x_\varepsilon$, 有 $|f(x) - y| \le \varepsilon$。

必要性：对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_\varepsilon > 0$, 使得任意 $x > x_\varepsilon$, 有 $|f(x) - y| \le \varepsilon$。对于任意发散到正无穷的数列 $\{x_n\}$ 和这一个 x_ε, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得任意 $n > N$, 有 $x_n > x_\varepsilon$, 故有 $|f(x_n) - y| \le \varepsilon$, 这说明 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$。

充分性：如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y$ 不成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n > n$, 有 $|f(x_n) - y| \ge \varepsilon_0$。考虑这样得到的数列 $\{x_n\}$, 有 $x_n \to \infty$ 但是 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 不可能等于 y，矛盾! 故 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y$ 成立。

例题 1.49(15.1.4) 设 x_0 点是函数 f 的跳跃间断点. 证明：如果 $\{x_n\}$ 是定义域中收敛于 x_0 的点列，那么数列 $\{f(x_n)\}$ 至多有三个极限点.

解 设 x_0 点是函数 f 的跳跃间断点。我们要证明，如果序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，则数列 $\{f(x_n)\}$ 至多有三个极限点。

首先，定义 f 在 x_0 的左极限和右极限：

$$L = \lim_{x\to x_0^-} f(x), \quad R = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

由于 x_0 是跳跃间断点，我们有 $L \ne R$。

由于 $x_n < x_0$,$x_n = x_0$,$x_n > x_0$ 中有且仅有一个成立, 可将 $\{f(x_n)\}$ 分解为三个序列 $\{f(x_{1n})\}, \{f(x_{2n})\}, \{f$
其中 $x_{1n} < x_0, x_{2n} = x_0, x_{3n} > x_0$，则这三个序列要不有限，要不收敛 $L, f(x_0), R$ 中的一个点。

因此，$\{f(x_n)\}$ 至多有三个极限点：

$$\{L, R, f(x_0)\}$$

综上所述，我们得出结论：数列 $\{f(x_n)\}$ 至多有三个极限点。证明完毕。

例题 1.50(15.1.8) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 问下列等式是否成立?

$$f(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n).$$

解 考虑 $f(x)=1-x,\{x_n\}=\{0,1,0,1,0,\cdots\}$。则 $f(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)=f(1)=0$, 而 $\overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)=1$

例题 1.51(15.1.9) 设 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x^\beta$，β 为区间 $(0,1)$ 中的数. 证明：如果 $0<\alpha\le\beta$, 那么 f 是 α 阶 Holder 连续；如果 $a>\beta$, 结论不成立。

解 $\alpha=\beta$:

不妨设 $1>x>y>0$, 令 $t=\frac{x}{t}\in(1,\infty)$

$$\frac{|x^\beta-y^\beta|}{|x-y|^\beta}=\frac{t^\beta-1}{(t-1)^\beta}$$

在 $(1,\infty)$ 有界，故 f 是 α 阶 Holder 连续。

$\alpha<\beta$:

$$\frac{|x^\beta-y^\beta|}{|x-y|^\alpha}=\frac{|x^\beta-y^\beta|}{|x-y|^\beta}|x-y|^{\beta-\alpha}\le\frac{|x^\beta-y^\beta|}{|x-y|^\beta}$$

有 $\alpha=\beta$ 的情况可以得到此时 f 是 α 阶 Holder 连续。

$\alpha>\beta$：取 $y=0$, 由于 $x^{\beta-\alpha}\to\infty$ as $x\to0$，故 f 不是 α 阶 Holder 连续。

例题 1.52(15.1.10) 证明对任意函数 f, 下列成立成立

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B),f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B).$$

如果考虑函数的像 (原像的对立面)，问上面的等式是否对函数的像成立?

解 直接验证定义即可。

$$f^{-1}(A\cup B)=\{x,f(x)\in A\cup B\}=\{x,f(x)\in A\}\cup\{x,f(x)\in B\}=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A\cap B)=\{x,f(x)\in A\cap B\}=\{x,f(x)\in A\}\cap\{x,f(x)\in B\}=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$

$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ 是对的，$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ 不对，比如令 $f(x)=|x|$, 则 $f((-1,0)\cap(0,1))=\varnothing$ 但 $f((-1,0))\cap f((0,1))=(0,1)$。

例题 1.53(15.1.11) 设 f 是定义在有界开区间均 (a,b) 上的连续函数，证明:f 一致连续当且仅当 f 在 a 点的右极限和 b 点的左极限都存在.

解 必要性：

设 $x_n\to a^+$。由一致连续性，对于任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x_n-x_m|<\delta$ 时，$|f(x_n)-f(x_m)|<\epsilon$。- 因此，$\{f(x_n)\}$ 是一个柯西列，因此它收敛到 L。这一极限 L 不依赖于 x_n 的选取，因为对于两个数列 x_n 和 y_n, 考虑其混合数列 $\{z_n\}=\{x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots\}$, 则 $z_n\to a^+$,$f(z_n)$ 收敛，故 $f(x_n)$ 和 $f(y_n)$ 有相同的极限

类似的，f 在 b 点的左极限也存在。

充分性：

定义

$$g(x)=\begin{cases}\lim_{x\to a^+}f(x),x=a\\ f(x),x\in(a,b)\\ \lim_{x\to b^-}f(x),x=b\end{cases}$$

则 g 为 $[a,b]$ 上的连续函数，故其一致连续，故 f 在 (a,b) 也一致连续。

例题 1.5415.1.13 验证例 15.1.3 中函数 f 满足 Lipschitz 条件 $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|$。

解 令

$$g(x)=\begin{cases} f(x)', f(x)' \text{exists}, \\ 0, otherwise \end{cases}$$

则

$$|f(y)-f(x)| = |\int_x^y g(t)\mathrm{d}t| \le \int_x^y |g(t)|\mathrm{d}t \le \int_x^y 1\mathrm{d}t \le |y-x|$$

例题 1.55(15.1.14) f 是 (a,b) 上的 C^1 函数，且 f' 在端点 a,b 单边极限存在，证明：f 在端点的单边极限也存在，且 f 可以扩充为 $[a,b]$ 的 C^1 函数。

解 由于 f' 单边极限存在，故 f' 在 (a,b) 上有上界 M，则 f 在 (a,b) 上一致连续，由 15.1.11，f 在端点的单边极限存在。

令

$$g(x)=\begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x), x=a \\ f(x), x\in(a,b) \\ \lim_{x\to b^-} f(x), x=b \end{cases}$$

下证 $g\in C^1[a,b]$, 首先 $g\in C^1(a,b)$, 故只需验证其在端点处的一阶导数存在且连续即可。

$$\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} g'(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

故其在 a 的一阶导数存在且连续。类似的，端点 b 也成立。

例题 1.56(15.1.15) 设 f 是区间上的单调增函数，且该区间的内点 x_0 是 f 的不连续点。证明：对于任意区间里满足 $x_1<x_0<x_2$ 的两点 x_1,x_2,f 在 x_0 的跳跃不超过 $f(x_2)-f(x_1)$.

解 由于 f 单调，有

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \le f(x_2), \lim_{x\to x_0^-} f(x) \ge f(x_1)$$

结合上面两式即可得到结论。

例题 1.57(15.1.16) 设 f 为区间 I 上的单调增函数，该区间的左右端点分别为 a,b, 端点可以在或不在区间 I 里。证明 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 存在, 前者可以取 $-\infty$ 后者可以取 $+\infty$.inf

解 若 $\liminf_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, 存在一列 $x_n \to a^+$, 使得 $f(x_n) < -n$, 由单调性，任意 $x\in(a,x_n)$, 有 $f(x)\le -n$, 这说明了 $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$。

若 $\liminf_{x\to a^+} f(x) = m > -\infty$, 存在一列 $x_n \to a^+$, 使得 $f(x_n) < m+\frac{1}{n}$, 由单调性，任意 $x\in(a,x_n)$, 有 $f(x)\le m+\frac{1}{n}$, 这说明了 $\lim_{x\to a^+} f(x) = m$。

对于 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 可类似地证明其存在。

例题 1.58(15.1.17) 设 f 为 D 上的函数. 取定 x_0 为 D 的聚点，对任意 $\delta>0$, 定义

$$M(\delta) = \sup\{f(x) \mid x\in D \text{ and } 0<|x-x_0|<\delta\},$$

$$m(\delta) = \inf\{f(x) \mid x\in D \text{ and } 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

证明以下命题：

1. $M(\delta)$ 和 $m(\delta)$ 在 $(0,\infty)$ 上分别单调增和单调减.
2. 下列两个极限
$$\lim_{\delta\to 0} M(\delta),\ \lim_{\delta\to 0} m(\delta)$$
分别存在 (可能为 $\pm\infty$). 它们称为函数 f 在 x_0 处的上极限和下极限分别记为
$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x),\quad \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x).$$
3. f 在 x_0 处有极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 当且仅当
$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x).$$

解

1. 容易验证。
2. 由于 M,m 均为单调函数，由 15.1.16 知两个极限都存在
3. 充分性:
记
$$C = \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x).$$
对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 δ, 有
$$|M(\delta) - C| \le \varepsilon, |m(\delta) - C| \le \varepsilon$$
这说明了任意 x 满足 $|x - x_0| \le \delta$, 有 $|f(x) - C| \le \varepsilon$, 这说明了 $\lim_{x\to x_0} f(x) = C$
必要性:
记 $C = \lim_{x\to x_0} f(x)$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 δ, 任意 x 满足 $|x - x_0| \le \delta$, 有 $|f(x) - C| \le \varepsilon$。
这说明了：
$$|M(\delta) - C| \le \varepsilon, |m(\delta) - C| \le \varepsilon$$
故有
$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = C = \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$$

例题 1.59(15.1.18) 引用上题的术语. 设 f 为 D 上的函数，称 f 上 (下) 半连续，是指对 D 与其聚点集之交任意点 x_0, 都成立
$$f(x_0) \geqslant \limsup_{x\to x_0} f(x)\ (f(x_0) \leqslant \liminf_{x\to x_0} f(x)).$$
证明：若 f 是开集 D 上的函数，那么 f 上半连续当且仅当对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in D : f(x) < a\}$ 是开集.

解 充分性：考虑集合 $D = \{x, f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$, 有 $x_0 \in D$, 故存在 δ 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in D$。这说明 $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \le M(\delta) \le f(x_0) + \varepsilon$。令 ε 趋于零，得到结论。

必要性：对任意 $a \in \mathbb{R}$,, 考虑 $D = \{x \in D : f(x) < a\}$。对任意的 $x_0 \in D$, 由于 $f(x_0) \ge$

$\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$, 存在 δ 使得

$$M(\delta) \leq f(x_0) + \frac{a - f(x_0)}{2} < a$$

故 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in D$, 这推出 D 是开集。

例题 1.60(15.1.20) . 设 f 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的函数，对任意 $\varepsilon > 0$, 证明函数 f 振幅大于或等于 ε 的点

$$D_\delta = \{x \in [a,\ b] \mid \omega_f(x) \geqslant \varepsilon\}$$

是闭集.

解 对于任意收敛的点列 $\{x_n\} \in D_\varepsilon$, 我们证明 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ 也在 D_δ 中。对于任意的 $\delta > 0$, 存在 N 使得 $|x_N - x| \leq \delta$, 由于 $(x_N - \delta, x_N + \delta) \subset (x - 2\delta, x + 2\delta)$, 故

$$\varepsilon \leq \omega_f(x_N) \leq \omega_f(x_N, \delta) \leq \omega_f(x, 2\delta)$$

令 $\delta \to 0$, 我们得到 $\omega(x) \geq \varepsilon$。

1.5.2 其他例题

1. 课本 92 页例 15.3.1
2. 课本 98-99 页的 Weierstrass 一致逼近定理在函数的矩上的应用
3. 命题: 课本 103 页。两个黎曼可积的 2pi 周期函数的周期卷积一定连续。

1.6 第六次习题课

1.6.1 第六周作业答案

例题 1.61(15.2.2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为每项都为正的收敛级数。证明存在绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$

解

直接构造：$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$，记 $\beta_n = S - S_n$，取 $b_n = \sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_{n+1}} > 0$，下面验证这个 b_n 满足题意。

$$\beta_n \to 0(n \to \infty)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i| = \sqrt{\beta_1} - \sqrt{\beta_{n+1}} \to \sqrt{\beta_1}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_{n+1}}} = \frac{\beta_n - \beta_{n+1}}{\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_{n+1}}} = \sqrt{\beta_n} + \sqrt{\beta_{n+1}} \to 0$$

例题 1.62(15.2.3) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛。

解

$$[\sqrt{n}] = k \Leftrightarrow k \le \sqrt{n} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \le n \le k^2 + 2k$$

$$a_k = \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{n} = \sum_{n=k^2}^{k^2+k-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=k^2+k}^{k^2+2k} \frac{1}{n} \le \frac{k}{k^2} + \frac{k+1}{k^2+k} = \frac{2}{k}$$

$$a_k = \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{n} = \sum_{n=k^2}^{k^2+k} \frac{1}{n} + \sum_{n=k^2+k+1}^{k^2+2k} \frac{1}{n} \ge \frac{k+1}{k^2+k} + \frac{k}{k^2+2k} > \frac{2}{k+1}$$

由此可得，$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为正数递减到 0 的数列，由 Leibniz 收敛定理可得：$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ 收敛。

易验证，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ 同敛散，所以原级数收敛。

例题 1.63(15.2.4) 设

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}|) < +\infty$$

证明：

(1) 可数集合 $\{a_{mn}|m,n \in \mathbb{N}\}$ 的任意排列求和均收敛；

(2) $\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn})$

解 (老师去年给出的证明)

例题 1.64(15.2.5)

$$\lim_{k\to\infty}\big(\lim_{j\to\infty}(\cos k!\pi x)^{2j}\big)$$

STEP 1 Take an ordinary infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ such that the element of the infinite matrix $\left(a_{kj}\right)_{j,k\in\mathbb{N}}$ can be represented by the sequence $u_1,\ u_2, \cdots$. For example, we can take

$$u_1 = a_{11},\ u_2 = a_{21},\ u_3 = a_{12},\ u_3 = a_{31},\ u_4 = a_{22},\ u_5 = a_{13}, \cdots$$

by following diagonal directions. We will show that $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *is absolutely convergent*. Let A be the sum of $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}|\right)$. Then for any m and n, we have

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\right) \leq A.$$

Consider any partial sum $|u_1| + \cdots + |u_r|$. The terms $u_1, \cdots, u_r$ all belong to the first m rows and the first n columns of the matrix $\left(a_{kj}\right)_{j,k\in\mathbb{N}}$ if m and n are large enough. Hence the above inequality implies $|u_1| + \cdots + |u_r| \leq A$ for all r, so that $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is absolutely convergent. Let $U = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ and $U^* = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

STEP 2 We show that the series $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}\right)$ converges, with the same sum U. Given any j and n, $\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}| \leq U^*$. Therefore $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kj}|$ converges, and hence so does $\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}$. Moreover, given any error $1/N$, there is an integer r_0 such that

$$\left|U - \sum_{r=1}^{r_0} u_r\right| = \left|\sum_{r=r_0+1}^{\infty} u_r\right| \leq \sum_{r=r_0+1}^{\infty} |u_r| \leq \frac{1}{2N}.$$

The terms $u_1, \cdots, u_{r_0}$ all belong to the first m rows and the first n columns of the matrix $\left(a_{kj}\right)_{j,k\in\mathbb{N}}$ if m and n are large enough, say $m > m_0$ and $n > n_0$. Hence by the above inequality,

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{kj} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r\right| \leq \sum_{r=r_0+1}^{\infty} |u_r| \leq \frac{1}{2N} \qquad (m > m_0,\ n > n_0).$$

Taking the limit as $m \to \infty$, we get

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}\right) - \sum_{r=1}^{r_0} u_r\right| \leq \frac{1}{2N} \quad (n > n_0),$$

which together with $|U - \sum_{r=1}^{r_0} u_r| \leq 1/2N$, implies

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}\right) - U\right| \leq \frac{1}{N} \quad (n > n_0)$$

and hence $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}\right) = U$.

STEP 3 It also follows from the absolute convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ that $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\right)$ converges with the sum $U = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $\square$

图 1.1: 15.2.4

解

若 $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$,

$\forall k\geq q, k!x\in\mathbb{N}\Rightarrow(\cos k!\pi x)^2=1\Rightarrow\lim\limits_{j\to\infty}(\cos k!\pi x)^{2j}=1\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}(\lim\limits_{j\to\infty}(\cos k!\pi x)^{2j})=1.$

若 $x\notin\mathbb{Q}$,

$\forall k\in\mathbb{N}, k!x\notin\mathbb{N}\Rightarrow|\cos k!\pi x|<1\Rightarrow\lim\limits_{j\to\infty}(\cos k!\pi x)^{2j}=0\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}(\lim\limits_{j\to\infty}(\cos k!\pi x)^{2j})=0.$

例题 1.65(15.2.7) $\underset{n\to\infty}{f_n}=f$，且所有函数 f_n 都单调增。问 f 一定单调增吗？若 f_n 严格单调增又如何？

解

$\forall x<y,\forall k\in\mathbb{N}, f_k(x)\leq f_k(y)$，令 $k\to\infty$，得 $f(x)\leq f(y)$，所以 f 一定单调增。

若 f_n 严格增，取 $f_n(x)=\frac{x}{n}$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，$f$ 不严格增。

例题 1.66(15.2.8) 给出一列定义在非紧集合 D 上的连续函数，它们不一致收敛，但满足：对 D 中任意收敛数列 $\{x_n\}, x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in D$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x)$.

解

$$D=(0,1), f_n(x)=\frac{1}{nx}, f(x)=0$$

易验证，f_n 在 D 中不一致收敛。对 D 中任意收敛数列 $\{x_n\}, x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in D$ 有：

$\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N,|x_n-x|<\dfrac{x}{2}\Rightarrow x_n>\dfrac{x}{2}\Rightarrow 0<f_n(x_n)<\dfrac{2}{nx}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=0=f(x)$

例题 1.67(15.2.9) f_n 一致收敛到 f，且对于所有 n 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$ 均存在。证明两个极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x))$ 均存在且相等。

解

$$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N,\forall x,|f_n(x)-f(x)|<\epsilon/3$$

$$\lim_{x\to x_0}f_N(x)\text{存在}\Rightarrow\exists\delta>0,\forall x,y\in(x_0-\delta,x_0+\delta),|f_N(x)-f_N(y)|<\epsilon/3$$

$$\Rightarrow\forall x,y\in(x_0-\delta,x_0+\delta),|f(x)-f(y)|\leq|f_N(x)-f(x)|+|f_N(y)-f(y)|+|f_N(x)-f_N(y)|<\epsilon$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)\text{存在}$$

$$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N,\forall x,|f_n(x)-f(x)|<\epsilon/3$$

$$\lim_{x\to x_0}f_n(x)\text{存在}\Rightarrow\exists\delta_n>0,\forall x\in(x_0-\delta_n,x_0+\delta_n),|f_n(x)-\lim_{x\to x_0}f_n(x)|<\epsilon/3$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\text{存在}\Rightarrow\exists\delta>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),|f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)|<\epsilon/3$$

$$\text{取}y\in(x_0-\delta_n,x_0+\delta_n)\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

$$\Rightarrow|\lim_{x\to x_0}f_n(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)|\leq|\lim_{x\to x_0}f_n(x)-f_n(y)|+|\lim_{x\to x_0}f(x)-f(y)|+|f_n(y)-f(y)|<\epsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x))$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

例题 1.68(15.2.10) 设 f_n 一致收敛于 f，且所有的函数 f_n 均仅有第一类间断点. 证明 f 仅有第一类间断点。

解

由于 f_n 均仅有第一类间断点，所以 $\lim\limits_{x\to x_0+} f_n(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0-} f_n(x)$ 均存在，使用上一题类似的论证方法可得，$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ 均存在，所以 f 仅有第一类间断点。

例题 1.69(15.2.12) 紧致区间上的连续函数是阶梯函数的一致极限.

解

设 f 是紧致区间 D 的连续函数，则 f 是一致连续的。D 有界，记 $D\subset[a,b]$.

构造 f_n: 将 $[a,b]$ 划分为 n 个长度为 $\frac{b-a}{n}$ 的区间：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记 $f_n(x)=\sum_{k=1}^n A_k\mathcal{X}_{[x_{k-1},x_k)}$，其中

$$A_k=\begin{cases} f(y), if\ D\cap[x_{k-1},x_k)\neq\emptyset\text{任取}y\in D\cap[x_{k-1},x_k) \\ 0, if\ D\cap[x_{k-1},x_k)=\emptyset \end{cases}$$

$$f\text{一致连续}\Rightarrow\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall|x-y|<\delta,|f(x)-f(y)|<\epsilon$$
$$\Rightarrow\forall n>\frac{b-a}{\delta},|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$$

由此可知，f_n 一致收敛到 f，且 f_n 是阶梯函数。

例题 1.70(15.2.14) 给出 $[0,1]$ 上一列连续函数列 f_n，它们逐点收敛于 0，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$ 不成立。

解

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, x\in(0,\frac{1}{n}] \\ n-n^2(x-\frac{1}{n}), x\in(\frac{1}{n},\frac{2}{n}] \\ 0, else \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=1$$

例题 1.71(15.2.15) 举例说明：函数项级数在定义域内一致收敛并不蕴含它在定义域内任意点处绝对收敛，反之亦然。

解

考虑在 $(0,1]$ 上的函数项级数 $f(x)=\sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{x}{k}=x\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^k}{k}$. 显然其在定义域内处处不绝对收敛。

$$\forall\epsilon>0,\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^k}{k}\text{收敛}\Rightarrow\exists N\in\mathbb{N},\forall n>m>N,|\sum_{k=m}^n\frac{(-1)^k}{k}|<\epsilon$$

$$\Rightarrow \forall x\in(0,1],|\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^k}{k}x|\le|\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^k}{k}|<\epsilon\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x}{k}\text{一致收敛.}$$

考虑 $(0,1]$ 上另外一个函数项级数 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{xk^2}$，显然其在定义域上处处绝对收敛。

$$\exists\epsilon=1,\forall N\in\mathbb{N},\exists x=min\{1,2\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{k^2}\}\in(0,1],\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{xk^2}\ge 2>\epsilon$$

所以其不在 $(0,1]$ 上一致收敛。

例题 1.72(15.2.17) 对于任意不等于 1 的实数 x_0，给出 $1/(1-x)$ 的关于 x_0 的幂级数展开，并写出收敛区间。

解

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x_0-(x-x_0)}=\frac{1}{1-x_0}\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{1-x_0}}=\frac{1}{1-x_0}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x-x_0}{1-x_0})^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{(1-x_0)^{k+1}}$$

收敛半径：$r=\frac{1}{\overline{lim}_{k\to\infty}(\frac{1}{(1-x_0)^{k+1}})^{1/k}}=|1-x_0|$. 所以收敛区间为 (x_0-r,x_0+r)

1.6.2 本周部分作业题

因下周就要进行期中考试，于是将本周部分作业题提前讲了，方便大家备考。(由于时间匆忙可能这部分解答写的会比较简略。)

例题 1.73(15.2.30) $\{f_k\}$ 为开区间 (a,b) 上的函数列，满足 $|f_k(x)|\le F(x),|f_k'(x)|\le G(x),\forall k$。$F,G$ 连续。证明存在一个子列在 (a,b) 的紧致子区间上都一致收敛。

解

step 1: 找到一列递增趋近于 (a,b) 的紧致区间列 A_n.

$$A_n=\begin{cases}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}],if\ b<+\infty,a>-\infty\\ [a+\frac{1}{n},n],if\ b=+\infty,a>-\infty\\ [-n,b-\frac{1}{n}],if\ b<+\infty,a=-\infty\\ [-n,n],if\ b=+\infty,a=-\infty\end{cases}$$

step 2: 记 $f_{0n}=f_n$，当 $\{f_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ 已知时，按以下方法求出其子列 $\{f_{(k+1)n}\}_{n=0}^{\infty}$.

F,G 在 A_{k+1} 上一致连续，则其有界，由推论 15.2.22 知 $\{f_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ 在 A_{k+1} 有一致收敛子列，记为 $\{f_{(k+1)n}\}_{n=0}^{\infty}$.

step 3: 由上述构造可知，子列 $\{f_{kk}\}$ 在每一个 A_n 都一致收敛，由于 (a,b) 的紧致子区间一定属于某一个 A_n，所以该子列满足题意。

例题 1.74(15.2.31) 逐点有界且逐点等度连续的函数列存在一个逐点收敛的子列。

解

step 1: 找到区间上一个可数稠密点列 $\{r_1,r_2,\cdots\}$.(14.4.5 已证)

step 2: 记 $f_{0n}=f_n$，当 $\{f_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ 已知时，按以下方法求出其子列 $\{f_{(k+1)n}\}_{n=0}^{\infty}$.

$\{f_{kn}(r_{k+1})\}_n$ 为一个有界序列，故其存在一个收敛子列，记为 $\{f_{(k+1)n}(r_{k+1})\}_{n=0}^{\infty}$，记这个子列为 $\{f_{(k+1)n}\}_{n=0}^{\infty}$。

step 3: 由上述构造可知，子列 $\{f_{kk}\}$ 在 $\{r_1,r_2,\cdots\}$ 每个点都收敛。则有

$$\forall x,\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\ s.t.\ \forall y\in(x-\delta,x+\delta),\forall k,|f_k(x)-f_k(y)|\le\frac{\epsilon}{3}$$

$$\text{稠密性}\Rightarrow\exists l\in\mathbb{N},r_l\in(x-\delta,x+\delta)$$

$$\{f_{kk}(r_m)\}\text{收敛}\Rightarrow\exists N\in\mathbb{N},\forall n,m>N,|f_{nn}(r_l)-f_{mm}(r_l)|<\frac{\epsilon}{3}$$

$$\Rightarrow\forall n,m>N,|f_{nn}(x)-f_{mm}(x)|\le|f_{nn}(r_l)-f_{mm}(r_l)|+|f_{nn}(x)-f_{nn}(r_l)|+|f_{mm}(r_l)-f_{mm}(x)|<\epsilon$$

所以其在 x 处收敛，那么该子列逐点收敛。

例题 1.75(15.3.9) $f\in C([a,b]),f(c)=0.$ 证明 f 在 $[a,b]$ 上的近似多项式可以在 c 点为零。

解

(Weierstrass) $\forall\epsilon>0,\exists$多项式$P(x)\ s.t.\ |P(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2},\forall x\in[a,b]$，记 $Q(x)=P(x)-P(c)$，则有 $|Q(x)-f(x)|=|P(x)-P(c)-f(x)+f(c)|\le|P(x)-f(x)|+|P(c)-f(c)|<\epsilon,Q(c)=0.$ 故依此方法得到的近似多项式在 c 点为零。

例题 1.76(15.3.10) f 为 $[-1,1]$ 上的偶函数。证明：若 $\int_{-1}^{1}f(x)x^{2k}dx=0,k=0,1,2,\cdots$，则 $f\equiv 0.$

解

$$(Weierstrass)\Rightarrow P_n\rightrightarrows f\Rightarrow Q_n(x)=\frac{1}{2}(P_n(x)+P_n(-x))\rightrightarrows\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))=f(x)$$

$$Q_n(x)=a_0+a_2x^2+\cdots+a_{2k}x^{2k}\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(x)Q_n(x)dx=0\Rightarrow\int_{-1}^{1}f^2(x)dx=0\Rightarrow f\equiv 0$$

例题 1.77(15.3.11) $[a,b]$ 上多项式列 $\{P_n\}$ 一致收敛到函数 f，且 P_n 的次数不超过 N，证明：f 也是次数不超过 N 的多项式。

解

V 表示次数不超过 N 的多项式全体构成的向量空间。

$$<f,g>=\int_a^b f(x)g(x)dx,\forall f,g\in V$$

设 $\hat{h_k}(x)$ 为子空间 $span\{x^i\}_{i\neq k}$ 的正交补空间任意一个非 0 多项式，因此有

$$<\hat{h_k}(x),x^i>=0,i\neq k,\ <\hat{h_k}(x),x^k>=0$$

令 $h_k=\frac{\hat{h_k}}{<\hat{h_k},x^k>}$，则有 $<h_k,x_i>=\delta_{ki}.$

回到原题，记 $P_n(x)=\sum_{i=0}^{N}a_i^n x^i$

$$P_n\rightrightarrows f\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_k^n=\lim_{n\to\infty}\int_a^b h_k(x)P_n(x)dx=\int_a^b h_k(x)f(x)dx$$

因此 $\forall k,\lim\limits_{n\to\infty}a_k^n$ 存在，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$ 也是一个次数不超过 N 的多项式。

例题 1.78(15.4.2) f 连续且 $f'(x_0)$ 存在。证明 $S_nf(x_0)\to f(x_0).$

解

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-t)}{t}=f^{'}(x_0)-f^{'}(x_0)=0$$

所以 $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t}$ 在 $|t|$ 充分小时有界，由定理 15.4.3 可知

$$S_nf(x_0)\to f(x_0)$$

例题 1.79(15.4.8) 对于周期为 2π 的连续函数 f,g, 设

$$f*g=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)dy$$

问它们 Fourier 系数之间的关系。

解

$$a_n(f*g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)\cos nxdxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(y)\cos n(x+y)dxdy$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(y)(\cos nx\cos ny-\sin nx\sin ny)dxdy=\pi(a_n(f)a_n(g)-b_n(f)b_n(g)$$

同理，

$$b_n(f*g)=\pi(b_n(f)a_n(g)+a_n(f)b_n(g))$$

例题 1.80(15.4.10) 设 f 时周期为 2π 的 C^k 函数，且 $k\geq 2$. 证明：

(1)$\forall x,y,g(y)=\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin\frac{y}{2}}$ 是 C^{k-1} 函数，且存在 M 使得 $|g^{(k-1)}(y)|\leq M$

(2)$g(y+2\pi)=-g(y)$

(3)k 为偶数时，

$$S_nf(x)-f(x)=\pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g^{(k-1)}(y)\frac{\cos(n+\frac{1}{2})y}{(n+\frac{1}{2})^{k-1}}dy$$

k 是奇数的时候，也有类似等式成立，其中 cos 被 sin 代替。

(4) 证明 $n\to\infty$ 时，$S_nf(x)-f(x)=O(1/n^{k-1})$ 一致成立。

解

(1) （这个小问不要求掌握）

考虑任意 $f\in C^k([-\pi,\pi]),f(0)=0$. 令 $M_n=\sup_{t\in[-\pi,\pi]}|f^{(n)}(t)|$.

step 1: 证明在 $[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ 上，对于 $g(y)=\frac{f(y)}{y}$ 有

$$g^{(n)}(y)=\sum_{m=0}^{k-n-2}\frac{f^{(n+m+1)}(0)}{(n+m+1)m!}y^m+h_n(y)y^{k-n-1}$$

其中 $h_n(y)=\frac{f^{(k)}(\xi_n)}{(k-n)!}-nh_{n-1}(y),h_{-1}(x)=0,\xi_n$ 为介于 0 与 y 之间的一个常数。且 $|h_n(y)|\leq C_nM_k$

用归纳法进行证明：

当 $n=0$ 时，

$$f(y)=\sum_{m=1}^{k-1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}y^m+\frac{f^{(k)}(\xi_0)}{k!}y^k\Rightarrow g(y)=\sum_{m=0}^{k-2}\frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}y^m+\frac{f^{(k)}(\xi_0)}{k!}y^{k-1}$$

取 $h_0(y)=\frac{f^{(k)}(\xi_0)}{k!}$ 满足命题。

假设 $n=m<k-1$ 成立，则当 $n=m+1$ 时，对 $g(y)y=f(y)$ 求 n 次导数有

$$g^{(n)}(y)y+ng^{(n-1)}(y)=f^{(n)}(y)$$

$$\Rightarrow g^{(n)}(y)=\sum_{m=0}^{k-n-2}\frac{f^{(n+m+1)}(0)}{(n+m+1)m!}y^m+(\frac{f^{(k)}(\xi_n)}{(k-n)!}-nh_{n-1}(y))y^{k-n-1}$$

记

$$h_n(y)=\frac{f^{(k)}(\xi_n)}{(k-n)!}-nh_{n-1}(y)$$

则

$$|h_n(y)|\le\frac{M_k}{(k-n)!}+nC_{n-1}M_k=C_nM_k$$

归纳可知命题成立。

step 2:

$$\lim_{y\to0}g^{(n)}(y)=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1},\ 0\le n<k-1$$

$$\lim_{y\to0}g^{(k-1)}(y)=h_{k-1}(0)=f^{(k)}(0)-(k-1)h_{k-2}(0)=\frac{f^{(k)}(0)}{k}$$

因此 $g(y)\in C^{k-1}([-\pi,\pi])$.

step 3: 回到原题。

$$g(y)=\frac{y}{\sin\frac{y}{2}}\cdot\frac{f(x-y)-f(x)}{y}$$

由上面 h_n 的有界性可以推出 $|(\frac{f(x-y)-f(x)}{y})^{(n)}|$ 有界。

由 $\frac{y}{\sin\frac{y}{2}}$ 和 $\frac{f(x-y)-f(x)}{y}$ 都是 C^{k-1} 函数，则 $g\in C^{k-1}$，且 $g^{(k-1)}$ 一致有界。

(2)

$$g(y+2\pi)=\frac{f(x-y-2\pi)-f(x)}{\sin\frac{y+2\pi}{2}}=-\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(\frac{y}{2})}$$

(3)

$$S_nf(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)\sin((n+\frac{1}{2})y)dy$$

分部积分得到，

$$S_nf(x)-f(x)=-\frac{1}{2\pi(n+1/2)}\int_{-\pi}^{\pi}g'(y)\cos((n+\frac{1}{2})y)dy$$

重复做分部积分即得答案。

(4) 由第三问以及 g 的 $k-1$ 阶导数有界即可得到结论。

1.7 第七次习题课

1.7.1 第七周作业答案

例题 1.81(15.2.13) 称紧致区间 $[a,b]$ 上的连续函数为线性样条，是指存在区间的一个分割，该函数限制在每个子区间上为一次函数. 证明 $[a,b]$ 上的每个连续函数都是线性样条的一致极限.

解 对连续函数 f，考虑 $f_n(x)=\begin{cases} f(x), x=a+i\frac{b-a}{n}, i=0,1,\cdots,n \\ \text{直线连接}, others \end{cases}$。由于 f 在闭区间上连续，则其一致连续，任意 $\varepsilon>0$, 存在 δ, 使得任意 x,y 满足 $|x-y|<\delta$, 有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

对任意 $n>\frac{b-a}{\delta}$, 对任意 x，设其对于 f_n 所在线段的左端点为 x_1, 右端点为 x_2。

$$|f_n(x)-f(x)|\le|f_n(x)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x)|\le|f(x_2)-f(x_1)|+\varepsilon\le2\varepsilon.$$

例题 1.82(15.2.16) 定义 $f(x)=\begin{cases} 0, x=0 \\ e^{-1/x^2}, x\neq0 \end{cases}$，证明:

(1) f 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数。

（2）f 在原点无幂级数展开。

解 （1）首先可以归纳证明 $f^{(n)}=P_n(x^{-1})e^{-x^{-2}}$ 对于 $x\neq0$，其中 P_n 是一个有限项的多项式。

我们再归纳证明 $f^{(n)}(0)=0$, 设当 n 时成立

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{P_n(x^{-1})e^{-x^{-2}}}{x}=0$$

由此可知 f 的任意阶导数存在,f 光滑。

(2) 由第一问，f 在原点处的 Taylor 展开式为 0，显然不等于 f。

例题 1.83(15.2.19) 设 $\{b_n\}$ 是单调下降的非负数列，证明：级数 $\sum b_n\sin nx$ 一致收敛的充分必要条件是 $\lim nb_n\to0$

解 必要性由一致收敛的等价刻画，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N, 使得对于任意 $n>N$ 和任意 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$|b_n\sin nx+\cdots+b_{2n}\sin 2nx|<\varepsilon$$

特别的，取 $x=\pi/4n$, 则有

$$\begin{aligned}\varepsilon&>|b_n\sin nx+\cdots+b_{2n}\sin 2nx|\\&\ge b_{2n}(\sin nx+\cdots+\sin 2nx)\ge b_{2n}n\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

故有

$$\lim 2nb_{2n}\to0$$

对于 b_{2n+1},$(2n+1)b_{2n+1}\le2nb_{2n}+b_{2n}\to0$。

充分性：由于这个函数以 2π 为周期且为奇函数，我们只需讨论 $[0,\pi]$ 上的一致收敛性。

考虑

$$S_{np} = b_n \sin nx + \cdots b_p \sin px$$

令

$$\mu_n = \max\{mb_m, m \geq n\}$$

则有 $\mu_n \to 0$。当 $x \geq \frac{\pi}{n}$ 时，由三角求和公式,对任意 $r > n$,有:

$$|\sin nx + \cdots + \sin rx| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{\pi}{x}$$

第二个不等式是由于 $\frac{x}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$，所以 $\sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi}$。

由阿贝尔引理可得

$$|S_{np}| \leq \frac{b_n \pi}{x} \leq nb_n \leq \mu_n$$

当 $x \leq \frac{\pi}{p}$ 时，由于 $\sin x \leq x$，则有:

$$|S_{np}| \leq b_n nx + \cdots + b_p px \leq p\mu_n x \leq \pi\mu_n$$

当 $\frac{\pi}{p} < x < \frac{\pi}{n}$ 时，取 $k = [\frac{\pi}{x}]$，利用上面两种情况得到的结论:

$$|S_{np}| \leq |S_{nk}| + |S_{k+1p}| \leq k\mu_n x + b_{k+1}\frac{\pi}{x} \leq \mu_n(kx + \frac{\pi}{(k+1)x}) \leq (\pi + 1)\mu_n$$

有上面三种情况可以得到对任意 $x \in [0, \pi]$，有

$$|S_{np}| \leq (\pi + 1)\mu_n$$

由于 $\mu_n \to 0$,可以得到 $\sum b_n \sin nx$ 一致收敛。

例题 1.84(15.2.21) 证明 $[0, 1]$ 上的函数列 $\{\sin nx\}$ 不存在一致收敛子列.

解 若存在，不妨设为 $\{\sin k_n x\}$,则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$,存在 N，使得任意 $n > m > N$,有

$$|\sin k_n x - \sin k_m x| \leq \varepsilon$$

对任意 $x \in [0, 1]$ 成立。

取 $x = \frac{\pi}{2k_n}$，固定 k_m,对于任意 $n > m$,有

$$|1 - \sin \frac{\pi k_m}{2k_n}| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}$$

令 $k_n \to \infty$, $1 \leq \frac{1}{2}$，这导致了矛盾。

例题 1.85(15.2.23) 设 $\{f_n\}$ 是紧致区间上一致等度连续的函数列，且逐点收敛于 f. 证明:f_n 一致收敛于 f。

解 使用定理 15.36，我们考虑证明 D 内任意 $x_n \to x$,有 $\lim f_n(x_n) = f(x)$ 由一致等度连续，任意 $\varepsilon > 0$，存在 δ,任意 $|x - y| < \delta$,$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$。

存在 N，使得任意 $n > N$,有 $|x_n - x| \leq \delta$ 且 $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$,则有

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

则有 $\lim f_n(x_n) = f(x)$，这便完成了证明。

例题 1.86(15.2.25) 设 $\{f_n\}$ 是一个紧致区间上的一列 C^∞ 函数，且对任意 k 存在常数 M_k 使得 $|f_n^{(k)}(x)| \leq M$ 证明存在一个子列一致收敛到一个 C^∞ 函数 f,并且这个子列的任意 k 阶导函数

都一致收敛于 $f^{(k)}$.

解 由推论 15.39, f_n 有收敛子列 $\{f_{1n}\}$, 对 $\{f_{1n}^{(1)}\}$ 再用推论 15.39, 得到存在 $\{f_{1n}\}$ 的子列 $\{f_{2n}\}$, 使得 $\{f_{2n}\}$ 和 $\{f_{2n}^{(1)}\}$, 重复这一步骤, 再取子列为 $\{f_{nn}\}$, 则有 $\{f_{nn}^{(k)}\}$ 均一致收敛, 任意 $k=0,1,\cdots$。设 f_{nn} 一致收敛于 f, 下证 $f\in C^\infty$ 且 $f_{nn}^{(k)}$ 收敛于 $f^{(k)}$。

用归纳法, 设对于小于等于 k 时 $f_{nn}^{(k)}$ 收敛于 $f^{(k)}$ 成立, 由于我们知道 $f_{nn}^{(k+1)}$ 一致收敛, 不妨设为 g, 则有

$$f_{nn}^{(k)}(x)=\int_a^x f_{nn}^{(k+1)}+f_{nn}^{(k)}(a)$$

令 $n\to\infty$, 有

$$f^{(k)}(x)=\int_a^x g+f^{(k)}(a)$$

这说明了 $f^{(k)}(x)$ 可微且 $f^{(k+1)}(x)=g=\lim f_{nn}^{(k+1)}(x)$。这便完成了证明。

例题 1.87(15.2.27) 证明由 $0,1$ 上次数不超过 N, 且满足 $|P(x)|\le 1$ 的多项式 Px 全体构成的函数族一致等度连续.

解 设 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 取 $x_i=\frac{i}{n}, i-0,\cdots,n$。则有

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n\\ 1 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P(x_0)\\ P(x_1)\\ \vdots\\ P(x_n)\end{pmatrix}$$

令 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n\\ 1 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}, \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}P(x_0)\\ P(x_1)\\ \vdots\\ P(x_n)\end{pmatrix}$ 则有:

$$\boldsymbol{a}=\mathrm{A}^{-1}\boldsymbol{p}$$

$$\|\boldsymbol{a}\|_2=\|\mathrm{A}^{-1}\boldsymbol{p}\|_2\le\|\mathrm{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{p}\|_2=C\|\boldsymbol{p}\|_2\le C\sqrt{n+1}$$

则对任意 $x,y\in[0,1]$

$$|P(x)-P(y)|\le\sum_{i=0}^n|a_n||x^i-y^i|\le\sum_{i=0}^n C\sqrt{n+1}i|x-y|=C'|x-y|$$

故 $P(x)$ 一致等度连续。

例题 1.88(15.2.28) 设 $f_1,\cdots,f_n$ 是一个紧致区间上的连续函数. 证明: 所有线性组合

$$\sum_{j=1}^n a_jf_i, |a_j|\le 1$$

构成的函数族是一致有界且等度连续。

解 由于 $f_1,\cdots,f_n$ 是一个紧致区间上的连续函数, 故其有一致的上界 M, 并对任意 ε, 存在 δ, 任意 $|x-y|<\delta$, 有 $|f_i(x)-f_i(y)\le\varepsilon$。

对于任意与函数族内的 $P(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j f_i$。

$$|P(x)|\le\sum_{j=1}^{n}|a_j||f_i(x)|\le nM$$

且对于任意 $|x-y|\le\delta$

$$|P(x)-P(y)|\le\sum_{j=1}^{n}|a_j||f_i(x)-f_i(y)|\le n\varepsilon$$

注意到这个 δ 是与 P 的选取无关的，故该函数族是一致有界且等度连续。

例题 1.89(15.2.29) 给出一列在 $\mathbb{R}$ 上一致有界且一致等度连续的函数列，但是它没有一致收敛子列

解 考虑

$$f_n(x)=\begin{cases}1, x\in[-n,n]\\ x+n+1, x\in[-n-1,-n]\\ -x+n+1, x\in[n,n+1]\\ 0, otherwise\end{cases}$$

容易严重 f_n 一致有界且一致等度连续，但不存在一致收敛子列，因为

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-1|=1$$

对任意 n。

例题 1.90(15.2.31) 设一个区间上的函数列 f_n 逐点有界（对于任意 x, 存在 $M(x)>0$ 使得对于所有 k，$|f_k(x)|\le M(x)$ 成立) 且逐点等度连续（对于任意 x 与任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于所有 k 与所有和 x 的距离小于 δ 的 y,$|f_k(x)-f_k(y)|\le\varepsilon$. 证明存在一个 f_n 的逐点收敛的子列。

解 类似于 Arzala-Ascoli 的证明，先找一列 f_n 再稠密子集上逐点收敛，再通过逐点等度连续证明其在整个区间上收敛。

例题 1.91(15.3.2) 设 f 是 $[a,b]$ 上的 C^1 函数. 证明存在一个次数不超过 3 的多项式 P 使得 $f-P$ 及其导数在区间端点为零.

解 不妨设 $P(x)=p_3x^3+p_2x^2+p_1x+p_0$ 则题目要求等价于如下方程组

$$\begin{cases}p_3a^3+p_2a^2+p_1a+p_0=f(a)\\ p_3b^3+p_2b^2+p_1b+p_0=f(b)\\ p_33a^2+p_22a+p_1=f'(a)\\ p_33b^2+p_22b+p_1=f'(b)\end{cases}$$

故只需检验系数矩阵满秩

$$\begin{vmatrix}a^3 & a^2 & a & 1\\ b^3 & b^2 & b & 1\\ 3a^2 & 2a & 1 & 0\\ 3b^2 & 2b & 1 & 0\end{vmatrix}=-(a-b)^4\neq0$$

例题 1.92(15.3.4) 证明：若 f 和 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 f 在一个有限区间之外为零，那么 $f*g$ 连续.

解 不妨设 $\operatorname{supp} f \in [-M, M]$, 由于 f 连续，有一直上界 N, 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 考虑 g 在 $[-M+x-1, M+x+1]$ 上一致连续，故对任意 ε, 存在 δ, 任意 $x, y \in [-M+x-1, M+x+1]$ 且 $|x-y| \leq \delta$, 有 $|g(x)-g(y)| \leq \varepsilon$。对任意 $y \in (x-\delta, x+\delta)$, 我们有：

$$
\begin{aligned}
|f*g(y) - f*g(x)| &= |\int f(t)(g(y-t)-g(x-t))\mathrm{d}t| \\
&= |\int_{[-M,M]} f(t)(g(y-t)-g(x-t))\mathrm{d}t| \\
&\leq 2MN\varepsilon
\end{aligned}
$$

这便说明了 $f*g$ 的连续性。

例题 1.93(15.3.6) 定义 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 的支集为集合 $\{x|f(x) \neq 0\}$ 的闭包，记为 $\operatorname{supp} f$.

a) 证明及上的连续函数 f 的支集为紧集当且仅当 f 在一个有限区间外为零.

b) 设 f 与 g 为连续函数，且其中一个函数有紧致支集. 证明

$$\operatorname{supp} f*g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$$

解 a) f 的支集为紧集 $\Leftrightarrow$ f 的支集为有界集合 $\Leftrightarrow f$ 在一个有限区间外为零。

b)

$$f*g(x) = \int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

考虑任意 $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ 则对任意 $y \in \mathbb{R}$, 若 $y \in \operatorname{supp} f$, 则有 $x-y \notin \operatorname{supp} g$ 这说明 $y \notin \operatorname{supp} f$ or $x-y \notin \operatorname{supp} g$ 对任意 y 成立，这说明 $f(y)=0$ or $g(x-y)=0$ 对任意 $y \in \mathbb{R}$，这便推出 $f*g(x)=0, x \notin \operatorname{supp} f*g$, 这说明

$$(\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)^C \subset (\operatorname{supp} f*g)^C$$

两边再取补即可得到命题。

例题 1.94(15.3.7) 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明：对任意 $\varepsilon > 0$, 存在非负多项式 $P(x)$ 满足

$$\sup_{x\in[a,b]} |P(x)-f(x)| \leq \varepsilon$$

解 取一致收敛于 $\sqrt{f}$ 的多项式函数列 $\{P_n\}$, 则非负多项式 $\{P_n^2\}$ 一致收敛于 f.

例题 1.95(15.3.8) $f \in C^k, g \in C^m$，且其中一个的支集为紧集，证明：

$$f*g \in C^{k+m}(\mathbb{R}), (f*g)^{(k+m)} = f^{(k)} * g^{(m)}.$$

解 不妨设 f 的支集为紧集。我们对 $n=k+m$ 进行归纳。

$n=0$ 时显然成立，设当 n 时成立，考虑 $k+m=n+1$ 的情况。

由归纳假设，

$$(f*g)^{(k+m-1)} = f^{(k)} * g^{(m-1)}$$

则

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta\to 0}\frac{(f*g)^{(k+m-1)}(x+\Delta)-(f*g)^{(k+m-1)}(x)}{\Delta} &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{f^{(k)}*g^{(m-1)}(x+\Delta)-f^{(k)}*g^{(m-1)}(x)}{\Delta}\\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{\int f^{(k)}(t)(g^{(m-1)}(x+\Delta-t)-g^{(m-1)}(x-t))\mathrm{d}t}{\Delta}\\
&= \lim_{\Delta\to 0}\int_{\mathrm{supp}(f)} f^{(k)}(t)\frac{g^{(m-1)}(x+\Delta-t)-g^{(m-1)}(x-t)}{\Delta}\mathrm{d}t\\
&= \int_{\mathrm{supp}(f)} f^{(k)}(t)\lim_{\Delta\to 0}\frac{g^{(m-1)}(x+\Delta-t)-g^{(m-1)}(x-t)}{\Delta}\mathrm{d}t\\
&= \int_{\mathrm{supp}(f)} f^{(k)}(t)g^{(m)}(x-t)\mathrm{d}t\\
&= f^{(k)}*g^{(m)}
\end{aligned}$$

这便说明了

$$(f*g)^{(k+m)} = f^{(k)}*g^{(m)}$$

1.8 第八次习题课

1.8.1 第八周作业答案

这周作业答案在期中之前的那个习题课讲过了，可以翻看第六次习题课讲义。

1.8.2 补充题

例 16.1.10

注意到例题证明中推到了

$$\frac{1}{mn}|A| \le ||A|| \le |A|$$

由下面定义，这两个范数等价。

定义设在线性空间 $\mathcal{X}$ 上给定了两个范数 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_2$，我们说 $||\cdot||_2$ 比 $||\cdot||_1$ 强，是指

$$||x_n||_2 \to 0 \Rightarrow ||x_n||_1 \to 0$$

如果 $||\cdot||_2$ 比 $||\cdot||_1$ 强而且 $||\cdot||_1$ 比 $||\cdot||_2$ 强，则称两个范数等价。

例题 1.96 $||\cdot||_2$ 比 $||\cdot||_1$ 强 $\Leftrightarrow \exists C > 0, ||x||_1 \le C||x||_2, \forall x \in \mathcal{X}$

解

充分性显然，下面证明必要性。使用反证法，假设命题不成立，那么

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \ s.t. \ ||x_n||_1 \ge n||x_n||_2$$

$$y_n = \frac{x_n}{||x_n||_1} \Rightarrow ||y_n||_2 \le \frac{1}{n} \Rightarrow ||y_n||_2 \to 0 \Rightarrow ||y_n||_1 \to 0$$

此结论与 $||y_n||_1 = 1$ 矛盾！

例题 1.97 有限维线性空间上任意两个范数相互等价。

解

设线性空间 $\mathcal{X}$ 维数为 n，这时候存在一组基：$e_1, e_2, \cdots, e_n$，任意一个元素 $x \in \mathcal{X}$，有唯一的表示：

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

那么每个 $x \in \mathcal{X}$ 唯一对应 $\mathbb{K}^n$ 空间中一个点 $\xi = Tx = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$，下面探究 $\mathcal{X}$ 中的范数 $||\cdot||$ 和 Tx 在 $\mathbb{K}^n$ 中的范数 $|Tx| = |\xi| = (\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ 之间的关系。

考察 $p(\xi) = ||\sum_{j=1}^n \xi_j e_j||(\forall \xi \in \mathbb{K}^n)$.

首先，p 对 ξ 是一致连续的。由三角不等式和 Schwarz 不等式，

$$\forall \xi, \zeta \in \mathbb{K}^n, |p(\xi) - p(\zeta)| \le p(\xi - \zeta) \le \sum_{i=1}^n |\xi_i - \zeta_i|||e_i||$$

$$\le (\sum_{i=1}^n |\xi_i - \zeta_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n ||e_i||^2)^{\frac{1}{2}} \le |\xi - \zeta| (\sum_{i=1}^n ||e_i||^2)^{\frac{1}{2}}$$

由范数的齐次性，

$$p(\xi) = |\xi| \cdot || \sum_{j=1}^{n} \frac{|\xi_j|}{|\xi|} e_j || = |\xi| p(\frac{\xi}{|\xi|})$$

由于 $\mathcal{K}^n$ 上的单位球面 $\S_1$ 是一个紧集，因此 $p(\xi)$ 在单位球面上必有非负的最小值 C_1 与最大值 C_2.

$$C_1|\xi| \leq p(\xi) \leq C_2|\xi|$$

下面只需要证明 $C_1 > 0$ 即可，反证法，若 $C_1 = 0$，那么 $\exists \xi^* \in S_1, p(\xi^*) = 0 \Rightarrow \xi_1^* e_1 + \cdots + \xi_n^* e_n = 0$，由于 $\{e_i\}$ 为基，所以 $\xi^* = 0$，矛盾！

$$C_1|Tx| \leq ||x|| \leq C_2|Tx|$$

如果我们将 $|Tx|$ 看做在 $\mathcal{X}$ 空间引入的另一个范数 $||x||_T$，记为 $\mathbb{K}_n$ 范数，那么 $||\cdot||$ 与 $||\cdot||_T$ 等价。于是 n 维线性赋范空间与其 $\mathbb{K}_n$ 范数等价。

所以有限维线性空间任意两个范数都和 $\mathbb{K}_n$ 范数等价，所以这两个范数等价。

推论赋范空间上任意有限维子空间必是闭子空间。

回到习题 15.3.11.

例题 1.98(15.3.11) $[a, b]$ 上多项式列 $\{P_n\}$ 一致收敛到函数 f，且 P_n 的次数不超过 N，证明：f 也是次数不超过 N 的多项式。

解

使用上面推论可以给出一个很简单的做法：

定义范数为 *sup* 范数，则 $[a, b]$ 上次数不超过 N 的多项式函数为 $C[a, b]$ 的一个维数为 $N + 1$ 的子空间，由推论可知，这是一个闭集。

P_n 一致收敛到 f 意味着在 *sup* 范数意义下收敛到 f，由于这是一个闭集，所以 f 也是次数不超过 N 的多项式。

16.3.2 压缩映射定理设 M 是完备度量空间，$f : M \to M$ 是一个压缩映射，则存在唯一 $x_0 \in M$，满足 $f(x_0) = x_0$.

应用（ODE）考虑常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(t, x) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

其有等价形式

$$x(t) = \xi + \int_0^t F(\tau, x(\tau)) d\tau$$

看作一个不动点的问题，即求下列映射的不动点

$$(Tx)(t) = \xi + \int_0^t F(\tau, x(\tau)) d\tau$$

在 $C[-h, h]$ 上考查定义的映射 T，我们考察 $F(t, x)$ 上添加什么条件可以使 T 成为一个压

缩映射。

$$\rho(Tx,Ty)=\max_{|t|<h}|\int_0^t F(\tau,x(\tau))-\int_0^t F(\tau,y(\tau))|$$
$$\le h\cdot\max_{|t|<h}|F(t,x(t))-F(t,y(t))|$$

假设 F 满足局部 Lipschitz 条件：$\exists\delta>0,L>0,\forall|t|<h,|x_1-\xi|<\delta,|x_2-\xi|<\delta,|F(t,x_1)-F(t,x_2)|\le L|x_1-x_2|$

$$\rho(Tx,Ty)\le Lh\rho(x,y),\forall x,y\in\overline{B(\xi,\delta)}$$

$$\overline{B(\xi,\delta)}=\{x(t)\in C[-h,h]|\max_{|t|<h}|x(t)-\xi|\le\delta\}$$

当 $Lh<1$ 时，T 在 $\overline{B(\xi,\delta)}$ 上才是压缩的，下面看如何使映射映回 $\overline{B(\xi,\delta)}$ 中。记

$$M=\max\{|F(t,x)||(t,x)\in[-h,h]\times[\xi-\delta,\xi+\delta]\}$$

取 $h>0$ 足够小，满足

$$\max|(Tx)(t)-\xi|=\max|\int_0^t F(\tau,x(\tau))d\tau|\le Mh\le\delta$$

由于 $(C[-h,h],\rho)$ 是一个完备距离空间，而 $\overline{B(\xi,\delta)}$ 使其一个闭子集，所以它也完备，从而得到定理：

Picard 定理 设函数 $F(t,x)$ 在 $[-h,h]\times[\xi-\delta,\xi+\delta]$ 上定义、连续并满足局部 Lipschitz 条件，则当 $h<\min\{\delta/M,1/L\}$ 时, 初值问题在 $[h,h]$ 上存在唯一解。

1.9 第九次习题课

1.9.1 第九周作业答案

例题 1.99(15.4.5) 设 fRiemann 可积，证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n f(x) - f(x)| \to 0$$

解 （法 1）记 $M = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n f(x) - f(x)|dx \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} |\int_{|t|\le\delta} (f(x-t) - f(x))K_n(t)dt|dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\int_{\delta\le|t|\le\pi} (f(x-t) - f(x))K_n(t)dt|dx \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|t|\le\delta} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dtdx + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\delta\le|t|\le\pi} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dtdx.
\end{aligned}$$

首先考虑 $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{|t|\le\delta} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dtdx$

由于 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，因此 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得对于 $x_i = -\pi + \frac{2\pi i}{N}$ $(i = 0, 1, \cdots, N)$, 有

$$\sum_{i=0}^{N-1} \omega_f([x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) \le \epsilon$$

取 $\delta_0 = \min\{\frac{\epsilon}{4MN}, \frac{\pi}{2N}\}$, 那么有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \int_{|t|\le\delta_0} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dtdx \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} \omega_f(x, \delta_0)dx \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_f(x, \delta_0)dx \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} (\int_{x_i+\delta_0}^{x_{i+1}-\delta_0} \omega_f(x, \delta_0)dx + \int_{x_i}^{x_i+\delta_0} \omega_f(x, \delta_0)dx + \int_{x_{i+1}-\delta_0}^{x_{i+1}} \omega_f(x, \delta_0)dx) \\
&\le \sum_{i=0}^{N-1} (\omega_f([x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) + 2M\delta_0 + 2M\delta_0) \\
&\le \epsilon + 4MN\delta_0 \le 2\epsilon.
\end{aligned}$$

再考虑 $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\delta\le|t|\le\pi} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dtdx$, 由于 $K_n(t)$ 在 $|x| \in [\delta_0, \pi]$ 上一致趋近于 0，取 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $n \ge n_0$, 有

$$\int_{\delta_0\le|t|\le\pi} K_n(t)dt \le \frac{\epsilon}{4\pi M}.$$

那么

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\delta_0\le|t|\le\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dtdx\le\int_{-\pi}^{\pi}2M\frac{\epsilon}{4\pi M}=\epsilon.$$

综合上面两个估计

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_n f(x)-f(x)|dx\\&\le\int_{-\pi}^{\pi}\int_{|t|\le\delta_0}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dtdx+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\delta_0\le|t|\le\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dtdx\\&\le 3\epsilon.\end{aligned}$$

这便说明了 $\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_n f(x)-f(x)|\to 0$。

（法 2）控制收敛定理：若可积函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛到可积函数 f, 且存在可积函数 g, 使得 $|f_n(x)|\le g(x),\forall x,n$. 那么有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f_n(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

由于 f 可积，因此 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上有界. 那么 $|\sigma_n f(x)-f(x)|\le 2\sup_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|,\forall x,n$ 同时有 f 的不连续点为零测集. 由 (15.4.3) 知 $|\sigma_n f(x)-f(x)|$ 几乎处处收敛到 0. 从而由控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_n f(x)-f(x)|dx=\int_{-\pi}^{\pi}0\cdot dx=0.$$

例题 1.100(16.1.3) 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，定义 $x\in\mathbb{R}^n$ 到 V 的距离为 $\inf_{y\in V}|x-y|$, 记为 $d(x,V)$, 证明：

1. 存在 $x_0\in V$, 使得 $|x-x_0|=d(x,V)$;
2. 对于任意 $y\in V$, $d(x,V)=d(x+y,V)$

解 （1）由定义，存在 $\{x_i\}\in V$，满足 $|x-x_i|\le d(x,V)+\frac{1}{i}$。故有

$$|x_i|\le|x_i-x|+|x|\le d(x,V)+1+|x|$$

由于 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集合为列紧集，$\{x_i\}$ 存在子列 $x_{j_i}\to y$, 由于 V 是闭集，故 $y\in V$, 且由范数连续性

$$|x-y|=\lim|x-x_{j_i}|\le d(x,V)$$

由定义显然有 $|x-y|\ge d(x,V)$, 故 $|x-y|=d(x,V)$。

（2）

$$d(x+y,V)=\inf_{z\in V}|x-(z-y)|=\inf_{z\in V}|x-z|$$

这是因为 $V=V-y$。

例题 1.101(16.1.4) 证明：若 $\|.\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数, 则存在正常数 M 使得 $\|x\|\le M|x|,\forall x\in\mathbb{R}^n$, 其中 $|x|$ 是 Euclid 范数。

解 参考第八次习题课例题 1.97

例题 1.102(16.1.5) 度量空间 M 上的两个度量 d_1, d_2 等价是指存在两个正常数 c_1, c_2 使得 $\forall x, y \in M$,$d_1(x, y) \leq c_2 d_2(x, y)$,$d_2(x, y) \leq c_1 d_1(x, y)$ 同时成立。证明: 若 d_1, d_2 等价，则按 d_1 度量 $x_n \to x$ 等价于按 d_2 度量 $x_n \to x$。

解 当按 d_1 度量 $x_n \to x$，有

$$d_2(x_n, x) \leq c_1 d_1(x_n, x) \to 0$$

则有按 d_2 度量 $x_n \to x$, 反之同理。

例题 1.103(16.1.6) 设 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 是 (M, d) 的两个柯西列，证明 $\{d(x_k, y_k)\}$ 收敛。

解 我们只需验证 $\{d(x_k, y_k)\}$ 是柯西列。

$$|d(x_k, y_k) - d(x_j, y_j)| \leq |d(x_k, y_k) - d(x_j, y_k)| + |d(x_j, y_k) - d(x_j, y_j)| \leq d(x_k, x_j) + d(y_k, y_j) \to 0$$

当 $k, j \to \infty$

例题 1.104(16.1.7) 证明 $\mathbb{R}^n$ 上的范数 $\|x\|_1$ 当 $n > 1$ 时不由任何内积诱导。

解 我们只需验证其不满足平行四边形法则取 $x = (1, 1, 0, \cdots, 0)$, $y = (2, 0, \cdots, 0)$ 有

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 16 + 4 = 20$$
$$2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2) = 2(4 + 4) = 16$$

不满足平行四边形法则.

1.10 第十次习题课

1.10.1 第十周作业答案

例题 1.105(16.1.9) 设 $1 \le p < \infty$,

$$l_p = \{(x_1, \dots)| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, x_k \in \mathbb{R}\}$$

对于 $x = (x_1, \dots), y = (y_1, \dots) \in l_p$，定义

$$d(x, y) = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p)^{1/p}$$

证明：(l_p, d) 是完备度量空间。并证明依度量收敛推出每个坐标分量收敛，举例说明反之不成立。

解

首先证明这是一个度量：正定性和对称性易证，三角不等式可由 Minkowski inequality 得到，因此这是一个度量。

完备性证明：取 $\{x_n\}$ 为 l_p 种的一个 Cauchy 列，且 $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots)$.

$$Cauchy \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, d(x_n, x_m) = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^p)^{1/p} < \epsilon$$

$$\Rightarrow |x_{nk} - x_{mk}| < \epsilon \Rightarrow \{x_{nk}\}_n\ Cauchy \Rightarrow \exists x_{0k} \in \mathbb{R}, x_{nk} \to x_{0k}$$

$$\forall M \in \mathbb{N}, \Rightarrow \sum_{k=1}^{M} |x_{nk} - x_{mk}|^p \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^p < \epsilon^p$$

$$\text{令} m \to \infty, \sum_{k=1}^{M} |x_{nk} - x_{0k}|^p < \epsilon^p$$

$$\text{令} M \to \infty, \sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{0k}|^p < \epsilon^p, \forall n > N$$

特别的，取 $\epsilon = 1, \exists n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{0k}|^p < 1$，那么 $(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{0k}|^p)^{1/p} \le (\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{0k}|^p)^{1/p} < \infty$，所以 $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots) \in l^p$. 且由上面推导可知 $d(x_0, x_n) \to 0$，所以这是一个完备度量空间。

对每个坐标分量收敛由上面推导已证，下面给出反例：

$$x_n = (\delta_{kn})_k, x_0 = (0, 0, \dots)$$

例题 1.106(16.1.10) S 为 $\mathbb{R}^2$ 上的单位圆周。对于 S 上两点 p, q，定义他们之间距离为圆周上连接它们的最短弧的长度。证明这是一个度量。问这个度量和 S 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间的度量一样吗？如果用极坐标表示圆周上的点，弧长度量的具体表达式是什么？

解

正定性，对称性显然满足。任取 S 上三点 p, q, r，必有 $d(p, r) \le \pi$。若 $d(p, q) + d(q, r) \ge \pi$，

则 $d(p,r) \le d(p,q)+d(q,r)$。若 $d(p,q)+d(q,r) < \pi$，那么三个点在某一条直径的同一侧，此时容易验证 $d(p,r) \le d(p,q)+d(q,r)$，所以三角不等式成立，其为一个度量。

极坐标形式：

$$p = (\cos\theta, \sin\theta), q = (\cos\phi, \sin\phi), (\theta, \phi \in [0, 2\pi))$$

$$d(p,q) = min\{|\theta-\phi|, 2\pi-|\theta-\phi|\}$$

例题 1.107(16.1.11) $A \in \mathbb{M}(n)$，证明：

(1) 若 A 为对称阵，则 $\|A\|$ 等于其特征值的最大值。

(2) 对一般的 A，$\|A\|^2$ 等于对称矩阵 A^TA 特征值绝对值的最大值。

解

(1) 用线代的知识，对称矩阵具有分解 $A = P^TRP$，其中 P 为正交矩阵，$R = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 为特征值的对角矩阵，设 $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$。

$$\frac{|Ax|}{|x|} = \frac{|P^TRPx|}{|x|} = \frac{|RPx|}{|Px|} = \frac{\sqrt{(\lambda_1y_1)^2+\ldots+(\lambda_ny_n)^2}}{\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}} \le |\lambda_1|$$

其中 $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = Px$.

取 $Px = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ 即可让上式取到等号，所以 $\|A\|$ 等于其特征值的最大值。

(2)A^TA 为对称阵，存在分解 $A^TA = P^TRP$，其中 P 为正交矩阵，$R = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 为特征值的对角矩阵，设 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n$.

$$\frac{|Ax|^2}{|x|^2} = \frac{x^TA^TAx}{x^Tx} = \frac{x^TP^TRPx}{x^TP^TPx} = \frac{y^TRy}{y^Ty} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_iy_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \le \lambda_1$$

上式在 $y = (1, 0, \ldots, 0)$ 取等。又由于 $\|A\|^2 = (sup\frac{|Ax|}{|x|})^2 = sup\frac{|Ax|^2}{|x|^2}$，所以 $\|A\|^2$ 等于对称矩阵 A^TA 特征值绝对值的最大值。

例题 1.108(16.2.2) 完备度量空间 (M,d) 的一个子集 E 作为（子）空间是完备的当且仅当其是 M 的闭子集。

解

充分性：假设 E 为 M 的闭子集。对任意 E 中的 Cauchy 列，其为 M 中的 Cauchy 列，则其存在 M 中极限，由于 E 为闭集，所以该极限在 E 中，所以 E 中任意 Cauchy 列都有 E 中的极限，所以 E 为完备的。

必要性：假设 E 是完备的，那么对 E 中点列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x \in M$，那么 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，由于 E 完备，其收敛到 E 中的点，所以 $x \in E$，所以 E 为闭集。

例题 1.109(16.2.4) 证明：如果度量空间里的 Cauchy 列有极限点，那么它有极限。

解

设 $\{x_n\}$ 以 x 为极限点的 Cauchy 列。

$$\forall\epsilon > 0, \exists\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}, x_{n_k} \to x \Rightarrow \exists K \in \mathbb{N}, \forall k > K, |x_{n_k} - x| < \epsilon/2$$

$$Cauchy \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \epsilon/2$$

$$\exists k_0 > K, n_{k_0} > N \Rightarrow \forall n > n_{k_0}, |x_n - x| \le |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - x| < \epsilon$$

所以该数列以 x 为极限。

例题 1.110(16.2.5) 设 A 为度量空间 M 的子空间. 证明：A 作为 M 的子空间的 $Heine-Borel$ 性质与 A 作为自身的子空间的 $Heine-Borel$ 性质等价。

解

假设 A 满足作为自身子空间的 H-B 性质。对于 A 的开覆盖（M 中开集）$\mathcal{A}$，记 $\mathcal{B}=\{D\cap A|A\in\mathcal{A}\}$，则其为 A 的开覆盖（A 中开集），由假设可知，其存在有限子覆盖 $\{D_1\cap A, D_2\cap A,\dots,D_n\cap A\}$，那么 $\{D_1,D_2,\dots,D_n\}$ 为 $\mathcal{A}$ 的有限子覆盖。那么其作为 M 子空间的 H-B 性质成立。

假设 A 满足其作为 M 子空间的 H-B 性质。对于 A 的开覆盖（A 中开集）$\mathcal{A}$，由定理 16.10，$\forall E\in\mathcal{A},\exists D$为 M 中开集$E=D\cap A$，记 $\mathcal{B}=\{D|E\in\mathcal{A},E=D\cap A\}$，则其为 A 的开覆盖（M 中开集），所以其有有限子覆盖 $\{D_1,\dots,D_n\}$，那么 $\{D_1\cap A,\dots,D_n\cap A\}$ 为 $\mathcal{A}$ 的有限子覆盖。那么其作为自身子空间的 H-B 性质成立。

例题 1.111(16.2.7) 证明：$B_r(x_0)$ 是一个凸集。

解

$$\forall x,y\in B_r(x_0),\forall 0<t<1, \|(1-t)x+ty-x_0\| = \|(1-t)(x-x_0)+t(y-x_0)\|$$

$$\le (1-t)\|x-x_0\|+t\|y-x_0\| < r \Rightarrow (1-t)x+ty\in B_r(x_0)$$

例题 1.112(16.2.8) 证明：度量空间 $(C[a,b],sup)$ 的紧致子空间作为连续函数族一致等度连续。

解

设 M 为一个紧致子空间。

$$\forall\epsilon>0, M\subset\{B_{\epsilon/3}(f)|f\in M\}\Rightarrow\exists\{f_1,\dots,f_n\}\subset M, M\subset\bigcup_{i=1}^n B_{\epsilon/3}(f_i)$$

紧致区间 $[a,b]$ 上的连续函数一定等度连续，那么

$$\exists\delta_i>0,\forall|x-y|<\delta_i,|f_i(x)-f_i(y)|<\epsilon/3$$

取 $\delta=min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$

$$\forall f\in M,|x-y|<\delta,\exists k\in\{1,2,\dots,n\}, f\in B_{\epsilon/3}(f_k)$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_k(x)|+|f(y)-f_k(y)|+|f_k(x)-f_k(y)|<\epsilon$$

例题 1.113(16.2.9) 设 l^∞ 为有界复数列的集合，定义 $d(\{x_n\},\{y_n\})=\sup_n\|x_n-y_n\|$. 证明：

(1) (l^∞,d) 为完备度量空间。

(2) 由收敛于 0 的复数列构成的子空间完备。

(3) 度量空间 (l^∞,d) 无可数稠密子集。

解

(1) 设 $\{x_n\}$ 为此空间下一个 Cauchy 列，$x_n = \{x_{nk}\}_k$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, d(x_n, x_m) < \epsilon$$
$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, |x_{nk} - x_{mk}| < \epsilon$$

由此可知，对任意的 k，$\{x_{nk}\}_n$ 为 $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 列，所以它存在极限 x_{0k}. 对上式的 $m \to \infty$，可以得到：

$$\forall k \in \mathbb{N}, |x_{nk} - x_{0k}| < \epsilon \Rightarrow d(x_n, x_0) \to 0$$

又取 $\epsilon = 1$，有 $x_{0k} \le |x_{nk} - x_{0k}| + |x_{nk}| \le 1 + sup\{x_{nk}\}_k < \infty$，所以 $x_0 \in l^\infty$，所以该空间完备。

(2) 由性质 16.15 结论，只需要验证这个子空间为闭子空间，也就是验证这个子空间的补为开集。

对任意一个不收敛于 0 的复数列 $\{x_n\}$,

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |x_n| > \epsilon$$

$$\Rightarrow \forall \{y_n\} \in B_{\epsilon/2}(\{x_n\}), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |y_n| \ge |x_n| - |x_n - y_n| \ge |x_n| - d(\{x_n\}, \{y_n\}) > \epsilon - \epsilon/2 = \epsilon/2$$

所以 $B_{\epsilon/2}(\{x_n\})$ 的元素都为不收敛于 0 的复数列，得证。

(3) 取出一个不可数的子集，且子集内两两元素距离为 1:

$$\mathcal{A} = \{\{I(i \in A)\}_i | A \in 2^{\mathbb{N}}\}$$

若存在一个可数稠密子集，那么以子集元素为中心，半径为 $\frac{1}{2}$ 的球覆盖整个空间，所以会有 $\mathcal{A}$ 两个元素落入同一个球中，同一个球元素距离小于 1，矛盾！

例题 1.114(16.2.12) 设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ 是一个度量空间的非空紧致子集列。证明: $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ 非空。

解

取 $x_n \in A_n$，则 $\{x_n\}_n \subset A_1$，所以存在一个收敛子列 $\{x_{nk}\}_k$ 收敛到 $x \in A_1$.

由于对任意的 n，该收敛子列从某一项后都属于 A_n，那么其收敛到的点也为 A_n 中的点，所以 $x \in A_n, \forall n$，故 $x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$，因此 $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ 非空。

例题 1.115(16.2.13) 具体构造出 Euclid 空间 R^n 的一个可数稠密子集，并证明:

(1) R^n 的任意子空间存在至多可数稠密子集。

(2) R^n 的任意子集的开覆盖都有至多可数开覆盖。

解

构造：$\mathbb{Q}^n$

(1) 设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，设 $\mathcal{A}$ 为以有理数为端点的超矩形构成的集合，则这是一个可数集合。

目标子集 B 按如下方式给出: $\forall E \in \mathcal{A}$，若 $E \cap A \neq \emptyset$，那么将 $E \cap A$ 的一个元素放入目标子集 B，因为 $\mathcal{A}$ 为一个可数集合，所以 B 为一个至多可数集合。

下证 B 为稠密子集:

$$\forall x \in A, \forall \epsilon > 0, \exists \text{一个端点为有理数且边长都小于} \epsilon/\sqrt{n} \text{的超矩形} E, x \in E$$

所以 $\exists y \in B, y \in E \cap A$，那么 $|x-y| < \epsilon$, 所以 B 为 A 的至多可数稠密子集。

(2) 设 $\{E_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ 为 A 任一个开覆盖。

$$\forall x \in A, \exists \alpha \in A, x \in E_\alpha$$

于是存在有理超矩形 I_x, $s.t.\ x \in I_x \subset E_\alpha$，由此得到 E 的有理超矩形开覆盖 $\{I_x : x \in E\}, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, 这是一个至多可数开覆盖，取满足 $I_n \subset E_\alpha$ 的其中一个 E_α 记为 E_n, 那么 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 为一个至多可数子覆盖。

例题 1.116(16.2.15) 定义距离:

$$d(A,B) = inf\{|x-y| : \forall x \in A, \forall y \in B\}$$

(1) 证明：如果 E_1, E_2 为两个非空紧集，那么 $d(E_1,E_2) > 0$，当且仅当 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

(2) 举例说明：若是两个闭集，结论不成立。

解

(1) 首先证明：若 E_1, E_2 是两个非空紧集，那么 $\exists x \in A, y \in B, d(x,y) = d(E_1,E_2)$.

假设上面命题不成立，那么

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E_1, y_n \in E_2, d(x_n,y_n) < d(E_1,E_2) + \frac{1}{n}$$

由紧性可得，存在 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 $x \in E_1$，那么存在 $\{y_{n_k}\}$ 子列 $\{y_{n_t}\}$ 收敛到 $y \in E_1$, 则有 $d(x,y) \le d(E_1,E_2)$, 所以 $d(x,y) = d(E_1,E_2)$.

回到原题，

$$d(E_1,E_2) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in E_1, y \in E_2, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in E_1, y \in E_2, x = y \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$$

(2) 例子:

$$E_1 = \mathbb{N}, E_2 = \{n + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

16.2.16-18 使用开集、闭集与边界的定义易证。

1.10.2 补充

定理 17.8，例 17.3.3

1.11 第十一次习题课

1.11.1 第十一周作业答案

例题 1.117(16.2.19(1-3)) p 为素数，任意整数 z 可表示为 $z=\pm\sum_{j=0}^{N}a_jp^j$, 可以定义 p-进展开为

$$z=\pm a_N\cdots a_1a_0$$

当 $z\neq 0$ 时定义 $|z|_p=p^{-k}$, 这里的 k 是使得 $a_k\neq 0$ 的最小整数; 规定 $|0|_p=0$

(a) 证明 $d(x,y)=|x-y|_p$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的度量，成为 p-adic 度量

(b) 证明 p 进度量满足 $d(x,z)\le\max(d(x,y),d(y,z))$（满足这种性质的度量称为超度量）

(c) 证明 $\mathbb{R}^3$ 上的 Euclid 度量不是超度量

解 (a) 只需验证度量的定义。$d(x,y)\ge 0$，若 $d(x,y)=0$, 则有 $x-y=0$。对称性显然，对于三角不等式，我们先证 (b) 则是显然的。

（b）反证，若 $d(x,z)>\max(d(x,y),d(y,z))$。这说明使得 x_k-z_k 不等于 0 的最小整数小于 x_k-y_k 和 y_k-z_k。这会带来矛盾，因为 $x_k-y_k=0$ 和 $y_k-z_k=0$ 会导出 $x_k-z_k=0$。

(c) 取 $x=(1,0,0),y=(0,0,0),z=(0,1,0)$ 容易验证不满足超度量的性质。

例题 1.118(16.3.4) 设 $f:M\to N$ 连续，则对 M_1 是 M 的子空间，$f|_{M_1}$ 也是连续函数。

解 对于 M_1 中的任意收敛点列 $\{x^k\}$, 由于 $\{x^k\}\subset M$, 故 $\{f(x^k)\}$ 收敛，故 $f|_{M_1}$ 是连续函数。

例题 1.119(16.3.5) 给出 $f_n:M\to N$ 一致收敛的定义，证明连续函数列一致收敛极限为连续函数。

解 定义：对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得对于任意 $n>N$, 有

$$\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$$

下证连续函数列一致收敛极限为连续函数。设连续函数列 f_n 一致收敛到 f

取充分大的 n 使得 $\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$, 由于 f_n 连续，存在 $\delta>0$, 使得任意 $x,y\in M$, $d(x,y)<\delta$, 有 $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$, 则有：

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|\le 3\varepsilon$$

故 f 连续。

例题 1.120(16.3.7) 设 $T:C([0,1])\to C([0,1])$

$$T(f(x))=x+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

说明 T 是压缩映射，且不动点是微分方程 $f'(x)=xf(x)+1$ 的解。

解

$$|T(f(x))-T(g(x))|=|\int_0^x t(f(t)-g(t))\mathrm{d}t|\le\sup_t|f(t)-g(t)|\frac{1}{2}x^2\le\frac{1}{2}\sup_t|f(t)-g(t)|$$

故

$$\sup_x|T(f(x))-T(g(x))|\le\frac{1}{2}\sup_t|f(t)-g(t)|$$

故 T 是 $C([0,1])$ 上的压缩映射，有不动点 f,$Tf(x)=f(x)$，两边求导可得到

$$f^{'}(x)=xf(x)+1$$

例题 1.121(16.3.8) 设 E 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集，$f:E\to E$ 满足

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\forall x\neq y\in E$$

证明：f 有唯一的不动点。

解 唯一性较为容易，首先来证唯一性。假设有两个不动点 $x\neq y\in E$，则有

$$|x-y|=|f(x)-f(y)|<|x-y|$$

这表明 $x=y$，矛盾。

下证存在性，任意 $x_0\in E$，考虑 $\{x_n=f^nx_0\}$，其中 $f^nx=f(f^{n-1}x)$，$f^0x=x$。由于 E 为有界闭集，故其为列紧集，存在 $\{x_{k_n}\}$ 收敛至 $x^*\in E$。由条件，容易看出 $|x_{n+1}-x_n|$ 是递减的非负数列，故存在极限 a。

由条件，容易看出 f 连续，故有

$$x_{k_n+1}=f(x_{k_n})\to f(x^*)$$

$$x_{k_n+2}=f(x_{k_n+1})\to f^2(x^*)$$

$$|x_{k_n+2}-x_{k_n+1}|=|f(x_{k_n+1})-f(x_{k_n})|<|x_{k_n+1}-x_{k_n}|$$

令 $n\to\infty$

$$a=|f^2(x^*)-f(x^*)|\leq|f(x^*)-x^*|=a$$

故 $|f(x^*)-x^*|=|f^2(x^*)-f(x^*)|<|f(x^*)-x^*|$，得到 $f(x^*)=x^*$，x^* 为不动点。

例题 1.122(16.3.9) 设 M 是紧致度量空间，N 是完备度量空间且有 Bolzano-Weierstrass 性质，即 N 中的任意有界点列有收敛子列。对于一列映射 $f_n:M\to N$，给出包括一致有界和一致等度连续的定义：叙述相应的 Arzela-Asscoli 定理并证明。

解 只需将 $\mathbb{R}$ 上的 Arzela-Asscoli 定理中的 $|x-y|$ 改为 $d(x,y)$ 即可，由于 M 的紧致性，其存在至多可数的稠密子集。

例题 1.123(16.3.10) 证明 $f:M\to N$ 是连续的满射，若 M 连通，则 N 连通；若 M 弧连通，则 N 弧连通

解 若 M 连通而 N 不连通，则存在不交开集 A,B，使得 $N=A\cup B$，则 $M=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，其中 $f^{-1}(A),f^{-1}(B)$ 均为开集（f 连续）且不交，则 M 不连通，矛盾。

若 M 弧连通，对于 N 中任意两点 $f(x),f(y)$，存在曲线 λ 连接 x,y，则 $f(\lambda)$ 为连接 $f(x),f(y)$ 的曲线，因为 $f(\lambda)$ 连续且 $f(\lambda(0))=f(x)$,$f(\lambda(1))=f(y)$。

例题 1.124(16.3.11) 存在连续满射 $f:M\to N$，其中 N 连通但 M 不连通。

解 考虑 $f(x)=1$，$M=\{0,1\}$，则 $N=\{1\}$ 连通而 $M=\{0,1\}$ 不连通。

例题 1.125(16.3.12) 证明 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 $\{\boldsymbol{x},\|\boldsymbol{x}\|_2=1\}$ 是连通子集。

解 我们证明它是道路连通的，对于任意 $x,y\in S$，$x\neq -y$，考虑

$$\lambda(t)=\frac{tx+(1-t)y}{\|tx+(1-t)y\|}$$

为 x 到 y 的连续曲线。对于 $x=-y$ 任取 $z\in S, z\neq x, z\neq y$, 则 x,z 和 z,y 之间存在连续曲线，把这两条区间连接到一起则得到一条 x,y 的连续曲线。

例题 1.126(16.3.13) 给出一个非紧致度量空间到紧致度量空间的连续满射。

解 $f:[0,2\pi)\to S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}, f(t)=(\cos t,\sin t)$

例题 1.127(16.3.14) 设 $f:M\to N$ 是连续满射，M 紧致，证明

(1)A 为 N 的闭集当且仅当 $f^{-1}(A)$ 为 M 中的闭集

(2) 若 f 为单射，则 f^{-1} 连续。

解 (1) 首先 $N=f(M)$ 为紧致集合。若 B 为 M 的闭集，则 B 为紧致集合，则 $f(B)$ 也是紧致集，故为闭集。若 A 是 N 的闭集，则 A^C 为 N 的开集，$f^{-1}(A^C)=(f^{-1}(A))^C$ 为开集，则 $f^{-1}(A)$ 为闭集。

（2）由 (1) 可知 f 将闭集映射为闭集，这边说明对于映射 f^{-1}，其闭集的原像为闭集，这便说明其为连续映射。

例题 1.128(16.3.15) 证明：$f:[0,2\pi)\to S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}, f(t)=(\cos t,\sin t)$ 是连续映射，且既单又满，但 f^{-1} 不连续。

解 只需注意到 $[0,2\pi)$ 不是紧致的而 S 是紧致集。

例题 1.129(16.3.19) 设 I 为区间，证明：连续函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 的图像是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集。

解 令 $P=\{(x,y)|x\in[0,1], y=f(x)\}$。则映射 $F:x\to(x,f(x))$ 是 $I\to P$ 的连续满射，事实上其每个分量是连续的，故其对于欧几里得空间 $\mathbb{R}^2$ 也是连续的。I 是连通的，故 P 也是。

例题 1.130(16.3.20) 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空开集且 $\partial A\neq\varnothing, E\subset A$ 是一个非空的紧致子集，证明

（1）$d(E,\partial A)=\inf\{|x-y||x\in E, y\in\partial A\}>0$

（2）存在 $\delta>0$ 使得集合 $E_\delta=\{x\in\mathbb{R}^n|存在y\in E,|x-y|<\delta\}$ 仍然包含于 A。

解（1）若 $\inf\{|x-y||x\in E,y\in\partial A\}=0$ 则存在 x_n 使得 $d(x_n,\partial A)=\inf\{|x_n-y||y\in\partial A\}<\frac{1}{n}$, 由 E 的紧致性，存在子列 $\{x_{k_n}\}$ 收敛至 $x^*\in E$, 由于 $f(x)=d(x,\partial A)$ 是连续函数，故 $d(x^*,\partial A)=0$。但由于 A 开，存在 $B(x^*,\delta)\in A$, 与 $d(x^*,\partial A)=0$ 矛盾。

（2）令 $\delta=d(E,\partial A)$，下证 $\forall x\in A^C, y\in E$ 有

$$d(x,y)\geq\delta$$

考虑 $I=\{t+(1-t)y|t\in[0,1]\}, I\cap A^C\neq\varnothing, I\cap A\neq\varnothing$, 则 $I\cap\partial A\neq\varnothing$, 即存在 $x_0\in\partial A$ 使得

$$x_0=t_0x+(1-t_0)y, t_0\in[0,1]$$

$$\delta\leq d(x_0,y)=t_0d(x,y)\leq d(x,y)$$

从而 $E_\delta=\cup_{y\in E}B_\delta(y)\subset A$

例题 1.131(17.1.2) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是线性函数，$f(e_j)=a_j, j=1,\cdots,n$, 证明：

$$\|f\|=(\sum a_j^2)^{\frac{1}{2}}$$

解 任意 $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i\in\mathbb{R}^n$,

$$f(x)=f(\sum_{i=1}^n x_ie_i)=\sum_{i=1}^n x_if(e_i)=\sum_{i=1}^n x_ia_i\leq\|x\|_2(\sum a_j^2)^{\frac{1}{2}}$$

最后一个不等式是来自 Cauchy 不等式，故 $\|f\| \le (\sum a_j^2)^{\frac{1}{2}}$

取 $x_i = a_i$, 有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

此时

$$\frac{f(x)}{\|x\|_2} = (\sum a_j^2)^{\frac{1}{2}}$$

故 $\|f\| = (\sum a_j^2)^{\frac{1}{2}}$

例题 1.132(17.1.3) 设 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵表示为 $\mathcal{A}(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{jk}e_k$, 证明:

(1)

$$\|\mathcal{A}\| = \|A\|$$

(2)

$$\|\mathcal{A}\| \le \sqrt{\sum_{j,k} |a_{jk}^2|}$$

(3) 若 $\mathcal{A}$ 是对称变换

$$\|\mathcal{A}\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

解 (1)

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n a_{ik}e_k\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{(\sum_{k=1}^n(\sum_{i=1}^n x_i a_{ik})^2)^{\frac{1}{2}}}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$$

(2)

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{(\sum_{k=1}^n(\sum_{i=1}^n x_i a_{ik})^2)^{\frac{1}{2}}}{\|x\|} \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{(\sum_{k=1}^n(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n a_{ik}^2))^{\frac{1}{2}}}{\|x\|} = \sqrt{\sum_{j,k} |a_{jk}^2|}$$

(3) 考虑矩阵 $A = (a_{jk})$, 由于其对称，对其进行谱分解 $A = U\Sigma V$, 其中 U, V 为正交矩阵，$\Sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 且 $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$

$$\|Ax\|^2 = x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} Ax$$

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|U\Sigma Vx\| = \sup_{y\in\mathbb{R}^n, \|y\|=1} \|\Sigma y\| = \sup_{y\in\mathbb{R}^n, \|y\|=1} (\sum_{i=0}^{n} (\lambda_i y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \le |\lambda_1|$$

在 $y = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 时取等。故 $\|\mathcal{A}\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$

1.11.2 补充题

例 17.5.6 与例 17.5.7

1.12 第十二次习题课

1.12.1 第十二周作业答案

例题 1.133(16.3.21(1)) 设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ 是一列非空紧致连通集合，证明：$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 连通。

解

由习题 16.2.12，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 非空，且为紧集，假设其不连通。

$$\exists \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{中开集} E, F,\ E \cap F = \emptyset, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = E \cup F$$

从而 E 与 F 都为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 中的闭集，那么其为全空间下的闭集（紧集），所以 $d(E, F) > 0$. 下面取出两个全空间下的开集：

$$\tilde{E} = \{x | \exists y \in E, d(x, y) < d(E, F)/3\}$$

$$\tilde{F} = \{x | \exists y \in F, d(x, y) < d(E, F)/3\}$$

$$d(\tilde{E}, \tilde{F}) > d(E, F)/3 > 0$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \tilde{E} \cup \tilde{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n/(\tilde{E} \cup \tilde{F}) = \emptyset$$

对任意的 n，$A_n/(\tilde{E} \cup \tilde{F})$ 是 A_n 的闭子集，所以其为紧集，由习题 16.2.12 结论可知，存在 n 使得，$A_n/(\tilde{E} \cup \tilde{F}) = \emptyset$，那么 $(A_n \cap \tilde{E}) \cup (A_n \cap \tilde{F}) = A_n$，故 A_n 不连通，矛盾！

例题 1.134(17.1.5) 设 $A(t)$ 是区间 (a, b) 到 $L(R^n, R^m)$ 的一个映射，$(a_{ij}(t))$ 是其矩阵表示。证明：$A(t)$ 是连续映射当且仅当对任意的 i, j，$a_{ij}(t)$ 是连续函数。

解

必要性：

$$\forall t, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1\ s.t. |t_1 - t| < \delta, \|A(t_1) - A(t)\| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{mn}(\sum_{i,j}(a_{ij}(t) - a_{ij}(t_1))^2)^{1/2} \le \|A(t_1) - A(t)\| < \epsilon\ \ (\text{例 } 16.1.10)$$

$$\forall i, j, |a_{ij}(t) - a_{ij}(t_1)| < (mn\epsilon)^2 \Rightarrow a_{ij}(t)\text{连续}$$

充分性：由例 16.1.10，

$$\|A(t_1) - A(t)\| \le (\sum_{i,j}(a_{ij}(t) - a_{ij}(t_1))^2)^{1/2}$$

可以推得结论。

例题 1.135(17.2.3(2)) 求微分：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$，点 $(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$

解

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \Rightarrow df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{|a|} dx_i$$

例题 1.136(17.2.4(2)) 求微分和 Jacobi 矩阵：$f(x,y,z)=(z-y,x-z,y-x)$

解

$$df=(dz-dy,dx-dz,dy-dx),Jf=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

例题 1.137(17.2.5) f,g 可微，证明：$<f,g>$ 可微，求 $d<f,g>$

解

$$f(y)-f(x)=df_x(y-x)+o(y-x),g(y)-g(x)=dg_x(y-x)+o(y-x)$$

$$\Rightarrow<f(y),g(y)>-<f(x),g(x)>=<f(x),dg_x(y-x)>+<df_x(y-x),g(x)>+R(x,y)$$

$$R(x,y)=<f(y)-f(x),g(y)-g(x)>+<f(x),o(y-x)>+<o(y-x),g(x)>$$

$$<f(y)-f(x),g(y)-g(x)>\le|df_x(y-x)+o(y-x)||dg_x(y-x)+o(y-x)|=O(|y-x|^2)$$

$$<f(x),o(y-x)>\le|f(x)||o(y-x)|,<g(x),o(y-x)>\le|g(x)||o(y-x)|$$

$$\Rightarrow R(x,y)=o(y-x)\Rightarrow d_x<f,g>=<f(x),dg_x>+<df_x,g(x)>$$

例题 1.138(17.2.9) 对单位正交基，证明：$\sum_{j=1}^n(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2=\sum_{j=1}^n(\frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_i})^2$

解

设 $(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)^T=A(x_1,\dots,x_n)^T$，则 A 为正交阵。设 $L=df_x$，则 $\frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_i}=L(\tilde{e}_i)=\sum_{i=1}^n a_{ij}L(e_i)=\sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}$，所以 $(\frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_n})^T=A(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n})^T$，由正交矩阵保范性可知结论。

例题 1.139(17.2.10) 凸函数定义：$\forall x,y\in M,\forall t\in(0,1),f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$

证明：f 是凸函数当且仅当对任意 $x,y\in M,f(y)-f(x)\ge df_x(y-x)$

解

必要性：

$$\forall x,y\in M,\forall t\in(0,1),f(y)-f(x))\ge(f(x+(1-t)(y-x))-f(x))/(1-t)$$

令 $t\to1$，得 $f(y)-f(x)\ge df_x(y-x)$

充分性：

$$f(x)-f(tx+(1-t)y)\ge df_{tx+(1-t)y}((1-t)(x-y))$$

$$f(y)-f(tx+(1-t)y)\ge df_{tx+(1-t)y}(t(y-x))$$

$$\Rightarrow t(f(x)-f(tx+(1-t)y))+(1-t)(f(y)-f(tx+(1-t)y))\ge0$$

$$\Rightarrow tf(x)+(1-t)f(y)\ge f(tx+(1-t)y)$$

例题 1.140(17.2.11) 设 $\Omega\subset M(n)$ 是可逆矩阵全体，定义 $\phi:\Omega\to\Omega,\phi(A)=A^{-1}$，证明 ϕ 是可微映射，并且求它的微分。

解

$$\phi(A+tX)-\phi(A)=(A+tX)^{-1}-A^{-1}=A^{-1}((I+tXA^{-1})^{-1}-I)$$
$$=A^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^n (XA^{-1})^n=-A^{-1}XA^{-1}t(I+tXA^{-1})^{-1}$$
$$\Rightarrow d\phi_A(X)=\lim_{t\to 0}\frac{\phi(A+tX)-\phi(A)}{t}=-A^{-1}XA^{-1}$$

例题 1.141(17.3.2) 举例：存在映射 $f:R\to R$ 是同胚，且 f 是 C^1，f^{-1} 不是 C_1

解

取 $f(x)=x^3$ 即可。

例题 1.142(17.3.4)

(1) 同胚保持（弧）连通性与紧致性。

(2)R^n 与 $D^n=\{x\in R^n||x|<1\}$ 同胚。

解

(1) 由性质 16.35，同胚保持（弧）连通性。由定理 16.30，同胚保持紧致性。

(2)
$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\frac{2}{\pi}arctan(x_1),\frac{2}{\pi}arctan(x_2),\dots,\frac{2}{\pi}arctan(x_n))$$

例题 1.143(17.3.5) $(u,v)=f(x,y)$ 满足 $Cauchy-Riemann$ 方程：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. 证明：如果 df 在一点可逆，那么该点附近的逆映射 f^{-1} 也满足 $Cauchy-Riemann$ 方程。

解

$$Jf=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=J(f^{-1})=(Jf)^{-1}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$$

例题 1.144(17.3.6) 证明：对每个与单位矩阵 I_n 很靠近的 n 阶方阵 M 都存在平方根（方程 $A^2=M$ 有解），并且若 A 与 I_n 很靠近，则方程 $A^2=M$ 的解是唯一的。

解

定义 $f(A)=A^2$
$$f(I+B)-f(I)=(I+B)^2-I=2B+B^2=2B+o(\|B\|)\Rightarrow df_I(B)=2B$$

df_I 为可逆映射，那么由逆映射定理，存在 I 的邻域 U,V，使得 f^{-1} 为 V 到 U 的一一映射，即在 M 靠近 I_n 的时候都存在唯一平方根。

1.12.2 补充题

性质 18.7，例 18.1.2

1.13 第十三次习题课

1.13.1 作业题

例题 1.145(17.4.1)

解 (1) 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$|Jf_x| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

故可逆。

$$Jg(3,2,7) = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -10 & 24 & 2 \end{pmatrix}$$

例题 1.146(17.4.2) 设 $\mathrm{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 是一个非零向量，定义多项式

$$f_{\mathrm{a}}(\mathrm{x}) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

证明：如果 $\mathrm{a}^* \in \mathbb{R}^n$ 满足：方程 $f_{\mathrm{a}^*}(\mathrm{x}) = 0$ 有 n 个互不相同的实根，那么存在 a^* 的邻域 U 使得方程 $f_{\mathrm{a}}(\mathrm{x}) = 0$ $(\forall \mathrm{a} \in U)$ 也有 n 个互不相同的实根，且它的根是系数的光滑函数。

解 如果 $\mathrm{a}^* \in \mathbb{R}^n$ 满足：方程 $f_{\mathrm{a}^*}(\mathrm{x}) = 0$ 有 n 个互不相同的实根，那么存在 a^* 的邻域 U 使得方程 $f_{\mathrm{a}}(\mathrm{x}) = 0$ $(\forall \mathrm{a} \in U)$ 也有 n 个互不相同的实根，且它的根是系数的光滑函数。

证明：令 $F(\mathrm{a}, \mathrm{x}) = (f_{a_1}(\mathrm{x}), f_{a_2}(\mathrm{x}), \cdots, f_{a_n}(\mathrm{x}))$. 设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $f_{\mathrm{a}^*} - \mathrm{x} = 0$ 的不同实根。则 $F(\mathrm{a}^*, b_1, b_2, \cdots, b_n) = 0$. 由于 $f_{\mathrm{a}^*}(\mathrm{x}) = 0$ 无重根，因此 $f'_{\mathrm{a}^*}(b_i) \neq 0$ $(\forall i)$

则

$$F_{\mathrm{x}}|_{(\mathrm{a}^*, b_1, b_2, \cdots, b_n)} = \begin{pmatrix} f'_{\mathrm{a}^*}(b_1) & & & \\ & f'_{\mathrm{a}^*}(b_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f'_{\mathrm{a}^*}(b_n) \end{pmatrix}$$

因此 F_{x} 在 $(\mathrm{a}^*, b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 处可逆。由隐函数定理知在 a^* 某个邻域 U 内，存在 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{a} \to (x_1(\mathrm{a}), x_2(\mathrm{a}), \cdots, x_n(\mathrm{a}))$ 满足 $\varphi(\mathrm{a}^*) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $\forall \mathrm{a} \in U$ 有 $f_{\mathrm{a}}(x_i(\mathrm{a})) = 0$, 且 $x_i(\mathrm{a})$ 互不相同。

例题 1.147(17.4.5) 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是 C^1 映射，证明对任意 $x^0 \in \mathbb{R}^n$, 在 x^0 的一个领域内

$$\operatorname{rank} f(x) \geq \operatorname{rank} f(x^0)$$

成立

解 令 $k = \operatorname{rank} f(x^0)$. 当 $k = 0$，显然满足.

假定 $k \neq 0$, 则存在 Jf 的一个 k 阶子式 $Jf\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 在 x^0 处不为 0. 由 $Jf\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$

连续性，知其在 x^0 一个邻域内也不为 0. 因此在这个邻域内，任意 x 都有 $\mathrm{rank} f(x) \geq k$.

例题 1.148(17.5.1)

解 (1) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - c$ $c \neq 0$ 时，

$$JF(x,y,z) = (2x, 2y, -2z) \neq 0$$

故定义了一个 2 维 C^1 曲面。

$c < 0$ 是，$z = \pm\sqrt{x^2+y^2-c}$,$c > 0$ 是，$z \neq 0$ 时，$z = \pm\sqrt{x^2+y^2-c}$,$z = 0$ 时，$y = \pm\sqrt{c-x^2}$ 或 $x = \pm\sqrt{c-y^2}$.

(2)

$$JF(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & -z \end{pmatrix}$$

$c_1 \leq 0$ 或 $c_1 > 0, c_2 > 0$ 或 $\leq -c_1$ 时，不为曲面，其余情况下 $F(W^c)$ 包含 0 等价于存在 z_0 使得 $z_0^2 = c_1 = -c_2$ 或存在 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,$x_0^2 + y_0^2 = c_1 = c_2$, 等价于 $|c_1| = |c_2|$, 从而该方程组表示 C^1 曲线等价于 $c_1 > 0$ 且 $-c_1 < c_2 < c_1$, 此时 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{c_1+c_2}{2} \\ z^2 = \frac{c_1-c_2}{2} \end{cases}$

$c_1 = c_2 > 0$ 时也为 C^1 曲线 $\begin{cases} y = \pm\sqrt{c_1 - x^2} \\ z = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \pm\sqrt{c_1 - y^2} \\ z = 0 \end{cases}$

(3) $c \neq 0$ 时 $F = xyz - c$ 为二维曲面，$z = \frac{c}{xy}$ 在 $\mathbb{R}^3/\{\}$

例题 1.149(17.5.2) 对 17.5.1 中的曲面，计算每一点的切空间和法空间（都是线性空间）。

解 (1)$\nabla F(a) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)^{\mathrm{T}}$,$N_aM = \mathrm{span}\{\nabla F(a)\}, T_aM = N_aM^{\perp}$

(2)$N_aM = \mathrm{span}\{\nabla f_1(a), \nabla f_2(a)\}, T_aM = N_aM^{\perp}$

(3)$N_aM = \mathrm{span}\{\nabla F(a)\}, T_aM = N_aM^{\perp}$

例题 1.150(17.5.4) 对单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上每点 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 与球面上该点的每一个切向量 (v_1, v_2, v_3)，构造一条球面上的 C^1 曲线，他在 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 的切向量恰好是 (v_1, v_2, v_3).

解 考虑球面与 (v_1, v_2, v_3),$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 张成的平面的交。

例题 1.151(17.5.5) 秩为 m 的线性变换 $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)(n \geq m)$ 的集合在线性空间 $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 里是一个开集。

解 对任意秩为 m 的线性变换 $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)(n \geq m)$，考虑其对应的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$，存在 A 的一个 m 阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$ 不为 0. 由 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$ 连续性，知其在 A 一个邻域内也不为 0. 因此在这个邻域内，任意 B 都有 $\mathrm{rank} B \geq m$.

例题 1.152(17.5.6) 设 M 是以一个位于 Ozx 平面上与 z 轴不交的圆周绕 z 轴旋转一周得到的曲面。它称为环面。证明它是一个二维 C^1 曲面，并计算它上面每一点的切空间。

解 设位于 Ozx 平面上与 z 轴不交的圆周 C 的方程为 $(x-a)^2 + z^2 = r^2$，$y = 0$，其中 $a > r > 0$。

当 C 绕 z 轴旋转一周得到环面 M。对于空间中任意一点 (x,y,z) 在环面 M 上，其到 z 轴的距离 $d = \sqrt{x^2+y^2}$，则环面 M 的方程为 $(\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$。

接下来计算环面 M 上每一点的切空间：设点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为环面 M 上一点，则在该点处：

$$\nabla F|_P = \begin{pmatrix} 2(\sqrt{x_0^2+y_0^2}-a)\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ 2(\sqrt{x_0^2+y_0^2}-a)\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ 2z_0 \end{pmatrix}$$

切空间 T_PM 是与 $\nabla F|_P$ 垂直的向量空间，设向量 $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 在切空间 T_PM 内，则满足 $\vec{v}\cdot\nabla F|_P=0$，即：

$$2(\sqrt{x_0^2+y_0^2}-a)\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}v_1+2(\sqrt{x_0^2+y_0^2}-a)\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}v_2+2z_0v_3=0$$

由此可确定切空间 T_PM 内向量所满足的线性关系，进而确定切空间的具体形式。

综上，完成了对环面是二维 C^1 曲面的证明以及其切空间的计算

例题 1.153(17.5.9) 行列式等于 1 的 n 阶方阵是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的 $n-1$ 维 C^1 曲面。

解 $\det(A)=1$ 是一个 C^1 的约束方程，故曲面为 $n-1$ 维的 C^1 曲面。

例题 1.154(17.5.10) n 阶正交方阵是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的 $n(n-1)/2$ 维 C^1 曲面。

解 一个正交方阵由下面 $n(n+1)/2$ 个方程约束

$$\begin{cases} \sum_j |a_{ij}|^2=1, \forall i\in[n] \\ \sum_j a_{ij}a_{kj}=0, \forall j\neq k \end{cases}$$

例题 1.155(17.5.11) 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^1 曲面，$y^0\in\mathbb{R}^n/M$. 设 x 是 M 上与 y 的距离最大或最小的点。证明：连接 x,y 的线段与 M 垂直。

解 x 是函数 $f(x)=|x-y|^2$ 在 M 上的条件极值，故

$$T_xM\subset T_x(S(f))$$

$$T_x(S(d))=\{v|\langle v,x-y\rangle=0\}$$

故任意 $v\in T_xM$, 也有 $\langle v,x-y\rangle=0$, 这说明了连接 x,y 的线段与 M 垂直。

例题 1.156(17.5.13)

解 (1)

$$H(x,y,z,\lambda)=x^2+4y^2-z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

对分量求偏导得到方程组

$$\begin{cases} x(1+\lambda)=0 \\ y(4+\lambda)=0 \\ z(\lambda-1)=0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

则 $(x,y,z,\lambda)=(\pm1,0,0,-1)$ 或 $(0,\pm1,0,-4)$ 或 $(0,0,\pm,1)$。由于球面是紧集，故一定有极大值点和极小值点，带入计算可得到 $(0,\pm1,0)$ 是极大值点，$f=4$, $(0,0,\pm)$ 是极小值点，$f=-1$.

(2) 方程为

$$\begin{cases} z+2\lambda x+2\mu x=0 \\ 2+2\lambda y+\mu=0 \\ x+4\lambda z+\mu=0 \\ x^2+y^2+2z^2-1=0 \\ x^2+y+z=0 \end{cases}$$

(3) 解方程可得极值点可能为 $(\pm 1,0,0,-1),(0,\pm\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4})$.
检验可得 $(0,\pm\frac{1}{2},0)$ 为极小值点，$f=\frac{1}{4}$

1.14 第十四次习题课

1.14.1 作业题

例题 1.157(17.5.12) 设 M 和 M' 是 $\mathbb{R}$ 中两个不相交的曲面。设 $x_0 \in M, y_0 \in M'$ 实现两个曲面之间的最大值或最小值。证明连接这两个点的线段与两个曲面都垂直。

解

由 17.5.11 结论易证。

例题 1.158(17.5.14)

解

(1)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = diag(2+2\lambda, 8+2\lambda, 2\lambda-2)$$

$\lambda = -4$ 时，$T_{x_0}M = span(e_1, e_3)$, 在 $(0, \pm 1, 0)$ 为极大值点。

$\lambda = 1$ 时，$T_{x_0}M = span(e_1, e_2)$, 在 $(0, 0, \pm 1)$ 为极小值点。

(3)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = diag(2+2\lambda, 2+8\lambda, -4\lambda+2)$$

$\lambda = -1$ 时，$T_{x_0}M = span(e_2, e_3)$, 在 $(\pm 1, 0, 0)$ 为极大值点。

$\lambda = -\frac{1}{4}$ 时，$T_{x_0}M = span(e_1, e_3)$, 在 $(0, \pm\frac{1}{2}, 0)$ 为极小值点。

例题 1.159(17.5.15) 求出函数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y$ 在闭单位圆盘内的最值。

解

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 1$$

驻点为 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$,$Hf = (6-3-30) > 0$，取到极小值 $\frac{1}{27}$.

由 Language 算子方法可以知道，边界上的最值点满足

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y + 2\lambda x = 0 \\ 1 - 3x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

例题 1.160(17.5.16) 证明：$\sum_{j=1}^n x_j \ln x_j$ 在约束条件 $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ 在点 $(\frac{1}{n}\ldots, \frac{1}{n})$ 取最小值。

解

$$H(x,\lambda) = \sum_{j=1}^n x_j \ln x_j - \lambda(x_1 + \cdots + x_n - 1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \ln x_j + 1 - \lambda, \sum_{j=1}^n x_j = 1$$

驻点为 $(\frac{1}{n}\ldots,\frac{1}{n})$，海森矩阵为 nI 正定，从而取到极小值点。

例题 1.161(17.5.17)

$$|detx| \leq |v_1||v_2|\cdots|v_n|$$

解

看作在约束条件 $|v_j| = 1, j = 1, 2, \ldots, n$ 下最大化 $|detx|$

$$H(x,\lambda) = detx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(|v_k|^2 - 1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i x_{ij}$$

不妨设 λ_i 均非零，否则极小值点处 $A_{ij} = 0$，那么 $detx = 0$.

$$x_{ij} = \frac{A_{ij}}{2\lambda}$$

$$if\ k \neq l, \sum_{j=1}^{n} x_{kj}A_{lj} = 0 \Rightarrow v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$$

所以极值点处 $detx = 1$, 显然为最大值点。

例题 1.162(17.4.4)

解

不妨设 $\frac{\partial f}{\partial x_3}(a) \neq 0$，定义 $F : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, f(x_1, x_2, x_3))$，$|J_F(a)| = |\frac{\partial f}{\partial x_3}(a)| \neq 0$，由逆映射定理，存在 a 的邻域 U，$F|_U$ 为 C^1 同胚，记 $V = F|_U$, 则 $F^{-1} : V \to U, f(x_1, x_2, x_3) = fF^{-1}(u_1, u_2, u_3) = u_3$，所以 a 点附近的新坐标系 (u_1, u_2, u_3) 下 $f = 0$ 为一个平面。

例题 1.163(18.1.2)

解

将函数按定义域分为 $(0, \epsilon)$ 和 $[\epsilon, 1]$ 两部分，在第一部分函数值在-1 到 1 之间，所以可以被面积为 2ϵ 的矩形覆盖；第二部分时一致收敛函数，由例 18.1.1 可以得出其外面积为 0. 令 $\epsilon \to 0$ 即可得到结论。

例题 1.164(18.1.7)

解

A Jordan 可测 $\Rightarrow \sigma(\partial A) = 0$

$$\overline{A} = A \cup \partial A \Rightarrow \sigma_+(\overline{A}) \leq \sigma_+(A) + \sigma_+(\partial A) = 0 \Rightarrow \sigma(\overline{A}) = 0$$

例题 1.165(18.1.8)

解

设像集为 $\{(x(t), y(t)), t \in [0, 1]\}$, 记 x, y 导函数的共同上界为 M.

对任意的 N, 将 $[0, 1]$ 等分为 N 份，$t_k = \frac{k}{N}$

$$\forall t \in [t_{k-1}, t_k], |x(t) - x(t_{k-1})| \leq \frac{M}{N}, |y(t) - y(t_{k-1})| \leq \frac{M}{N}$$

所以图像可以被 N 个边长为 $\frac{2M}{N}$ 的方形覆盖，所以 $\sigma_+(D) \le N\cdot(\frac{2M}{N})^2 = \frac{4M^2}{N}$，令 N 趋于无穷可知结论。

例题 1.166(18.1.11)

解

任何一个不可逆的方阵某一行都可以被其他行线性表出，考虑所有最后一行可以被前 $n-1$ 行线性表出的不可逆矩阵，记这个集合为 U。定义以下 C^1 映射：

$$F: R^{n\times(n-1)}\times R^{n-1}\to R^{n^2}$$

$$(X_1,\dots,X_{n-1},r_1,\dots,r_{n-1})\to(X_1,\dots,X_{n-1},\sum_{i=1}^{n-1}r_iX_i)$$

其为到 U 的满射，且该 C_1 映射像集零测，所以 U 是零测集。所以所有第 k 行都可以被其他行线性表出的矩阵构成的集合零测，所以它们的并零测，即有不可逆方阵集合零测。

1.15 第十五次习题课

1.15.1 作业题

例题 1.167(18.1.3)

解

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2). 显然.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 由(2), $\forall\epsilon > 0$, 存在有限个闭区间$I_1, \cdots, I_n$使得

$$D \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k \text{ 且 } \sum_{k=1}^{n} \sigma(I_k) < \frac{\epsilon}{2}.$$

将这其中的每个矩形向外扩张为一个开矩形, 且面积之差小于$\dfrac{\epsilon}{2n}$即可.

(3) $\Longrightarrow$ (1). 因为$\sigma(I_k) = \sigma(\overline{I_k})$, 故这显然. □

例题 1.168(18.1.6)

解

证明: 对可测集合D, 由Ex 18.1.5知, $\forall\epsilon > 0$, 存在紧致子集$E \subset D$, 使得$\sigma(D) = \sigma^+(D) \leq \sigma^+(E) + \sigma^+(D\backslash E)$, $\sigma^+(E) \geq \sigma(D) - \sigma^+(D\backslash E) > \sigma(D) - \epsilon$. 因为$\{D_n\}$构成了紧集$E$的一个开覆盖, 故存在$N$, 使得$E \subset D_N$, 从而$\forall n > N$, $\sigma(D_n) = \sigma^+(D_n) \geq \sigma(D_N) \geq \sigma^+(E) > \sigma(D) - \epsilon$. 又$\sigma(D_n) \leq \sigma(D)$, 故$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(D_n) = \sigma(D)$. □

例题 1.169(18.1.10)

解

证明: $\forall \epsilon > 0$, $\forall n$, 存在有限个能够覆盖E_n的开区间$I_{n1}, \cdots, I_{nk_n}$, 且满足

$$\sum_{i=1}^{k_n} |I_{ni}| < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

记$U_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} I_i$是开集, 则$U_1, \cdots, U_n, \cdots$构成$E$的一个开覆盖, 它有有限子覆盖, 即有有限个开矩形$J_1, \cdots, J_m$可以覆盖E, 且满足

$$\sum_{i=1}^{m} |J_i| \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} |I_i| < \epsilon.$$

由Ex 18.1.3, $\sigma(E) = 0$. □

例题 1.170(18.2.2)

解

证明: 注意到对任意可测子集D, χ_D可积, 且

$$\iint \chi_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma(D).$$

故由Ex 18.2.1立得. □

注记: 以上两题的结论在概率论中比较十分常见. 其中Ex 18.2.1在取n个集合时可以用来证明容斥原理和它的一些相关不等式.

例题 1.171(18.2.4)

解

证明: 因D_1可测, χ_{D_1}可积. 由于$f \cdot \chi_D$可积, 故$f \cdot \chi_{D_1} = f \cdot \chi_D \cdot \chi_{D_1}$作为可积函数的积, 仍然可积. □

例题 1.172(18.2.6)

解

证明: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得$\forall Q \in B_\delta(P)$, $|f(P) - f(Q)| < \epsilon$. 则$\forall r < \delta$,

$$\left| \frac{1}{\sigma(B_r(P))} \int_{B_r(P)} f \mathrm{d}\sigma - f(P) \right| \le \frac{1}{\sigma(B_r(P))} \int_{B_r(P)} |f(Q) - f(P)| \mathrm{d}\sigma < \epsilon.$$

□

例题 1.173(18.2.5)

解

5. 若$f \equiv 0$，显然成立

假定 $\sup f > 0$，$\forall \varepsilon \le \frac{1}{2}\sup f$，$\exists x \in D$ 使得 $f(x) \ge \sup f - \varepsilon > 0$。

又因为f连续，因此$\exists I_\varepsilon$，使得 $\forall y \in I_\varepsilon$，有 $f(y) \ge \sup f - 2\varepsilon > 0$

那么

$$\int_D f^n \, d\sigma \ge \int_{I_\varepsilon} f^n \, d\sigma \ge \int_{I_\varepsilon} (\sup f - 2\varepsilon)^n \, d\sigma = (\sup f - 2\varepsilon)^n \sigma(I_\varepsilon)$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_D f^n \, d\sigma\right)^{\frac{1}{n}} \ge \lim_{n\to\infty}\left((\sup f - 2\varepsilon)^n \sigma(I_\varepsilon)\right)^{\frac{1}{n}} = \sup f - 2\varepsilon.$$

由ε任意知，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_D f^n \, d\sigma\right)^{\frac{1}{n}} \ge \sup f$.

另一方面，$\int_D f^n \, d\sigma \le (\sup f)^n \sigma(D)$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_D f^n \, d\sigma\right)^{\frac{1}{n}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\left((\sup f)^n \sigma(D)\right)^{\frac{1}{n}} = \sup f$.

例题 1.174(18.2.9)

解 对于平面上一个分割 π，我们利用 $\underline{S}_\pi(g) \le \underline{S}_\pi(h) \le \overline{S}_\pi(h) \le \overline{S}_\pi(f)$ 即得 h 可积.

例题 1.175(18.2.10)

解

10. $\forall \epsilon>0$，取 $\delta>0$ 使得 $\forall$ 分割 λ 的 $\|\lambda\|<\delta$，有

$$\left|\sum_{I_{kl}\in\lambda} f(\xi_{kl})\sigma(I_{kl})-\sum_{I_{kl}\in\lambda} f(\xi'_{kl})\sigma(I_{kl})\right|\le\epsilon$$

（ξ_{kl},ξ'_{kl} 为 I_{kl} 中任意两点）那么

$$\left|\sum_{I_{kl}\in\lambda}\frac{1}{f(\xi_{kl})}\sigma(I_{kl})-\sum_{I_{kl}\in\lambda}\frac{1}{f(\xi'_{kl})}\sigma(I_{kl})\right|$$

$$=\left|\sum_{I_{kl}\in\lambda}\frac{f(\xi'_{kl})-f(\xi_{kl})}{f(\xi_{kl})f(\xi'_{kl})}\sigma(I_{kl})\right|$$

$$\le M^2\left|\sum_{I_{kl}\in\lambda}(f(\xi'_{kl})-f(\xi'_{kl}))\sigma(I_{kl})\right|\le M^2\epsilon$$

$M=\sup\left|\frac{1}{f}\right|<+\infty$.

这样就有 $\left|\overline{S}_\lambda(\frac{1}{f})-\underline{S}_\lambda(\frac{1}{f})\right|\le\epsilon$

从而 $\frac{1}{f}$ 在 D 上可积.

例题 1.176(18.2.11)

解

证明: 据Ex 18.1.6及Ex 18.2.2, 我们要证明$E := \overline{D} \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^\circ \right)$是一个零测集, 那么就有$\sigma(D) = \sigma(\overline{D}) = \sigma(\overline{D} \setminus E) = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n^\circ) = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n)$.

注意到

$$
\begin{aligned}
E &= \left[\partial D \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^\circ \right)^c \right] \bigcup \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^\circ \right)^c \right] \\
&= \partial D \bigcup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[D_n \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^\circ \right)^c \right] \right\} \\
&\subset \partial D \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial D_n \right),
\end{aligned}
$$

因此E也有界. 由E的定义知它还是闭集, 故E是紧集. 由于$D, D_1, \cdots, D_n, \cdots$均可测, 故它们的边界测度均为零. 而$E$能够被它们完全包含, 根据Ex 18.1.10, 立即有$\sigma(E) = 0$. □

注记: 以上证明的所有的结论, 将成为以后Lebesgue积分时十分自然的结果, 其中18.2.7结论将用来定义(如在Lebesgue测度上)任意函数的积分.

例题 1.177(18.3.3)

解

3. 单调函数不连续点可数, Lebesgue 零测

例题 1.178(18.3.4)

解

4. Cantor 集 C 包含在 2^{n-1} 个长度为 $\frac{1}{3^{n-1}}$ 区间中, 因此
$\sigma(C) \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \to 0$.

例题 1.179(18.3.2)

解

证明: 容易发现

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(\varphi) &= \sup_{\pi_x}\sum_{\pi_x}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k}(\varphi)(x_k-x_{k-1}) \\
&= \sup_{\pi_x}\sum_{\pi_x}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k}\left\{\sup_{\pi_y}\sum_{\pi_y}\inf_{y_{l-1}\le y\le y_l}(f)(y_l-y_{l-1})\right\}(x_k-x_{k-1}) \\
&\ge \sup_{\pi_x}\sum_{\pi_x}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k}\left\{\sup_{\pi_y}\sum_{\pi_y}m_{kl}(f)(y_l-y_{l-1})\right\}(x_k-x_{k-1}) \\
&\ge \sup_{\pi_x}\sum_{\pi_x}\sup_{\pi_y}\sum_{\pi_y}m_{kl}(f)(y_l-y_{l-1})(x_k-x_{k-1}) \\
&\ge \sup_{I_{kl}}\sum_{I_{kl}}m_{kl}(f)(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1}) \\
&= \underline{S}(f).
\end{aligned}
$$

同理也有$\overline{S}(\varphi)\le\overline{S}(f)$. 由$f$的可积性即得$\varphi$的可积性, 且两者积分值相等; 同理也有$\psi$可积且与$f$的积分值相等. □

注记: 本题说明了累次积分与多重积分的关系.

例题 1.180(18.3.5)

解

证明: 不妨设D是一个紧集, 否则依据Ex 18.1.5的证明过程, 我们可以选取一个可测紧集$D'\subset D$, 且$\sigma(D')>0$. 若$\int_D f\mathrm{d}\sigma=0$, 由Ex 18.2.8, D_n均为Jordan零测. 由Ex 18.1.10, 紧集D作为可数个Jordan零测集的并, 它也是零测集. 矛盾. □

例题 1.181(18.3.6)

解

证明: 将Thm 15.31中各个一维区间换为二维区间即可. □

例题 1.182(18.3.7)

解

证明: 由Ex 18.2.4, 右侧各个积分均有意义. 设f有界M, 则由Ex 18.1.6, 有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int f(\chi_D-\chi_{D_n})\mathrm{d}\sigma\right|\le M\lim_{n\to\infty}\sigma(D)-\sigma(D_n)=0.$$

□

例题 1.183(18.3.8)

解

证明: 必要性是显然的, 下面只证明充分性. 由于E为Lebesgue零测集, 故可以取到一列区间$\{I_n\}$覆盖E, 且$\sum\sigma(I_n)<\epsilon/2$, $\forall\epsilon>0$. 我们可以不妨将每个区间适当扩大为开区间$\tilde{I}_n$, 使得$\sum\sigma(\tilde{I}_n)<\epsilon$, 且$\{\tilde{I}_n\}$仍然覆盖$E$. 因为$E$为紧集, 故存在有限子覆盖, 这就说明$\sigma^+(E)<\sum_{i=1}^{N}\sigma^+(\tilde{I}_n)<\epsilon$. □

例题 1.184(18.3.9)

解

证明: 由Ex 18.2.8, $D_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$是可数个Jordan零测集之并. 由Cor 18.24的证明过程可见它就是Lebesgue零测的. □

例题 1.185(18.3.10)

解

(1) 广义 Cantor 集, 类似例 14.4.3 可知稠密性. 假设 $J=[a,b]$. 注意到若 $J\in\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, 那么必然 $\exists n\in\mathbb{N}$ 使得 $J\subset I_n$, 那么若 $J\not\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, 则 $J\not\subset I_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. 分三种情况考虑:

  (i) $a\in I_m, b\in I_n(m\ne n)$. 那么 I_m 右端点必然严格小于 I_n 左端点. 由稠密性可知存在 $x\in I_l$ $(\exists l\in\mathbb{N})$ 位于么 I_m 右端点与 I_n 左端点之间, 因此 $I_l\subset J$;

  (ii) $a\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, b\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$. 由稠密性可知存在 $x\in I_n$ $(\exists n\in\mathbb{N})$ 使得 $x\in J$, 因此 $I_n\subset J$;

  (iii) a,b 分别在 $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ 内外. 不妨设 $a\in I_n$ $(\exists n\in\mathbb{N})$ 而 $b\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, 考虑 I_n 的右端点 c 必然严格小于 b. 由稠密性可知存在 $x\in I_l$ $(\exists l\in\mathbb{N})$ 位于么 c 与 b 之间, 因此 $I_l\subset[c,b]\subset J$.

(2) 对于任意分割 π, $\forall J_i\in\pi$, 必有

$$J_i\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$$

或者

$$\exists n\in\mathbb{N},\quad J_i\supset I_n.$$

(3) 若 $J_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, 那么这些 J_i 的总长度不大于 $\frac{1}{2}$; 若 $J_i \subset I_n$, 那么 $M_i - m_i = 1$. 因此

$$\overline{S}_\pi(f) - \underline{S}_\pi(f) \geq \sum_{J_i \not\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \frac{1}{2}.$$

(4) 按定义, 分 I_n 内部、端点、外部三处讨论导数.

例题 1.186(18.4.1)

解

证明: 考虑线性映射 $x = \varphi(u) = uy^{-1}$, 则它连续且 C^1. 可以计算 $J(u) = |\det(\mathrm{d}\varphi(u))| = |\det y|^{-n}$. 则

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} f(xy)|\det x|^{-n}\mathrm{d}x = \int_{GL(n,\mathbb{R})} f(u)|\det xy^{-1}|^{-n} J(u)\mathrm{d}u = \int_{GL(n,\mathbb{R})} f(x)|\det x|^{-n}\mathrm{d}x.$$

若把 xy 换成 yx, 结论仍然成立, 只要采用 $x = \psi(v) = y^{-1}v$, 或将 yx 取转置即可. □

例题 1.187(18.4.2)

2、令 $g: (x,y,t) \to (u,v,s)$, $(x,y,t) \to (x+x', y+y', t+t'+\langle x, y'\rangle - \langle x', y\rangle$

$$dg|_{(x,y,t)}((\Delta x,0,0)) = (\Delta x, 0, \langle \Delta x, y'\rangle).$$

$$dg|_{(x,y,t)}((0,\Delta y,0)) = (0, \Delta y, -\langle x', \Delta y\rangle).$$

$$dg|_{(x,y,t)}((0,0,\Delta t)) = (0, 0, \Delta t).$$

dg 的矩阵为 $\qquad |Jg| = 1.$

$$\begin{pmatrix} id & & \\ & id & \\ \langle \Delta x, y'\rangle & -\langle x', \Delta y\rangle & id \end{pmatrix}$$

则 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(u,v,s)\,dudvds = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f((x,y,t)\cdot(x',y',t'))\,dxdyd$

解

例题 1.188(18.4.3)

2、令 $g:(x,y,t)\to(u,v,s)$，$(x,y,t)\to(x+x',y+y',t+t'+\langle x,y'\rangle-\langle x',y\rangle)$

$$dg|_{(x,y,t)}((\Delta x,0,0))=(\Delta x,0,\langle\Delta x,y'\rangle).$$

$$dg|_{(x,y,t)}((0,\Delta y,0))=(0,\Delta y,-\langle x',\Delta y\rangle).$$

$$dg|_{(x,y,t)}((0,0,\Delta t))=(0,0,\Delta t).$$

dg 的矩阵为 $\qquad |Jg|=1.$

$$\begin{pmatrix} id & & \\ & id & \\ \langle\Delta x,y'\rangle & -\langle x',\Delta y\rangle & id \end{pmatrix}$$

则 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(u,v,s)\,du\,dv\,ds=\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f((x,y,t)\cdot(x',y',t'))\,dx\,dy\,dt$

解

证明: (1) 令$x=\varphi(u)=\dfrac{u}{t}$, 则$\varphi$是连续$C^1$映射(因$t>0$). 可以计算, $J(u)=|\det(\mathrm{d}\varphi(u))|=\dfrac{1}{u^n}$. 则由换元公式,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(tx)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n} f(u)J(u)\mathrm{d}u=t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 第一式采用(1)相同的换元, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(tx)}{|x|^n}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n} t^n\frac{f(u)}{|u|^n}J(u)\mathrm{d}u=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)}{|x|^n}\mathrm{d}x,$$

其中$t>0$.

由于f在原点的一个邻域内恒为0, 故$d(0,\mathrm{supp}f)>0$. 令$u=\varphi(x)=\dfrac{x}{|x|^2}$, 则它在supp$f$上是$C^1$函数. 再利用换元公式就有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x/|x|^2)}{|x|^n}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|u|^n f(u)J(u)\mathrm{d}u=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)}{|x|^n}\mathrm{d}x,$$

其中已应用$J(u)=|u|^{-2n}$. □