三、数值积分

如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数则可用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分

$$I=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

但在实际计算中常常会碰到一些困难：

①有些函数的原函数不能用初等函数表达；

② $f(x)$的原函数表达式太复杂，计算量太大；

③ $f(x)$没有解析表达式，仅知道它在某些离散点处的值。

近似方法：由定积分定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(1)分割　$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n =_i b$

(2)近似　$\Delta s_i = f(\xi)\Delta x_i \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

(3)求和　$S_n = \sum_{i=0}^{n}\Delta s_i = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

(4)求极限$\|\Delta x\| = \max_{1\le i\le n}\{|\Delta x_i|\}$

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} S_n = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

机械地构建：

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots A_n f(x_n) + R[f]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R[f]$$

其中A_i权系数，$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$是$f(x_i)$加权和，

$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 为 $\int_a^b f(x)dx$ 的近似值。

1、插值型数值积分公式

在积分区间$[a,b]$上取有限个点 $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$

作 $f(x)$ 的 **n** 次插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

其中 $l_k(x)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ 为 **n** 次插值 L a g r c基函数。

用 $L_n(x)$ 近似代替被积函数 $f(x)$，则得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x) dx$$

若记 $A_k = \int_a^b l_k(x)dx$

$$= \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} dx$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = I_n(f)$$

这就是插值型数值求积公式, 其中 A_k 称为求积系数

2、牛顿-科特斯求积公式

积分区间的等分点作为求积节点 $\Rightarrow$ 牛顿—科特斯公式

即 Newton-Cotes公式是指等距节点下使用Lagrange插值多项式建立的数值求积公式。

求积公式构造

在积分区间$[a,b]$上取$n+1$个等距节点 $x_k = a + kh \quad (k = 0,1,\cdots,n)$，

其中$h = \dfrac{b-a}{n}$，作n次拉格朗日插值多项式$L_n(x)$.

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$\text{其中}\quad A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne k}} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx$$

注意是等距节点

假设$x=a+th$ 由$x\in[a,b]$ 可知$t\in[0,n]$

$$A_k=\int_a^b \prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne k}} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx = \int_0^n \left(\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne k}} \frac{(t-j)h}{(k-j)h}\right)\cdot h\cdot dt$$

$$=\frac{h\cdot(-1)^{n-k}}{k!\cdot(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne k}}(t-j)dt$$

$$= (b-a)\cdot \boxed{\frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot k!\cdot(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{0\le j\le n \\ j\ne k}}(t-j)dt}$$

$$A_k = (b-a)\cdot C_k^{(n)} \qquad C_k^{(n)}\text{称为}Cotes\text{系数}$$

所以Newton-Cotes公式化为

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$$

几个低阶的牛顿-科特斯公式

当n=1, 2, 4时的公式是最常用的低阶公式。

（1）梯形公式 取$n=1$,则$x_0=a$, $x_1=b$, $h=b-a$

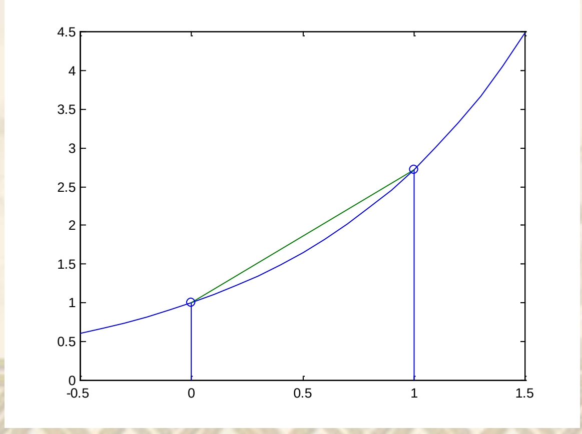
Cotes系数为 $C_0^{(1)}=-\int_0^1(t-1)dt=\frac{1}{2}$ $C_1^{(1)}=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}$

求积公式为

$$I_1(f)=(b-a)\sum_{k=0}^{1}C_k^{(1)}f(x_k)=\frac{b-a}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

即 $I_1(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

梯形求积公式



（2）辛浦生公式 取$n=2$,则$x_0=a$, $x_1=\dfrac{b+a}{2}$,$x_2=b$,$h=\dfrac{b-a}{2}$

Cotes系数为 $C_0^{(2)}=\dfrac{1}{4}\int_0^2(t-1)(t-2)dt=\dfrac{1}{6}$

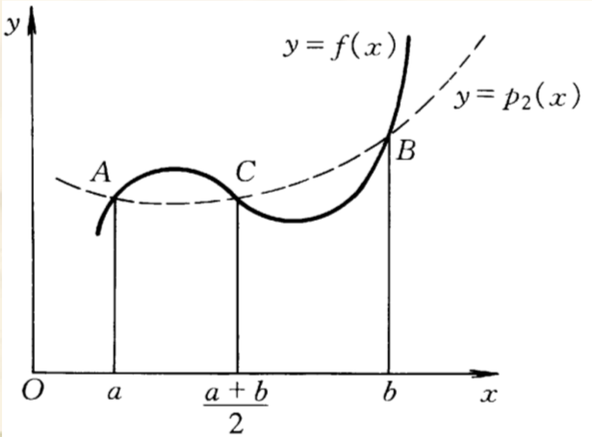
$$C_1^{(2)}=\frac{-1}{2}\int_0^2 t(t-2)dt=\frac{4}{6}$$

$$C_2^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2(t-1)tdt=\frac{1}{6}$$

求积公式为

$$I_2(f)=(b-a)\sum_{k=0}^{2}C_k^{(2)}f(x_k)$$

$$=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$



Simpson求积公式.

（3）科特斯公式　n=4时

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right]$$

科特斯系数表

n	$C_k^{(n)}$
1	$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}.$
4	$\frac{7}{90},\frac{16}{45},\frac{2}{15},\frac{16}{45},\frac{7}{90}.$
5	$\frac{19}{288},\frac{25}{96},\frac{25}{144},\frac{25}{144},\frac{25}{96},\frac{19}{288}.$

3、求积公式的代数精度

为使求积公式能对更多的积分具有较好的实际计算意义, 要求它对尽可能多的被积函数都准确地成立.

定义 如果求积公式对于任何不高于 **m** 次的代数多项式都准确成立,则称该求积公式具有 **m** 次代数精确度。

即：求积公式 $I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \ = I_n(f)$

若具有m 阶代数精度, 则对于

$$f(x)=1, x, x^2, \cdots, x^m \quad \text{or} \quad f(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

有： $$\int_a^b f(x)dx \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

定理 含有$n+1$个节点的插值型数值积分公式的代数精度至少是n。

证　因为插值型数值积分公式的余项

$$R_n[f]=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)dx$$

所以对于次数不超过n的多项式，有$R_n[f]=0$，

从而其代数精度至少是n。

n+1个节点的拉格朗日插值多项式：

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x)\equiv f(x)$$ （n次多项式）

容易验证梯形公式，辛浦生公式，科特斯公式分别具有1，3，5次代数精度。

4、复化求积公式

n+1个节点的插值型求积公式，代数精度至少是 n

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = I_n(f)$$

将区间[a, b]适当分割成若干个字区间，对每个子区间使用低阶求积公式，是提高积分精度的一个常用的方法，即复化求积。

（1）复化梯形公式

将定积分$\int_a^b f(x)dx$的积分区间$[a,b]$分割为n等份

分割点为 $x_k = a + kh,\quad k = 0,1,\cdots,n \quad h = \dfrac{b-a}{n}$

在子区间$[x_k, x_{k+1}](k = 0,1,\cdots,n-1)$上使用梯形公式

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]$$

相加后得复化梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

(2) 复化辛浦生公式

将积分区间$[a,b]$分割为N子区间$[x_{2k},x_{2k+2}](k=0,1,\cdots,N-1)$,

每个子区间的中点$x_{2k+1}(k=0,1,\cdots,N-1)$,子区间长度为$h=\dfrac{b-a}{N}$.

在每个子区间上用辛浦森公式:

$$I_k=\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}}f(x)dx\approx\frac{h}{6}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right]$$

相加后得复化辛浦生公式

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{N-1}f(x_{2k+1})+2\sum_{k=1}^{N-1}f(x_{2k})+f(b)\right]\underline{\underline{\text{记为}}}S_N$$

式中 $x_k=a+k\dfrac{h}{2}(k=0,1,\cdots,2N-1)$.

(3) 复化柯特斯公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{90}[7f(a)+32\sum_{k=1}^{N} f(x_{4k-3})+12\sum_{k=1}^{N} f(x_{2k-2})$$

$$+32\sum_{k=1}^{N} f(x_{4k-1})+14\sum_{k=1}^{N-1} f(x_{4k})+7f(b)] \underline{\underline{\text{记为}}} C_N$$

式中 $h=\dfrac{b-a}{N}, x_k = a+k\dfrac{h}{4}(k=0,1,\cdots,2N-1).$

5、变步长求积公式

设区间 a,b 划分为 n 等分，即步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$，

计算 $T_n\ h$ ：然后将区间 a,b 分点加密一倍，即步长

缩小一半为 $\dfrac{h}{2}$，再计算出 $T_{2n}(\dfrac{h}{2})$。如果

$$\left|T_{2n}(\frac{h}{2})-T_n(h)\right|\le\varepsilon$$

则取 $T_{2n}(\dfrac{h}{2})$ 作为定积分的近似值。

（1）变步长梯形求积公式

将定积分$I=\int_a^b f(x)dx$的积分区间$[a,b]$分割为n等份

由复化梯形公式

$$T_n=\frac{b-a}{2n}[f(a)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)+f(b)]$$

如果将$[a,b]$分割为$2n$等份，则

$$T_{2n}=\frac{b-a}{4n}[f(a)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)+2\sum_{j=0}^{n-1}f(x_{j+1/2})+f(b)]$$

其中 $x_{j+1/2}=x_j+\frac{1}{2}h=a+(j+\frac{1}{2})h$

$x_j \qquad x_{j+1/2} \qquad x_{j+1}$

$$T_{2n} = \frac{b-a}{4n}[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + 2\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+1/2}) + f(b)]$$

$$= \frac{b-a}{4n}[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)] + \frac{b-a}{4n} 2\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+1/2})$$

$$= \frac{1}{2}T_n + \frac{b-a}{2n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+1/2})$$

$$= \frac{1}{2}\left(T_n + H_n\right)$$

$$H_n = h\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+1/2})$$ 只需计算此项

例 用区间逐次分半的梯形公式计算 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$

要求其误差不超过 $\varepsilon=\frac{1}{2}\times 10^{-5}$ （其精确值为 π ）。

解 编程计算，其结果见下表

$2^k=N$	T_N	$\lvert T_{2N}-T_N\rvert$	$2^k=N$	T_N	$\lvert T_{2N}-T_N\rvert$
2^0	3.0		2^5	3.141430	0.0004
2^1	3.1	0.1	2^6	3.141553	0.0001
2^2	3.131177	0.03	2^7	3.141583	0.00003
2^3	3.138989	0.007	2^8	3.141590	0.000007
2^4	3.140942	0.001	2^9	3.141592	0.000002

(2) 变步长Simpson求积公式

由复化Simpson公式

$$S_n(h)=\frac{h}{3}\left(\frac{f(a)-f(b)}{2}+\left(\sum_{j=1}^{n}f(a+jh)+2f\left(a+\left(j-\frac{1}{2}\right)h\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{h\left[\frac{f(a)-f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{n}f(a+jh)\right]+2h\sum_{j=1}^{n}f\left(a+\left(j-\frac{1}{2}\right)h\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(T_n(h)+2H_n(h))$$

所以$S_{2n}(\frac{h}{2})=\frac{1}{3}(T_{2n}(\frac{h}{2})+2H_{2n}(\frac{h}{2}))$

6、Gauss 求积公式

含有n+1个节点的插值型数值积分公式的代数精度至少是 n，而不可能超过 2n+1。

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R[f]$$

适当选取节点可使插值型数值积分公式具有2n+1阶代数精度。

适当选取 $\{x_k\} \Rightarrow \{A_k\} \quad k = 0,1,2,\cdots,n$

使得对于 $f(x)=1, x, x^2, \cdots, x^{2n+1}$ or $f(x)=\sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$ 精确成立

则数值积分公式称为Gauss 求积公式，$\{x_k\}_{k=0}^{n}$ 称为Gauss点

定理：插值型求积公式的节点 $x_k\ \ k=0,1,2,\cdots,n$ 是 Gauss 点的充分必要条件

$$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)Q(x)dx=0$$

其中，$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$，$Q\ \ x$ 为任意不超过 n 次的多项式。

即：Gauss 点 $x_k\ \ k=0,1,2,\cdots,n$ 是 $\omega_{n+1}(x)$ 的零点。

推论：在区间 a,b 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式 $P_{n+1}\ \ x$ 的零点是 Gauss 点。

证明：（1）必要性： $x_k \ \ k=0,1,2,\cdots,n$ 是 Gauss 点 $\Rightarrow \int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)Q(x)dx=0$

节点 $x_k \ \ k=0,1,2,\cdots,n$ 是 Gauss 点，即积分公式：

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

具有 2n+1 阶代数精度，即对于任意不超过 2n+1 次的多项式 $P_{2n+1}(x)$，

$$\int_a^b \rho(x)P_{2n+1}(x)dx \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k P_{2n+1}(x_k)$$

现： $Q \ \ x$ 为不超过 n 次的多项式， $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ 为 n+1 次

$\omega_{n+1}(x)\ Q \ \ x$ 不超过 2n+1 次的多项式。

有 $\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)Q\left(x\right)dx \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k\omega_{n+1}(x_k)Q\left(x_k\right)=0 \qquad \because \omega_{n+1}(x_k)=0$

（1）充分性：$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)Q\left(x\right)dx = 0 \Rightarrow x_k \quad k = 0,1,2,\cdots,n$ 是 Gauss 点

若：$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)Q\left(x\right)dx = 0$； $\omega_{n+1}(x)\ Q\ \ x$ 不超过 2n+1 次的多项式。

取任意不超过 2n+1 次的多项式 $P_{2n+1}(x)$，

可：$P_{2n+1}(x) = \omega_{n+1}(x)Q(x) + \varphi(x)$； $\varphi(x)$，$Q\ \ x$ 不超过 n 次的多项式。

$$\int_a^b \rho(x)P_{2n+1}(x)dx = \int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)Q(x)dx + \int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx$$

而积分公式至少具有 n 阶代数精度，即对于任意不超过 n 次的多项式 $\varphi(x)$，

$$\int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k\varphi(x_k)$$

得：$\int_a^b \rho(x)P_{2n+1}(x)dx \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k\varphi(x_k) \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k P_{2n+1}(x_k)$ 具有 2n+1 阶代数精度。

$$\because P_{2n+1}(x_k) = \omega_{n+1}(x_k)Q(x_k) + \varphi(x_k) = \varphi(x_k)$$

构造 Gauss 求积公式的基本方法：

（1）构建或找到正交多项式 $\{P_k(x)\}\quad k=0,1,2,\cdots,n+1$

$$\int_a^b \rho(x)P_i(x)P_j(x)dx = C_i\delta_{ij}\quad i,j=0,1,2,\cdots,n+1$$

（2）求出：$P_{n+1}(x)=0$ 的 $n+1$ 个零点$x_i\quad i=1,2,\cdots,n+1$

（3）由这些GAUSS点求出：

$$A_k=\int_a^b \rho(x)l_k(x)dx=\int_a^b \rho(x)\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{n+1})}dx\quad k=1,2,\cdots,n+1$$

（4）GAUSS求积分公式：

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n+1}A_k f(x_k)=G_{n+1}[f]$$

几个常用的正交多项式及Gauss 求积公式

(1) Legendre 多项式，及 Gauss-Legendre 求积公式

在区间 $[-1,1]$ 上，带权 $\rho(x)=1$ 的正交多项式系 $\{P_n(x)\}$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ 称为 Legendre 多项式，它的一般形式为

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=0,1,2,\ldots) \end{cases}$$

正交性

$$(P_m(x),P_n(x))=\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases} 0 & (m\neq n) \\ \dfrac{2}{2n+1} & (m=n) \end{cases}$$

记 $P_n(x)=0$ 的 n 个零点（Gauss 点）：$x_1,x_2,\cdots,x_n$

可求出：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ （Gauss 系数，有专用程序）

则：$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ 称为 Gauss-Legendre 求积公式。

若：求 $\int_a^b f(x)dx$； 可作变量代换 $x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t$

得：$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t)dt$

$$= \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f\left(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t_k\right)$$

其中：$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 为 $P_n \quad x \ = 0$ 的 n 个零点（Gauss 点）。

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相应的 Gauss 系数。

与复化梯形公式，复化 Simpson 公式类似，我们也可以构造复化 Gauss-Legendre 求积公式。

可将区间 a,b 分成 n 等分，则 $h=\dfrac{b-a}{n}$， $x_k=a+kh$

$k=0,1,2,\cdots,n$ 对每个子区间$[x_k,x_{k+1}]$用 N 点 Gauss-Legendre 求积公式。

(2) Cebyshëv 多项式，及 Gauss-Cebyshëv 求积公式

Cebyshëv 多项式：$T_n\ x\ = \cos\ n \arccos x \qquad n = 0,1,2,\cdots$

在区间 $-1,1$ 上，带权 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交

$$(T_m(x),T_n(x)) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n = 0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (m = n \neq 0) \end{cases}$$

$T_n\ x$ 在 $-1,1$ 内 n 个零点 $x_k = \cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi \Rightarrow A_k \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$

则得：$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ 称为 Gauss- Chebyshëv 求积公式。

(3) Laguerre 多项式，及 Gauss-Laguerre 求积公式

Laguerre 多项式： $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n] \quad (n = 0,1,2,\ldots)$

正交性

$$(L_m(x), L_n(x)) = \int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ C(n) & (m = n) \end{cases}$$

记 $L_n(x) = 0$ 的 n 个零点（Gauss 点）： $x_1, x_2, \cdots, x_n$

可求出： $A_1, A_2, \cdots, A_n$ （Gauss 系数）

则得： $\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ 称为 Gauss-Laguerre 求积公式。

(4) Hermite 多项式，及 Gauss-Hermite 求积公式

Hermite 多项式 $$\begin{cases} H_0(x)=1 \\ H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad (n=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

正交关系

$$(H_m(x),H_n(x))=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx=\begin{cases} 0 & (m\neq n) \\ 2^n n!\sqrt{n} & (m=n) \end{cases}$$

记$H_n \;\; x \;\; =0$的 n 个零点（Gauss 点）：$x_1,x_2,\cdots,x_n$

可求出：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ （Gauss 系数）

则得：$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k)$ 称为 Gauss-Hermite 求积公式。

7、多重积分

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)dy; \quad G(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

例如用复化梯形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$

取 $h_1 = (b-a)/n_1; \quad h_2 = (d-c)/n_2$

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \frac{h_1}{2}\left[f(a,y) + 2\sum_{k=1}^{n_1-1} f(x_k,y) + f(b,y) \right]$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)dy = \frac{h_2}{2}\left[G(c) + 2\sum_{k=1}^{n_2-1} G(y) + G(d) \right]$$

同样可用Gauss积分

练习 3 、数值积分 $I=\int_a^b f(x)dx$

一、 建立变步长**Simpson**求积公式、计算程序。

二、 建立变步长Gauss求积公式、计算程序。

要求：简述数值计算方法要点，编程序计算，程序验证。

例如取：$f(x)=(6.0-10x+5x^2)e^{-1.5x}$

计算 $I=\int_0^5 f(x)dx$ （注：这里是可解析计算的）

程序计算结果与解析计算结果比较。