



线性代数 B1 参考讲义

作者：张硕

时间：2024/1/16

版本：1.0

目录

1	线性代数学习动机	1
1.1	该门课的定位	1
1.2	学习动机	1
1.3	该门课的重点	1
1.4	参考书	1
2	优质习题	2
2.1	线性代数疑难选讲	2
2.2	高等代数葵花宝典（上）	2
2.3	高等代数葵花宝典（下）	2
3	考试	3
4	关于线性代数 B2	4

第一章 线性代数学习动机

1.1 该门课的定位

对于非数学院的同学，线性代数远比数学分析重要得多。我的室友是学物理的，数学分析证明估计已经忘光了，但现在似乎天天在和线性代数打交道。线性代数 B1 作为同学们在大学接触到的第一门也可能是最后一门几何、代数课，如评课社区上田郡昊学长所说，既要面面俱到，又要蜻蜓点水，有许多地方有缺憾。故笔者写此讲义，希望能帮到各位同学。

首先作为一门几何课程，首先是教授大家如何以空间的整体观点看待这个世界。其次作为一门入门级的代数课程，教会大家使用矩阵这一强有力的代数工具来研究空间及部分代数计算问题。空间为体，矩阵为用，行列式是附属品中的附属品。

1.2 学习动机

线性代数有两大源头，分别为对线性方程组的求解以及对空间元素的表示。为求解线性方程组，《九章算術》中首次出现消元思想。对于空间及变换的表示理论，发展出了矩阵的相似相合等矩阵理论。解线性方程组引出了矩阵秩的概念，这连同学期末实二次型的惯性质量是很重要的概念。这个东西衡量了方程组的约束强度，在后续课程中，如数学分析的多元微积分部分的秩定理，便是秩体现曲面的空间性质的实例。矩阵的相似源自于对线性变换的矩阵表示，这应该算是线性代数的精髓！衍生出特征值与特征向量，这其实是有限维空间下的谱理论内容。而后，我们对线性空间赋予内积结构，从而进入到矩阵相合理论部分，在空间之中构造出一组标准正交基。特别地，为研究 E^3 空间创造直角坐标系。在该门课程的最后，二次型代表了绝大多数可能现实遇到的矩阵，尤其是现代统计理论与机器学习理论。

1.3 该门课的重点

- 解线性方程组
- 矩阵和行列式
- 线性空间
- 线性变换 (*)
- 特征值与特征向量 (*)
- 相似相合 (*)
- 二次型 (*)

1.4 参考书

- 线性代数疑难问题选讲（这本书总结的很好）
- 线性代数学习指导（这本书强烈推荐刷完）
- 李尚志（B2 教材，比较难）
- 李炯生（B2 参考书，太难了，用不到）
- 高等代数葵花宝典（例题非常好，但习题非常难）

第二章 优质习题

本部分列举一下我遇到过的优质习题

2.1 线性代数疑难选讲

- 全部内容

2.2 高等代数葵花宝典（上）

- 定理 1.1（很常用的求行列式方法）
- 定理 1.2（非常重要！这说明了矩阵对易，非零特征值集合不变）
- 定理 1.5（延伸：瑞利商，见李炯生 P349）
- 定理 1.6（同时对角化问题）
- 例 1.7（这将是一道作业题）
- 定理 3.2（Frobenius 秩不等式与 Sylvester 秩不等式）
- 例 3.3（求秩的典型例题，用 Bezout 定理一套带走）
- 例 3.4（这个很难，用到了线性变换，欣赏一下就好）
- 定理 3.5（trace 问题的典型例题，几乎涵盖了同类所有问题）
- 例 8.5（这是学习指导上一道题）
- 例 8.6（典型例题，要会用 trace 证明等式）

2.3 高等代数葵花宝典（下）

- p2 问题 1
- p2 问题 2
- p3 问题 3
- p3 问题 1（太难了，欣赏一下）
- 1.7.2 幂等矩阵
- 1.7.4 Gram 矩阵

第三章 其他

3.1 考试

似乎把线性代数学习指导刷到滚瓜烂熟就不会低于 95 分。计算正确性非常重要，同学们务必把计算题算对，这门课考试主要就是考察能不能算对。

3.2 关于线性代数 B2

部分同学可能在经历一学期的学习后，想进一步学习线性代数。线性代数 B1 是皮毛，重要的东西在 B2 中将被具体地呈现出来。但对于非专业学生，B1 已经足够。