第二章　高速粒子运动学

高速运动的微观粒子体系：相对论效应、量子效应；

忽略引力作用

狭义相对论效应

光速不变原理：在各种惯性系中测量得到的真空中的光速相同。

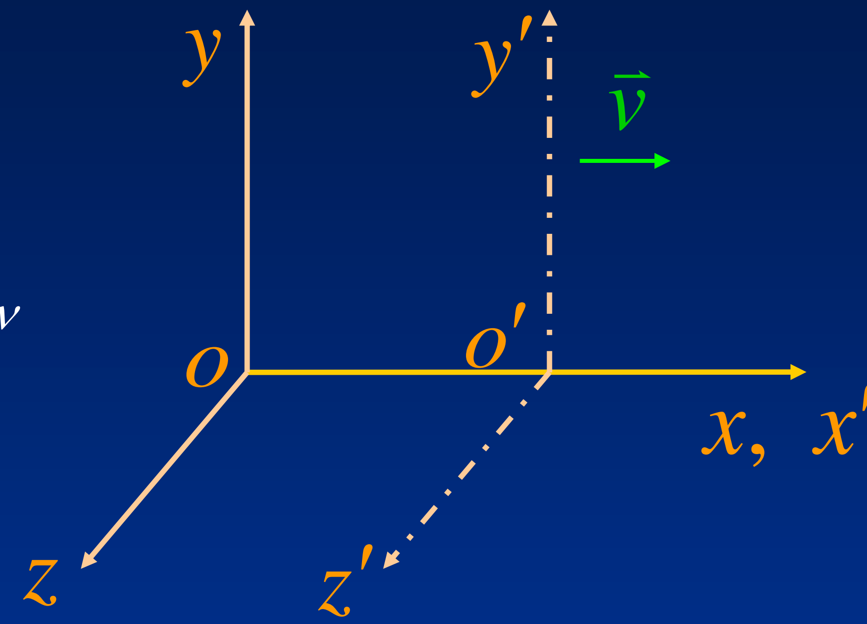
狭义相对性原理：所有的物理基本规律都应在任一惯性系中具有相同的形式。

狭义相对论中，任意两个惯性系通过Lorentz变换相联系。

§2.1 Lorentz变换

一、时空坐标的Lorentz变换

$$\left.\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}\right\} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$



$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

二、四动量的Lorentz变换

$$p^{\mu} = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \vec{p})$$

$$\left.\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \beta p^1) \\ p'^1 &= \gamma(p^1 - \beta E) \\ p'^2 &= p^2 \\ p'^3 &= p^3 \end{aligned}\right\} p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}$$

Lorentz不变式：$E^2 - \vec{p}^2 = E'^2 - \vec{p}'^2 =$ 常量

1)单粒子（m)：$E^2 - \vec{p}^2 = E'^2 = m^2$;

2)多粒子体系（M）：$\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2 = E_{cm}^2 = s$

三、Bjorken度规和Pauli度规

Bjorken度规

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$
$$= (t, x, y, z)$$
$$g_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$$
$$A \cdot B = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$
$$p^2 = m^2$$

Pauli 度规

$$x_{\mu} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= (x, y, z, it)$$
$$g_{\mu\nu} = diag(1,1,1,1)$$
$$A \cdot B = \vec{A} \cdot \vec{B} - A_0 B_0$$
$$p^2 = -m^2$$

Bjorken度规下：

$$A \cdot A = A_0 A_0 - \vec{A} \cdot \vec{A}$$
$$A^2 > 0, \quad \text{类时矢量}$$
$$A^2 < 0, \quad \text{类空矢量}$$

§2.2 实验室系和质心系

一、质心系和反应有效能量 （两粒子系统）

1、“打靶”实验

高速粒子（炮弹）m_1;　　　靶粒子m_2.

实验室系（Lab系）：相对于实验室或靶粒子静止的参考系；

质心系（c. m. 系）：相对于入射粒子和靶粒子的质心静止的参考系；

两粒子的四动量：

Lab系：$p_{1Lab} = (E_{1Lab}, \vec{p}_{1Lab})$, $p_{2Lab} = (m_2, \vec{0})$

c.m.系：$p_{1cm} = (E_{1cm}, \vec{p}_{1cm})$, $p_{2cm} = (E_{2cm}, \vec{p}_{2cm})$

反应的有效能量：体系在质心系中的总能量。

$$E_{cm} = E_{1cm} + E_{2cm}$$

总的四动量：

Lab系：$P_{Lab} = p_{1Lab} + p_{2Lab}$

c.m.系：$P_{cm} = p_{1cm} + p_{2cm} = (E_{cm}, \vec{0})$

Lorentz 不变量：

$$P_{Lab}^2 = P_{cm}^2 = P^2,$$

$$P^2 = E_{cm}^2 = (p_{1Lab} + p_{2Lab})^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_{1Lab} \cdot p_{2Lab}$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{1Lab}$$

$$\therefore \quad E_{cm} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{1Lab}}.$$

当 $2m_2E_{1Lab} >> m_1^2 + m_2^2$ 时，

$$E_{cm} \approx \sqrt{2m_2E_{1Lab}}.$$

能量利用的效率低

2、对撞实验

常用质量相同、能量相同的两束粒子进行对撞，

如e^+e^-，e^-e^-，pp，$p\bar{p}$对撞，这时质心系即实验室系，

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1),\ p_2 = (E_2, -\vec{p}_1)$$

$$E_{cm}^2 = P^2 = (p_1 + p_2)^2$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 + \vec{p}_1^{\,2})$$

$$\approx 4E_1E_2$$

Fermi Lab，$p\bar{p}$对撞机，称为TEVOTRON,

$$E_{cm}=2\text{TeV},\quad E_p=E_{\bar{p}}=1\text{TeV}.$$

$$(m_p\approx 1\text{GeV},\ 1\text{TeV}=1\times 10^{12}\text{eV},\ 1GeV=1\times 10^{9}\text{eV})$$

若改成打靶实验，则需

$$E_{1Lab}=\frac{E_{cm}^2}{2m_p}=\frac{4\text{TeV}^2}{(2\times 10^{-3})\text{TeV}}=2000\text{TeV}.$$

二、反应Q值和阈能

反应Q值（Q）：反应前后粒子的动能差；

反应阈能（$E_{阈}$）：产生吸热反应最小可能的入射粒子实验室能量。

$$m_1 + m_2 \to m_3 + m_4,$$

$$E_i = T_i + m_i,$$

$$Q = (T_3 + T_4) - (T_1 + T_2) = (m_1 + m_2) - (m_3 + m_4).$$

$$\begin{cases} Q > 0: & \text{放热反应} \\ Q < 0: & \text{吸热反应} \end{cases}$$

对于打静止靶（$E_2 = m_2$），

$$E_{阈} = \frac{(m_3 + m_4)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2m_2}.$$

三、一些物理量在实验室系和质心系之间的变换关系

参见：章乃森《粒子物理学》（上册）P102-108;

曾谨言《量子力学》

§2.3　相空间

一、n个粒子反应的Lorentz不变量

$$1 \to 2+3+\cdots+n-1, \qquad 1+2 \to 3+4+\cdots+n-2,$$

n个粒子的四动量：$p_i(i=1,2,\cdots n)$

引入符号：$(p_i, p_j) = p_i \cdot p_j = g^{\mu\nu} p_{i\mu} p_{j\nu}$.

n个粒子反应中独立的Lorentz不变量个数：$\dfrac{n(n-3)}{2}$

n	3	4	5	6	7	8	9
衰变末态粒子数	2	3	4	5	6	7	8
反应末态粒子数		2	3	4	5	6	7
独立不变量个数	0	2	5	9	14	20	27

二、n体末态相空间

两粒子碰撞反应

$$a+b\to 1+2+\cdots+n,$$

n个末态粒子的能量、动量共有$4n$个分量，

质壳条件：$p_i^2=m_i^2$，（n个限制条件）

总的能动量守恒：$p_a+p_b=\sum_{i=1}^{n}p_i$，（4个限制条件）

n个末态粒子的自由度：$4n-(n+4)=3n-4$

由这$3n-4$个独立的能量、动量分量所张成的$3n-4$维空间就称为n体末态相空间。

两粒子碰撞反应 $a+b\to 1+2+\cdots+n$ 的反应截面：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\propto|\mathcal{M}|^2 d\phi_n.$$

相空间因子，运动学因素

振幅，动力学因素

n 个末态粒子的相空间体积元：

$$d^4p_1d^4p_2\cdots d^4p_n,$$

其中

$$d^4p_i=dp_{ix}dp_{iy}dp_{iz}dE_i=d^3p_idE_i.\quad(\text{Lorentz不变})$$

单个粒子四维动量空间体积元

反应初、末态的所有粒子都是自由粒子，须满足：

$$p_i^2 = g_{\mu\nu} p_i^\mu p_i^\nu = E_i^2 - \vec{p}_i^{\,2} = m_i^2, \longrightarrow \delta(p_i^2 - m_i^2)$$

$$E_i \geq 0. \longrightarrow \theta(E_i)$$

（Lorentz不变）

单个自由粒子的四维动量空间体积元为：

$$d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2)\theta(E_i).$$

$$\int d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2)\theta(E_i)$$

$$= \int d^3 p_i dE_i \delta(E_i^2 - \vec{p}_i^{\,2} - m_i^2)\theta(E_i)$$

$$= \int \delta(E_i^2 - \vec{p}_i^{\,2} - m_i^2)\theta(E_i) d^3 p_i \frac{d(E_i^2 - \vec{p}_i^{\,2} - m_i^2)}{2E_i}$$

$$= \left. \frac{d^3 p_i}{2E_i} \right|_{E_i = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2}}$$

Lorentz不变的n体末态相空间体积元：

$$d\phi_n(p_a, p_b; p_1, p_2, \cdots, p_n) = \delta^4(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_i)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}.$$

n体末态相空间积分：

$$\phi_n = \int \delta^4(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_i)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}.$$ （$3n-4$重积分）

二体末态相空间：

$$\phi_2 = \int \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2)[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2 \frac{d^3 p_1}{2E_1}\frac{d^3 p_2}{2E_2}.$$

二体末态相空间的计算：（质心系中）

质心系总能量：$E^* = E_a^* + E_b^* = E_1^* + E_2^*$

$$\phi_2 = \int \delta^4(p_a^* + p_b^* - p_1^* - p_2^*)[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2 \frac{d\vec{p}_1^*}{2E_1^*} \frac{d\vec{p}_2^*}{2E_2^*}$$

$$= \int \delta(E_a^* + E_b^* - E_1^* - E_2^*) \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{d\vec{p}_1^*}{4E_1^* E_2^*}$$

$$= \int \frac{\delta(E^* - E_1^* - E_2^*)}{4E_1^* E_2^*} \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{d\vec{p}_1^*}{dE^*} dE^*$$

$$= \int \frac{\left|\vec{p}_1^*\right|^2}{4E_1^* E_2^*} \frac{1}{(2\pi)^6} d\Omega \frac{d\left|\vec{p}_1^*\right|}{dE^*} .$$

$$\because \quad |\vec{p}_1^{\,*}| = |\vec{p}_2^{\,*}| = |\vec{q}^{\,*}|,$$

$$\therefore \frac{dE^*}{d|\vec{p}_1^{\,*}|} = \frac{dE_1^*}{d|\vec{p}_1^{\,*}|} + \frac{dE_2^*}{d|\vec{p}_2^{\,*}|} = |\vec{q}^{\,*}|\left(\frac{1}{E_1^*} + \frac{1}{E_2^*}\right) = |\vec{q}^{\,*}|\frac{E^*}{E_1^* E_2^*},$$

$$\phi_2 = \frac{1}{(2\pi)^6}\int \frac{|\vec{q}^{\,*}|}{4E^*}\, d\Omega \, .$$

若末态粒子在质心系中的分布是各向同性的，则

$$\phi_2 = \frac{1}{2(2\pi)^5}\frac{|\vec{q}^{\,*}|}{E^*}.$$

相空间的粗略比较：

简单假设：所有末态粒子的质量都为0.

则各向同性的末态相空间积分得到

$$\phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^5},$$

$$\phi_3 = \frac{s}{32(2\pi)^7},$$

$$\therefore \quad \frac{\phi_2}{\phi_3} = \frac{s}{32\pi^2}.$$

一般地，

$$\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n}=\frac{s}{16\pi^2 n(n-1)}.$$

$$\phi_n=\frac{1}{4(2\pi)^5(n-1)!(n-2)!}\left[\frac{s}{16\pi^2}\right]^{n-2}.$$

从运动学上考虑，对有限的体系总能量s,产生的粒子数越多，相空间（概率）越小。

无量纲化的n体末态相空间： $\phi_n'=\frac{\phi_n}{s^{n-2}}.$

$m_i=0$时， $\phi_2':\phi_3'=1:315.8$

一般地，末态粒子增加一个，无量纲化的相空间就要减少两个数量级。

三、不变质量谱

$$A+B\rightarrow 1+2+\cdots+n,$$

$$A+B\rightarrow M+(k+1)+\cdots+n$$

$$\hookrightarrow 1+2+\cdots+k,$$

不变质量M：

$$P^2=(E_1+E_2+\cdots+E_k)^2+(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\cdots+\vec{p}_k)^2$$

$$=(E_{1cm}+E_{2cm}+\cdots+E_{kcm})^2$$

$$=M^2.$$

例：

$$\pi^- + p \to \pi^+ + \pi^- + n, \qquad (a)$$

$$\pi^- + p \to \rho^0 + n \qquad (b)$$

$$\quad\quad \llcorner\!\!\to 1+2+\cdots+k,$$

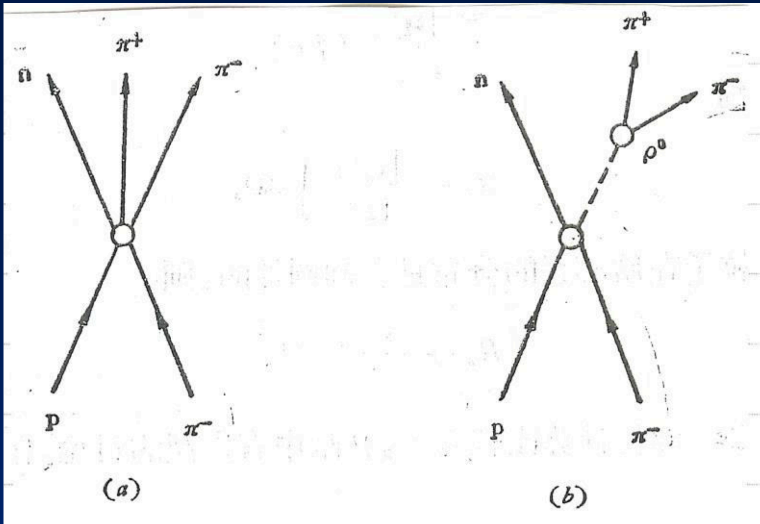


图 2.5　π^-p 碰撞产生 $\pi^+\pi^-n$ 的两种可能反应过程

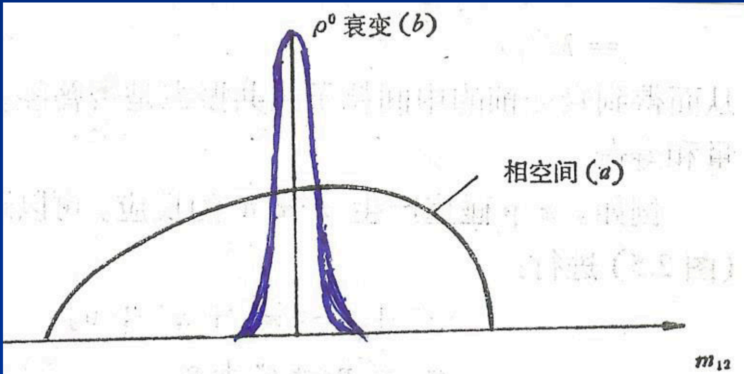
(a) $\pi^-p\to\pi^+\pi^-n$ 反应，(b) $\pi^-p\to\rho^0 n$ 反应
$\llcorner\!\to\pi^+\pi^-$

(a)模式的$M_{\pi^+\pi^-}$谱：

由相空间决定的统计分布；

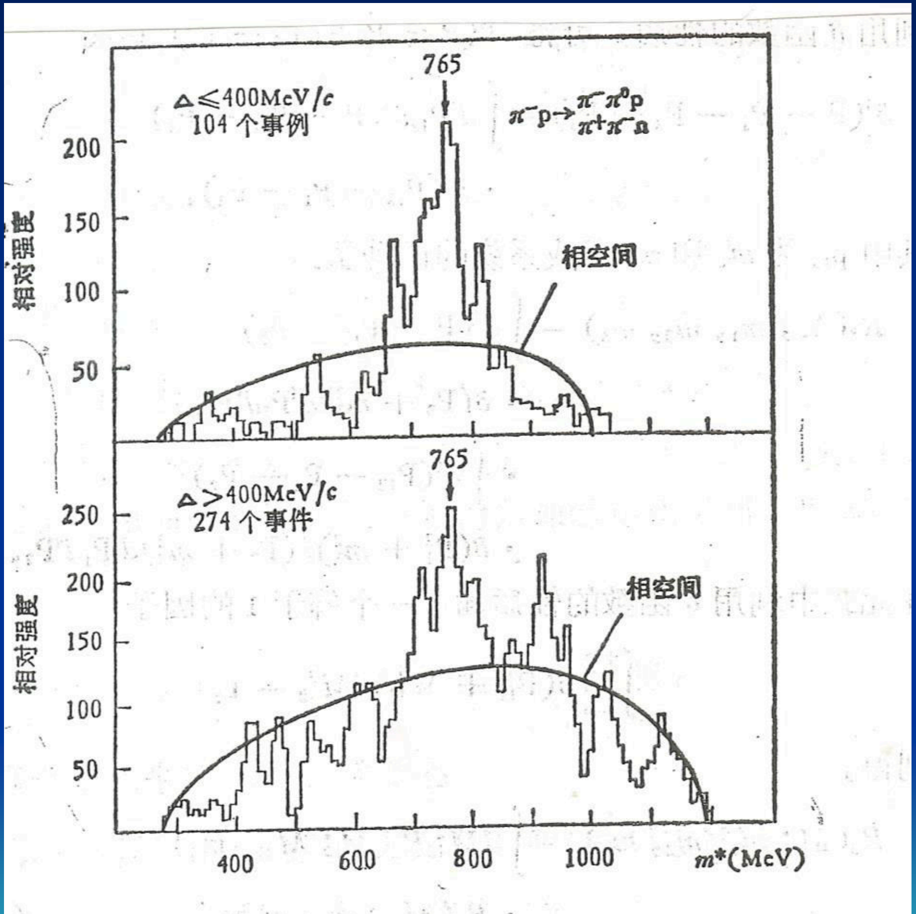
(b)模式的$M_{\pi^+\pi^-}$谱：

Breit - Wigner共振曲线分布。



.6　反应 2.132 (a) (b) 两过程不变质量谱

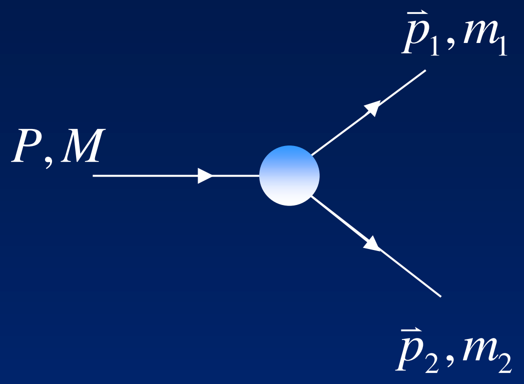
实际的反应过程，(a)和(b)模式共存，不变质量谱是在统计分布的基础上有一个共振峰。



$\pi^- + p \to \begin{matrix} \pi^+ + \pi^- + n \\ \pi^- + \pi^0 + p \end{matrix}$ 反应中 $(\pi^+\pi^-)$ 及 $(\pi^-\pi^0)$ 介子对的不变质量谱

§ 2.4　几类典型的运动学问题

一、两体衰变



在母粒子静止系中，

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M}, \qquad (2.4.1)$$

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}}{2M}, \qquad (2.4.2)$$

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} |\mathcal{M}|^2 \frac{|\vec{p}_1|^2}{M^2} \mathrm{d}\Omega, \qquad (2.4.3)$$

Lorentz不变振幅

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\phi_1 \mathrm{d}(\cos\theta_1)$$

粒子1的立体角

二、 2→2 反应 （1+2→3+4）

1、 s,t,u不变量

四动量守恒要求：

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4.$$

定义Mandelstam变量：

$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$, —— 质心系总能量的平方

$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$, —— 1和3粒子间四动量交换的平方

$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$, —— 1和4粒子间四动量交换的平方

s,t,u均为Lorentz不变量，满足

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_3)^2 \\ &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + (p_1 + p_2 - p_3)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

（s,t,u中只有两个独立。

采用Mandelstam变量，二体散射面可写为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{64\pi s}\frac{1}{|\vec{p}_{1cm}|^2}\left|\mathcal{M}\right|^2. \qquad (2.4.6)$$

质心系中，

$$t=(E_{1cm}-E_{3cm})^2-(|\vec{p}_{1cm}|-|\vec{p}_{3cm}|)^2-4|\vec{p}_{1cm}||\vec{p}_{3cm}|\sin\frac{\theta_{cm}}{2},$$

θ_{cm}为1和3粒子间的夹角，

$$E_{1cm}=\frac{s+m_1^2-m_2^2}{2\sqrt{s}},\qquad E_{2cm}=\frac{s+m_2^2-m_1^2}{2\sqrt{s}},$$

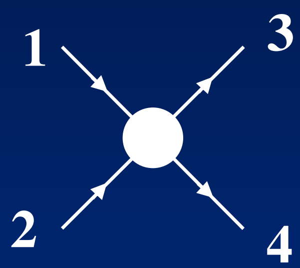
$$E_{3cm}=\frac{s+m_3^2-m_4^2}{2\sqrt{s}},\qquad E_{4cm}=\frac{s+m_4^2-m_3^2}{2\sqrt{s}},$$

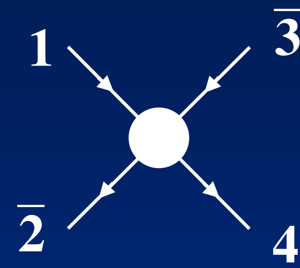
$$p_{icm}=\sqrt{E_{icm}^2-m_i^2},\qquad p_{1cm}=\frac{p_{1lab}m_2}{\sqrt{s}}.$$

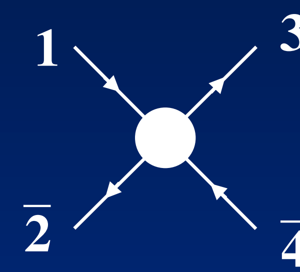
2. s道、t道、u道

反应的四动量守恒条件：

$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$，　$p_1 + (-p_3) = (-p_2) + p_4$，　$p_1 + (-p_4) = p_3 + (-p_2)$







定义反应道：

s道：$1+2 \to 3+4$　　$s = (p_1 + p_2)^2$, —— s道质心系总能量的平方

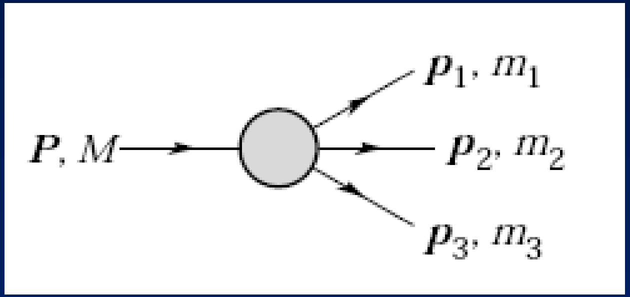
t道：$1+\bar{3} \to 4+\bar{2}$　　$t = (p_1 - p_3)^2$, —— t道质心系总能量的平方

u道：$1+\bar{4} \to 3+\bar{2}$　　$u = (p_1 - p_4)^2$. —— u道质心系总能量的平方

s道,t道,u道具有交叉对称性，其振幅具有相同的形式

三、三体衰变，Dalitz图

$$M \to m_1 + m_2 + m_3$$



定义： $p_{ij} = p_i + p_j, \quad m_{ij}^2 = p_{ij}^2,$

则三个Lorentz不变的m_{ij}^2为

$$m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2,$$
$$m_{23}^2 = (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2, \qquad (2.4.8)$$
$$m_{31}^2 = (p_3 + p_1)^2 = (P - p_2)^2,$$

满足： $$m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{31}^2 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \qquad (2.4.9)$$

取值范围（物理范围）如下：

$$(m_1 + m_2)^2 \le m_{12}^2 \le (M - m_3)^2,$$
$$(m_2 + m_3)^2 \le m_{23}^2 \le (M - m_1)^2, \qquad (2.4.10)$$
$$(m_3 + m_1)^2 \le m_{31}^2 \le (M - m_2)^2.$$

取母粒子静止系，

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3=0,$$

三个末态粒子的动量方向可用三个Euler角(α,β,γ)标记，

则衰变宽度

$$\mathrm{d}\Gamma=\frac{1}{(2\pi)^5}\frac{1}{16M}|\mathcal{M}|^2\mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}(\cos\beta)\mathrm{d}\gamma, \quad (2.4.11)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^5}\frac{1}{16M^2}|\mathcal{M}|^2|\vec{p}_1^{\,*}||\vec{p}_3|\mathrm{d}m_{12}\mathrm{d}\Omega_1^*\mathrm{d}\Omega_3, \quad (2.4.12)$$

其中$(|\vec{p}_1^{\,*}|,\Omega_1^*)$为粒子1在$m_{12}$静止系中的动量$(|\vec{p}_3|,\Omega_3)$为粒子3在$M$静止系中的动量，

$$|\vec{p}_1^{\,*}|=\frac{\{[m_{12}^2-(m_1+m_2)^2][m_{12}^2-(m_1-m_2)^2]\}^{1/2}}{2m_{12}}, \quad (2.4.13)$$

$$|\vec{p}_3|=\frac{\{[M^2-(m_{12}+m_3)^2][M^2-(m_{12}-m_3)^2]\}^{1/2}}{2M}. \quad (2.4.14)$$

由(2.4.11)式，对E_2,α,β,γ积分，得到粒子1的能量分布：

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}E_1}=\frac{1}{(2\pi)^5}\frac{1}{16M}\int\left|\mathcal{M}\right|^2\mathrm{d}E_2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}(\cos\beta)\mathrm{d}\gamma, \tag{2.4.15}$$

在(2.4.11)式中对E_1,E_2,α,γ积分，得到末态粒子的角分布：

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}(\cos\beta)}=\frac{1}{(2\pi)^5}\frac{1}{16M}\int\left|\mathcal{M}\right|^2\mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\gamma. \tag{2.4.16}$$

在(2.4.12)式中对角度积分，可得到粒子1和2的不变质量分布

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}m_{12}}=\frac{1}{(2\pi)^5}\frac{1}{16M^2}\int\left|\mathcal{M}\right|^2\left|\vec{p}_1^{\,*}\right|\left|\vec{p}_3\right|\mathrm{d}\Omega_1^*\mathrm{d}\Omega_3. \tag{2.4.17}$$

若衰变母粒子是自旋为0的标量粒子，或对衰变母粒子的自旋求平均，得到

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8M}\left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 \mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2, \qquad (2.4.18)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32M^3}\left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 \mathrm{d}m_{12}^2\mathrm{d}m_{23}^2. \qquad (2.4.19)$$

（Dalitz图的标准表达式）

对于给定的m_{12}^2,

$$\left(m_{23}^2\right)_{\max} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} - \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2}\right)^2, \qquad (\vec{p}_2 \,//\, \vec{p}_3)$$

$$\left(m_{23}^2\right)_{\min} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} + \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2}\right)^2, \quad (\vec{p}_2, \vec{p}_3\text{反平行})$$

$$E_2^* = (m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2)/2m_{12},$$

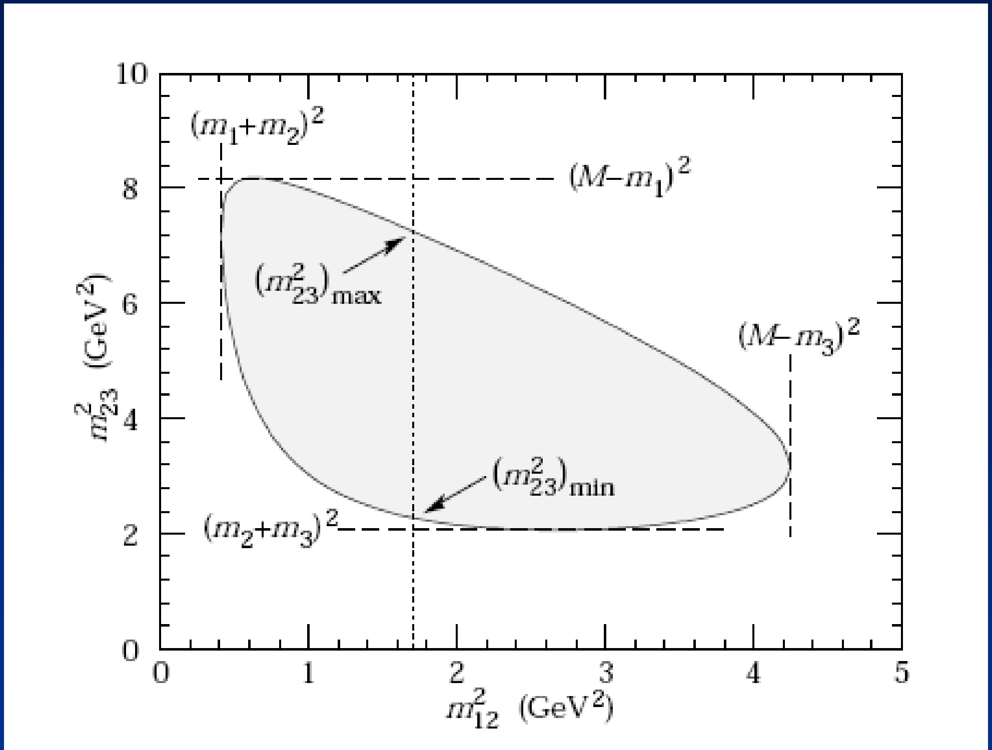
$$E_3^* = (M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)/2m_{12}.$$

总衰变宽度:

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32M^3}\int_{(m_1+m_2)^2}^{(M-m_3)^2} \mathrm{d}m_{12}^2 \int_{\left(m_{23}^2\right)_{\min}}^{\left(m_{23}^2\right)_{\max}} \mathrm{d}m_{23}^2 \left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2.$$

Dalitz图—— 以m_{12}^2和m_{23}^2作为直角坐标轴，把反应事例点的分布标示出来，得到的二维图。

事例点的密度分布正比于 $|\overline{\mathcal{M}}|^2$。

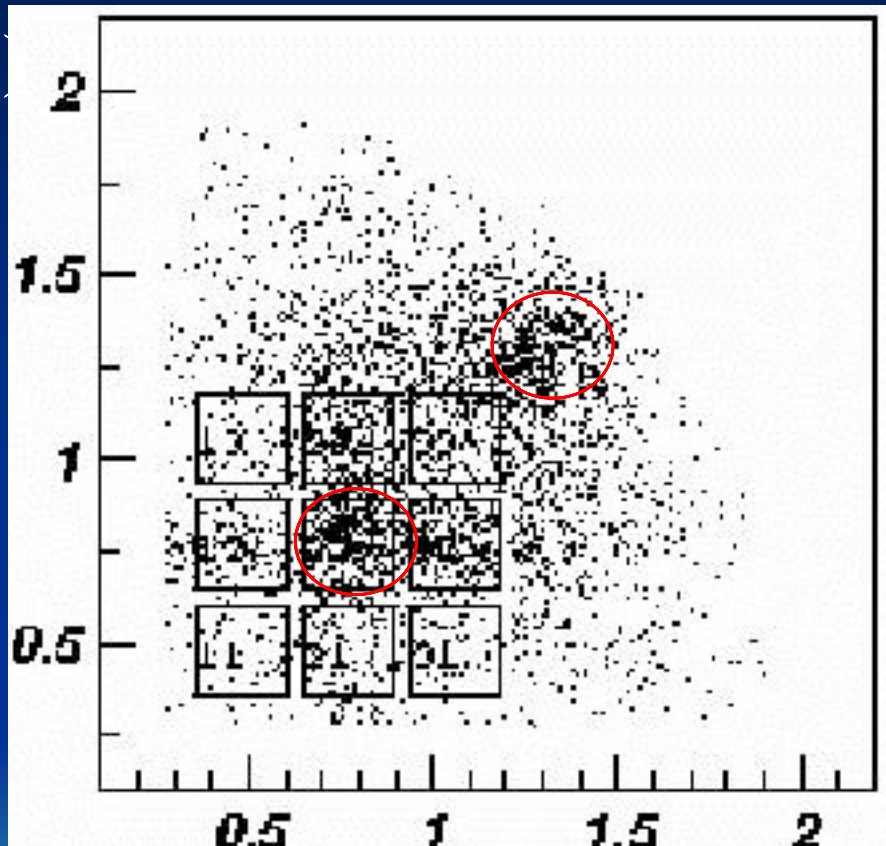


三体末态的Dalitz图

事例点的集结—存在共振态

$\eta_c \to 4\pi$过程的两组$\pi\pi$不变质量的2维散点图:

$M_{\pi_2\pi_3}(\mathrm{GeV}/c^2)$



$M_{\pi_1\pi_4}(\mathrm{GeV}/c^2)$

$M(770\mathrm{MeV})$

$\eta_c \to \rho\rho$

$M(1270\mathrm{MeV})$

$\eta_c \to f_2(1270) f_2$