

六、矩阵的特征值与特征向量

$n \times n$ 矩阵 A 其特征方程（本征方程）： $(A - I\lambda)x = 0$

有非零解时 $\det(A - I\lambda) = 0$

即： $\alpha_0 + \alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2 + \cdots + \alpha_n \lambda^n = 0$

有 n 个根 $\lambda_k \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n$ 矩阵 A 的特征值

每一根代入原方程，解得对应的特征向量

$x_k \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n$

工程中有多种振动问题，如桥梁或建筑物的振动，机械机件、飞机机翼的振动，及一些稳定性分析和相关分析可转化为求矩阵特征值与特征向量的问题。

1、幂法（和反幂法）

幂法主要用于求矩阵按模最大的特征值和相应的特征向量。设矩阵 A 的 n 个特征值 $\lambda_i (i=1,2,\dots,n)$ 满足：

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

相应的 n 个特征向量 $x_i (i=1,2,\dots,n)$ 线性无关。上述假设表明， λ_1 为非零单实根， x_1 为实特征向量。

幂法基本原理是：任取非零实向量 $u^{(0)}$ ，做迭代

$$u^{(k)} = Au^{(k-1)} = A^k u^{(0)} \quad (k=1,2,\dots)$$

则
$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_j^{(k+1)}}{u_j^{(k)}}$$

这里 $u_j^{(k)}$ 表示向量 $u^{(k)}$ 的第 j 个分量。

事实上, 由于 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 线性无关, 故可构成 R^n 中一组基, 于是

有 $u^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, 可得:

$$u^{(k)} = A^k \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i A^k x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k x_i = \lambda_1^k [\alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k x_i] \quad (7.1.4)$$

由于 $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$ ($i = 2, 3, \dots, n$), 当 $\alpha_1 \neq 0, (x_1)_j \neq 0$ 时有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_j^{(k+1)}}{u_j^{(k)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^{k+1} [\alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{k+1} x_i]_j}{\lambda_1^k [\alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k x_i]_j} = \lambda_1$$

又，当 k 充分大时有：

$$\boldsymbol{u}^{(k)} \approx \lambda_1^k \alpha_1 \boldsymbol{x}_1$$

这表明 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 是特征向量 \boldsymbol{x}_1 的一常数倍，即 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 近似于特征向量 \boldsymbol{x}_1 。

规范化：

幂法的主要缺点是： $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 有可能会发生上溢或下溢。克服这一缺点的常用方法是迭代每一步对向量 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 规范化。

引入函数 $\max(\boldsymbol{u}^{(k)})$ ，它表示取向量 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 中按模最大的分量，

迭代的每一步取 $\boldsymbol{v}^{(k)} = \frac{\boldsymbol{u}^{(k)}}{\max(\boldsymbol{u}^{(k)})}$ ，使得最大的分量为 1。

2、雅可比 (Jacobi) 方法

Jacobi法是计算实对称矩阵全部特征值和特征向量的一种古典方法。

$n \times n$ 矩阵 A 其特征方程 (本征方程): $(A - I\lambda)x = 0$

我们知道, 在相似变换下矩阵的特征值不变。Jacobi法的基本思想是选取一系列正交矩阵 J , 对 A 作正交相似变换, 即

$$A_{k+1} = J(p_k, q_k, \theta_k) A_k J^T(p_k, q_k, \theta_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

使得:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^* \end{bmatrix}$$

有非零解时 $\det(A^* - I\lambda) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}^* - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^* - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^* - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

易解得 $\lambda_k = a_{kk}^* \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$ 矩阵 A 的特征值

(1) 对称矩阵的旋转变换

看二阶的情况，对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & c \\ c & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & c \\ c & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

有非零解时 $\det(A - I\lambda) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & c \\ c & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

作相似变换，取旋转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad R^T = R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B = R^T A R &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & c \\ c & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$b_{11} = a_{11} \cos^2 \theta - 2c \sin \theta \cos \theta + a_{22} \sin^2 \theta$$

$$b_{22} = a_{11} \sin^2 \theta - 2c \sin \theta \cos \theta + a_{22} \cos^2 \theta$$

$$b_{12} = b_{21} = c(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{11} - a_{22}) \sin \theta \cos \theta$$

要使**B**为对角矩阵

$$b_{12} = b_{21} = c(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{11} - a_{22}) \sin \theta \cos \theta = 0$$

取
$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2c} \right)$$

原方程 $(A - I\lambda)x = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & c \\ c & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & c \\ c & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

通过作相似变换 $B = R^T A R = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$

化为解方程: $\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

易解得 矩阵 A 的特征值

$$\lambda_k = b_{kk} \quad k = 1, 2$$

N 阶对称矩阵的旋转变换

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 考虑矩阵

设A的非对角元中绝对值最大的为第p行第q列。

$$R = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos \theta & \sin \theta \\ & & & \sin \theta & \cos \theta \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

除了 p, q 行和 p, q 列交叉位置上的 4 个元素外, 其余元素均与单位矩阵相同

作正交相似变换: $A_1 = RAR^T$

由矩阵乘法不难得到 $A_1 = (a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$ 的元素为:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} \quad (i, j \neq p, q); \quad |$$

$$a_{pj}^{(1)} = a_{pj} \cos \theta + a_{qj} \sin \theta \quad (j \neq p, q);$$

$$a_{qj}^{(1)} = -a_{pj} \sin \theta + a_{qj} \cos \theta \quad (j \neq p, q);$$

$$a_{pp}^{(1)} = a_{pp} \cos^2 \theta + 2a_{pq} \sin \theta \cos \theta + a_{qq} \sin^2 \theta$$

$$a_{qq}^{(1)} = a_{qq} \sin^2 \theta - 2a_{pq} \sin \theta \cos \theta + a_{pp} \cos^2 \theta$$

$$a_{pq}^{(1)} = \frac{1}{2}(a_{qq} - a_{pp}) \sin 2\theta + a_{pq} \cos 2\theta$$

为使 A_1 的非对角元素 $a_{pq}^{(1)}$ 成为零,

只需取 θ 满足 $\tan 2\theta = \frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}} \left(|\theta| \leq \frac{\pi}{4} \right)$

这就完成了雅可比方法将一个非对角元化为零的计算过程

由矩阵 A 产生了矩阵 A_1

从而可类似得到矩阵 $A_2, A_3, \dots, A_k, \dots$

雅可比方法的收敛性

雅可比方法是求中小性稠密实对称矩阵的全部特征值和特征向量的较好方法。