

Baumstrukturen

Reiner Hüchting

22. März 2023

Themenüberblick

Binärbäume

Binäre Suchbäume

Heaps

Präfixbäume

Themenüberblick

Binärbäume

Binäre Suchbäume

Heaps

Präfixbäume

Binärbäume

Definition: Binärbaum

Für jeden Binärbaum gilt eine der folgenden Möglichkeiten:

- ▶ Der Baum ist leer.
- ▶ Der Baum besteht aus einer Wurzel und zwei Teil**bäumen**.

Binärbäume

Definition: Binärbaum

Für jeden Binärbaum gilt eine der folgenden Möglichkeiten:

- ▶ Der Baum ist leer.
- ▶ Der Baum besteht aus einer Wurzel und zwei Teil**bäumen**.

Bemerkungen

- ▶ Rekursive Definition beschreibt direkt die Struktur.
- ▶ Verallgemeinerung zu *Bäumen* möglich.
- ▶ Häufig vorkommende Struktur in Mathematik und Informatik.

Binärbäume

Beispiele

- ▶ Turnierbäume bei Wettbewerben
- ▶ Wahrscheinlichkeitsbäume
- ▶ Stammbäume
- ▶ Modellierung von Abhängigkeiten

Binärbäume

Beispiele

- ▶ Turnierbäume bei Wettbewerben
- ▶ Wahrscheinlichkeitsbäume
- ▶ Stammbäume
- ▶ Modellierung von Abhängigkeiten

Anwendung in der Informatik

- ▶ Strukturierung und Sortierung von Daten

Themenüberblick

Binärbäume

Binäre Suchbäume

Heaps

Präfixbäume

Themenüberblick

Binärbäume

Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume

AVL-Bäume

Heaps

Präfixbäume

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Ziel: Effiziente Implementierung von Listen und Datenbanken

- ▶ Idee: Binärer Suche und effiziente Sortierverfahren direkt in einer Datentstruktur verankern.

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Ziel: Effiziente Implementierung von Listen und Datenbanken

- ▶ Idee: Binärer Suche und effiziente Sortierverfahren direkt in einer Datentstruktur verankern.

Definition: Binärer Suchbaum

Ein binärer Suchbaum ist ein Binärbaum mit folgenden Eigenschaften:

- ▶ Die Knoten enthalten *Schlüssel* und *Werte* (engl. *key/value*).
- ▶ Auf den Schlüsseln ist eine *totale Ordnung* definiert.

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Ziel: Effiziente Implementierung von Listen und Datenbanken

- ▶ Idee: Binärer Suche und effiziente Sortierverfahren direkt in einer Datentstruktur verankern.

Definition: Binärer Suchbaum

Ein binärer Suchbaum ist ein Binärbaum mit folgenden Eigenschaften:

- ▶ Die Knoten enthalten *Schlüssel* und *Werte* (engl. *key/value*).
- ▶ Auf den Schlüsseln ist eine *totale Ordnung* definiert.
- ▶ Für jeden Knoten gilt:
 - ▶ Die Schlüssel aller Knoten im linken Teilbaum sind kleiner als der Schlüssel der Wurzel.
 - ▶ Die Schlüssel aller Knoten im rechten Teilbaum sind größer als der Schlüssel der Wurzel.
 - ▶ (Gleichheit muss ggf. einer der Seiten zugeschlagen werden.)

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Auffinden von Elementen mit einem bestimmten Suchschlüssel

- ▶ Suchschlüssel in Wurzel gefunden, liefere (Wert der) Wurzel.
- ▶ Suchschlüssel kleiner als Wurzel: Suche im linken Teilbaum.
- ▶ Suchschlüssel größer als Wurzel: Suche im rechten Teilbaum.

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Auffinden von Elementen mit einem bestimmten Suchschlüssel

- ▶ Baum leer: Nicht gefunden.
- ▶ Suchschlüssel in Wurzel gefunden, liefere (Wert der) Wurzel.
- ▶ Suchschlüssel kleiner als Wurzel: Suche im linken Teilbaum.
- ▶ Suchschlüssel größer als Wurzel: Suche im rechten Teilbaum.

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Einfügen von Elementen mit einem bestimmten Suchschlüssel

- ▶ Suchschlüssel kleiner Wurzel: Füge in linken Teilbaum ein.
- ▶ Suchschlüssel größer Wurzel: Füge in rechten Teilbaum ein.

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Einfügen von Elementen mit einem bestimmten Suchschlüssel

- ▶ Baum leer: Hier einfügen.
- ▶ Suchschlüssel kleiner Wurzel: Füge in linken Teilbaum ein.
- ▶ Suchschlüssel größer Wurzel: Füge in rechten Teilbaum ein.

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Löschen von Elementen mit einem bestimmten Suchschlüssel

- ▶ Suche das zu löschende Element.
- ▶ Falls Blatt: Entfernen.
- ▶ Ansonsten: Suche den direkten Nachfolger oder Vorgänger.
- ▶ Vertausche Element mit Nachfolger/Vorgänger.
- ▶ Entferne Element aus entsprechendem Teilbaum.

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Verhalten im Optimalfall

- ▶ Linker und rechter Teilbaum in allen Knoten gleich tief.
- ▶ Logarithmisches Verhalten beim Suchen, Einfügen und Löschen.

Binäre Suchbäume – Binäre Suchbäume

Verhalten im Optimalfall

- ▶ Linker und rechter Teilbaum in allen Knoten gleich tief.
- ▶ Logarithmisches Verhalten beim Suchen, Einfügen und Löschen.

Verhalten im Worst Case

- ▶ Eine Seite hat starkes Übergewicht.
- ▶ Extremfall: Jeder Knoten hat nur einen Teilbaum.
- ▶ Der Baum ist dann de facto eine Liste.

Themenüberblick

Binärbäume

Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume

AVL-Bäume

Heaps

Präfixbäume

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Ziel: Optimierung von binären Suchbäumen

- ▶ Problem: Bäume können aus der Balance geraten.
- ▶ Lösung: Reorganisieren, wenn das Ungleichgewicht zu groß wird.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Ziel: Optimierung von binären Suchbäumen

- ▶ Problem: Bäume können aus der Balance geraten.
- ▶ Lösung: Reorganisieren, wenn das Ungleichgewicht zu groß wird.

Vorgehensweise

- ▶ Beim Einfügen oder Löschen Struktur des Baumes analysieren.
- ▶ Bei Bedarf Knoten umsortieren, damit linker und rechter Teilbaum jedes Knotens ungefähr gleich groß sind.
- ▶ Problem: Analyse darf nicht zu teuer sein.
- ▶ Frage: Was bedeutet „ungefähr gleich groß“ überhaupt?

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Definition: Tiefe

Die Tiefe eines Knotens ist die Länge des Pfades von der Wurzel bis zu diesem Knoten.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Definition: Tiefe

Die Tiefe eines Knotens ist die Länge des Pfades von der Wurzel bis zu diesem Knoten.

Bemerkungen

- ▶ Berechnung rekursiv:
 - ▶ Tiefe der Wurzel: 0.
 - ▶ Tiefe eines Knotens: $1 + \text{Tiefe des Elternknotens}$
- ▶ Kann beim Einfügen/Löschen nebenbei berechnet werden.
- ▶ Kann bei Bedarf im Knoten gespeichert und gepflegt werden.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Definition: Höhe

Die Höhe eines Baums ist die Tiefe des tiefsten Knotens im Baum.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Definition: Höhe

Die Höhe eines Baums ist die Tiefe des tiefsten Knotens im Baum.

Bemerkungen

- ▶ Berechnung rekursiv:
 - ▶ Höhe eines Blatts Wurzel: 1.
 - ▶ Höhe eines Knotens: $1 + \text{Höhe des höheren Kindes}$
- ▶ Kann beim Einfügen/Löschen nebenbei berechnet werden.
- ▶ Kann bei Bedarf im Knoten gespeichert und gepflegt werden.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Definition: Balancefaktor

Der Balancefaktor eines Knotens ist die Differenz zwischen der Höhe des rechten und des linken Teilbaums.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Definition: Balancefaktor

Der Balancefaktor eines Knotens ist die Differenz zwischen der Höhe des rechten und des linken Teilbaums.

Bemerkungen

- ▶ Kann beim Einfügen/Löschen nebenbei berechnet werden.
- ▶ Gutes Maß für die Ausgeglichenheit des Baumes.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Definition: AVL-Baum

Ein AVL-Baum ist ein binärer Suchbaum mit folgender Eigenschaft:

- ▶ Der Balancefaktor jedes Knotens liegt im Intervall $[-1, 1]$.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Definition: AVL-Baum

Ein AVL-Baum ist ein binärer Suchbaum mit folgender Eigenschaft:

- ▶ Der Balancefaktor jedes Knotens liegt im Intervall $[-1, 1]$.

Umsetzung

- ▶ Beim Einfügen/Löschen Balancefaktoren bestimmen.
- ▶ Nach Einfügen in Teilbaum: Umorganisieren der Knoten.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Definition: AVL-Baum

Ein AVL-Baum ist ein binärer Suchbaum mit folgender Eigenschaft:

- ▶ Der Balancefaktor jedes Knotens liegt im Intervall $[-1, 1]$.

Umsetzung

- ▶ Beim Einfügen/Löschen Balancefaktoren bestimmen.
- ▶ Nach Einfügen in Teilbaum: Umorganisieren der Knoten.
- ▶ Nach Einfügen in Teilbaum bedeutet: Nach Rekursion.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Analyse der Balancefaktoren

Nach Einfügen eines Knotens Balancefaktor prüfen.

- ▶ Falls -2 : Linker Teilbaum zu hoch.
- ▶ Falls 2 : Rechter Teilbaum zu hoch.
- ▶ Prüfe Balancefaktor des linken/rechten Teilbaumes.
- ▶ Führe passende *Rotation* durch.

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Analyse der Balancefaktoren

Nach Einfügen eines Knotens Balancefaktor prüfen.

- ▶ Falls -2 : Linker Teilbaum zu hoch.
- ▶ Falls 2 : Rechter Teilbaum zu hoch.
- ▶ Prüfe Balancefaktor des linken/rechten Teilbaumes.
- ▶ Führe passende *Rotation* durch.

Ungleichgewichts-Situationen und Rotationen

- ▶ Links-Links
- ▶ Links-Rechts
- ▶ Rechts-Rechts
- ▶ Rechts-Links

Binäre Suchbäume – AVL-Bäume

Verhalten beim Einfügen/Löschen/Suchen

- ▶ Linker und rechter Teilbaum in allen Knoten fast gleich tief.
- ▶ Logarithmisches Verhalten beim Suchen, Einfügen und Löschen.

Themenüberblick

Binärbäume

Binäre Suchbäume

Heaps

Präfixbäume

Heaps

Erinnerung: Binäre Suchbäume

- ▶ Idee: Optimales Such- und Einfügeverhalten sortierter Listen.
- ▶ Komplexität: Logarithmisches Verhalten wie bei binärer Suche.

Heaps

Erinnerung: Binäre Suchbäume

- ▶ Idee: Optimales Such- und Einfügeverhalten sortierter Listen.
- ▶ Komplexität: Logarithmisches Verhalten wie bei binärer Suche.

Es geht besser, wenn keine perfekte Sortierung benötigt wird!

Heaps

Erinnerung: Binäre Suchbäume

- ▶ Idee: Optimales Such- und Einfügeverhalten sortierter Listen.
- ▶ Komplexität: Logarithmisches Verhalten wie bei binärer Suche.

Es geht besser, wenn keine perfekte Sortierung benötigt wird!

Idee: Fordere nur eine partielle Sortierung

- ▶ Knoten müssen größer oder kleiner als ihre Kinder sein.
- ▶ Keine Relation zwischen den Kindern.
- ▶ Beobachtung: Größtes/Kleinstes Element steht an der Wurzel.
- ▶ Ermöglicht sehr schnellen Zugriff auf Wurzel.

Heaps

Definition: Vollständiger Binärbaum

Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum mit folgenden Eigenschaften:

- ▶ Jede Ebene ist vollständig besetzt.
- ▶ Nur in der untersten Ebene dürfen Elemente fehlen.
- ▶ Ebenen werden beim Einfügen von links nach rechts aufgefüllt.

Heaps

Definition: Vollständiger Binärbaum

Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum mit folgenden Eigenschaften:

- ▶ Jede Ebene ist vollständig besetzt.
- ▶ Nur in der untersten Ebene dürfen Elemente fehlen.
- ▶ Ebenen werden beim Einfügen von links nach rechts aufgefüllt.

Bemerkungen

- ▶ Ein vollständiger Binärbaum hat keine Lücken.
- ▶ Kann deshalb effizient als Liste gespeichert werden.
- ▶ Einfache Berechnung der Indizes:
 - ▶ Elternknoten an Stelle n
 - ▶ Kinder an Stellen $2n + 1$ und $2n + 2$

Heaps

Definition: Min-Heap

Ein Min-Heap ist ein vollst. Binärbaum mit folgender Eigenschaft:

- ▶ Jeder Knoten ist kleiner als seine Kinder
- ▶ (Definition *Max-Heap* analog.)

Heaps

Definition: Min-Heap

Ein Min-Heap ist ein vollst. Binärbaum mit folgender Eigenschaft:

- ▶ Jeder Knoten ist kleiner als seine Kinder
- ▶ (Definition *Max-Heap* analog.)

Einfügen von Elementen

- ▶ Neues Element am Ende einfügen.
- ▶ Aufsteigen lassen, bis es richtig eingeordnet ist.

Heaps

Definition: Min-Heap

Ein Min-Heap ist ein vollst. Binärbaum mit folgender Eigenschaft:

- ▶ Jeder Knoten ist kleiner als seine Kinder
- ▶ (Definition *Max-Heap* analog.)

Einfügen von Elementen

- ▶ Neues Element am Ende einfügen.
- ▶ Aufsteigen lassen, bis es richtig eingeordnet ist.

Entfernen der Wurzel

- ▶ Wurzel durch letztes Element ersetzen (tauschen).
- ▶ Absteigen lassen, bis es richtig eingeordnet ist.

Heaps

Verhalten beim Einfügen/Löschen von Elementen

- ▶ Zugriff auf Wurzel in konstanter Zeit ($O(1)$).
- ▶ Einfügen und Löschen in $O(\log n)$.

Heaps

Verhalten beim Einfügen/Löschen von Elementen

- ▶ Zugriff auf Wurzel in konstanter Zeit ($O(1)$).
- ▶ Einfügen und Löschen in $O(\log n)$.

Anwendungen

- ▶ *Priority Queues*
- ▶ Routingverfahren, z.B. Navigationssysteme, Netzwerke
- ▶ Optimierungs- und Planungsprobleme
- ▶ effiziente Sortierverfahren (HeapSort)

Themenüberblick

Binärbäume

Binäre Suchbäume

Heaps

Präfixbäume

Präfixbäume

Präfixbäume: Effiziente Speicherung von Zeichenketten

- ▶ Speichere Zeichenketten in einer Baumstruktur ab.
- ▶ Annotiere Knoten mit Eigenschaften dieser Zeichenketten.
- ▶ Zeichenketten mit gemeinsamem Präfix haben gemeinsame Pfade im Baum.
- ▶ Vorteile: Kompression und schnelle Suche.

Präfixbäume

Präfixbäume: Effiziente Speicherung von Zeichenketten

- ▶ Speichere Zeichenketten in einer Baumstruktur ab.
- ▶ Annotiere Knoten mit Eigenschaften dieser Zeichenketten.
- ▶ Zeichenketten mit gemeinsamem Präfix haben gemeinsame Pfade im Baum.
- ▶ Vorteile: Kompression und schnelle Suche.

Anwendungen

- ▶ Metadaten von Textdokumenten
- ▶ Aufbau eines Suchindex für Texte
- ▶ Aufbau von Wörterbüchern (z.B. für *Predictive Text*)
- ▶ Kompressionsverfahren