五、非线性方程的求根

$$f(x)=0$$

满足上式的 x 称为该方程的根，也即 $f(x)$ 的零点。

许多情况无法将非线性方程的根用简单的形式表示出来，甚至得不到根的精确值，只能通过数值方法近似求解。

例，简单情况 $f(x)$ 为N次多项式，有N个根，当N>4一般无法解析求根，更复杂的非线性函数则更无法求解。

非线性方程 $f(x)=0$ 求根问题：

- 确定方程的有根区间
- 计算根的近似值(根的精确化）

1、二分法

方程$f(x)=0$在区间$[a,b]$上根的情形

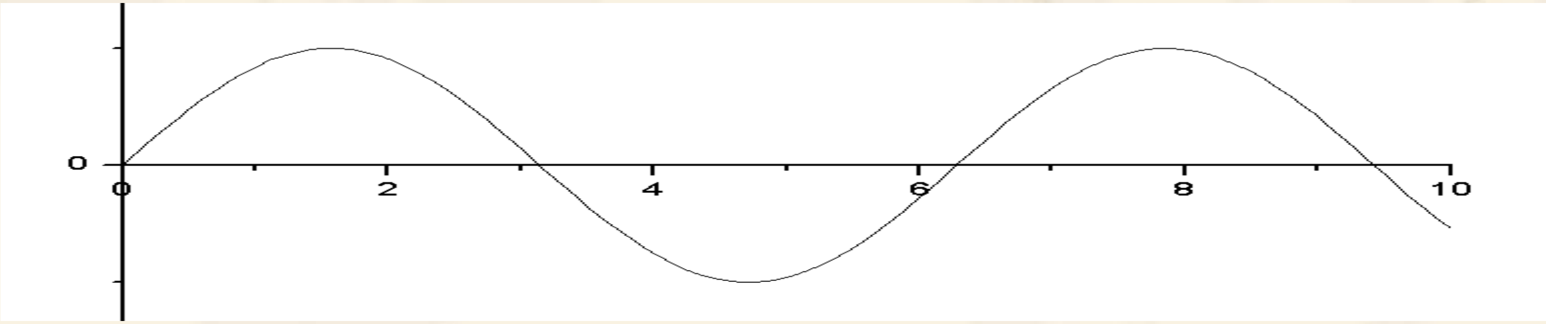
有唯一根，有多个根，所有根均为单根，有重根。

首先,讨论$f(x)=0$在区间$[a,b]$的多个根均为单根的情形

设$f(x)=0$在$[a,b]$上有m个单根，将$[a,b]$分成n个小区间

$$[b_0,b_1],[b_1,b_2],\cdots,[b_{n-1},b_n]$$

然后判断每个区间上是否有根



计算$f(b_i)$的值，$i=0,1,2,\cdots,n$

判断$f(b_i)=0$或$f(b_i)f(b_{i+1})<0$是否成立,$i=0,1,2,\cdots,n-1$

若成立

b_i就是一个根

$[b_i, b_{i+1}]$中至少有一个根

统计根的个数

如果根的个数正好是m个, 则所有的有根区间均为单根区间

如果根的个数小于m个, 则继续对分区间, 并重新判断

直到找到所有根的所在区间

然后在每个有根区间进行求根

假设区间$[c,d]$为单根区间,

取其中点$x_0=\frac{1}{2}(c+d)$ 若$f(x_0)=0$, x_0就是$[c,d]$中的根

若$f(c)\cdot f(x_0)<0$, 则$[c,x_0]$为有根区间, 令$c_1=c, d_1=x_0$

若$f(x_0)\cdot f(d)<0$, 则$[x_0,d]$为有根区间, 令$c_1=x_0, d_1=d$

于是有根区间$[c,d]$就缩小为$[c_1,d_1]$, 长度只有一半

继续取$[c_1,d_1]$的中点$x_1=\frac{1}{2}(c_1+d_1)$, 得一系列的小区间和中点

经过n次对分区间，有根区间为： $(d_n-c_n)=\frac{1}{2^n}(d-c)$

对给定的误差量 $\varepsilon>0$

当 $\frac{1}{2^n}(d-c)<\varepsilon$ 可取 $x_n=(d_n-c_n)/2$ 为根的近似值。

2、迭代法

设方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上有唯一根。

(1) 简单迭代法

将方程 $f(x)=0$ 化为一个同解方程 $x=\varphi(x)$

任意取初值 x_0 作迭代

$$x_1=\varphi(x_0) \quad x_2=\varphi(x_1) \quad \cdots\cdots\cdots$$

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

如果存在一点x^*,使得迭代序列$\{x_k\}_0^\infty$满足

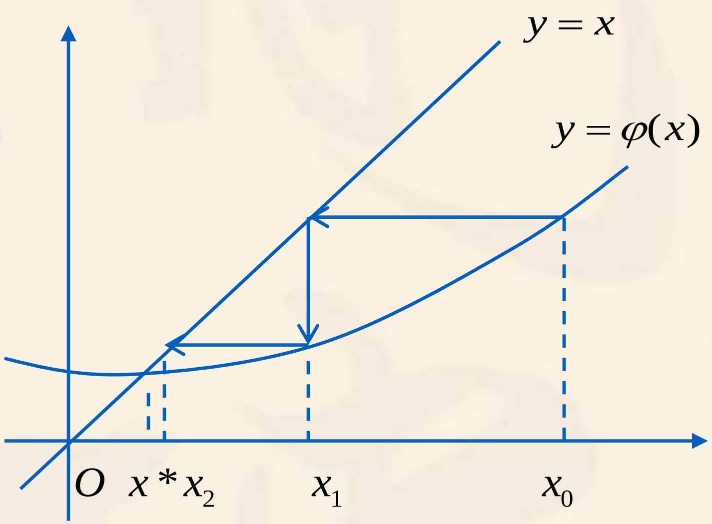
$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

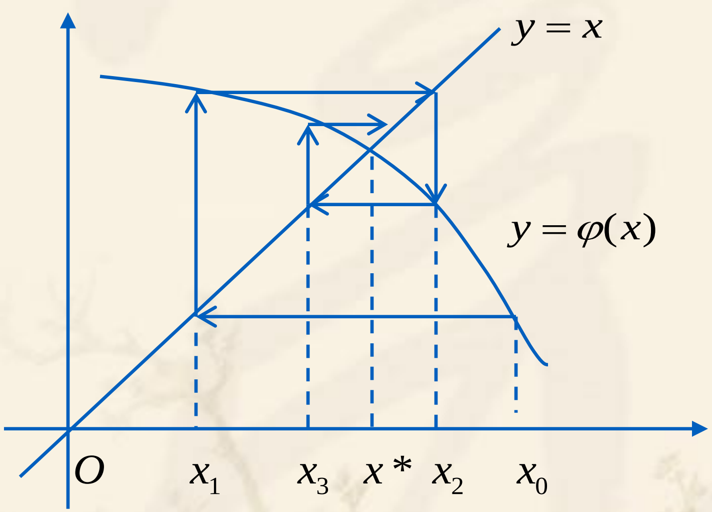
则称迭代收敛, 否则称为发散。

迭代法的几何意义

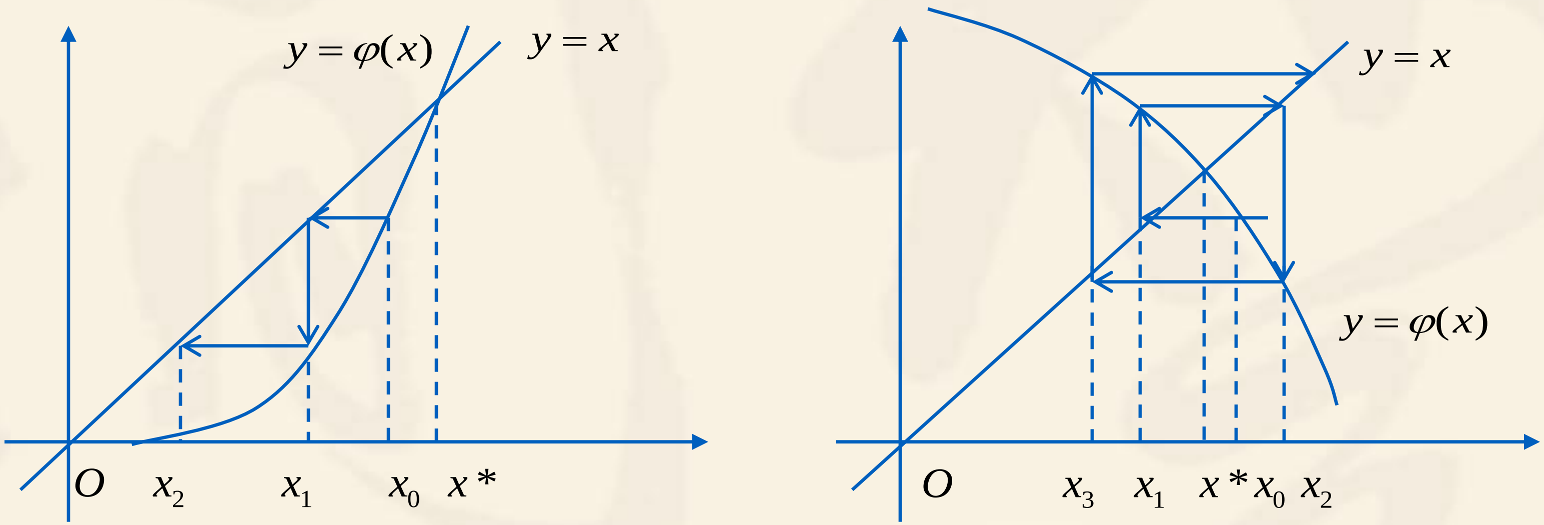
$$x = \varphi(x) \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

解为交点的横坐标 x^*





$\varphi(x)$在x^*附近较平缓 收敛



$\varphi(x)$在x^*附近较陡峭 发散

定理1. 设迭代函数$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,且满足

(1) 当$x\in[a,b]$时,$a\le\varphi(x)\le b$;

(2) 存在一正数L,满足$0<L<1$,且$\forall x\in[a,b]$,有

$$|\varphi'(x)|\le L$$

则1^o. 方程$x=\varphi(x)$在$[a,b]$内有唯一解x^*

2^o.对于任意初值$x_0\in[a,b]$,迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$均收敛于x^*

(局部收敛性)

3^o. $$|x_k-x^*|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

4^o. $$|x_k-x^*|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

定理1指出，只要构造的迭代函数满足

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

此时虽收敛但不一定是唯一根

迭代法$x_{k+1} = \varphi(x_k)$就收敛

对于预先给定的误差限ε 即要求$|x_k - x^*| < \varepsilon$

只要

$$\frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

因此,当 $|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-L}{L}\varepsilon \approx \varepsilon$

迭代就可以终止，x_k可以作为方程的近似解

由定理1

L或$|\varphi'(x)|$在$[a,b]$上越小，迭代法收敛就越快

设$e_k = |x_k - x^*|$

定义1.　若存在实数$p \geq 1$和$c > 0$满足

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = c$$

则称迭代法p阶收敛,当$p = 1$时称为线性收敛,$p > 1$时称为超线性收敛,$p = 2$时称为平方收敛

显然, p越大,收敛速度也就越快

定理2. 如果迭代法迭代函数$\varphi(x)$在根x^*附近满足：

(1) $\varphi(x)$存在p阶导数切连续；

(2) $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$，而$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$

则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$的收敛阶是p

(2) Newton迭代法

如果将非线性方程 $f(x)=0$

化为等价方程 $x=x-k(x)f(x)$ 且$k(x)\neq 0$

令 $\varphi(x)=x-k(x)f(x)$

$$\varphi'(x)=1-k'(x)f(x)-k(x)f'(x)$$

设x^*为$f(x)=0$的根，$|\varphi'(x)|$ 在x^*附近越小,则收敛速度越快

如果 $f'(x^*)\neq 0$ 令 $\varphi'(x^*)=0$

即 $1-k'(x^*)f(x^*)-k(x^*)f'(x^*)=0$ $\quad k(x^*)=\dfrac{1}{f'(x^*)}$

于是取 $k(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \qquad x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

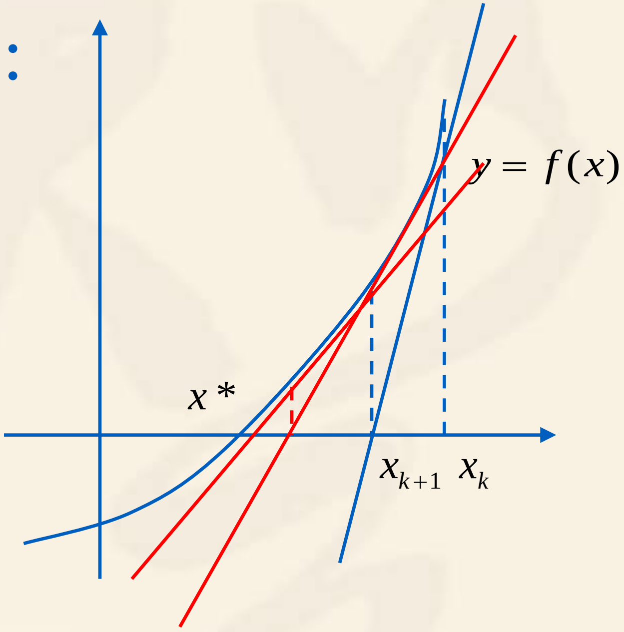
取初值x_0,构造迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$ 称为**Newton**迭代法

只要$f'(x^*)\neq 0$, **Newton**迭代法至少平方收敛

例. 用Newton迭代法求方程的根:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$



解: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

由Newton迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$= x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 1}{3x_k^2 - 3}$$

取初值 $x_0 = 0.5$, 得

x0 =0.5;
x1 =0.3333333333
x2 =0.3472222222
x3 =0.3472963532
x4 =0.3472963553

迭代四次　　精度达10^{-8}

(3) Newton迭代法的变形—弦割法

Newton迭代法 $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

需要求每个迭代点处的导数 $f'(x_k)$ 复杂！

用x_0近似替代$f'(x_k)$中的x_k，得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

这种格式称为简化Newton迭代法 精度稍低！

如果用数值导数代替$f'(x_k)$ $$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

则Newton迭代法变为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

这种格式称为**弦割(截)法**　收敛阶约为1.618

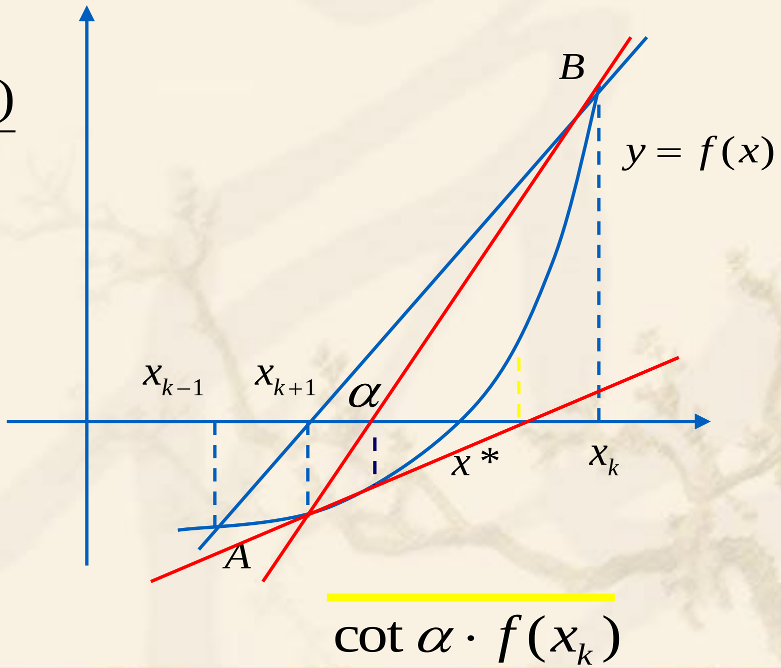
几何意义：

如图，AB的斜率为$K_{AB}=\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$

$$\tan\alpha=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

$$=x_k-\cot\alpha\cdot f(x_k)$$



4、非线性方程组迭代法

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

同解方程

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ x_2=\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ x_n=\varphi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

向量式： $F(X)=0$ $\qquad X=\Phi(X)$

取初向量 $X^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 作迭代

$$X^{(k+1)}=\Phi(X^{(k)}) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

若向量序列 $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛 $\lim_{k\to\infty}X^{(k)}=X*$

即原方程的解。

Newton 迭代（参一个方程情况）

向量式： $F(X)=0$ 选取 $A(X)=\left[\dfrac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\right]^{-1}$

$$X=\Phi(X)=X-AF(X)$$

则 $\left\|\left(\dfrac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j}\right)\right\|_\infty=\left\|I-A\left(\dfrac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\right)\right\|_\infty<1$ 迭代收敛

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-\left[\frac{\partial f_i(X^{(k)})}{\partial x_j}\right]^{-1}F(X^{(k)})\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

即解非线性方程组Newton 迭代式。

练习、非线性方程求根的迭代法（选做）

建立非线性方程求根的迭代法的计算程序。

或利用专用软件的非线性方程求根的计算程序。

选取一可解析求解的非线性方程

比较程序的计算结果与解析求解的计算结果。