2014 年 9 月 安庆师范学院学报(自然科学版) Sept. 2014
第 20 卷第 3 期 Journal of Anqing Teachers College(Natural Science Edition) Vol. 20 No. 3

网络出版时间:2014 - 9 - 15 16:07 网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13757/j.cnki.cn34 - 1150/n.2014.03.005.html

Gronwall - Bellman 积分不等式在分数阶微分方程中的应用

李 琳,杨海洋,田 垒

(安庆师范学院 数学与计算科学学院,安徽 安庆 246133)

摘 要:本文主要介绍了 Gronwall - Bellman 积分不等式及其推广形式在分数阶微分方程中的应用。利用 Gronwall - Bellman 积分不等式及其推广形式证明了分数阶微分方程解的唯一性,获得了一类分数阶时滞微分方程有限时间稳定的充分条件。

关键词:Gronwall - Bellman 积分不等式;分数阶微分方程;初值问题;稳定性

中图分类号:O175.1 文献标识码:A 文章编号:1007 - 4260(2014)03 - 0013 - 04

分数微积分是任意(非整数)阶微分和积分的统称。近年来,分数微积分应用已经被越来越多的应用科学家及工程技术人员所青睐,其应用领域也越来越广泛。在许多种情况下,分数微积分比整数微积分更能准确地描述基本现象。相比于整数阶微积分而言,分数阶微积分对于反常扩散、电化学、粘弹性、控制科学、电磁理论等方面的应用是更好的理论工具。随着分数阶微积分的发展,分数阶微分方程模型也大量涌现,分数阶微分方程理论及应用的研究备受关注。Gronwall - Bellman 积分不等式及其推广形式在在整数阶微分方程中对于稳定性、一致稳定性以及一致渐近稳定性的分析中具有广泛的应用[1-2]。本文主要利用 Gronwall - Bellman 积分不等式及 Gronwall 积分不等式的推广对分数阶微分方程解的唯一性进行证明,同时获得了一类分数阶时滞微分方程有限时间稳定的充分条件。

1 预备知识

定义 1[3-4] 对区间 $[a,b]$ 上给定的函数 f,函数 f 的 q 阶($q>0$)Riemann - Liouville 分数阶微分定义如下:

$$(D_{a+}^{q}f)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-q-1}f(s)\,\mathrm{d}s$$

其中 $n=[q]+1$,$[q]$ 表示 q 的整数部分,$\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数。

定义 2[3-4] 函数 $f\in L^{1}([a,b],R_{+})$ 的 $q\in R_{+}$ 阶 Riemann - Liouville 分数阶积分定义如下:

$$I_{a+}^{q}f(t)=\int_{a}^{t}\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}f(s)\,\mathrm{d}s$$

定义 3[3-4] 对区间 $[a,b]$ 上给定的函数 f,函数 f 的 q 阶($q\to 0$)Caputo 分数阶微分定义如下:

$$(D_{a+}^{q}f)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-q-1}f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s$$

其中 $n=[q]+1$,$[q]$ 表示 q 的整数部分。

引理 1[5] (Gronwall 不等式)设 λ 为非负数,$f(t)$ 和 $g(t)$ 为在区间 $[a,b]$ 上的连续非负函数,且满足不等式

$$f(t)\leqslant\lambda+\int_{a}^{t}f(s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

则有

$$f(t)\leqslant\lambda\exp\left(\int_{a}^{t}g(s)\,\mathrm{d}s\right),t\in[a,b]$$

特别是,存在 $\lambda=0$,有 $f(t)\leqslant\int_{a}^{t}f(s)g(s)\,\mathrm{d}s$,$a\leqslant t\leqslant b$,推出 $f(t)\leqslant 0$,$t\in[a,b]$,因为 $f(t)$ 非负,则 $f(t)=0$,$t\in[a,b]$。

引理 2[6] (Gronwall 不等式的推广)令 $f(t)$,$k(t)$ 在 $[0,H]$ 上是非负的且局部可积,其中 $H\leqslant+\infty$,$g(t)$ 是定义在 $[0,H]$ 上的非负非减的连续函数,且 $g(t)\leqslant M$(M 是实数)。当 $q>0$ 时

* 收稿日期:2014 - 04 - 19
基金项目:安徽省高等学校省级自然科学研究基金项目(KJ2011A197,KJ2013Z186)资助。
作者简介:李琳,女,安徽阜阳人,安庆师范学院数学与计算科学学院硕士研究生,专业方向为分数阶微分方程。

$$f(t) \leqslant k(t) + g(t)\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s)\mathrm{d}s, t \in [0,H)$$

那么

$$f(t) \leqslant k(t) + \int_0^t \Big\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[g(t)\Gamma(q)]^n}{\Gamma(nq)} (t-s)^{nq-1} \Big\} \mathrm{d}s, t \in [0,H)$$

此外,如果 $k(t)$ 在 $[0,H)$ 上是一个非减函数,则

$$f(t) \leqslant k(t) E_q [g(t)\Gamma(q) t^q], t \in [0,H)$$

其中 $E_q(\cdot)$ 是含一个单参数的 Mittag – Leffler 函数[2,3,7,8]。

引理 3[5] 设 λ 为非负常数,$A_1(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$,$A_2(t) = (b_{ij}(t))_{n\times n}$,是为在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续、可微、可积矩阵,且满足不等式

$$\| A_1(t) \| \leqslant \lambda + \| \int_a^t A_1(s) A_2(s) \mathrm{d}s \|, t \in (a,b]$$

则

$$\| A_1(t) \| \leqslant \lambda \exp\Big(\int_a^t \| A_2(s) \| \mathrm{d}s\Big), t \in (a,b)$$

特别的,$\lambda = 0$ 时有

$\| A_1(t) \| \leqslant \| \int_a^t A_1(s) A_2(s) \mathrm{d}s \|, t \in [a,b]$ 推出 $\| A_1(t) \| \leqslant 0, t \in [a,b]$。

下面考虑

$$\begin{aligned} {}^C D^q x(t) &= B_1 x(t) + B_2 x(t-\tau) + f(x, x(t), x(t-\tau)) \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned} \tag{1}$$

其中 B_1, B_2 是适当维数的矩阵,$\tau > 0$,f 是连续函数。

定义 4[9-10] 如果 $\| \varphi \| < \sigma$,有 $\| x(t) \| < \varepsilon, \forall t \in J$,则称系统(1) 对于$\{\sigma, \varepsilon, t_0, J\}$ 是有限时间稳定的,其中 σ 是正实数,$\varepsilon > 0$,$\sigma < \varepsilon$,t_0 表示系统的初始条件,$J = [t_0, t_0 + H]$,$H \leqslant +\infty$。

2 Gronwall 不等式及其推广在分数阶微分方程中的应用

首先利用 Gronwall – Bellman 积分不等式及其推广证明分数阶微分方程解的唯一性。

定理 1 已知

$$\begin{aligned} D^q x(t) &= f(t, x(t)), t \in (0,1), \\ x(0) &= x'(0) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $1 < q < 2$,D^q 是 $R - L$ 分数阶导数,$X = \{x(t) : t^{2-\alpha} x(t) \in C[0,1]\}$,$x(t) \in X$,$f(t, x(t)) \in C([0,1] \times R)$ 且 f 满足 Lipschitz 条件,则初值问题(2) 存在唯一解。

证明 由文献[11] 知,初值问题(2) 的解存在,且初值问题(2) 的等价积分方程为

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) \mathrm{d}s$$

以下用 Gronwall – Bellman 积分不等式证明其解的唯一性。

设 $\phi_1(t)$ 是(2) 的解,$\phi_2(t)$ 是其另一解,则

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, \phi_1(t)) \mathrm{d}s$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, \phi_2(t)) \mathrm{d}s$$

于是

$$\| \phi_1 - \phi_2 \| \leqslant \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \cdot \| f(s, \phi_1) - f(s, \phi_2) \| \mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} L \| \phi_1 - \phi_2 \| \mathrm{d}s$$

其中 L 为 Lipschitz 常数且 $L > 0$。由引理 1 知

$$\| \phi_1 - \phi_2 \| \leqslant 0 \exp\Big(\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} L \mathrm{d}s\Big), t \in (0,P]$$

从而 $\| \phi_1 - \phi_2 \| \leqslant 0$,$\phi_1 = \phi_2$,$t \in (0,P]$,即其解的唯一性得证。

定理 2 已知

$$\begin{aligned} D^q x(t) &= A(t) x(t) + f(t), t \in (0,1), \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $0 < q < 1$,$A(t)$ 为 n 维矩阵,$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$,$D^q$ 为 $R - L$ 分数阶导数,$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^T$ 是连续的,则其解是唯一的。

证明 根据分数阶 $0 < q < 1$ 的性质,可以获得初值问题(3) 的等价 Volterra 积分方程

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [A(s) x(s) + f(s)] \mathrm{d}s$$

设 $M(t)$,$N(t)$ 是初值问题的解。

所以

$$M(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [A(s) M(s) + f(s)] \mathrm{d}s$$

$$N(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [A(s) N(s) + f(s)] \mathrm{d}s$$

则

$$\| M(t) - N(t) \| = \Big\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} A(s) [M(s) - N(s)] \mathrm{d}s \Big\| \leqslant \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \| A(s) \| \| M(s) - N(s) \| \mathrm{d}s$$

由引理 3 有

$$\| M(t) - N(t) \| \leqslant$$

$$\exp\left(\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|A(s)\|\mathrm{d}s\right)$$

即 $\|M(t)-N(t)\|\leqslant 0$,则 $M(t)=N(t)$,$0<t<1$,即其解的唯一性得证。

下面利用 Gronwall - Bellman 积分不等式及其推广得到分数阶微分方程稳定性的充分条件。

定理 3　如果 $\|v^{q-1}E_{q,q}(Av^q)\|\leqslant M$ 对 $v>0$ 成立,且 $\|f(t,x(t))\|\leqslant\|B(t)\|\|x(t)\|$,其中 $B(t)$ 为 $n\times n$ 的连续矩阵函数且满足 $\int_{t_0}^{\infty}\|B(t)\|\mathrm{d}t<\infty$,那么系统

$$D^q x(t)=Ax(t)+f(t,x(t)),x(t_0)=x_0 \tag{4}$$

系统(4)是稳定的,其中 $0<q<1$,D^q 是 $R-L$ 分数阶导数。

证明　由文献[12]知系统(4)的解为

$$x(t)=x_0t^{q-1}E_{q,q}(At^q)+\int_{t_0}^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(A(t-s)^q)f(s,x(s))\mathrm{d}s$$

那么

$$\|x(t)\|\leqslant\|x_0t^{q-1}E_{q,q}(At^q)\|+\int_{t_0}^t (t-s)^{q-1}\|E_{q,q}(A(t-s)^q)\|\|f(s,x(s))\|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant x_0M+\int_{t_0}^t M\|B(s)\|\|x(s)\|\mathrm{d}s$$

由引理 1 可得

$$\|x(t)\|\leqslant x_0M\exp\left(\int_{t_0}^t M\|B(s)\|\mathrm{d}s\right)=x_0M\exp\left(M\int_{t_0}^t\|B(s)\|\mathrm{d}s\right)$$

又 $\int_{t_0}^{\infty}\|B(t)\|\mathrm{d}t<\infty$,所以 $t\to\infty$ 时 $\|x(t)\|\to 0$,即 $\|x(t)\|<\varepsilon$,从而系统(4)是稳定的。

定理 4　系统

$$
\begin{aligned}
&{}^CD^q x(t)=B_1x(t)+B_2x(t-\tau)+f(x,x(t),x(t-\tau))\\
&x(\theta)=\varphi(\theta),\theta\in[-\tau,0]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

如果系统(5)对于 $\{\sigma,\varepsilon,t_0,J\}$ 满足以下条件

(a_1) $\left[1+\frac{\mu_{\max 2}+F}{\Gamma(q+1)}t^q\right]E_q(\mu_{\max 12}t^q)\leqslant\varepsilon/\sigma$,$\forall t\in J=[0,H)$;

(a_2) $f(t,x(t),x(t-\tau))$ 一致有界。

那么系统(5)是有限时间稳定的,其中 $0<q<1$,${}^CD^q$ 是 Caputo 分数阶导数,$\sigma<\varepsilon$,$\mu_{\max}(\cdot)$ 是矩阵 $(\cdot)$ 的最大奇异值,$\mu_{\max 12}=\mu_{\max}(B_1)+\mu_{\max}(B_2)$。

证明　根据分数阶 $0<q<1$ 的性质,可以获得系统(5)的等价 Volterra 积分方程

$$x(t)=\varphi(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}(B_1x(s)+B_2x(s-\tau)+f(t,x(t),x(t-\tau)))\mathrm{d}s$$

由于 $f(t,x(t),x(t-\tau))$ 一致有界,所以可假设存在常数 F 使得

$$\|f(t,x(t),x(t-\tau))\|\leqslant F,F>0$$

从而

$$\|x(t)\|\leqslant\|\varphi(0)\|+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\cdot\|B_1x(s)+B_2x(s-\tau)+f(t,x(t),x(t-\tau))\|\mathrm{d}s$$

令 $x^*(t)=\sup\limits_{\theta\in[-\tau,0]}\|x(t+\theta)\|$,则

$$
\begin{aligned}
x^*(t)\leqslant{}&\|\varphi\|+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\cdot(\mu_{\max 1}\|x(s)\|+\mu_{\max 2}\|x(s-\tau)\|+\|f(t,x(t),x(t-\tau))\|\mathrm{d}s\leqslant\\
&\|\varphi\|+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\cdot(\mu_{\max 1}x^*(s)+\mu_{\max 2}(x^*(s)+\|\varphi\|+F)\mathrm{d}s=\\
&\|\varphi\|+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\mu_{\max 2}\|\varphi\|\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}(\mu_{\max 12}x^*(s)+F\sigma)\mathrm{d}s=\\
&\left(\left(1+\frac{\mu_{\max 2}}{\Gamma(q+1)}t^q\right)\|\varphi\|+\frac{F\sigma}{\Gamma(q+1)}t^q\right)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}(\mu_{\max 12}x^*(s))\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

引进一个非减函数 $\alpha(t)$,令 $\alpha(t)$ 为

$$\alpha(t)=\left(1+\frac{\mu_{\max 2}}{\Gamma(q+1)}t^q\right)\|\varphi\|+\frac{F\sigma}{\Gamma(q+1)}t^q,\quad t\in[0,H)$$

那么由引理 2,可得

$$\|x(t)\|\leqslant x^*(t)\leqslant\alpha(t)E_q(\mu_{\max 12}t^q),\quad t\in[0,H)$$

从而

$$\|x(t)\|\leqslant\left(\left(1+\frac{\mu_{\max 2}}{\Gamma(q+1)}t^q\right)\|\varphi\|+\frac{F\sigma}{\Gamma(q+1)}t^q\right)E_q(\mu_{\max 12}t^q)<\varepsilon$$

由定义 2 知,系统(5)是有限时间稳定的。

注　对于分数阶中立型微分差分方程

$$
\begin{aligned}
&{}^CD^q x(t)=Kx(t)+Lx(t-\tau)+W\,{}^CD^q x(t-\tau))\\
&x(t)=\varphi(t),t\in[-\tau,0]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

可借助于引理 3 获得有限时间稳定的充分性条件(参见[13])。

参考文献:

[1] B. G. Pachpatte. Ineualities for differential and integral equations [M] . New York : Academic Press,1998.

[2] S. D. Sever. Some Gronwall type inequalities and applications [M] . Nova Science Pub Incorporated, 2003 .

[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Elsevier Science B. V. ,Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[4] I. Podlubny. Fractional differential equation [M]. San Diego:Academic Press , 1999.

[5] 邹晓范,刘春妍. Gronwall 积分不等式在微分方程中的应用 [J]. 佳木斯大学学报, 2004, 22(3): 417 – 419.

[6] H. Ye,J. Gao,Y. Ding. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2007,328(2):1075 – 1081.

[7] K. S. Miller, B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations [J]. John Wiley & Sons,New York,NY,USA,1993.

[8] K. Diethelm. The analysis of fractional differential equations [J]. Springer , Berlin , Germany, 2010.

[9] M. P. Lazarevi´c, A. M. Spasi´c. Finite – time stability analysis of fractional order time – delay systems: Gronwall's approach [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009 , 49(3 – 4) : 475 – 481.

[10] Abdulaziz Alofi , Jinde Cao , Ahmed Elaiw,Abdullah Al – Mazrooei1. Delay – dependent stability criterion of Caputo fractional neural networks with distributed delay [J]. Discrete Dynamics in Nature and Society,2014,Article ID 529358:1 – 6.

[11] 李秋萍,孙书荣,张萌,等. 分数阶微分方程初值问题解的存在性与唯一性 [J]. 济南大学学报,2010,24(3):312 – 315.

[12] 俞成. 分数阶微分方程的稳定性 [D]. 上海东华大学,2005.

[13] Denghao Pang, Wei Jiang. Finite – time stability of neutral fractional time – delay systems via generalized gronwalls inequality [J]. Abstract and Applied Analysis,2014,Article ID 610547:1 – 4.

Applications of Gronwall-Bellman Integral inequality in Fractional-Order Differential Equations

LI Lin, YANG Hai-yang, TIAN Lei

(School of Mathematics and Computation Science, Anqing Teachers College, Anqing 246133,China)

Abstract: The applications of the Gronwall-Bellman integral inequality and its extended form in the fractional-order differential equation are mainly introduced in this paper. Taking advantage of Gronwall-Bellman integral inequality and its extended form, we prove the uniqueness of the fractional-order differential equations and obtain the sufficient conditions of finite-time stability for a class of fractional-order differential equation with delay.

Key words: Gronwall-Bellman integral inequality, fractional-order differential equations, initial value problems,stability

(上接第 12 页)

参考文献:

[1] 张筑生. 微分动力系统原理 [M]. 北京:科学出版社, 1987: 101 – 128, 269 – 280.

[2] S. Smale. Differential Dynamical Systems [J]. Bull Amer Math Sci, 1975, 73:747 – 817.

[3] W. Stephen. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos [M]. Second Edition. New York: Springer, 2003:731 – 761.

[4] 刘曾荣,曹永罗. 双曲周期点的不变流形以及横截环 [J]. 应用数学学报, 1993,16(3):378 – 382.

[5] 朱玉峻,王玲书,张金莲. 具有双曲不变集系统的极限跟踪性 [J]. 数学年刊, 2004, 25A(5):613 – 620.

[6] 文兰,甘少波. 阻碍集、拟双曲性与线性横截性 [J]. 北京大学学报(自然科学版), 2006, 42(1):1 – 10.

[7] 李怀彬,沈维孝. 关于一维动力系统的非一致双曲性假设 [J]. 中国科学, 2010, 40(12):1171 – 1186.

[8] L. G. Vikto,Z. G. Basak. Hyperbolic fixed points and periodic orbits of Hamiltonian diffeomorphisms [J]. Duke Math. J. ,2014, 163(3):565 – 590.

An Equivalence Property Between Hyperbolic Periodic Point and Hyperbolic Periodic Orbit and Its Proof

WANG Lei[1,2], YUAN Quan[2]

(1. Department of Mathematics and Physics,Hefei University,Hefei 230601, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology. Wuhan 430074, China)

Abstract: We elaborate the similarities and differences between hyperbolic periodic point and hyperbolic periodic orbit. Using the persisting property of dimension of differential homeomorphism and the derivative principle of composite homeomorphism, a rigorous proof is presented to imply the mutual equivalence between them.

Key words: hyperbolic periodic point, hyperbolic periodic orbit, hyperbolic direct sum decomposition