一、插值

1、插值的概念

已知：$f(x_i)\ \ i=1,2,3,\cdots$ 但具体形式不知。

求 $\varphi(x)\sim f(x)$

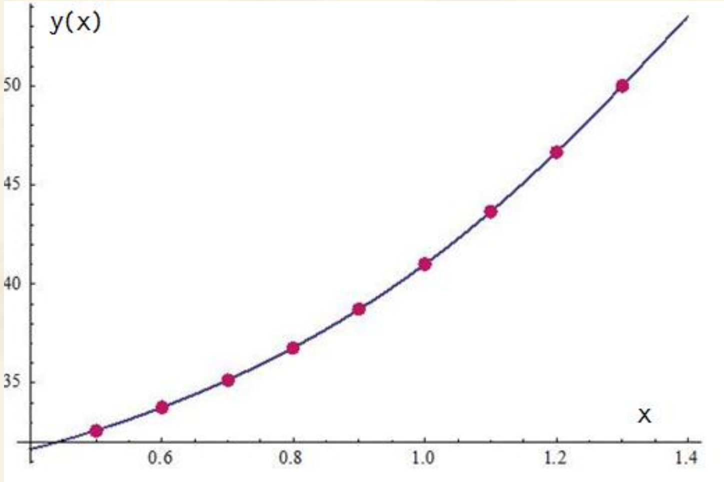
若：$\varphi(x)\in\Phi(x)$ 函数类，如：多项式、指数函数，等。

满足：$\varphi(x_i)=f(x_i)\ \ i=1,2,3,\cdots$

称：$\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 关于节点

$x_i\ \ i=1,2,3,\cdots$ 在 $\Phi(x)$

上的插值函数。



2、插值函数的唯一性

若：$\Phi(x)$ 函数类，有 **n+1** 个线性无关的基函数，

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$$

则：任意 $\varphi(x) \in \Phi(x)$ 可：$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$

若 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i $i = 0,1,2,\cdots,n$ 在 $\Phi(x)$ 上的插值函数。

即：$\varphi(x_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) = f(x_i)$；$i = 0,1,2,\cdots,n$

得关于 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 $n+1$ 的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

有解的条件是系数行列式不等于零。

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

此即为插值函数 $\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$ 唯一存在的充要条件。

3、多项式插值

已知：$f(x_i)\ \ i=1,2,3,\cdots$ 但具体形式不知。

求 $\varphi(x)\sim f(x)$ 应有好的数学性质，便于各类数学运算。

取 $\Phi(x)$ 多项式函数类， **n+1** 个线性无关的基函数，

$$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\varphi_2(x)=x^2,\cdots,\varphi_n(x)=x^n$$

多项式插值函数 $P(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$

满足插值条件： $P(x_i)=\sum_{j=0}^{n}a_jx_i^j=f(x_i)$；$i=0,1,2,\cdots,n$

得关于 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 $n+1$ 的线性方程组

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 (x_0)^2 + \cdots + a_n (x_0)^n = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 (x_1)^2 + \cdots + a_n (x_1)^n = f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 (x_n)^2 + \cdots + a_n (x_n)^n = f(x_n)$$

有解的条件是系数行列式不等于零。

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

4、多项式插值的拉格朗日表示

取n+1个n 次多项式：

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

因： $$l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

多项式插值的拉格朗日形式

构建插值多项式： $$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i)$$

显然满足插值条件：

$$L_n(x_j)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x_j)f(x_i)=\sum_{i=0}^{n}\delta_{ij}f(x_i)=f(x_j)\;;\; j=0,1,2,\cdots,n$$

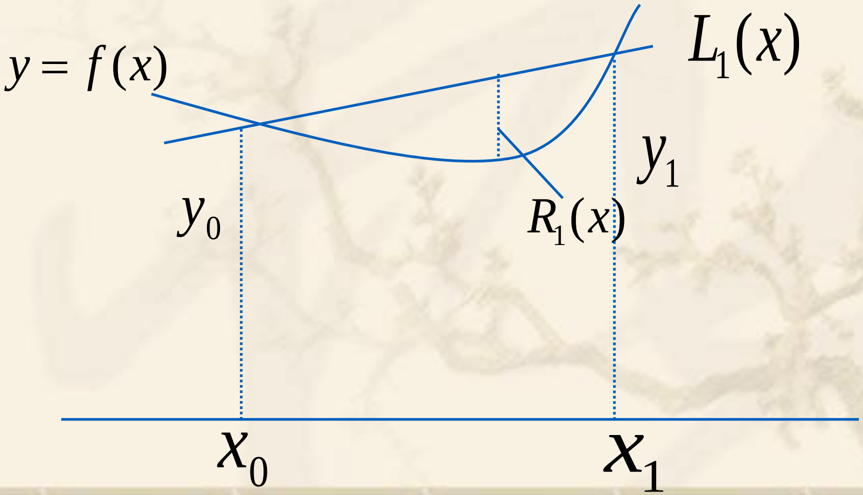
例：n=1 时（线性插值）

已知：$f(x_i)\ \ i=0,1$　　取：$\varphi(x)=a_0+a_1x$

满足：$$\begin{cases}\varphi(x_0)=a_0+a_1x_0=f(x_0)\\ \varphi(x_1)=a_0+a_1x_1=f(x_1)\end{cases}$$

得：$$\varphi(x)=L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

即用过这两点的直线近似替代原曲线



例：n=2 时（抛物插值）

已知：$f(x_i)\ \ i=0,1,2$ 取：$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

满足：
$$\begin{cases}\varphi(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=f(x_0)\\ \varphi(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=f(x_1)\\ \varphi(x_2)=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2=f(x_2)\end{cases}$$

得：

$$\varphi(x)=L_2(x)$$
$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

即用过这3点的抛物线近似替代原曲线

5、多项式插值的Newton插值法

考虑泰勒展式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

要想提高精度只要增加项数即可，以前的数据仍然有用，而上式就是求$f(x)$得导数：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

由此引入插商的概念。

设$f(x)$在互异的节点 x_i 处的函数值为f_i ,$i=0,1,\cdots,n$

称 $f[x_i,x_j]=\dfrac{f_i-f_j}{x_i-x_j}\quad(i\neq j)$ 为$f(x)$关于节点 x_i , x_j 一阶差商(均差)

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_i,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_j}\quad(i\neq j\neq k)$$

为$f(x)$关于x_i,x_j,x_k的二阶差商

依此类推

$$f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_{k-1}},x_{i_k}]=\frac{f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_{k-1}}]-f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_{k-2}},x_{i_k}]}{x_{i_{k-1}}-x_{i_k}}$$

为$f(x)$关于节点$x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_{k-1}},x_{i_k}$的$k$阶差商

可

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$$

对n+1个节点： $f(x_i) \quad i=0,1,2,\cdots,n$

取n次多项式：（称为牛顿插值多项式）

$$N_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,x_2,\cdots x_{n-1}]$$

增加节点，对n+2个节点： $f(x_i) \quad i=0,1,2,\cdots,n,n+1$

$$N_{n+1}(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

只需计算 $R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x_0,x_1,\cdots x_n]$

常用等距节点 $x_k=x_0+kh;\ k=0,1,\cdots,n \quad h=\dfrac{b-a}{n}$

6、分段插值法

多项式插值,一般情况下增加节点数，多项式的次数越高，精度越高。但也有许多另外情况，可能产生Runge现象，因此，常采用分段低阶多项式插值的方法。

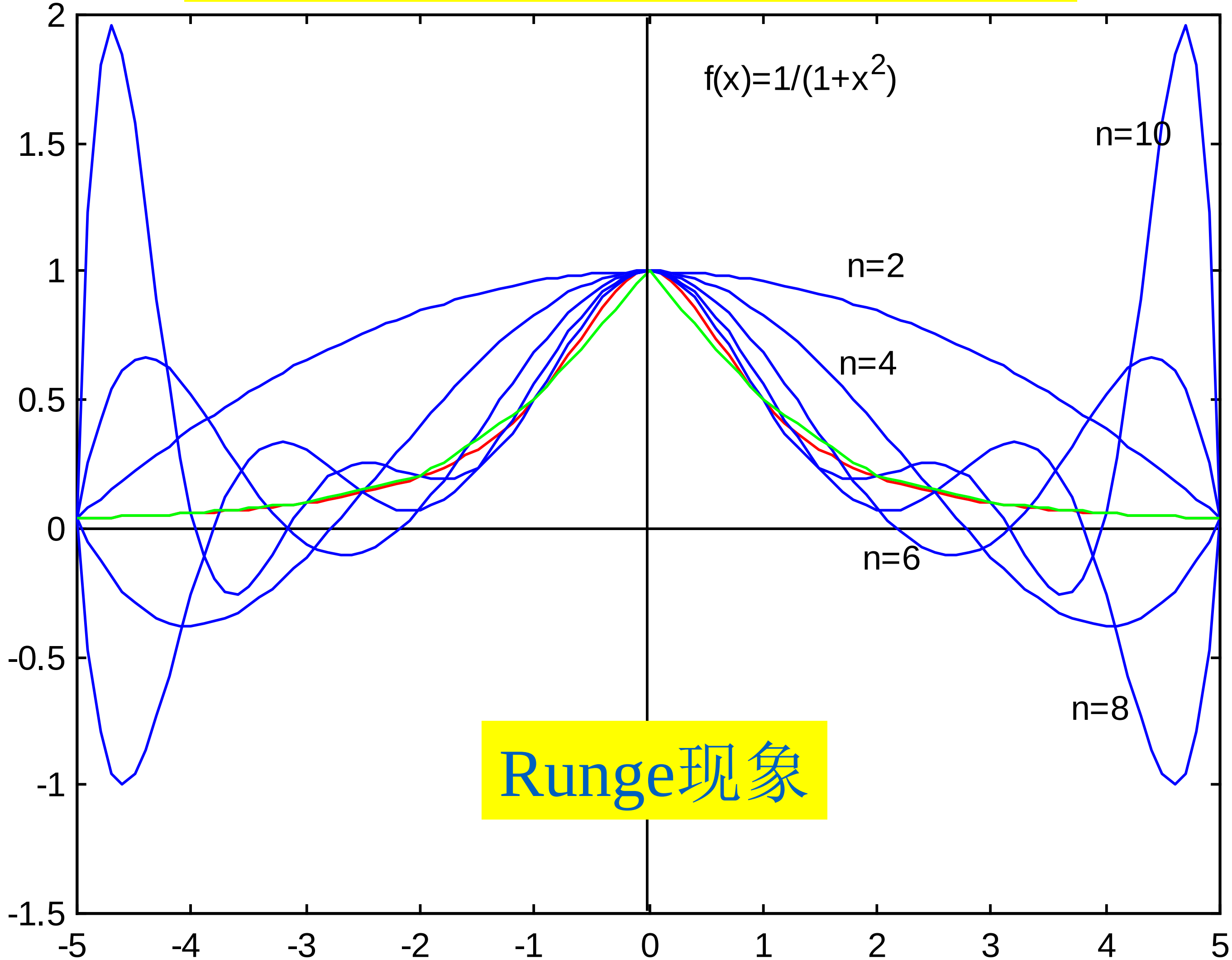
设插值节点为 x_i ， 函数值为 y_i $,i=0,1,\cdots,n$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \ ,i=0,1,2,\cdots,n-1$$

对每一分段区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 作线性插值

$$L_1^{(k)}(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

不同次数的Lagrange插值多项式的比较图



Runge现象

7、Hermite 插值

Lagrange插值公式所求得L(x)保证了节点处的函数值相等，也就是保证了函数的连续性，但不少实际问题还需要插值得光滑度，也就是还要求它在节点处的导数值也相等，导数的阶数越高则光滑度越高。

所谓 Hermite 插值是插值函数与被插值函数不仅在节点$\{x_i\}_0^n$处函数值相等,而且导数也相等。设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上具有一阶连续导数,如果有不超过 $2n+1$ 次多项式$H_{2n+1}(x)$满足

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\ H'_{2n+1}=f'(x_i)\quad (,=0,1,2,\ldots n)$$

则称$H_{2n+1}(x)$为$f(x)$关于节点$\{x_i\}_0^n$的 Hermite 插值多项式。

构造 $H_{2n+1}(x)$

已知x_i，$y_i = f(x_i)$，$f_i' = f'(x_i) \quad (i = 0,1,2,\ldots,n)$

要求 $H_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$，$H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad (i = 0,1,2,\ldots n)$

$$令 \quad H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x) f(x_j) + \sum_{j=0}^{n} \beta_j(x) f'(x_j)$$

若：

$$\alpha_j(x_i) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \qquad \beta_j'(x_i) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$$\alpha_j'(x_i) = 0 \qquad \beta_j(x_i) = 0$$

则 $H_{2n+1}(x)$ 满足要求

$$\text{如何求}\begin{cases}\alpha_j(x)=?\\ \beta_j(x)=?\end{cases}$$

$$\alpha_j(x):\quad 0=\alpha_j(x_0)=\alpha_j(x_1)=\ldots=\alpha_j(x_{j-1})$$

$$=\alpha_j(x_{j+1})=\ldots=\alpha_j(x_n)$$

$$\alpha'_j(x):\quad 0=\alpha'_j(x_0)=\alpha'_j(x_1)=\ldots=\alpha'_j(x_{j-1})$$

$$=\alpha'_j(x_{j+1})=\ldots=\alpha'_j(x_n)$$

$$\text{而}\alpha_j(x_j)=1,\quad \alpha'_j(x_j)=0$$

则$x_0, x_1, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$是$\alpha_j(x)$的二重零点。

所以令

$$\alpha_j(x) = C(x)\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2\ldots(x-x_{j-1})^2(x-x_{j+1})^2\ldots(x-x_n)^2}{(x_j-x_0)^2(x_j-x_1)^2\ldots(x_j-x_{j-1})^2(x_j-x_{j+1})^2\ldots(x_j-x_n)^2}$$

$$= C(x)l_j^2(x)$$

由于$H(x)$是$2n+1$次多项式，故$C(x)$为一次多是项式。

令 $C(x) = Ax + B$ 即 $\alpha_j(x) = (Ax+B)l_j^2(x)$

由 $\alpha_j(x_j)=1,\ \alpha_j'(x_j)=0$ 得：

$$1=(Ax_j+B)l_j^2(x_j)=Ax_j+B$$

$$0=\alpha_j'(x_j)=Al_j^2(x_j)+(Ax_j+B)(2l_j(x_j)l_j'(x_j))$$

即 $A+2(Ax_j+B)l_j'(x_j)=0$

由 $\begin{cases} Ax_j+B=1 \\ A+2(Ax_j+B)l_j'(x_j)=0 \end{cases}$

得 $\begin{cases} A=-2l_j'(x_j) \\ B=1+2x_jl_j'(x_j) \end{cases}$

故得:

$$\alpha_j(x) = (-2l_j'(x_j)x + 1 + 2x_j l_j'(x_j))l_j^2(x)$$

$$= (1 + 2(x_j - x)l_j'(x_j))l_j^2(x)$$

同理可得 $\beta_j(x) = (x - x_j)l_j^2(x)$

8、三次样条插值

“样条”这个词本来是指在飞机或轮船设计过程中为了描绘出光滑的外形曲线所用的一种工具，即一个具有弹性的细长木条。事实上，在作了某些近似简化后，样条的数学模型并不复杂，它只是分段的三次多项式曲线：在相邻两块压铁之间是三次多项式曲线；在压铁处，左右两段曲线的切线和曲率是连续的。

- 定义，给定区间［*a*, *b*］的分划：$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, 如果函数*s*(*x*)在区间［*a*,*b*］上满足以下条件：

（1）在每一个子区间（x_i, x_{i+1}）($i=0,1,\dots,n-1$) 上*s*(*x*)是三次多项式；

（2）*s*(*x*) 在区间［*a*, *b*］上具有二阶连续导数；

（3）$s(x_i)=y_i(i=0,1,\dots,n)$, $s'(x_0)=y'_0$, $s'(x_n)=y'_n$。我们就称s(*x*)为三次样条函数。

练习 1 、拉格朗日插值法

已知：$\{x_i, f(x_i)\}\quad i=0,1,2,\cdots,n$

建立拉格朗日插值多项式：$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$

其中：
$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

例：任意选取一 n 次的多项式函数

$$f(x)=30-x+15x^2-6x^3-0.5x^4+5x^5-1.5x^6$$

取节点：$x_0, x_1, \cdots, x_6$ 得出：$\{x_i, f(x_i)\}\quad i=0,1,2,3,4,5,6$

作为数据点。

要求：编程序计算，作图（标出数据点及绘出插值函数曲线）。