物理学中的群论

前 言

主 讲：陆 晓

广西师范大学物理科学与技术学院

2013年11月5日

教材与参考书

教 材：　物理学中的群论基础，*A.W.*约什

参考书：　物理学中的群论，马中骐

参考书：　物理学中的群论（上下册），陶瑞宝

参考书：　群论，孙洪洲

参考书：　群表示论的新途径，陈金全

参考书：　典型群及其在物理学上的应用，怀邦

参考书：　群论及其在固体物理中的应用，徐婉棠

参考书：　应用群论导引，张端明

教材与参考书

教 材：物理学中的群论基础，$A.W.$约什

参考书：物理学中的群论，马中骐

参考书：物理学中的群论（上下册），陶瑞宝

参考书：群论，孙洪洲

参考书：群表示论的新途径，陈金全

参考书：典型群及其在物理学上的应用，怀邦

参考书：群论及其在固体物理中的应用，徐婉棠

参考书：应用群论导引，张端明

教材与参考书

教 材： 物理学中的群论基础，$A.W.$约什

参考书： 物理学中的群论，马中骐

参考书： 物理学中的群论（上下册），陶瑞宝

参考书： 群论，孙洪洲

参考书： 群表示论的新途径，陈金全

参考书： 典型群及其在物理学上的应用，怀邦

参考书： 群论及其在固体物理中的应用，徐婉棠

参考书： 应用群论导引，张端明

教材与参考书

教 材： 物理学中的群论基础，*A.W.*约什

参考书： 物理学中的群论，马中骐

参考书： 物理学中的群论（上下册），陶瑞宝

参考书： 群论，孙洪洲

参考书： 群表示论的新途径，陈金全

参考书： 典型群及其在物理学上的应用，怀邦

参考书： 群论及其在固体物理中的应用，徐婉棠

参考书： 应用群论导引，张端明

教材与参考书

教 材： 物理学中的群论基础，*A.W.*约什

参考书： 物理学中的群论，马中骐

参考书： 物理学中的群论（上下册），陶瑞宝

参考书： 群论，孙洪洲

参考书： 群表示论的新途径，陈金全

参考书： 典型群及其在物理学上的应用，怀邦

参考书： 群论及其在固体物理中的应用，徐婉棠

参考书： 应用群论导引，张端明

教材与参考书

教 材： 物理学中的群论基础，*A.W.*约什

参考书： 物理学中的群论，马中骐

参考书： 物理学中的群论（上下册），陶瑞宝

参考书： 群论，孙洪洲

参考书： 群表示论的新途径，陈金全

参考书： 典型群及其在物理学上的应用，怀邦

参考书： 群论及其在固体物理中的应用，徐婉棠

参考书： 应用群论导引，张端明

教材与参考书

教 材： 物理学中的群论基础，*A.W.*约什

参考书： 物理学中的群论，马中骐

参考书： 物理学中的群论（上下册），陶瑞宝

参考书： 群论，孙洪洲

参考书： 群表示论的新途径，陈金全

参考书： 典型群及其在物理学上的应用，怀邦

参考书： 群论及其在固体物理中的应用，徐婉棠

参考书： 应用群论导引，张端明

教材与参考书

教 材：物理学中的群论基础，*A.W.*约什

参考书：物理学中的群论，马中骐

参考书：物理学中的群论（上下册），陶瑞宝

参考书：群论，孙洪洲

参考书：群表示论的新途径，陈金全

参考书：典型群及其在物理学上的应用，怀邦

参考书：群论及其在固体物理中的应用，徐婉棠

参考书：应用群论导引，张端明

目录

目录

目录

目录

目录

目录

几个常用的符号

- $\forall$：对所有的
- $\exists$：存在
- $\in$：属于
- $\subset$：包含于
- $\oplus$：直和
- $\otimes$：直积

几个常用的符号

- $\forall$：对所有的
- $\exists$：存在
- $\in$：属于
- $\subset$：包含于
- $\oplus$：直和
- $\otimes$：直积

几个常用的符号

- $\forall$：对所有的
- $\exists$：存在
- $\in$：属于
- $\subset$：包含于
- $\oplus$：直和
- $\otimes$：直积

几个常用的符号

- $\forall$：对所有的
- $\exists$：存在
- $\in$：属于
- $\subset$：包含于
- $\oplus$：直和
- $\otimes$：直积

几个常用的符号

- $\forall$：对所有的
- $\exists$：存在
- $\in$：属于
- $\subset$：包含于
- $\oplus$：直和
- $\otimes$：直积

几个常用的符号

- $\forall$：对所有的
- $\exists$：存在
- $\in$：属于
- $\subset$：包含于
- $\oplus$：直和
- $\otimes$：直积

物理学中的群论

第一章：抽象群理论

主 讲：陆 晓

广西师范大学物理科学与技术学院

2017年11月28日

目录

第一章：抽象群理论

目录

定义1.1 (群的定义)

$G=\{g_1=e, g_2, \cdots, g_i, \cdots\}$是一个非空集合，如果定义了任意两个元素之间的合成法则（如乘法运算），并且G中的元素满足以下四个条件，则称G为一个群。

1. 封闭性：　若：$g_i, g_j \in G$，则：$g_i g_j \in G$；
2. 结合律：　若：$g_i, g_j, g_k \in G$，则：$(g_i g_j)g_k = g_i(g_j g_k)$；
3. 单位元：　存在单位元e，G中任意元素g_i有：$eg_i = g_i e = g_i$；
4. 逆元：　任意元素g_i，存在唯一的逆元g_i^{-1}，有：

$$g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e\ 。$$

定义1.1 (群的定义)

$G=\{g_1=e, g_2, \cdots, g_i, \cdots\}$是一个非空集合，如果定义了任意两个元素之间的合成法则（如乘法运算），并且G中的元素满足以下四个条件，则称G为一个群。

1. 封闭性：　若：$g_i, g_j \in G$，则：$g_i g_j \in G$；
2. 结合律：　若：$g_i, g_j, g_k \in G$，则：$(g_i g_j)g_k = g_i(g_j g_k)$；
3. 单位元：　存在单位元e，G中任意元素g_i有：$eg_i = g_i e = g_i$；
4. 逆元：　任意元素g_i，存在唯一的逆元g_i^{-1}，有：

$$g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e \text{。}$$

定义1.1 (群的定义)

$G=\{g_1=e, g_2, \cdots, g_i, \cdots\}$是一个非空集合，如果定义了任意两个元素之间的合成法则（如乘法运算），并且G中的元素满足以下四个条件，则称G为一个群。

1. 封闭性： 若：$g_i, g_j \in G$ ， 则：$g_i g_j \in G$ ；
2. 结合律： 若：$g_i, g_j, g_k \in G$ ， 则：$(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ ；
3. 单位元： 存在单位元e，G中任意元素g_i有：$eg_i = g_i e = g_i$；
4. 逆元： 任意元素g_i，存在唯一的逆元g_i^{-1}，有：

$$g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e \text{ 。}$$

定义1.1 (群的定义)

$G = \{g_1 = e, g_2, \cdots, g_i, \cdots\}$是一个非空集合，如果定义了任意两个元素之间的合成法则（如乘法运算），并且G中的元素满足以下四个条件，则称G为一个群。

1. 封闭性： 若：$g_i, g_j \in G$，则：$g_i g_j \in G$；
2. 结合律： 若：$g_i, g_j, g_k \in G$，则：$(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$；
3. 单位元： 存在单位元e，G中任意元素g_i有：$eg_i = g_i e = g_i$；
4. 逆元： 任意元素g_i，存在唯一的逆元g_i^{-1}，有：

$$g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e \text{ 。}$$

定义1.1 (群的定义)

$G=\{g_1=e, g_2, \cdots, g_i, \cdots\}$是一个非空集合，如果定义了任意两个元素之间的合成法则（如乘法运算），并且G中的元素满足以下四个条件，则称G为一个群。

1. 封闭性： 若：$g_i, g_j \in G$，则：$g_i g_j \in G$；
2. 结合律： 若：$g_i, g_j, g_k \in G$，则：$(g_i g_j)g_k = g_i(g_j g_k)$；
3. 单位元： 存在单位元e，G中任意元素g_i有：$eg_i = g_i e = g_i$；
4. 逆元： 任意元素g_i，存在唯一的逆元g_i^{-1}，有：

   $g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e$ 。

§1.1：群的基本概念

几个概念

- 群元素的个数叫做群的阶；
- 有限个元素的群叫做有限群，
  无限个元素的群叫做无限群；无限群分为：
  离散群——无穷个可数元素构成的群，
  连续群——无穷多个不可数元素构成的群。
- 群元素满足结合律，但不一定满足交换律：$g_i g_j \neq g_j g_i$；
- 阿贝尔(Able)群：$g_i g_j = g_j g_i$ 。

几个概念

- ✏ 群元素的个数叫做群的阶；
- ✏ 有限个元素的群叫做有限群，
  无限个元素的群叫做无限群；无限群分为：
  离散群——无穷个可数元素构成的群，
  连续群——无穷多个不可数元素构成的群。
- ✏ 群元素满足结合律，但不一定满足交换律：$g_i g_j \neq g_j g_i$；
- ✏ 阿贝尔(Able)群：$g_i g_j = g_j g_i$。

§1.1：群的基本概念

几个概念

- 群元素的个数叫做群的阶；
- 有限个元素的群叫做有限群，
  无限个元素的群叫做无限群；无限群分为：
  离散群——无穷个可数元素构成的群，
  连续群——无穷多个不可数元素构成的群。
- 群元素满足结合律，但不一定满足交换律：$g_i g_j \neq g_j g_i$；
- 阿贝尔(Able)群：$g_i g_j = g_j g_i$。

几个概念

- 群元素的个数叫做群的阶；
- 有限个元素的群叫做有限群，
  无限个元素的群叫做无限群；无限群分为：
  离散群——无穷个可数元素构成的群，
  连续群——无穷多个不可数元素构成的群。
- 群元素满足结合律，但不一定满足交换律：$g_i g_j \neq g_j g_i$ ；
- 阿贝尔(Able)群：$g_i g_j = g_j g_i$ 。

几个概念

- 群元素的个数叫做群的阶；
- 有限个元素的群叫做有限群，
  无限个元素的群叫做无限群；无限群分为：
  离散群——无穷个可数元素构成的群，
  连续群——无穷多个不可数元素构成的群。
- 群元素满足结合律，但不一定满足交换律：$g_i g_j \neq g_j g_i$ ；
- 阿贝尔(Able)群：$g_i g_j = g_j g_i$ 。

例1.1 (数集)

1. 全体正负整数（包括0），按加法构成群。而按乘法不构成群，因为逆元不存在。
2. 全体实数（包括0），按加法构成群。而按乘法不构成群，因为0的逆元不存在。
3. 全体实数（不包括0），按乘法构成群。

例1.1 (数集)

1. 全体正负整数（包括0），按加法构成群。而按乘法不构成群，因为逆元不存在。
2. 全体实数（包括0），按加法构成群。而按乘法不构成群，因为0的逆元不存在。
3. 全体实数（不包括0），按乘法构成群。

例1.1 (数集)

1. 全体正负整数（包括0），按加法构成群。而按乘法不构成群，因为逆元不存在。
2. 全体实数（包括0），按加法构成群。而按乘法不构成群，因为0的逆元不存在。
3. 全体实数（不包括0），按乘法构成群。

例1.2 (三维空间反演)

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

群表：

	e	σ
e	e	σ
σ	σ	e

☞ 从群表可以看出该群满足群的四个条件。

例1.3 (四维空间反演)

$$e=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \sigma=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\tau=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad \rho=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

群表：

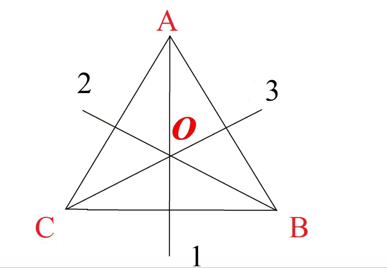
	e	σ	τ	ρ
e	e	σ	τ	ρ
σ	σ	e	ρ	τ
τ	τ	ρ	e	σ
ρ	ρ	τ	σ	e

☞ 群表可知：满足群的四个条件

§1.1：群的基本概念

例1.4 (D_3群)

正三角形全体对称操作：$D_3 = \{e, a, b, k, l, m\}$

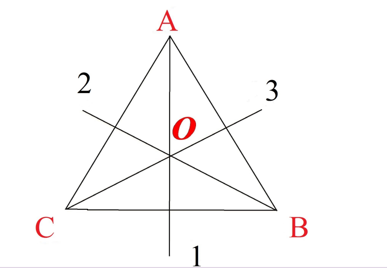


- e：不变操作（单位元），
- a：绕O轴转$\frac{2\pi}{3}$，
- b：绕O轴转$\frac{4\pi}{3}$，
- k：绕1轴转π，
- l：绕2轴转π，
- m：绕3轴转π。

☞ 群元素的乘积（操作积）：从右至左两个相继的操作。

例1.4 (D_3群)

正三角形全体对称操作：$D_3 = \{e, a, b, k, l, m\}$

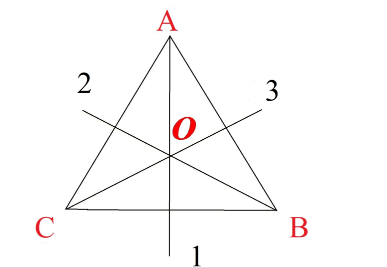


- e：不变操作（单位元），
- a：绕O轴转$\frac{2\pi}{3}$，
- b：绕O轴转$\frac{4\pi}{3}$，
- k：绕1轴转π，
- l：绕2轴转π，
- m：绕3轴转π。

☞ 群元素的乘积（操作积）：从右至左两个相继的操作。

例1.4 (D_3群)

正三角形全体对称操作：$D_3 = \{e, a, b, k, l, m\}$



- e：不变操作（单位元），
- a：绕O轴转$\frac{2\pi}{3}$，
- b：绕O轴转$\frac{4\pi}{3}$，
- k：绕1轴转π，
- l：绕2轴转π，
- m：绕3轴转π。

☞ 群元素的乘积（操作积）：从右至左两个相继的操作。

D_3群-续

- 封闭性：两个对称操作的积仍然是对称操作，
- 操作积满足结合律，
- 有单位元：e ，
- 每个元素有逆元：e 自逆，a 与b 互逆，k, l, m 自逆。
- 群表：

	e	a	b	k	l	m
e	e	a	b	k	l	m
b	b	e	a	l	m	k
a	a	b	e	m	k	l
k	k	l	m	e	a	b
l	l	m	k	b	e	a
m	m	k	l	a	b	e

D_3群-续

- 封闭性：两个对称操作的积仍然是对称操作，
- 操作积满足结合律，
- 有单位元：e，
- 每个元素有逆元：e 自逆，a 与b 互逆，k, l, m 自逆。
- 群表：

	e	a	b	k	l	m
e	e	a	b	k	l	m
b	b	e	a	l	m	k
a	a	b	e	m	k	l
k	k	l	m	e	a	b
l	l	m	k	b	e	a
m	m	k	l	a	b	e

D_3群-续

- 封闭性：两个对称操作的积仍然是对称操作，
- 操作积满足结合律，
- 有单位元：e ，
- 每个元素有逆元：e 自逆，a 与b 互逆，k, l, m 自逆。
- 群表：

	e	a	b	k	l	m
e	e	a	b	k	l	m
b	b	e	a	l	m	k
a	a	b	e	m	k	l
k	k	l	m	e	a	b
l	l	m	k	b	e	a
m	m	k	l	a	b	e

D_3群-续

- 封闭性：两个对称操作的积仍然是对称操作，
- 操作积满足结合律，
- 有单位元：e，
- 每个元素有逆元：e 自逆，a 与b 互逆，k, l, m 自逆。
- 群表：

	e	a	b	k	l	m
e	e	a	b	k	l	m
b	b	e	a	l	m	k
a	a	b	e	m	k	l
k	k	l	m	e	a	b
l	l	m	k	b	e	a
m	m	k	l	a	b	e

物理学中的群论

主 讲：陆 晓

第一章：抽象群理论

§ 1.1：群的基本概念

§ 1.2：群的基本性质

§ 1.3：循环群 子群

§ 1.4：陪集 正规子群

§ 1.5：共轭元素 类

§ 1.6：商群 群的同构和同态

§ 1.7：群的直积

D_3群-续

- 封闭性：两个对称操作的积仍然是对称操作，
- 操作积满足结合律，
- 有单位元：e ，
- 每个元素有逆元：e 自逆，a 与b 互逆，k, l, m 自逆。
- 群表：

	e	a	b	k	l	m
e	e	a	b	k	l	m
b	b	e	a	l	m	k
a	a	b	e	m	k	l
k	k	l	m	e	a	b
l	l	m	k	b	e	a
m	m	k	l	a	b	e

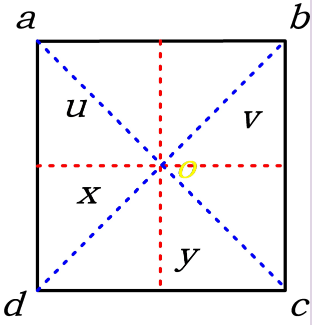
D_3群-续

- 封闭性：两个对称操作的积仍然是对称操作，
- 操作积满足结合律，
- 有单位元：e ，
- 每个元素有逆元：e 自逆，a 与b 互逆，k, l, m 自逆。
- 群表：

	e	a	b	k	l	m
e	e	a	b	k	l	m
b	b	e	a	l	m	k
a	a	b	e	m	k	l
k	k	l	m	e	a	b
l	l	m	k	b	e	a
m	m	k	l	a	b	e

例1.5 (C_{4v}群)

正方形对称操作：$C_{4v} = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3, m_x, m_y, \sigma_u, \sigma_v\}$

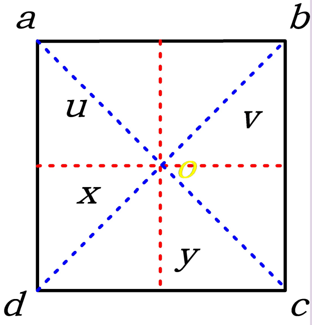


- E： 不变操作（单位元），
- C_4： 绕O轴转$\frac{\pi}{2}$，
- C_4^2： 绕O轴转π，
- C_4^3： 绕O轴转$\frac{3\pi}{2}$，
- m_x： 沿x轴反射，
- m_y： 沿y轴反射，
- m_u： 沿u轴反射，
- m_v： 沿v轴反射。

☞ 群元素的乘积（操作积）：从右至左两个相继的操作。

例1.5 (C_{4v}群)

正方形对称操作：$C_{4v} = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3, m_x, m_y, \sigma_u, \sigma_v\}$

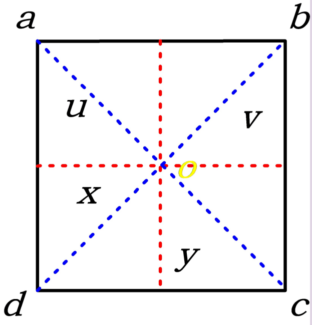


- E： 不变操作（单位元），
- C_4： 绕O轴转$\frac{\pi}{2}$，
- C_4^2： 绕O轴转π，
- C_4^3： 绕O轴转$\frac{3\pi}{2}$，
- m_x： 沿x轴反射，
- m_y： 沿y轴反射，
- m_u： 沿u轴反射，
- m_v： 沿v轴反射。

☞ 群元素的乘积（操作积）：从右至左两个相继的操作。

例1.5 (C_{4v}群)

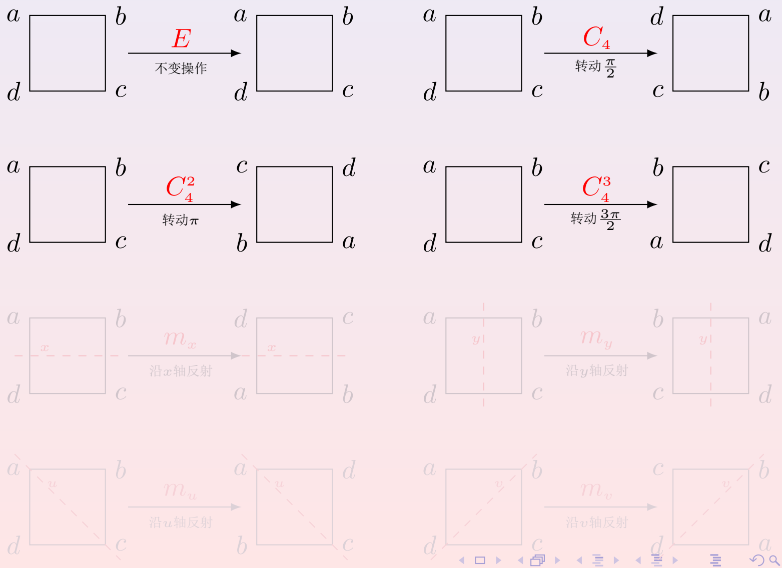
正方形对称操作：$C_{4v} = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3, m_x, m_y, \sigma_u, \sigma_v\}$

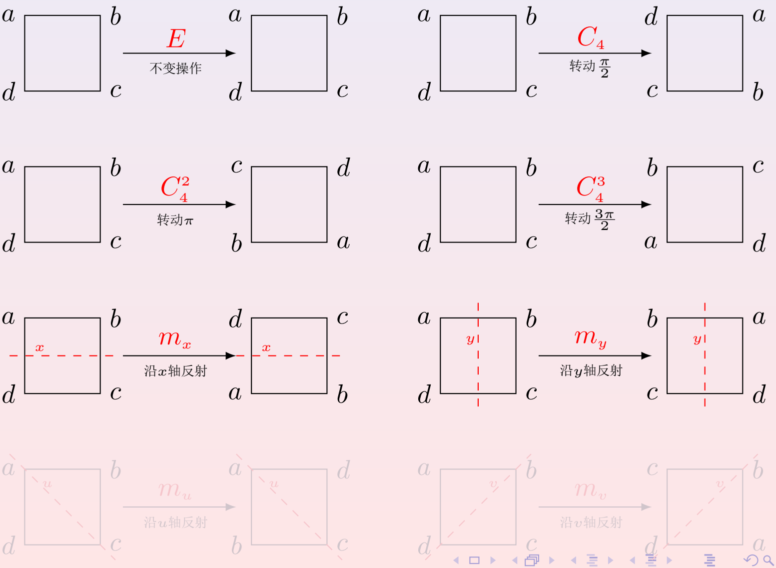


- E： 不变操作（单位元），
- C_4： 绕O轴转$\frac{\pi}{2}$，
- C_4^2： 绕O轴转π，
- C_4^3： 绕O轴转$\frac{3\pi}{2}$，
- m_x： 沿x轴反射，
- m_y： 沿y轴反射，
- m_u： 沿u轴反射，
- m_v： 沿v轴反射。

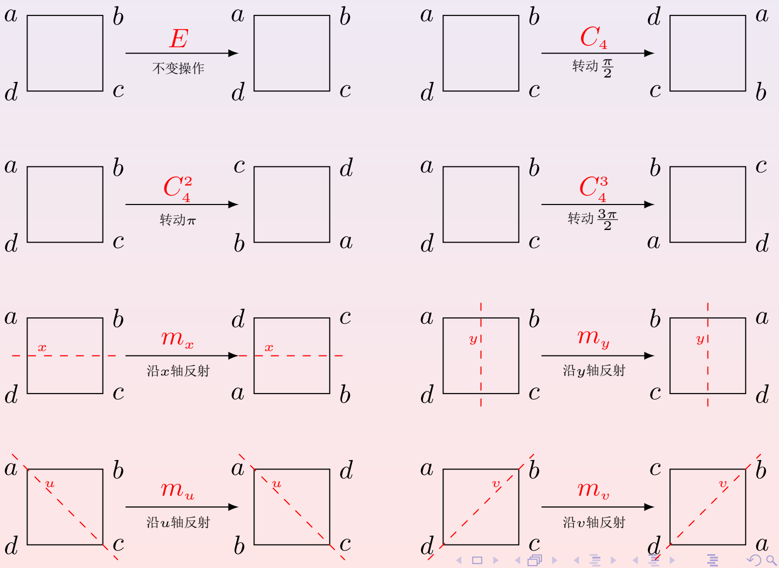
☞ 群元素的乘积（操作积）：从右至左两个相继的操作。

§ 1.1：群的基本概念


E
不变操作
C_4
转动 $\frac{\pi}{2}$
C_4^2
转动π
C_4^3
转动 $\frac{3\pi}{2}$
m_x
沿x轴反射
m_y
沿y轴反射
m_u
沿u轴反射
m_v
沿v轴反射


E
不变操作
C_4
转动 $\frac{\pi}{2}$
C_4^2
转动π
C_4^3
转动 $\frac{3\pi}{2}$
m_x
沿x轴反射
m_y
沿y轴反射
m_u
沿u轴反射
m_v
沿v轴反射

§ 1.1： 群的基本概念


E
不变操作
C_4
转动 $\frac{\pi}{2}$
C_4^2
转动π
C_4^3
转动 $\frac{3\pi}{2}$
m_x
沿x轴反射
m_y
沿y轴反射
m_u
沿u轴反射
m_v
沿v轴反射

群元素的乘积（操作积），例如：$C_4 m_x = \sigma_u$

$$C_4 m_x \begin{array}{ccc} a & & b \\ & \square & \\ d & & c \end{array} = C_4 \begin{array}{ccc} d & & c \\ & \square & \\ a & & b \end{array} = \begin{array}{ccc} a & & d \\ & \square & \\ b & & c \end{array} = \sigma_u \begin{array}{ccc} a & & b \\ & \square & \\ d & & c \end{array}$$

C_{4v} 群表

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2	σ_v	σ_u	m_x	m_y
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4	m_y	m_x	σ_v	σ_u
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E	σ_u	σ_v	m_y	m_x
m_x	m_x	σ_v	m_y	σ_u	E	C_4^2	C_4^3	C_4
m_y	m_y	σ_u	m_x	σ_v	C_4^2	E	C_4	C_4^3
σ_u	σ_u	m_x	σ_v	m_y	C_4	C_4^3	E	C_4^2
σ_v	σ_v	m_y	σ_u	m_x	C_4^3	C_4	C_4^2	E

群元素的乘积（操作积），例如：$C_4 m_x = \sigma_u$

$$C_4 m_x \begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} = C_4 \begin{array}{cc} d & c \\ a & b \end{array} = \begin{array}{cc} a & d \\ b & c \end{array} = \sigma_u \begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array}$$

C_{4v} 群表

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2	σ_v	σ_u	m_x	m_y
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4	m_y	m_x	σ_v	σ_u
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E	σ_u	σ_v	m_y	m_x
m_x	m_x	σ_v	m_y	σ_u	E	C_4^2	C_4^3	C_4
m_y	m_y	σ_u	m_x	σ_v	C_4^2	E	C_4	C_4^3
σ_u	σ_u	m_x	σ_v	m_y	C_4	C_4^3	E	C_4^2
σ_v	σ_v	m_y	σ_u	m_x	C_4^3	C_4	C_4^2	E

目录

性质1

群G中单位元是唯一的。

性质2

群G中逆元是唯一的。

性质3

设$G = \{g_i\}$是一个群，则有：

$(g_i^{-1})^{-1} = g_i$ ，$(g_i g_j)^{-1} = g_j^{-1} g_i^{-1}$ 。

证明.

略 $\square$

定理1.1 (重排列定理)

设群$G=\{g_\alpha\}$，$\forall u\in G$，作序列：$\Delta\equiv\{ug_\alpha|g_\alpha\in G\}$，则有$\Delta=G$；$u$的作用只是将群$G$的元素重新排列了一次。

证明

(1) 群G中任意元素g_β属于序列Δ。

$\because u^{-1}g_\beta=g_\gamma\in G$，(封闭性)

$\therefore ug_\gamma=g_\beta\in\Delta$。

(2) 序列Δ中只包含群G中的元素一次。

反证法：假设g_β在序列Δ中出现两次，即：

$g_\beta=ug_\gamma$，$g_\beta=ug_\delta$，$g_\gamma\neq g_\delta$

那么：$g_\gamma=u^{-1}g_\beta$，$g_\delta=u^{-1}g_\beta$

所以：$g_\gamma=g_\delta=u^{-1}g_\beta$，与假设相矛盾；故原命题成立。

定理1.1 (重排列定理)

设群$G=\{g_\alpha\}$，$\forall u\in G$，作序列：$\Delta\equiv\{ug_\alpha|g_\alpha\in G\}$，则有$\Delta=G$；$u$的作用只是将群$G$的元素重新排列了一次。

证明

(1) 群G中任意元素g_β属于序列Δ。

$\because u^{-1}g_\beta=g_\gamma\in G$，(封闭性)

$\therefore ug_\gamma=g_\beta\in\Delta$ 。

(2) 序列Δ中只包含群G中的元素一次。

反证法：假设g_β在序列Δ中出现两次，即：

$g_\beta=ug_\gamma$，$g_\beta=ug_\delta$，$g_\gamma\neq g_\delta$

那么：$g_\gamma=u^{-1}g_\beta$，$g_\delta=u^{-1}g_\beta$

所以：$g_\gamma=g_\delta=u^{-1}g_\beta$，与假设相矛盾；故原命题成立。

定理1.1 (重排列定理)

设群$G=\{g_\alpha\}$，$\forall u\in G$，作序列：$\Delta\equiv\{ug_\alpha|g_\alpha\in G\}$，则有$\Delta=G$；$u$的作用只是将群$G$的元素重新排列了一次。

证明

(1) 群G中任意元素g_β属于序列Δ。

$\because u^{-1}g_\beta=g_\gamma\in G$，(封闭性)

$\therefore ug_\gamma=g_\beta\in\Delta$ 。

(2) 序列Δ中只包含群G中的元素一次。

反证法：假设g_β在序列Δ中出现两次，即：

$g_\beta=ug_\gamma$，$g_\beta=ug_\delta$，$g_\gamma\neq g_\delta$

那么：$g_\gamma=u^{-1}g_\beta$，$g_\delta=u^{-1}g_\beta$

所以：$g_\gamma=g_\delta=u^{-1}g_\beta$ ，与假设相矛盾；故原命题成立。

目录

一、循环群

定义1.2 (循环群)

设g是群G中的任意元素，作序列：

$$e,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^k,\ \ldots\ ;$$

此序列必属于群G，若序列为有限，则必存在有限的正整数n使得：$g^n = e$，不难验证，集合：

$$H = \{e,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^{n-1}\},$$

按照群G的乘法构成群，H称为循环群。

- 循环群是阿贝尔群，但阿贝尔群不一定是循环群；
- 最小的正整数n叫做元素的阶；
- 循环群的元素都属于群G，故循环群是群G的一个子群。

一、循环群

定义1.2 (循环群)

设g是群G中的任意元素，作序列：

$$e,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^k,\ \ldots\quad;$$

此序列必属于群G，若序列为有限，则必存在有限的正整数n使得：$g^n = e$，不难验证，集合：

$$H = \{e,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^{n-1}\},$$

按照群G的乘法构成群，H称为循环群。

- ✏ 循环群是阿贝尔群，但阿贝尔群不一定是循环群；
- ✏ 最小的正整数n叫做元素的阶；
- ✏ 循环群的元素都属于群G，故循环群是群G的一个子群。

一、循环群

定义1.2 (循环群)

设g是群G中的任意元素，作序列：

$$e,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^k,\ \ldots\ ;$$

此序列必属于群G，若序列为有限，则必存在有限的正整数n使得：$g^n = e$，不难验证，集合：

$$H = \{e,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^{n-1}\},$$

按照群G的乘法构成群，H称为循环群。

- 循环群是阿贝尔群，但阿贝尔群不一定是循环群；
- 最小的正整数n叫做元素的阶；
- 循环群的元素都属于群G，故循环群是群G的一个子群。

一、循环群

定义1.2 (循环群)

设g是群G中的任意元素，作序列：

$$e,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^k,\ \ldots\ ;$$

此序列必属于群G，若序列为有限，则必存在有限的正整数n使得：$g^n = e$，不难验证，集合：

$$H = \{e,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^{n-1}\},$$

按照群G的乘法构成群，H称为循环群。

- ✏ 循环群是阿贝尔群，但阿贝尔群不一定是循环群；
- ✏ 最小的正整数n叫做元素的阶；
- ✏ 循环群的元素都属于群G，故循环群是群G的一个子群。

二、子群

定义1.3 (子群)

一个群G的非空子集H，若也按群G的合成法则（乘法）构成群（满足群的四个条件），则称H为群G的子群。

- 单位元和群G自身是群G的一个平庸子群；
- 非平庸的子群称为真子群；
- H是群G子群的判据一：
  ① 若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j \in H$，
  ② 若：$\forall g_i \in H$，有：$g_i^{-1} \in H$；
- H是群G子群的判据二：
  若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j^{-1} \in H$。

二、子群

定义1.3 (子群)

一个群G的非空子集H，若也按群G的合成法则（乘法）构成群（满足群的四个条件），则称H为群G 的子群。

- 单位元和群G自身是群G的一个平庸子群；
- 非平庸的子群称为真子群；
- H是群G子群的判据一：
  ① 若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j \in H$ ，
  ② 若：$\forall g_i \in H$，有：$g_i^{-1} \in H$ ；
- H是群G子群的判据二：
  若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j^{-1} \in H$ 。

二、子群

定义1.3 (子群)

一个群G的非空子集H，若也按群G的合成法则（乘法）构成群（满足群的四个条件），则称H为群G 的子群。

- 单位元和群G自身是群G的一个平庸子群；
- 非平庸的子群称为真子群；
- H是群G子群的判据一：
  ① 若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j \in H$ ，
  ② 若：$\forall g_i \in H$，有：$g_i^{-1} \in H$ ；
- H是群G子群的判据二：
  若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j^{-1} \in H$ 。

二、子群

定义1.3 (子群)

一个群G的非空子集H，若也按群G的合成法则（乘法）构成群（满足群的四个条件），则称H为群G 的子群。

- ✏ 单位元和群G自身是群G的一个平庸子群；
- ✏ 非平庸的子群称为真子群；
- ✏ H是群G子群的判据一：

  ① 若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j \in H$ ，

  ② 若：$\forall g_i \in H$，有：$g_i^{-1} \in H$ ；
- ✏ H是群G子群的判据二：

  若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j^{-1} \in H$ 。

二、子群

定义1.3 (子群)

一个群G的非空子集H，若也按群G的合成法则（乘法）构成群（满足群的四个条件），则称H为群G 的子群。

- 单位元和群G自身是群G的一个平庸子群；
- 非平庸的子群称为真子群；
- H是群G子群的判据一：
  ① 若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j \in H$ ，
  ② 若：$\forall g_i \in H$，有：$g_i^{-1} \in H$ ；
- H是群G子群的判据二：
  若：$\forall g_i, g_j \in H$，有：$g_i g_j^{-1} \in H$ 。

例1.6 (几个例子)

1. 全体整数群是全体实数群的子群；
2. D_3群的子群：
   2阶子群： $H_1 = \{e, k\}$，3阶子群： $H_2 = \{e, a, b\}$；
3. C_{4v} 群的子群：
   5个2阶子群：
   $H_1 = \{E, C_4^2\}$, $H_2 = \{E, m_x\}$, $H_3 = \{E, m_y\}$,
   $H_4 = \{E, \sigma_u\}$, $H_5 = \{E, \sigma_v\}$;
   3个4阶子群：
   $H_6 = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}$, $H_7 = \{E, C_4^2, m_x, m_y\}$,
   $H_8 = \{E, C_4^2, \sigma_u, \sigma_v\}$ 。
   为什么没有3阶群、5阶群、6阶群？
   问题：如何计算子群的个数？

例1.6 (几个例子)

1. 全体整数群是全体实数群的子群；
2. D_3群的子群：
   2阶子群： $H_1=\{e,\ k\}$，3阶子群： $H_2=\{e,\ a,\ b\}$；
3. C_{4v} 群的子群：
   5个2阶子群：
   $H_1=\{E,C_4^2\},\ H_2=\{E,m_x\},\ H_3=\{E,m_y\},$
   $H_4=\{E,\sigma_u\},\ H_5=\{E,\sigma_v\};$
   3个4阶子群：
   $H_6=\{E,C_4,C_4^2,C_4^3\},\ H_7=\{E,C_4^2,m_x,m_y\},$
   $H_8=\{E,C_4^2,\sigma_u,\sigma_v\}$ 。
   为什么没有3阶群、5阶群、6阶群？
   问题：如何计算子群的个数？

例1.6 (几个例子)

1. 全体整数群是全体实数群的子群；
2. D_3群的子群：
   2阶子群： $H_1 = \{e,\ k\}$，3阶子群： $H_2 = \{e,\ a,\ b\}$；
3. C_{4v} 群的子群：
   5个2阶子群：
   $H_1 = \{E, C_4^2\}$, $H_2 = \{E, m_x\}$, $H_3 = \{E, m_y\}$,
   $H_4 = \{E, \sigma_u\}$, $H_5 = \{E, \sigma_v\}$;
   3个4阶子群：
   $H_6 = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}$, $H_7 = \{E, C_4^2, m_x, m_y\}$,
   $H_8 = \{E, C_4^2, \sigma_u, \sigma_v\}$ 。
   为什么没有3阶群、5阶群、6阶群？
   问题：如何计算子群的个数？

目录

一、陪集

定义1.4 (陪集)

设$H=\{e,h_2,\cdots,h_m\}$是群G的一个子群，对于某个元素$u\in G$，但$u\notin H$；

集合$uH=\{u,uh_2,\cdots,uh_m\}$称为$H$的一个左陪集，

集合$Hu=\{u,h_2u,\cdots,h_mu\}$称为$H$的一个右陪集。

- 当取不同的$u\in G$，$u\notin H$时，可以得到不同的陪集；
- H的右陪集和左陪集有同样的性质；
- 左陪集uH和右陪集Hu不一定相等。

§1.4：陪集 正规子群

一、陪集

定义1.4 (陪集)

设$H=\{e,h_2,\cdots,h_m\}$是群G的一个子群，对于某个元素$u\in G$，但$u\notin H$；

集合$uH=\{u,uh_2,\cdots,uh_m\}$称为$H$的一个左陪集，

集合$Hu=\{u,h_2u,\cdots,h_mu\}$称为$H$的一个右陪集。

- ✏ 当取不同的$u\in G$，$u\notin H$时，可以得到不同的陪集；
- ✏ H的右陪集和左陪集有同样的性质；
- ✏ 左陪集uH和右陪集Hu不一定相等。

一、陪集

定义1.4 (陪集)

设$H=\{e,h_2,\cdots,h_m\}$是群G的一个子群，对于某个元素$u\in G$，但$u\notin H$；

集合$uH=\{u,uh_2,\cdots,uh_m\}$称为$H$的一个左陪集，

集合$Hu=\{u,h_2u,\cdots,h_mu\}$称为$H$的一个右陪集。

- 当取不同的$u\in G$，$u\notin H$时，可以得到不同的陪集；
- H的右陪集和左陪集有同样的性质；
- 左陪集uH和右陪集Hu不一定相等。

一、陪集

定义1.4 (陪集)

设$H=\{e,h_2,\cdots,h_m\}$是群G的一个子群，对于某个元素$u\in G$，但$u\notin H$；

集合$uH=\{u,uh_2,\cdots,uh_m\}$称为$H$的一个左陪集，

集合$Hu=\{u,h_2u,\cdots,h_mu\}$称为$H$的一个右陪集。

- ✏ 当取不同的$u\in G$，$u\notin H$时，可以得到不同的陪集；
- ✏ H的右陪集和左陪集有同样的性质；
- ✏ 左陪集uH和右陪集Hu不一定相等。

例1.7 (C_{4v}群的一个子群$H = \{E, m_x\}$的陪集)

- $P_1 \Longleftrightarrow \quad C_4H = \{C_4, \sigma_u\}, \quad HC_4 = \{C_4, \sigma_v\}$;
- $P_2 \Longleftrightarrow \quad C_4^3H = \{C_4^3, \sigma_v\}, \quad HC_4^3 = \{C_4^3, \sigma_u\}$;
- $P_3 \Longleftrightarrow \quad C_4^2H = \{C_4^2, m_y\}, \quad HC_4^2 = \{C_4^2, m_y\}$,

  $m_yH = \{m_y, C_4^2\}, \quad Hm_y = \{m_y, C_4^2\}$,

  $\sigma_uH = \{\sigma_u, C_4\}, \quad H\sigma_u = \{\sigma_u, C_4^3\}$,

  $\sigma_vH = \{\sigma_v, C_4^3\}, \quad H\sigma_v = \{\sigma_v, C_4\}$。

注意：

(1) 任意左（右）陪集与子群没有共同元素；

(2) 任意两个左（右）陪集要么完全相同，要么完全不同；

(3) $C_{4v} = H \bigcup P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3$。

例1.7 (C_{4v}群的一个子群$H=\{E, m_x\}$的陪集)

✏ $P_1 \Longleftrightarrow C_4H=\{C_4,\sigma_u\}$,　$HC_4=\{C_4,\sigma_v\}$;

✏ $P_2 \Longleftrightarrow C_4^3H=\{C_4^3,\sigma_v\}$,　$HC_4^3=\{C_4^3,\sigma_u\}$;

✏ $P_3 \Longleftrightarrow C_4^2H=\{C_4^2,m_y\}$,　$HC_4^2=\{C_4^2,m_y\}$,

$m_yH=\{m_y,C_4^2\}$,　$Hm_y=\{m_y,C_4^2\}$,

$\sigma_uH=\{\sigma_u,C_4\}$,　$H\sigma_u=\{\sigma_u,C_4^3\}$,

$\sigma_vH=\{\sigma_v,C_4^3\}$,　$H\sigma_v=\{\sigma_v,C_4\}$。

☞ 注意：

(1) 任意左（右）陪集与子群没有共同元素；

(2) 任意两个左（右）陪集要么完全相同，要么完全不同；

(3) $C_{4v}=H\bigcup P_1\bigcup P_2\bigcup P_3$。

例1.7 (C_{4v}群的一个子群$H=\{E,m_x\}$的陪集)

✏ $P_1 \Longleftrightarrow C_4H=\{C_4,\sigma_u\},\quad HC_4=\{C_4,\sigma_v\};$

✏ $P_2 \Longleftrightarrow C_4^3H=\{C_4^3,\sigma_v\},\quad HC_4^3=\{C_4^3,\sigma_u\};$

✏ $P_3 \Longleftrightarrow C_4^2H=\{C_4^2,m_y\},\quad HC_4^2=\{C_4^2,m_y\},$

$m_yH=\{m_y,C_4^2\},\quad Hm_y=\{m_y,C_4^2\},$

$\sigma_uH=\{\sigma_u,C_4\},\quad H\sigma_u=\{\sigma_u,C_4^3\},$

$\sigma_vH=\{\sigma_v,C_4^3\},\quad H\sigma_v=\{\sigma_v,C_4\}$。

☞ 注意：

(1) 任意左（右）陪集与子群没有共同元素；

(2) 任意两个左（右）陪集要么完全相同，要么完全不同；

(3) $C_{4v}=H\bigcup P_1\bigcup P_2\bigcup P_3$。

例1.7 (C_{4v}群的一个子群$H=\{E,m_x\}$的陪集)

- $P_1 \Longleftrightarrow C_4H=\{C_4,\sigma_u\},\quad HC_4=\{C_4,\sigma_v\}$;
- $P_2 \Longleftrightarrow C_4^3H=\{C_4^3,\sigma_v\},\quad HC_4^3=\{C_4^3,\sigma_u\}$;
- $P_3 \Longleftrightarrow C_4^2H=\{C_4^2,m_y\},\quad HC_4^2=\{C_4^2,m_y\}$,

  $m_yH=\{m_y,C_4^2\},\quad Hm_y=\{m_y,C_4^2\}$,

  $\sigma_uH=\{\sigma_u,C_4\},\quad H\sigma_u=\{\sigma_u,C_4^3\}$,

  $\sigma_vH=\{\sigma_v,C_4^3\},\quad H\sigma_v=\{\sigma_v,C_4\}$。

☞ 注意：

(1) 任意左（右）陪集与子群没有共同元素；

(2) 任意两个左（右）陪集要么完全相同，要么完全不同；

(3) $C_{4v}=H\bigcup P_1\bigcup P_2\bigcup P_3$。

例1.7 (C_{4v}群的一个子群$H = \{E, m_x\}$的陪集)

- $P_1 \Longleftrightarrow C_4H = \{C_4, \sigma_u\},\quad HC_4 = \{C_4, \sigma_v\}$;
- $P_2 \Longleftrightarrow C_4^3H = \{C_4^3, \sigma_v\},\quad HC_4^3 = \{C_4^3, \sigma_u\}$;
- $P_3 \Longleftrightarrow C_4^2H = \{C_4^2, m_y\},\quad HC_4^2 = \{C_4^2, m_y\}$,

  $m_yH = \{m_y, C_4^2\},\quad Hm_y = \{m_y, C_4^2\}$,

  $\sigma_uH = \{\sigma_u, C_4\},\quad H\sigma_u = \{\sigma_u, C_4^3\}$,

  $\sigma_vH = \{\sigma_v, C_4^3\},\quad H\sigma_v = \{\sigma_v, C_4\}$。

☞ 注意：

(1) 任意左（右）陪集与子群没有共同元素；

(2) 任意两个左（右）陪集要么完全相同，要么完全不同；

(3) $C_{4v} = H \bigcup P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3$。

例1.7 (C_{4v}群的一个子群$H=\{E,m_x\}$的陪集)

- $P_1 \Longleftrightarrow C_4H=\{C_4,\sigma_u\},\quad HC_4=\{C_4,\sigma_v\}$；
- $P_2 \Longleftrightarrow C_4^3H=\{C_4^3,\sigma_v\},\quad HC_4^3=\{C_4^3,\sigma_u\}$；
- $P_3 \Longleftrightarrow C_4^2H=\{C_4^2,m_y\},\quad HC_4^2=\{C_4^2,m_y\}$，
  $m_yH=\{m_y,C_4^2\},\quad Hm_y=\{m_y,C_4^2\}$，
  $\sigma_uH=\{\sigma_u,C_4\},\quad H\sigma_u=\{\sigma_u,C_4^3\}$，
  $\sigma_vH=\{\sigma_v,C_4^3\},\quad H\sigma_v=\{\sigma_v,C_4\}$。

☞ 注意：

(1) 任意左（右）陪集与子群没有共同元素；

(2) 任意两个左（右）陪集要么完全相同，要么完全不同；

(3) $C_{4v}=H\bigcup P_1\bigcup P_2\bigcup P_3$。

陪集的性质(以左陪集为例)

性质1

✏ 陪集中不含有子群H的元素。

证明：假设陪集中含有子群H的元素，

即：$uh_j \in H$，则有$uh_j = h_k$，右乘h_j^{-1}，得：

$$u = h_k h_j^{-1} \in H$$

这与假设相矛盾，因此陪集中不含有子群H的元素。

性质2

✏ 陪集不构成群。

证明：由性质1知道，陪集中不含有单位元，所以陪集不构成群。

陪集的性质(以左陪集为例)

性质1

✏ 陪集中不含有子群H的元素。

证明：假设陪集中含有子群H的元素，

即：$uh_j \in H$，则有$uh_j = h_k$，右乘h_j^{-1}，得：

$$u = h_k h_j^{-1} \in H$$

这与假设相矛盾，因此陪集中不含有子群H的元素。

性质2

✏ 陪集不构成群。

证明：由性质1知道，陪集中不含有单位元，所以陪集不构成群。

陪集的性质(以左陪集为例)

性质1

✏ 陪集中不含有子群H的元素。

证明：假设陪集中含有子群H的元素，

即：$uh_j \in H$，则有$uh_j = h_k$，右乘h_j^{-1}，得：

$$u = h_k h_j^{-1} \in H$$

这与假设相矛盾，因此陪集中不含有子群H的元素。

性质2

✏ 陪集不构成群。

证明：由性质1知道，陪集中不含有单位元，所以陪集不构成群。

定理1.2 (陪集定理)

子群H的两个左（右）陪集或者有完全相同的元素，或者没有任何公共元素。

证明

假设有两个不同的左陪集$uH \neq vH$，它们有公共元素$uh_l = vh_m$，左乘v^{-1}，右乘h_l^{-1}，得：

$$v^{-1}u = h_m h_l^{-1} \in H$$

由重排列定理有：

$$(v^{-1}u)H = H$$

因此：$uH = vH$。　证毕

推论：群G一定可以划分为子群H以及它的所有不同陪集的集合。

定理1.2 (陪集定理)

子群H的两个左（右）陪集或者有完全相同的元素，或者没有任何公共元素。

证明

假设有两个不同的左陪集$uH \neq vH$，它们有公共元素$uh_l = vh_m$，左乘v^{-1}，右乘h_l^{-1}，得：

$$v^{-1}u = h_m h_l^{-1} \in H$$

由重排列定理有：

$$(v^{-1}u)H = H$$

因此：$uH = vH$。　证毕

推论：群G一定可以划分为子群H以及它的所有不同陪集的集合。

定理1.3 (拉格朗日定理)

设H是群G的一个子群，则群G的阶g一定是子群H的阶h的整数倍，即：$I = g/h$；正整数I称为子群H在群G中的指数。

且$I-1$是陪集的个数。　　回答：如何计算子群的个数？

证明

由e作“陪集”$eH = H$，取$u_1 \in G, u_1 \notin H$，作陪集u_1H；如果H, u_1H不能穷尽群G，再作陪集u_2H，…，u_kH，一直到穷尽群G。可得一系列的陪集：H，u_1H，u_2H，…，u_kH；

因为子群H和陪集中元素个数都是h，所以$(k+1)h = g$，即陪集的个数：$k = g/h - 1 = I - 1$。　　证毕

推论1：群G的阶与任意元素阶的商为一整数。

推论2：若群G的阶为素数时，G没有真子群，而且G必为循环群。

定理1.3 (拉格朗日定理)

设H是群G的一个子群，则群G的阶g一定是子群H的阶h的整数倍，即：$I=g/h$；正整数I称为子群H在群G中的指数。且$I-1$是陪集的个数。

回答：如何计算子群的个数？

证明

由e作“陪集”$eH=H$，取$u_1\in G, u_1\notin H$，作陪集u_1H；如果H, u_1H不能穷尽群G，再作陪集u_2H，…，u_kH，一直到穷尽群G。可得一系列的陪集：H，u_1H，u_2H，…，u_kH；
因为子群H和陪集中元素个数都是h，所以$(k+1)h=g$，即陪集的个数：$k=g/h-1=I-1$。 证毕
推论1：群G的阶与任意元素阶的商为一整数。
推论2：若群G的阶为素数时，G没有真子群，而且G必为循环群。

定理1.3 (拉格朗日定理)

设H是群G的一个子群，则群G的阶g一定是子群H的阶h的整数倍，即：$I=g/h$；正整数I称为子群H在群G中的指数。且$I-1$是陪集的个数。

回答：如何计算子群的个数？

证明

由e作“陪集”$eH=H$，取$u_1\in G, u_1\notin H$，作陪集u_1H；如果H, u_1H不能穷尽群G，再作陪集u_2H，$\ldots$，u_kH，一直到穷尽群G。可得一系列的陪集：H, u_1H, u_2H, $\ldots$, u_kH；
因为子群H和陪集中元素个数都是h，所以$(k+1)h=g$，即陪集的个数：$k=g/h-1=I-1$。 证毕

推论1：群G的阶与任意元素阶的商为一整数。

推论2：若群G的阶为素数时，G没有真子群，而且G必为循环群。

定理1.3 (拉格朗日定理)

设H是群G的一个子群，则群G的阶g一定是子群H的阶h的整数倍，即：$I = g/h$；正整数I称为子群H在群G中的指数。且$I-1$是陪集的个数。

$\boxed{\text{回答：如何计算子群的个数？}}$

证明

由e作"陪集"$eH = H$，取$u_1 \in G, u_1 \notin H$，作陪集u_1H；如果H, u_1H不能穷尽群G，再作陪集u_2H，$\ldots$，u_kH，一直到穷尽群G。可得一系列的陪集：H，u_1H，u_2H，$\ldots$，u_kH；

因为子群H和陪集中元素个数都是h，所以$(k+1)h = g$，即陪集的个数：$k = g/h - 1 = I - 1$。　　证毕

推论1：群G的阶与任意元素阶的商为一整数。

推论2：若群G的阶为素数时，G没有真子群，而且G必为循环群。

二、正规子群

定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群，取$u \in G$，但$u \notin H$，若：

$$uH = Hu\,, \quad 或：\quad uHu^{-1} = H\,,$$

则称H为群G的正规子群。

二、正规子群

定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群，取$u \in G$，但$u \notin H$，若：

$$uH = Hu \ , \quad 或: \quad uHu^{-1} = H \ ,$$

则称H为群G的正规子群。

- 阿贝尔群的子群为正规子群，逆不成立；
- 单纯群：不含正规子群的群；
- 半单纯群：不含阿贝尔正规子群的群。

正规子群的性质

二、正规子群

定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群，取$u \in G$，但$u \notin H$，若：

$$uH = Hu\ ,\quad 或：\quad uHu^{-1} = H\ ,$$

则称H为群G的正规子群。

- ✏ 阿贝尔群的子群为正规子群，逆不成立；
- ✏ 单纯群：不含正规子群的群；
- ✏ 半单纯群：不含阿贝尔正规子群的群。

正规子群的性质

二、正规子群

定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群，取$u \in G$，但$u \notin H$，若：

$$uH = Hu \ , \quad 或: \quad uHu^{-1} = H \ ,$$

则称H为群G的正规子群。

- ✏ 阿贝尔群的子群为正规子群，逆不成立；
- ✏ 单纯群：不含正规子群的群；
- ✏ 半单纯群：不含阿贝尔正规子群的群。

正规子群的性质

二、正规子群

定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群，取$u \in G$，但$u \notin H$，若：

$$uH = Hu \text{ ，} \quad \text{或：} \quad uHu^{-1} = H \text{ ，}$$

则称H为群G的正规子群。

- ✏ 阿贝尔群的子群为正规子群，逆不成立；
- ✏ 单纯群：不含正规子群的群；
- ✏ 半单纯群：不含阿贝尔正规子群的群。

正规子群的性质

- ✏ 正规子群的任何两个陪集的内积仍然是该子群的陪集；
- ✏ 正规子群与其任一陪集的内积等于陪集自身。

二、正规子群

定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群，取$u\in G$，但$u\notin H$，若：

$$uH=Hu\ ,\quad \text{或：}\quad uHu^{-1}=H\ ,$$

则称H为群G的正规子群。

- ✏ 阿贝尔群的子群为正规子群，逆不成立；
- ✏ 单纯群：不含正规子群的群；
- ✏ 半单纯群：不含阿贝尔正规子群的群。

正规子群的性质

- ✏ 正规子群的任何两个陪集的内积仍然是该子群的陪集；
- ✏ 正规子群与其任一陪集的内积等于陪集自身。

二、正规子群

定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群，取$u \in G$，但$u \notin H$，若：

$$uH = Hu \,, \quad \text{或：} \quad uHu^{-1} = H \,,$$

则称H为群G的**正规子群。**

- 阿贝尔群的子群为正规子群，逆不成立；
- 单纯群：不含正规子群的群；
- 半单纯群：不含阿贝尔正规子群的群。

正规子群的性质

- 正规子群的任何两个陪集的内积仍然是该子群的陪集；
- 正规子群与其任一陪集的内积等于陪集自身。

二、正规子群

定义1.5 (正规子群)

设H是群G的一个子群，取$u \in G$，但$u \notin H$，若：

$$uH = Hu \ , \quad \text{或：} \quad uHu^{-1} = H \ ,$$

则称H为群G的正规子群。

- 阿贝尔群的子群为正规子群，逆不成立；
- 单纯群：不含正规子群的群；
- 半单纯群：不含阿贝尔正规子群的群。

正规子群的性质

- 正规子群的任何两个陪集的内积仍然是该子群的陪集；
- 正规子群与其任一陪集的内积等于陪集自身。

目录

§1.5：共轭元素 类

一、共轭元素

定义1.6 (共轭元素)

设f, h是群G的两个元素，若有元素$g \in G$，使$gfg^{-1} = h$，则称元素h与f共轭。记为：$h \sim f$。

共轭元素的性质

- 自反性：任何元素与自身共轭；
- 对称性：若$h \sim f$，则$f \sim h$；
- 传递性：若$f_1 \sim h$，$h \sim f_2$，则$f_1 \sim f_2$。

☞ 注：共轭关系是一种等价关系，共轭关系可将群元素分类。

一、共轭元素

定义1.6 (共轭元素)

设f,h是群G的两个元素，若有元素$g\in G$，使$gfg^{-1}=h$，则称元素h与f共轭。记为：$h\sim f$ 。

共轭元素的性质

- 自反性：任何元素与自身共轭；
- 对称性：若$h\sim f$，则$f\sim h$；
- 传递性：若$f_1\sim h$，$h\sim f_2$，则$f_1\sim f_2$。

☞ 注：共轭关系是一种等价关系，共轭关系可将群元素分类。

一、共轭元素

定义1.6 (共轭元素)

设f, h是群G的两个元素，若有元素$g \in G$，使$gfg^{-1} = h$，则称元素h与f共轭。记为：$h \sim f$ 。

共轭元素的性质

- 自反性：任何元素与自身共轭；
- 对称性：若$h \sim f$，则$f \sim h$；
- 传递性：若$f_1 \sim h$，$h \sim f_2$，则$f_1 \sim f_2$。

☞ 注：共轭关系是一种等价关系，共轭关系可将群元素分类。

二、类

定义1.7 (共轭类)

群G的所有相互共轭的元素集合，称为群G的一个共轭类（简称类）。群G的第i个类记为C_i。

类的性质

- 单位元自成一类，阿贝尔群的所有元素各成一类；
- 同类元素有相同的阶；
  - 注：若$f^m = e$，则同类元素$(gfg^{-1})^m = gf^mg^{-1} = e$。
- 两个类不能有公共元素，否则它们是同一个类；
  - 注：由传递性可知结论成立，群可按共轭类进行分割。
- 群G中任何一个类C_i满足：$x \in G$，$xC_ix^{-1} = C_i$；
- 正规子群中包含若干个完整的类，反之，凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。

§1.5：共轭元素 类

二、类

定义1.7 (共轭类)

群G的所有相互共轭的元素集合，称为群G的一个共轭类（简称类）。群G的第i个类记为C_i。

类的性质

- 单位元自成一类，阿贝尔群的所有元素各成一类；
- 同类元素有相同的阶；
  - ☞ 注：若$f^m = e$，则同类元素$(gfg^{-1})^m = gf^mg^{-1} = e$。
- 两个类不能有公共元素，否则它们是同一个类；
  - ☞ 注：由传递性可知结论成立，群可按共轭类进行分割。
- 群G中任何一个类C_i满足：$x \in G$，$xC_ix^{-1} = C_i$；
- 正规子群中包含若干个完整的类，反之，凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。

二、类

定义1.7 (共轭类)

群G的所有相互共轭的元素集合，称为群G的一个共轭类（简称类）。群G的第i个类记为C_i。

类的性质

- 单位元自成一类，阿贝尔群的所有元素各成一类；
- 同类元素有相同的阶；
  - 注：若$f^m = e$，则同类元素$(gfg^{-1})^m = gf^m g^{-1} = e$。
- 两个类不能有公共元素，否则它们是同一个类；
  - 注：由传递性可知结论成立，群可按共轭类进行分割。
- 群G中任何一个类C_i满足：$x \in G$，$xC_ix^{-1} = C_i$；
- 正规子群中包含若干个完整的类，反之，凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。

二、类

定义1.7 (共轭类)

群G的所有相互共轭的元素集合，称为群G的一个共轭类（简称类）。群G的第i个类记为C_i。

类的性质

- 单位元自成一类，阿贝尔群的所有元素各成一类；
- 同类元素有相同的阶；
  - 注：若$f^m = e$，则同类元素$(gfg^{-1})^m = gf^m g^{-1} = e$。
- 两个类不能有公共元素，否则它们是同一个类；
  - 注：由传递性可知结论成立，群可按共轭类进行分割。
- 群G中任何一个类C_i满足：$x \in G$，$xC_i x^{-1} = C_i$；
- 正规子群中包含若干个完整的类，反之，凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。

二、类

定义1.7 (共轭类)

群G的所有相互共轭的元素集合，称为群G的一个共轭类（简称类）。群G的第i个类记为C_i。

类的性质

- 单位元自成一类，阿贝尔群的所有元素各成一类；
- 同类元素有相同的阶；
  - 注：若$f^m = e$，则同类元素$(gfg^{-1})^m = gf^mg^{-1} = e$。
- 两个类不能有公共元素，否则它们是同一个类；
  - 注：由传递性可知结论成立，群可按共轭类进行分割。
- 群G中任何一个类C_i满足：$x \in G$，$xC_ix^{-1} = C_i$；
- 正规子群中包含若干个完整的类，反之，凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。

二、类

定义1.7 (共轭类)

群G的所有相互共轭的元素集合，称为群G的一个共轭类（简称类）。群G的第i个类记为C_i。

类的性质

- 单位元自成一类，阿贝尔群的所有元素各成一类；
- 同类元素有相同的阶；
  - ☞ 注：若$f^m = e$，则同类元素$(gfg^{-1})^m = gf^m g^{-1} = e$。
- 两个类不能有公共元素，否则它们是同一个类；
  - ☞ 注：由传递性可知结论成立，群可按共轭类进行分割。
- 群G中任何一个类C_i满足：$x \in G$，$xC_ix^{-1} = C_i$；
- 正规子群中包含若干个完整的类，反之，凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。

§1.5：共轭元素 类

二、类

定义1.7 (共轭类)

群G的所有相互共轭的元素集合，称为群G的一个共轭类（简称类）。群G的第i个类记为C_i。

类的性质

- 单位元自成一类，阿贝尔群的所有元素各成一类；
- 同类元素有相同的阶；
  - 注：若$f^m = e$，则同类元素$(gfg^{-1})^m = gf^m g^{-1} = e$。
- 两个类不能有公共元素，否则它们是同一个类；
  - 注：由传递性可知结论成立，群可按共轭类进行分割。
- 群G中任何一个类C_i满足：$x \in G$，$xC_ix^{-1} = C_i$；
- 正规子群中包含若干个完整的类，反之，凡包含若干个完整类的子群都是正规子群。

例1.8 (D_3群和C_{4v}群的类)

- D_3群的类：

  $C_1=\{E\}$，$C_2=\{a,b\}$，$C_3=\{l,k,m\}$；

- C_{4v}群的类：

  $C_1=\{E\}$，$C_2=\{C_4^2\}$，$C_3=\{C_4,C_4^3\}$，

  $C_4=\{m_x,m_y\}$，$C_5=\{\sigma_u,\sigma_v\}$。

定理1.4

群G的阶g是一个类C_k中元素的个数g_k的整数倍，即：$m=g/g_k$。

证明：略

例1.8 (D_3群和C_{4v}群的类)

- D_3群的类：
  $C_1=\{E\}$，$C_2=\{a,b\}$，$C_3=\{l,k,m\}$；
- C_{4v}群的类：
  $C_1=\{E\}$，$C_2=\{C_4^2\}$，$C_3=\{C_4,C_4^3\}$，
  $C_4=\{m_x,m_y\}$，$C_5=\{\sigma_u,\sigma_v\}$。

定理1.4

群G的阶g是一个类C_k中元素的个数g_k的整数倍，即：$m=g/g_k$。

证明：略

例1.8 (D_3群和C_{4v}群的类)

- D_3群的类：
  $C_1=\{E\}$，$C_2=\{a,b\}$，$C_3=\{l,k,m\}$；
- C_{4v}群的类：
  $C_1=\{E\}$，$C_2=\{C_4^2\}$，$C_3=\{C_4,C_4^3\}$，
  $C_4=\{m_x,m_y\}$，$C_5=\{\sigma_u,\sigma_v\}$。

定理1.4

群G的阶g是一个类C_k中元素的个数g_k的整数倍，即：$m=g/g_k$ 。

证明：略

§1.5：共轭元素 类

例1.8 (D_3群和C_{4v}群的类)

- D_3群的类：

  $C_1 = \{E\}$，$C_2 = \{a, b\}$，$C_3 = \{l, k, m\}$；

- C_{4v}群的类：

  $C_1 = \{E\}$，$C_2 = \{C_4^2\}$，$C_3 = \{C_4, C_4^3\}$，

  $C_4 = \{m_x, m_y\}$，$C_5 = \{\sigma_u, \sigma_v\}$。

定理1.4

群G的阶g是一个类C_k中元素的个数g_k的整数倍，即：$m = g/g_k$ 。

证明：略

定理1.5

设C_i、C_j为群G的两个类，类的乘积为：

$$C_i \cdot C_j = \sum_k a_{ij}^k C_k$$

其中求和是对群中所有的共轭类求和，而系数a_{ij}^k为正整数，表示类C_k在$C_i \cdot C_j$中出现的次数。

证明：略

例1.9

D_3群的三个类：$C_1 = \{E\}$，$C_2 = \{a, b\}$，$C_3 = \{l, k, m\}$；

类的乘积：$C_1 \cdot C_2 = C_2$ ， $C_1 \cdot C_3 = C_3$ ，

$C_2 \cdot C_3 = 2C_3$ ， $C_2 \cdot C_2 = 2C_1 + C_3$ ，

$C_3 \cdot C_3 = 3C_1 + 3C_2$ 。

定理1.5

设C_i、C_j为群G的两个类，类的乘积为：

$$C_i \cdot C_j = \sum_k a_{ij}^k C_k$$

其中求和是对群中所有的共轭类求和，而系数a_{ij}^k为正整数，表示类C_k在$C_i \cdot C_j$中出现的次数。

证明：略

例1.9

D_3群的三个类：$C_1 = \{E\}$，$C_2 = \{a, b\}$，$C_3 = \{l, k, m\}$；

类的乘积：$C_1 \cdot C_2 = C_2$，$C_1 \cdot C_3 = C_3$，

$C_2 \cdot C_3 = 2C_3$，$C_2 \cdot C_2 = 2C_1 + C_3$，

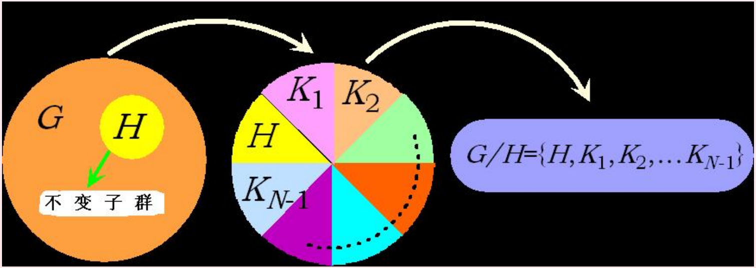
$C_3 \cdot C_3 = 3C_1 + 3C_2$。

目录

一、商群

定义1.8 (商群)

若H是群G的一个正规子群，它的$I-1$个陪集$\{K_i=g_iH\}$和H一起构成的集合：$\{K_1=H,K_2,K_3,\cdots,K_I\}$，在陪集乘法运算下构成群，称为商群，记为$K=G/H$。



满足群的四个条件

1. **封闭性：** $K_iK_j = g_iHg_jH = g_ig_jHH = g_kH = K_k$；
2. **结合律：** 群元的乘法满足结合律；
3. **单位元：** $K_1 = H$，$K_1K_i = Hg_iH = g_iHH = K_i$；
4. **逆元：** $K_i^{-1} = g_i^{-1}H$，$K_i^{-1}K_i = g_i^{-1}g_iHH = H = K_1$。

定理1.6

群G关于正规子群H的商群G/H的阶数等于正规子群H的群指数。

证明：略

满足群的四个条件

1. **封闭性：** $K_iK_j = g_iHg_jH = g_ig_jHH = g_kH = K_k$；
2. **结合律：** 群元的乘法满足结合律；
3. **单位元：** $K_1 = H$，$K_1K_i = Hg_iH = g_iHH = K_i$；
4. **逆元：** $K_i^{-1} = g_i^{-1}H$，$K_i^{-1}K_i = g_i^{-1}g_iHH = H = K_1$。

定理1.6

群G关于正规子群H的商群G/H的阶数等于正规子群H的群指数。

证明：略

§ 1.6：商群 群的同构和同态

例1.10

群$D_3 = \{e, a, b, k, l, m\}$的子群$H_2 = \{e, a, b\}$是正规子群，它的两个陪集为：$K_1 = H_2 = \{e, a, b\}$，$K_2 = kH_2 = \{k, l, m\}$；
则商群$D_3/H_2 = \{H_2, kH_2\}$，可以验证：$(kH_2)^2 = H_2$，
即D_3/H_2为二阶循环群。

例1.11

$G = \{1, i, -1, -i\}$，它有一个正规子群$H = \{1 - 1\}$，它的两个陪集为：$K_1 = H = \{1, -1\}$，$K_2 = iH = \{i, -i\}$；
则商群$G/H = \{H, iH\}$。

例1.10

群$D_3 = \{e, a, b, k, l, m\}$的子群$H_2 = \{e, a, b\}$是正规子群，它的两个陪集为：$K_1 = H_2 = \{e, a, b\}$，$K_2 = kH_2 = \{k, l, m\}$；
则商群$D_3/H_2 = \{H_2, kH_2\}$，可以验证：$(kH_2)^2 = H_2$，
即D_3/H_2为二阶循环群。

例1.11

$G = \{1, i, -1, -i\}$，它有一个正规子群$H = \{1 - 1\}$，它的两个陪集为：$K_1 = H = \{1, -1\}$，$K_2 = iH = \{i, -i\}$；
则商群$G/H = \{H, iH\}$。

二、群的同构与同态

定义1.9 (同构)

有相同阶的两个群：

$G=\{g_0=e,g_1,g_2,\cdots\}$，$G'=\{g_0'=e',g_1',g_2',\cdots\}$；

若存在一对一的满映射f（双射）$G\longleftrightarrow G'$，且满足：

1. G与G'的元素一一对应：$g_i\longleftrightarrow g_i'$，$g_j\longleftrightarrow g_j'$，

2. 保持群的运算结构不变：$g_ig_j=g_k\longleftrightarrow g_i'g_j'=g_k'$；

则称G与G'同构，记为$G\simeq G'$。

同构示意图

二、群的同构与同态

定义1.9 (同构)

有相同阶的两个群：

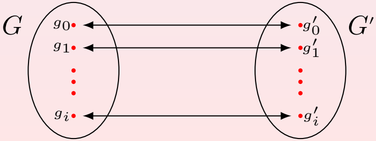
$G=\{g_0=e,g_1,g_2,\cdots\}$，$G'=\{g'_0=e',g'_1,g'_2,\cdots\}$；

若存在一对一的满映射f（双射）$G\longleftrightarrow G'$，且满足：

1. G与G'的元素一一对应： $g_i\longleftrightarrow g'_i$，$g_j\longleftrightarrow g'_j$ ，

2. 保持群的运算结构不变： $g_ig_j=g_k\longleftrightarrow g'_ig'_j=g'_k$ ；

则称G与G'同构，记为$G\simeq G'$。



同构示意图

同构的要素

- 群的元素有一一对应关系（两个群同阶）；
- 元素的运算也保持相应的关系，即：
  群G中若有：$g_i g_j = g_k$，
  群G'中则必须有：$g'_i g'_j = g'_k$，或：$f(g_i)f(g_j) = f(g_k)$；
  因此要求：$f(g_i g_j) = f(g_i)f(g_j)$。

同构的性质

- 两个同构的群有相同的乘法表；
- 在同构映射下，单位元被映射为单位元，逆元被映射为逆元；
- 若$G \simeq G'$，则$G' \simeq G$，同构映射为f^{-1}，同构具有相互性。

同构的要素

- ✏ 群的元素有一一对应关系（两个群同阶）；
- ✏ 元素的运算也保持相应的关系，即：
  群G中若有：$g_i g_j = g_k$，
  群G'中则必须有：$g'_i g'_j = g'_k$，或：$f(g_i)f(g_j) = f(g_k)$；
  因此要求：$f(g_i g_j) = f(g_i)f(g_j)$。

同构的性质

- ✏ 两个同构的群有相同的乘法表；
- ✏ 在同构映射下，单位元被映射为单位元，逆元被映射为逆元；
- ✏ 若$G \simeq G'$，则$G' \simeq G$，同构映射为f^{-1}，同构具有相互性。

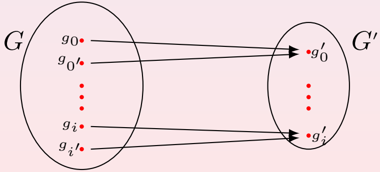
定义1.10 (同态)

有不同阶的两个群：

$G=\{g_0=e,g_1,g_2,\cdots\}$，$G'=\{g'_0=e',g'_1,g'_2,\cdots\}$；

如果群G的阶大于群G'的阶，两个群元素之间存在多对一的满映射f： $g_i\longrightarrow g'_i$，$g_j\longrightarrow g'_j$ ，且：$g_ig_j=g_k\longrightarrow g'_ig'_j=g'_k$ ；

则称G与G'同态，记为 $G\sim G'$。



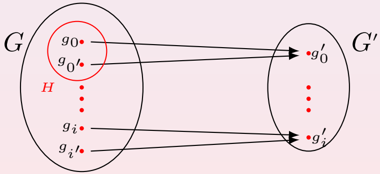
同态示意图

同态的性质

- ✏ 两个群的元素有多对一的对应关系；
- ✏ 在同态映射下，运算规律保持不变；
- ✏ 在同态映射下，单位元映射为单位元，逆元映射为逆元；
- ✏ 同态的两个群，群乘表有分块结构上的相似性。

定义1.11 (同态核)

设群G与群G'同态，G中所有与G'单位元对应的元素所构成的集合，称为同态映像的核（简称同态核）H。



同态核示意图

定理1.7 (同态核定理)

若群G与群G'同态，则有：*1.* 同态核H是G的正规子群，*2.* 商群G/H与G'同构；即：$G/H \simeq G'$。

证明

1. H是G的正规子群：

$\forall g \in G$, $\forall h \in H$，f为G到G'的同态映射，有：

$f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'[f(g)]^{-1} = e'$；

即：$ghg^{-1} \in H$，故H是正规子群。

2. 商群G/H与G'同构：

定义映射F：$G/H \longrightarrow G'$，$F(gH) = f(g)$；

如能证明F是同构映射，则G/H与G'同构。

定理1.7 (同态核定理)

若群G与群G'同态，则有：1. 同态核H是G的正规子群，2. 商群G/H与G'同构；即：$G/H \simeq G'$。

证明

1. H是G的正规子群；

   $\forall g \in G, \forall h \in H$，$f$为$G$到$G'$的同态映射，有：

   $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'[f(g)]^{-1} = e'$；

   即：$ghg^{-1} \in H$，故H是正规子群。

2. 商群G/H与G'同构；

   定义映射F，$G/H \longleftrightarrow G'$，$F(gH) = f(g)$；

   如能证明F是同构映射，则G/H与G'同构。

定理1.7 (同态核定理)

若群G与群G'同态，则有：*1.* 同态核H是G的正规子群，*2.* 商群G/H与G'同构；即：$G/H \simeq G'$。

证明

1. H是G的正规子群；

   $\forall g \in G, \forall h \in H$，$f$为$G$到$G'$的同态映射，有：

   $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'[f(g)]^{-1} = e'$；

   即：$ghg^{-1} \in H$，故H是正规子群。

2. 商群G/H与G'同构；

   定义映射F，$G/H \longleftrightarrow G'$，$F(gH) = f(g)$；

   如能证明F是同构映射，则G/H与G'同构。

定理1.7 (同态核定理)

若群G与群G'同态，则有：*1.* 同态核H是G的正规子群，*2.* 商群G/H与G'同构；即：$G/H \simeq G'$。

证明

1. H是G的正规子群；

   $\forall g \in G, \forall h \in H$，$f$为$G$到$G'$的同态映射，有：

   $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'[f(g)]^{-1} = e'$；

   即：$ghg^{-1} \in H$，故H是正规子群。

2. 商群G/H与G'同构；

   定义映射F，$G/H \longleftrightarrow G'$，$F(gH) = f(g)$；

   如能证明F是同构映射，则G/H与G'同构。

证明（续）

分两步证明：

(1). 映射$F(gH)$的值$f(g)$与陪集gH代表元素g的选取无关；
设：$h \in H, gh \in gH$，$(gh)H = gH$，gh为代表元素，故有：
$F(gH) = F(ghH) = f(gh) = f(g)f(h) = f(g)e' = f(g)$，
所以映射F与陪集gH代表元素g的选取无关。

(2). F为一对一映射，且保持乘法结构不变；
分a, b, c三步证明：

a. F为一对一的单映射；
设：$g_1H \neq g_2H$，要证：$F(g_1H) \neq F(g_2H)$；
反证法，若$F(g_1H = F(g_2H))$，则$f(g_1) = f(g_2)$，

证明（续）

分两步证明：

(1). 映射$F(gH)$的值$f(g)$与陪集gH代表元素g的选取无关；

设：$h \in H, gh \in gH$，$(gh)H = gH$，gh为代表元素，故有：

$F(gH) = F(ghH) = f(gh) = f(g)f(h) = f(g)e' = f(g)$，

所以映射F与陪集gH代表元素g的选取无关。

(2). F为一对一映射，且保持乘法结构不变；

分a, b, c三步证明：

a. F为一对一的单映射；

设：$g_1H \neq g_2H$，要证：$F(g_1H) \neq F(g_2H)$；

反证法，若$F(g_1H = F(g_2H))$，则$f(g_1) = f(g_2)$，

证明（续）

分两步证明：

(1). 映射$F(gH)$的值$f(g)$与陪集gH代表元素g的选取无关；
设：$h\in H, gh\in gH$，$(gh)H=gH$，gh为代表元素，故有：
$F(gH)=F(ghH)=f(gh)=f(g)f(h)=f(g)e'=f(g)$，
所以映射F与陪集gH代表元素g的选取无关。

(2). F为一对一映射，且保持乘法结构不变；
分a,b,c三步证明：

a. F为一对一的单映射；
设：$g_1H\neq g_2H$，要证：$F(g_1H)\neq F(g_2H)$；
反证法，若$F(g_1H=F(g_2H))$，则$f(g_1)=f(g_2)$，

证明（续）

分两步证明：

(1). 映射$F(gH)$的值$f(g)$与陪集gH代表元素g的选取无关；

设：$h \in H, gh \in gH$，$(gh)H = gH$，gh为代表元素，故有：

$F(gH) = F(ghH) = f(gh) = f(g)f(h) = f(g)e' = f(g)$，

所以映射F与陪集gH代表元素g的选取无关。

(2). F为一对一映射，且保持乘法结构不变；

分a, b, c三步证明：

a. F为一对一的单映射；

设：$g_1H \neq g_2H$，要证：$F(g_1H) \neq F(g_2H)$；

反证法，若$F(g_1H = F(g_2H))$，则$f(g_1) = f(g_2)$，

证明（续）

故$[f(g_2)]^{-1}f(g_1)=e'$，亦即$f(g_2^{-1}g_1)=e'$，那么$g_2^{-1}g_1\in H$；

根据重排列定理：

$$g_2^{-1}g_1H=H，\text{或：}g_1H=g_2H，\text{与假设矛盾；}$$

那么：$F(g_1H)\neq F(g_2H)$，所以F为单映射。

b. F是满映射；

由于同态映射f是满映射，故：$\forall g'_\alpha\in G'$，$\exists g_\gamma\in G$，

使得：$f(g_\gamma)=g'_\alpha$，即：$g'_\alpha=f(g_\gamma)=F(g_\gamma H)$，

所以F 为满映射。

证明（续）

故$[f(g_2)]^{-1}f(g_1)=e'$，亦即$f(g_2^{-1}g_1)=e'$，那么$g_2^{-1}g_1\in H$；
根据重排列定理：

$$g_2^{-1}g_1H=H，或：g_1H=g_2H，与假设矛盾；$$

那么：$F(g_1H)\neq F(g_2H)$，所以F为单映射。

b. F是满映射；

由于同态映射f是满映射，故：$\forall g'_\alpha\in G'$，$\exists g_\gamma\in G$，
使得：$f(g_\gamma)=g'_\alpha$，即：$g'_\alpha=f(g_\gamma)=F(g_\gamma H)$，
所以F 为满映射。

证明（续）.

c. F保持群的乘法结构不变；

由于正规子群：$gH = Hg$，所以：

$F(g_1Hg_2H) = F(g_1g_2HH) = F(g_1g_2H)$

$= f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = F(g_1H)F(g_2H)$；

综合上面a, b, c三点，知F为同构映射，所以：$G/H \simeq G'$。

□

证明（续）.

c. F保持群的乘法结构不变；

由于正规子群：$gH = Hg$，所以：

$F(g_1Hg_2H) = F(g_1g_2HH) = F(g_1g_2H)$

$= f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = F(g_1H)F(g_2H)$；

综合上面a, b, c三点，知F为同构映射，所以：$G/H \simeq G'$。

$\square$

物理学中的群论

主讲：陆晓

目录

§1.7：群的直积

定义1.12 (群的直积)

设$H=\{h_1=e,h_2,\cdots,h_h\}$，$K=\{k_1=e,k_2,\cdots,k_k\}$分别是$h$阶群和$k$阶群，$H$与$K$除单位元外无任何公共元素，且$H$与$K$的每一个元素均对易。定义直积群为：

$G=H\otimes K=\{h_1k_1,h_1k_2,\cdots,h_1k_k,h_2k_2,\cdots,h_2k_k,\cdots,h_hk_k\}$，

直积群G的阶为$g=hk$。

直积群G构成群

(1) 满足封闭性；

(2) 满足结合律；

(3) 单位元存在：$e=h_1k_1$；

(4) 逆元存在：$g_k^{-1}=(h_ik_j)^{-1}=k_j^{-1}h_i^{-1}=h_i^{-1}k_j^{-1}$。

定义1.12 (群的直积)

设$H=\{h_1=e,h_2,\cdots,h_h\}$，$K=\{k_1=e,k_2,\cdots,k_k\}$分别是$h$阶群和$k$阶群，$H$与$K$除单位元外无任何公共元素，且$H$与$K$的每一个元素均对易。定义直积群为：

$$G=H\otimes K=\{h_1k_1,h_1k_2,\cdots,h_1k_k,h_2k_2,\cdots,h_2k_k,\cdots,h_hk_k\}\ ,$$

直积群G的阶为$g=hk$。

直积群G构成群

(1) 满足封闭性；

(2) 满足结合律；

(3) 单位元存在：$e=h_1k_1$ ；

(4) 逆元存在：$g_k^{-1}=(h_ik_j)^{-1}=k_j^{-1}h_i^{-1}=h_i^{-1}k_j^{-1}$。

定理1.8 (直积的性质)

若直积群$G = H \otimes K$，则有：

1. H和K都是G的正规子群；

2. 商群G/H与K同构，以及G/K与H同构。

证明.

略 □

☞ 注：

(1)群的直积有条件的限制，是为了保证G任然是一个群；

(2)群的直积是扩大群最简单的方法。

例如：$O(3) = SO(3) \otimes \{e, \sigma\}$。

定理1.8 (直积的性质)

若直积群$G = H \otimes K$，则有：

1. H和K都是G的正规子群；

2. 商群G/H与K同构，以及G/K与H同构。

证明.

略 □

☞ 注：

(1)群的直积有条件的限制，是为了保证G任然是一个群；

(2)群的直积是扩大群最简单的方法。

例如：$O(3) = SO(3) \otimes \{e, \sigma\}$。

§1.7：群的直积

定理1.8 (直积的性质)

若直积群$G = H \otimes K$，则有：

1. H和K都是G的正规子群；

2. 商群G/H与K同构，以及G/K与H同构。

证明.

略 □

☞ 注：

(1)群的直积有条件的限制，是为了保证G仍然是一个群；

(2)群的直积是扩大群最简单的方法。

例如：$O(3) = SO(3) \otimes \{e, \sigma\}$。

第一章结束