

物理分析中的数理统计

郑 波

zhengb@usc.edu.cn

zhengbo_usc@163.com

南华大学核科学技术学院

主要内容

- 基础知识
- 计数的统计分布、测量中的统计误差
- 测量数据的检验、参数估计与假设检验
- 误差传递、系统误差
- 平均值计算、加权平均
- 上限计算、信号显著度

基础知识

事件概率 $P(A)$:

将随机试验进行 N 次, 若 A 事件发生了 N_A 次, 则称比值 N_A/N 为事件 A 的频率。当试验次数 N 增至很大, 事件的频率将围绕某值上下摆动且最终趋于一稳定值, 把这个稳定值称为事件 A 的概率, 用 $P(A)$ 表示:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \quad \subset [0,1]$$

随机变量的概念:

如果考虑的各个随机事件可用一个数来表示 (随机事件与数字一一对应), 而它们又是一个互斥事件的完备集, 则称这一集合为一个随机变量。

随机变量的分布函数： 随机变量 ξ 取值小于或等于 x 这样一个事件的概率 $P(\xi \leq x)$

$$F(x) = P(\xi \leq x)$$

概率密度函数 (probability density function, PDF)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

随机变量的分布函数： 随机变量 ξ 取值小于或等于 x 这样一个事件的概率 $P(\xi \leq x)$

$$F(x) = P(\xi \leq x)$$

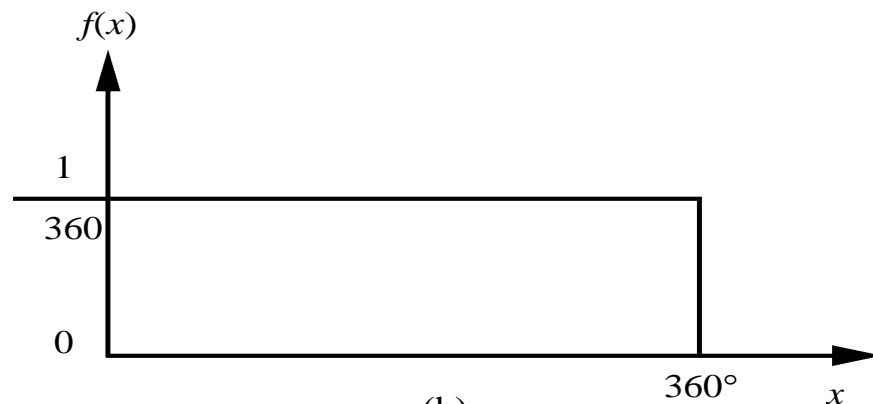
概率密度函数 (probability density

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$



(a)



(b)

特征数字：数学期望、方差、矩、协方差

	离散型	连续型
数学期望	$E(x) = \sum_i p_i x_i$	$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$
方差	$\begin{aligned} D(x) &= \sum_i p_i (x_i - Ex)^2 \\ &= E(x - Ex)^2 \\ &= E(x^2) \end{aligned}$	$\begin{aligned} D(x) &= E(x - Ex)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - Ex)^2 f(x) dx \end{aligned}$
K阶原点矩	$v_K \equiv E(x^K) = \sum_i x_i^K p_i$	$v_K \equiv E(x^K) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^K f(x) dx$
K阶中心矩	$\begin{aligned} \mu_K &\equiv E(x - Ex)^K \\ &= \sum_i (x_i - Ex)^K p_i \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mu_K &\equiv E(x - Ex)^K \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - Ex)^K f(x) dx \end{aligned}$
协方差(两维及以上)	$Cov(x, y) = E[(x - Ex)(y - Ey)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - Ex)(y - Ey) f(x, y) dx dy$	

常用的分布

贝努利分布

设随机试验可能的结果只有两种：成功A，失败 \bar{A} ，出现A和 \bar{A} 的概率分别为 $P(A)=p$, $P(\bar{A})=1-p=q$ ，这样的一次随机试验称为贝努利试验。用随机变量X表示其结果，则X的概率分布为

$$P(X = r) = p^r (1 - p)^{1-r}, \quad (r = 0, 1; 0 < p < 1)$$

称随机变量X服从贝努利分布或(0,1)分布

北京正负电子对撞机II (BEPCII)上一个正电子束团与一个电子束团对撞，发生反应与否服从(0,1)分布

二项分布

独立进行n次贝努利试验，事件A的发生次数K为0到n之间的任意一个正整数，事件A发生K次($0 \leq K \leq n$)的概率为

$$P(K) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K} = C_n^K p^K q^{n-K} = \frac{n!}{K! (n-K)!} p^K q^{n-K}$$

数学期望和方差：

$$E(K) = \sum_{K=0}^n K \cdot B(K; n, p) = np$$

$$D(K) = \sum_{K=0}^n (K - E(K))^2 B(K; n, p) = np(1 - q) = np^2$$

BEPCII物理运行时1毫秒内，正负电子束团发生反应的次数服从二项分布：对撞约16.7万次，发生反应约1次

二项分布

独立进行 n 次贝努利试验,
任意一个正整数, 事件 A :

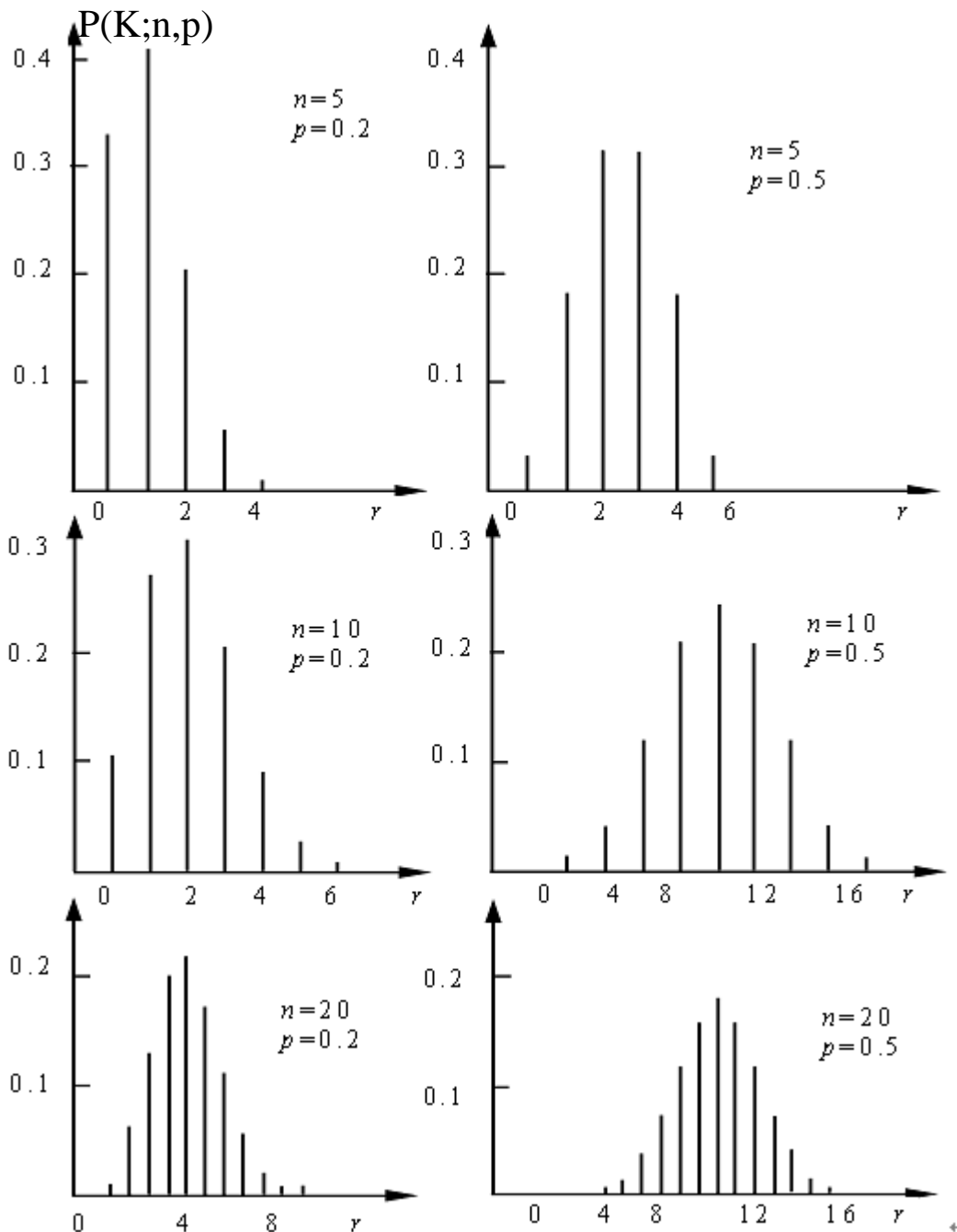
$$P(K) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K} =$$

数学期望和方差:

$$E(K) = \sum_{K=0}^n K \cdot B(K; n, p) = np$$

$$D(K) = \sum_{K=0}^n (K - E(K))^2 B(K; n, p) = np(1 - p)$$

BEPCII物理运行时1毫秒 p
从二项分布: 对撞约16.7



泊松分布

设随机变量X的可取值为 $K=0,1,2,\dots$,取值K的概率为

$$P(K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$$

其中 $K=0,1,\dots$ 。 λ 为决定分布的唯一参数。

数学期望和方差：

$$E(K) = \sum_{K=0}^{+\infty} K \cdot P(K) = \lambda$$

$$D(K) = E(K^2) - E^2(K) = \lambda$$

泊松分布是二项分布的一种极限情形

当 $n \rightarrow \infty$, $np = \mu$ 保持为常数 (p 很小) 时, 二项分布趋向于泊松分布

比如BEPCII对撞1秒内正负电子束团发生反应的次数

泊松分布

设随机变量X的P

其中 $K=0,1,\dots,\lambda$

数学期望和方差

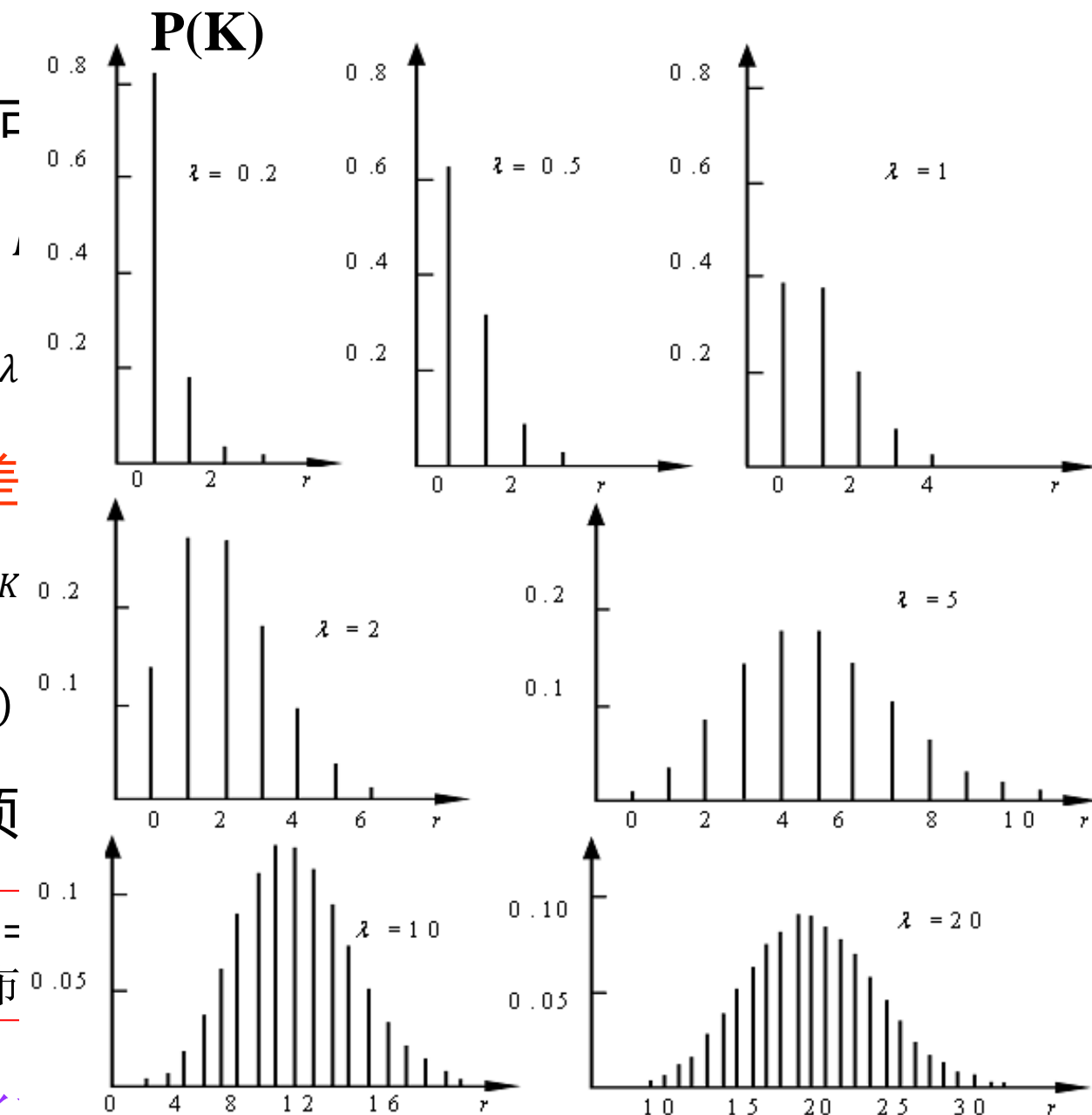
$$E(K) = \sum_{K=0}^{+\infty} K \cdot P(K)$$

$$D(K) = E(K^2)$$

泊松分布是二项

当 $n \rightarrow \infty$, $np =$
小) 时, 二项分布

比



正态分布(高斯分布)

概率密度的表达形式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

其中 σ 和 μ 为参数, 一般用 $N(\mu, \sigma)$ 表示。

数学期望与方差:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \mu$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx = \sigma^2$$

正态分布(高斯分布)

概率密度的表达形式

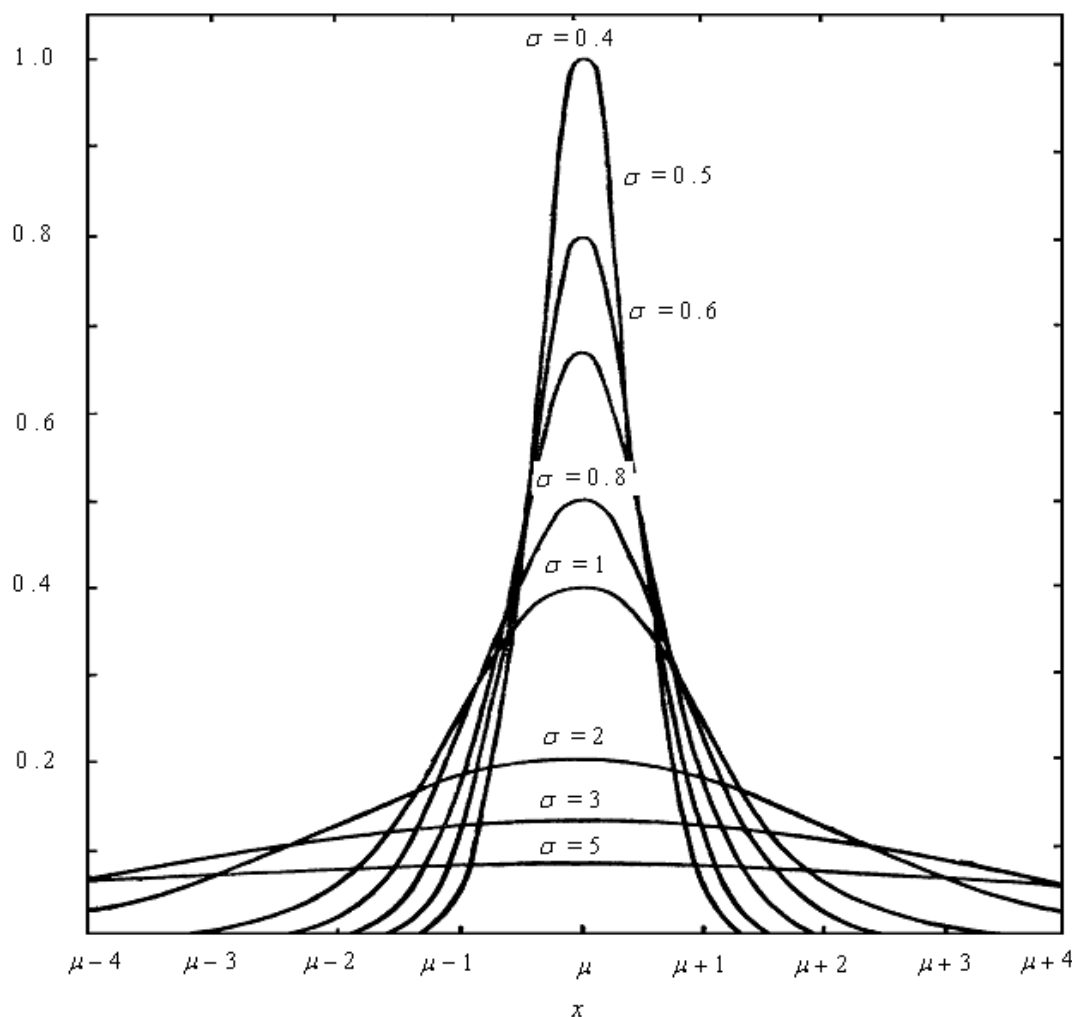
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中 σ 和 μ 为参数, 一般 μ

数学期望与方差:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \mu$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx = \sigma^2$$



标准正态分布：期望值为0，方差为1

对一般的正态分布 $N(\mu, \sigma)$ 作变量置换 $y=(x-\mu)/\sigma$,就可得到标准正态分布 $N(0,1)$

概率密度：
$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, y \in (-\infty, +\infty)$$

分布函数：
$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^y p(y) dy = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

根据其对称性可得 $\varphi(-y) = 1 - \varphi(y)$

查标准正态分布累积分布函数表，可得：

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 2\phi(1) - 1 \approx 0.683$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 2\phi(2) - 1 \approx 0.955$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 2\phi(3) - 1 \approx 0.997$$

2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.999	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1
3.1	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999660
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999760
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999880
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999926
3.8	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978
4.1	0.999979	0.999980	0.999981	0.999982	0.999983	0.999983	0.999984	0.999985	0.999985	0.999986
4.2	0.999987	0.999987	0.999988	0.999988	0.999989	0.999989	0.999990	0.999990	0.999991	0.999991
4.3	0.999991	0.999992	0.999992	0.9999930	0.999993	0.999993	0.999993	0.999994	0.999994	0.999994
4.4	0.999995	0.999995	0.999995	0.999995	0.999996	0.999996	0.999996	1.000000	0.999996	0.999996
4.5	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999998	0.999998	0.999998
4.6	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999999	0.999999
4.7	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
4.8	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
4.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

χ^2 分布

若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 n 个相互独立的服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量，则称它们的平方和为具有参数 n 的 χ^2 变量，即

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

可记为 $\chi^2(n)$ ，其概率密度函数为

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \quad (\chi^2 \geq 0)$$

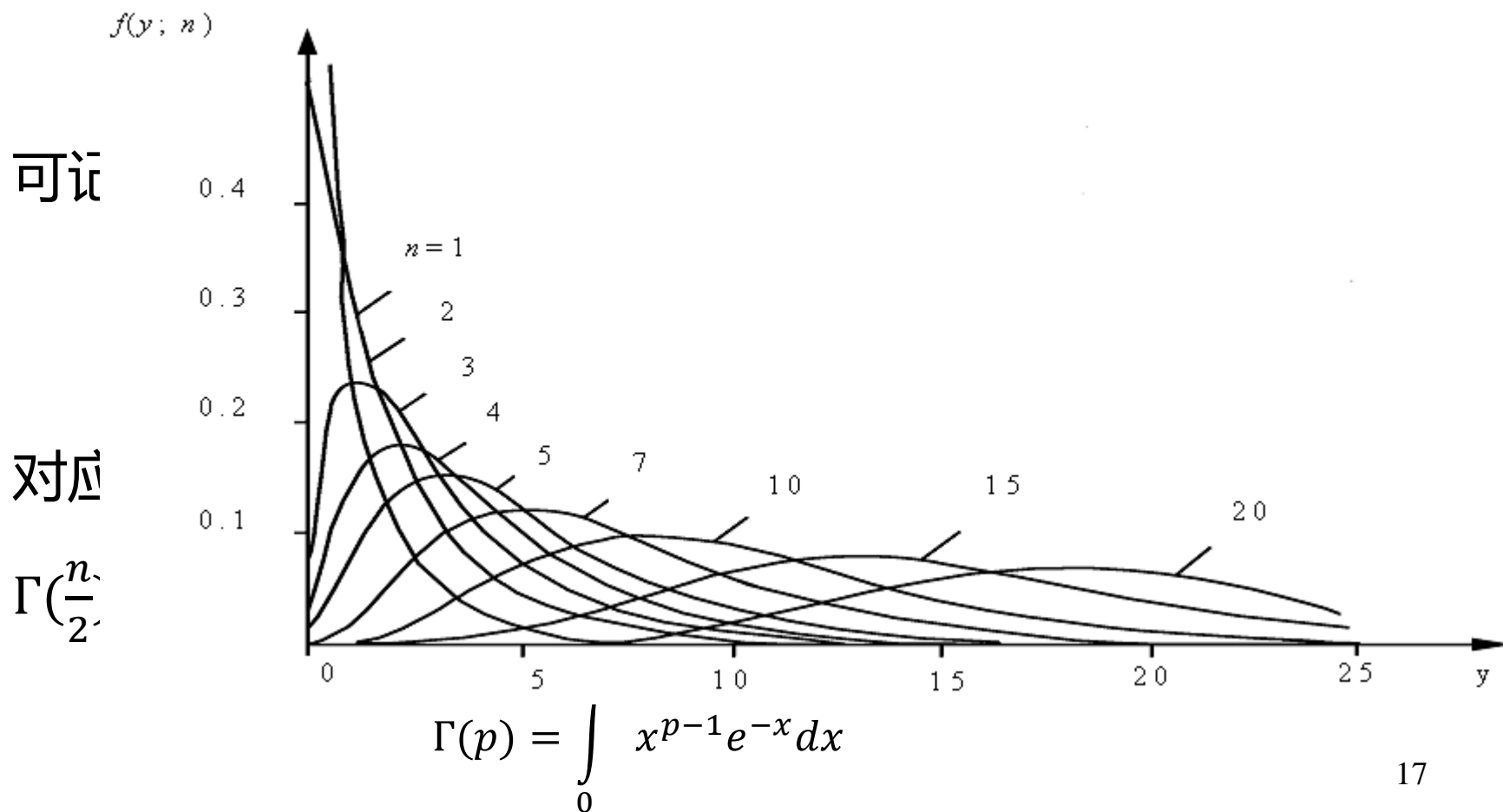
对应的分布称 χ^2 分布，其中 n 称 χ^2 分布的自由度。

$\Gamma(\frac{n}{2})$ 是 Γ 函数，其定义为

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

χ^2 分布

若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 n 个相互独立的服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量，则称它们的平方和为具有参数 n 的 χ^2 变量，即



χ^2 分布的基本性质:

1.分布的数学期望和方差为

$$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$$

2.若 χ_1^2, χ_2^2 分别是自由度为 n_1, n_2 的两个 χ^2 变量且相互独立, 则 χ^2 服从自由度 $n = n_1 + n_2$ 的 χ^2 分布, 即

$$\chi^2(n_1) + \chi^2(n_2) = \chi^2(n_1 + n_2)$$

3.有关概率含量的计算。在实际计算中, 要计算变量在一定区间内的含量。如计算 χ^2 取值超过某一给定值的概率:

$$\alpha = P(\chi^2) = \int_{\chi_\alpha^2}^{+\infty} f(\chi^2; n) d\chi^2$$

χ^2 分布的分布函数表

附表

表7 χ^2 分布的上侧 α 分位数 χ_{α}^2 表

$$F(\chi_{\alpha}^2; \nu) = \int_0^{\chi_{\alpha}^2(\nu)} f(y; \nu) dy = 1 - \alpha,$$

其中 $f(y; \nu)$ 为自由度 ν 的 χ^2 分布的概率密度.

ν	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.250	0.500
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	0.0158	0.064	0.102	0.455
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.575	1.386
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.005	1.213	2.366
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.649	1.923	3.357
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.343	2.675	4.351
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.070	3.455	5.348
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.822	4.255	6.346
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	4.594	5.071	7.344
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.380	5.899	8.343
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.179	6.737	9.342
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	7.58	10.34
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	8.44	11.34
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.30	12.34
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.17	13.34
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.31	11.04	14.34
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.15	11.91	15.34
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.08	12.00	12.79	16.34
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	12.86	13.68	17.34
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	13.72	14.56	18.34
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	14.58	15.45	19.34
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	15.44	16.34	20.34
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	16.31	17.24	21.34
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	17.19	18.14	22.34
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	18.06	19.04	23.34
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	18.94	19.94	24.34
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	19.82	20.84	25.34
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	20.70	21.75	26.34
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	21.59	22.66	27.34
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	22.48	23.57	28.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	23.36	24.48	29.34
40	20.70	22.16	24.43	26.51	29.05	32.34	33.66	39.34
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	41.45	42.94	49.34
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	50.64	52.29	59.33
70	43.27	45.44	48.76	51.74	55.33	59.90	61.70	69.33
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	69.21	71.14	79.33
90	59.19	61.75	65.64	69.12	73.29	78.56	80.62	89.33
100	67.32	70.06	74.22	77.93	82.36	87.94	90.13	99.33

续表

ν	0.750	0.800	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	6.626	7.289	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	13.70	14.63	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	14.85	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	15.98	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	17.12	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	18.25	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	19.37	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	20.49	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	21.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	22.72	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	23.83	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	24.93	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	26.04	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	27.14	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	28.24	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	29.34	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	30.43	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	31.53	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	32.62	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	33.71	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	34.80	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	45.62	47.27	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	56.33	58.16	63.17	67.50	71.42	76.16	79.49
60	66.98	68.97	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	77.58	79.72	85.53	90.53	95.03	100.43	104.22
80	88.13	90.41	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	98.65	101.06	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	109.14	111.67	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

原分布与实验分布

原分布：待测物理量是个随机变量所服从的分布

实验分布：用某种仪器或装置测量该物理量得到的分布

原分布与实验分布的比较：

考虑仪器导致原分布发生畸变的诸因素，对**原分布**作适当的修正后与实验分布比较。 (蒙卡与数据相关分布的比较)

考虑仪器导致原分布发生畸变的诸因素，对**实验分布**作适当的修正后与原分布比较。

当实验测量的物理量是一随机变量 X ，它的概率密度(原分布)为 $f(x)$

则实验分布pdf为
$$g(x') = \int_{\Omega_x} r(x, x') f(x) dx,$$

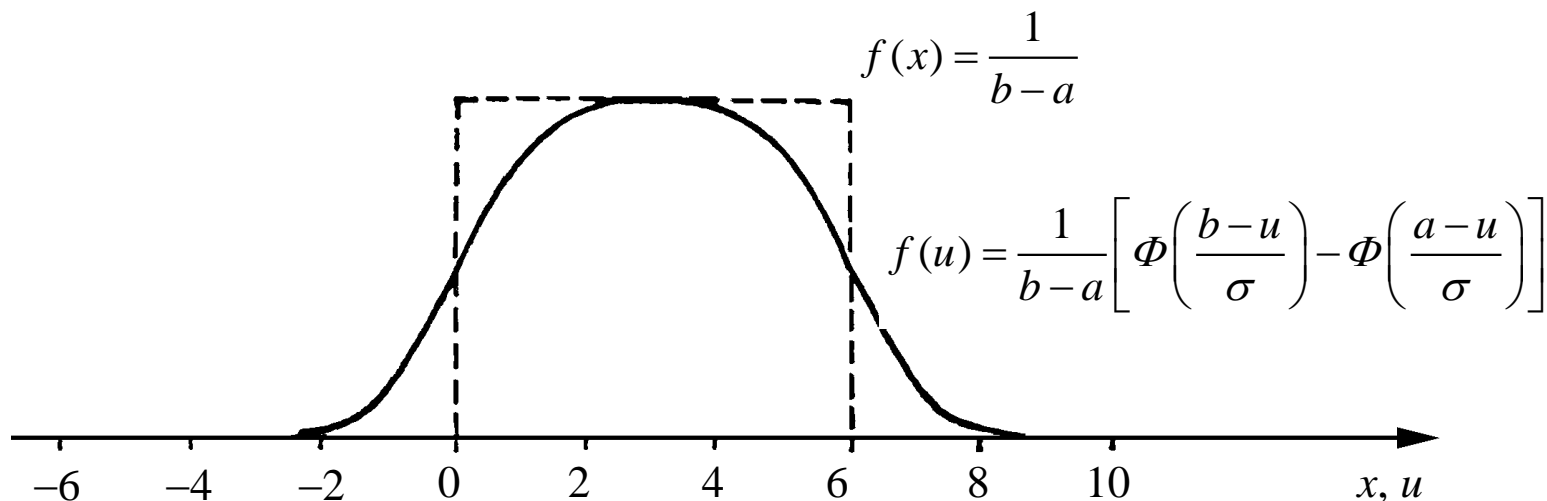
$r(x, x')$ 为实验分辨函数，描述测量误差的影响

原分布为均匀分布，分辨函数为正态分布

原分布 $f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b,$

实验分布 $g(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}R(b-a)} \int_a^b e^{-\frac{(x'-x)^2}{2R^2}} dx,$

$$\begin{aligned} g(x') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(b-a)} \int_{\frac{a-x'}{R}}^{\frac{b-x'}{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{b-a} \left\{ \Phi\left(\frac{b-x'}{R}\right) - \Phi\left(\frac{a-x'}{R}\right) \right\}. \end{aligned}$$



原分布为均匀分布，分辨函数为正态分布

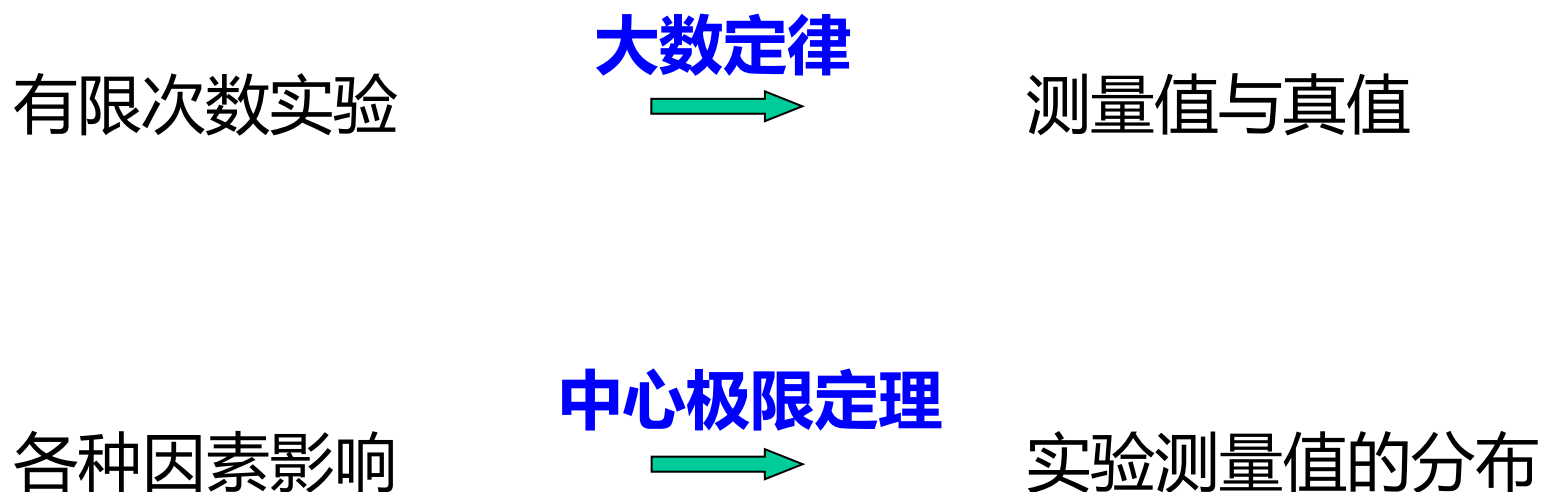
原分布 $f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b,$

实验分布 $g(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}R(b-a)} \int_a^b e^{-\frac{(x'-x)^2}{2R^2}} dx,$

$$\begin{aligned} g(x') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(b-a)} \int_{\frac{a-x'}{R}}^{\frac{b-x'}{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{b-a} \left\{ \Phi\left(\frac{b-x'}{R}\right) - \Phi\left(\frac{a-x'}{R}\right) \right\}. \end{aligned}$$

由于实验分辨函数(测量误差)的存在，原分布概率密度等于零的区域，实验分布却可以是有限值，这表明实验测定值可以出现在真值 x 根本不可能出现的区域。

大数定律和中心极限定理



贝努利定理

设 n_A 是 n 次独立试验中事件 A 发生的次数， p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对任意正数 ε 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{n_A}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{n_A}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1$$

贝努里定理说明：当重复多次独立试验时，事件的频率趋近于它的概率。因此，当试验次数大时，可以用频率来近似代替概率。

伯努利定律在数学上严格地表述了频率的稳定性，即事件的频率以概率收敛于事件的概率

辛钦大数定律

设相互独立的同分布随机变量序列 X_1, X_2, \dots 有相同的有限数学期望

$$E(X_i) = \mu$$

则对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

辛钦大数定律表明，只要随机变量独立同分布，即使不存在有限方差，其数学期望仍可由 n 个随机变量的算术平均值作为近似(n 充分大)。

大数定律说明随机变量序列的平均结果具有稳定性；大量重复随机试验中事件发生的频率也具有稳定性，并且与事件的概率有确定的对应关系。

中心极限定理：大量相互独立的随机变量之和近似地服从正态分布

射手

瞄准点对靶心的偏离

后座力的差异

击发力量、方向的差异

子弹

重量的差异

壳厚度、形状的差异

火药燃烧程度的差异

天气

风力的变化

上升气流变化

湿度的变化

都是相互独立的随机变量，其总的效果是大量弹着点近似地服从正态分布。

设随机变量 $\xi_1, \xi_1 \dots \xi_n$ 相互独立，服从同一分布，且具有有限的期望值和方差，即 $E(\xi_i) = \mu, D(\xi_i) = \sigma^2 \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$

则随机变量 $\xi_n = (\sum_{i=1}^n \xi_i - n\mu) / (\sqrt{n}\sigma) = (\frac{1}{n} \sum_i \xi_i - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$ 的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

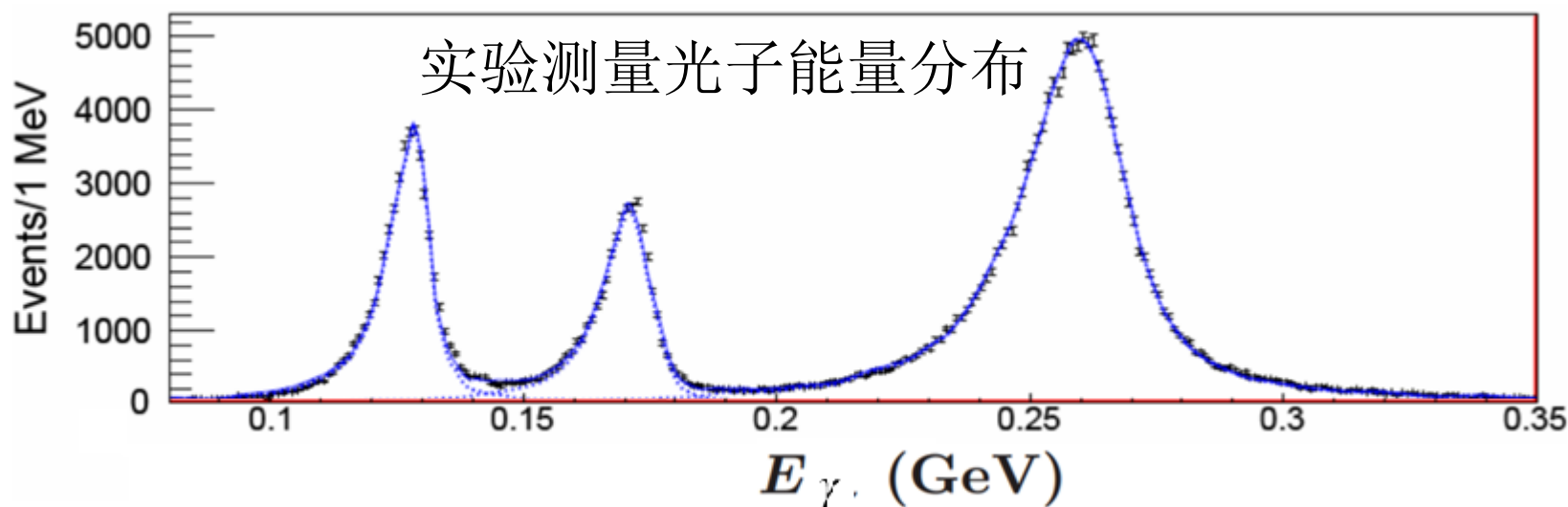
更一般的情况：如果一个随机变量是由大量独立的微弱因素相加而成，那么它的分布就近似于正态分布。

以 $\psi(2S) \rightarrow \gamma\chi_{c0,1,2}$ 为例:

两体衰变, 在母粒子质心系下, 粒子能量(动量)为一确定值

▼ Radiative decays

Γ_{147}	$\gamma\chi_{c0}(1P)$	$(9.79 \pm 0.20)\%$	261
Γ_{148}	$\gamma\chi_{c1}(1P)$	$(9.75 \pm 0.24)\%$	171
Γ_{149}	$\gamma\chi_{c2}(1P)$	$(9.52 \pm 0.20)\%$	128



影响因素: 单能电子束射入碘化铯晶体(CsI(T1)),产生闪烁荧光数量, 簇射能量的能量泄漏的涨落, 电离能量损失的涨落, 晶体发光效率的能量响应, 光在晶体中的传输与吸收, 晶体表面的反射折射; 光阴极上量子效率的波长响应, 电子倍增过程电子学系统放大倍数的涨落等。因此, 最后测到的脉冲幅度近似于正态分布, 得到的光子能谱近似于正态分布

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

$$\Gamma = \hbar/\tau$$

STRANGE MESONS

($S = \pm 1, C = B = 0$)

$K^+ = u \bar{s}, K^0 = d \bar{s}, \bar{K}^0 = \bar{d} s, K^- = \bar{u} s$, similarly for K^{*} 's

$$K_S^0 \quad I(J^P) = 1/2(0^-)$$

See related review:

CP Violation in $K_S^0 \rightarrow 3 \pi$

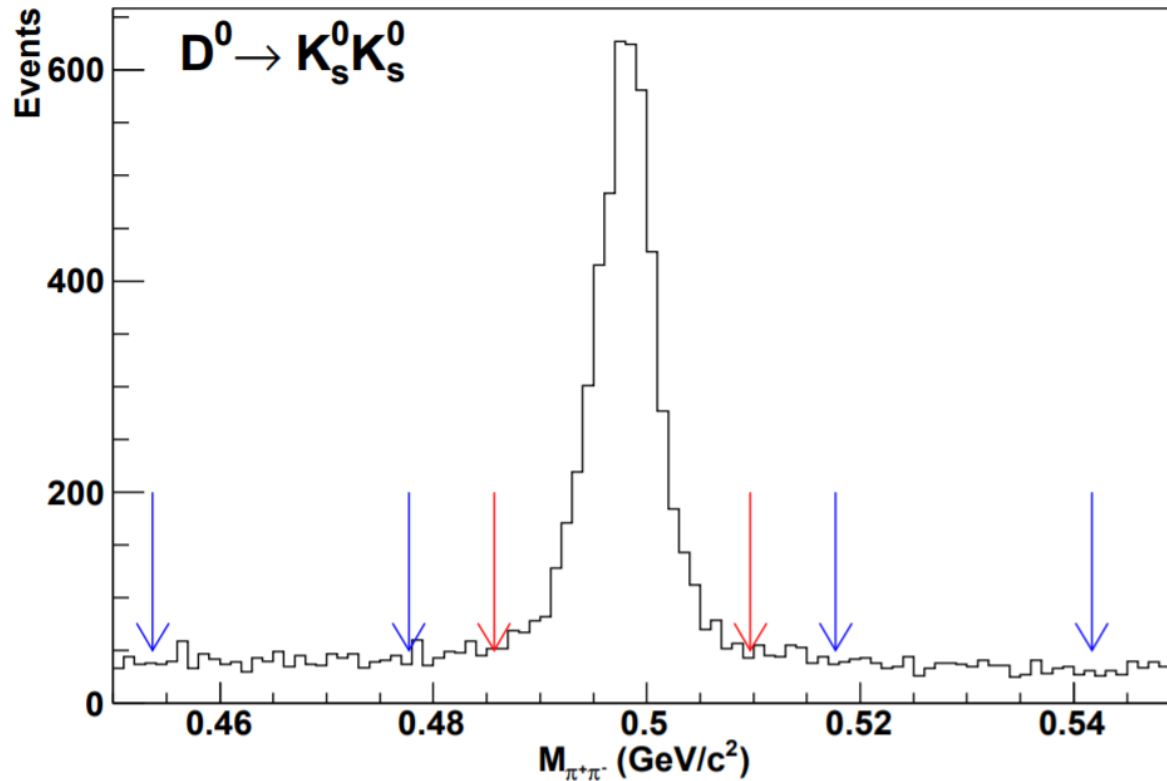
$$\hbar = 6.588 \times 10^{-24} \text{ GeV} \cdot \text{s}$$

[INSPIRE search](#)

K_S^0 MEAN LIFE

Mean life τ

$$(8.954 \pm 0.004) \times 10^{-11} \text{ s (S = 1.1)}$$



CHARMED MESONS

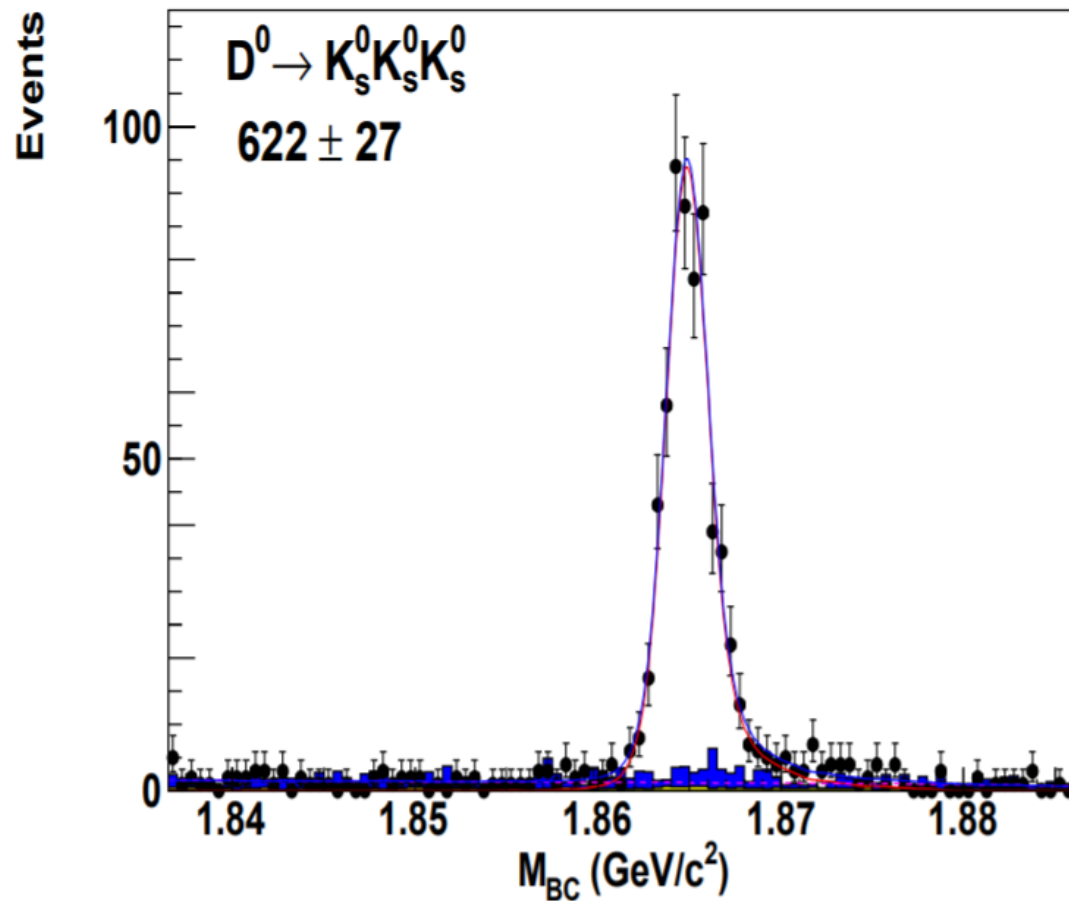
($C = \pm 1$)

$D^+ = c \bar{d}$, $D^0 = c \bar{u}$, $\bar{D}^0 = \bar{c} u$, $D^- = \bar{c} d$, similarly for D^{*} 's

$$D^0 \quad I(J^P) = 1/2(0^-)$$

D^0 MEAN LIFE

$$(4.101 \pm 0.015) \times 10^{-13} \text{ s}$$



计数的统计分布

一、发生反应事件的统计分布

正负电子对撞实验中，在一定时间内对撞发生反应的事件数为一随机变量。但其具有一定的统计性。

设 t 时间内总对撞次数为 N_0

任意一次对撞发生反应的概率为 p ，不发生反应的概率为 $q(=1-p)$ 。

t 时间内观测到发生反应的事件数目 n 可视为贝努里试验中“成功”事件发生的次数问题，其数值 n 服从二项分布，有 n 个事件发生衰变的概率为：

$$p(n) = \frac{N_0!}{(N_0 - n)! n!} p^n (1 - p)^{N_0 - n}$$

期望值和方差为：

$$E(n) = m = N_0 p = N_0(1 - e^{-\lambda t})$$

$$\text{其中 } p = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$D(n) = \sigma^2 = N_0 p(1 - p) = N_0 p e^{-\lambda t}$$

由于对撞次数比较大，而发生反应的概率很小，因而有

$$\frac{N_0!}{(N_0 - n)!} = N_0(N_0 - 1) \dots (N_0 - n + 1) \approx N_0^n$$

$$(1 - p)^{N_0 - n} \approx (e^{-p})^{N_0 - n} \approx e^{-pN_0}$$

$$\text{令 } N_0 p = m, \quad \text{有} \quad p(n) = \frac{N_0^n}{n!} p^n e^{-pN_0} = \frac{m^n}{n!} e^{-m}$$

此为泊松分布，期望值与方差相等，均为m。

若m很大时，泊松分布将过渡到高斯分布。

高斯分布概率密度为:

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(n-m)^2}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}}$$

其含义为

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}} = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}} dn$$

因而t时间内n落在区间 $[n_1, n_2]$ 内的概率为:

$$P(n_1 \leq n \leq n_2) = \int_{n_1-1/2}^{n_2+1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(n-m)^2/2\sigma^2} dn \approx \int_{n_1}^{n_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(n-m)^2/2\sigma^2} dn$$

一般通过查标准正态分布函数表进行计算。

设BEPCII对撞每秒发生反应约1000次，则可知：

$$\mu = 1000 \qquad \sigma = ? \qquad \sigma = \sqrt{1000} \approx 33$$

设对撞产生了10万个 J/ψ 粒子，将其按照产生时间顺序等分成10个样本，每个样本包含1万个 J/ψ 粒子，假设已知 $J/\psi \rightarrow \rho\pi$ 的分支比为1.69%，是否意味着每个样本中恰好包含169个 $J/\psi \rightarrow \rho\pi$ 事例？（蒙卡模拟）

任意单位时间内，发生反应的次数是随机的，其分布服从的规律：二项分布 \rightarrow 泊松分布 \rightarrow 高斯分布

单位时间内发生反应次数随机性，还对应着相邻反应的时间间隔是随机的（漏计数、死时间）

测量中的统计误差

一、统计误差及其表示方法

(一) 什么是统计误差

在粒子物理实验测量中，**计数值**是个**随机**变量。实验测量所希望知道的准确值为计数值的**期望**，其为无限次测量计数值（相同条件下）的平均值，称**真平均值**。实际测量为单次或者有限次测量，只能得到真平均值的一个**估计量**，给结果带来了**误差**。

由反应事件过程的**随机**性造成的误差，称为**统计**误差。

统计误差用相应于一定**置信概率**的**置信区间**来表示，最常用的方法是用**标准**误差 σ 来表示。

若计数为N时，则

$$\sigma_N = \sqrt{D(N)} = \sqrt{M}$$

M为真平均值，但未知，一般可用有限次测量平均值或者单次测量值近似替代，因而有

$$\sigma_N \approx \sqrt{\bar{N}} \approx \sqrt{N}$$

也可按标准偏差计算，有

$$\sigma_N \approx \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K (N_i - \bar{N})^2}$$

$N_i (i = 1, 2, \dots, K)$ 为第*i*次计数值， \bar{N} 为算术平均值($\bar{N} = \sum_i N_i / K$)

测量数据的检验

对测量数据进行检验的目的：

- ①帮助检查测量系统的工作和测量条件是否正常和稳定，判断在测量中除统计误差外是否还存在其它的随机误差或系统误差
- ②对测量数据间的差异更有根据地进行分析，判断是统计误差涨落引起还是测量对象或测量条件变化引起。

一、两次测量值差异的检验

同一条件下，两次测量，计数分别为 N_1 、 N_2 。其差异 $\Delta(=|N_1 - N_2|)$ 为多大时，怀疑其可靠性？

设 N_1 、 N_2 为服从同一正态分布 $N(a, \sigma)$ 的两个随机变量。因而 $N_1 - N_2$ 也为正态变量。期望为0，方差为 $N_1 + N_2$ 。

则 $\Delta(= |N_1 - N_2|)$ 的概率密度为

$$P(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Delta} e^{\frac{-\Delta^2}{2\sigma_\Delta^2}} \quad \sigma_\Delta^2 \approx N_1 + N_2$$

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv P(\Delta \geq K_\alpha \sigma_\Delta) = 1 - P(\Delta < K_\alpha \sigma_\Delta) = 1 - P(K < K_\alpha) \\ &= 1 - 2 \int_0^{K_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{K^2}{2}} dK \end{aligned}$$

α 通常取5%, $K_\alpha \approx 2$ (1.96)

$\Delta > 2\sigma_\Delta$ 怀疑其可靠性, 反之, 则不怀疑

应用: 输入输出检验、同一个物理量两个独立测量结果的比较等

参数估计与假设检验

一、参数估计

随机变量

服从概率分布形式 $f(x;c)$, n 次观测值

$$x(=x_1, x_2, \dots, x_n)$$

?

参数的值

方法：矩法（数据少时可采用）、最大似然法、最小二乘法等

参数估计与假设检验

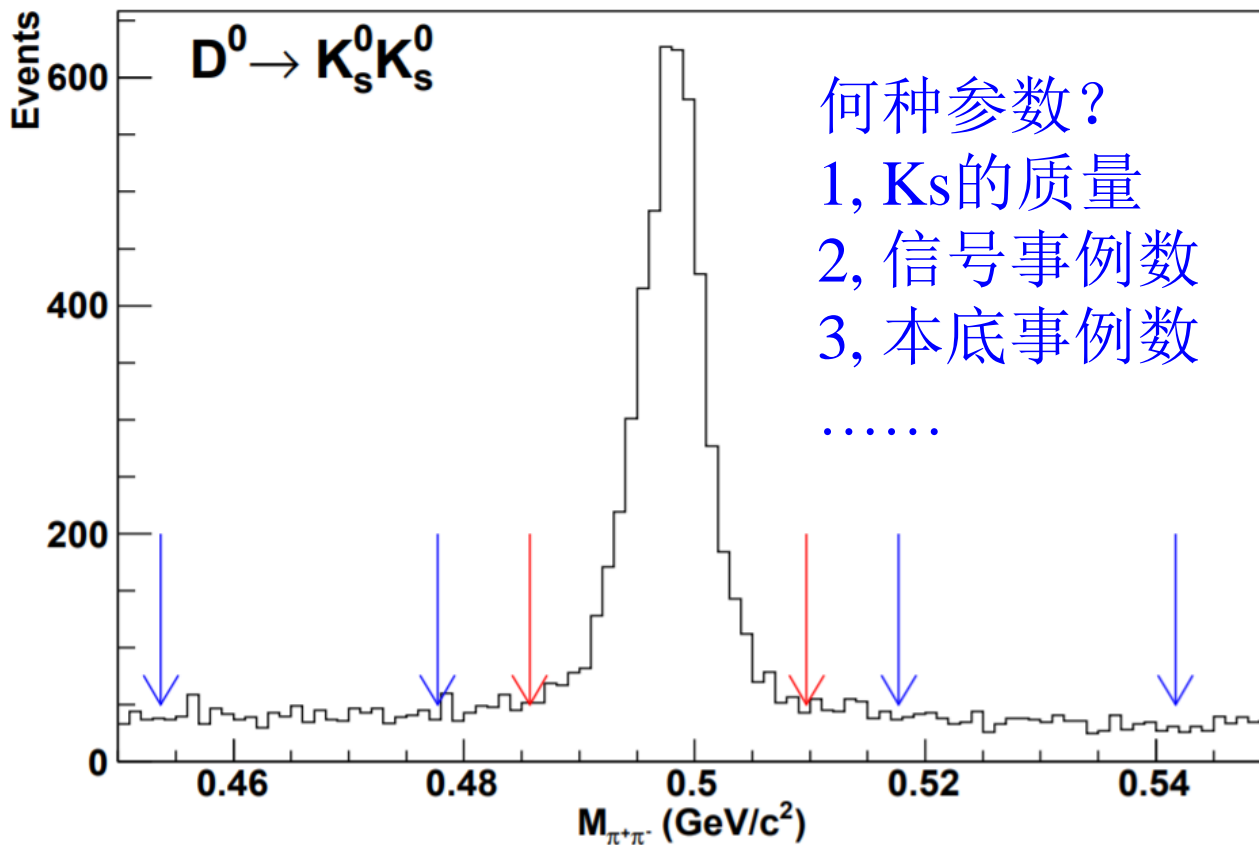
一、参数估计

服从概率分布形式 $f(x;c)$, n 次观测值

随
机
变
量

全

方
法
乘
法



二

最大似然法

似然函数：设观测值总体的概率密度函数为 $f(x; c)$
样本是 $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ 称样本的**联合概率**

密度函数为似然函数，记作： $L(x; c)$

由于各次观测**相互独立**，因而似然函数为各观测值的概率密度的乘积：

$$L(x; c) = \prod_{i=1}^n f(x_i; c) = f(x_1; c)f(x_2; c)\dots f(x_n; c)$$

$L(x; c)$  未知参数c

参数c应该是使得观测值具有**最大概率**，即似然函数为**最大**。即数学的**极值问题**。

便于计算, 引入对数似然函数 l

$$l = \ln L(x; c) = \ln \prod_{i=1}^n f(x_i; c) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; c)$$

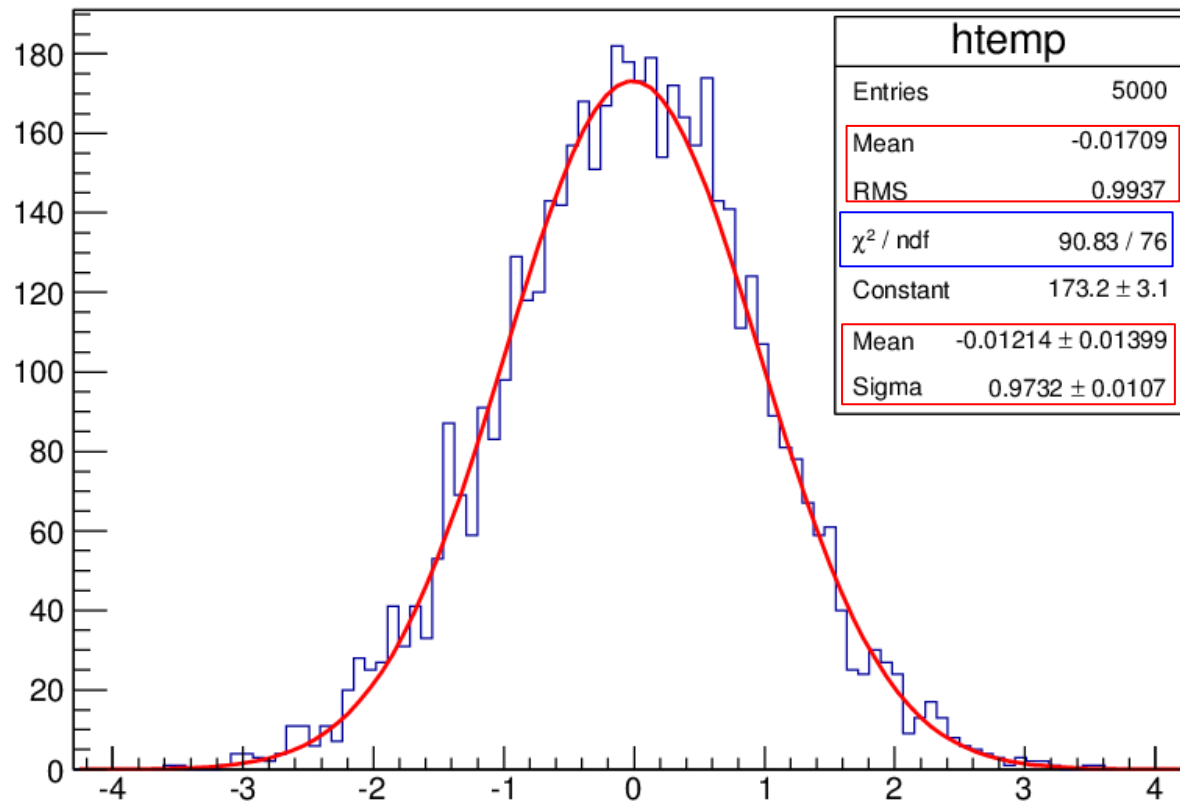
由数学中的求解极值问题有:

$$\frac{\partial \ln L(x; c)}{\partial c} = 0 \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(x_i; c)}{\partial c}$$

将测量样本代入上式即可求得参数 c 的值(c 可以是多个参数)

对产生的5000个服从 $N(0,1)$ 分布的数据进行参数估计：

对数据进行分区间→构造函数→拟合→画图



参数的估计值

拟合优度

参数的拟合值

COVARIANCE MATRIX CALCULATED SUCCESSFULLY

FCN=7072.65 FROM HESSE STATUS=OK 14 CALLS 67 TOTAL
EDM=2.7599e-06 STRATEGY= 1 ERROR MATRIX ACCURATE

EXT	PARAMETER			INTERNAL	INTERNAL
NO.	NAME	VALUE	ERROR	STEP SIZE	VALUE
1	mean0	2.99999e-02	4.57420e-02	4.09239e-01	1.56871e+00
2	sigma0	9.95623e-01	9.94086e-03	1.15792e-03	-4.37882e-02

ERR DEF= 0.5

EXTERNAL ERROR MATRIX. NDIM= 25 NPAR= 2 ERR DEF=0.5

1.024e-08 2.506e-09

2.506e-09 9.915e-05

PARAMETER CORRELATION COEFFICIENTS

NO.	GLOBAL	1	2
1	0.00249	1.000	0.002
2	0.00249	0.002	1.000

```

#ifndef __CINT__
#include "RooGlobalFunc.h"
#endif

#include "RooRealVar.h"
#include "RooDataSet.h"
#include "RooBinning.h"
#include "RooGaussian.h"
#include "RooConstVar.h"
#include "RooChebychev.h"
#include "RooAddPdf.h"
#include "RooSimultaneous.h"
#include "RooCategory.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TAxis.h"
#include "RooPlot.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <iomanip>
using namespace RooFit ;

void ex272b() {

```

```

Int_t nbins=100;
Double_t xlow=-5;
Double_t xup =5;

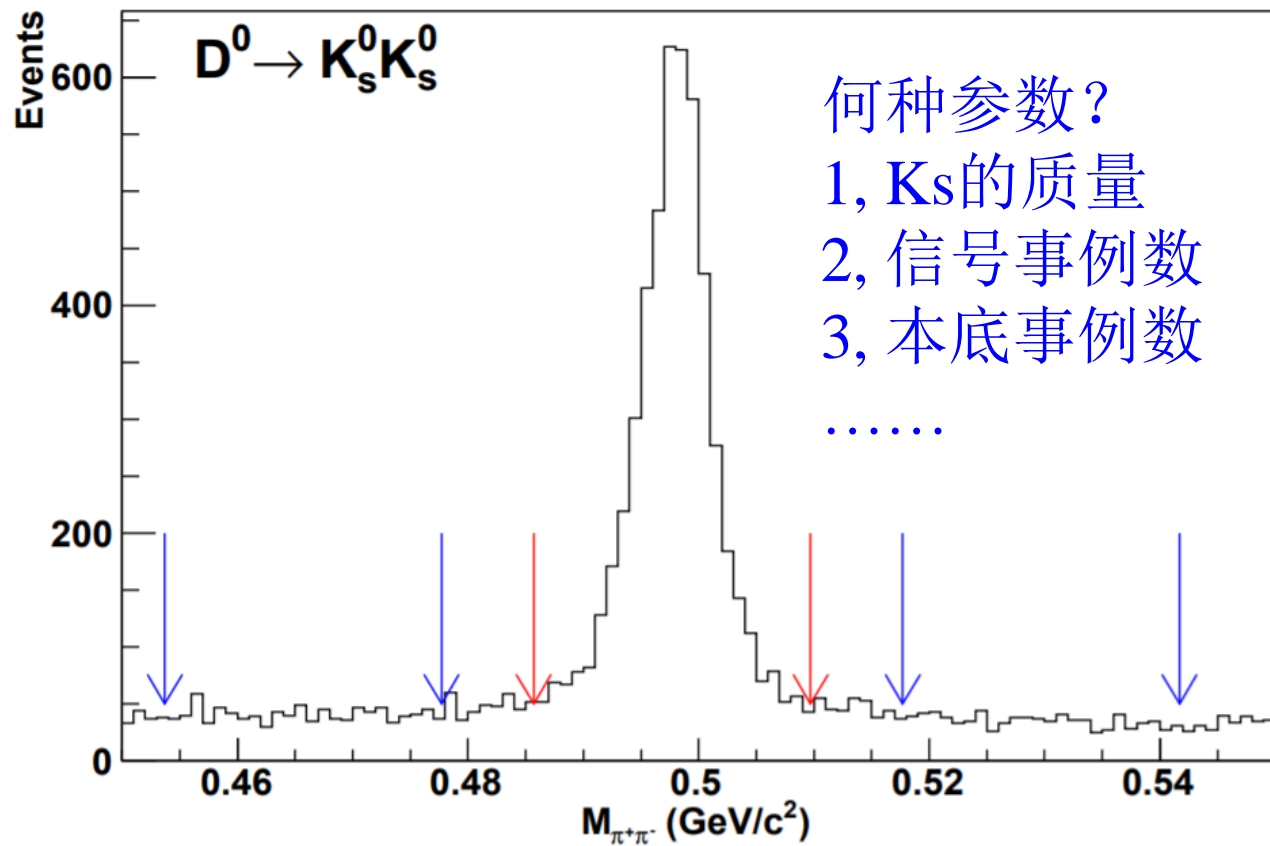
RooRealVar mes("mes","mes",xlow,xup);
const Int_t NEntry=5001;
TFile *file=new TFile("hist2.root","RECREATE");
TH1F *h1=new TH1F("h1","A simple
histo",nbins,xlow,xup);
for (int i=1;i<NEntry;i++) h1->Fill(gRandom-
>Gaus(0,1) );
h1->Draw();
h1->GetYaxis()->SetRangeUser(0,300);
h1->GetXaxis()->SetTitle("Gaus");
h1->GetXaxis()->CenterTitle();
file->cd();
h1->Write();

RooRealVar mean0("mean0","mean0", 0,-0.03,0.03);
RooRealVar sigma0("sigma0","sigma0", 1.0,0.9,1.1);
RooGaussian gaus("gaus","gaus",mes,mean0, sigma0);

```

```
RooDataHist *Data_sig = new RooDataHist("Data_sig", "Data_sig", mes, h1);
gaus.fitTo(*Data_sig);
RooPlot* xframe = mes.frame();
Data_sig->plotOn(xframe, LineWidth(1), MarkerSize(0.5), Binning(nbins));
gaus.paramOn(xframe, Format("NELU", AutoPrecision(2)), Layout(0.56,0.86,0.86) );
gaus.plotOn(xframe, LineWidth(1));
xframe->GetXaxis()->SetDecimals(1);
xframe->GetXaxis()->CenterTitle();
xframe->GetXaxis()->SetTitle("x");
xframe->GetYaxis()->SetTitle("");
xframe->Draw();

}
```



函数构造: $N_{\text{signal}} \times \text{高斯} + N_{\text{bkg}} \times \text{多项式}$

最小二乘法

设 x 和 y 两个变量之间的函数关系为

$$y = f(x; C)$$

假定函数关系 f 已知，但其参数 $C = c_1, c_2, \dots, c_m$ (共 m 个)未知。

现利用 x 和 y 的观测值 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ (共 n 个) 对 m 个未知参数作出估计。

准则一般可表示为使得有样本和参数组成的某个目标函数 d

$$d = d(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; c_1, \dots, c_m) \quad \text{取极值}$$

最常适用的目标函数是取各观测量残差的加权平方和并要求为**最小**，这一准则称为**最小二乘法**。

$\hat{y}_i = f(x_i; \hat{C})$ 为将假定求出的参数估计值 \hat{C} 代入后得到的函数值，称**拟合值**，由最小二乘法的**准则**知

$$R = \sum_{i=1}^n \omega_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i [y_i - f(x_i; C)]^2 \quad \text{取最小值}$$

由**极值**条件有

$$0 = \frac{\partial}{\partial c_k} \sum_i \omega_i v_i^2 = 2 \sum_i \omega_i [y_i - f(x_i; C)] \frac{\partial f(x_i; C)}{\partial c_k}, k = 1, 2, \dots, m$$

得到m个方程，**称为正则方程**。

解方程，得到诸参数的估计值，用 \hat{C} 表示。通过此方法求出来的参数叫参数的**最小二乘估计**。

观测值服从**正态**分布时，**最小二乘估计与最大似然估计是一致的**。若观测值不服从正态分布，则两者不一致。但是，若样本容量n很大时候，最小二乘估计跟最大似然估计一致(似然函数的渐近性)

二、假设检验

假设：对抽样总体的分布形式或其中的参数所作出的某个推测或断言称作一个假设，记为 H 。

假设检验：根据观测的样本对假设进行检验，称为假设检验

检验结果：接受假设或拒绝假设(舍弃)。

注意：接受假设并不是证明假设，只是说明样本和假设之间没有发现显著的矛盾。

有些问题属于二中选一，这时可作两种假设，有两个假设时，其中要进行检验的假设叫**零假设**(或叫**原假设**)用 H_0 表示，而另一假设叫**备择假设**，用 H_1 表示。

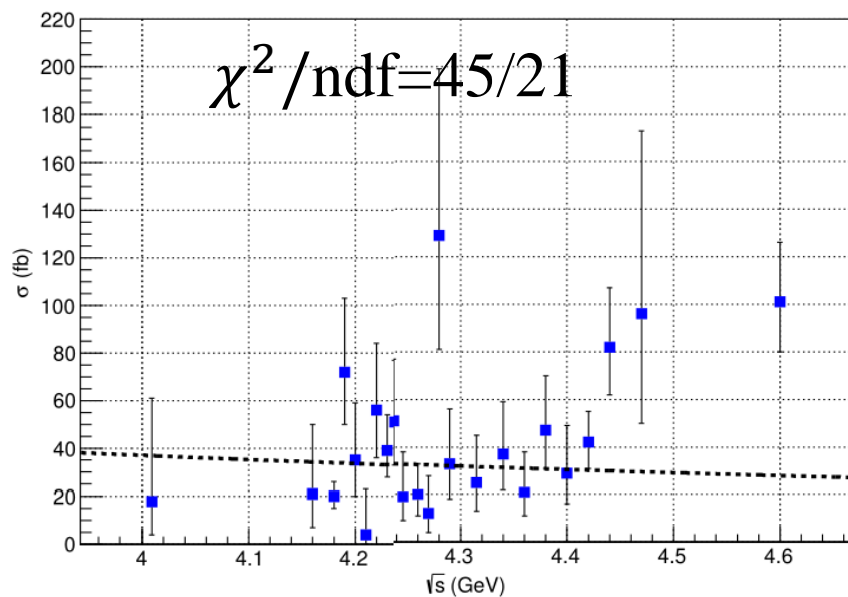
不考虑备择假设，只检验样本与零假设有无显著差异，称为**显著性检验**。

检验标准： $X\%$ 置信水平单(双)边检验(一般取95%或90%)⁴⁹

某反应过程的截面谱:

零假设1

$$f(\sqrt{s}) = p_0/s$$



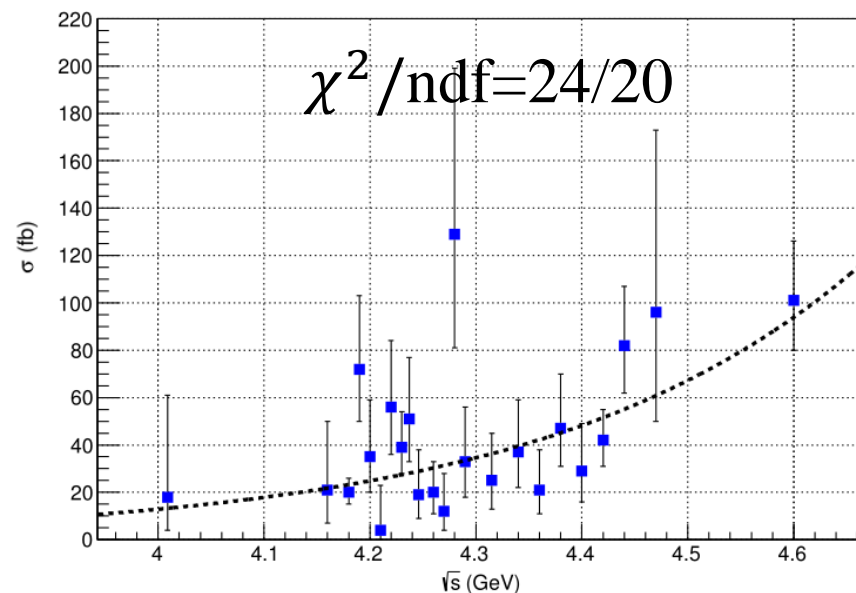
90%置信水平, 双边检验

接受域: $11.59 < \chi^2(21) < 32.67$

$45 > 32.67$, 拒绝该假设!

零假设2

$$f(\sqrt{s}) = \frac{1}{s} \times e^{-p_0(\sqrt{s}-M_{th})} \times p_1$$



90%置信水平, 双边检验

接受域: $10.85 < \chi^2(20) < 31.41$

$10.85 < 24 < 31.41$, 接受该假设

误差传递

我们并不总是直接测量一个物理量，而一般通过几个直接测量的物理量按照一定的函数关系式计算得出。（间接测量）
直接测量的误差必然会传递给间接测量量（误差传递）

一、线性函数的误差传递公式

二维情况：

设 y 与 x_1, x_2 满足如下关系 $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$

a_0, a_1, a_2 为常数。则有

$$E(y) = E(a_0 + a_1x_1 + a_2x_2) = a_0 + a_1E(x_1) + a_2E(x_2)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= D(y) = E(y - E(y))^2 = a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2 + 2a_1a_2Cov(x_1, x_2) \\ &= a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2 + 2a_1a_2\rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\end{aligned}$$

若变量 x_1, x_2 不相关或相互独立有 $\sigma_y^2 = D(y) = a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2$ 51

推广到多维情况有

$$y = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = a_0 + \sum_i a_ix_i$$

则

$$\begin{cases} E(y) = a_0 + \sum_i a_i E(x_i) \\ D(y) = \sigma_y^2 = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i>j} a_i a_j \text{Cov}(x_i, x_j) \end{cases}$$

二、一般函数的误差传递公式

考虑 y 与 n 个直接观测量 x_1, x_2, \dots, x_n , 具有的函数关系为:

$$Y = y(x) = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

的误差传递问题。

Y 是非线性的, 先将其线性化。

将 y 在 x 的期望 $E(x_1), E(x_2), \dots, E(x_n)$ 附近展开略去高于一阶的误差项有

$$y(x) = y[E(x)] + \sum_i (x_i - E(x_i)) \partial y / \partial x_i = y[E(x)] - \sum_i \partial y / \partial x_i E(x_i) + \sum_i x_i \partial y / \partial x_i$$

其中 $\partial y / \partial x_i$ 为函数 y 的偏导数在 $E(x)$ 处的值, 为已知常数, 即将其线性化了。

接下来按照线性函数误差传递方式计算

系统误差

测量中系统误差的存在是影响测量结果准确度的最重要因素。随机误差可以相互补偿抵消并随着测量次数增多或实验数据增大逐渐趋于零。而系统误差的发现、确定或定量估计比较难，因而要提高测量准确度，必须充分重视系统误差及其规律性质。

系统误差：在BESIII实验中，除统计误差外，其他均算作系统误差中。

系统误差除了影响实验结果的精确度外，还可能影响实验结果的准确度

系统误差的来源和对测量结果的影响

来源

- ①设备误差：测量标准本身刻度不准，测量仪器的不稳定等
- ②操作误差：操作不规范或测量条件控制不严格
- ③方法误差：测试或计算方法上的不完善所带来的误差

性质

- ①系统恒差：多次测量，误差大小和方向不变(通常可忽略)
- ②系统变差：影响误差条件变化，系统误差随之做相应变化
- ③系偶误差：由计算中使用某测量误差的随机性引起的误差

BESIII实验考虑的系统误差：

提取信号事例的不确定性
导致的误差：信号/本底拟
合函数及其他拟合参数

本底贡献的不确定
性导致的误差：本
底来源

$$\text{Br}(J/\psi \rightarrow \rho\pi) = \frac{N^{obs} - N^{bkg}}{N_{J/\psi} \times \epsilon \times \text{Br}(\rho \rightarrow \pi\pi) \times \text{Br}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)}$$

J/ψ总数
的误差

探测效率的误差；对
衰变的模拟、带电粒
子重建、中性粒子重
建、事例选择条件(运
动学拟合、质量窗)等
数据与MC的差异

引用分支
比的误差
(PDG)

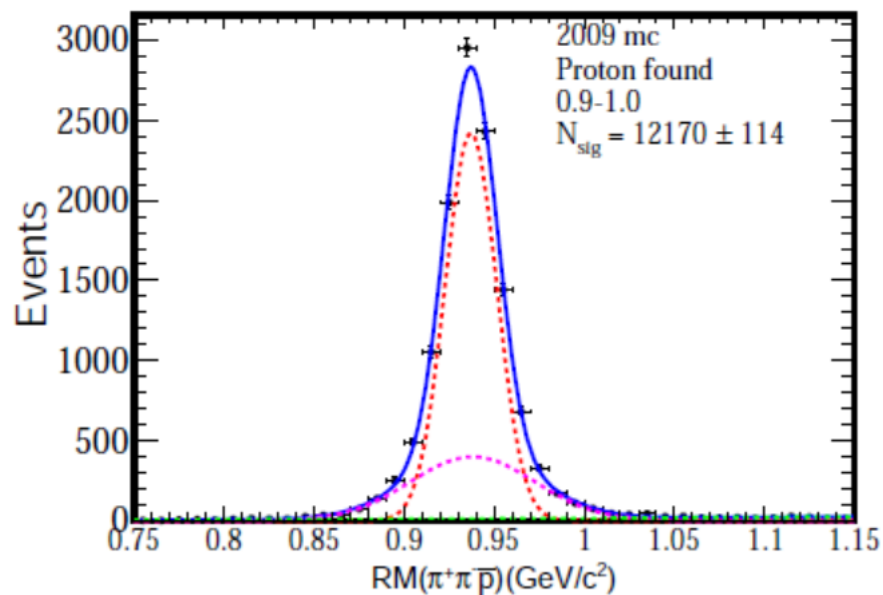
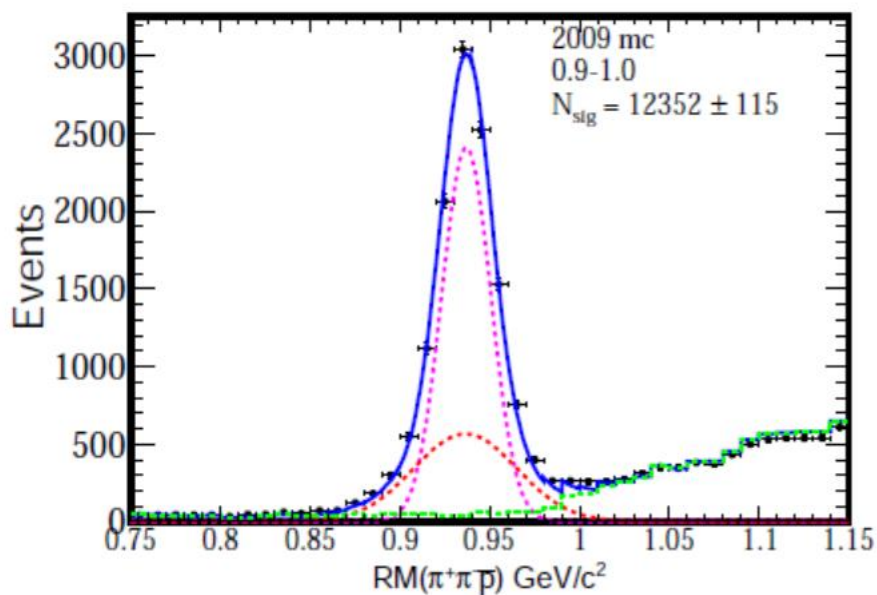
系统误差确定方法:

带电粒子重建: 实验真实数据中带电粒子重建效率与蒙卡模拟样本中带电粒子的重建效率的相对差异

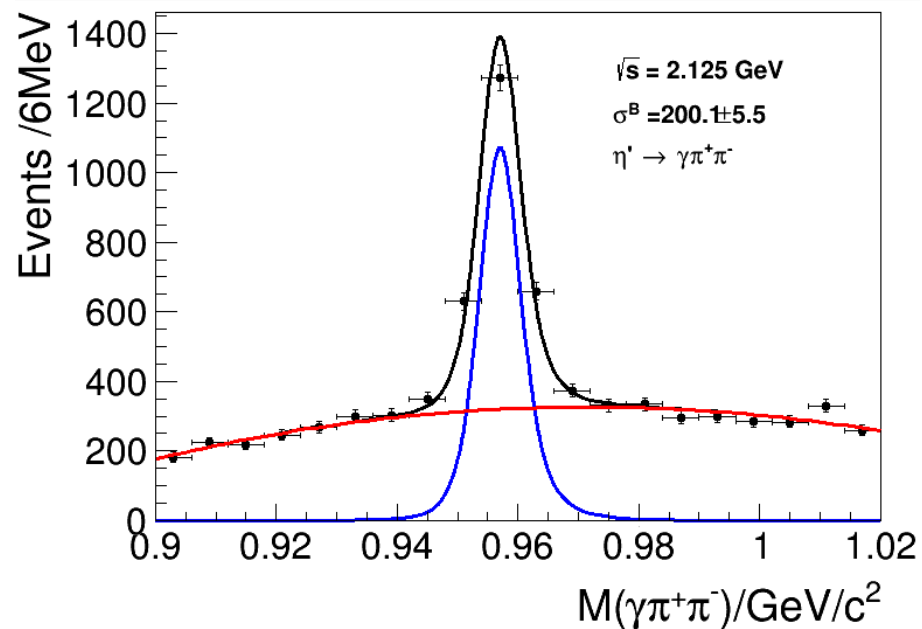
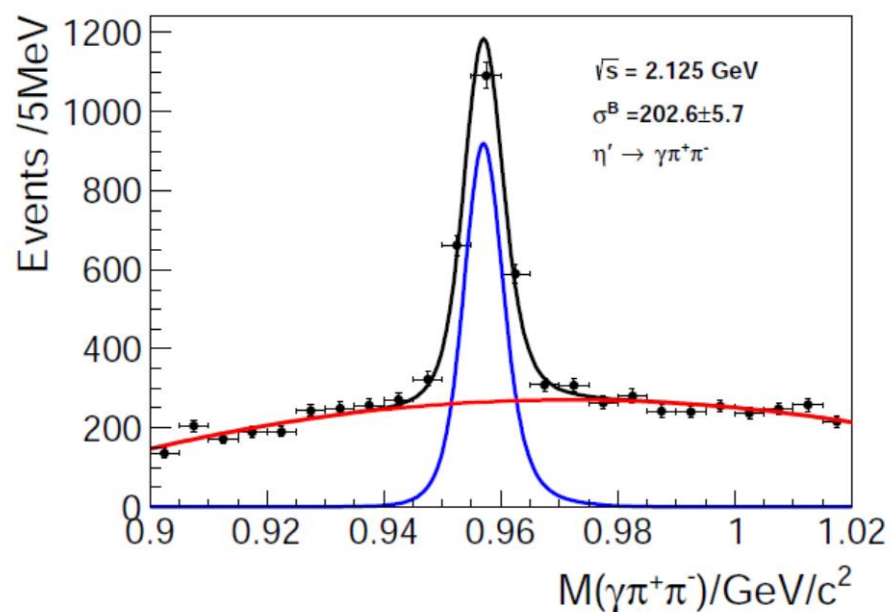
$$\epsilon_{trk} = \frac{n_{recon.}}{N_{missing}}$$

$$\Delta_{trk} = 1 - \frac{\epsilon_{trk}^{MC}}{\epsilon_{trk}^{data}}$$

以采用 $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}\pi^+\pi^-$ 确定质子重建效率为例:



信号拟合函数：两种不同拟合函数得到的结果差异，或者改变拟合函数的拟合参数得到的结果的差异



$$\Delta = \frac{202.6 - 200.1}{202.6} = 1.23\%$$

平均值计算

等精度测量:每个测量值服从同一分布。

误差 Δ 的概率密度函数为: $f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Delta}} e^{-\Delta^2/2\sigma_{\Delta}^2}$

且有 $E(\Delta) = 0, D(\Delta) = \sigma_{\Delta}^2 = \sigma_x^2$

一般 a 和 σ_x^2 是未知, 一般可用一组样本来近似求解, 即

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$$

\bar{x} 也服从正态分布, 且有

$$\begin{cases} E(\bar{x}) = a \\ D(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_x^2 / n, \text{或} \sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{n} \end{cases}$$

加权平均

在不同条件下或用不等精度的仪器观测的实验结果为不等精度，怎样去估计待测值的真值及误差呢？

基本原则：对于不等精度的数据处理时对**精度高的**给予**较大的信赖和重视**，以使其在确定最后的结果时的贡献较大。引入“权(weight)”的概念，通常称为“权重因子”。

$$\hat{a} = \frac{\sum_i x_i / \sigma_i^2}{\sum_i 1 / \sigma_i^2} = \frac{\sum_i x_i \omega_i}{\sum_i \omega_i} \equiv \bar{x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum_i x_i \omega_i}{\sum_i \omega_i}\right) = \frac{1}{\sum_i \omega_i} \sum_i \omega_i E(x_i) = a \\ D(\bar{x}) = D\left(\frac{\sum_i x_i \omega_i}{\sum_i \omega_i}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum_i \omega_i} = \frac{1}{\sum_i (1/\sigma_i^2)} \\ \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{D(\bar{x})} = \sigma / \sqrt{\sum_i \omega_i} = 1 / \sqrt{\sum_i (1/\sigma_i^2)} \end{array} \right.$$

pdgLive Home > $\psi(2S)$ > $\psi(2S) \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ **2019 Review of Particle Physics.**M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D **98**, 030001 (2018) and 2019 update. $\psi(2S) \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$

INSPIRE search

▼ $\Gamma(\psi(2S) \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-)/\Gamma_{\text{total}}$ Γ_{34}/Γ

VALUE (10^{-4})	EVTS	DOCUMENT ID	TECN	COMMENT
2.32 ± 0.12	OUR AVERAGE			
$2.31 \pm 0.06 \pm 0.10$	1.9k	DOBBS 2017		$e^+ e^- \rightarrow \psi(2S) \rightarrow \text{hadrons}$
$2.57 \pm 0.44 \pm 0.68$	35	PEDLAR 2005	CLEO	$e^+ e^- \rightarrow \psi(2S) \rightarrow \text{hadrons}$

... We do not use the following data for averages, fits, limits, etc. ...

$2.51 \pm 0.15 \pm 0.16$	281	1, 2 DOBBS 2014		$e^+ e^- \rightarrow \psi(2S) \rightarrow \text{hadrons}$
--------------------------	-----	---	--	---

¹ Using CLEO-c data but not authored by the CLEO Collaboration.² Superseded by [DOBBS 2017](#).**References:**

DOBBS 2017	PR D96 092004	Hyperon Form Factors & Diquark Correlations
DOBBS 2014	PL B739 90	First Measurements of Timelike Form Factors of the Hyperons, Λ^0 , Σ^0 , Σ^+ , Ξ^0 , Ξ^- , and Ω^- , and Evidence of Diquark Correlations
PEDLAR 2005	PR D72 051108	Branching-Fraction Measurements of $\psi(2S)$ Decay to Baryon-Antibaryon Final States

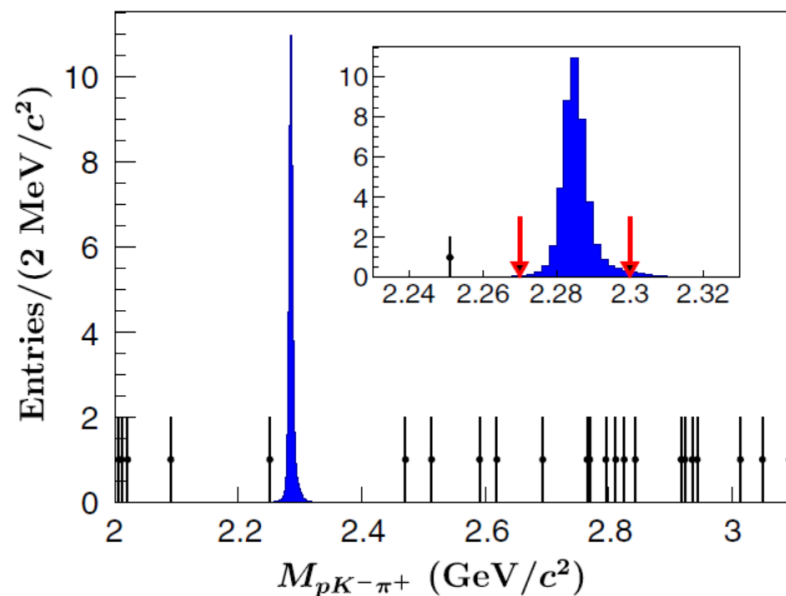
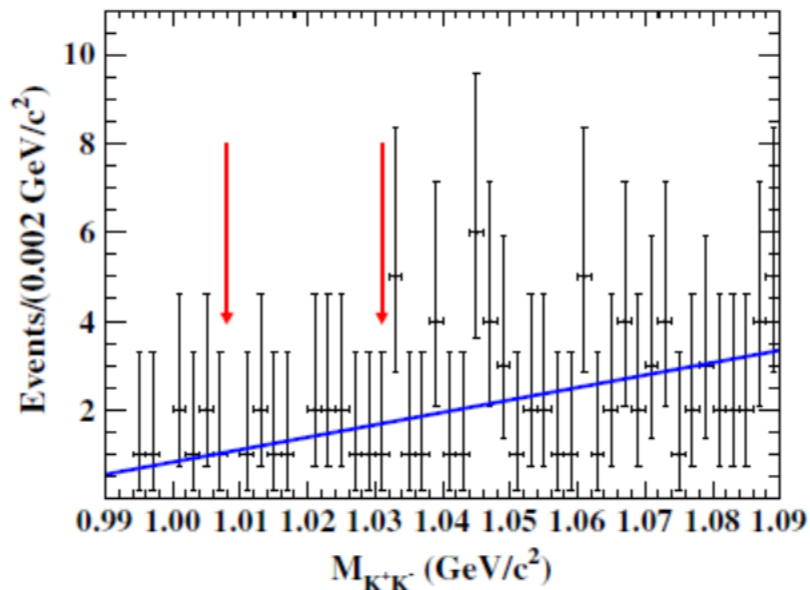
$$\overline{Br} = \frac{\frac{Br_1}{\Delta Br_1^2} + \frac{Br_2}{\Delta Br_2^2}}{\frac{1}{\Delta Br_1^2} + \frac{1}{\Delta Br_2^2}}$$

上限计算

PRD 57, 3873

有些过程无明显的信号，则只能设定上限(90%置信水平):

$$\frac{\int_0^{N_{\text{sig}}^{\text{up}}} \mathcal{L} dN_{\text{sig}}}{\int_0^{\infty} \mathcal{L} dN_{\text{sig}}} = 0.90$$



上限计算

PRD 57, 3873

有些过程无明显的信号，则只能设定上限(90%置信水平)：

TABLE IV. 90% C.L. intervals for the Poisson signal mean μ , for total events observed n_0 , for known mean background b ranging from 0 to 5.

$n_0 \backslash b$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0
0	0.00, 2.44	0.00, 1.94	0.00, 1.61	0.00, 1.33	0.00, 1.26	0.00, 1.18	0.00, 1.08	0.00, 1.06	0.00, 1.01	0.00, 0.98
1	0.11, 4.36	0.00, 3.86	0.00, 3.36	0.00, 2.91	0.00, 2.53	0.00, 2.19	0.00, 1.88	0.00, 1.59	0.00, 1.39	0.00, 1.22
2	0.53, 5.91	0.03, 5.41	0.00, 4.91	0.00, 4.41	0.00, 3.91	0.00, 3.45	0.00, 3.04	0.00, 2.67	0.00, 2.33	0.00, 1.73
3	1.10, 7.42	0.60, 6.92	0.10, 6.42	0.00, 5.92	0.00, 5.42	0.00, 4.92	0.00, 4.42	0.00, 3.95	0.00, 3.53	0.00, 2.78
4	1.47, 8.60	1.17, 8.10	0.74, 7.60	0.24, 7.10	0.00, 6.60	0.00, 6.10	0.00, 5.60	0.00, 5.10	0.00, 4.60	0.00, 3.60
5	1.84, 9.99	1.53, 9.49	1.25, 8.99	0.93, 8.49	0.43, 7.99	0.00, 7.49	0.00, 6.99	0.00, 6.49	0.00, 5.99	0.00, 4.99
6	2.21, 11.47	1.90, 10.97	1.61, 10.47	1.33, 9.97	1.08, 9.47	0.65, 8.97	0.15, 8.47	0.00, 7.97	0.00, 7.47	0.00, 6.47
7	3.56, 12.53	3.06, 12.03	2.56, 11.53	2.09, 11.03	1.59, 10.53	1.18, 10.03	0.89, 9.53	0.39, 9.03	0.00, 8.53	0.00, 7.53
8	3.96, 13.99	3.46, 13.49	2.96, 12.99	2.51, 12.49	2.14, 11.99	1.81, 11.49	1.51, 10.99	1.06, 10.49	0.66, 9.99	0.00, 8.99
9	4.36, 15.30	3.86, 14.80	3.36, 14.30	2.91, 13.80	2.53, 13.30	2.19, 12.80	1.88, 12.30	1.59, 11.80	1.33, 11.30	0.43, 10.30
10	5.50, 16.50	5.00, 16.00	4.50, 15.50	4.00, 15.00	3.50, 14.50	3.04, 14.00	2.63, 13.50	2.27, 13.00	1.94, 12.50	1.19, 11.50
11	5.91, 17.81	5.41, 17.31	4.91, 16.81	4.41, 16.31	3.91, 15.81	3.45, 15.31	3.04, 14.81	2.67, 14.31	2.33, 13.81	1.73, 12.81
12	7.01, 19.00	6.51, 18.50	6.01, 18.00	5.51, 17.50	5.01, 17.00	4.51, 16.50	4.01, 16.00	3.54, 15.50	3.12, 15.00	2.38, 14.00
13	7.42, 20.05	6.92, 19.55	6.42, 19.05	5.92, 18.55	5.42, 18.05	4.92, 17.55	4.42, 17.05	3.95, 16.55	3.53, 16.05	2.78, 15.05
14	8.50, 21.50	8.00, 21.00	7.50, 20.50	7.00, 20.00	6.50, 19.50	6.00, 19.00	5.50, 18.50	5.00, 18.00	4.50, 17.50	3.59, 16.50
15	9.48, 22.52	8.98, 22.02	8.48, 21.52	7.98, 21.02	7.48, 20.52	6.98, 20.02	6.48, 19.52	5.98, 19.02	5.48, 18.52	4.48, 17.52

信号显著度

若之前未观测到某过程/现象，现有的数据样本观测到了该衰变过程/现象，则通常要给出观测到该过程/现象的显著度 (significance)。

信号显著度是实验观测到的现象与待寻找的新现象、新信号之间关系的直观表达。

如何确定信号显著度？ → 假设检验！

想法：通过实验测量值或它的统计量的分布来检验零假设

由 H_0 的概率密度构造似然函数 $L(b)$

由 H_1 的概率密度构造似然函数 $L(s+b)$

拟合实验数据

$$L_m(b)$$

$$L_m(s+b)$$

$$S = [2(\ln L_m(s+b) - \ln L_m(b))]^{1/2}$$

$-2\ln[\ln L_m(b) / L_m(s+b)]$ 服从自由度为1的 χ^2 分布

实验P值：实验数据与零假设之间的一致性

信号的统计显著性：实验观测的现象与待寻找的新现象、新信号之间的关系

将信号显著性与实验P值联系起来：

$$\int_{-s}^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - P(u \geq u_{\text{obs}} | H_{bg}) = 1 - P(u_{\text{obs}})$$

对于计数实验：

$$\int_s^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \sum_{n=0}^{n_{\text{obs}}-1} \frac{b^n}{n!} e^{-b}$$

S值	实验P值
1	0.3173
2	0.0455
3	0.0027
4	6.3×10^{-5}
5	5.7×10^{-7}
6	2.0×10^{-9}

报道实验结果一般用S倍标准偏差来表述($S\sigma$)

References:

1. 实验物理中的概率与统计, 朱永生, 科学出版社
2. 核物理实验数据处理, 吴学超, 冯永正, 原子能出版社
3. Probability and Statistics in Particle Physics, A.G. Frodesen, O.Skjeggestad, H. Tofte, Global Books Resources Ltd.
4. G.J. Feldman and R.D. Cousins, PRD 57, 3873
5. 实验的数学处理 李惕碚, 科学出版社

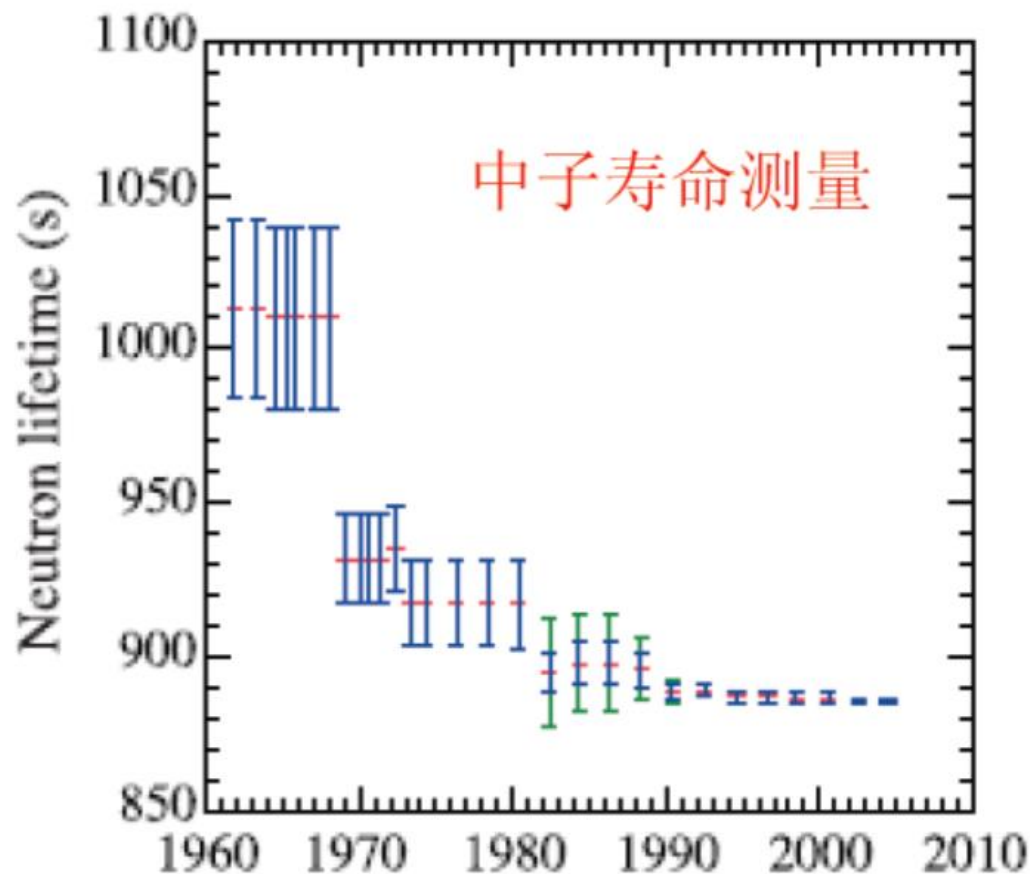
小 结

讲了一堆的数学，意义？

说服他人相信自己的实验结果是正确的！

Thanks for your attention!

实验结果显示出较强的时间相关性；我们只能估计我们知道可能带来差异的误差来源，无法估计我们不知道的误差项；人们在开展测量时，总是带有一定的倾向性！



计数的统计分布

粒子的探测为一随机过程，每个粒子入射到探测器上可能被记录，也可能不被记录。

设N个粒子全部入射到探测器上，探测器的探测效率为p，被记录的粒子数构成一个贝努利试验，则探测器探测到n个粒子的概率为：

$$p(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n} \quad \text{N固定}$$

因而上式可表为

$$p(n|N) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$$

入射到探测器上的粒子数N有涨落。设其服从泊松分布，即

$$P(N) = \frac{M^N}{N!} e^{-M} \quad \text{M为t时间内入射粒子数的期望}$$

由全概率公式得到计数 n 的概率分布 $P(n)$ 为

$$\begin{aligned} P(n) &= \sum_{N=n}^{\infty} p(n|N)P(N) = \sum_{N=n}^{\infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \frac{M^N}{N!} e^{-M} \\ &= \frac{(Mp)^n}{n!} e^{-M} \sum_{N=n}^{\infty} \frac{(1-p)^{N-n} M^{N-n}}{(N-n)!} = \frac{(Mp)^n}{n!} e^{-M} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[(1-p)M]^i}{i!} \\ &= \frac{(Mp)^n}{n!} e^{-Mp} \end{aligned}$$

由此，这是以 Mp 为参数的泊松分布。考虑入射粒子的统计分布后，探测到的粒子服从泊松分布，期望为 Mp 。

当计数值较大时，泊松分布也趋于高斯分布，因而可表为

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{并且 } \sigma^2 = m$$

计数的合成

在一些研究中，需要处理好几个服从泊松分布的计数合成问题。由数理统计可得几个独立的计数之和仍服从泊松分布

设 t 时间内由两个源引起的计数 n_1 、 n_2 分别服从参数为 m_1 、 m_2 的泊松分布。测到的总计数 $n = n_1 + n_2$ ，由各种可能的 n_1 、 n_2 组成，因而有 n 的概率 $P(n)$ 为

$$\begin{aligned} P(n) &= \sum_{n_2=0}^n [P(n - n_2; m_1) \cdot P(n_2; m_2)] \\ &= \sum_{n_2=0}^n \left[\frac{m_1^{n-n_2}}{(n - n_2)!} e^{-m_1} \right] \left[\frac{m_2^{n_2}}{n_2!} e^{-m_2} \right] \\ &= \frac{1}{n!} (m_1 + m_2)^n e^{-(m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

服从以 $(m_1 + m_2)$ 为参数的泊松分布。

分布类型的 χ^2 检验

当一批数据量很大时，可将数据分组用皮尔逊 χ^2 检验方法。
具体步骤如下

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$$

1.将样本由小到大按顺序排列并分组。把区间 $(-\infty, +\infty)$ (或有限区间) 分为 m 个区间，分点分别为 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ ，相应区间为 $(-\infty, x^{(1)}), (x^{(1)}, x^{(2)}), \dots, (x^{(i-1)}, x^{(i)}), \dots, (x^{(m-1)}, +\infty)$ ，统计样本落在第 i 个区间内的观测值的个数 f_i ，称为第 i 组的实测频数；

2.根据样本计算理论分布 $f(x; c)$ 中的未知参数 c 的最大似然估计值 \hat{c} 。假设未知参数为 K 个。

3.计算理论分布在各个区间内的概率含量 p_i

$$p_i = \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} f(x; \hat{c}) dx \quad i = 1, 2, \dots, m$$

及计算各组理论频 f_i $f_i = nP_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$

4.计算皮尔逊 χ^2 量。此 χ^2 量是渐近地(即 $n \rightarrow \infty$ 时)服从自由度为 $m-K-1$ 的 χ^2 分布;

5.选取显著水平 α , 由 χ^2 分布表(注意: 自由度为: $m-k-1$)查出分位点 χ^2_{α} , 则拒绝域为 $(\chi^2_{\alpha}, +\infty)$ 。若 $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$, 认为差异显著, 从而怀疑假设, 反之, 接受假设。

注意:

1.选统计量是在极限情况下服从 χ^2 分布, 因而一般 $n \geq 50$;

2.分组时, 各组内理论频数不能太小, 至少 $np_i \geq 5$, 如果达不到要求则合并区间。

高能实验中, 通常无需进行一组数据异常的检验

最小二乘法与最大似然法 一致性证明

假定观测值独立且服从正态分布，期望为 $f(x_i; C)$ ，方差为 σ_i^2 。

似然函数

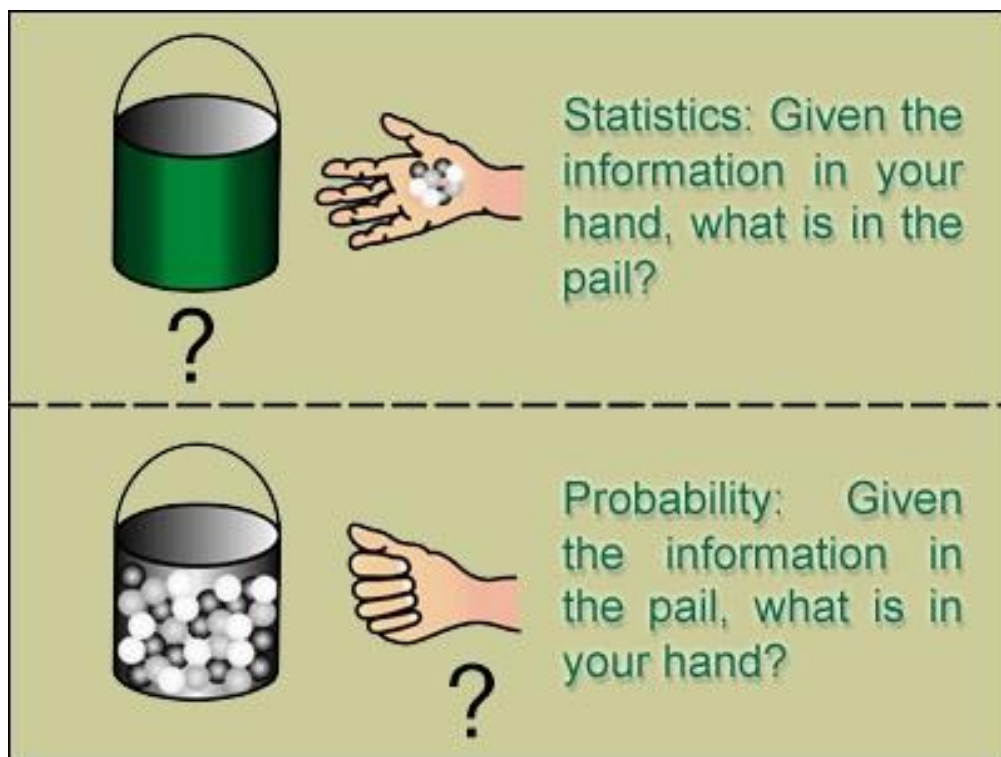
$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_i - f(x_i, C)}{\sigma_i}\right]^2\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \dots \sigma_n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{[y_i - f(x_i, C)]^2}{\sigma_i^2}\right\} \end{aligned}$$

最大似然法要求上式取极值，即要求指数项中

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - f(x_i, C)]^2 = \sum_i \omega_i v_i^2 \quad \text{为最小}$$

说明在观测值服从正态分布的条件下，最小二乘估计与最大似然估计是一致的。

概率论与统计学： 概率论是推理、 统计学是归纳



由摸出来的是黑球还是白球，猜测黑箱子内黑球和白球的比例是多少？（参数估计）能不能认为红球40%，白球60%？（假设检验）

知道这个箱子里面有几个黑球、几个白球（分布函数），计算下一个摸出来的球是黑球的概率

统计学的起源、发展、应用、大数据时代的统计学

PARAMETER CORRELATION COEFFICIENTS

NO.	GLOBAL	1	2
1	0.00044	1.000	0.000
2	0.00044	0.000	1.000

** 18 **HESSE 1000

COVARIANCE MATRIX CALCULATED SUCCESSFULLY

FCN=7072.65 FROM HESSE STATUS=OK 14 CALLS

EDM=2.7599e-06 STRATEGY= 1 ERROR MATR

EXT	PARAMETER	INTERNAL	INTER
NO.	NAME	VALUE	ERROR
1	mean0	2.99999e-02	4.57420e-02
2	sigma0	9.95623e-01	9.94086e-03

ERR DEF= 0.5

EXTERNAL ERROR MATRIX. NDIM= 25 NPAR= 2 ERR DEF=0.5

1.024e-08 2.506e-09

2.506e-09 9.915e-05

PARAMETER CORRELATION COEFFICIENTS

NO.	GLOBAL	1	2
1	0.00249	1.000	0.002
2	0.00249	0.002	1.000

[#1] INFO:Minization -- RooMinuit::optimizeConst: deactivating const optimization

54

root [1]

