离散傅立叶变换

1、傅立叶级数、傅立叶积分

$f(x)$ 周期为 2L， 展开为傅立叶级数：

$$\begin{cases} f(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ik\pi x/L} \\ C_k=\dfrac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{+L} f(x)e^{-ik\pi x/L}dx \end{cases}$$

基函数 $\varphi_k(x)=e^{ik\pi x/L}$ 正交归一 $\dfrac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{+L} e^{ik\pi x/L}e^{-ik'\pi x/L}dx=\delta_{kk'}$

可记： $\varphi_\omega(x)=e^{i\omega x},\ \omega=k\pi/L,\ \Delta\omega=\pi/L$

当：$L\to\infty,\ \Delta\omega\to 0$　周期无穷大（非周期函数）

成傅立叶积分

$$\begin{cases} f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\ C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}e^{-i\omega' x}dx=\delta(\omega-\omega')$$

傅立叶级数、傅立叶积分广泛应用于频谱分析

2、离散傅立叶变换

$f(x)$ 周期为 2π，在[0, 2π] 区间，已知：

$$\left\{x_j = 2\pi j / N,\ f(x_j)\right\};\ j = 0,1.\cdots, N-1$$

求近似函数 $P(x)$

(A)插值法

取N个线性无关的基函数： $\varphi_k(x) = e^{ikx},\ k = 0,1,\cdots, N-1$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \varphi_k(x) \quad \text{要求}\ P(x_j) = f(x_j) \quad j = 0,1,\cdots, N-1$$

得线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{i2\pi/N} & \cdots & e^{i2\pi(N-1)/N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{i2\pi(N-1)/N} & \cdots & e^{i2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

矩阵式：$AC = F$

A 的第m行n列元素 $a_{mn}=e^{imn2\pi/N}$ $m,n=0,1,\cdots,N-1$

取第n列 $(\tilde{a}_n)^T = \left(1,\ e^{in2\pi/N},\ e^{i2n2\pi/N},\cdots,e^{i(N-1)n2\pi/N}\right)$

作用于矩阵方程 $(\tilde{a}_n)^T AC = (\tilde{a}_n)^T F$

利用： $$\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik2\pi m/N} e^{-ik2\pi n/N} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik2\pi(m-n)/N} = \begin{cases} N & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

可解得： $$C_n = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-in\frac{2\pi}{N}j}$$

即得： $$P(x) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{ikx} \qquad C_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ik\frac{2\pi}{N}j}$$

或得： $$P(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{ikx_j} = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{ik\frac{2\pi}{N}j} \qquad j = 0,1,\cdots,N-1$$

$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ik\frac{2\pi}{N}j} \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

离散的傅立叶变换

(B) 最佳平方逼近方法

$\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_m$ 为线性无关的基函数

取 $P(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$

使 $Q(a_0, a_1, \cdots a_m) = \sum_{i=0}^{n}\left[P(x_i) - f(x_i)\right]^2$ 最小

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0 \quad j = 0,1,\cdots,m$$

得方程组

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ \vdots \\ (\varphi_m, f) \end{pmatrix}$$

可解得： $(a_0, a_1, \cdots a_m)$

现节点为 $\{x_j = 2\pi/N,\ f(x_j)\};\ j = 0,1.\cdots, N-1$

取基函数：$\varphi_k(x) = e^{ikx},\quad k = 0,1,\cdots, N-1$

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik2\pi(m-n)/N} = \begin{cases} N & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$(\varphi_m, f) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-imk2\pi/N}$$

得 $$\begin{pmatrix} N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ \vdots \\ (\varphi_m, f) \end{pmatrix} \qquad a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ikj2\pi/N}$$

结果与插值法相同

3、FFT 快速傅立叶变换

计算离散的傅立叶变换

$$P(x_j) = f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{ik\frac{2\pi}{N}j} \quad j = 0,1,\cdots,N-1$$

$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ik\frac{2\pi}{N}j} \quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

运算量**N^2,N**通常很大，且有许多是重复计算。

FFT思想方法：减少乘法运算，避免重复计算。

具体处理方法（略）。

4、傅立叶变换应用举例

测量某物理量（光、声、电波），在时间段[0，T]记录了N个数据：$\left\{ f(t_j) \right\};\ j = 0,1.\cdots, N-1$

傅立叶变换 $$\begin{cases} f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ C(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega x} dt \end{cases}$$

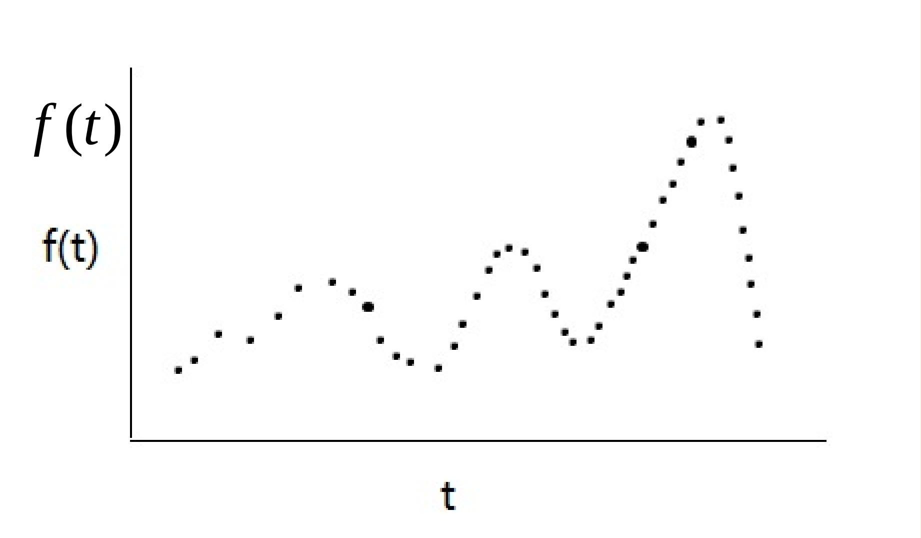
$f(t)$ 看成各种不同频率的简谐振动的叠加。

$C(\omega)$ 表述了各频率成分的分布、强度等。

问题：

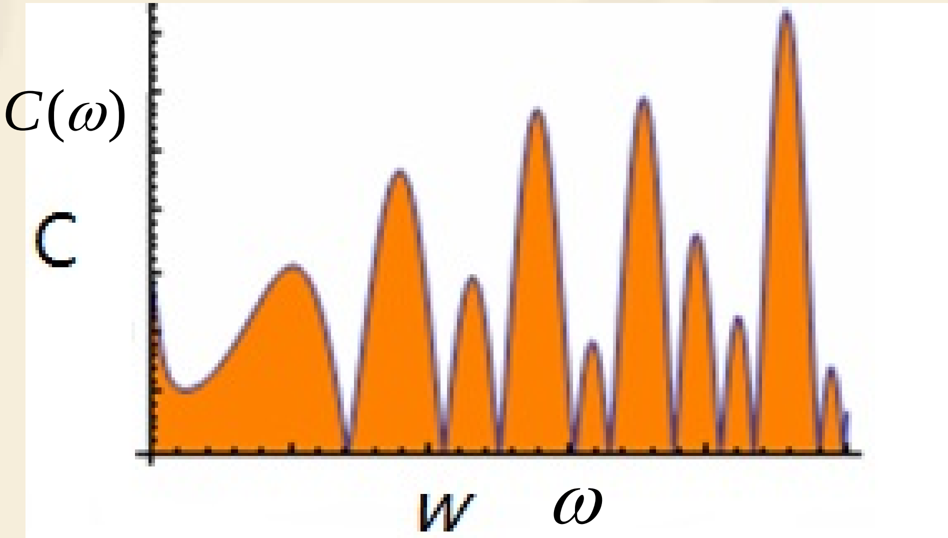
(1) 如何由：

$$\{t_j, f(t_j)\} \Rightarrow \{\omega_k, C(\omega_k)\}$$



(2) 测量在时间段[0，T]
如何由：

$$t_0 = 0,\ t_{max} = T,\ \Delta t = T/N$$
$$\Rightarrow \omega_0,\ \omega_{max},\ \Delta\omega$$



上面离散的傅立叶变换给出：

$f(x)$ 周期为 2π，在[0, 2π] 区间，已知：

$$\left\{x_j = 2\pi / N,\ f(x_j)\right\};\ j = 0,1.\cdots, N-1$$

$$P(x_j) = f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{ik\frac{2\pi}{N}j} \quad j = 0,1,\cdots, N-1$$

$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ik\frac{2\pi}{N}j} \quad k = 0,1,\cdots, N-1$$

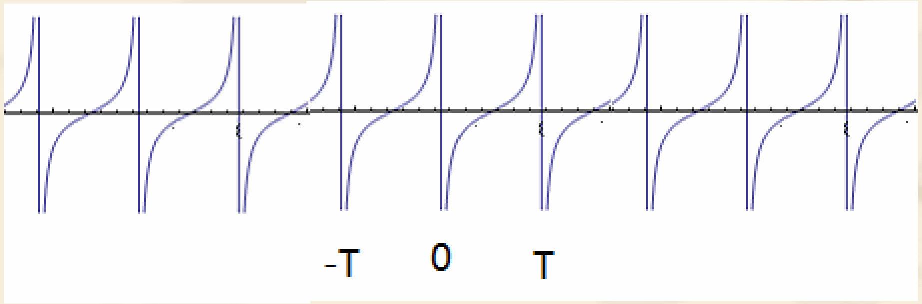
(A)周期为T的函数：$g(t)=g(t+T)$

令：$x=2\pi t/T$， $g(x\dfrac{T}{2\pi})=f(x)=f(x+2\pi)$

化为周期为2π的函数

(B)非周期函数 $g(t)$ 仅在[0，T]有定义

可作周期T延拓，成周期为T的函数 $g(t)=g(t+T)$



现周期为T的函数： $g(t)=g(t+T)$

测量记录了N个数据：$\{\, t_k, g(t_k)\}$； $k=0,1.\cdots, N-1$

等间隔 $\Delta t = T/N$， $t_k = k\Delta t$

令： $x=2\pi t/T$， $g(x\dfrac{T}{2\pi})=f(x)=f(x+2\pi)$ 周期2 π

$$x_k = 2\pi t_k / T = \frac{2\pi}{N}k = k\Delta x,\quad \Delta x = \frac{2\pi}{N}$$

$$\begin{cases} P(x)=\sum_{k=0}^{N-1} C(\omega_k)e^{i\omega_k x} \\ C(\omega_k)=\dfrac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)e^{-i\omega_k x_j} \end{cases}$$

有： $\omega_k = k\Delta\omega$, $\Delta\omega = 2\pi / T$, $\omega_{\max} = N\Delta\omega = 2\pi N / T$

周期 $2L$, $\Delta\omega = \pi / L$ 现周期 $2L = T$, $\Delta\omega = 2\pi / T$

注：通常采样每秒记录 M 个数据，从中取N个数据作傅氏变换

有： $\Delta t = 1/M$, $\Delta\omega = 2\pi M / N$, $\omega_{\max} = 2\pi M$

1）M 定（采样频率定）则 $\omega_{\max} = 2\pi M$ 确定，与N无关。

N取大，$\Delta\omega$小。

2）采样频率 M 越大 $\omega_{\max}$ 越大，可分析的频谱范围越宽。