

#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

第二章:有限

第三章: 置拼

群 (对称群)

第四章:李禄 及其表示

第五章: 三维 旋转群

第六章:量子力学中的群论

几个常用的符

### 物理学中的群论

前言

主讲: 陆晓

广西师范大学物理科学与技术学院

2013年11月5日



物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考书

第一章:抽象

第二章:有限 群的表示理论

第三章: 置换群(对称群)

第四章:李郡

第五章:三维 旋转群

第六章:量子 力学中的群论

几个常用的符 号 教 材: 物理学中的群论基础, A.W.约什

参考书: 物理学中的群论, 马中骐

参考书: 物理学中的群论(上下册),陶瑞宝

参考书: 群论, 孙洪洲

参考书: 群表示论的新途径,陈金全

参考书: 典型群及其在物理字上的应用,外邦

参考书: 群论及其在固体物理中的应用,徐婉棠



物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考书

第一章:抽象 群理论

第二章:有限 群的表示理论

第三章: 置换群(对称群)

群(对称群) 第四音, 李邦

第五章:三维

第六章:量子 力学中的群论

几个常用的符 号 教 材: 物理学中的群论基础, A.W.约什

参考书: 物理学中的群论,马中骐

参考书: 物理学中的群论(上下册),陶瑞宝

参考书: 群论, 孙洪洲

参考书: 群表示论的新途径,陈金全

参考书: 典型群及其在物理学上的应用,怀邦

参考书: 群论及其在固体物理中的应用,徐婉棠



物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考书

第一章:抽象 群理论

第二章:有限 群的表示理论

群的表示理论

群(N/M群) 第四音, 李邦

及其表示

第五章: 三维 旋转群

力学中的群论

教 材: 物理学中的群论基础, A.W.约什

参考书: 物理学中的群论,马中骐

参考书: 物理学中的群论(上下册),陶瑞宝

参考书: 群论,孙洪洲

参考书: 群表示论的新途径,陈金全

参考书: 典型群及其在物理学上的应用,怀邦

参考书: 群论及其在固体物理中的应用,徐婉棠



物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考书

第一章: 抽篆 群理论

第二章:有限 群的表示理论

第三章: 置换

第四章:李群

第五章: 三维 旋转群

第六章:量子 力学中的群论

几个常用的符 号 教 材: 物理学中的群论基础, A.W.约什

参考书: 物理学中的群论,马中骐

参考书: 物理学中的群论(上下册),陶瑞宝

参考书: 群论,孙洪洲

参考书: 群表示论的新途径,陈金全

参考书: 典型群及其在物理学上的应用,怀邦

参考书: 群论及其在固体物理中的应用,徐婉棠



物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考书 第一章:抽象

第二章:有限 群的表示理论

群的表示理论 第三音, 署拖

第五章: 三维 旋转群

第六章:量子 力学中的群论

几个常用的符 号 教 材: 物理学中的群论基础, A.W.约什

参考书: 物理学中的群论,马中骐

参考书: 物理学中的群论(上下册),陶瑞宝

参考书: 群论,孙洪洲

参考书: 群表示论的新途径,陈金全

参考书: 典型群及其在物理学上的应用,怀邦

参考书: 群论及其在固体物理中的应用,徐婉棠



物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考书 第一章:抽象 群理论

第二章:有限 群的表示理论

群的表示理论 第三章: 置换

第四章:李群

第五章: 三维 旋转群

第六章:量子力学中的群论

几个常用的符 号 教 材: 物理学中的群论基础, A.W.约什

参考书: 物理学中的群论,马中骐

参考书: 物理学中的群论(上下册),陶瑞宝

参考书: 群论,孙洪洲

参考书: 群表示论的新途径, 陈金全

参考书: 典型群及其在物理学上的应用, 怀邦

参考书: 群论及其在固体物理中的应用,徐婉棠



物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考书 第一章:抽象 群理论

第二章:有限 群的表示理论

第三章: 置换 群 ( 对称群 )

第四章:李群 及其表示

第五章:三维 旋转群

第六章: 量子 力学中的群论 几个常用的符 教 材: 物理学中的群论基础, A.W.约什

参考书: 物理学中的群论,马中骐

参考书: 物理学中的群论(上下册),陶瑞宝

参考书: 群论,孙洪洲

参考书: 群表示论的新途径, 陈金全

参考书: 典型群及其在物理学上的应用, 怀邦

参考书: 群论及其在固体物理中的应用,徐婉棠



物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考书 第一章:抽象 群理论

第二章:有限 群的表示理论

第三章: 置换 群(对称群)

第四章:李群 及其表示

第五章:三维 旋转群

第六章: 重于 力学中的群论 几个常用的符 教 材: 物理学中的群论基础, A.W.约什

参考书: 物理学中的群论,马中骐

参考书: 物理学中的群论(上下册),陶瑞宝

参考书: 群论,孙洪洲

参考书: 群表示论的新途径, 陈金全

参考书: 典型群及其在物理学上的应用, 怀邦

参考书: 群论及其在固体物理中的应用,徐婉棠



### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与麥考↑

第一章:抽象 群理论

第二章:有限 群的表示理论

群(对称群)

第四章:李群 及其表示

第五章:三维 旋转群

第六章:量子 力学中的群论

几个常用 号 1 第一章: 抽象群理论

② 第二章: 有限群的表示理论

③ 第三章: 置换群(对称群)

4 第四章:李群及其表示

5 第五章: 三维旋转群



### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

第二章:有限 群的表示理论

第三章: 置换群(对称群)

第五章: 三维

第六章:量子 力学中的群论

几个常用的 号 1 第一章: 抽象群理论

② 第二章:有限群的表示理论

③ 第三章: 置换群(对称群)

4 第四章:李群及其表示

5 第五章: 三维旋转群



#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考

第一章:抽象群理论

第二章:有限群的表示理论

第三章: 置换 群(对称群)

第五章: 三维

第六章:量子 力学中的群论

几个常用的 号 1 第一章: 抽象群理论

② 第二章: 有限群的表示理论

③ 第三章: 置换群(对称群)

4 第四章:李群及其表示

5 第五章: 三维旋转群



#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参与1 第一音, 抽象

第二章: 有阿

群的表示理论

第四章:李群 及其表示

第五章: 三维

第六章:量子 力学中的群论

几个常用的符 금 ● 第一章: 抽象群理论

② 第二章: 有限群的表示理论

③ 第三章: 置换群(对称群)

4 第四章: 李群及其表示

5 第五章: 三维旋转群



#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考‡

第一章: 抽象群理论

第二章:有限群的表示理论

第二草: 直拱 群(对称群)

第四章:李群 及其表示

第五章:三维 旋转群

第六章:量子 力学中的群论

几个常用 号 ● 第一章: 抽象群理论

② 第二章:有限群的表示理论

③ 第三章: 置换群(对称群)

4 第四章:李群及其表示

5 第五章: 三维旋转群



### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

教材与参考书

第一章:抽题 群理论

第二章:有限 群的表示理论

弗二早: 直换 群(对称群)

第四章:李群

第五章:三维 旋转群

第六章:量子 力学中的群论

几个常用的 号 1 第一章: 抽象群理论

② 第二章: 有限群的表示理论

③ 第三章: 置换群(对称群)

4 第四章: 李群及其表示

5 第五章: 三维旋转群



#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

### ● ∀: 对所有的

- 3: 存在



#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

第二章:有限 群的表示理论

第三章: 置换

群(对称群)

第五章:三维

第六章:量子 力学中的群论

几个常用的符

- ∀: 对所有的
- ∃: 存在
- ∈: 属于
- C: 包含于
- ⊕: 直和
- ⊗: 直积



#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

第二章:有限 群的表示理论

第三章: 置换 群(对称群)

第四章:李群 及其表示

第五章:三维 旋转群

第六章:量子 力学中的群论 ● ∀: 对所有的

● ∃: 存在

● ∈: 属于

• C: 包含于

● ⊕: 直和

● ⊗: 直积



#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

- ∀: 对所有的
- ∃: 存在
- ∈: 属于
- C: 包含于
- ⊕: 直和



#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

- ∀: 对所有的
- ∃: 存在
- ∈: 属于
- C: 包含于
- ⊕: 直和
- ⊗: 直积



#### 物理学中的群 论

主讲: 陆晓

● ∀: 对所有的

● ∃: 存在

● ∈: 属于

● C: 包含于

● ⊕: 直和

● ⊗: 直积



物理学中的群论

主讲; 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概

2

则

**§ 1.3**: 循环群 寸

301

子群

§ 1.5: 共轭元

§ 1.6: 商群 君

§ 1.7: 群的直和

### 物理学中的群论

第一章: 抽象群理论

主讲: 陆晓

广西师范大学物理科学与技术学院

2017年11月28日



物理学中的群论

主讲: 陆晓

#### 第一章:抽象群 理论

§ **1.1**: 群的基本概念 **§ 1.2**: 群的基本性

§ 1.3: 循环群 日 群

> § **1.4**: 陪集 正 子群

§ 1.5: 共轭元 素 类

\$1.6: 商群 群的 同构和同态\$1.7. 群的百和

### 1 第一章: 抽象群理论

- § 1.1: 群的基本概念
- § 1.2: 群的基本性质
- § 1.3: 循环群 子群
- § 1.4: 陪集 正规子群
- § 1.5: 共轭元素 类
- § 1.6: 商群 群的同构和同态
- § 1.7: 群的直积



### 第一章: 抽象群理论

物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性

版 **§ 1.3**: 循环群 子 群

**§ 1.4**: 陪集 正规 子群

素 类 § **1.6**: 商群 群的 同构和同态 ♣ § 1.1 群的基本概念

♣ §1.2 群的基本性质

♣ § 1.3 循环群 子群

♣ § 1.4 陪集 正规子群

♣ § 1.5 共轭元素 类

♣ § 1.6 商群 群的同构和同态

♣ § 1.7 群的直积



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章: 抽象郡 理论

**1.1**: 群的基本概念**1.2**: 群的基本性

§ **1.3**: 循环群 子 群

§ **1.4**: 陪集 正规 子群

素 类 § 1.6: 商群 群!

同构和同态 § **1.7**:群的直积

### ■ 第一章: 抽象群理论

- § 1.1: 群的基本概念
- § 1.2: 群的基本性质
  - § 1.3: 循环群 子群
- § 1.4: 陪集 正规子群
- § 1.5: 共轭元素 类
- § 1.6: 商群 群的同构和同态
- § 1.7: 群的直积



物理学中的群论

主讲·陆晓

§ 1.1: 群的基本概

### 定义1.1 (群的定义)

 $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_i, \dots\}$ 是一个非空集合,如果定义了任意两个 元素之间的合成法则(如乘法运算),并且G中的元素满足以下M个条件,则称G为一个群。



物理学中的群论

§ 1.1: 群的基本概

### 定义1.1 (群的定义)

 $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_i, \dots\}$ 是一个非空集合,如果定义了任意两个元素之间的<mark>合成法则</mark>(如乘法运算),并且G中的元素满足以下四个条件,则称G为一个群。

- ① 封闭性: 若:  $g_i, g_j \in G$ , 则:  $g_i g_j \in G$ ;
- ② 结合律: 若:  $g_i, g_j, g_k \in G$ , 则:  $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ :
- ③ 单位元: 存在单位元e,G中任意元素 $g_i$ 有:  $eg_i = g_i e = g_i$ ;
- 逆元: 任意元素 $g_i$ , 存在唯一的逆元 $g_i^{-1}$ , 有:  $g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e .$



```
物理学中的群论
```

§ 1.1: 群的基本概

### 定义1.1 (群的定义)

 $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_s, \dots\}$ 是一个非空集合,如果定义了任意两个元素之间的<mark>合成法则</mark>(如乘法运算),并且G中的元素满足以下四个条件,则称G为一个群。

- ① 封闭性: 若:  $g_i, g_j \in G$ , 则:  $g_i g_j \in G$ ;
- ② 结合律: 若:  $g_i, g_j, g_k \in G$ , 则:  $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ ;
- ③ 单位元: 存在单位元e,G中任意元素 $g_i$ 有:  $eg_i = g_i e = g_i$ ;
- ④ 逆元: 任意元素 $g_i$ ,存在唯一的逆元 $g_i^{-1}$ ,有:  $g_ig_i^{-1} = g_i^{-1}g_i = e$  。



```
物理学中的群论
```

主讲: 陆晓

理论 § **1.1**: 群的基本概 念

**§ 1.3**: 循环群 子 群

\$1.4: 陪集 正 子群\$1.5: 共轭元

素 类 § 1.6: 商群 群

§ **1.7**: 群的ī

### 定义1.1 (群的定义)

 $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_1, \dots\}$ 是一个非空集合,如果定义了任意两个元素之间的<mark>合成法则</mark>(如乘法运算),并且G中的元素满足以下四个条件,则称G为一个群。

- **①** 封闭性: 若:  $g_i, g_j \in G$ , 则:  $g_i g_j \in G$ ;
- ② 结合律: 若:  $g_i, g_j, g_k \in G$ , 则:  $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ ;
- ③ 单位元: 存在单位元e,G中任意元素 $g_i$ 有:  $eg_i = g_i e = g_i$ ;
- ② 逆元: 任意元素 $g_i$ ,存在唯一的逆元 $g_i^{-1}$ ,有: $g_ig_i^{-1} = g_i^{-1}g_i = e$  。



```
物理学中的群论
```

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 里论 **§1.1**:群的基本概

§ 1.2: 群的基本性质质§ 1.3: 循环群 子群

\$ **1.4**: 陪集 正规 子群 **\$ 1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群的同构和同态§ 1.7: 群的直积

### 定义1.1 (群的定义)

 $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_s, \dots\}$ 是一个非空集合,如果定义了任意两个元素之间的<mark>合成法则</mark>(如乘法运算),并且G中的元素满足以下四个条件,则称G为一个群。

- ① 封闭性: 若:  $g_i, g_j \in G$ , 则:  $g_i g_j \in G$ ;
- ② 结合律: 若:  $g_i, g_j, g_k \in G$ , 则:  $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ ;
- ③ 单位元: 存在单位元e,G中任意元素 $g_i$ 有:  $eg_i = g_i e = g_i$ ;
- ④ 逆元: 任意元素 $g_i$ ,存在唯一的逆元 $g_i^{-1}$ ,有:

$$g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e$$
 •



#### 物理学中的群论

## 主讲; 陆晓

第一章: 抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性

§ **1.3**: 循环群 于

群

**§ 1.4**: 階集 止系 子群

§ **1.5**: 共轭元 素 类

1.6: 商群 群的 同构和同态

§ **1.7**: 群的直积

- ➡ 群元素的个数叫做群的阶:
- 有限个元素的群叫做有限群, 无限个元素的群叫做无限群;无限群分为。 离散群——无穷个可数元素构成的群,
  - 连续群——无穷多个不可数元素构成的群。
- ➡ 群元素满足结合律,但不一定满足交换律:  $g_ig_j \neq g_jg_i$
- 阿贝尔(Able)群:  $g_ig_j=g_jg_i$  。



#### 物理学中的群论

# **主讲: 陆晓**

理 论 **§ 1.1**:群的基本概 念

质 § 1.3: 循环群 子

群 81.4. 陰保 正4

子群 **\$1.5**, 共銀元

> 类 .**6**:商群 群的 和同态

§ **1.7**: 群的直积

- ➡ 群元素的个数叫做群的阶;
- 有限个元素的群叫做有限群, 无限个元素的群叫做无限群;无限群分为 离散群——无穷个可数元素构成的群, 连续群——无穷多个不可数元素构成的群
- ➡ 群元素满足结合律,但不一定满足交换律:  $g_i g_i \neq g_i g_i$ :
- 阿贝尔(Able)群:  $g_ig_j = g_jg_i$  。



### 物理学中的群论

**主 讲: 陆 晓** 第一章: 抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概念
 § 1.2: 群的基本性质

§ **1.3**:循环群 子 胖 § **1.4**: 陪集 正规 子群

§ 1.5: 共轭元 素 类 & 1.6. 商群 群的

□ 同构和同态 § **1.7**: 群的直积

- ➡ 群元素的个数叫做群的阶;
- 有限个元素的群叫做有限群, 无限个元素的群叫做无限群,无限群分为: 离散群——无穷个可数元素构成的群, 连续群——无穷多个不可数元素构成的群。
- ➡ 群元素满足结合律,但不一定满足交换律:  $g_i g_j \neq g_j g_i$
- ➡ 阿贝尔(Able)群:  $g_ig_j = g_jg_i$  。



# 物理学中的群论

第一章: 抽象群 理论

**1.1**: 群的基本概念**8 1.2**: 群的基本性质

**3 1. 3**: 循环群 ナ 詳 § **1. 4**: 陪集 正规 子群

§ 1.5: 共轭元素 类§ 1.6: 商群 群的

§ **1.7**:群的

- ➡ 群元素的个数叫做群的阶;
- 有限个元素的群叫做有限群, 无限个元素的群叫做无限群,无限群分为: 离散群——无穷个可数元素构成的群, 连续群——无穷多个不可数元素构成的群。
- ➡ 群元素满足结合律,但不一定满足交换律:  $g_ig_j \neq g_jg_i$ ;
- ➡ 阿贝尔(Able)群:  $g_ig_j=g_jg_i$



物理学中的群论

**主 讲: 陆 晓** 第一章: 抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性质

8 **1.3**: 個外群 于 样 **8 1.4**: 陪集 正规 子群 **8 1.5**: 共轭元

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态

- ➡ 群元素的个数叫做群的阶;
- 有限个元素的群叫做有限群, 无限个元素的群叫做无限群;无限群分为: 离散群——无穷个可数元素构成的群,
  - 连续群——无穷多个不可数元素构成的群。
- ➡ 群元素满足结合律,但不一定满足交换律:  $g_ig_j \neq g_jg_i$ ;
- ➡ 阿贝尔(Able)群:  $g_ig_j = g_jg_i$  。



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

**1.1**: 群的基本概念**1.2**· 群的基本性

§ 1.3: 循环群

§ **1.4**: 陪集 正 子群

§ **1.5**: 共轭元 素 类

.**6**: 商群 群的

§ 1.7: 群的直和

### 例1.1 (数集)

- 全体正负整数(包括0),按加法构成群。而按乘法不构成 群,因为逆元不存在。
- ② 全体实数(包括0),接加法构成群。而按乘法不构成群,因 为0的逆元不存在。
- ③ 全体实数(不包括0),按乘法构成群。



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性

\$1.4: 陪集 正子群\$1.5: 共轭元

类 .6: 商群 群的 和同态

§ **1.7**:群的直移

### 例1.1 (数集)

- 全体正负整数(包括0),按加法构成群。而按乘法不构成 群,因为逆元不存在。
- ② 全体实数(包括0),按加法构成群。而按乘法不构成群,因 为0的逆元不存在。
- ③ 全体实数(不包括0),按乘法构成群



#### 物理学中的群论

主讲; 陆晓

理论 § **1.1**:群的基本概 念

8 **1.2**: 群的基本让质 **8 1.3**: 循环群 子群

§ 1.4: 陪集 正规 子群§ 1.5: 共轭元麥 光

#### 例1.1 (数集)

- 全体正负整数(包括0),按加法构成群。而按乘法不构成 群,因为逆元不存在。
- ② 全体实数(包括0),按加法构成群。而按乘法不构成群,因 为0的逆元不存在。
- 3 全体实数(不包括0),按乘法构成群。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

§ 1.1: 群的基本概

#### 例1.2 (三维空间反演)

$$e = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \sigma = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

群表:

$$\begin{array}{c|cc} & e & \sigma \\ \hline e & e & \sigma \\ \hline \sigma & \sigma & e \\ \end{array}$$

₩ 从群表可以看出该群满足群的四个条件。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

§ 1.1: 群的基本概

#### 例1.3 (四维空间反演)

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eρ e $\sigma$ 群表:  $\sigma$ ρ

e $\sigma$ 

 $\sigma$ 

☞ 群表可知: 满足群的四个条件



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ **1.1**:群的基本概 念

质

群

**3 1.4**: 附果 . 子群

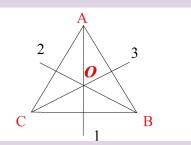
§ **1.5**: 共轭元

§ 1.6: 商群 群

§ 1.7: 群的直

#### 例1.4 (D<sub>3</sub>群)

正三角形全体对称操作:  $D_3 = \{e, a, b, k, l, m\}$ 



- e: 不变操作(单位元)
- a: 绕O轴转<sup>2π</sup><sub>3</sub>,
- b: 绕O轴转 $\frac{4\pi}{3}$ ,
- k: 绕1轴转π,
- l: 绕2轴转 $\pi$  ,
- m: 绕3轴转 $\pi$  。

☞ 群元素的乘积(操作积): 从右至左两个相继的操作。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群

§ 1.1: 群的基本概 念

质 § **1.3**:循环群 子

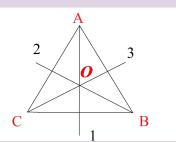
.. § **1.4**: 陪集 正规 子群

」 **■ 1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态

#### 例1.4 (D<sub>3</sub>群)

正三角形全体对称操作:  $D_3 = \{e, a, b, k, l, m\}$ 



- e: 不变操作(单位元),
- a: 绕O轴转 $\frac{2\pi}{3}$ ,
- b: 绕O轴转 $\frac{4\pi}{3}$ ,
- k: 绕1轴转 $\pi$ ,
- l: 绕2轴转π,
- *m*: 绕3轴转π。

☞ 群元素的乘积(操作积): 从右至左两个相继的操作。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群

\$1.1: 群的基本概念
 \$1.2: 群的基本概念

质 § 1.3: 循环群 子

群 § **1.4**: 陪集 正规

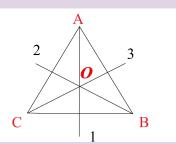
-子群 & **1.5**・共郷元

系 失 **§ 1.6**: 商群 群的

§ **1.7**:群的

#### 例1.4 (D<sub>3</sub>群)

正三角形全体对称操作:  $D_3 = \{e, a, b, k, l, m\}$ 



- e: 不变操作(单位元),
- a: 绕O轴转<sup>2π</sup>/<sub>3</sub>,
- b: 绕O轴转<sup>4π</sup>/<sub>3</sub>,
- k: 绕1轴转π,
- l: 绕2轴转π,
- *m*: 绕3轴转π。

■ 群元素的乘积(操作积): 从右至左两个相继的操作。



物理学中的群论

主讲; 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概 念

§ 1.2: 群的基本性 质

§ 1.3:循环群

§ 1.4: 陪集 ]] 子群

§ 1.5: 共轭元 素 举

§ 1.6: 商群 群 同构和同态

§ 1.7: 群的直移

- ➡ 封闭性: 两个对称操作的积仍然是对称操作
- ➡ 操作积满足结合律,
- $oldsymbol{\otimes}$  每个元素有逆元: e 自逆,a 与b 互逆,k,l,m 自逆。

- $k \mid k \mid l \mid m \mid e \mid a \mid b$ 
  - $l \mid l \mid m \mid k \mid b \mid e \mid a$
  - $m \mid m \mid k \mid l \mid a \mid b \mid e$



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ **1.1**: 群的基本概 念

质 8**1.2** WITH =

群

子群

§ 1.5: 共轭元 素 类

回构和回恋 § **1.7**: 群的直积

#### $D_3$ 群-续

- ➡ 封闭性:两个对称操作的积仍然是对称操作,
- ☞ 操作积满足结合律,
- 有单位元: e ,

 $m \mid m \mid k \mid l \mid a \mid b \mid e$ 



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ **1.1**: 群的基本概 念

质 § 1.3:循环群

§ **1.4**: 陪集 ① 子群

§ 1.5: 共轭元 素 类 § 1.6: 商群 群!

同构和同态 **\$1.7**: 群的直移

- ➡ 封闭性:两个对称操作的积仍然是对称操作,
- ☞ 操作积满足结合律,
- 有单位元: e ,



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群

§ **1.1**: 群的基本概 念

质 § **1.3**:循环群

§ **1.4**: 陪集 〕 子群

素 类 § 1.6: 商群 群的

§ **1.7**: 群的直和

- ➡ 封闭性:两个对称操作的积仍然是对称操作,
- ☞ 操作积满足结合律,



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

理论 \$1.1: 群的基本概

8 1.1: 併的基本概念8 1.2: 群的基本性

§**1.3**: 循环群 <sup>-</sup> 群

§ 1.4: 階集 正: 子群
§ 1.5, 共轭元

素 类 § **1.6**: 商群 群的 同构和同态

□ 内 内 内 向 必 § 1.7: 群 的 直 形

- ➡ 封闭性:两个对称操作的积仍然是对称操作,
- ☞ 操作积满足结合律,
- 每个元素有逆元: e 自逆, a 与b 互逆, k,l,m 自逆。



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群

§ 1.1: 群的基本概念

质 § 1.3: 循环群 寸

··· § **1.4**: 陪集 正规 子群

素 类 § **1.6**: 商群 群的

§ **1.7**: 群的直移

#### $D_3$ 群-续

➡ 群表:

- ➡ 封闭性:两个对称操作的积仍然是对称操作,
- ☞ 操作积满足结合律,
- 母 每个元素有逆元: e 自逆, a 与b 互逆, k,l,m 自逆。

	e			k	l	m
$\overline{e}$	e	a	b	k	l	m
b	b	e	a	l	m	k
a	a	a e b l	e	m	k	l
k	k	l	m	e	a	b
l	l	m	k	b		a

a

b

e

k

m

m



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ **1.1**: 群的基本概 念

质 § **1.3**:循环群 子 群

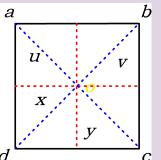
§ **1.4**: 陪集 正规 子群

**§1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态

## 例1.5 $(C_{4v}$ 群)

正方形对称操作:  $C_{4v} = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3, m_x, m_y, \sigma_u, \sigma_v\}$ 



- E: 不变操作(单位元),
- $C_4$ : 绕O轴转 $\frac{\pi}{2}$ ,
- $C_4^2$ : 绕O轴转 $\pi$ ,
- $C_4^3$ : 绕O轴转 $\frac{3\pi}{2}$ ,
- $m_x$ :  $2 \text{ } 2 \text{$
- $m_y$ : hy轴反射,
- $m_u$ : 沿u轴反射,
- $m_v$ : 沿v轴反射。

➡ 群元素的乘积(操作积): 从右至左两个相继的操作。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性

**§1.3**: 循环群 子 群

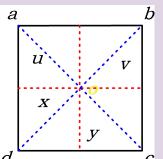
§ 1.4: 陪集 正规 子群
≤ 1 = #經元

**§1.5**: 共轭元 素 类

§ **1.7**:群的)

#### 例 $1.5 (C_{4v}$ 群)

正方形对称操作:  $C_{4v} = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3, m_x, m_y, \sigma_u, \sigma_v\}$ 



- E: 不变操作(单位元),
- $C_4$ : 绕O轴转 $\frac{\pi}{2}$ ,
- $C_4^2$ : 绕O轴转 $\pi$ ,
- $C_4^3$ : 绕O轴转 $\frac{3\pi}{2}$ ,
- *m<sub>x</sub>*: 沿*x*轴反射,
- *m<sub>y</sub>*: 沿*y*轴反射,
- *m<sub>u</sub>*: 沿*u*轴反射,
- m<sub>v</sub>: 沿v轴反射。

☞ 群元素的乘积(操作积): 从右至左两个相继的操作。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论 **§1.1**:群的基本概

**念** § **1.2**: 群的基本性 质 § **1.3**: 循环群 子

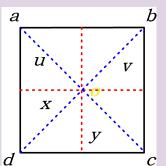
群 **§ 1.4**: 陪集 正规 子群

**§ 1.5**: 共轭元 素 类 **§ 1.6**. 商群 群的

§ **1.7**: 群的直

#### 例 $1.5 (C_{4v}$ 群)

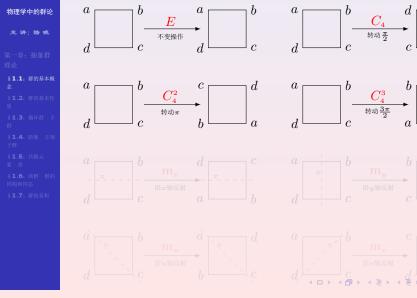
正方形对称操作:  $C_{4v} = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3, m_x, m_y, \sigma_u, \sigma_v\}$ 



- E: 不变操作(单位元),
- $C_4$ : 绕O轴转 $\frac{\pi}{2}$ ,
- $C_4^2$ : 绕O轴转 $\pi$ ,
- $C_4^3$ : 绕O轴转 $\frac{3\pi}{2}$ ,
- m<sub>x</sub>: 沿x轴反射,
- $m_y$ : 沿y轴反射,
- *m<sub>u</sub>*: 沿*u*轴反射,
- m<sub>v</sub>: 沿v轴反射。

☞ 群元素的乘积(操作积): 从右至左两个相继的操作。

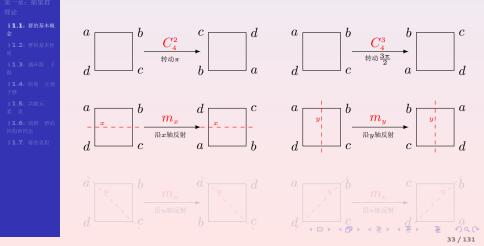




32 / 131

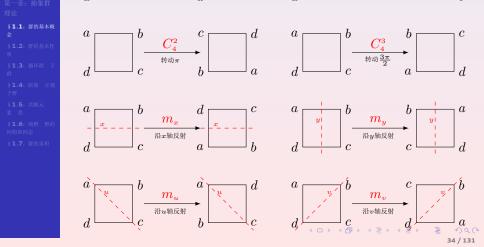


# § 1.1: 群的基本概念





# § 1.1: 群的基本概念





物理学中的群论

主讲; 陆晓

第一章:抽象群 理论 **§1.1**:群的基本概

**念** § **1.2**: 群的基本性 质 § **1.3**: 循环群 子

··· § **1.4**: 陷集 正规 子群 § **1.5**: 共轭元

\$ 1.6: 商群 群的 同构和同态 \$ 1.7 群的声和 群元素的乘积(操作积),例如:  $C_4 m_x = \sigma_u$ 

$$C_4 m_x \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} = C_4 \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}$$

	E	$C_4$	$C_{4}^{2}$	$C_4^3$			$\sigma_u$	$\sigma_v$
E				$C_4^3$			$\sigma_u$	$\sigma_v$
$C_4^3$	$C_{4}^{3}$		$C_4$	$C_4^2$	$\sigma_v$	$\sigma_u$		
$C_4^2$	$C_{4}^{2}$			$C_4$			$\sigma_v$	$\sigma_u$
$C_4$	$C_4$	$C_4^2$	$C_4^3$		$\sigma_u$	$\sigma_v$		
		$\sigma_v$		$\sigma_u$		$C_4^2$	$C_4^3$	$C_4$
		$\sigma_u$		$\sigma_v$	$C_4^2$		$C_4$	$C_4^3$
$\sigma_u$	$\sigma_u$		$\sigma_v$		$C_4$	$C_4^3$		$C_4^2$
$\sigma_v$	$\sigma_v$		$\sigma_u$				$C_4^2$	



物理学中的群论 主讲: 陆晓 § 1.1: 群的基本概

$C_{4v}$ 群表	$\mid E \mid$	$C_4$	$C_{4}^{2}$	$C_4^3$	$m_x$	$m_y$	$\sigma_u$	$\sigma_v$
E	E	$C_4$	$C_4^2$	$C_4^3$	$m_x$	$m_y$	$\sigma_u$	$\sigma_v$
$C_4^3$	$C_4^3$	E	$C_4$	$C_4^2$	$\sigma_v$	$\sigma_u$	$m_x$	$m_y$
$C_4^2$	$C_4^2$	$C_4^3$	E	$C_4$	$m_y$	$m_x$	$\sigma_v$	$\sigma_u$
$C_4$	$C_4$	$C_4^2$	$C_4^3$	E	$\sigma_u$	$\sigma_v$	$m_y$	$m_x$
$m_x$	$m_x$	$\sigma_v$	$m_y$	$\sigma_u$	E	$C_4^2$	$C_4^3$	$C_4$
$m_y$	$m_y$	$\sigma_u$	$m_x$	$\sigma_v$	$C_4^2$	E	$C_4$	$C_4^3$
$\sigma_u$	$\sigma_u$	$m_x$	$\sigma_v$	$m_y$	$C_4$	$C_4^3$	E	$C_4^2$
$\sigma_v$	$\sigma_v$	$m_y$	$\sigma_u$	$m_x$	$C_4^3$	$C_4$	$C_4^2$	E



# 目录

物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群理论

§ **1.1**: 群的基本概念

§ 1.2: 群的基本性 质

群 § **1.4**: 陪集 正规

子群 § **1.5**: 共轭元

系 央 **§ 1.6**: 商群 群的 同构和同态

rototoroを **§ 1.7**: 群的直移

#### ① 第一章: 抽象群理论

- § 1.1: 群的基本概念
- § 1.2: 群的基本性质
- § 1.3: 循环群 子群
- § 1.4: 陪集 正规子群
- § 1.5: 共轭元素 类
- ▶ § 1.6: 商群 群的同构和同态
- § 1.7: 群的直积



物理学中的群论

主讲; 陆晓

理论 § **1.1**:群的基本概

**§1.2**: 群的基本性 质 **§1.3**: 循环群 子

畔 **§ 1.4**: 陪集 正频 子群 **§ 1 5**. 共細元

素 类 § 1.6: 商群 群的 同构和同态 性质1

群G中单位元是唯一的。

## 性质2

群G中逆元是唯一的。

### 性质3

设 $G = \{g_i\}$ 是一个群,则有:

$$(g_i^{-1})^{-1} = g_i$$
 ,  $(g_ig_j)^{-1} = g_j^{-1}g_i^{-1}$  .

#### 证明.

略



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论 §**1.1**:群的基本概

念 **§ 1.2**: 群的基本性 质

群 **§ 1.4**: 陪集 正规 子群 **§ 1.5**: 共轭元

**§1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.7: 群的

#### 定理1.1 (重排列定理)

设群 $G = \{g_o\}$ , $\forall u \in G$ ,作序列:  $\Delta \equiv \{ug_o \mid g_o \in G\}$ ,则有 $\Delta = G$ : u的作用只是将群G的元素重新排列了一次。

#### 证明

(1) 群G中任意元素 $g_{\beta}$ 属于序列 $\Delta$ 。

$$\because u^{-1}g_{\beta} = g_{\gamma} \in G \text{ , (封闭性)}$$

$$\therefore ug_{\gamma} = g_{\beta} \in \Delta \ .$$

(2) 序列 $\Delta$ 中只包含群G中的元素一次。

反证法: 假设 $q_{\beta}$ 在序列 $\Delta$ 中出现两次,即

$$g_{\scriptscriptstyleeta} = u g_{\scriptscriptstyle\gamma}, \ \ g_{\scriptscriptstyleeta} = u g_{\scriptscriptstyle\delta}, \ \ g_{\scriptscriptstyle\gamma} 
eq g_{\scriptscriptstyle\delta}$$

那么: 
$$g_{\gamma} = u^{-1}g_{\beta}$$
,  $g_{\delta} = u^{-1}g_{\beta}$ 

所以:  $g_{\gamma} = g_{\delta} = u^{-1}g_{\beta}$ , 与假设相矛盾; 故原命题成立



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 里论 **§1.1**:群的基本概

**§ 1.2**: 群的基本性 质 **§ 1.3**: 循环群 子 群 **§ 1.4**: 陪集 正规 子群

**千群 § 1.5**: 共轭元 素 类 **§ 1.6**: 商群 群的

§**1.7**: 群的〕

#### 定理1.1 (重排列定理)

设群 $G = \{g_o\}$ , $\forall u \in G$ ,作序列:  $\Delta \equiv \{ug_o \mid g_o \in G\}$ ,则有 $\Delta = G$ : u的作用只是将群G的元素重新排列了一次。

#### 证明

- (1) 群G中任意元素 $g_{\beta}$ 属于序列 $\Delta$ 。
- $\therefore u^{-1}g_{\beta}=g_{\gamma}\in G$ ,(封闭性)
- $\therefore ug_{\gamma} = g_{\beta} \in \Delta \ .$
- (2) 序列 $\Delta$ 中只包含群G中的元素一次。

反证法: 假设 $g_s$ 在序列 $\Delta$ 中出现两次,即:

 $g_{\scriptscriptstyleeta} = u g_{\scriptscriptstyle\gamma}, \;\; g_{\scriptscriptstyleeta} = u g_{\scriptscriptstyle\delta}, \;\; g_{\scriptscriptstyle\gamma} 
eq g_{\scriptscriptstyle\delta}$ 

那么:  $g_{\gamma} = u^{-1}g_{\beta}$ ,  $g_{\delta} = u^{-1}g_{\beta}$ 

所以:  $g_{\gamma} = g_{\delta} = u^{-1}g_{\beta}$ , 与假设相矛盾; 故原命题成立



物理学中的群论

主讲: 陆晓

念 **§ 1.2**: 群的基本性 质 § **1.3**: 循环群 子

§ 1.4: 陪集 子群§ 1.5: 共轭 素 类

※ 1.6: 商群 同构和同态※ 1.7: 群的

## 定理1.1 (重排列定理)

设群 $G = \{g_o\}$ , $\forall u \in G$ ,作序列:  $\Delta \equiv \{ug_o \mid g_o \in G\}$ ,则有 $\Delta = G$ : u的作用只是将群G的元素重新排列了一次。

#### 证明

(1) 群G中任意元素 $g_{\beta}$ 属于序列 $\Delta$ 。

$$\because u^{\scriptscriptstyle -1}g_{\scriptscriptstyle\beta}=g_{\scriptscriptstyle\gamma}\in G\,\,,\,\,\text{(封闭性)}$$

$$\therefore ug_{\gamma} = g_{\beta} \in \Delta \ .$$

(2) 序列 $\Delta$ 中只包含群G中的元素一次。

反证法: 假设 $g_s$ 在序列 $\Delta$ 中出现两次, 即:

$$g_{\beta} = ug_{\gamma}, \quad g_{\beta} = ug_{\delta}, \quad g_{\gamma} \neq g_{\delta}$$

那么: 
$$g_{\gamma} = u^{-1}g_{\beta}$$
,  $g_{\delta} = u^{-1}g_{\beta}$ 

所以:  $g_{\gamma} = g_{\delta} = u^{-1}g_{\delta}$ , 与假设相矛盾; 故原命题成立。



# 目录

第一章:抽象和 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性质

§ 1.3:循环群 子 群

\$ **1.4**: 陪集 正规 子群

素 类 § **1.6**: 商群 群的 同构和同态

§ 1.7: 群的主

#### ■ 第一章: 抽象群理论

- § 1.1: 群的基本概念
- § 1.2: 群的基本性质
- § 1.3: 循环群 子群
- § 1.4: 陪集 正规子群
- § 1.5: 共轭元素 类
- § 1.6: 商群 群的同构和同态
- § 1.7: 群的直积



物理学中的群论

§ 1.3: 循环群 子

#### 一、循环群

#### 定义1.2 (循环群)

设g是群G中的任意元素,作序列:

$$e, g, g^2, g^3, \ldots, g^k, \ldots$$
;

此序列必属于群G,若序列为有限,则必存在有限的正整数n使 得:  $g^n = e$  ,不难验证,集合:

$$H = \{e, g, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}\},\$$

- ☞ 循环群是阿贝尔群,但阿贝尔群不一定是循环群,
- 最小的正整数n叫做元素的阶:
- 循环群的元素都属于群G,故循环群是群G的一个子群



物理学中的群论

§ 1.3: 循环群 子

#### 一、循环群

#### 定义1.2 (循环群)

设g是群G中的任意元素,作序列:

$$e, g, g^2, g^3, \ldots, g^k, \ldots$$
;

此序列必属于群G,若序列为有限,则必存在有限的正整数n使 得:  $g^n = e$  ,不难验证,集合:

$$H = \{e, g, g^2, g^3, \ldots, g^{n-1}\},\$$

- ☞ 循环群是阿贝尔群, 但阿贝尔群不一定是循环群:
- 最小的正整数n叫做元素的阶
- 循环群的元素都属于群G,故循环群是群G的一个子群。



物理学中的群论

§ 1.3: 循环群 子

#### 一、循环群

#### 

设g是群G中的任意元素,作序列:

$$e, g, g^2, g^3, \ldots, g^k, \ldots$$
;

此序列必属于群G,若序列为有限,则必存在有限的正整数n使 得:  $g^n = e$  ,不难验证,集合:

$$H = \{e, g, g^2, g^3, \ldots, g^{n-1}\},\$$

- ☞ 循环群是阿贝尔群,但阿贝尔群不一定是循环群;
- $\blacksquare$  最小的正整数n叫做元素的阶;
- ☞ 循环群的元素都属于群*G*,故循环群是群*G*的一个子群。



物理学中的群论

§ 1.3: 循环群 子

#### 一、循环群

#### 定义1.2 (循环群)

设g是群G中的任意元素,作序列:

$$e, g, g^2, g^3, \ldots, g^k, \ldots$$
;

此序列必属于群G,若序列为有限,则必存在有限的正整数n使 得:  $g^n = e$  ,不难验证,集合:

$$H = \{e, g, g^2, g^3, \ldots, g^{n-1}\},\$$

- ☞ 循环群是阿贝尔群, 但阿贝尔群不一定是循环群:
- $\blacksquare$  最小的正整数n叫做元素的阶;
- 循环群的元素都属于群G,故循环群是群G的一个子群。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

用一早: 抽象群 理论 §**1.1**: 群的基本概

念 **§ 1.2**: 群的基本性 所

§ 1.3: 循环群 子群§ 1.4: 陪集 正规

←群 **1.5**: 共轭元

§ 1.6: 商群 群的同构和同态

E

# 二、子群

#### 定义1.3 (子群)

一个群G的非空子集H,若也按群G的合成法则(乘法)构成群 (满足群的四个条件),则称H为群G的子群。

- 单位元和群G自身是群G的一个平庸子群;
- ☞ 非平庸的子群称为真子群;
- ⇒ H是群G子群的判据一
- ①  $\Xi$ :  $\forall g_i, g_j \in H$ ,  $\pi$ :  $g_i g_j \in H$ ,
  - ② 若:  $\forall g_i \in H$ ,有:  $g_i^{-1} \in H$ ;
- ⇒ H是群G子群的判据二:
  - 若:  $\forall g_i, g_j \in H$ ,有:  $g_i g_i^{-1} \in H$  。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

**ゎ**一草: 畑家群 里论 §**1.1**: 群的基本概 念

质 § **1.3**:循环群 子 群

§ **1.4**: 陪集 正规 子群 § **1.5**: 共轭元

\$1.6:商群 群的同构和同态\$1.7:群的百积

二、子群

### 定义1.3 (子群)

一个群G的非空子集H,若也按群G的合成法则(乘法)构成群(满足群的四个条件),则称H为群G的子群。

- 单位元和群G自身是群G的一个平庸子群;
- ⇒ 非平庸的子群称为真子群;
- ⇒ H是群G子群的判据一:
  - ①  $\Xi$ :  $\forall g_i, g_j \in H$ ,  $\pi$ :  $g_i g_j \in H$
  - ② 若:  $\forall g_i \in H$ ,有:  $g_i^{-1} \in H$
- $\Rightarrow H$ 是群G子群的判据二:
  - 若:  $\forall g_i, g_j \in H$ ,有:  $g_i g_j^{-1} \in H$



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 里论 §**1.1**:群的基本概念

§ 1.3: 循环群 子群§ 1.4: 陪集 正规

· **1.5**: 共轭元 : **4**: 类

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态 二、子群

### 定义1.3 (子群)

一个#G的非空子集H,若也按#G的合成法则(乘法)构成群 (满足群的四个条件),则称H为#G的<mark>子</mark>群。

- ➡ 非平庸的子群称为真子群;
- $\blacksquare$  H 是群G 子群的判据一:
  - ① 若:  $\forall g_i, g_j \in H$ ,有:  $g_i g_j \in H$
  - ② 若:  $\forall g_i \in H$ ,有:  $g_i^{-1} \in H$
- ⇒ H是群G子群的判据二:
  - 若:  $\forall g_i, g_j \in H$ ,有:  $g_i g_i^{-1} \in H$



物理学中的群论

主讲: 陆晓

#一早: 加家研 理论 **§1.1**: 群的基本概 念 **§1.2**: 群的基本性

**§ 1.3: 循环群** 子群**§ 1.4:** 陪集 正规 子群

§ **1.7**:群的

二、子群

#### 定义1.3 (子群)

一个#G的非空子集H,若也按#G的合成法则(乘法)构成群 (满足群的四个条件),则称H为群G的子群。

- ➡ 非平庸的子群称为真子群;
- 母 H是群G子群的判据一:
  - ① 若:  $\forall g_i, g_j \in H$ , 有:  $g_i g_j \in H$ ,
  - ② 若:  $\forall g_i \in H$ , 有:  $g_i^{-1} \in H$ ;
- H是群G于群的判据二: 若:  $\forall g_i, g_j \in H$ ,有:  $g_i g_j^{-1} \in H$



物理学中的群论

主讲: 陆晓

6 □ 草: 抽象群里论 § 1.1: 群的基本概念 \$ 1.2: 群的基本性

**§ 1.3**: 循环群 子群**§ 1.4**: 陪集 正规子群

§**1.7**: 群的

二、子群

#### 定义1.3 (子群)

一个群G的非空子集H,若也按群G的合成法则(乘法)构成群(满足群的四个条件),则称H为群G的子群。

- 单位元和群G自身是群G的一个平庸子群;
- ➡ 非平庸的子群称为真子群;
- 母 *H*是群*G*子群的判据一:
  - ① 若:  $\forall g_i, g_j \in H$ , 有:  $g_i g_j \in H$ ,
  - ② 若:  $\forall g_i \in H$ ,有:  $g_i^{-1} \in H$ ;
- H是群G子群的判据二: 若:  $\forall g_i, g_j \in H$ ,有:  $g_i g_j^{-1} \in H$  。



### §1.3: 循环群 子群

物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

\$ 1.1: 研的基本概念\$ 1.2: 群的基本性

§ 1.3:循环群 子群

1.4: 陪集 正规 子群

素 类 § 1.6: 商群 群

| **1.7**: 群的直积

### 例1.6 (几个例子)

- 全体整数群是全体实数群的子群;
- ②  $D_3$ 群的子群: 2阶子群:  $H_1 = \{e, k\}$ , 3阶子群:  $H_2 = \{e, a, b\}$ :
- ③  $C_{4v}$  群的子群: 5个2阶子群:

$$H_1 = \{E, C_4^2\}, H_2 = \{E, m_x\}, H_3 = \{E, m_y\}, H_4 = \{E, \sigma_u\}, H_5 = \{E, \sigma_v\};$$

3个4阶子群:

$$H_6 = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}, H_7 = \{E, C_4^2, m_x, m_y\}$$
  
$$H_8 = \{E, C_4^2, \sigma_u, \sigma_v\} .$$

为什么没有3阶群、5阶群、6阶群?

问题:如何计算子群的个数?



### §1.3: 循环群 子群

#### 物理学中的群论

```
主 讲: 陆 晓
第一章: 抽象群
理论
```

§ **1.1**: 群的基本概 念 **§ 1.2**: 群的基本性

§ 1.3: 循环群 子 群 § 1.4. 陰保 正柳

§ **1.4**: 陪集 正规 子群 **§ 1.5**: 共轭元

素 类 § **1.6**: 商群 群的 同构和同态

回构和回恋 **§ 1.7**:群的直积

### 例1.6 (几个例子)

- 全体整数群是全体实数群的子群;
- ②  $D_3$ 群的子群: 2阶子群:  $H_1 = \{e, k\}$ , 3阶子群:  $H_2 = \{e, a, b\}$ ;
- ③  $C_{4v}$  群的子群: 5个2阶子群:

$$\begin{split} H_1 &= \{E, C_4^2\}, \ H_2 = \{E, m_x\}, \ H_3 = \{E, m_y\} \\ H_4 &= \{E, \sigma_u\}, \ H_5 = \{E, \sigma_v\}; \\ &= \{E, \sigma_v\}, \ H_5 = \{E, \sigma_v\}; \end{split}$$

3个4阶子群:

$$\begin{split} H_6 &= \{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}, \ H_7 = \{E, C_4^2, m_x, m_y\} \\ H_8 &= \{E, C_4^2, \sigma_u, \sigma_v\} \enspace . \end{split}$$

为什么没有3阶群、5阶群、6阶群?

问题:如何计算子群的个数?



### §1.3: 循环群 子群

#### 物理学中的群论

```
主 讲: 陆 晓
第一章: 抽象群
理论
§1.1: 群的基本概
念
§1.2: 群的基本概
```

质 **§ 1.3: 循环群 子** 群 **§ 1.4:** 陪集 正规 子群

\$1.4: 陪集 正规子群\$1.5: 共轭元素 类\$1.6: 商群 群的

§ **1.7**:群的国

#### 例1.6 (几个例子)

- 全体整数群是全体实数群的子群;
- ②  $D_3$ 群的子群: 2阶子群:  $H_1 = \{e, k\}$ , 3阶子群:  $H_2 = \{e, a, b\}$ ;
- ③  $C_{4v}$  群的子群: 5个2阶子群:

$$\begin{split} H_1 &= \{E, C_4^2\}, \ H_2 = \{E, m_x\}, \ H_3 = \{E, m_y\}, \\ H_4 &= \{E, \sigma_u\}, \ H_5 = \{E, \sigma_v\}; \end{split}$$

3个4阶子群:

$$H_6 = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}, H_7 = \{E, C_4^2, m_x, m_y\},$$
  
 $H_8 = \{E, C_4^2, \sigma_u, \sigma_v\}$  .

为什么没有3阶群、5阶群、6阶群?

问题:如何计算子群的个数?



# 目录

物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章: 抽象程 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性质

§ **1.3**:循环群 子 群

§ 1.4: 陪集 正规 子群

素 类 § 1.6: 商群 群! 同构和同态

回构和回念 **§ 1.7**:群的直积

### ① 第一章: 抽象群理论

- § 1.1: 群的基本概念
- § 1.2: 群的基本性质
- § 1.3: 循环群 子群
- § 1.4: 陪集 正规子群
- § 1.5: 共轭元素 类
- ▶ § 1.6: 商群 群的同构和同态
- § 1.7: 群的直积



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

念 **§ 1.2**: 群的基本性 质

\* 1.4: 陪集 正规

**子群** § **1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群的同构和同态
§ 1.7. 群的百积

### 一、陪集

### 定义1.4 (陪集)

 $\partial H = \{e, h_2, \dots, h_m\}$  是群G的一个子群,对于某个元素 $u \in G$ ,但 $u \notin H$ ;

集合 $uH = \{u, uh_2, \dots, uh_n\}$  称为H的一个左陪集, 集合 $Hu = \{u, h_2u, \dots, h_nu\}$  称为H的一个右陪集。

- ➡ H的右陪集和左陪集有同样的性质:
- ➡ 左陪集uH和右陪集Hu不一定相等



物理学中的群论

§ 1.4: 陪集 正规

#### 一、陪集

### 定义1.4 (陪集)

 $UH = \{e, h_2, \dots, h_m\}$  是群G的一个子群,对于某个元素 $u \in G$ ,但 $u \notin H$ ;

集合 $uH = \{u, uh_2, \dots, uh_n\}$  称为H的一个左陪集, 集合 $Hu = \{u, h_2u, \dots, h_nu\}$  称为H的一个右陪集。

- ⊜ 当取不同的 $u \in G$ ,  $u \notin H$ 时,可以得到不同的陪集;
- ➡ H的右陪集和左陪集有同样的性质:
- 左陪集uH和右陪集Hu不一定相等。



物理学中的群论

§ 1.4: 陪集 正规

#### 一、陪集

### 定义1.4 (陪集)

集合 $uH = \{u, uh_2, \dots, uh_m\}$  称为H的一个<mark>左陪集,</mark> 集合 $Hu = \{u, h_2u, \dots, h_mu\}$  称为H的一个<u>右陪集。</u>

- 母 H的右陪集和左陪集有同样的性质;
  - 左陪集uH和右陪集Hu不一定相等。



物理学中的群论

§ 1.4: 陪集 正规

#### 一、陪集

#### 定义1.4 (陪集)

 $UH = \{e, h_2, \dots, h_m\}$  是群G的一个子群,对于某个元素 $u \in G$ ,但 $u \notin H$ ;

集合 $uH = \{u, uh_2, \dots, uh_m\}$  称为H的一个<mark>左陪集,</mark> 集合 $Hu = \{u, h_2u, \dots, h_mu\}$  称为H的一个<u>右陪集。</u>

- В 当取不同的u ∈ G, u ∉ H时,可以得到不同的陪集;
- 母 H的右陪集和左陪集有同样的性质;
- ➡ 左陪集uH和右陪集Hu不一定相等。



物理学中的群论

```
主讲: 陆晓
```

```
第一章: 抽象群
理论
§1.1: 群的基本
```

```
念
§ 1.2: 群的基本性
```

### 例1.7 $(C_{4v}$ 群的一个子群 $H = \{E, m_x\}$ 的陪集)

$$P_1 \iff C_4 H = \{C_4, \sigma_u\}, \quad HC_4 = \{C_4, \sigma_v\};$$

$$P_2 \iff C_4^3 H = \{C_4^3, \sigma_v\}, HC_4^3 = \{C_4^3, \sigma_u\};$$

$$m_y H = \{m_y, C_4^2\}, \quad H m_y = \{m_y, C_4^2\},$$

$$\sigma_u H = \{\sigma_u, C_4\}, \quad H\sigma_u = \{\sigma_u, C_4^3\},$$

$$\sigma_v H = \{\sigma_v, C_4^3\}, \ H\sigma_v = \{\sigma_v, C_4\}.$$

$$(3) C_{4v} = H \bigcup P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3.$$



```
物理学中的群论
```

# 主讲; 陆晓

第一章:抽象群理论

§ **1.1**: 群的基本概 念

质

8 1.3: 個外群 丁 群

§ 1.4: 陪集 正规 子群

₽## \$ **1.5**: 共轭元

№ 元 §1.6: 商群 君

§ **1.7**: 群的直移

#### 例1.7 $(C_{4v}$ 群的一个子群 $H = \{E, m_x\}$ 的陪集)

$$P_1 \iff C_4H = \{C_4, \sigma_u\}, HC_4 = \{C_4, \sigma_v\};$$

$$P_2 \iff C_4^3 H = \{C_4^3, \sigma_v\}, HC_4^3 = \{C_4^3, \sigma_u\};$$

$$P_3 \iff C_4 H = \{C_4, m_y\}, \quad HC_4 = \{C_4, m_y\}, \quad m_y H = \{m_y, C_4^2\}, \quad Hm_y = \{m_y, C_4^2\}$$

$$\sigma_u H = \{\sigma_u, C_4\}, \quad H\sigma_u = \{\sigma_u, C_4^3\},$$

$$\sigma_v H = \{\sigma_v, C_4^3\}, \ H\sigma_v = \{\sigma_v, C_4\}.$$

#### ☞ 注意:

(1) 任意左(右)陪集与子群没有共同元素;

(2) 任意两个左(右)陪集要么完全相同,要么完全不同;

 $(3) C_{4v} = H \bigcup P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3.$ 



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群

§ **1.1**: 群的基本概 念

质

§ 1.3: 循环群 子群

§ 1.4: 陪集 正规

Γ₩ 8 **1.5**, 非銀元

§ 1.6: 商群 君

§ **1.7**: 群的直移

#### 例1.7 $(C_{4v}$ 群的一个子群 $H = \{E, m_x\}$ 的陪集)

$$ightharpoonup P_1 \iff C_4H = \{C_4, \sigma_u\}, \quad HC_4 = \{C_4, \sigma_v\};$$

$$P_2 \iff C_4^3 H = \{C_4^3, \sigma_v\}, \quad HC_4^3 = \{C_4^3, \sigma_u\};$$

$$P_{3} \iff C_{4}^{2}H = \{C_{4}^{2}, m_{y}\}, \quad HC_{4}^{2} = \{C_{4}^{2}, m_{y}\},$$

$$m_{y}H = \{m_{y}, C_{4}^{2}\}, \quad Hm_{y} = \{m_{y}, C_{4}^{2}\},$$

$$\sigma_{u}H = \{\sigma_{u}, C_{4}\}, \quad H\sigma_{u} = \{\sigma_{u}, C_{4}^{3}\},$$

$$\sigma_{u}H = \{\sigma_{u}, C_{4}^{3}\}, \quad H\sigma_{u} = \{\sigma_{u}, C_{4}^{3}\},$$

- (1) 任意左(右) 陪集与子群没有共同元素;
- (2) 任意两个左(右)陪集要么完全相同,要么完全不同;
  - $(3) C_{4v} = H \bigcup P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3 \circ$



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群

**§ 1.1**: 群的基本概念

质

群 **§1.4**: 陪集 正规

**9 1.4:** 陷果 止別 子群

§ **1.5**: 共轭元

§ 1.6: 商群 群! 同构和同态

回构和回恋 § **1.7**:群的直积

#### 例1.7 $(C_{4v}$ 群的一个子群 $H = \{E, m_x\}$ 的陪集)

$$ightharpoonup P_1 \iff C_4H = \{C_4, \sigma_u\}, \quad HC_4 = \{C_4, \sigma_v\};$$

$$P_2 \iff C_4^3 H = \{C_4^3, \sigma_v\}, HC_4^3 = \{C_4^3, \sigma_u\};$$

$$P_{3} \iff C_{4}^{2}H = \{C_{4}^{2}, m_{y}\}, \quad HC_{4}^{2} = \{C_{4}^{2}, m_{y}\},$$

$$m_{y}H = \{m_{y}, C_{4}^{2}\}, \quad Hm_{y} = \{m_{y}, C_{4}^{2}\},$$

$$\sigma_{u}H = \{\sigma_{u}, C_{4}\}, \quad H\sigma_{u} = \{\sigma_{u}, C_{4}^{3}\},$$

$$\sigma_{v}H = \{\sigma_{v}, C_{3}^{3}\}, \quad H\sigma_{v} = \{\sigma_{v}, C_{4}\},$$

- (1) 任意左(右) 陪集与子群没有共同元素;
- (2) 任意两个左(右) 陪集要么完全相同, 要么完全不同:
  - $(3) C_{4v} = H \bigcup P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3 \circ$



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群

§ **1.1**: 群的基本概 念

则 **§ 1.3**: 循环群 子

§ 1.4: 陪集 正规

**子群** 

§ 1.6: 商群 群!
同构和同态

同构和同态 § **1.7**:群的直积

#### 例1.7 $(C_{4v}$ 群的一个子群 $H = \{E, m_x\}$ 的陪集)

$$ightharpoonup P_1 \iff C_4H = \{C_4, \sigma_u\}, \quad HC_4 = \{C_4, \sigma_v\};$$

$$P_2 \iff C_4^3 H = \{C_4^3, \sigma_v\}, \quad HC_4^3 = \{C_4^3, \sigma_u\};$$

$$P_3 \iff C_4^2 H = \{C_4^2, m_y\}, \quad HC_4^2 = \{C_4^2, m_y\},$$

$$m_y H = \{m_y, C_4^2\}, \quad H m_y = \{m_y, C_4^2\},$$
  
 $\sigma_u H = \{\sigma_u, C_4\}, \quad H \sigma_u = \{\sigma_u, C_4^3\},$ 

$$\sigma_v H = \{\sigma_v, C_4^3\}, \ H\sigma_v = \{\sigma_v, C_4\} \, . \label{eq:sigma_v}$$

- (1) 任意左(右) 陪集与子群没有共同元素:
- (2) 任意两个左(右) 陪集要么完全相同, 要么完全不同
- $(3) C_{4v} = H \bigcup P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3 \circ$



物理学中的群论

```
主讲: 陆晓
```

第一章: 抽象群 理论 § 1.1: 群的基本概 念 & 1.2. 群的基本概

质 **\$1.3**: 循环群 子 群

**§ 1.4**: 陪集 正规 子群

§ **1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6:商群 群的同构和同态
§ 1.7:群的直积

#### 例1.7 ( $C_{4v}$ 群的一个子群 $H = \{E, m_x\}$ 的陪集)

$$ightharpoonup P_1 \iff C_4H = \{C_4, \sigma_u\}, \quad HC_4 = \{C_4, \sigma_v\};$$

$$P_2 \iff C_4^3 H = \{C_4^3, \sigma_v\}, HC_4^3 = \{C_4^3, \sigma_u\};$$

$$P_3 \iff C_4^2 H = \{C_4^2, m_y\}, \quad HC_4^2 = \{C_4^2, m_y\},$$

$$m_y H = \{m_y, C_4^2\}, \quad Hm_y = \{m_y, C_4^2\},$$

$$\sigma_u H = \{\sigma_u, C_4\}, \quad H\sigma_u = \{\sigma_u, C_4^3\},$$

$$\sigma_v H = \{\sigma_v, C_4^3\}, \ H\sigma_v = \{\sigma_v, C_4\}.$$

- (1) 任意左(右) 陪集与子群没有共同元素;
- (2) 任意两个左(右) 陪集要么完全相同, 要么完全不同;
  - $(3) C_{4v} = H \bigcup P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3 \circ$



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群理论

3 1.1: 群的基本领念

质 **§ 1.3**。循环群 日

群

§ 1.4: 陪集 正规 子群

§**1.5**: 共轭元

§ 1.6: 商群 群 同构和同态

§ 1.7:群的直移

### 陪集的性质(以左陪集为例)

#### 性质1

➡ 陪集中不含有子群H的元素

证明: 假设陪集中含有子群H的元素

即:  $uh_i \in H$ , 则有 $uh_i = h_k$ , 右乘 $h_i^{-1}$ , 得:

 $u = h_k h_i^{-1} \in H$ 

这与假设相矛盾,因此陪集中不含有子群H的元素。

#### 性质2

➡ 陪集不构成群。

证明:由性质1知道,陪集中不含有单位元,所以陪集不构成群。



#### 11.42.334

理**论**§1.1: 群的基本概念

§1.2: 群的基本性

质 **§ 1.3**:循环群 子 群

§ **1.4**: 陪集 正规 子群

紫 类 **1.6**: 商群 群的 同构和同本

回构和同态 § **1.7**:群的直积

#### 陪集的性质(以左陪集为例)

#### 性质1

○ 陪集中不含有子群H的元素。

证明: 假设陪集中含有子群H的元素,

即:  $uh_j \in H$ , 则有 $uh_j = h_k$ , 右乘 $h_i^{-1}$ , 得:

$$u = h_k h_i^{-1} \in H$$

这与假设相矛盾,因此陪集中不含有子群H的元素。

#### 性质2

☞ 陪集不构成群。

证明:由性质1知道,陪集中不含有单位元,所以陪集不构成群



§ 1.4: 陪集 正规

#### W. 11.45 W.

### 性质1

□ 陪集中不含有子群H的元素。

陪集的性质(以左陪集为例)

证明: 假设陪集中含有子群H的元素,

即:  $uh_j \in H$ , 则有 $uh_j = h_k$ , 右乘 $h_j^{-1}$ , 得:

$$u = h_k h_i^{-1} \in H$$

这与假设相矛盾, 因此陪集中不含有子群H的元素。

#### 性质2

☞ 陪集不构成群。

证明:由性质1知道,陪集中不含有单位元,所以陪集不构成群。



物理学中的群论

主讲; 陆晓

第 章: 加家研 理论§ 1.1: 群的基本版 念

质 § **1.3**: 循环群 于 群

§ 1.4: 陪集 正规 子群
≤ 1.5. 共知元

素 类 § **1.6**: 商群 群的 可构和同态

3 1.7: 研的E

### 定理1.2 (陪集定理)

子群<u>H的两个左(右)陪集或者有完全相同的元素,或者没有任何</u> 公共元素。

#### 证明

假设有两个不同的左陪集 $uH \neq vH$ ,它们有公共元素 $uh_t = vh_m$ 

$$v^{-1}u = h_m h_i^{-1} \in H$$

由重排列定理有

$$(v^{-1}u)H = H$$

因此: uH = vH。 证毕

推论: 群G一定可以划分为子群H以及它的所有不同陪集的集合。



物理学中的群论

主讲; 陆晓

理论 § 1.1:群的基本概 念 § 1.2:群的基本性

质 **§ 1.3**:循环群 子 群 **§ 1.4**: 陪集 正规

**§ 1.4**:階集 止 子群 § **1.5**:共轭元 素 类

§ **1.7**:群的

#### 定理1.2 (陪集定理)

子群<u>H</u>的两个左(右)陪集或者有完全相同的元素,或者没有任何 公共元素。

#### 证明

假设有两个不同的左陪集 $uH \neq vH$ ,它们有公共元素 $uh_i = vh_m$ ,左乘 $v^{-1}$ ,右乘 $h_i^{-1}$ ,得:

$$v^{{\scriptscriptstyle -1}} u = h_{{\scriptscriptstyle m}} h_{{\scriptscriptstyle l}}^{{\scriptscriptstyle -1}} \in H$$

由重排列定理有:

$$(v^{-1}u)H = H$$

因此: uH = vH。 证毕

推论: 群G一定可以划分为子群H以及它的所有不同陪集的集合。



物理学中的群论

全讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论 §**1.1**:群的基本概 念

\$1.2: 群的基本性 质 \$1.3: 循环群 子 群 **\$1.4: 陪**集 正规

**子群 § 1.5**: 共轭元 素 类 **§ 1.6**: 商群 群的

§ **1.7**: 群的直

#### 定理1.3 (拉格朗日定理)

设H是群G的一个子群,则群G的阶g一定是子群H的阶h的整数 倍,即:I=g/h:正整数I称为子群H在群G中的指数。

且1-1是陪集的个数。

|回答:如何计算子群的个数?

#### 证明

由e作 "陪集" eH = H,取 $u_1 \in G, u_1 \notin H$ ,作陪集 $u_1H$ ; 如果 $H, u_1H$ 不能穷尽群G,再作陪集 $u_2H$ ,…, $u_kH$ ,一直到穷尽群G。可得一系列的陪集: $H, u_1H, u_2H, \ldots, u_kH$ ;因为子群H和陪集中元素个数都Eh,所以(k+1)h=g,即陪集的个数:k=g/h-1=I-1。 证毕推论1:群G的阶与任意元素阶的商为一整数。



物理学中的群论 主讲·陆晓

§ 1.4: 陪集 正规

定理1.3 (拉格朗日定理)

设H是群G的一个子群,则群G的阶g一定是子群H的阶h的整数 倍, 即: I = g/h; 正整数I称为子群H在群G中的指数。

且I-1是陪集的个数。

回答:如何计算子群的个数?



物理学中的群论

§ 1.4: 陪集 正规

#### 定理1.3 (拉格朗日定理)

设H是群G的一个子群,则群G的阶g一定是子群H的阶h的整数 倍,即:I=g/h;正整数I称为子群H在群G中的指数。

且I-1是陪集的个数。

回答:如何计算子群的个数?

#### 证明

由e作 "陪集" eH = H,取 $u_1 \in G, u_1 \notin H$ ,作陪集 $u_1H$ ;如果 $H, u_1H$ 不能穷尽群G,再作陪集 $u_2H$ ,…, $u_kH$ ,一直到穷尽群G。可得一系列的陪集: $H, u_1H, u_2H, …, u_kH$ ;因为子群H和陪集中元素个数都是h,所以(k+1)h=g,即陪集的个数:k=g/h-1=I-1。 证毕

推论1:群G的阶与任意元素阶的商为一整数。

推论2: 若群G的阶为素数时, G没有真子群, 而且G必为循环群



物理学中的群论

§ 1.4: 陪集 正规

#### 定理1.3 (拉格朗日定理)

设H是群G的一个子群,则群G的阶g一定是子群H的阶h的整数 倍,即:I=g/h;正整数I称为子群H在群G中的指数。

且I-1是陪集的个数。

回答:如何计算子群的个数?

#### 证明

由e作 "陪集" eH = H,取 $u_1 \in G, u_1 \notin H$ ,作陪集 $u_1H$ ;如果 $H, u_1H$ 不能穷尽群G,再作陪集 $u_2H$ ,…, $u_kH$ ,一直到穷尽群G。可得一系列的陪集: $H, u_1H, u_2H, …, u_kH$ ;因为子群H和陪集中元素个数都是h,所以(k+1)h=g,即陪集的个数:k=g/h-1=I-1。 证毕推论1:群G的阶与任意元素阶的商为一整数。

推论2: 若群G的阶为素数时,G没有真子群,而且G必为循环群。



#### 物理学中的群论

#### 主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ **1.1**: 群的基本标

§ **1.2**: 群的基本性

§ 1.3:循环群 子

§ 1.4: 陪集 正规 子畔

「## **1.5**: 共轭元

素 类

同构和同态

§ 1.7: 群的直和

### 二、正规子群

正义1.5 (止规士群)

以H是群G的一个 f 群,取 $u \in G$ ,但 $u \notin H$ ,看;

uH = Hu,  $\mathfrak{R}$ :  $uHu^{-1} = H$ ,

则称且为群G的止规于群。



#### 物理学中的群论

主讲; 陆晓

第一章:抽象群 理论

念 § **1.2**: 群的基本性 质

8 **1.4**: 階集 止身 子群

\* 大 § 1.6: 商群 群 同构和同杰

回构和回念 **§ 1.7**:群的直积

### 二、正规子群

#### 定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群,取 $u \in G$ ,但 $u \notin H$ ,若:uH = Hu ,或: $uHu^{-1} = H$  ,

### 则称H为群G的正规子群。

- ☞ 阿贝尔群的子群为正规子群, 逆不成立;
- 单纯群:不含正规子群的群;
- ➡ 半单纯群:不含阿贝尔正规子群的群



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

理论 § **1.1**: 群的基本概 念

质 **§ 1.3**: 循环群 群

**§ 1.4**: 陪集 正规 子群

素 类 § **1.6**: 商群 群的 同构和同态

回构和回念 § **1.7**:群的直移

#### 二、正规子群

#### 定义1.5 (正规子群)

- 则称H为群G的正规子群。
  - ☞ 阿贝尔群的子群为正规子群, 逆不成立;
  - 单纯群:不含正规子群的群;
- 半单纯群:不含阿贝尔正规子群的群
- 正规子群的性质



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

理论 § **1.1**:群的基本概 念

质 § 1.3:循环群 子 群 **§ 1.4: 陪集** 正规

**§ 1.4**: 階集 止₹ 子群 § **1.5**: 共轭元

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态§ 1.7 群的 古和

#### 二、正规子群

#### 定义1.5 (正规子群)

则称H为群G的正规子群。

- ☞ 阿贝尔群的子群为正规子群, 逆不成立;
- ➡ 单纯群:不含正规子群的群;
- ➡ 半单纯群:不含阿贝尔正规子群的群。



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

质 **§ 1.3**:循环群 子 群

新 失 § 1.6: 商群 群的 同构和同态 二、正规子群

#### 定义1.5 (正规子群)

则称H为群G的正规子群。

- ☞ 阿贝尔群的子群为正规子群, 逆不成立;
- ➡ 单纯群:不含正规子群的群;
- ➡ 半单纯群:不含阿贝尔正规子群的群。



#### 物理学中的群论

主讲: 陆晓

お一早: 加家群 里论 **§1.1**: 群的基本機 念

质 **§ 1.3**:循环群 子 群 **§ 1.4**: 陪集 正规

**§ 1.4**: 陪集 正規 子群 **§ 1.5**: 共轭元 素 类

\$1.6: 商群 群的 同构和同态\$1.7: 群的百积

#### 二、正规子群

#### 定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群,取 $u \in G$ ,但 $u \notin H$ ,若:uH = Hu, 或:  $uHu^{-1} = H$ ,

### 则称H为群G的正规子群。

- ☞ 阿贝尔群的子群为正规子群, 逆不成立;
- ➡ 单纯群:不含正规子群的群;
- ➡ 半单纯群:不含阿贝尔正规子群的群。

- ➡ 正规子群的任何两个陪集的内积仍然是该子群的陪集;
- ➡ 正规子群与其任一陪集的内积等于陪集自身。



物理学中的群论

§ 1.4: 陪集 正规

### **完** 义1.5 (正:

二、正规子群

定义1.5 (正规子群)

 $\underline{U}H$ 是群 $\underline{G}$ 的一个子群,取 $\underline{u} \in \underline{G}$ ,但 $\underline{u} \notin \underline{H}$ ,若:  $\underline{u}H = \underline{H}\underline{u}$  ,或:  $\underline{u}H\underline{u}^{-1} = \underline{H}$  ,

则称H为群G的正规子群。

- ☞ 阿贝尔群的子群为正规子群, 逆不成立;
- ➡ 单纯群:不含正规子群的群;
- ➡ 半单纯群:不含阿贝尔正规子群的群。

- ➡ 正规子群的任何两个陪集的内积仍然是该子群的陪集;
- ➡ 正规子群与其任一陪集的内积等于陪集自身



物理学中的群论 主讲·陆晓

§ 1.4: 陪集 正规

定义1.5 (正规子群)

二、正规子群

设H是群G的一个子群,取 $u \in G$ ,但 $u \notin H$ ,若: uH = Hu ,  $\mathfrak{P}: uHu^{-1} = H$  ,

则称H为群G的正规子群。

- ☞ 阿贝尔群的子群为正规子群, 逆不成立:
- ➡ 单纯群:不含正规子群的群:
- ➡ 半单纯群:不含阿贝尔正规子群的群。

- ➡ 正规子群的任何两个陪集的内积仍然是该子群的陪集;
- ☞ 正规子群与其任一陪集的内积等于陪集自身。



# 目录

物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象都理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性

§ **1.3**:循环群 号群

§ 1.4: 陪集 正统 子群 § 1.5: 共轭元

**素 类** § **1.6**: 商群 群的 同构和同态

同构和同态 § **1.7**:群的直积

### ■ 第一章: 抽象群理论

- § 1.1: 群的基本概念
- § 1.2: 群的基本性质
- § 1.3: 循环群 子群
- § 1.4: 陪集 正规子群
- §1.5: 共轭元素 类
- § 1.6: 商群 群的同构和同态
- § 1.7: 群的直积



物理学中的群论

§ 1.5: 共轭元

### 一、共轭元素

### 定义1.6 (共轭元素)

设f.h是群G的两个元素,若有元素 $g \in G$ ,使 $gfg^{-1} = h$ ,则称元素h与f共轭。记为: $h \sim f$  。

#### 共轭元素的性质

- ➡ 自反性: 任何元素与自身共轭

- ☞ 注: 共轭关系是一种等价关系, 共轭关系可将群元素分类



物理学中的群论

§ 1.5: 共轭元

#### 一、共轭元素

### 定义1.6 (共轭元素)

设f.h是群G的两个元素,若有元素 $g \in G$ ,使 $gfg^{-1} = h$ ,则称元素h与f共轭。记为: $h \sim f$ 。

#### 共轭元素的性质

- 自反性: 任何元素与自身共轭

- ☞ 注: 共轭关系是一种等价关系, 共轭关系可将群元素分类



物理学中的群论

§ 1.5: 共轭元

#### 一、共轭元素

### 定义1.6 (共轭元素)

设f.h是群G的两个元素,若有元素 $g \in G$ ,使 $gfg^{-1} = h$ ,则称元素h与f共轭。记为: $h \sim f$ 。

#### 共轭元素的性质

- ➡ 自反性: 任何元素与自身共轭;

- ☞ 注: 共轭关系是一种等价关系, 共轭关系可将群元素分类。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

念

质

群

3 1.4: 阿果 11:7 子群

§ 1.5: 共轭元 素 类

> 1.6: 商群 群 均和同态

§ **1.7**: 群的直积

二、类

(共轭奕)

群G的所有相互共轭的元素集合,称为群G的一个共轭类(简称 类)。群G的第i个类记为C。

类的性质

● 单位元自成一类,阿贝尔群的所有元素各成一类。

> 同类元素有相同的阶;

無 注: 若 $f^m = \sigma$ . 则同类元素 $(gfg^{-1})^m = gf^mg^{-1} = \sigma$ 



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章: 抽象群 里论 §1.1: 群的基本概 念 §1.2: 群的基本性

\$1.2: #的基本性质\$1.3: 循环群 子群\$1.4: 陪集 正規

子群 **\$1.5**: 共轭元 素 类

同构和同态 § **1.7**: 群的直积

## 二、类

### 定义1.7 (共轭类)

#G的所有相互共轭的元素集合,称为#G的一个共轭类(简称类)。#G的第%个类记为%

- ➡ 单位元自成一类,阿贝尔群的所有元素各成一类;
- 同类元素有相同的阶; ■ 注: 若 $f^m = e$ ,则同类元素 $(qfq^{-1})^m = qf^mq^{-1}$ :
- ➡ 两个类不能有公共元素,否则它们是同一个类
  - ☞ 注: 由传递性可知结论成立, 群可按共轭类进行分割。
  - ➡ 群G中任何一个类 $C_i$  满足:  $x \in G$ ,  $xC_ix^{-1} =$
- ➡ 正规子群中包含若干个完整的类,反之,凡包含若干个完整类



物理学中的群论

主讲: 陆晓

育一章:抽象群里论
 §1.1:群的基本概念
 §1.2:群的基本性质

质 **\$1.3**: 循环群 子 群 **\$1.4**: 陪集 正规 子群

于群 **§1.5**: 共轭元 素 类

§ **1.7**:群的

### 二、类

#### 定义1.7 (共轭类)

#G的所有相互共轭的元素集合,称为#G的一个共轭类(简称类)。#G的第%之记为%

- ➡ 单位元自成一类,阿贝尔群的所有元素各成一类;
- 同类元素有相同的阶; ■ 注: 若 $f^m = e$ ,则同类元素 $(gfg^{-1})^m = gf^mg^{-1} = e$
- 两个类不能有公共元素,否则它们是同一个类;★ 注:由传递性可知结论成立,群可按其轭类进行分割
- 群G中任何一个类 $C_i$  满足:  $x \in G$ ,  $xC_ix^{-1} = C_i$ ;
- 正规子群中包含若干个完整的类,反之,凡包含若干个完整类



物理学中的群论

5 一章:抽象群±论§ 1.1: 群的基本概

§ 1.2: 群的基本性质§ 1.3: 循环群 子群§ 1.4: 陪集 正规子群

子群 **§ 1.5**: 共轭元 素 类

同科和同态 § **1.7**:群的直

### 二、类

#### 定义1.7 (共轭类)

#G的所有相互共轭的元素集合,称为#G的一个共轭类(简称类)。#G的第%之记为%

- ➡ 单位元自成一类,阿贝尔群的所有元素各成一类;
- ➡ 同类元素有相同的阶;
  - **注:** 若 $f^m = e$ ,则同类元素 $(gfg^{-1})^m = gf^mg^{-1} = e$ 。
- 两个类不能有公共元素,否则它们是同一个类;
- 群G中任何一个类 $C_i$  满足:  $x \in G$ ,  $xC_ix^{-1} = C_i$ ;
- 正规子群中包含若干个完整的类,反之,凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。



物理学中的群论

§ 1.5: 共轭元

定义17(共轭

二、类

### 定义1.7 (共轭类)

#G的所有相互共轭的元素集合,称为#G的一个共轭类(简称类)。#G的第i个类记为C。

- ➡ 单位元自成一类,阿贝尔群的所有元素各成一类;
- ➡ 同类元素有相同的阶;
  - **运 注:** 若 $f^m = e$ ,则同类元素 $(gfg^{-1})^m = gf^mg^{-1} = e$ 。
- ➡ 两个类不能有公共元素,否则它们是同一个类;
  - ፫: 由传递性可知结论成立,群可按共轭类进行分割。
- 群G中任何一个类 $C_i$  满足:  $x \in G$ ,  $xC_ix^{-1} = C_i$ ;
- 正规子群中包含若干个完整的类,反之,凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。



物理学中的群论

一章:抽象群 论

§ **1.1**. 群的基本概念 § **1.2**. 群的基本性 近 § **1.3**: 循环群 子

\$1.4: 陪集 止规 子群\$1.5: 共轭元 素 类

\$ 1.6: 商群 群 同构和同态\$ 1.7: 群的直积 二、类

#### 定义1.7 (共轭类)

群G的所有相互共轭的元素集合,称为群G的一个共轭类(简称类)。群G的第i个类记为 $C_i$ 。

- ➡ 单位元自成一类,阿贝尔群的所有元素各成一类;
- ➡ 同类元素有相同的阶;
  - **注**: 若 $f^m = e$ ,则同类元素 $(gfg^{-1})^m = gf^mg^{-1} = e$ 。
- ➡ 两个类不能有公共元素,否则它们是同一个类;
  - ፫: 由传递性可知结论成立,群可按共轭类进行分割。
- ➡ 群G中任何一个类 $C_i$  满足:  $x \in G$ ,  $xC_ix^{-1} = C_i$ ;
- 正规子群中包含若干个完整的类,反之,凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。



物理学中的群论 主讲·陆晓

§ 1.5: 共轭元

二、类

### 定义1.7 (共轭类)

群G的所有相互共轭的元素集合,称为群G的一个共轭类(简称  $(\xi)$ 。群G的第i个类记为 $C_i$ 。

### 类的性质

- ➡ 单位元自成一类,阿贝尔群的所有元素各成一类:
- ➡ 同类元素有相同的阶:
  - **译注**: 若 $f^m = e$ ,则同类元素 $(gfg^{-1})^m = gf^mg^{-1} = e$ 。
- ➡ 两个类不能有公共元素,否则它们是同一个类:
  - ☆ 注: 由传递性可知结论成立, 群可按共轭类讲行分割。
- 母 群G中任何一个类 $C_i$  满足:  $x \in G$ ,  $xC_ix^{-1} = C_i$ :
- ☞ 正规子群中包含若干个完整的类,反之,凡包含若干个完整类 的子群都是正规子群。

4 D F 4 B F 4 B F B F



物理学中的群论

#### 主讲: 陆晓

第一章:抽象群

§ **1.1**: 群的基本概念

§ **1.2**: 群的基本性 质

§**1.3**: 循环群 音 群

§ 1.4: 陪集 正规 子群

子群 § 1.5: 共轭元

\*\* 3\*\* 3\*\* 4\*\* 5\*\* 6\*\* 6\*\* 6\*\* 7\*\* 6\*\* 7\*\* 7\*\* 6\*\* 7</l>

§ **1.7**: 群的直积

### 例1.8 $(D_3$ 群和 $C_{4v}$ 群的类)

 $D_3$ 群的类:

$$C_1 = \{E\}, \ C_2 = \{a, b\}, \ C_3 = \{l, k, m\};$$

$$C_1 = \{E\}, \ C_2 = \{C_4^2\}, \ C_3 = \{C_4, C_4^3\},$$

#### 定理1.4



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ **1.1**:群的基本概 念

质 § **1.3**:循环群 于 \*\*\*

§ 1.4: 陪集 正规 子群

§ 1.5: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 和同构和同态§ 1.7: 群的百彩

### $M_{1.8}\left(D_{\scriptscriptstyle 3}$ 群和 $C_{\scriptscriptstyle 4v}$ 群的类M

 $D_3$ 群的类:

$$C_1 = \{E\}, C_2 = \{a, b\}, C_3 = \{l, k, m\};$$

$$C_1 = \{E\}, C_2 = \{C_4^2\}, C_3 = \{C_4, C_4^3\}, C_4 = \{m_1, m_2\}, C_5 = \{\sigma_1, \sigma_2\},$$

#### 定理1.4

群G的阶g是一个类 $C_k$ 中元素的个数 $g_k$ 的整数G,即: $m = g/g_k$  。证明:略



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ **1.1**: 群的基本概 念

质 **§1.3**: 循环群 于 群

§ 1.4: 陪集 正共 子群 § 1.5: 共轭元

**素 类** § 1.6: 商群 群 同构和同态 例 $1.8~(D_3$ 群和 $C_{4v}$ 群的类)

 $□ D_3$ 群的类:

$$C_1 = \{E\}, C_2 = \{a, b\}, C_3 = \{l, k, m\};$$

$$C_1 = \{E\}, \ C_2 = \{C_4^2\}, \ C_3 = \{C_4, C_4^3\},$$

$$C_4 = \{m_x, m_y\}$$
,  $C_5 = \{\sigma_u, \sigma_v\}$ .

定理1.4

群G的阶g是一个类 $C_k$ 中元素的个数 $g_k$ 的整数倍,即: $m=g/g_k$ 。证明:略



物理学中的群论

#### 主讲: 陆晓

5 **一章:抽象群** 里论 § **1.1**:群的基本概 ☆

\$1.2: 群的基本性质\$1.3: 循环群 子群

\$1.4: 陪集 〕子群\$1.5: 共轭元\* \*

同构和同态 § **1.7**:群的直积

### 例1.8 ( $D_3$ 群和 $C_{4v}$ 群的类)

 $□ D_3$ 群的类:

$$C_1 = \{E\}, C_2 = \{a, b\}, C_3 = \{l, k, m\};$$

$$C_1 = \{E\}, \ C_2 = \{C_4^2\}, \ C_3 = \{C_4, C_4^3\},$$

$$C_4 = \{m_x, m_y\}$$
,  $C_5 = \{\sigma_u, \sigma_v\}$ .

#### 定理1.4

 $\underline{H}G$ 的阶g是一个类 $C_{k}$ 中元素的个数 $g_{k}$ 的整数倍,即: $\underline{m} = g/g_{k}$  证明:略



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ **1.1**: 群的基本概念

质

群 \$1.4. 陰銀 正規

子群 **\$1.5**: 共轭元

素 类 §1.6: 商群 看

§ 1.7: 群的直

### 定理1.5

设 $C_i$ 、 $C_i$ 为群G的两个类,类的乘积为:

$$C_i \cdot C_j = \sum_k a_{ij}^k C_k$$

其中求和是对群中所有的共轭类求和,而系数 $a_i^k$ 为正整数,表示类 $C_i$ 在 $C_i$ · $C_i$ 中出现的次数。

证明: 略

#### 例1.9

 $D_3$ 群的三个类:  $C_1 = \{E\}$ ,  $C_2 = \{a,b\}$ ,  $C_3 = \{l,k,m\}$ 

为乘积: 
$$C_1 \cdot C_2 = C_2$$
 ,  $C_1 \cdot C_3 = C_3$ 

$$C_2 \cdot C_3 = 2C_3$$
,  $C_2 \cdot C_2 = 2C_1 + C_3$ 

$$C_3 \cdot C_3 = 3C_1 + 3C_2$$



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论 §**1.1**:群的基本概 今

§ 1.2: 群的基本性质质§ 1.3: 循环群 子群

\$1.4: 陪集 正: 子群\$1.5: 共轭元

**素 类** § **1.6**: 商群 君 同构和同态 定理1.5

设 $C_i$ 、 $C_i$ 为群G的两个类,类的乘积为:

$$C_i \cdot C_j = \sum_k a_{ij}^k C_k$$

其中求和是对群中所有的共轭类求和,而系数 $a_i^k$ 为正整数,表示类 $C_i$ 在 $C_i$ · $C_i$ 中出现的次数。

证明:略

例1.9

 $D_3$ 群的三个类:  $C_1 = \{E\}$ ,  $C_2 = \{a,b\}$ ,  $C_3 = \{l,k,m\}$ ;

类的乘积: 
$$C_1 \cdot C_2 = C_2$$
 ,  $C_1 \cdot C_3 = C_3$  ,  $C_2 \cdot C_3 = 2C_3$  ,  $C_2 \cdot C_2 = 2C_1 + C_3$  ,

$$C_2 \cdot C_2 = 3C_1 + 3C_2$$
 .



# 目录

第一章:抽象郡 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性质

群 **§ 1.4**: 陪集 正规 子群

子群 **§ 1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态

§ **1.7**:群的直积

### 1 第一章: 抽象群理论

- § 1.1: 群的基本概念
- § 1.2: 群的基本性质
- ▶ § 1.3: 循环群 子群
- § 1.4: 陪集 正规子群
- § 1.5: 共轭元素 类
- § 1.6: 商群 群的同构和同态
- §1.7: 群的直积



#### 

第一章:抽象群 理论 §**1.1**:群的基本概 念

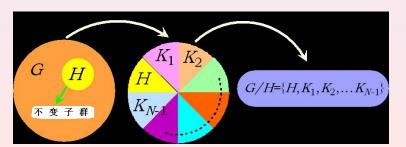
§ 1.3: 循环群 子群§ 1.4: 陪集 正规子群§ 1.5: 共轭元

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态

#### 一、商群

### 定义1.8 (商群)

若H是群G的一个正规子群,它的I — 1个陪集 $\{K_i = g_iH\}$ 和H 一起构成的集合: $\{K_1 = H, K_2, K_3, \cdots, K_l\}$ ,在陪集乘法运算下构成群,称为<mark>商群</mark>,记为K = G/H。





物理学中的群论

主讲; 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ **1.1**:群的基本概念

\$1.4: 陪集 〕子群\$1.5: 共轭元

§ **1.5**: 共轭元 素 类 **§ 1.6**: 商群 群的

**同构和同态** § **1.7**:群的直积

#### 满足群的四个条件

- **①** 封闭性:  $K_iK_j = g_iHg_jH = g_ig_jHH = g_kH = K_k$ ;
- ② 结合律: 群元的乘法满足结合律;
- ③ 单位元:  $K_1 = H$ ,  $K_1K_i = Hg_iH = g_iHH = K_i$ ;

#### 定理1.6

 $\underline{H}G$ 关于正规子群 $\underline{H}$ 的商群 $\underline{G}/\underline{H}$ 的阶数等于正规子群 $\underline{H}$ 的群指数。证明:略



物理学中的群论

主讲; 陆晓

第一章:抽象群 里论

\$1.1: 群的基本概念\$1.2: 群的基本性

\$1.4: 陪集 正: 子群\$1.5: 共轭元\*

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态§ 1.7: 群的直积 满足群的四个条件

① 封闭性:  $K_iK_j = g_iHg_jH = g_ig_jHH = g_kH = K_k$ ;

② 结合律: 群元的乘法满足结合律;

③ 单位元:  $K_1 = H$ ,  $K_1K_i = Hg_iH = g_iHH = K_i$ ;

定理1.6

 $\overline{H}G$ 关于正规子群 $\overline{H}$ 的商群 $\overline{G}/\overline{H}$ 的阶数等于正规子群 $\overline{H}$ 的群指数。证明:略



```
物理学中的群论
```

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论 §**1.1**:群的基本概 今

§ 1.2: 群的基本性质 § 1.3: 循环群 子 群

\$ 1.4: 陪集 〕子群\$ 1.5: 共轭元素 类

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态 § 1.7: 群的直积

#### 例1.10

群 $D_3 = \{e, a, b, k, l, m\}$ 的子群 $H_2 = \{e, a, b\}$ 是正规子群,它的两个陪集为:  $K_1 = H_2 = \{e, a, b\}$ , $K_2 = kH_2 = \{k, l, m\}$ ;则商群 $D_3/H_2 = \{H_2, kH_2\}$ ,可以验证:  $(kH_2)^2 = H_2$ ,即 $D_3/H_2$ 为二阶循环群。

### 例1.11

 $G = \{1, i, -1, -i\}$ ,它有一个正规子群 $H = \{1 - 1\}$ ,它的两个陪集为:  $K_1 = H = \{1, -1\}$ , $K_2 = iH = \{i, -i\}$ ;则商群 $G/H = \{H, iH\}$ 。



```
物理学中的群论
```

主讲: 陆晓

日一章: 抽家群 里论 §1.1: 群的基本概 念 §1.2: 群的基本性 所

\$ 1.3: 循环群 群 \$ 1.4: 陪集 可 子群 \$ 1.5: 共轭元

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态§ 1.7: 群的直积

#### 例1.10

群 $D_3=\{e,a,b,k,l,m\}$ 的子群 $H_2=\{e,a,b\}$ 是正规子群,它的两个陪集为:  $K_1=H_2=\{e,a,b\}$ , $K_2=kH_2=\{k,l,m\}$ ; 则商群 $D_3/H_2=\{H_2,kH_2\}$ ,可以验证:  $(kH_2)^2=H_2$ ,即 $D_3/H_2$ 为二阶循环群。

#### 例1.11

 $G = \{1, i, -1, -i\}$ ,它有一个正规子群 $H = \{1 - 1\}$ ,它的两个陪集为:  $K_1 = H = \{1, -1\}$ , $K_2 = iH = \{i, -i\}$ ;则商群 $G/H = \{H, iH\}$ 。



#### 物理学中的群论

### 主讲; 陆晓

第一章: 抽象群 理论 §1.1: 群的基本概 念

\$1.2: 群的基本性质\$1.3: 循环群 子群

子群 **1.5**: 共轭元

素 类 § 1.6: 商群 群的 同构和同态

# 二、群的同构与同态

### 定义1.9 (同构)

有相同阶的两个群:

 $G = \{g_0 = e, g_1, g_2, \dots\}, G' = \{g'_0 = e', g'_1, g'_2, \dots\}$ 

若存在一对一的满映射f(双射) $G \longleftrightarrow G'$ ,且满足

- 1. <u>G与G'的元素——对应:</u>  $g_i \longleftrightarrow g'_i, \ g_j \longleftrightarrow g'_j$
- 2. 保持群的运算结构不变:  $g_ig_j = g_k \longleftrightarrow g_i'g_j' = g_k'$

则称G与G'同构,记为 $G \simeq G'$ 。





**有一章:抽象群** 里论 **§1.1**:群的基本制

§ 1.3: 循环群 <sup>-1</sup> 群§ 1.4: 陪集 正列子群§ 1.5: 共轭元

\$ 1.6: 商群 群的 同构和同态\$ 1.7: 群的直积

### 二、群的同构与同态

### 定义1.9 (同构)

有相同阶的两个群:

有相问则的例介研:

 $G = \{g_0 = e, g_1, g_2, \dots\}, G' = \{g'_0 = e', g'_1, g'_2, \dots\};$ 若存在一对一的满映射f(双射) $G \longleftrightarrow G'$ ,且满足:

1. G与G'的元素 $\longrightarrow$ D  $g_i \longleftrightarrow g_i', g_j \longleftrightarrow g_j'$ 

2. 保持群的运算结构不变:  $g_ig_j = g_k \longleftrightarrow g_i'g_j' = g_k'$ ;

则称G与G'同构,记为 $G \simeq G'$ 。





物理学中的群论

主讲; 陆晓

お一章: 抽家群
 里论
 §1.1: 群的基本概念
 §1.2: 群的基本性

\$ 1.3: 循环群 子 胖\$ 1.4: 陪集 正规 子群

子群 § **1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态 § 1.7: 群的直积

### 同构的要素

- ➡ 群的元素有一一对应关系(两个群同阶);
- ☞ 元素的运算也保持相应的关系,即:

群G中若有:  $g_ig_j=g_k$ ,

群G'中则必须有:  $g'_i g'_j = g'_k$ , 或:  $f(g_i)f(g_j) = f(g_k)$ ;

因此要求:  $f(g_ig_j) = f(g_i)f(g_j)$ 。

### 同构的性质

- ☞ 两个同构的群有相同的乘法表
- 在同构映射下,单位元被映射为单位元,逆元被映射为逆元
- ➡ 若 $G \simeq G'$ ,则 $G' \simeq G$ ,同构映射为 $f^{-1}$ ,同构具有相互性



物理学中的群论

主讲: 陆晓

### 同构的要素

- ➡ 群的元素有一一对应关系(两个群同阶):
- ☞ 元素的运算也保持相应的关系,即:

群G中若有:  $g_ig_i = g_k$ ,

群G'中则必须有:  $g'_i g'_i = g'_k$ , 或:  $f(g_i)f(g_j) = f(g_k)$ ;

因此要求:  $f(g_ig_i) = f(g_i)f(g_i)$ 。

### 同构的性质

- ➡ 两个同构的群有相同的乘法表:
- ❷ 在同构映射下,单位元被映射为单位元,逆元被映射为逆元;
- 母 若 $G \simeq G'$ ,则 $G' \simeq G$ ,同构映射为 $f^{-1}$ ,同构具有相互性。



#### 物理学中的群论

主讲:陆晓

理论 § 1.1: 群的基本概 念 § 1.2: 群的基本性

群 **§ 1.4**: 陪集 直 子群

31.0: 向酐 研!同构和同态§1.7: 群的直积

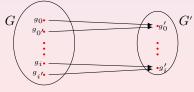
### 定义1.10 (同态)

有不同阶的两个群:

$$G = \{g_0 = e, g_1, g_2, \cdots\}, G' = \{g'_0 = e', g'_1, g'_2, \cdots\};$$

如果群G的阶大于群G的阶,两个群元素之间存在<mark>多对一</mark>的满映 射 $f: g_i \longrightarrow g'_i, g_i \longrightarrow g'_j$ ,且:  $g_i g_j = g_k \longrightarrow g'_i g'_j = g'_k$ ;

则称G与G'同态,记为 $G \sim G'$ 。



同态示意图



#### 物理学中的群论

- **主 讲: 陆 哓** 第一章: 抽象群 理论
- 理论 § 1.1: 群的基本概 念 § 1.2: 群的基本性 质
- 素 类 § **1.6**: 商群 群的
- **同构和同态** § **1.7**:群的直积

### 同态的性质

- ➡ 两个群的元素有多对一的对应关系;
- ➡ 在同态映射下,运算规律保持不变;
- ❷ 在同态映射下,单位元映射为单位元,逆元映射为逆元;
- ☞ 同态的两个群,群乘表有分块结构上的相似性。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论 §1.1:群的基本概 今

\$ 1.2: 群的基本性质§ 1.3: 循环群 子群

§ 1.4: 陪集 子群§ 1.5: 共轭元

§ **1.5**: 共轭元 素 类 **§ 1.6**: 商群 群的

同构和同态

## 定义1.11 (同态核)

设群G与群G'同态,G中所有与G'单位元对应的元素所构成的集合,称为同态映像的核(简称同态核)H。



同态核示意图



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1 2. 群的基本性

质 **§1.3**: 循环群 子

群 **\$ 1.4**: 陪集 正规

子群 & 1.5, 共轭元

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态

§ **1.7**:群的直积

### 定理1.7 (同态核定理)

 $\overline{\mathtt{Z}}$  群G与群G'同态,则有:1. 同态核H是G的正规子群,2. 商群G/H与G'同构;即: $G/H \simeq G'$ 。

#### 证明

H是G的正规子群;

 $\forall g \in G, \forall h \in H, f 为 G 到 G' 的 同 态 映 射, 有$ 

 $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'[f(g)]$ 

G/H与G'同构 $_{1}$ 

C(M) 。 $G/H \longleftrightarrow G$  , F(M) = f(M) = f(M)能证明*E* 是同构映射,则G/H = G' 同构



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论 §1.1:群的基本概 念 §1.2:群的基本性

§ **1.3**: 循环群 于 群 **§ 1.4**: 陪集 正规 子群

素 类 § **1.6**: 商群 群的 同构和同态 定理1.7 (同态核定理)

 $\overline{E}$  若  $\overline{H}$  G 与  $\overline{H}$  G '同态,则有: 1. 同态 核 H E G 的正规 子  $\overline{H}$  H E G '同构;即:  $G/H \simeq G$ '。

### 证明

- H是G的止规于群;  $\forall g \in G, \forall h \in H, f$ 为G到G'的同态映射,有:  $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'[f(g)]^{-1} = e'$ 即:  $ghg^{-1} \in H$ ,故H是正规子群。
- 2. 尚群G/H与G'问构; 定义映射F, $G/H \longleftrightarrow G'$ ,F(gH) = f(g)如能证明F是同构映射,则G/H与G'同构。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

里论 § **1.1**: 群的基本概念 § **1.2**: 群的基本性

质 **§ 1.3**: 循环群 群 **§ 1.4**: 陪集 正 子群

\$ 1.5: 共轭元素 类\$ 1.6: 商群 群的同构和同态

定理1.7 (同态核定理)

 $\overline{B}$  若群G与群G'同态,则有:1. 同态核H是G的正规子群,2. 商群G/H与G'同构;即: $G/H \simeq G'$ 。

### 证明

- 1. H是G的正规子群;  $\forall g \in G, \forall h \in H, f$ 为G到G'的同态映射,有:  $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'[f(g)]^{-1} = e'$ ; 即:  $ghg^{-1} \in H$ ,故H是正规子群。
- 2. 商群G/H与G'同构; 定义映射F, $G/H \longleftrightarrow G'$ ,F(gH) = f(g)如能证明F是同构映射,则G/H与G'同构。



物理学中的群论

主讲; 陆晓

质 **§ 1.3**: 循环群 群 **§ 1.4**: 陪集 正 子群

§ 1.5: 共轭元素 类§ 1.6: 商群 群的同构和同态

### 定理1.7 (同态核定理)

 $\overline{\overline{H}}G = \overline{\overline{H}}G'$  同态,则有: 1. 同态核 $\overline{\overline{H}}B = \overline{\overline{H}}G'$  同构;即:  $\overline{\overline{G}}B = \overline{\overline{H}}G'$  同构;即:  $\overline{\overline{G}}B = \overline{\overline{G}}B'$  。

#### 证明

1. H是G的正规子群;  $\forall g \in G, \forall h \in H, f$ 为G到G'的同态映射,有:  $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'[f(g)]^{-1} = e'$ ; 即:  $ghg^{-1} \in H$ ,故H是正规子群。

2. 商群G/H与G'同构; 定义映射F, $G/H \longleftrightarrow G'$ ,F(gH) = f(g); 如能证明F是同构映射,则G/H与G'同构。



物理学中的群论

主讲:陆晓

理论

**§ 1.1**: 群的基本概 念

版 § 1.3: 循环群 寸

群

子群

煮 类 § 1.6: 商群 群的

§ **1.7**: 群的直积

### 证明(续)

- (1). 映射F(gH)的值f(g)与陪集gH代表元素g的选取无关; 设:  $h \in H, gh \in gH$ , (gh)H = gH, gh为代表元素,故有 F(gH) = F(ghH) = f(gh) = f(g)f(h) = f(g)e' = f(g), 所以映射F与陪集gH代表元素g的选取无关。
- (2). F为一对一映射,且保持乘法结构不变; 分a, b, c三步证明:
- a. F为一对一的单映射; 设:  $g_1H \neq g_2H$ ,要证:  $F(g_1H) \neq F(g_2H)$ ; 反证法,若 $F(g_1H = F(g_2H))$ ,则 $f(g_1) = f(g_2)$ ,



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

\$ 1.1: 群的基本概念\$ 1.2: 群的基本性

§ **1.3**: 循环群 音

子群

§ **1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态§ 1.7: 群的直积 证明(续)

- (1). 映射F(gH)的值f(g)与陪集gH代表元素g的选取无关; 设:  $h \in H, gh \in gH$ ,(gh)H = gH,gh为代表元素,故有: F(gH) = F(ghH) = f(gh) = f(g)f(h) = f(g)e' = f(g),所以映射F与陪集gH代表元素g的选取无关。
- (2). F为一对一映射,且保持乘法结构不变; 分a, b, c三步证明:
- a. F为一对一的单映射; 设:  $g_1H \neq g_2H$ ,要证:  $F(g_1H) \neq F(g_2H)$ ; 反证法,若 $F(g_1H = F(g_2H))$ ,则 $f(g_1) = f(g_2)$



#### 物理学中的群论

### 主讲; 陆晓

§ 1.6: 商群 群的

### 证明(续)

- (1) 映射F(gH)的值f(g)与陪集gH代表元素g的选取无关; 设:  $h \in H, gh \in gH$ , (gh)H = gH, gh为代表元素, 故有: F(gH) = F(ghH) = f(gh) = f(g)f(h) = f(g)e' = f(g), 所以映射F与陪集qH代表元素q的选取无关。
- (2) F为一对一映射, 且保持乘法结构不变: 分a, b, c三步证明:



物理学中的群论

主讲; 陆晓

§ 1.6: 商群 群的

#### 证明(续)

- (1) 映射F(gH)的值f(g)与陪集gH代表元素g的选取无关; 设:  $h \in H, gh \in gH$ , (gh)H = gH, gh为代表元素, 故有: F(qH) = F(qhH) = f(qh) = f(q)f(h) = f(q)e' = f(q), 所以映射F与陪集qH代表元素q的选取无关。
- (2). F为一对一映射, 且保持乘法结构不变; 分a, b, c三步证明:
- a. F为一对一的单映射: 设:  $g_1H \neq g_2H$ , 要证:  $F(g_1H) \neq F(g_2H)$ ; 反证法, 若 $F(g_1H = F(g_2H))$ , 则 $f(g_1) = f(g_2)$ ,



```
物理学中的群论
```

主讲: 陆晓

わ 早: 加水研 里论 §**1.1**: 群的基本概 念

§ 1.2: 群的基本性质§ 1.3: 循环群 子群

\$1.6: 商群 群的 同构和同态\$1.7: 群的直积 证明(续)

故 $[f(g_2)]^{-1}f(g_1) = e'$ ,亦即 $f(g_2^{-1}g_1) = e'$ ,那么 $g_2^{-1}g_1 \in H$ ;根据重排列定理:

 $g_2^{-1}g_1H = H$ , 或:  $g_1H = g_2H$ , 与假设矛盾; 那么:  $F(g_1H) \neq F(g_2H)$ , 所以F为单映射。

b. F是满映射;

由于同态映射f是满映射,故:  $\forall g_{\alpha}' \in G', \exists g_{\gamma} \in G,$  使得:  $f(g_{\gamma}) = g_{\alpha}'$ ,即:  $g_{\alpha}' = f(g_{\gamma}) = F(g_{\gamma}H),$  所以及为满典时



```
物理学中的群论
```

主讲;陆晓

**計论** § **1.1**: 群的基本概念 § **1.2**: 群的基本性 质

\$ 1.3: 循环群 子 群 \$ 1.4: 陪集 正规 子群 \$ 1.5: 共轭元 素 类

素 类

\$ 1.6: 商群 群的
同构和同态

\$ 1.7: 群的直积

#### 证明(续)

故 $[f(g_2)]^{-1}f(g_1) = e'$ ,亦即 $f(g_2^{-1}g_1) = e'$ ,那么 $g_2^{-1}g_1 \in H$ ;根据重排列定理:

 $g_2^{-1}g_1H = H$ ,或:  $g_1H = g_2H$ ,与假设矛盾; 那么:  $F(g_1H) \neq F(g_2H)$ ,所以F为单映射。

**b**. *F*是满映射;

由于同态映射f是满映射,故: $\forall g'_{\alpha} \in G'$ , $\exists g_{\gamma} \in G$ ,使得: $f(g_{\gamma}) = g'_{\alpha}$ ,即: $g'_{\alpha} = f(g_{\gamma}) = F(g_{\gamma}H)$ ,所以F为满映射。



#### 物理学中的群论

#### 主讲; 陆晓

第一章:抽象群

§ **1.1**: 群的基本概 念

§ **1.2**: 群的基本性 质

§ 1.3: 循环群 子 群

群 **§ 1.4**: 陪集 正規

了研 **§ 1.5**: 共轭元

素 类 § **1.6**: 商群 群的

§ **1.7**:群的直移

### 证明(续).

c. F保持群的乘法结构不变

由于正规子群: gH = Hg, 所以:

$$F(g_1Hg_2H) = F(g_1g_2HH) = F(g_1g_2H)$$

$$= f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = F(g_1H)F(g_2H);$$

综合上面a b c三占、知F为同构映射、所以。C

综合上面a,b,c三点,知F为同构映射,所以:  $G/H \simeq G'$ 



#### 物理学中的群论

主讲; 陆晓

第一章:抽象群里论§1.1: #的基本概念

\$1.2: 群的基本性质\$1.3: 循环群 子群\$1.4: 陪集 正规

子群 **§ 1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群的 同构和同态
§ 1.7: 群的直积

#### 证明(续).

c. F保持群的乘法结构不变;

由于正规子群: gH = Hg, 所以:

$$F(g_1Hg_2H) = F(g_1g_2HH) = F(g_1g_2H)$$

$$= f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = F(g_1H)F(g_2H);$$

综合上面a,b,c三点,知F为同构映射,所以:  $G/H \simeq G'$ 。



# 目录

物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章: 抽象和 理论

§ 1.1: 群的基本概念§ 1.2: 群的基本性质

**§ 1.3**:循环群 → 群

\$ 1.4: 陪集 正: 介群

※ 1.6: 商群 群 同构和同态

§ 1.7: 群的直积

### 1 第一章: 抽象群理论

- § 1.1: 群的基本概念
- § 1.2: 群的基本性质
- § 1.3: 循环群 子群
- § 1.4: 陪集 正规子群
- § 1.5: 共轭元素 类
- § 1.6: 商群 群的同构和同态
- §1.7: 群的直积



物理学中的群论

主讲: 陆晓

**书一章:抽象群** 里论 **§1.1**:群的基本概 ◆

§ 1.2: 群的基本性质§ 1.3: 循环群 子群

§ **1.4**: 陪集 子群 § **1.5**: 共轭元 麥 举

§ 1.6: 商群 群 可构和同态

§ **1.7**: 群的直积

### 定义1.12 (群的直积)

设 $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_k\}$ , $K = \{k_1 = e, k_2, \dots, k_k\}$ 分别是h阶 群和k阶群,H = K除单位元外无任何公共元素,且H = K的每一个元素均<mark>对易。定义直积群为:</mark>

 $G = H \otimes K = \{h_1k_1, h_1k_2, \cdots, h_1k_k, h_2k_2, \cdots, h_2k_k, \cdots, h_hk_k\}$ 直积群G的阶为q = hk。

#### 直积群G构成群

- (1) 满足封闭性
- (2) 满足结合律;
- (3) 单位元存在:  $e = h_1 k_1$ :
- (4) 逆元存在:  $g_k^{-1} = (h_i k_j)^{-1} = k_j^{-1} h_i^{-1} = h_i^{-1} k_j^{-1}$



物理学中的群论

主讲; 陆晓

**戶一章: 抽象群** 里论 **§1.1**: 群的基本概 念

\$ 1.2: 群的基本性质\$ 1.3: 循环群 子群\$ 1.4: 陪集 正规

§ 1.4: 陪集 引 子群§ 1.5: 共轭元 素 类

§ 1.7: 群的直积

### 定义1.12 (群的直积)

设 $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_k\}$ , $K = \{k_1 = e, k_2, \dots, k_k\}$ 分别是h阶 群和k阶群,H = K除单位元外无任何公共元素,且H = K的每一个元素均<mark>对易。定义直积群为:</mark>

 $G = H \otimes K = \{h_1k_1, h_1k_2, \cdots, h_1k_k, h_2k_2, \cdots, h_2k_k, \cdots, h_hk_k\}$ , 東日野女が成分力 a = bh

直积群G的阶为g = hk。

### 直积群G构成群

- (1) 满足封闭性;
- (2) 满足结合律;
- (3) 单位元存在:  $e = h_1 k_1$ ;
- (4) 逆元存在:  $g_k^{-1} = (h_i k_j)^{-1} = k_j^{-1} h_i^{-1} = h_i^{-1} k_j^{-1}$ 。



物理学中的群论

主讲; 陆晓

第一章: 抽象群 理论

§ **1.1**: 群的基本概 念

**31.∠**: 莊的基本1

§ **1.3**: 循环群 群

子群

§ **1.5**: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群 同构和同态

§ 1.7: 群的直积

### 定理1.8 (直积的性质)

若直积群 $G = H \otimes K$ ,则有:

- 1. H和K都是G的正规子群;
- 2. 商群G/H与K同构,以及G/K与H同构。

#### 证明.

略

☞ 注

- (1)群的直积有条件的限制,是为了保证G任然是一个群;
- (2)群的直积是扩大群最简单的方法。

例如:  $O(3) = SO(3) \otimes \{e, \sigma\}$ 。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

理论

**§ 1.1**: 群的基本概念

质 **\$1.3**:循环群 ·

\*\* **\$ 1.4**: 陪集 正

上群 **§ 1.5**: 共轭元

\$ 1.6: 商群 群的 同构和同态 \$ 1.7: 群的實积

3 2.0. 1111

### 定理1.8 (直积的性质)

若直积群 $G = H \otimes K$ ,则有:

- 1. H和K都是G的正规子群;
- 2. 商群G/H与K同构,以及G/K与H同构。

### 证明.

略



- (1)群的直积有条件的限制,是为了保证G任然是一个群;
- (2)群的直积是扩大群最简单的方法。

例如:  $O(3) = SO(3) \otimes \{e, \sigma\}$ 



物理学中的群论

主讲:陆晓

里**论** §**1.1**:群的基本概念 §**1.2**:群的基本性

§ 1.3:循环群 子群§ 1.4: 陪集 正規

§ 1.7: 群的直积

### 定理1.8 (直积的性质)

若直积群 $G = H \otimes K$ ,则有:

- 1. H和K都是G的正规子群;
- 2. 商群G/H与K同构,以及G/K与H同构。

### 证明.

略



- (1)群的直积有条件的限制,是为了保证G任然是一个群;
- (2)群的直积是扩大群最简单的方法。

例如:  $O(3) = SO(3) \otimes \{e, \sigma\}$ 。



物理学中的群论

主讲: 陆晓

第一章:抽象群 理论

§ 1.1: 群的基本概令

§ 1.2: 群的基本性

§ **1.3**:循环群 子

群

子群

§ 1.5: 共轭元 素 类

§ 1.6: 商群 群 同构和同态

§ 1.7: 群的直积

# 第一章结束