

惯 性 导 航 基 本 原 理

(入门、两天半)

刘 保 中

二 零 一 二 年 十 二 月

目录

目录	2
1. 导航与控制	3
1.1 导航系统与控制系统	3
1.2 自主导航与非自主导航	4
2. 惯导系统中常用的坐标系	6
2.1 惯性坐标系（简称 i 系）	6
2.2 地球坐标系（简称 e 系）	7
2.3 载体坐标系（简称 b 系）	8
2.4 地理坐标系（简称 t 系）	8
2.5 目标方位坐标系（简称 d 系）	9
2.6 导航坐标系	10
2.7 平台坐标系（简称 P 系）	10
3. 惯导系统的组成	11
4. 平台的结构与组成	12
4.1 平台的框架结构	12
4.2 加速度计组合与陀螺组合	13
4.3 姿态角传感器与力矩电机	15
5. 初始对准的基本概念	16
5.1 导航前的准备	16
5.2 初始对准的指标与分类	17
6. 平台的表观运动	19
6.1 地球自转引起的表观运动	19
6.2 地理位置变化引起的表观运动	21
6.3 控制指令角速率与表观运动的补偿	23
7. 载体的运动加速度	24
7.1 载体空间运动的描述	24
7.2 载体空间运动的加速度	25
7.3 惯性导航的基本方程	32
8. 指北方位惯导系统的力学编排方案	35
9. 捷联式惯导系统的基本原理	39
9.1 方向余弦与方向余弦矩阵	39
9.1.1 方向余弦矩阵及其特性	39
9.1.2 方向余弦矩阵与欧拉角的关系	43
9.2 捷联式惯导系统的机械编排方案	46
9.3 姿态矩阵的即时更新	50
9.3.1 欧拉角法（三参数法）	50
9.3.2 方向余弦法（九参数法）	53
9.3.3 四元数法（四参数法）	56
9.3.4 三种方法的对比	68
9.4 捷联惯导初始对准的基本概念	70

1. 导航与控制

1.1 导航系统与控制系统

“导航”一词在《辞海》中的解释为：“引导飞行器（或船舶）沿一定航线从一点运动到另一点的技术和方法”。从工程的角度看，这一定义显得过于笼统。在此，补充定义如下：在规定的条件下、在规定的时间内、按照规定的精度、沿预先拟定的航线，引导航行体（飞行器、船舶、地面车辆等）从起始点到达目的地的技术或方法。用来完成这一引导任务的设备，称为“导航系统”。

航行体在航行的过程中，会遇到各种外部干扰，而且是无法避免的。外部的干扰因素很多，危害性最大的是自然风。另外，导航设备本身也存在制造误差。由于制造误差和外部干扰的存在，航行体会逐渐偏离预期的航线。偏离航线后，导航系统应实时地测量出航行体当前的实际位置，并计算出当前位置相对预期位置的偏差。而后，再将偏差信息发送给控制系统，借助“控制力”使航行体返回到预期的航线上来。由此可知，导航系统必须具备“测量”和“定位”的功能，才能最终完成“引导”使命。测量和定位是手段，引导是目的。

一个完整的控制系统，一般由三部分组成：测量装置（传感器）、控制器（计算器）和执行机构（操纵器）。如上所述，控制系统的基本使命，是按照导航系统告知的“位置偏差”和预先设计好的“控制规律”，操纵航行体返回到预期的基准航线上来，将位置偏差消除。这一过程，如图 1.1 所示。

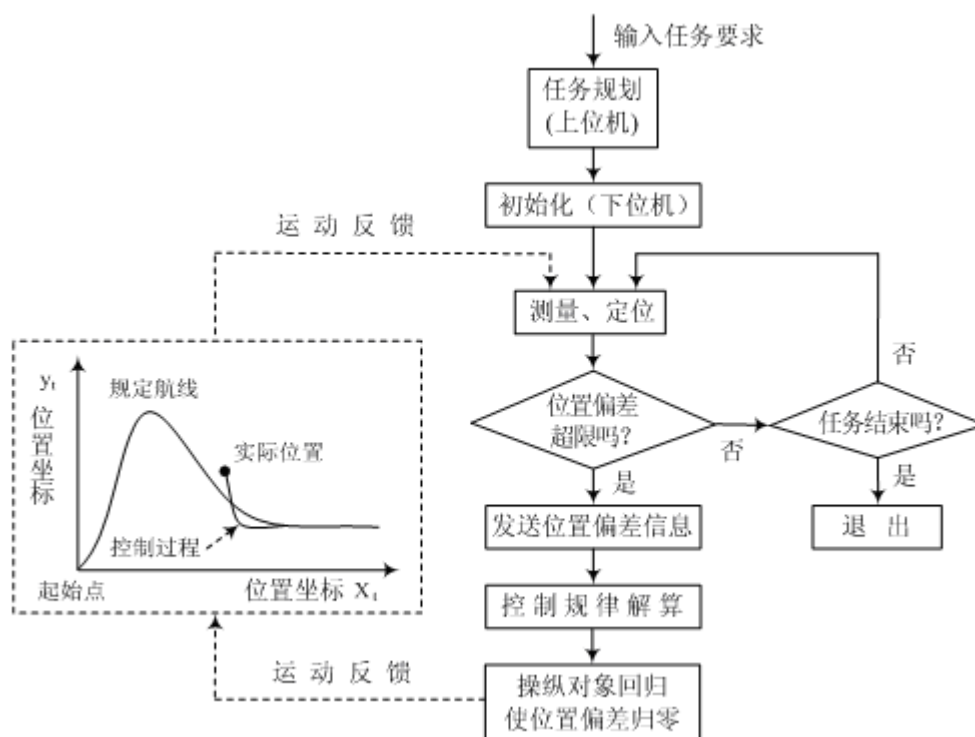


图 1.1 导航与控制示意图

需要指出的是，有部分导航设备（例如，惯性导航系统），只有测量和定位的功能，没有引导功能。这样的导航设备，相当于控制系统的传感器。为了简化“全系统”的结构，通常将导航系统的测量部分与控制系统的测量装置合而为一，进行“一体化设计”。既包括“结构一体化”，也包括“计算机一体化”，将二者的解算部分用一台计算机来实现。不但压缩了空间，而且避免了双机通讯，可提高全系统的抗干扰能力。

如果导航系统既有测量和定位的功能，又有引导功能，再加上控制系统，就是一个完整的“制导系统”。

如果事先将“任务规划”（也称“目标指示”）的信息通过接口电路发送到惯导系统的导航计算机中去，可以实现“程序导引”（固定航线），但活动目标除外。

1.2 自主导航与非自主导航

安装在航行体（或载体）上的导航系统，如果仅仅依靠载体上的设备即可完成导航任务，则称为“自主式”导航系统。例如，惯性导航系统，以下简称为“惯导系统”、或者“惯导”。另外，还有一类导航系统，不但要依赖载体上的设备，而且还需利用来自载体外部的参考信息才能够完成导航任务，则称为“非自主式”导航系统。例如，无线电导航系统和卫星导航系统。这里所说的“外部参考信息”，是特指由人工提供的信息，而不是天然信息。如果是天然信息，则仍为自主式导航。例如，天文导航（或星光导航）。惯性导航系统是公认的、完全自主的导航系统，但实际上也有赖于地球重力和地球自转角速率两个天然信息。

所谓**载体**，就是导航系统的装载对象，可以是空间飞行器、导弹、飞机、潜艇、水面舰船、陆用战车、民用车辆等。

惯性导航系统以牛顿力学为基础，唯一需要的信息是载体的运动加速度，不依赖任何外部参考信息就能提供导航参数，是名符其实的自主式导航系统。惯导系统也不向外部辐射任何能量，具有很好的隐蔽性，而且很少受天气和人为等干扰因素的影响。因此，在航空、航天、航海、地面车辆和大地测量等技术领域中得到了广泛的应用。

惯性导航系统是一种“航位推算”系统，利用前一时刻已知的信息和当前时刻的测量信息，推算当前时刻的导航参数（位置、速度和姿态信息）。这一过程，将连续、往复地进行下去。由于外部干扰和制造误差的存在，每一步的推算都是有误差的，随着时间的推移惯导系统的误差是累积的。所以，惯导系统只能维持短时间的高精度，长

时间不行，这是惯导系统的最大“软肋”。但惯导系统能够全程提供载体的姿态信息（偏航角、俯仰角、横滚角），而其他导航系统则很难做到，这又是惯导系统的“长项”。因此，在远距离、长航时的导航任务中，通常采用“组合导航”的体制。用其他导航系统之长（有界误差），弥补惯导系统之短（无界误差）；又以惯导系统之长（能提供全姿态信息），弥补其他导航系统之短（不能提供姿态信息）。这种优势互补，可获得比任一子系统更高的定位精度。

在执行导航任务的过程中，惯导系统为全程工作，称为“主导航系统”；其他导航系统通常是间断工作的，周期性地为惯导系统提供速度和位置基准信息，用来校准惯导系统的累积误差，故称为“基准导航系统”。巡航段的常见组合形式有：惯导加卫星导航、惯导加星光导航、惯导加地形匹配等。最常见的卫星导航有三种：GPS、GLONASS、北斗。末制导段的常见组合形式有：惯导加无线电雷达、惯导加红外线雷达、惯导加多普勒雷达、惯导加景象匹配等。最常见的景象匹配有两种：合成孔径雷达（SAR）和微光电视。

2. 惯导系统中常用的坐标系

2.1 惯性坐标系（简称 i 系）

在惯性导航中，惯性坐标系是一个十分重要的概念。按照牛顿力学的定义，它是加速度矢量恒为零的“绝对空间”，或者绝对静止、或者作严格意义上的匀速直线运动。但这一定义只有数学意义，因为在自然界中，找不到一个绝对静止、或者作匀速直线运动的物体作为参照物。在实际的工程问题中，只能根据所研究问题的性质和所要求

的导航精度，选取一个近似静止的参照物作为惯性参考系。

在惯性技术领域，常用的惯性系有两个：一个是以太阳中心为坐标原点的“日心惯性系”，三根坐标轴分别指向三个恒星；另一个是，以地球中心为坐标原点的“地心惯性系”，一根坐标轴沿地球的极轴（自转轴）、另外两根轴在地球的赤道平面内，三根轴正交，并分别指向宇宙空间的三个恒星，记为 $ox_iy_iz_i$ ，如图 2-1（a）所示。请注意，地心惯性系与地球不是固连的、不跟随地球一起旋转。

日心惯性系多应用于天文观测和空间飞行器中；地心惯性系多应用于相对地球表面运动的航行体（例如，飞机、导弹、舰船和战车等）。本文的内容，均以地心惯性系作为参考基准。

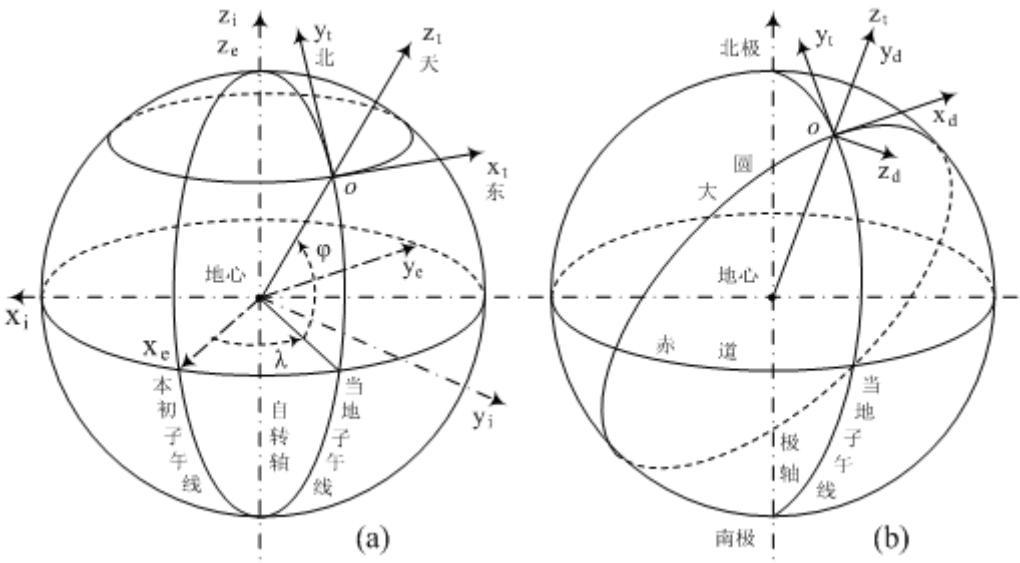


图 2-1 坐标系示意图

2.2 地球坐标系（简称 e 系）

地球的表面形状十分复杂，而且质量分布也不均匀，通常将其近似地看成一个旋转的椭球体。但为了简化分析和计算，在精度允许的范围内，可进一步将其简化成一个理想的圆球体。在惯性导航中，用

地球坐标系代替地球参与各种分析与计算。或者说，地球坐标系是地球的数学抽象。

地球坐标系的坐标原点取在地球的中心、并与地球固连。 Z_e 轴沿地球的极轴，指向北极为正，其余两根轴在地球的赤道平面内。 X_e 轴为零度子午面与赤道平面的交线，由地心向外指为正； Y_e 轴为东经 90° 子午面与赤道平面的交线，同样由地心向外指为正。三根轴共同构成右手直角坐标系 $ox_e y_e z_e$ ，如图 2-1 (a) 所示。请注意，地球坐标系与地球固连，随地球一起旋转。

2.3 载体坐标系（简称 b 系）

载体坐标系与载体（航行体）固连，是载体的数学抽象，代替载体参与分析计算。载体坐标系的坐标原点取在载体的质心，一根轴与载体的纵向对称轴重合，指向前方为正，称为纵轴（ X_b 轴）；第二根轴在载体的纵向对称平面内与纵轴垂直，指向上方为正，称为竖轴、或立轴（ Y_b 轴）；第三根轴垂直于载体的纵向对称平面，其指向按右手系的规定确定，称为横轴、或侧轴（ Z_b ）。考虑到载体的多样性，如果载体为导弹，则载体系就是弹体系；如果载体为飞机，则载体系就是机体系。

2.4 地理坐标系（简称 t 系）

地理坐标系的原点取在航行体的质心，随航行体一起运动，但与载体不固连。一根轴与当地的地垂线重合，但其取向比较随意，可以“指天为正”、也可以“指地为正”。其余两根轴位于当地的水平面内，一根指北、另一根指东。三根轴的命名没有统一的规定，可根据需要

确定。例如， X_t 轴在当地水平面内指东、 y_t 轴沿当地子午线指北、 Z_t 轴沿当地的地垂线指天，则称该坐标系为“东北天”地理坐标系，如图 2-1 (a) 所示。反过来，如果将北向命名为 X_t 轴，将东向命名为 y_t 轴，那么按照右手坐标系的规则， Z_t 轴应该沿地垂线指地为正，称这样的坐标系为“北东地”地理坐标系。在阅读相关文献时要特别注意，地理坐的定义不同，投影的结果也不同。

图 2-1 (a) 中的 λ 为当地经度， φ 为当地纬度。由于工程界经常采用经度和纬度来表示航行器在地球表面的地理位置，所以又称地理坐标系为“经纬度坐标系”。

国际上统一规定，通过英国“格林威治”天文台的子午线为零度子午线，也称为“本初子午线”。本初子午线与地球极轴构成的平面，称为“本初子午面”。本初子午面与当地子午面的夹角，称为“经度”。地垂线与赤道平面之间的夹角，称为“纬度”。赤道平面的平行面与地球表面的交线，称为“纬度圈”。

2.5 目标方位坐标系（简称 d 系）

目标方位坐标系，主要用于短程、战术导弹的惯导系统。引入这个坐标系的目的，是为了简化导航方程，从而减少计算量。坐标原点取在过导弹发射点和目标点的地球大圆上，并且随着导弹的飞行，在该大圆上同步移动。 x_d 轴始终与大圆相切并指向目标点（目标方位）； y_d 轴在大圆平面内，始终与过坐标系原点的地垂线重合，指天为正； z_d 轴垂直于大圆平面，其指向按右手系配置，如图 2-1 (b) 所示。由于该坐标系以地球大圆为基准，故又称为“大圆坐标系”。

另外，由于地理坐标系的 $ox_t y_t$ 平面与大圆坐标系的 $oz_d x_d$ 平面都在当地的地平面内（与地球表面相切），所以又称这两个坐标系为“切平面坐标系”。二者的坐标原点均与载体的质心重合（但不固连），其差别仅在于切平面内的一个方位角 k ，如图 2-2 所示。

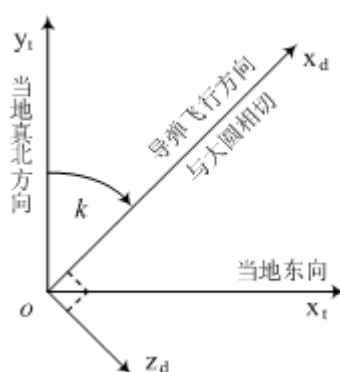


图 2-2 地理坐标系与大圆坐标系的关系

2.6 导航坐标系

导航坐标系，是惯性测量和导航计算的基准。不同的航行器、不同的导航系统、不同的任务使命，所使用的导航坐标系，一般来说是不同的。上述的地理坐标系和大圆坐标系，就是两种较为常用的导航坐标系。地理坐标系多应用于飞机和远距离飞行的巡航导弹，而大圆坐标系多应用于近距离飞行的战术导弹。“地对地导弹”通常采用惯性系作为导航坐标系（不再介绍，请参考其他相关文献）。

无论选择什么样的导航坐标系，其目的只有一个：简化系统结构、简化导航计算，最终的目的是降低研制成本。

2.7 平台坐标系（简称 P 系）

平台坐标系用来模拟导航坐标系，在平台式惯导系统中，平台坐标系就是真实的物理平台（图 3-1 中的 $ox_p y_p z_p$ ）；在捷联式惯导系

统中，则代表虚拟的数学平台。

在对惯导系统进行误差分析时，还需将平台坐标系区分为“理想平台系”和“实际平台系”。理想平台系，代表没有误差的平台，就是前面定义的导航坐标系。但由于制造误差和干扰因素的存在，实际的物理平台是有误差的，与理想平台（定义的坐标系）是不重合的，故称为“实际平台系”。在捷联式惯导系统中，由于计算机的计算也是有误差的，用软件得到的坐标转换矩阵称为“计算平台系”，相当于平台式惯导的“实际平台系”。

3. 惯导系统的组成

一般来说，惯导系统的结构复杂、形式多样。但无论什么样的惯导系统，将其功能分解后可知，都是由三部分组成的：惯性测量装置、导航计算机和软件。

惯性测量装置用来测量载体的线运动和角运动参数，并通过接口电路将测量数据发送给导航计算机。

导航计算机是软件的载体，有两项主要功能：在初始对准阶段，接收来自惯性测量装置的测量信号（陀螺和加速度计的输出信号），并借助“对准软件”完成惯导系统的初始对准，即建立导航坐标系；在导航阶段，接收惯性测量装置的测量信号，并借助“导航软件”完成导航计算。导航计算又有两项使命：第一，维持平台坐标系的空间指向（跟踪导航系）；第二，解算导航参数、为载体定位，并通过接口电路将导航参数发送给控制系统（或显示器）。

惯性测量装置，又可划分为“平台式”和“捷联式”两种类型。

平台式惯性测量装置的陀螺和加速度计，被安装在一个特制的“陀螺稳定平台”上，简称为“平台”。捷联式惯性测量装置的陀螺和加速度计，直接固连在载体上，工程上习惯将其简称为“惯性测量装置”、或“惯测装置”。如果不加特别说明，“平台”就专指平台式惯性测量装置，“惯测装置”就专指捷联式惯性测量装置。“捷联”一词对应的英文单词是 *strap-down*，直译为“捆绑”。所谓“捆绑”，就是使被捆绑的对象（陀螺和加速度计）失去自由。

4. 平台的结构与组成

4.1 平台的框架结构

陀螺稳定平台是平台式惯导系统的核心部件，按其具有的环架数又可将其划分为双环、三环和四环平台。双环平台极为少见，三环平台广泛应用于导弹、飞机和船舶上，四环平台基本上只用在飞机上。由于飞机要做大姿态（俯仰角接近 90° ）机动飞行，有可能造成三环平台的滚动轴与方位轴重合，从而丧失一个自由度（不能够恢复三轴正交的状态），称这种现象为三环平台的“环架自锁”。为了克服这一现象，通常在飞机上采用四环平台。所谓四环平台，是在三环平台的基础上再增加一个“外横滚环”，其结构示意图如图 4-1 所示。

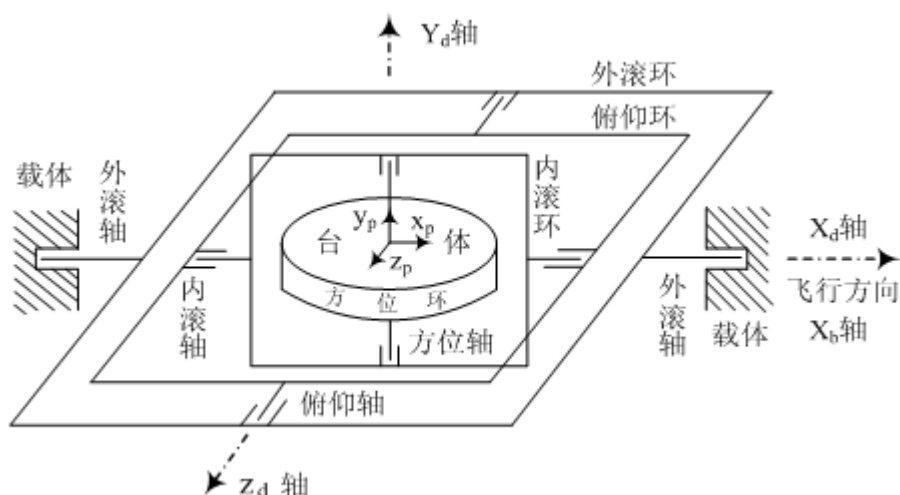


图 4-1 四环平台的结构示意图

外滚环和方位环，均具有 360° 的自由度；内滚环，一般只具有 20° 左右的自由度；俯仰环，应具有 $\pm 90^\circ$ 以上的自由度。

由图 4-1 可知，平台的台体就是方位环、与方位轴固连，方位轴垂直于台体平面，靠装配工艺保证；内滚环与内滚轴固连，内滚轴与方位轴正交、共面（在内滚环平面内），靠装配工艺保证；俯仰环与俯仰轴固连，俯仰轴与内滚轴正交、共面（在俯仰环平面内），靠装配工艺保证；外滚环与外滚轴固连，外滚轴与载体的纵轴 x_b 保持一致，外滚轴与俯仰轴正交、共面（在外滚环平面内），同样靠装配工艺保证。

由图 4-1 还可知，俯仰轴位于俯仰环平面与外滚环平面的交线上。在俯仰环平面内与内滚轴正交、共面；而且，在外滚环平面内与外滚轴正交、共面。但俯仰轴与方位轴的空间关系，是不确定的。

4.2 加速度计组合与陀螺组合

平台的台体与平台坐标系 $ox_p y_p z_p$ 是固连的，或者说台体就是平台坐标系的物理实现，而平台坐标系又是台体的数学抽象。 y_p 轴垂直

于台面，就是方位轴。 x_p 轴和 z_p 轴同处于台体平面内，而且正交，三根坐标轴共同构成右手直角坐标系。

在平台的台体上，固定安装了加速度计组合和陀螺组合。加速度计组合由三个正交的加速度计构成，测量轴与平台坐标系保持一致。陀螺组合可以由三个正交的单自由度陀螺构成，也可以由两个双自由度陀螺构成。每个双自由度陀螺具有两根测量轴，多余的一根轴需要通过专门的电路锁在零位。陀螺组合的三根测量轴必须正交安装、并与平台坐标系保持一致，而且与加速度计组合的测量轴保持平行。

双自由度陀螺的多余轴存在漂移，如果放任不管，时间长了会导致转子碰档、进动，进而造成平台翻倒（倒台）。因此，不能任其自由，通常采用“力矩反馈回路”将其锁在零位，如图 4-2 所示。

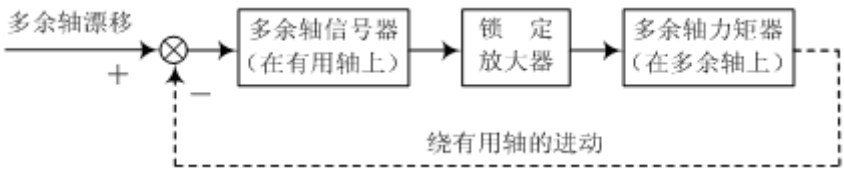


图 4-2 力矩反馈回路示意图

由图 4-2 可知，信号器和力矩器不在同一根轴上，当多余轴产生漂移后，多余轴的信号器（装在有用轴上）输出与漂移成比例的电压信号，再经锁定放大器解调、校正、放大后，输出与之成比例的加矩电流，并注入到力矩器（装在多余轴上）中，使转子绕有用轴进动，直到多余轴的信号器归零时为止。

双自由度陀螺（自由陀螺）的命名，通常以转子轴（动量矩轴）为准。转子轴沿平台方位轴安装的陀螺，称为“垂直陀螺”，它的两根测量轴与平台坐标系的两根水平轴保持一致，用来感测台体相对水

平面的偏角。转子轴位于台体平面内的陀螺，称为“水平陀螺”（相对垂直陀螺而言），它的一根测量轴与平台的方位轴保持一致，用来感测台体绕方位轴的偏角。另一根测量轴位于台体平面内，并且与转子轴垂直，这根轴是多余的，必须通过力反馈回路将其锁在零位，如图 4-2 所示。由于水平陀螺的主要用途是用来感测台体绕方位轴的偏角，所以又称为“方位陀螺”。

单自由度陀螺（速率陀螺）的命名，通常以测量轴为准。测量轴与方位轴一致的陀螺，称为“方位陀螺”；测量轴位于台体平面内的陀螺，称为“水平陀螺”。

要特别注意两种定义方法的区别，“方位陀螺”的含义基本上是一致的，但“水平陀螺”的含义相去甚远，单自由度水平陀螺的功能，相当于双自由度“垂直陀螺”的功能。

4.3 姿态角传感器与力矩电机

在方位轴、内滚轴、俯仰轴和外滚轴的两端，分别装有一个角度传感器（线性旋转变压器）和一个力矩电机。方位轴上的角度传感器输出载体的航向角 ψ ；俯仰轴上的角度传感器输出载体的俯仰角 θ ；外滚轴上的角度传感器输出载体的横滚角 γ ；这三个角度传感器统称为“姿态角传感器”。内滚轴上的角度传感器，只用于外滚环的控制，不对外输出信号。

力矩电机用来驱动各自对应的环架，但又不同于传统的伺服电机。传统伺服电机的特点是，高转速、低转矩、启动慢（加速到额定转速所需的时间较长）；力矩电机则刚好相反，低转速、大转矩、启

动快（瞬间启动）。因此，力矩电机不需要既大、且重的减速器，能够直接驱动平台的环架组合件。由于没有减速器，平台的转位精度才可以做得很高。

5. 初始对准的基本概念

平台式惯导系统之所以需要一个平台，是为了给加速度计提供一个良好的工作环境和测量基准。然而，平台没有锁定机构，在刚通电工作时，各环架和台体处于任意位置，无法提供基准。因此，在惯导系统执行任务之前，必须采取技术手段将平台调整到指定的状态，使平台坐标系与导航坐标系对齐，这就是平台的初始对准。

5.1 导航前的准备

惯导系统在执行任务之前，除了要完成初始对准之外，还必须通过接口电路将载体的初始速度和初始位置、任务区域的重力场参数、以及时间基准等，发送给惯导系统的导航计算机，称这一过程为“参数装订”。

导航计算机在对加速度进行积分计算之前，必须知道载体的初始速度和初始位置，统称为“积分初条件”。在导航开始时刻，如果载体是静止的，称为“静基座”，初始速度为零、初始位置就是当地的经纬度。在导航开始时刻，如果载体是运动的，称为“动基座”，载体的速度和位置是连续变化的，必须由外部的基准导航系统提供。然而，外部提供的初条件是有误差的，而且是惯导系统的主要误差源之一，因此提供初条件的基准导航系统必须具有更高的导航精度。

由加速度计的测量原理可知，在垂直加速度计的测量信号中包含

有由惯性力 ($-m\bar{g}$) 造成的 “ $+g$ ”, 在进行积分计算之前, 必须加上一个 “ $-g$ ” 将其补偿掉, 而后才可以进行积分计算。然而, 由于各地的地质构造和地球表面形态的不同, 重力加速度 \bar{g} 通常不是常量, 需要由外部提供。此外, 重力加速度还与地理纬度和高度有关, 随着纬度的增加而增加、随着高度的增加而减小。重力加速度的这种因地制宜的现象, 称为 “重力异常”。低精度的惯导系统, 可以不考虑这种差异, 将重力加速度视为常量, 通常取 $9.8m/s^2$ 。但高精度的惯导系统不可以这样做, 必须考虑这种差异, 并将任务区内的重力场参数发送给惯导系统的导航计算机。

另外, 在执行任务期间, 除惯导系统外, 还有其他设备的参与。但不同的设备, 具有各自的时钟。为了实现精确定位, 在执行任务前必须对这些时钟的计时起点进行协调, 类似于日常生活中的 “钟表对时”, 也称为 “时统”。

5.2 初始对准的指标与分类

平台式惯导系统的初始对准, 就是采取技术手段将平台坐标系(P系)调整到与导航坐标系(t系)重合的状态, 初始对准的过程就是导航坐标系的建立过程。但元器件和平台的制造误差是客观存在的, 二者不可能完全重合, 只能做到接近重合。对准完成后, 水平误差一般在 10 角秒左右, 方位误差通常在 2~5 角分的范围内。

初始对准的主要技术指标有两项: 对准速度和对准精度。为了既快、又准地实现对准, 通常将对准过程划分为 “粗对准” 和 “精对准” 两个步骤。粗对准在前, 首先解决 “快速性” 的问题, 操控平台尽快

地向导航系靠拢，越快越好，特别是军用惯导系统，对准时间过长会贻误战机。粗对准的精度虽然没有严格的要求，但也要具有一定的精度，能为精对准提供一个良好的初条件。否则，精对准的时间可能会很长。精对准在粗对准的基础上进行，主要解决对准精度的问题，对准时间的长短，取决于任务的重要程度，可以是几分钟、数小时、甚至更长，但对准精度必须满足规定的要求。因此，必须合理把握精度与快速性之间的矛盾。

初始对准的方式很多，按照是否需要从外部引入基准信息，可划分为自主式对准和非自主式对准。只依赖地球的重力矢量（加速度计的测量信号）和地球自转角速率矢量（陀螺的测量信号）实现的对准，称为自主式对准、或自对准。需要外部设备提供基准信息的对准，称为非自主式对准、或外对准。外对准，主要指方位对准（确定初始航向），须借助光学、或者机电等手段，将外部提供的北向基准信息引入惯导系统的导航计算机，再由导航计算机控制平台实现对准。外对准的精度虽然很高，但设备相当复杂、对准时间也较长，只适用于远程战略导弹的惯导系统。

另外，按照载体是否运动，又可划分为静基座对准和动基座对准。静基座对准，在载体相对地球静止的情况下进行。由于载体是静止的，所以在加速度计的输出中只含有重力加速度的分量，并将其作为误差信号进行对准，对准过程就是重力加速度分量逐渐趋于零的过程，对准精度取决于加速度计的零位。动基座对准，在运动的载体上进行。此时，在加速度计输出中，不但含有重力加速度的分量，还有载体的

运动加速度和振动噪声。其中，只有重力加速度分量是有用信号，其余的统称为“有害加速度”。如果能够从加速度计的输出中将有害成份清除掉，只留下有用部分，那么就可像静基座一样进行初始对准，这就是动基座对准的基本思路。通常的作法是，在载体上再安装一个已经对准、并连续跟踪导航系的基准惯导系统，也称“母惯导”。理论上，母惯导的水平加速度计不感测重力加速度的分量，只感测载体的运动加速度和振动噪声。如果连续地将母惯导的测量信息传递给正在进行对准的子惯导，即可将重力加速度分量分离出来（做减法）并用于子惯导的对准。因此，又称动基座对准为“传递对准”、或“匹配对准”。由于基准信息的形式不同，传递对准的方式也有很多，常见的是“速度传递对准”。

6. 平台的表观运动

6.1 地球自转引起的表观运动

初始对准，建立了导航坐标系。此后，如果不再对平台继续施加控制，由于地球自转的存在，即使载体静止不动，平台的指向也会自动地偏离地理坐标系，称这种现象为“地球自转引起的表观运动”，如图 6.1 - 1 所示。

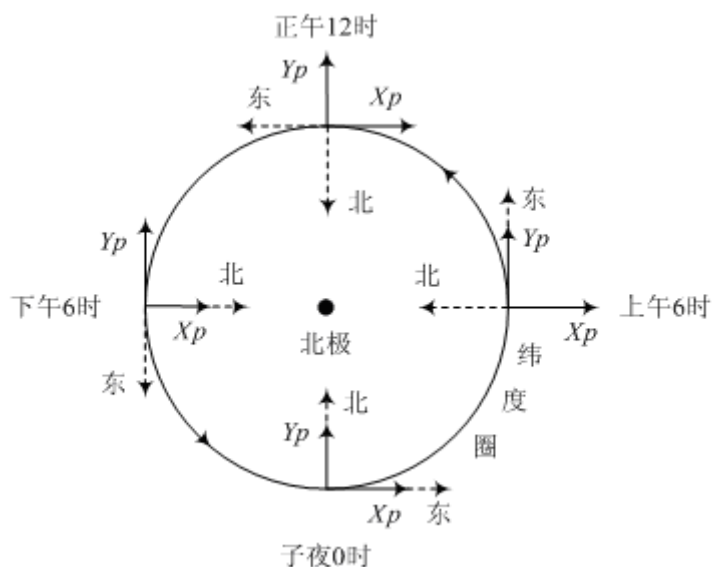


图 6.1 - 1 表观运动示意图（北极俯视图）

如图所示，在子夜零时，将平台 p 与地理系对齐， X_p 轴指东、 Y_p 轴指北，随着地球的自转，二者将逐渐偏离。6 个小时后， X_p 轴指南、 Y_p 轴指东；12 个小时后， X_p 轴指西、 Y_p 轴指南；18 个小时后， X_p 轴指北、 Y_p 轴指西；24 个小时后，平台回复原位， X_p 轴指东、 Y_p 轴指北。或者说，站在惯性空间的观察者认为，平台不动，地理系随地球一起旋转；而站在地球上的观察者则认为，地理系不动，平台在旋转，但旋转的方向与地球相反。

要保持平台系与导航系始终对齐，就必须对表观运动进行补偿。为此，必须将地球的自转角速率矢量 $\bar{\omega}_{ie}$ 向地理系上投影。为了便于讨论，暂不考虑载体的运动（相对地球静止）。另外，地理系的定义不同，投影结果也不同，下面仍以“东北天”地理系为例加以说明。

假设，当地纬度为 φ ，东轴为 X_t ，北轴为 Y_t ，天轴（地垂线）为 Z_t ，则地球自转角速率 $\bar{\omega}_{ie}$ 在地理系上的投影为：

$$\bar{\omega}_{ie} = \begin{bmatrix} \omega_{ie}^{tx} \\ \omega_{ie}^{ty} \\ \omega_{ie}^{tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos \varphi \\ \omega_{ie} \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (6.1 - 1)$$

式中， ω_{ie}^{tx} 的上标 tx 表示坐标轴（地理系的 x 轴），下标 ie 表示两坐标系的关系，即地球系（ e ）相对惯性系（ i ）旋转。所以， ω_{ie}^{tx} 表示地球系相对惯性系的角速率矢量 $\bar{\omega}_{ie}$ 在地理系 x 轴上的投影。 ω_{ie}^{ty} 和 ω_{ie}^{tz} 的定义方法与 ω_{ie}^{tx} 相同，不再重复。

由上式可知，地球自转角速率矢量 $\bar{\omega}_{ie}$ 在东轴（ x_t ）上的投影为零。如果对平台同时施加“控制指令角速率” $\omega_{ie} \cos \varphi$ 和 $\omega_{ie} \sin \varphi$ ，由地球自转引起的表观运动就可以得到补偿。

6.2 地理位置变化引起的表观运动

在执行导航任务的过程中，由于载体的运动，其地理位置在连续地变化，任意两个地点的地垂线、或者地平面是不重合的。如果不对平台连续施加控制，即使假想能够使地球停止转动，但随着载体的运动，平台的指向也会自动地偏离导航系，称这种现象为“地理位置变化引起的表观运动”，如图 6.2 - 1 所示。

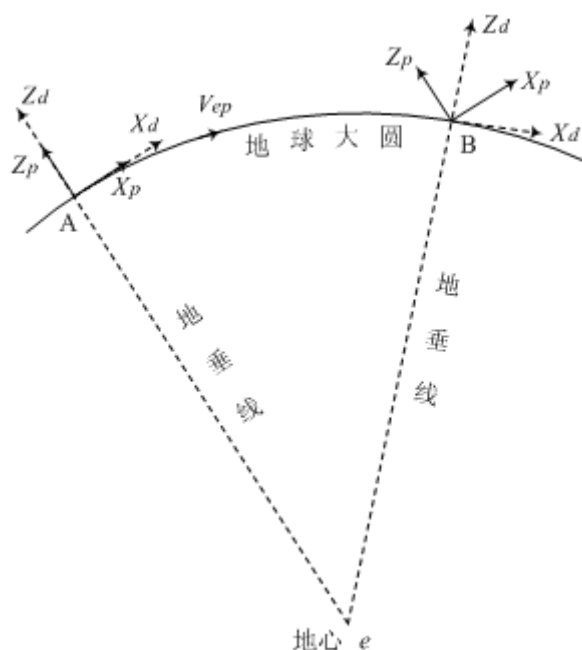


图 6.2 - 1 表观运动示意图

为了便于说明，图中将地理系换成了“大圆坐标系”。在初始位置 A，平台系 $x_p y_p z_p$ 与大圆坐标系 $x_d y_d z_d$ 对齐。当载体沿着地球大圆运动到 B 位置后，由于平台被稳定在惯性空间不动，仍然保持原来的指向不变，但两地的地垂线不重合，大圆坐标系的指向发生了变化，于是二者产生了偏离。偏离的角度，就是地垂线的转过的角度。

同前面一样，为了对表观运动进行补偿，必须首先计算其大小。在此假想地球不转，载体相对地球的运动速度为 \bar{v} （地速向量）。由于平台的安装位置靠近载体的质心，载体相对地球的运动速度，就是平台相对地球的运动速度，可以用 \bar{v}_{ep} 代替 \bar{v} 。由 \bar{v}_{ep} 引起的地垂线旋转角速率为 $\bar{\omega}_{ep}$ ，其大小为 $\omega_{ep} = v_{ep}/R$ （ R 为地球的平均半径），其方向垂直于由地速向量 \bar{v}_{ep} 和地垂线确定的大圆平面。要求解地理位置变化引起的表观运动，就必须将角速率向量 $\bar{\omega}_{ep}$ 向地理系上投影。同样以“东北天”地理系为例进行投影，投影的结果如下：

$$\bar{\omega}_{ep} = \begin{bmatrix} \omega_{ep}^{tx} \\ \omega_{ep}^{ty} \\ \omega_{ep}^{tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{ep}^{ty}/R \\ V_{ep}^{tx}/R \\ V_{ep}^{tx}tg\varphi/R \end{bmatrix} \quad (6.2-1)$$

式中， $-V_{ep}^{ty}/R$ —北向速度 V_{ep}^{ty} 引起的绕东轴的角速率 ω_{ep}^{tx} ，实际上就是

纬度的变化率。因其方向朝西，故多一个负号。

V_{ep}^{tx}/R —东向速度 V_{ep}^{tx} 引起的绕北轴的角速率 ω_{ep}^{ty} 。

$V_{ep}^{tx}tg\varphi/R$ —东向速度 V_{ep}^{tx} 引起的绕“天轴”的角速率 ω_{ep}^{tz} 。

φ —当地的纬度。

如果根据上述三个指令角速率同时对平台施矩，那么由地速 \bar{v}_{ep} 引起的表观运动就可以得到补偿。

最后，再对其中的 $tg\varphi$ 说明如下：东向速度 V_{ep}^{tx} 与纬度圈相切，绕地球极轴的角速率为 $V_{ep}^{tx}/R\cos\varphi$ ，其中的 $R\cos\varphi$ 为纬度圈的半径。实际上， $V_{ep}^{tx}/R\cos\varphi$ 就是经度的变化率，再将其向天轴投影，便可得到：

$$\omega_{ep}^{tz} = \frac{V_{ep}^{tx}}{R\cos\varphi} \sin\varphi = V_{ep}^{tx} tg\varphi / R \quad (6.2 - 2)$$

6.3 控制指令角速率与表观运动的补偿

在前面两节，讨论了两种假想的特殊情况：或载体静止、或假想地球不转。实际上，二者同时在运动，如果不对平台施加控制，平台将被伺服回路稳定在惯性空间不动。对于地球上的观察者而言，将看到平台逐渐偏离了地理系，这就是平台的表观运动。将（6.1 - 1）式和（6.2 - 1）式相加，就可得到总的表观运动角速率：

$$\bar{\omega}_{ip} = \bar{\omega}_{ie} + \bar{\omega}_{ep} \quad (6.3 - 1)$$

式中， $\bar{\omega}_{ip}$ 一称为绝对角速度；

$\bar{\omega}_{ie}$ 一称为牵连角速度；

$\bar{\omega}_{ep}$ 一称为相对角速度。

这个方程是惯性导航的基本方程之一，也称“角速度合成定理”，对平台式惯导和捷联式惯导都是适用的。在具体应用时，还需将其投影到选定的导航参考系中得到三个标量方程，而后才可以进行运算。对于“东北天”地理系而言，三个标量方程如下：

$$\begin{bmatrix} \omega_{ip}^{tx} \\ \omega_{ip}^{ty} \\ \omega_{ip}^{tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{ep}^{ty}/R \\ \omega_{ie}\cos\varphi + V_{ep}^{tx}/R \\ \omega_{ie}\sin\varphi + V_{ep}^{tx}tg\varphi/R \end{bmatrix} \quad (6.3 - 2)$$

根据上式可计算出三个数值，如果以此作为“控制指令角速率”对平台施加控制，便可使平台系连续地跟踪地理系（同步旋转），从

而实现了对表观运动的补偿。

在对平台施加控制时，首先将控制指令角速率转换成“加矩电流”，共三路。而后，再将电流注入到对应的陀螺力矩器中产生控制力矩，使陀螺的转子轴进动，连续地跟踪地理系旋转。在转子轴进动的同时，安装在陀螺测量轴上的信号器有输出，再通过平台的伺服回路驱动平台的环架跟踪转子轴的进动。就这样，在指令角速率的控制下，陀螺跟踪地理系、台体跟踪陀螺，最终实现了平台系对地理系的跟踪，使初始对准建立的导航系得以保持。导航系的保持精度取决于陀螺力矩器的精度，其线性度应优于十万分之一。

7. 载体的运动加速度

7.1 载体空间运动的描述

相对地球表面飞行的飞机和导弹，可将其视为在三维空间运动的刚体，其运动状态可分解为跟随质心的平行移动和绕质心的旋转运动两个部分。所谓“平行移动”是指，刚体上任意两点之间的连线，在运动的过程中始终保持其长度和方向不变，有时也称为“平动”。由此定义可知，刚体上所有点的运动状态是完全相同的，所以才可以用质心（具有确定质量的空间点）的空间运动代表刚体的平动。质心的空间位置可以用直角坐标（ x 、 y 、 z ）来表示，在不同的坐标系中具有不同的数值；刚体相对质心的旋转（绕定点转动）可以用广义欧拉角（ ψ 、 θ 、 γ ）来表示，如图 7.1 - 1 所示。

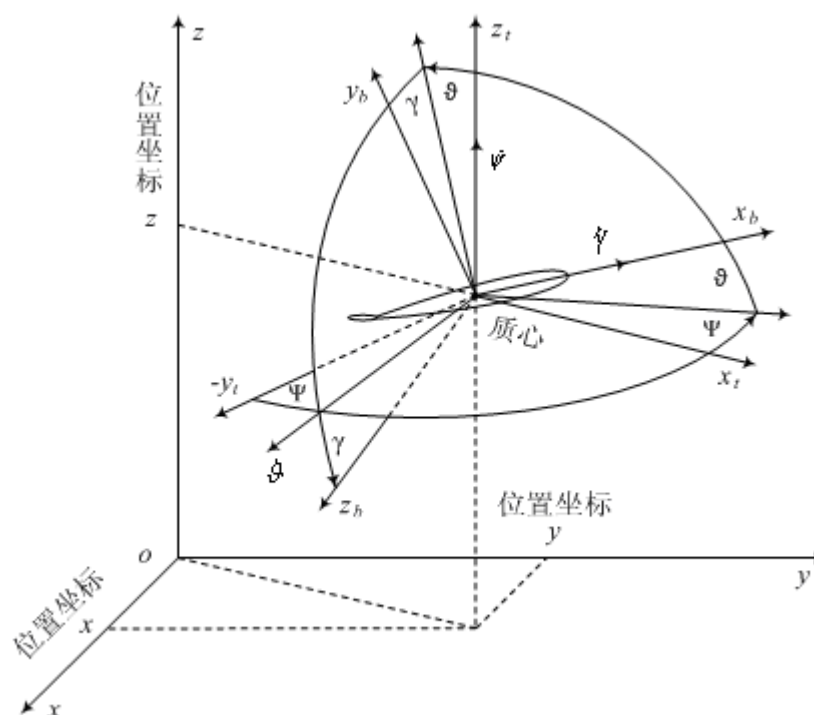


图 7.1 - 1 载体空间运动示意图

图中的直角坐标系 ($oxyz$), 可以是任意给定的静坐标系。角坐标 ψ 、 θ 和 γ 是载体绕其质心相对导航坐标系 (x_i, y_i, z_i) 的姿态角: ψ 为偏航角、 θ 为俯仰角、 γ 为滚动角。由此可见, 采用三个线坐标和三个角坐标, 便可唯一地确定空间运动刚体的状态。或者说, 空间运动的刚体具有六个自由度。

广义欧拉角是相对“古典欧拉角”而言的, 二者的区别仅在于第三次旋转。如果第三次旋转所绕的转轴是前两次未曾用过的轴, 那么三次旋转得到的三个转角就是“广义欧拉角”, 多应用于陀螺力学中。如果第三次旋转所绕的转轴是第一次旋转已经用过的轴, 那么三次旋转得到的三个转角就是“古典欧拉角”, 多应用于古典力学中。因此, 旋转前必须明确规定转动的顺序, 而且不可以随意变更。

7.2 载体空间运动的加速度

在上一节已经指出, 载体的平动可以用质心的运动来替代, 如果

从“地心惯性系”的原点（地心 e ）到载体的质心 p 引位置矢量 \vec{r} ，那么该矢量的末端就是载体所在的空间位置，如图 7.2 - 1 所示。

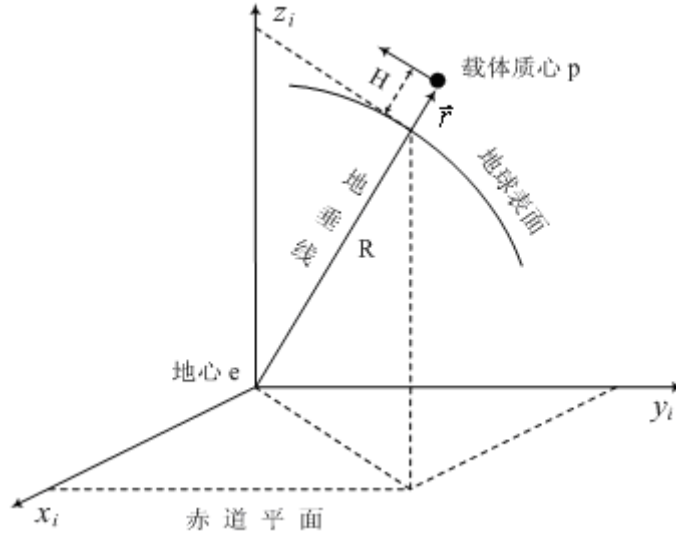


图 7.2 - 1 载体空间位置示意图

图中， \vec{r} — 从地心到载体质心的矢量，也称为“径矢”；

\bar{R} — 地球的平均半径；

H — 载体的质心到地球表面的高度。

为了求取载体相对惯性坐标系的速度和加速度，必须采用矢量微分的哥氏（*Coriolis*）定理：矢量在静参考系上的“绝对微分”，等于该矢量在动参考系上的“相对微分”，再加上动参考系的旋转角速率矢量与该矢量的“叉乘积”（两个矢量的乘积）。

根据哥氏定理，可将载体相对惯性系的运动速度表示如下：

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]_i = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]_e + [\vec{\omega}_{ie} \times \vec{r}]_i = \vec{v}_{ep} + \vec{\omega}_{ie} \times \vec{r} \quad (7.2 - 1)$$

式中的 $\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]_i$ ，称为“绝对速度”，是观察者站在惯性系（静参

考系）中看到的运动。不但能看到地球的自转，而且能看到载体相对地球的运动；下标 i 表示惯性系。

式中的 $\left[\frac{d\bar{r}}{dt}\right]_e = \bar{v}_{ep}$ ，称为“相对速度”，下标 e 表示地球系（动参考系），是观察者站在地球上看到的运动。只能看到载体相对地球的运动，但看不到地球的自转。由于平台位于载体的质心附近，可以用平台系（ p 系）代表载体的质心。式中的 \bar{v}_{ep} 就是载体的相对速度，下标“ ep ”表示“平台 p 相对地球 e ”。

式中的 $[\bar{\omega}_{ie} \times \bar{r}]_i = \bar{\omega}_{ie} \times \bar{r}$ ，称为“牵连速度”，是观察者站在惯性系中看到的运动，方括号的下标 i 表示惯性系。 $\bar{\omega}_{ie}$ 是地球 e 相对惯性系 i 的旋转角速率矢量。所谓“牵连运动”，是假设载体相对动参考系不动、随同动参考系一起的运动。纬度不同，牵连速度也不同。此处的静参考系是惯性坐标系 i ，动参考系就是地球 e ，牵连运动就是地球的自转。

由图 7.2 - 1 可知， $r = R + H$ ，由于 H 与 R 相比可以忽略不计，所以 $r \approx R$ ，下面用 \bar{R} 替代 \bar{r} 参与计算。

一次求导得到了载体相对惯性系的“绝对速度”，为了进一步求取载体相对惯性系的“绝对加速度”，需再次应用哥氏定理对（7.2 - 1）式的两端求导数：

$$\left[\frac{d^2\bar{R}}{dt^2}\right]_i = \left[\frac{d\bar{v}_{ep}}{dt}\right]_i + \left[\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R})\right]_i \quad (7.2 - 2)$$

为了得到“相对加速度”，需继续对（7.2 - 2）式右端的第一项应用哥氏定理，结果如下：

$$\left[\frac{d\bar{v}_{ep}}{dt}\right]_i = \left[\frac{d\bar{v}_{ep}}{dt}\right]_e + \bar{\omega}_{ie} \times \bar{v}_{ep} \quad (7.2 - 3)$$

上式中的 $\left[\frac{d\bar{v}_{ep}}{dt} \right]_e$ ，是观察者站在地球上看到的载体相对地球的“相对加速度”。此外，相对运动还改变了载体在地球上的位置（纬度发生了变化）。对于站在惯性空间的观察者来说，载体纬度的变化改变了牵连速度的大小。因为旋转半径发生了变化，由此引起的附加加速度为 $\bar{\omega}_{ie} \times \bar{v}_{ep}$ ，称为“哥氏项”。

再来看（7.2 - 2）式右端的第二项，由于 $\bar{\omega}_{ie}$ 是常量，对其求导的结果为零，于是（7.2 - 2）式右端的第二项变为：

$$\left[\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) \right]_i = \bar{\omega}_{ie} \times \left[\frac{d\bar{R}}{dt} \right]_i \quad (7.2 - 4)$$

将（7.2 - 1）式代入（7.2 - 4）式，可得：

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) \right]_i &= \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{v}_{ep} + \bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) \\ &= \bar{\omega}_{ie} \times \bar{v}_{ep} + \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) \end{aligned} \quad (7.2 - 5)$$

式中的 $\bar{\omega}_{ie} \times \bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}$ ，称为“牵连加速度”，与“牵连速度”的概念类似，不再多加解释。另外，对于站在惯性空间的观察者来说，牵连运动改变了相对运动的方向，由此引起的附加加速度为 $\bar{\omega}_{ie} \times \bar{v}_{ep}$ ，同样称为“哥氏项”。

再将（7.2 - 3）式和（7.2 - 5）式代入到（7.2 - 2）式中去，便可得到载体相对惯性坐标系的绝对加速度：

$$\left[\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right]_i = \left[\frac{d\bar{v}_{ep}}{dt} \right]_e + \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) + 2\bar{\omega}_{ie} \times \bar{v}_{ep} \quad (7.2 - 6)$$

令， $\bar{a}_{ip} = \left[\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right]_i$ ，称 \bar{a}_{ip} 为载体相对惯性系的绝对加速度；

$\bar{a}_{ep} = \left[\frac{d\bar{v}_{ep}}{dt} \right]_e$ ，称 \bar{a}_{ep} 为载体相对地球系的相对加速度；

$\vec{a}_{ie} = \vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{R})$ ，称 \vec{a}_{ie} 为牵连加速度；

$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_{ie} \times \vec{v}_{ep}$ ，称 \vec{a}_k 为哥氏加速度。

代入到 (7.2 - 6) 式中，可得：

$$\vec{a}_{ip} = \vec{a}_{ep} + \vec{a}_{ie} + \vec{a}_k \quad (7.2 - 7)$$

由 (7.2 - 7) 式可知，载体相对惯性系的绝对加速度由三部分构成：相对加速度、牵连加速度和哥氏加速度。

相对加速度和牵连加速度，已在上面做过详细说明、不再重复。哥氏加速度 $\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_{ie} \times \vec{v}_{ep}$ ，是由于相对运动和牵连运动的相互影响而产生的附加加速度。由其定义式可知，哥氏加速度的生成，必须具备两个条件：一，动参考系必须旋转；二，载体与动参考系之间必须存在相对移动。二者缺一不可，只要其中的一个条件不具备，则哥氏加速度为零。哥氏加速度的概念，可借图 7.2 - 2 加以说明。

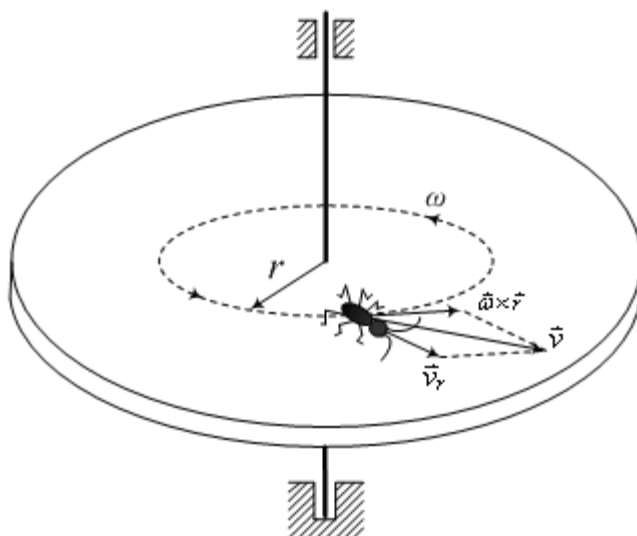


图 7.2 - 2 哥氏加速度示意图

图中，绕定轴旋转的圆盘为动参考系；如果忽略地球的自转，可将地球视为静参考系；一只虫子在圆盘上爬行，是相对运动。假设，虫子的爬行速度为 \vec{v}_r 、圆盘的转速为 $\vec{\omega}$ ，则牵连速度（虫子随圆盘旋

转的切向速度) 为 $\bar{\omega} \times \bar{r}$ 。那么, 虫子相对静参考系的绝对速度为 $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{\omega} \times \bar{r}$ 。可见, 牵连运动改变了相对运动的方向, 导致这一改变的加速度为 $\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ 。另外, 相对运动改变了虫子在圆盘上的位置。可见, 动点的牵连运动具有瞬时性。虫子位置的改变, 就是旋转半径 \bar{r} 的改变, 必然使牵连速度 $\bar{\omega} \times \bar{r}$ 的大小发生变化。导致这一变化的加速度, 同样为 $\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ 。综上所述, 总的“附加加速度”为 $2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ 。因此, 哥氏加速度一定是“成对”出现, 其中的系数 2 不可或缺。

到此, 问题尚未全部解决, 因为导航计算(对加速度的积分)是在地理系上进行的, 而(7.2-6)式中的相对加速度 $\left[\frac{d\bar{v}_{ep}}{dt} \right]_e$ 是相对地心而言的, 不便于应用, 还需将其转换到地理系上。为此, 需要再一次应用“动矢量”求导的哥氏定理, 但此时的静参考系是地球系、不再是惯性系, 而动参考系则是地理系。可见, “静”和“动”是相对的。求导的结果如下:

$$\left[\frac{d\bar{v}_{et}}{dt} \right]_e = \left[\frac{d\bar{v}_{et}}{dt} \right]_t + \bar{\omega}_{et} \times \bar{v}_{et} \quad (7.2-8)$$

另外, 在上式中还将平台系 p 置换成了地理系 t , 仅仅是为了应用方便。式中, $\bar{\omega}_{et} = \bar{\omega}_{ep}$ 是地理系相对地球系的旋转角速度。由 6.2 节可知, $\bar{\omega}_{et}$ 是表观运动角速率, 其方向垂直于由地速向量 \bar{v}_{et} 和地垂线共同确定的大圆平面。因此, $\bar{\omega}_{et} \times \bar{v}_{et}$ 就是载体沿地球表面运动的向心加速度(方向指向地心)。请注意, $\bar{\omega}_{et} \times \bar{v}_{et}$ 不是哥氏加速度, 因为地理系(动参考系)的坐标原点与载体的质心(相当于图 7.2-2 中的虫子)是重合的, 二者没有相对位移。

载体沿地球表面运动的瞬态轨迹，是相对地心的一段圆弧。除了上述的向心加速度 $\vec{\omega}_{et} \times \vec{v}_{et}$ 外，还应具有切向加速度，实质上就是 $\left[\frac{d\vec{v}_{et}}{dt} \right]_t$ ，如图 7.2 - 3 所示。

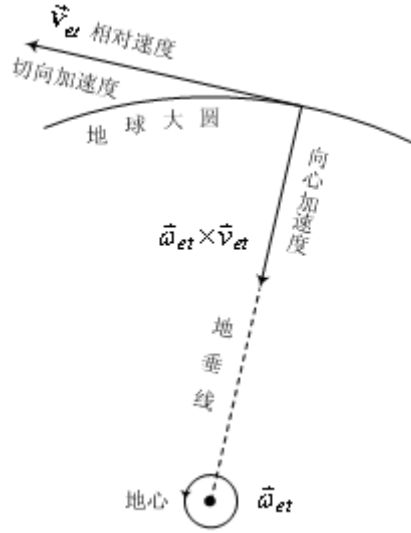


图 7.2 - 3 载体运动的向心加速度

再将 (7.2 - 8) 式代入到 (7.2 - 6) 式中去，并将下标 p 统一置换成下标 t ，稍加整理后得到：

$$\left[\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right]_i = \left[\frac{d\vec{v}_{et}}{dt} \right]_t + (2\vec{\omega}_{ie} + \vec{\omega}_{et}) \times \vec{v}_{et} + \vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{R}) \quad (7.2 - 9)$$

尽管 (7.2 - 9) 式与 (7.2 - 6) 式在形式上存在差异，但其实质是一样的。都表示，绝对加速度由相对加速度（有用项）和“有害加速度”两部分构成。而有害加速度，又包括三个部分：

- (1) 相对运动和牵连运动相互影响产生的哥氏加速度 $2\vec{\omega}_{ie} \times \vec{v}_{et}$ ，因“成对”出现，所以乘 2。
- (2) 载体沿地球表面运动（其瞬态轨迹为相对地心的圆弧）的向心加速度 $\vec{\omega}_{et} \times \vec{v}_{et}$ ，其方向指向地心。
- (3) 由地球自转（牵连运动）引起的向心加速度 $\vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{R})$ ，

其方向垂直于地轴（南北极连线），请参考图 7.3 - 1 中的 \bar{a}_{ie} 。

上面的（7.2 - 9）式，是根据运动学原理得到的载体加速度的表达式，下一节将从动力学的角度，对载体加速度做进一步的分析。

7.3 惯性导航的基本方程

在上一节，根据运动学的原理，得到了载体在空间运动的加速度，本节将从动力学的角度，对载体的运动加速度做进一步的分析。根据运动学和动力学分别得出的结论，而后再联立求解，便可得到惯性导航的基本方程。

运动学只研究物体在空间的位置、速度和加速度的变化规律（与时间的关系），但不研究引起这种变化的原因。动力学则研究导致物体运动状态改变的原因，即作用力与加速度的关系。理论力学将动力学问题划分为两种类型：一，已知运动求力；二，已知力和初条件求运动。惯性导航涉及的力学问题，基本上属于第二类。首先，对物体的运动进行认真的分析，并画出受力图。而后，再建立矢量方程，并向导航坐标系投影、求解。

由牛顿第二定律可知：

$$\bar{F} = m \left[\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right]_i \quad (7.3 - 1)$$

式中， m 是加速度计的检测质量， \bar{F} 是作用在检测质量上的合力。其中包括，地心引力 $m \bar{g}_e$ ，以及“支撑弹簧”作用在质量块上的弹性恢复力 \bar{F}_H ，如下式所示：

$$\bar{F} = m \bar{g}_e + \bar{F}_H \quad (7.3 - 2)$$

式中， \bar{g}_e 是地心的引力加速度，不是重力加速度。将（7.3 - 2）

式代入 (7.3 - 1) 式，并除以 m 后得到：

$$\left[\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right]_i = \bar{F}_H / m + \bar{g}_e = \bar{f} + \bar{g}_e \quad (7.3 - 3)$$

式中， $\bar{F}_H / m = \bar{f}$ 是非引力加速度，也称为比力（单位质量所承受的力）。需要指出的是，此处的比力 \bar{f} 是三个加速度计测得的比力的矢量和，而不是单个加速度计测得的比力。

由 (7.3 - 3) 式可知，载体相对惯性系的绝对加速度，等于非引力加速度与引力加速度的矢量和，这就是动力学得出的结论。

再将 (7.3 - 3) 式（动力学结论）和 (7.2 - 9) 式（运动学结论）联立求解可得：

$$\bar{f} + \bar{g}_e = \left[\frac{d\bar{v}_{et}}{dt} \right]_t + (2\bar{\omega}_{ie} + \bar{\omega}_{et}) \times \bar{v}_{et} + \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) \quad (7.3 - 4)$$

$$\text{再令：} \quad \bar{g} = \bar{g}_e - \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) \quad (7.3 - 5)$$

将 (7.3 - 5) 式代入 (7.3 - 4) 式，并略加整理后可得：

$$\left[\frac{d\bar{v}_{ep}}{dt} \right]_t = \bar{f} - (2\bar{\omega}_{ie} + \bar{\omega}_{et}) \times \bar{v}_{ep} + \bar{g} \quad (7.3 - 6)$$

式中的 \bar{g} ，就是众所周知的重力加速度，其定义见 (7.3 - 5) 式。 \bar{g} 与 $(2\bar{\omega}_{ie} + \bar{\omega}_{et}) \times \bar{v}_{et}$ 统称为有害加速度，将它们从 \bar{f} 中扣除后，便可得到载体相对地理系的运动加速度。然而，重力加速度 \bar{g} 因地而异、不是常量，需要由外部提供。

上一章的 (6.3 - 1) 式和本节的 (7.3 - 6) 式，统称为“惯性导航基本方程”，适用于任何惯导系统，当然也包括捷联式惯导系统。将惯导基本方程（矢量方程）向选定的导航坐标系投影，可以得到载体相对导航参考系的运动微分方程（三个标量方程）。在已知初始速

度和初始位置的情况下，对“相对加速度”一次积分，便可得到载体的运行速度。二次积分，可以得到载体的运行距离（地理位置）。再将载体的速度和位置发送给控制系统，便可对载体实施控制。

根据（7.3 - 5）式，可以将重力加速度（或重力）与引力加速度（或地心引力）的关系用图形表示，如图 7.3 - 1 所示。

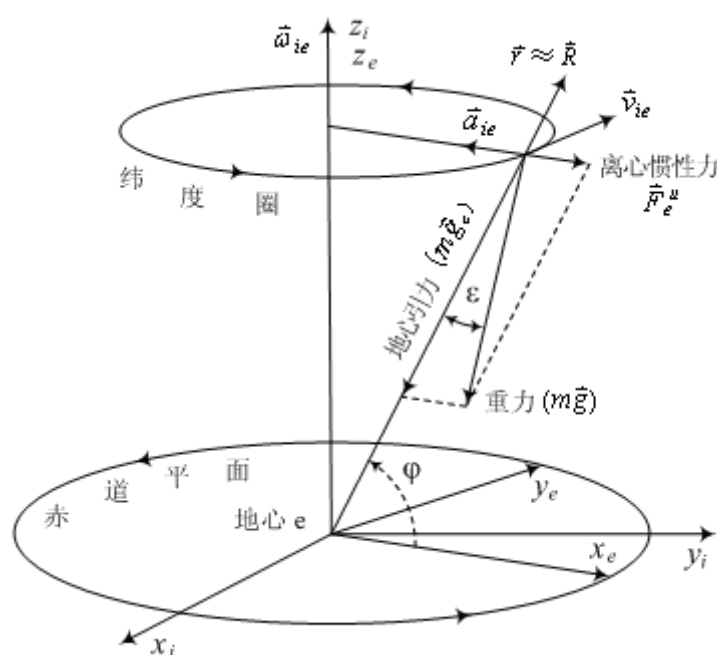


图 7.3 - 1 重力与地心引力示意图

图中， \bar{R} —地球的平均半径；

φ —当地纬度；

$\bar{\omega}_{ie}$ —地球自转角速率矢量；

\bar{v}_{ie} —牵连速度， $\bar{v}_{ie} = \bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}$ ；

\bar{a}_{ie} —牵连加速度， $\bar{a}_{ie} = \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R})$ ；

\bar{F}_e^u —离心惯性力， $\bar{F}_e^u = -m \bar{a}_{ie} = -m \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R})$ 。

由图 7.3 - 1 可知，地球的自转必然引起离心惯性力，从而导致地垂线不通过地心（在地球的两极和赤道除外）。为了计算地垂线（重

力垂线) 偏离“地心垂线”(引力垂线) 的角度, 再将地心引力 $m\vec{g}_e$ 、重力 $m\vec{g}$ 和离心惯性力 \vec{F}_e^u , 三者之间的空间关系重绘如下:

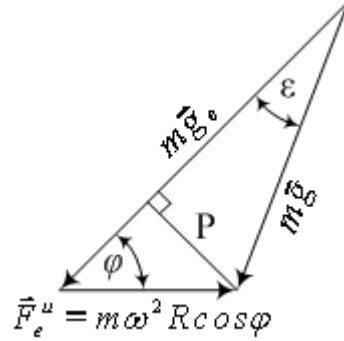


图 7.3 - 2 重力偏角示意图

由图可知:

$$P = mg \sin \varepsilon = F_e^u \sin \varphi = m\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} m\omega^2 R \sin 2\varphi$$

所以,

$$\varepsilon \approx \sin \varepsilon = \frac{\omega_{ie}^2 R}{2g} \sin 2\varphi$$

当纬度 $\varphi = \pm 45^\circ$ 时, ε 取得最大值 $\varepsilon_{\max} \approx 0.1^\circ$, 在其他地区均低于此值。一般情况下, 可将其忽略不计。在北京地区, 平均纬度为(北纬) 40° , 所以 ε 不会超过 6 角分。

另外, 地球的自转还能导致自由落体的落点偏西(由哥氏力引起)。地垂线对“地心垂线”的偏离, 称为地球自转的“静力效应”(只影响静止的物体); 自由落体的落点偏西, 称为地球自转的“动力效应”(只影响运动物体)。

8. 指北方位惯导系统的力学编排方案

将惯性导航基本方程(7.3-6)式, 向“东北天”地理系投影后, 得到如下标量方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{ep}^{tx} \\ \dot{v}_{ep}^{ty} \\ \dot{v}_{ep}^{tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^t \\ f_y^t \\ f_z^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -(2\omega_{ie}^{tz} + \omega_{et}^{tz}) & 2\omega_{ie}^{ty} + \omega_{et}^{ty} \\ 2\omega_{ie}^{tz} + \omega_{et}^{tz} & 0 & -(2\omega_{ie}^{tx} + \omega_{et}^{tx}) \\ -(2\omega_{ie}^{ty} + \omega_{et}^{ty}) & 2\omega_{ie}^{tx} + \omega_{et}^{tx} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{ep}^{tx} \\ v_{ep}^{ty} \\ v_{ep}^{tz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (8-1)$$

上式就是指北方位惯导系统的速度微分方程，由于垂直通道是开环的、不稳定的，而且飞机和船舶的垂直速度 v_{ep}^{tz} 都比较小，所以通常将其忽略，只考虑两个水平通道，于是上式简化为如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{ep}^{tx} \\ \dot{v}_{ep}^{ty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^t \\ f_y^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -(2\omega_{ie}^{tz} + \omega_{et}^{tz}) \\ 2\omega_{ie}^{tz} + \omega_{et}^{tz} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{ep}^{tx} \\ v_{ep}^{ty} \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

将 (6.1-1) 式中的 ω_{ie}^{tz} 和 (6.2-1) 式中的 $\omega_{ep}^{tz} = \omega_{et}^{tz}$ 代入 (8-2) 式后可得：

$$\begin{cases} \dot{v}_{ep}^{tx} = f_x^t + 2V_{ep}^{ty}\omega_{ie}\sin\varphi + V_{ep}^{tx}V_{ep}^{ty}tg\varphi/R = f_x^t - A_{\#X} \\ \dot{v}_{ep}^{ty} = f_y^t - 2V_{ep}^{tx}\omega_{ie}\sin\varphi - (V_{ep}^{tx})^2tg\varphi/R = f_y^t - A_{\#Y} \end{cases} \quad (8-3)$$

式中的 $A_{\#X}$ 和 $A_{\#Y}$ 为有害加速度：

$$\begin{cases} A_{\#X} = -(2V_{ep}^{ty}\omega_{ie}\sin\varphi + V_{ep}^{tx}V_{ep}^{ty}tg\varphi/R) \\ A_{\#Y} = 2V_{ep}^{tx}\omega_{ie}\sin\varphi + (V_{ep}^{tx})^2tg\varphi/R \end{cases} \quad (8-4)$$

将有害加速度从比力中扣除后，再对 (8-3) 式积分，可得载体的东向速度 v_{ep}^{tx} 和北向速度 v_{ep}^{ty} ：

$$\begin{cases} v_{ep}^{tx} = \int_0^t \dot{v}_{ep}^{tx} dt + v_{X0}^t \\ v_{ep}^{ty} = \int_0^t \dot{v}_{ep}^{ty} dt + v_{Y0}^t \end{cases} \quad (8-5)$$

式中的 v_{X0}^t 和 v_{Y0}^t ，分别为东向初速度和北向初速度，即积分初条件。在得到 v_{ep}^{tx} 和 v_{ep}^{ty} 后，可计算出地速的大小：

$$v = \sqrt{(v_{ep}^{tx})^2 + (v_{ep}^{ty})^2} \quad (8-6)$$

地速的方向与航迹相切，地速向量在地平面内的投影与地理系

X_t 轴的夹角称为“航迹偏角”、或“航迹方位角”。对于“东北天”地理系而言， X_t 轴就是东轴，如图 8-1 所示：

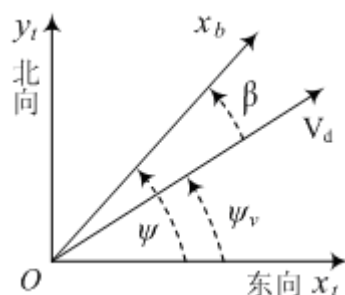


图 8-1 地速方向示意图

图中， v_d —地速向量 \vec{v} 在地平面内的投影；

ψ_v —航迹方位角，地速在地平面内的投影与东轴的夹角；

x_b —载体纵轴在地平面内的投影；

ψ —偏航角，载体纵轴在地平面内的投影与东轴的夹角；

β —侧滑角，也称“偏流角”，地速向量 \vec{v} 与载体纵对称平面之间的夹角。

由图 8-1 和 (8-6) 式可知，地速方向（航迹方位角）为：

$$\psi_v = \arctg \frac{V_{ep}^{ty}}{V_{ep}^{tx}} \quad (8-7)$$

在得到地速的大小和方向后，还需进一步求解载体的地理位置，即载体所在的经、纬度。由 (6.2-1) 式下面的说明可知， V_{ep}^{ty}/R 就是纬度的变化率； $V_{ep}^{tx}/R \cos \varphi$ 就是经度的变化率。于是有：

$$\begin{cases} \varphi = \int_0^t \frac{V_{ep}^{ty}}{R} dt + \varphi_0 \\ \lambda = \int_0^t \frac{V_{ep}^{tx}}{R \cos \varphi} dt + \lambda_0 \end{cases} \quad (8-8)$$

式中， φ_0 —载体的初始纬度；

λ_0 —载体的初始经度。

需要指出的是，用地球的平均半径 R 计算纬度，会产生较大的误差，必须将地球看成椭球体，并根据所在的纬度进行修正，请参看崔中兴编著的《惯性导航系统》（国防工业出版社）第二章第 1 节。

根据前面已经得到的（6.3-2）式、（8-3）式、（8-4）式、（8-5）式和（8-8）式，可以画出完整的指北方位惯导系统的力学编排方案，如图 8-2 所示：

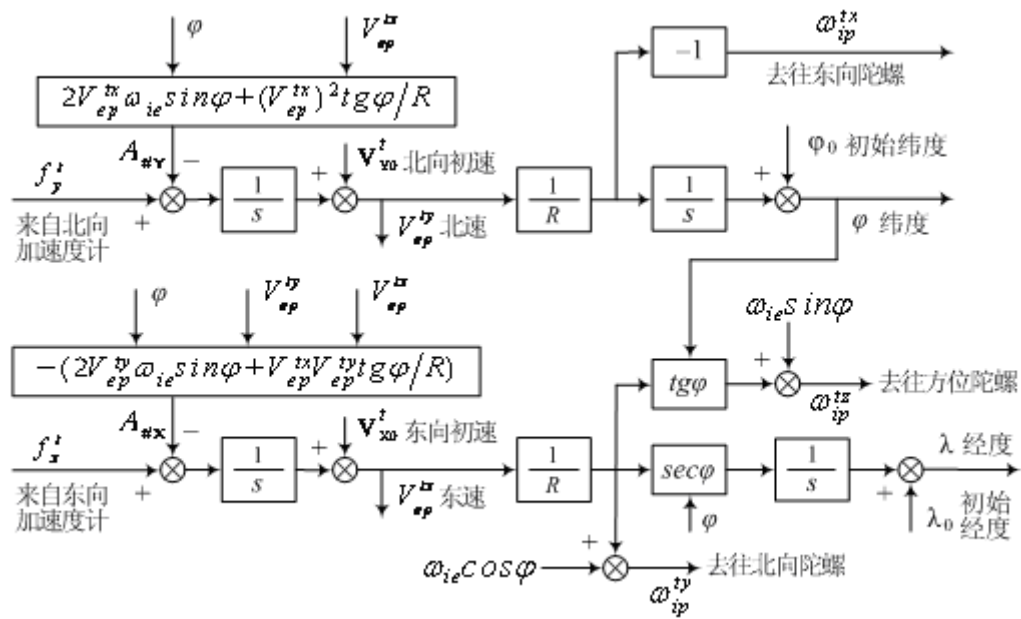


图 8-2 指北方位惯导系统力学编排方案图

为了方便对图的阅读，再对图 8-2 简要说明如下：

- (1) R 为地球平均半径， $1/s$ 为积分环节。
- (2) f_x^t 和 f_y^t 分别为东向加速度计和北向加速度计测得的比力，也称为“视加速度”。

(3) $A_{\#X}$ 和 $A_{\#Y}$ 分别为东向和北向的有害加速度： $2V_{ep}^{ty}\omega_{ie}\sin\varphi$ 为哥氏加速度在东轴上的投影； $V_{ep}^{tx}V_{ep}^{ty}tg\varphi/R$ 为向心加速度在东轴上的投影； $-2V_{ep}^{tx}\omega_{ie}\sin\varphi$ 为哥氏加速度在北轴上的投影； $-(V_{ep}^{tx})^2tg\varphi/R$ 为向心加速度在北轴上的投影。这些有害加速度均具有严格的解析计算公

式，故称为“原理性有害加速度”。但实际上，在加速度计的输出中还含有电噪声和机械噪声，均为随机信号、不能用解析式表示，故称为“非原理有害加速度”，只能通过卡尔曼滤波削弱其影响。

(4) v_{x0}^t 和 v_{y0}^t 分别为东向初速度和北向初速度。

(5) φ_0 和 λ_0 分别为初始纬度和初始经度。

(6) $\omega_{ip}^{tx} = -V_{ep}^{ty}/R$ 为东向陀螺的控制指令角速率。

(7) $\omega_{ip}^{ty} = \omega_{ie} \cos\varphi + V_{ep}^{tx}/R$ 为北向陀螺的控制指令角速率。

(8) $\omega_{ip}^{tz} = \omega_{ie} \sin\varphi + V_{ep}^{tx} \tan\varphi/R$ 为方位陀螺的控制指令角速率。

由前面八个章节的内容可知：初始对准，解决了导航坐标系的建立问题；表观运动的补偿，解决了导航坐标系的维持问题；有害加速度的补偿，解决了导航计算的问题。所有这些内容，就是惯性导航的基本原理。

9. 捷联式惯导系统的基本原理

9.1 方向余弦与方向余弦矩阵

捷联式惯导系统离不开坐标变换，坐标变换又离不开“方向余弦矩阵”。因此，在论述捷联式惯导的原理之前，首先要知道什么是“方向余弦”和“方向余弦矩阵”。

9.1.1 方向余弦矩阵及其特性

一个空间矢量在不同的坐标系中的投影是各异的，为了便于叙述，在此重新定义地理系 $ox_i y_i z_i$ 和载体系 $ox_b y_b z_b$ 的空间指向，如图 9.1.1 - 1 所示。

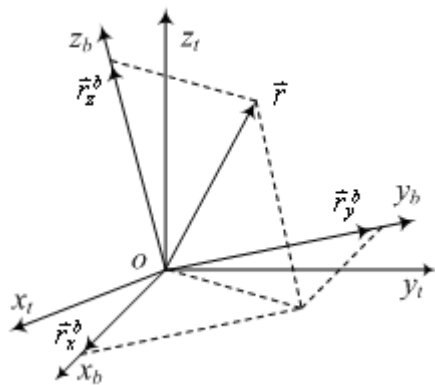


图 9.1.1 - 1 地理系与载体系的初始指向一致

假设，任意矢量 \vec{r} （可以是速度、加速度、或角速率等）在地理系中的投影（分量形式）为：

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x^t \vec{i}_t + y^t \vec{j}_t + z^t \vec{k}_t \\ &= \vec{r}_x^t + \vec{r}_y^t + \vec{r}_z^t\end{aligned}\quad (9.1.1 - 1)$$

式中， x^t 、 y^t 、 z^t —矢量 \vec{r} 在地理系三根轴上的分量；

\vec{i}_t 、 \vec{j}_t 、 \vec{k}_t —地理系三根坐标轴的单位矢量。

同理，任意矢量 \vec{r} 在载体系中的投影为：

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x^b \vec{i}_b + y^b \vec{j}_b + z^b \vec{k}_b \\ &= \vec{r}_x^b + \vec{r}_y^b + \vec{r}_z^b\end{aligned}\quad (9.1.1 - 2)$$

式中， x^b 、 y^b 、 z^b —矢量 \vec{r} 在载体系三根轴上的分量；

\vec{i}_b 、 \vec{j}_b 、 \vec{k}_b —载体系三根坐标轴的单位矢量。

矢量 \vec{r} 在载体系上的三个分量： $\vec{r}_x^b = x^b \vec{i}_b$ 、 $\vec{r}_y^b = y^b \vec{j}_b$ 和 $\vec{r}_z^b = z^b \vec{k}_b$ ，可视为三个正交的“分矢量”。其中的每一个分矢量，相对地理系的三根坐标轴具有三个夹角。每一个夹角的余弦函数，就称为该“分矢量”与地理系对应坐标轴的一个“方向余弦”。每一个分矢量具有三个“方向余弦”；三个分矢量，共有九个“方向余弦”。

例如，分矢量 $\vec{r}_x^b = x^b \vec{i}_b$ 的三个方向余弦可表示如下：

$$\begin{cases} L_{xx} = \cos(\vec{r}_x^b, \vec{i}_t) \\ L_{xy} = \cos(\vec{r}_x^b, \vec{j}_t) \\ L_{xz} = \cos(\vec{r}_x^b, \vec{k}_t) \end{cases} \quad (9.1.1 - 3)$$

式中, (\vec{r}_x^b, \vec{i}_t) 是分矢量 \vec{r}_x^b 与地理系 x_t 轴 (\vec{i}_t) 的夹角; 其余类推, 不再重复。

同样, 分矢量 $\vec{r}_y^b = y^b \vec{j}_b$ 的三个方向余弦如下:

$$\begin{cases} L_{yx} = \cos(\vec{r}_y^b, \vec{i}_t) \\ L_{yy} = \cos(\vec{r}_y^b, \vec{j}_t) \\ L_{yz} = \cos(\vec{r}_y^b, \vec{k}_t) \end{cases} \quad (9.1.1 - 4)$$

分矢量 $\vec{r}_z^b = z^b \vec{k}_b$ 的三个方向余弦如下:

$$\begin{cases} L_{zx} = \cos(\vec{r}_z^b, \vec{i}_t) \\ L_{zy} = \cos(\vec{r}_z^b, \vec{j}_t) \\ L_{zz} = \cos(\vec{r}_z^b, \vec{k}_t) \end{cases} \quad (9.1.1 - 5)$$

以上三个分矢量 $\vec{r}_x^b = x^b \vec{i}_b$ 、 $\vec{r}_y^b = y^b \vec{j}_b$ 、 $\vec{r}_z^b = z^b \vec{k}_b$ 在地理系 x_t 轴 (\vec{i}_t) 上的投影之和如下:

$$x^t = x^b \cos(\vec{r}_x^b, \vec{i}_t) + y^b \cos(\vec{r}_y^b, \vec{i}_t) + z^b \cos(\vec{r}_z^b, \vec{i}_t) \quad (9.1.1 - 6)$$

在地理系 y_t 轴 (\vec{j}_t) 上的投影之和如下:

$$y^t = x^b \cos(\vec{r}_x^b, \vec{j}_t) + y^b \cos(\vec{r}_y^b, \vec{j}_t) + z^b \cos(\vec{r}_z^b, \vec{j}_t) \quad (9.1.1 - 7)$$

在地理系 z_t 轴 (\vec{k}_t) 上的投影之和如下:

$$z^t = x^b \cos(\vec{r}_x^b, \vec{k}_t) + y^b \cos(\vec{r}_y^b, \vec{k}_t) + z^b \cos(\vec{r}_z^b, \vec{k}_t) \quad (9.1.1 - 8)$$

根据 (9.1.1 - 3) 式 ~ (9.1.1 - 8) 式, 可得到如下矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{yx} & L_{zx} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{zy} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{bmatrix} = C_b^t \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{bmatrix} \quad (9.1.1 - 9)$$

上式中的 C_b^t 就是载体系 $x_b y_b z_b$ 和地理系 $x_t y_t z_t$ 之间的“方向余弦矩阵”, 是一个九元素的 3×3 方阵。其中的每一个元素, 就是两根

对应坐标轴夹角的余弦函数，称为“方向余弦”。上述概念具有一般性，可以推广到任意的两个直角坐标系。方向余弦矩阵是一种特殊的矩阵，具有如下重要特性：

(1) 方向余弦矩阵的逆矩阵 $(C'_b)^{-1}$ 与转置矩阵 $(C'_b)^T$ 相等，称这一特性为方向余弦矩阵的“正交性”。只要将原矩阵中对应的“行”与“列”对调，即可得到其转置矩阵，非常方便。因此，这一特性可简化繁琐的矩阵“求逆”计算，非常重要。

这一特性很容易得到证明，只需将逆矩阵 $(C'_b)^{-1}$ 展开便可知， $(C'_b)^{-1}$ 与 $(C'_b)^T$ 其实是一回事。再由 $(C'_b)^T C'_b = (C'_b)^{-1} C'_b = [I]$ ，可进一步得到第二个和第三个特性。其中的 $[I]$ 为单位矩阵，对角线上的元素全为 1，其它元素均为零。

(2) 同一个矢量的三个方向余弦的平方和等于 1。将这一特性应用于 (9.1.1 - 3)、(9.1.1 - 4) 和 (9.1.1 - 5) 三个式子，可得：

$$\begin{cases} L_{xx}^2 + L_{xy}^2 + L_{xz}^2 = 1 \\ L_{yx}^2 + L_{yy}^2 + L_{yz}^2 = 1 \\ L_{zx}^2 + L_{zy}^2 + L_{zz}^2 = 1 \end{cases} \quad (9.1.1 - 10)$$

这三个方程，对方向余弦矩阵形成了三个约束条件。

(3) 两个相互垂直的矢量（或两根相互垂直的坐标轴），它们的对应方向余弦的乘积之和等于零。同样，将这一特性应用于 (9.1.1 - 3)、(9.1.1 - 4) 和 (9.1.1 - 5) 三个式子，可得：

$$\begin{cases} L_{xx}L_{yx} + L_{xy}L_{yy} + L_{xz}L_{yz} = 0 \\ L_{yx}L_{zx} + L_{yy}L_{zy} + L_{yz}L_{zz} = 0 \\ L_{zx}L_{xx} + L_{zy}L_{xy} + L_{zz}L_{xz} = 0 \end{cases} \quad (9.1.1 - 11)$$

由 (9.1.1 - 11) 式可知，三个分矢量的方向余弦“两两组合”，

又形成了三个约束条件。再加上 (9.1.1 - 10) 式提供的三个约束条件，可进一步得到第四个特性。

(4) 基于上述六个约束条件，方向余弦矩阵中的九个元素，只有三个是独立的。

9.1.2 方向余弦矩阵与欧拉角的关系

由方向余弦矩阵的第四个特性可知，其中的九个元素，只有三个是独立的。受此启发，自然会问：除了方向余弦之外，是否可以用三个独立的参数来表示两个坐标系之间的相对位置呢？答案是肯定的。仍以图 9.1.1 - 1 为例加以说明，载体系 $ox_b y_b z_b$ 相对地理系 $ox_t y_t z_t$ 的空间位置可通过三次旋转而得到。

第一次旋转，载体系统绕 z_t 轴转 ψ 角，到达 $ox_1 y_1 z_1$ 的位置，如图 9.1.2 - 1 所示。

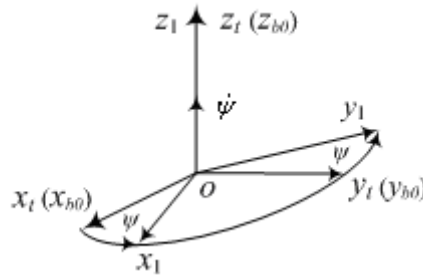


图 9.1.2 - 1 第一次旋转

图中， $ox_{b0} y_{b0} z_{b0}$ 为载体系的初始位置。旋转后，坐标系 $ox_t y_t z_t$ 与 $ox_1 y_1 z_1$ 之间的方向余弦矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = C_t^1 \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad (9.1.2 - 1)$$

第二次旋转，绕 y_1 轴的负向转 θ 角，到达 $ox_2 y_2 z_2$ 的位置，如图 9.1.2 - 2 所示。

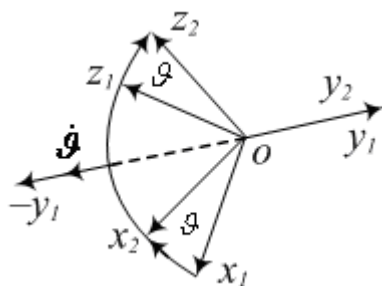


图 9.1.2 - 2 第二次旋转

坐标系 $ox_1y_1z_1$ 与 $ox_2y_2z_2$ 之间的方向余弦矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = C_1^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (9.1.2 - 2)$$

第三次旋转，绕 x_2 轴转 γ 角，到达 $ox_by_bz_b$ 的位置，如图 9.1.2 - 3 所示。

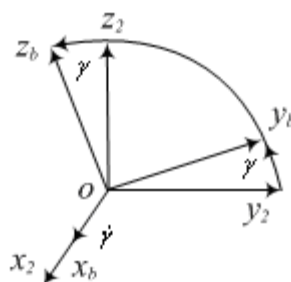


图 9.1.2 - 3 第三次旋转

坐标系 $ox_2y_2z_2$ 与 $ox_by_bz_b$ 之间的方向余弦矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = C_2^b \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (9.1.2 - 3)$$

由 (9.1.2 - 1)、(9.1.2 - 2) 和 (9.1.2 - 3) 式可得：

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = C_2^b C_1^2 C_t^1 \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = C_t^b \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad (9.1.2 - 4)$$

$$C_t^b = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\vartheta & & & & \\ -\cos\psi \sin\vartheta \sin\gamma - \sin\psi \cos\gamma & & & & \\ -\cos\psi \sin\vartheta \cos\gamma + \sin\psi \sin\gamma & & & & \\ \sin\psi \cos\vartheta & \sin\vartheta & & & \\ -\sin\psi \sin\vartheta \sin\gamma + \cos\psi \cos\gamma & \cos\vartheta \sin\gamma & & & \\ -\sin\psi \sin\vartheta \cos\gamma - \cos\psi \sin\gamma & \cos\vartheta \cos\gamma & & & \end{bmatrix} \quad (9.1.2 - 5)$$

式中， ψ 、 ϑ 和 γ 就是上面所说的三个独立参数，一般称为“广义坐标”，具体称为“广义欧拉角”。所以，(9.1.2 - 5) 式具体地描述了方向余弦矩阵与欧拉角的关系。

由以上旋转过程可以看出，第一次旋转有三根轴可选，第二次旋转只有两根轴可选，第三次旋转也有两种选择（第一次的旋转轴，可再选）。所以，三次旋转共有 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 种选择，欧拉角也有 12 种组合。因此，转动前必须明确地规定旋转的次序，而且不可以变更，称这一现象为有限转动的“不可交换性”。由此可知，代数学中的乘法交换率，不能用于矩阵的乘法。另外，由于地理系 $ox_t y_t z_t$ 和载体系 $ox_b y_b z_b$ 的初始取向不同，矩阵 C_b^t 的形式也不同，(9.1.2 - 5) 式只是其中的一种，用来说明推导的思路。

依据方向余弦矩阵的“正交性”，可将 (9.1.2 - 4) 式和 (9.1.2 - 5) 改写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = C_b^t \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (9.1.2 - 6)$$

$$C_b^l = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\vartheta & -\cos\psi \sin\vartheta \sin\gamma - \sin\psi \cos\gamma \\ \sin\psi \cos\vartheta & -\sin\psi \sin\vartheta \sin\gamma + \cos\psi \cos\gamma \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \sin\gamma \\ & -\cos\psi \sin\vartheta \cos\gamma + \sin\psi \sin\gamma \\ & -\sin\psi \sin\vartheta \cos\gamma - \cos\psi \sin\gamma \\ & \cos\vartheta \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (9.1.2 - 7)$$

将 (9.1.2 - 6) 式、(9.1.2 - 7) 式与前面的 (9.1.1 - 9) 式对比后
可知，方向余弦是欧拉角的函数，如果已知方向余弦的数值，查“反
三角函数表”即可得到载体的姿态角 ψ 、 ϑ 和 γ ：

$$\begin{cases} \psi = \arctg(C_{21}/C_{11}) \\ \vartheta = \arcsin C_{31} \\ \gamma = \arctg(C_{32}/C_{33}) \end{cases} \quad (9.1.2 - 8)$$

由于能从 C_b^l 中提取姿态角，所以又称之为“姿态矩阵”。依据该
矩阵，可以将陀螺和加速度计在载体系上测得的数据转换到“数学平
台”（导航系）上，转换后得到的数据等同于在“物理平台”上测得
的数据，随后的导航计算与平台式惯导没有两样。因此，姿态矩阵是
一个十分重要的矩阵。

还需指出的是，三次旋转（有限转动）的转轴，一般来说是非正
交的，三个转角不可以构成矢量 $[\psi \ \vartheta \ \gamma]^T$ 、也不能相加求和。只有
当转角为“无限小”时，三次旋转的转轴近似正交，才可以近似地将
转角作为矢量看待。而且，如果两个直角坐标系的初始取向相同（ x
对 x 、 y 对 y 、 z 对 z ），可以不考虑旋转的次序（乘法次序）。如果初
始取向不相同、即使转角为无限小，也要考虑旋转的次序。

9.2 捷联式惯导系统的机械编排方案

所谓“机械编排方案”，是借用平台式惯导的概念，是惯导系统

技术策划的总称，其中包括：产品的结构布局、坐标系的选取、惯性器件和计算机的选型、以及误差补偿和计算方法等。

与平台式惯导一样，根据导航坐标系的选取不同，捷联式惯导也有解析式、半解析式之分；半解析式又有指北方位、自由方位、游动方位之分。不同的编排方案具有不同的原理方框图，但大同小异。下面仍以“指北方位”为例，来说明半解析式（当地水平）捷联惯导的基本原理，而且不考虑陀螺和加速度计的测量误差，以及载体“随机抖动”造成的干扰。或者说，只考虑“理想的”捷联式惯性导航系统，其基本原理如图 9.2 - 1 所示。

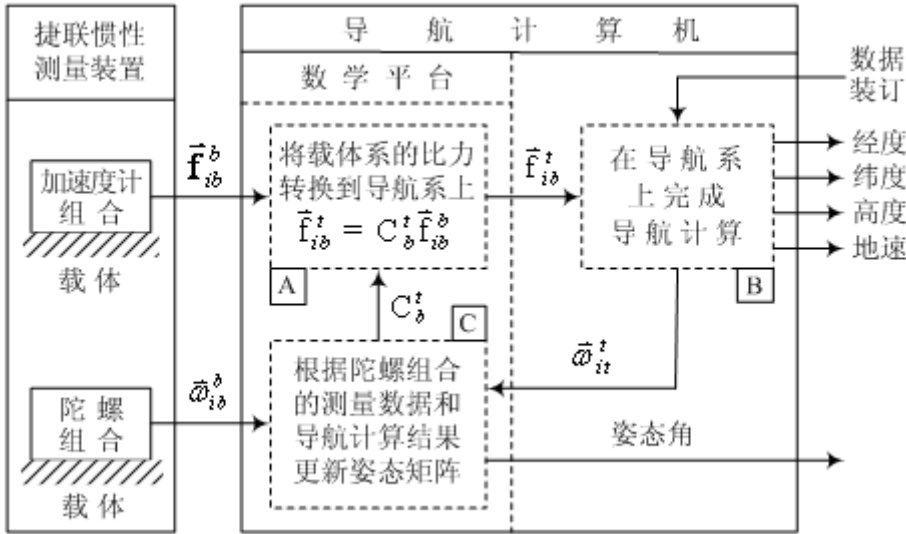


图 9.2 - 1 捷联式惯导的原理框图

为了方便对图的阅读，再对图 9.2 - 1 简要说明如下：

(1) **捷联系统的基本组成：**由图可知，捷联式惯性导航系统由捷联式惯性测量装置（简称“惯测装置”）和导航计算机（包括软件）两部分构成。

惯测装置，又包括加速度计组合和陀螺组合两个部分。加速度计组合，由三个正交配置的加速度计组成，直接固连在载体上；陀螺组

合，通常由三个正交配置的单自由度速率陀螺组成，也直接固连在载体上。

导航计算机，由硬件和软件构成，软件又由三个功能模块组成，如图中的 A 框、B 框、C 框所示。

(2) A 框：也称“坐标变换模块”，接收来自加速度计组合的比力矢量 \bar{f}_{ib}^b ，以及由 C 框提供的方向余弦矩阵（姿态矩阵） C_b^t 。而后，将载体系上的 \bar{f}_{ib}^b 转换到导航系上，并将导航系上的 \bar{f}_{ib}^t 发送给 B 框。

\bar{f}_{ib}^b 是一个空间矢量，是载体（ b ）相对惯性空间（ i ）的运动加速度（视加速度）在 b 系上的投影，如下式所示：

$$\bar{f}_{ib}^b = \begin{bmatrix} a_{ib}^{bx} \\ a_{ib}^{by} \\ a_{ib}^{bz} \end{bmatrix} \quad (9.2 - 1)$$

式中， a_{ib}^{bx} ——沿载体系 x_b 轴安装的加速度计的输出信号；

a_{ib}^{by} ——沿载体系 y_b 轴安装的加速度计的输出信号；

a_{ib}^{bz} ——沿载体系 z_b 轴安装的加速度计的输出信号。

A 框接收的是 b 系上的数据，还需利用姿态矩阵将接收的数据转换到导航系（ t 系）上，如下式所示：

$$\begin{bmatrix} a_{ib}^{tx} \\ a_{ib}^{ty} \\ a_{ib}^{tz} \end{bmatrix} = C_b^t \begin{bmatrix} a_{ib}^{bx} \\ a_{ib}^{by} \\ a_{ib}^{bz} \end{bmatrix} \quad (9.2 - 2)$$

姿态矩阵 C_b^t 的表示式，详见（9.1.2 - 7）式。

(3) B 框：也称“导航计算模块”，接收由外部提供的装订数据（初始速度、初始位置、时统信号、重力场数据等），以及 A 框送来的比力 \bar{f}_{ib}^t 信号，并完成导航计算。随后，再向外部输出导航参数（经度、

纬度、高度、地速等)，并向 C 框发送指令角速率 $\bar{\omega}_u^t$ ，即数学平台（导航系）相对惯性空间的表现运动角速率。

此处的比力矢量 \bar{f}_{ib}^t ，等同于加速度计组合在物理平台上测得的信号，对其进行的导航计算与平台式惯导完全相同。如果捷联系统是指北方位，则可按照第 8 章的数学模型进行计算。由此可知，B 框的功能与平台式惯导完全相同，同样要完成有害加速度的补偿和积分计算，而且还要计算“平台”的表现运动角速率。

(4) C 框：也称“姿态矩阵更新模块”，接收来自陀螺组合的角速率矢量 $\bar{\omega}_{ib}^b$ ，以及由 B 框（导航计算）提供的指令角速率 $\bar{\omega}_u^t$ 。接着，求解矩阵微分方程，得到新的姿态矩阵。随后，再把新的姿态矩阵发送给 A 框，开始新的循环。

由于地球在不停地旋转、载体也在不停地运动，载体系（b 系）与地理系（t 系）之间的空间关系，即姿态矩阵 C_b^t 中的元素随时都在变化，需要即时更新（或者修正）。常用的方法有，欧拉角法、方向余弦法和四元数法，详见下一节。修正开始时的第一个姿态矩阵（初始阵），需要靠初始对准来建立。

另外，还需从姿态矩阵中提取载体的姿态角，供给外部使用。姿态矩阵与姿态角的关系，详见（9.1.2 - 7）式和（9.1.2 - 8）式。

(5) 数学平台：A 框和 C 框共同实现了物理平台的功能，所以称之为“数学平台”、或软件平台。

(6) 修正回路：由图 7.2 - 1 可知，A 框、B 框和 C 框，共同构成了一个闭合回路，其功能相当于平台式惯导系统的修正回路。因此，

同样要满足舒拉谐振条件。

9.3 姿态矩阵的即时更新

捷联系统的姿态矩阵，反映了载体系（b 系）与地理系（t 系）之间的空间关系。然而，载体在不停地运动、地球也在不停地旋转，从而导致两个坐标系之间的关系随时都在变化。因此，必须不失时机地对矩阵中的元素进行修正（即时更新），以确保二者之间的正确关系。这一修正过程，相当于平台表观运动的补偿过程。而修正开始时的第一个姿态矩阵（初始阵），需要靠初始对准来建立。常见的修正方法有，欧拉角法、方向余弦法和四元数法。

9.3.1 欧拉角法（三参数法）

欧拉角是载体系 $ox_b y_b z_b$ 绕坐标原点相对地理系 $ox_t y_t z_t$ 旋转三次得到的，由图 9.1.2 - 1 可知， ψ 与 z_t 轴重合，由此得到定义在地理系上的列向量 $[0 \ 0 \ \dot{\psi}]^T$ ，再根据（9.1.2 - 4）式和（9.1.2 - 5）式，可得 $\dot{\psi}$ 在载体系上的投影：

$$\begin{bmatrix} \omega_{\dot{\psi}}^{bx} \\ \omega_{\dot{\psi}}^{by} \\ \omega_{\dot{\psi}}^{bz} \end{bmatrix} = C_t^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (9.3.1 - 1)$$

由图 9.1.2 - 2 可知， $\dot{\vartheta}$ 与 y_1 轴的负向重合，由此得到定义在坐标系 $x_1 y_1 z_1$ 上的列向量 $[0 \ -\dot{\vartheta} \ 0]^T$ ，再根据（9.1.2 - 2）式和（9.1.2 - 3）式，可得到 $\dot{\vartheta}$ 在载体系上的投影：

$$\begin{bmatrix} \omega_{\dot{\vartheta}}^{bx} \\ \omega_{\dot{\vartheta}}^{by} \\ \omega_{\dot{\vartheta}}^{bz} \end{bmatrix} = C_2^b C_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\vartheta} \cos \gamma \\ \dot{\vartheta} \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (9.3.1 - 2)$$

由图 9.1.2 - 3 可知, $\dot{\gamma}$ 与 x_2 轴重合, 由此得到定义在坐标系 $x_2y_2z_2$ 上的列向量 $[\dot{\gamma} \ 0 \ 0]^T$, 再根据 (9.1.2 - 3) 式, 可得到 $\dot{\gamma}$ 在载体系上的投影:

$$\begin{bmatrix} \omega_{\dot{\gamma}}^{bx} \\ \omega_{\dot{\gamma}}^{by} \\ \omega_{\dot{\gamma}}^{bz} \end{bmatrix} = C_2^b \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.3.1 - 3)$$

将上面的三个式子相加、并稍加整理后, 可以得到三次旋转的角速率在载体系上的投影:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_{tb}^{bx} \\ \omega_{tb}^{by} \\ \omega_{tb}^{bz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{\dot{\psi}}^{bx} \\ \omega_{\dot{\psi}}^{by} \\ \omega_{\dot{\psi}}^{bz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{\dot{\vartheta}}^{bx} \\ \omega_{\dot{\vartheta}}^{by} \\ \omega_{\dot{\vartheta}}^{bz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{\dot{\gamma}}^{bx} \\ \omega_{\dot{\gamma}}^{by} \\ \omega_{\dot{\gamma}}^{bz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin\vartheta & 0 & 1 \\ \cos\vartheta\sin\gamma & -\cos\gamma & 0 \\ \cos\vartheta\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = C_{\dot{\psi}\dot{\vartheta}\dot{\gamma}}^b \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.3.1 - 4)$$

对上式两端同时左乘以 $[C_{\dot{\psi}\dot{\vartheta}\dot{\gamma}}^b]^{-1}$, 并“求逆”后得:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} &= [C_{\dot{\psi}\dot{\vartheta}\dot{\gamma}}^b]^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{tb}^{bx} \\ \omega_{tb}^{by} \\ \omega_{tb}^{bz} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos\vartheta} \begin{bmatrix} 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \\ 0 & -\cos\vartheta\cos\gamma & \cos\vartheta\sin\gamma \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta\sin\gamma & -\sin\vartheta\cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{tb}^{bx} \\ \omega_{tb}^{by} \\ \omega_{tb}^{bz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.3.1 - 5)$$

求解 (9.3.1 - 5) 式中的三个微分方程便可得到三个欧拉角, 所以又称欧拉角法为“三参数法”。再将 ψ 、 ϑ 和 γ 代入到 (9.1.2 - 7) 式中, 便可得到所需的姿态矩阵 C_b^t 。

对比 (9.3.1 - 4) 式和 (9.3.1 - 5) 式可知, $[C_{\dot{\psi}\dot{\vartheta}\dot{\gamma}}^b]^{-1} \neq [C_{\dot{\psi}\dot{\vartheta}\dot{\gamma}}^b]^T$, 所以 $C_{\dot{\psi}\dot{\vartheta}\dot{\gamma}}^b$ 不是正交矩阵, 但由它得到的 C_b^t 却永远是正交矩阵。当采用 C_b^t 对加速度信号进行坐标变换时, 在得到的信息中没有“非正交

误差”，所以不需要对姿态矩阵进行“正交化”处理。

请注意，坐标系的选取不同，所得到的方程也不同，不可以生搬硬套。与图 7.1 - 1 对应的方程和矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} \omega_{tb}^{bx} \\ \omega_{tb}^{by} \\ \omega_{tb}^{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\vartheta & 0 & 1 \\ \cos\vartheta\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\cos\vartheta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (9.3.1 - 6)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\vartheta} \begin{bmatrix} 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \cos\vartheta\sin\gamma & \cos\vartheta\cos\gamma \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta\cos\gamma & \sin\vartheta\sin\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{tb}^{bx} \\ \omega_{tb}^{by} \\ \omega_{tb}^{bz} \end{bmatrix} \quad (9.3.1 - 7)$$

可见，矩阵中的元素是有区别的。

还需指出的是，姿态角速率 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\vartheta}$ 和 $\dot{\gamma}$ 在空间的指向一般来说是非正交的，而且总是在快速地变化，所以在对它们进行数值积分（求解矩阵微分方程）时，积分区间（计算机的采样周期）必须足够小，否则会带来较大的“不可交换误差”。或者说，该项误差是由于有限转动的“不可交换性”造成的，转动的顺序不同，姿态角的提取公式也不同。不过，如果采样周期（积分区间）足够小，那么可以认为在一个采样周期内三个转角也足够小，转动顺序可以交换性，该项误差就可忽略不计。由此可知，不可交换误差的本质，是姿态矩阵的更新速率跟不上载体角速率的快速变化造成的，特别是高机动性的载体更是如此（例如，战斗机和地空导弹）。假设在某一时刻，载体的姿态突然发生剧烈的变化（其角速率足够大），如果仍将矩阵中的元素作为常值进行计算，必将导致较大的计算误差。而且，该项误差将一直传递下去、直到导航任务的最终完成，从而导致更大的定位误差。这是因为，捷联式惯导系统也是航位推算系统，用当前时刻的姿态矩阵

推算下一时刻的姿态矩阵，随着推算次数（时间）的增加，其误差是累积的。

9.3.2 方向余弦法（九参数法）

方向余弦矩阵 C_b^t 和 C_t^b ，表征的是载体系与地理系之间的静态关系，如果要对其中的元素进行更新，就必须研究这两个坐标系之间的动态关系。在研究两个坐标系的动态关系时，总是假设地理系不动，载体系绕坐标原点相对地理系旋转，旋转的角速率为 $\bar{\omega}_{ib}^b$ 。那么，任意的固定矢量 \bar{r} 在这两个坐标系上的投影可表示为：

$$\begin{cases} \bar{r}^t = r_x^t \bar{i}_t + r_y^t \bar{j}_t + r_z^t \bar{k}_t = [r_x^t & r_y^t & r_z^t]^T \\ \bar{r}^b = r_x^b \bar{i}_b + r_y^b \bar{j}_b + r_z^b \bar{k}_b = [r_x^b & r_y^b & r_z^b]^T \end{cases} \quad (9.3.2 - 1)$$

式中， \bar{i}_t 、 \bar{j}_t 和 \bar{k}_t ，分别为 x_t 轴、 y_t 轴和 z_t 轴上的单位矢量；

\bar{i}_b 、 \bar{j}_b 和 \bar{k}_b ，分别为 x_b 轴、 y_b 轴和 z_b 轴上的单位矢量。

再根据“绝对导数”和“相对导数”的关系可得：

$$\left[\frac{d\bar{r}^t}{dt} \right]_t = \left[\frac{d\bar{r}^b}{dt} \right]_b + \bar{\omega}_{ib}^b \times \bar{r}^b \quad (9.3.2 - 2)$$

由于预先假设地理系和矢量 \bar{r} 均不动，只有载体系旋转。所以，

\bar{r}^t 为常值， $\left[\frac{d\bar{r}^t}{dt} \right]_t = 0$ ，由此可得：

$$\left[\frac{d\bar{r}^b}{dt} \right]_b = -(\bar{\omega}_{ib}^b \times \bar{r}^b) \quad (9.3.2 - 3)$$

再借用解析几何的“矢量叉乘”公式，可得：

$$\bar{\omega}_{ib}^b \times \bar{r}^b = \begin{vmatrix} \bar{i}_b & \bar{j}_b & \bar{k}_b \\ \omega_{ib}^{bx} & \omega_{ib}^{by} & \omega_{ib}^{bz} \\ r_x^b & r_y^b & r_z^b \end{vmatrix} \quad (9.3.2 - 4)$$

考虑到单位矢量的如下特性：

$$\begin{cases} \vec{i}_b \times \vec{i}_b = \vec{j}_b \times \vec{j}_b = \vec{k}_b \times \vec{k}_b = 0 \\ \vec{i}_b \times \vec{j}_b = -\vec{j}_b \times \vec{i}_b = \vec{k}_b \\ \vec{j}_b \times \vec{k}_b = -\vec{k}_b \times \vec{j}_b = \vec{i}_b \\ \vec{k}_b \times \vec{i}_b = -\vec{i}_b \times \vec{k}_b = \vec{j}_b \end{cases} \quad (9.3.2-5)$$

将 (9.3.2-4) 式展开、并略加整理后得：

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{tb}^b \times \vec{r}^b &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{tb}^{bz} & \omega_{tb}^{by} \\ \omega_{tb}^{bz} & 0 & -\omega_{tb}^{bx} \\ -\omega_{tb}^{by} & \omega_{tb}^{bx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x^b \\ r_y^b \\ r_z^b \end{bmatrix} \\ &= \Omega_{tb}^b \begin{bmatrix} r_x^b \\ r_y^b \\ r_z^b \end{bmatrix} = \Omega_{tb}^b \vec{r}^b \end{aligned} \quad (9.3.2-6)$$

$$\Omega_{tb}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{tb}^{bz} & \omega_{tb}^{by} \\ \omega_{tb}^{bz} & 0 & -\omega_{tb}^{bx} \\ -\omega_{tb}^{by} & \omega_{tb}^{bx} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.3.2-7)$$

由于 $[\Omega_{tb}^b]^T = -\Omega_{tb}^b$ ，所以称为“反对称矩阵”、或“斜对称矩阵”

(反对称矩阵的定义为： $A^T = -A$)，且具有如下重要特性：

$$[\Omega_{tb}^b]^{-1} = [\Omega_{tb}^b]^T = -\Omega_{tb}^b \quad (9.3.2-8)$$

将 (9.3.2-6) 式代入 (9.3.2-3) 可得：

$$\dot{\vec{r}}^b = -\Omega_{tb}^b \vec{r}^b \quad (9.3.2-9)$$

另外，由 (9.1.2-4) 式可知， $\vec{r}^b = C_t^b \vec{r}^t$ ，再对两边求导可得：

$$\dot{\vec{r}}^b = \dot{C}_t^b \vec{r}^t + C_t^b \dot{\vec{r}}^t \quad (9.3.2-10)$$

由于 \vec{r}^t 为常值，所以 $\dot{\vec{r}}^t = 0$ ，于是：

$$\dot{\vec{r}}^b = \dot{C}_t^b \vec{r}^t \quad (9.3.2-11)$$

再由 (9.1.2-6) 式可知， $\vec{r}^t = C_b^t \vec{r}^b$ ，代入 (9.3.2-11) 式可得：

$$\dot{\vec{r}}^b = \dot{C}_t^b C_b^t \vec{r}^b \quad (9.3.2-12)$$

对比 (9.3.2-12) 式和 (9.3.2-9) 式，并消去 \vec{r}^b 后可得：

$$-\Omega_{tb}^b = \dot{C}_t^b C_b^t \quad (9.3.2 - 13)$$

再根据正交矩阵和反对称矩阵的特性，可将上式改写为：

$$\dot{C}_t^b = -\Omega_{tb}^b C_t^b \quad (9.3.2 - 14)$$

$$\text{或者} \quad \dot{C}_b^t = C_b^t \Omega_{tb}^b \quad (9.3.2 - 15)$$

上面的（9.3.2 - 14）式和（9.3.2 - 15）式，就是所求的姿态矩阵微分方程，也是较为常见的两种表示形式，但（9.3.2 - 15）式更为常用。由于姿态矩阵中含有九个方向余弦元素，需要求解九个微分方程，所以又称方向余弦法为“九参数法”。

另外，由图 9.2 - 1 可知，在对姿态矩阵求解时，最方便得到的是陀螺组合测得的 $\bar{\omega}_{ib}^b$ ，以及导航计算得到的 $\bar{\omega}_{it}^t$ 。而建立反对称矩阵 Ω_{tb}^b 时，所需的却是 $\bar{\omega}_{tb}^b$ ，显然不够方便、需要改进。由角速度合成定理可知，三者之间的关系如下：

$$\bar{\omega}_{ib}^b = \bar{\omega}_{it}^b + \bar{\omega}_{tb}^b \quad (9.3.2 - 16)$$

请注意，式中的 $\bar{\omega}_{it}^b$ 与导航计算得到的 $\bar{\omega}_{it}^t$ 不在同一个坐标系上，必须转换到同一个坐标系上，才可以进行运算。利用（9.3.2 - 16）式和（9.3.2 - 7）式，可推导出如下关系式：

$$\Omega_{tb}^b = \Omega_{ib}^b - \Omega_{it}^b \quad (9.3.2 - 17)$$

除此之外，还需利用反对称矩阵的“相似变换”，将 t 系上的 Ω_{it}^t 转换到 b 系上得到 Ω_{it}^b ，如下式所示（证明从略）：

$$\Omega_{it}^b = C_t^b \Omega_{it}^t C_b^t \quad (9.3.2 - 18)$$

再将（9.3.2 - 17）和（9.3.2 - 18）式代入（9.3.2 - 15）式，便可得到改进后的矩阵微分方程如下：

$$\dot{C}_b^t = C_b^t \Omega_{ib}^b - \Omega_{it}^t C_b^t \quad (9.3.2 - 19)$$

上式就是方向余弦法用于编程的数学模型，等式右端的第一项是角速率 $\bar{\omega}_{ib}^b$ 的函数，由于 $\bar{\omega}_{ib}^b$ 是由陀螺组合直接测得的载体相对惯性空间的角速率，其数值通常比较大，故要求计算机的运算速度较高（采样周期较短）。而等式右端的第二项是角速率 $\bar{\omega}_{it}^t$ 的函数，而 $\bar{\omega}_{it}^t$ 是数学平台相对惯性空间的表观运动角速率，其数值相对较小，可适当放宽对计算速度的要求（采用较长的采样周期）。

9.3.3 四元数法（四参数法）

(1) 四元数的基本概念：

四元数的概念，早在 1943 年首先由哈密尔顿提出，但长时间没有得到应用，直到上世纪的六十年代，由于捷联技术的快速发展才真正获得了实际应用。

为了便于理解，首先回顾一下复数（二元数）的概念。复数 $Z = R + jI$ 具有实数部分 R 和虚数部分 I ，其中的 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位，也表示坐标轴的单位矢量 \bar{j} 。在解析几何中，常用复数来表示二维平面的矢量，如图 9.3.3 - 1 所示。

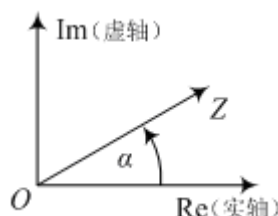


图 9.3.3 - 1 复数与二维矢量

由图可知，复数 Z 还可表示成如下形式：

$$Z = R + jI = |Z| \cos \alpha + j|Z| \sin \alpha = |Z| e^{j\alpha}$$

$$Z^2 = R^2 + I^2$$

将复数的虚数部分推广，便可得到四元数：

$$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (9.3.3 - 1)$$

式中， i 、 j 、 k 为四元数的三个虚数单位，共同构成一个“正交基”；

q_0 、 q_1 、 q_2 、 q_3 是四个实数， q_0 为实部、其余为虚部。

由上式可知：四元数与复数的形式类似，所以也称为“超复数”；
三维空间的矢量，可以看作实部 $q_0 = 0$ 的四元数。

四元数的三个虚数单位相乘，遵守以下规则：

$$\begin{cases} i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1 \\ i \cdot j = -j \cdot i = k \\ j \cdot k = -k \cdot j = i \\ k \cdot i = -i \cdot k = j \end{cases}$$

除了虚数的乘法规则外，四元数还具有其它运算规则，特别是两个四元数相乘，既不同于虚数相乘、也不同于矢量相乘，下面将单独给予说明。至于四元数的其它特性及其运算规则，相对比较简单、不难理解，不再重述，请查阅张树侠和孙静编著的《捷联式惯性导航系统》（国防工业出版社）第三章第 1 节的相关内容。

假设，有两个四元数 P 和 Q 分别为：

$$\begin{cases} P = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \\ Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \end{cases} \quad (9.3.3 - 2)$$

它们的乘积可表示如下：

$$\begin{aligned} P \cdot Q &= (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + q_0(p_1 i + p_2 j + p_3 k) + \\ &\quad + p_0(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

式中，行列式之前的部分，符合虚数相乘的运算规则；行列式本身则

表征了两个矢量的“叉乘积”。将行列式展开，并略加整理后可得：

$$\begin{aligned} P \cdot Q &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2)i + \\ &\quad + (p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3)j + (p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1)k \\ &= n_0 + n_1 i + n_2 j + n_3 k \end{aligned}$$

由上式可知，两个四元数的乘积，得到另一个新的四元数 N ：

$$N = P \cdot Q = n_0 + n_1 i + n_2 j + n_3 k \quad (9.3.3 - 3)$$

$$\text{式中, } \begin{cases} n_0 = p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 \\ n_1 = p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2 \\ n_2 = p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3 \\ n_3 = p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1 \end{cases} \quad (9.3.3 - 4)$$

如果将三个四元数 P 、 Q 、 N 表示成列向量的形式：

$$P(p) = [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3]^T$$

$$Q(q) = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$$

$$N(n) = [n_0 \ n_1 \ n_2 \ n_3]^T$$

那么，(9.3.3 - 4) 式可改写成矩阵形式，如下式所示：

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = M(p) \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{并记为, } N(n) = P \cdot Q = M(p) Q(q) \quad (9.3.3 - 5)$$

此外，根据 (9.3.3 - 4) 式还可以写出另外一种矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = M^\#(q) \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{记为, } N(n) = P \cdot Q = M^\#(q) P(p) \quad (9.3.3 - 6)$$

上面的 (9.3.3 - 5) 式和 (9.3.3 - 6) 式，就是用矩阵形式表示的四元数乘法公式。式中的 $M(p)$ 和 $M^\#(q)$ 均为 4×4 方阵，如果去除

其中的第一行和第一列,剩余的 3×3 方阵,称为上述4阶方阵的“核”。对比 $M(p)$ 和 $M^\#(q)$ 的“核”可以发现,这两个 3×3 方阵,除元素符号不同外,二者互为转置矩阵。

由以上推算过程可知,四元数乘法不符合交换率,但符合分配率和结合率。

(2) 转动坐标系的四元数描述:

在研究刚体的转动时,通常将刚体与动坐标系固连,刚体的空间位置可通过绕坐标原点的三次转动来实现(方向余弦法),也可通过绕“瞬时轴”的一次转动达到同样的目的,如图9.3.3-2所示。

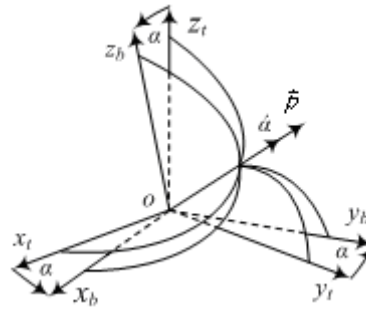


图 9.3.3 - 2 转动坐标系

图中, \bar{p} 表示瞬时转轴的单位矢量, α 表示转过的角度。则动坐标系(或刚体)的方位可以由 \bar{p} 和 α 唯一地确定,用这两个参数可以构成一个四元数:

$$\begin{aligned} Q &= \cos \frac{\alpha}{2} + p_x \sin \frac{\alpha}{2} i + p_y \sin \frac{\alpha}{2} j + p_z \sin \frac{\alpha}{2} k \\ &= \cos \frac{\alpha}{2} + \bar{p} \sin \frac{\alpha}{2} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \end{aligned} \quad (9.3.3 - 7)$$

上式给出了四元数的三种表示方式,式中的 i 、 j 、 k 为四元数的三个虚数单位; p_x 、 p_y 、 p_z 为单位矢量 \bar{p} 在参考坐标系上的投影,记为 $\bar{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ 。由于 \bar{p} 为单位矢量,其长度等于1,于是有:

$$L_p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = 1 \quad (9.3.3 - 8)$$

根据 (9.3.3 - 7) 式，可以计算四元数 Q 的长度 L_Q （也叫四元数的“模”、或“范数”），如下式所示：

$$\begin{aligned} L_Q &= \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ &= \sqrt{\left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (p_x \sin \frac{\alpha}{2})^2 + (p_y \sin \frac{\alpha}{2})^2 + (p_z \sin \frac{\alpha}{2})^2} \\ &= \sqrt{\left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} = 1 \end{aligned} \quad (9.3.3 - 9)$$

由此可知，用 (9.3.3 - 7) 式定义的四元数为单位四元数，另记为 $A = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ，并称之为“规范化”四元数。由于规范化四元数 A 可用于坐标变换，所以又叫“变换四元数”。

(3) 转动矢量的四元数描述：

假设，任意矢量 \vec{r} 在参考坐标系上的分量形式为：

$$\vec{r} = r_x^t \vec{i}_t + r_y^t \vec{j}_t + r_z^t \vec{k}_t \quad (9.3.3 - 10)$$

与其对应的四元数如下：

$$\begin{aligned} R &= 0 + r_x^t i + r_y^t j + r_z^t k \\ &= 0 + r \end{aligned} \quad (9.3.3 - 11)$$

称四元数 R 为三维空间矢量 \vec{r} 在四维空间的“映像”，如果单位矢量 \vec{i}_t 、 \vec{j}_t 、 \vec{k}_t 与虚数单位 i 、 j 、 k （四元数的基）重合，那么四元数 R 的虚数部分 r 就是三维空间的矢量 \vec{r} 。

在此进一步假设，任意矢量 \vec{r} 绕过定点 o 的某一瞬时轴 \vec{p} 旋转了任意角度 α ，转动后的矢量用 \vec{r}' 表示，如图 9.3.3 - 3 所示。

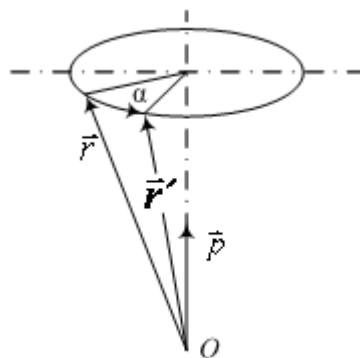


图 9.3.3 - 3 转动矢量

参照 (9.3.3 - 7) 式的格式, 该图对应的变换四元数为:

$$A = \cos \frac{\alpha}{2} + \bar{p} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (9.3.3 - 12)$$

可以证明, 从 \bar{r} 到 \bar{r}' 的转换关系可以用 “变换四元数” A 表示如下:

$$\bar{r}' = A \bar{r} A^* \quad (9.3.3 - 13)$$

上式的证明, 请查阅张树侠和孙静编著的《捷联式惯性导航系统》第三章第 1 节的相关内容。

式中的 A^* 是 A 的共轭四元数, 如下式所示:

$$A^* = \cos \frac{\alpha}{2} - \bar{p} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (9.3.3 - 14)$$

由于 A 是单位四元数, 有下式成立:

$$A A^* = A^* A = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (9.3.3 - 15)$$

对 (9.3.3 - 13) 式的两端分别左乘以 A^* 、右乘以 A , 可得:

$$A^* \bar{r}' A = A^* A \bar{r} A^* A$$

由于 $A A^* = A^* A = 1$, 于是得到:

$$\bar{r} = A^* \bar{r}' A \quad (9.3.3 - 16)$$

上面的 (9.3.3 - 13) 式和 (9.3.3 - 16) 式, 就是转动矢量的四元数描述公式。

(4) 四元数与坐标变换:

在捷联式惯导系统中, 每一个陀螺和加速度计的测量值均可视为

一个三维矢量的分量，而且总是与其所在的坐标轴重合，但数值的大小（矢量的长度）是变化的。因此，由陀螺组合测得的三维矢量 $\bar{\omega}_{ib}^b$ ，以及由加速度计组合测得的三维矢量 \bar{f}_{ib}^b ，相对载体系（ b 系）的方向和大小均是变化的。但在一个采样周期内（一瞬间），可将 $\bar{\omega}_{ib}^b$ 和 \bar{f}_{ib}^b 视为常量，而且与 b 系固连，从而可将它们视为“旋转矢量”，并采用任意矢量 \bar{r} 取代它们来研究四元数的坐标变换问题。为此假设，任意矢量 \bar{r} 在 t 系和 b 系上的分量形式如下：

$$\bar{r} = r_x^t \bar{i}_t + r_y^t \bar{j}_t + r_z^t \bar{k}_t = \bar{r}^t \quad (9.3.3 - 17)$$

$$\bar{r} = r_x^b \bar{i}_b + r_y^b \bar{j}_b + r_z^b \bar{k}_b = \bar{r}^b \quad (9.3.3 - 18)$$

由于 \bar{r} 、 \bar{r}^t 、 \bar{r}^b 是同一个矢量，所以：

$$\bar{r} = \bar{r}^t = \bar{r}^b \quad (9.3.3 - 19)$$

以上三个式子的空间关系，可以用图 9.3.3 - 4 来表示。

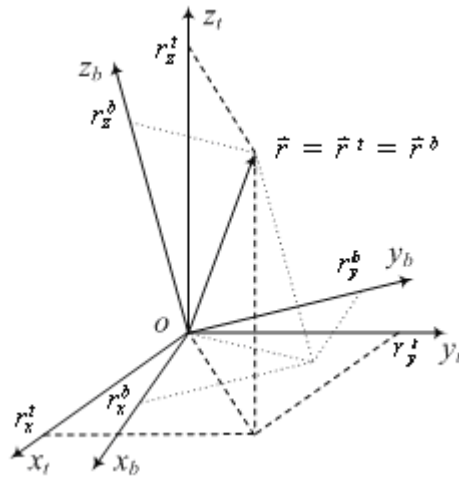


图 9.3.3 - 4 同一矢量在不同坐标系中的投影

再由前面的图 9.3.3 - 2 可知， t 系统“瞬时轴 \bar{p} ”旋转一个角度 α 后、到达 b 系的位置，相当于三个单位矢量 \bar{i}_t 、 \bar{j}_t 、 \bar{k}_t 在同时旋转，分别到达 \bar{i}_b 、 \bar{j}_b 、 \bar{k}_b 的位置。由（9.3.3 - 13）式可知：

$$\begin{cases} \bar{i}_b = A \bar{i}_t A^* \\ \bar{j}_b = A \bar{j}_t A^* \\ \bar{k}_b = A \bar{k}_t A^* \end{cases} \quad (9.3.3 - 20)$$

将 (9.3.3 - 20) 式代入 (9.3.3 - 18) 式，可得：

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r_x^b A \bar{i}_t A^* + r_y^b A \bar{j}_t A^* + r_z^b A \bar{k}_t A^* \\ &= A(r_x^b \bar{i}_t + r_y^b \bar{j}_t + r_z^b \bar{k}_t) A^* \end{aligned} \quad (9.3.3 - 21)$$

再由 (9.3.3 - 11) 式的注释可知，由于单位矢量 \bar{i}_t 、 \bar{j}_t 、 \bar{k}_t 与四元数的基 i 、 j 、 k 重合，那么上式中的括号部分可改写为：

$$r_x^b \bar{i}_t + r_y^b \bar{j}_t + r_z^b \bar{k}_t = 0 + r_x^b i_t + r_y^b j_t + r_z^b k_t = R_b \quad (9.3.3 - 22)$$

代入 (9.3.3 - 21) 式，可得 $\bar{r} = A R_b A^*$ 。其中， R_b 为四元数、是矢量 \bar{r}^b 在四维空间的“映像”。

再来看 (9.3.3 - 17) 式，由于 \bar{r}^t 的单位矢量与四元数的基、原本就是重合的，所以无需转换，可直接改写成四元数的形式：

$$r_x^t \bar{i}_t + r_y^t \bar{j}_t + r_z^t \bar{k}_t = 0 + r_x^t i_t + r_y^t j_t + r_z^t k_t = R_t \quad (9.3.3 - 23)$$

式中， R_t 是四元数，与矢量 \bar{r} 相对应。

将 (9.3.3 - 23) 式和 (9.3.3 - 22) 式代入 (9.3.3 - 21) 式可得：

$$R_t = A R_b A^* \quad (9.3.3 - 24)$$

对 (9.3.3 - 24) 式的两端分别左乘以 A^* 、右乘以 A ，再次应用 $A^* A = 1$ ，稍加整理后可得：

$$R_b = A^* R_t A \quad (9.3.3 - 25)$$

上面的 (9.3.3 - 24) 式和 (9.3.3 - 25) 式，就是用四元数描述的坐标变换公式，也称为“四元数变换定理”，它们与方向余弦矩阵表示的变换式之间具有如下对应关系：

$$\begin{aligned} R_b &= A^* R_t A \quad \leftrightarrow \quad \bar{r}^b = C_t^b \bar{r}^t \\ R_t &= A R_b A^* \quad \leftrightarrow \quad \bar{r}^t = C_b^t \bar{r}^b \end{aligned}$$

(5) 四元数与方向余弦的关系:

由于四元数的乘法符合“结合率”，借用前面（9.3.3 - 5）式的结论，可将（9.3.3 - 25）式改写成矩阵形式：

$$R_b = A^* R_t A = A^* (R_t A) = M(A^*) (R_t A)$$

再借用前面（9.3.3 - 6）式的结论，可进一步将 $(R_t A)$ 改写成矩阵形式，于是可得：

$$\begin{aligned} R_b &= A^* R_t A = A^* (R_t A) \\ &= M(A^*) (R_t A) \\ &= M(A^*) M^\#(A) R_t \end{aligned} \quad (9.3.3 - 26)$$

由（9.3.3 - 22）式可知，

$$R_b = 0 + x_b i + y_b j + z_b k = [0 \ x_b \ y_b \ z_b]^T$$

由（9.3.3 - 23）式可知，

$$R_t = 0 + x_t i + y_t j + z_t k = [0 \ x_t \ y_t \ z_t]^T$$

再令， $A = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T$

$$A^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k = [a_0 \ -a_1 \ -a_2 \ -a_3]^T$$

对照（9.3.3 - 5）式的矩阵 $M(p)$ ，将 A^* 代入 $M(A^*)$ 可得：

$$M(A^*) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

对照（9.3.3 - 6）式的矩阵 $M^\#(q)$ ，将 A 代入 $M^\#(A)$ 可得：

$$M^{\#}(A) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

再将 R_b 、 R_t 、 $M(A^*)$ 和 $M^{\#}(A)$ 代入 (9.3.3 - 26) 式可得：

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

将上式展开可得：

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1a_2 - a_0a_3) & 2(a_0a_3 + a_1a_2) \\ 0 & 2(a_1a_2 - a_0a_3) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_0a_1 + a_2a_3) \\ 0 & 2(a_0a_3 + a_1a_2) & 2(a_2a_3 - a_0a_1) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

去掉矩阵中的第一行和第一列，可得其“核”，上式也简化为：

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = C_t^b \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \\ 2(a_1a_2 - a_0a_3) \\ 2(a_0a_3 + a_1a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad (9.3.3 - 27)$$

除了上面的算法之外，还可将 R_b 、 R_t 、 A 和 A^* 直接代入到 (9.3.3 - 24) 式中去，并按照四元数的运算规则展开后可得：

$$\begin{aligned} R_t &= A R_b A^* \\ &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)(0 + x_b i + y_b j + z_b k)(a_0 - a_1i - a_2j - a_3k) \\ &= [(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)x_b + 2(a_1a_2 - a_0a_3)y_b + 2(a_0a_2 + a_1a_3)z_b]i + \\ &\quad [2(a_0a_3 + a_1a_2)x_b + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)y_b + 2(a_2a_3 - a_0a_1)z_b]j + \\ &\quad [2(a_1a_3 - a_0a_2)x_b + 2(a_0a_1 + a_2a_3)y_b + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)z_b]k \end{aligned}$$

再将上式改写成矩阵形式可得：

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = C_b^t \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_0 a_3 + a_1 a_2) & 2(a_1 a_3 - a_0 a_2) \\ 2(a_1 a_2 - a_0 a_3) & 2(a_0 a_2 + a_1 a_3) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \\ 2(a_0 a_1 + a_2 a_3) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & 2(a_2 a_3 - a_0 a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (9.3.3 - 28)$$

对比（9.3.3 - 27）式和（9.3.3 - 28）式可知，其中的“核”（3×3 方阵）互为转置矩阵。另外还可知，（9.3.3 - 27）式与前面的方向余弦矩阵（9.1.2 - 5）式相对应，（9.3.3 - 28）式与前面的方向余弦矩阵（9.1.2 - 7）式相对应。如果已知“变换四元数 A”的四个元，便可求出方向余弦矩阵的九个元素值。反之亦然，如果已知方向余弦矩阵的元素值，也可求出变换四元数的四个元。

（6）转动四元数的微分方程

以上有关四元数的论述，均假设四元数为常数。但实际上，载体系相对导航系在不停地旋转，两个坐标系之间的变换四元数 A 是时间的函数，记为 A(t)。同样，在 (t + Δt) 时刻，变换四元数可表示成 A(t + Δt)，于是可以给出 A(t) 的导数的定义式如下：

$$\dot{A}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad (9.3.3 - 29)$$

式中，A(t + Δt) 是从 A(t₀) 开始，经过两次旋转得到的，如图 9.3.3 - 5 所示。

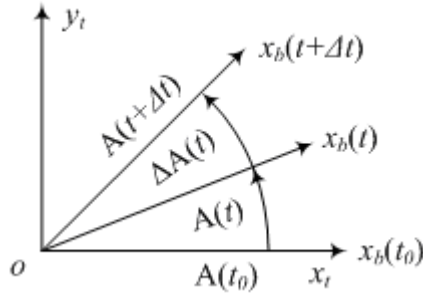


图 9.3.3 - 5 转动四元数的示意图

根据转动四元数的定理，最后得到的四元数是前两次转动四元数的乘积，于是有下面的关系式成立（请注意乘法的次序，而且可推广到多次旋转）：

$$A(t + \Delta t) = \Delta A(t) \cdot A(t) \quad (9.3.3 - 30)$$

在 Δt 时间内，b 系转过的角度为： $\Delta\alpha = \omega'_{tb}\Delta t$ ，再参照（9.3.3 - 7）式的四元数格式，可得到 $\Delta A(t)$ ：

$$\Delta A(t) = \cos \frac{\Delta\alpha}{2} + \bar{p} \sin \frac{\Delta\alpha}{2}$$

由于 Δt 很小、 $\Delta\alpha$ 为小量，所以 $\cos \frac{\Delta\alpha}{2} \approx 1$ 、 $\sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$ ，将它们代入上式可得：

$$\Delta A(t) = 1 + \bar{p} \left(\frac{\Delta\alpha}{2} \right) \quad (9.3.3 - 31)$$

式中， $\bar{p}\Delta\alpha = \bar{p}\omega'_{tb}\Delta t$ 。其中， \bar{p} 是沿旋转轴的单位矢量、表示旋转方向；而 $\bar{p}\omega'_{tb} = \bar{\omega}'_{tb}$ 是与旋转轴重合的角速率矢量。由此，可定义一个与角速率矢量 $\bar{\omega}'_{tb}$ 对应的四元数 Ω'_{tb} ，如下式所示：

$$\Omega'_{tb} = 0 + \omega'^{tx}_{tb}i + \omega'^{ty}_{tb}j + \omega'^{tz}_{tb}k \quad (9.3.3 - 32)$$

将 $\bar{p}\Delta\alpha = \bar{p}\omega'_{tb}\Delta t = \bar{\omega}'_{tb}\Delta t$ 置换成 $\Omega'_{tb}\Delta t$ ，并代入（9.3.3 - 31）式可得：

$$\Delta A(t) = 1 + \frac{1}{2} \Omega'_{tb} \Delta t \quad (9.3.3 - 33)$$

先将 (9.3.3 - 33) 式代入 (9.3.3 - 30) 式、然后再代入 (9.3.3 - 29) 式，并稍加整理后可得：

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} \Omega_{tb}^t A(t) \quad (9.3.3 - 34)$$

上式就是所求的四元数微分方程，式中的 $A(t)$ 是变换四元数， Ω_{tb}^t 是与角速率矢量 $\bar{\omega}_{tb}^t$ 对应的四元数，如 (9.3.3 - 32) 式所示。再参照 (9.3.3 - 5) 式，可将 (9.3.3 - 34) 式改写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_0 \\ \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{tb}^{tx} & -\omega_{tb}^{ty} & -\omega_{tb}^{tz} \\ \omega_{tb}^{tx} & 0 & -\omega_{tb}^{tz} & \omega_{tb}^{ty} \\ \omega_{tb}^{ty} & \omega_{tb}^{tz} & 0 & -\omega_{tb}^{tx} \\ \omega_{tb}^{tz} & -\omega_{tb}^{ty} & \omega_{tb}^{tx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (9.3.3 - 35)$$

为了方便应用，在此不加证明再给出四元数微分方程的另外一种表示方式，如下式所示：

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} A(t) \Omega_{tb}^b$$

再参照 (9.3.3 - 6) 式，可将上式改写成矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_0 \\ \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{tb}^{bx} & -\omega_{tb}^{by} & -\omega_{tb}^{bz} \\ \omega_{tb}^{bx} & 0 & \omega_{tb}^{bz} & -\omega_{tb}^{by} \\ \omega_{tb}^{by} & -\omega_{tb}^{bz} & 0 & \omega_{tb}^{bx} \\ \omega_{tb}^{bz} & \omega_{tb}^{by} & -\omega_{tb}^{bx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (9.3.3 - 36)$$

对比 (9.3.3 - 35) 式和 (9.3.3 - 36) 式可知，两个 4×4 方阵的“核”（其中的 3×3 方阵）除元素符号不同外、互为转置矩阵。

求解上述微分方程，可得到四元数，再将其代入到 (9.3.3 - 28) 式中，便可得到姿态矩阵 C_b^t 。

9.3.4 三种方法的对比

前面分别介绍了三种求解姿态矩阵的方法，各具特色。下面，再对这三种方法进行对比说明：

(1) **方程数**：欧拉角法的方程数最少、只有三个；方向余弦法的方程数最多、共有九个；四元数法居中，也有四个。

(2) **计算量**：欧拉角法虽然只有三个方程，但无法回避三角函数的运算，计算量反而较大。另外，当载体的俯仰角 θ 接近 90° 时，会导致数据溢出，这一现象等同于三环平台的“环架自锁”。因此，欧拉角法不能用在全姿态飞行器上。方向余弦法克服了欧拉角法的这一缺点，可以全姿态运用，但要求解九个联立的微分方程，计算量较大。四元数法同样可以克服欧拉角法的缺点，虽然方程数比欧拉角法多一个，但多为代数运算，其计算量相对为最小。

(3) **姿态矩阵的正交性**：直角坐标系的坐标变换，变换前后都应该是正交的。但由于每一步计算均存在误差，多步计算的累积误差会使方向余弦矩阵逐渐丧失其“正交性”，即 $(C_b^t)^{-1} \neq (C_b^t)^T$ ，从而导致变换后的直角坐标系不再是正交的。另外，计算误差也会使变换四元数丧失其“规范性”，使其“模”不等于 1，不再是单位四元数。或者说，坐标轴的单位矢量的长度不等于 1，所以称为“刻度误差”。为此，需要周期性地对计算得到的姿态矩阵进行“正交化”处理、对计算得到的变换四元数进行“规范化”处理。但欧拉角法无需进行正交化处理，因为用欧拉角构建的姿态矩阵永远是正交矩阵，而且可以直接得到载体的姿态和航向。

所谓姿态矩阵的正交化处理，就是采用数学方法使姿态矩阵中的

九个元素同时满足由 (9.1.1 - 10) 式和 (9.1.1 - 11) 式给出的六个约束条件。变换四元数的规范化处理, 也称为“规一化”处理, 是采用数学方法使变换四元数的四个元素满足由 (9.3.3 - 15) 式给出的约束条件。可以证明 (从略), 只要变换四元数本身是“规范的”, 那么将其代入 (9.3.3 - 28) 式得到的姿态矩阵 C_b^t 永远是正交的。因此, 四元数法只要通过“规一化”处理, 不必再进行正交化处理。

由以上的对比分析可知, 三种方法各有所长、也各有所短。但对捷联式惯导而言, 计算量是主要矛盾, 所以通常采用四元数法。不过, 在实际应用时, 由于导航参数和指令角速率的更新率与姿态矩阵相比、相对较低, 可采用方向余弦法进行计算。

9.4 捷联惯导初始对准的基本概念

捷联式惯导与平台式惯导一样, 在执行导航任务之前必须完成初始对准。平台式惯导的初始对准, 是采用物理的方法驱使实体平台逐步向导航系靠拢, 并最终趋于一致。然而, 捷联式惯导没有实体平台, 所谓“对准”是确定载体系相对导航系的初始位置关系, 即确定姿态矩阵的初始值 $C_b^t(0)$, 是一个纯粹的数学过程。

捷联式惯导系统的初始对准, 也有自主式和非自主式对准之分、也可划分为粗对准和精对准两个阶段。在粗对准阶段, 着重解决对准的快速性问题。在精对准阶段, 也包括水平对准和方位对准两个部分, 着重解决对准的精度问题。因此, 两类惯导系统的初始对准并无本质上的区别, 在此只简要介绍一下解析粗对准的相关概念。

所谓“解析粗对准”, 是借助两个空间“不共线”的矢量, 即地

球自转角速率矢量 $\bar{\omega}_{ie}$ 和地球重力加速度矢量 \bar{g} ，直接计算从载体系到导航系的坐标转换矩阵 C_b^t 。由于在地球的两极， $\bar{\omega}_{ie}$ 与 \bar{g} 共线，因此这一方法不能用于极区对准。

假设，在静基座情况下，陀螺组合和加速度计组合在载体系上的测量值分别为：

$$\begin{cases} \omega_{ie}^b = [\omega_{ie}^{bx} & \omega_{ie}^{by} & \omega_{ie}^{bz}]^T \\ \mathbf{g}^b = [f^{bx} & f^{by} & f^{bz}]^T \end{cases} \quad (9.4.1 - 1)$$

将陀螺和加速度计的测量值向东、北、天地理系投影，可得：

$$\begin{cases} \omega_{ie}^t = C_b^t \omega_{ie}^b = [0 & \omega_{ie} \cos \varphi & \omega_{ie} \sin \varphi]^T \\ \mathbf{g}^t = C_b^t \mathbf{g}^b = [0 & 0 & g]^T \end{cases} \quad (9.4.1 - 2)$$

式中， φ 为当地纬度；其他数值等同于陀螺和加速度计在理想平台上的测量值（没有误差）。

如上所述， ω_{ie}^b 和 \mathbf{g}^b 是测量值、为已知量；而 ω_{ie}^t 和 \mathbf{g}^t ，是依据物理原理得到的已知量，只有姿态矩阵 C_b^t 是未知的待求量。为了求解 C_b^t ，再利用 $\bar{\omega}_{ie}$ 和 \bar{g} 构造一个新的矢量 \bar{w} ：

$$\bar{w} = \bar{g} \times \bar{\omega}_{ie} \quad (9.4.1 - 3)$$

再将新矢量 \bar{w} 分别向载体系和地理系投影，记为：

$$\begin{cases} \mathbf{w}^b = [w^{bx} & w^{by} & w^{bz}]^T \\ \mathbf{w}^t = C_b^t \mathbf{w}^b = [w^{tx} & w^{ty} & w^{tz}]^T \end{cases} \quad (9.4.1 - 4)$$

根据转置矩阵的运算规则 $(AB)^T = B^T A^T$ ，以及姿态矩阵的正交性 $(C_b^t)^{-1} = (C_b^t)^T = C_b^t$ ，可得：

$$\begin{cases} (\mathbf{g}^b)^T = (\mathbf{C}_t^b \mathbf{g}^t)^T = (\mathbf{g}^t)^T (\mathbf{C}_t^b)^T = (\mathbf{g}^t)^T \mathbf{C}_b^t \\ (\omega_{ie}^b)^T = (\mathbf{C}_t^b \omega_{ie}^t)^T = (\omega_{ie}^t)^T (\mathbf{C}_t^b)^T = (\omega_{ie}^t)^T \mathbf{C}_b^t \\ (\mathbf{w}^b)^T = (\mathbf{C}_t^b \mathbf{w}^t)^T = (\mathbf{w}^t)^T (\mathbf{C}_t^b)^T = (\mathbf{w}^t)^T \mathbf{C}_b^t \end{cases}$$

将上式改写成矩阵形式，可得：

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\omega_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{w}^b)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^t)^T \\ (\omega_{ie}^t)^T \\ (\mathbf{w}^t)^T \end{bmatrix} \mathbf{C}_b^t$$

再对上式两端分别右乘一个逆矩阵，于是得到姿态矩阵 \mathbf{C}_b^t ：

$$\mathbf{C}_b^t = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^t)^T \\ (\omega_{ie}^t)^T \\ (\mathbf{w}^t)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\omega_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{w}^b)^T \end{bmatrix} \quad (9.4.1 - 5)$$

上式就是所求的姿态矩阵，如果矩阵中的任意一行不是其余行的线性组合时，逆矩阵总是存在。对于本例而言，只要 $\bar{\omega}_{ie}$ 与 $\bar{\mathbf{g}}$ 不共线，求逆的条件总能够得到满足。

根据 (9.4.1 - 2) 式和 (9.4.1 - 3) 式，可求得 t 系上的 $\bar{\mathbf{w}}^t$ ：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}^t &= \bar{\mathbf{g}}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \mathbf{g} \\ 0 & \omega_{ie} \cos \varphi & \omega_{ie} \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= -\bar{i} \mathbf{g} \omega_{ie} \cos \varphi = [-\mathbf{g} \omega_{ie} \cos \varphi \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (9.4.1 - 6)$$

同样，根据 (9.4.1 - 1) 式和 (9.4.1 - 3) 式，可求得 b 系上的 $\bar{\mathbf{w}}^b$ ：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}^b &= \bar{\mathbf{g}}^b \times \bar{\omega}_{ie}^b = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \mathbf{f}^{bx} & \mathbf{f}^{by} & \mathbf{f}^{bz} \\ \omega_{ie}^{bx} & \omega_{ie}^{by} & \omega_{ie}^{bz} \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{by} \omega_{ie}^{bz} - \mathbf{f}^{bz} \omega_{ie}^{by} \\ \mathbf{f}^{bz} \omega_{ie}^{bx} - \mathbf{f}^{bx} \omega_{ie}^{bz} \\ \mathbf{f}^{bx} \omega_{ie}^{by} - \mathbf{f}^{by} \omega_{ie}^{bx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{bx} \\ \mathbf{w}^{by} \\ \mathbf{w}^{bz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.4.1 - 7)$$

再将 $(\mathbf{g}^t)^T$ 、 $(\omega_{ie}^t)^T$ 和 $(\mathbf{w}^t)^T$ 代入 (9.4.1 - 5) 式的逆矩阵中，可得：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^t)^T \\ (\omega_{ie}^t)^T \\ (\mathbf{w}^t)^T \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{g} \\ 0 & \omega_{ie} \cos \varphi & \omega_{ie} \sin \varphi \\ -\mathbf{g} \omega_{ie} \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\mathbf{g} \omega_{ie}} \sec \varphi \\ \frac{1}{\mathbf{g}} \tan \varphi & \frac{1}{\omega_{ie}} \sec \varphi & 0 \\ \frac{1}{\mathbf{g}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.4.1 - 8)
\end{aligned}$$

由上式可知，在地球两极， $\varphi = 90^\circ$ ，逆矩阵不存在。再将上面的逆矩阵代入（9.4.1 - 5）式，可得：

$$\mathbf{C}_b^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\mathbf{g} \omega_{ie}} \sec \varphi \\ \frac{1}{\mathbf{g}} \tan \varphi & \frac{1}{\omega_{ie}} \sec \varphi & 0 \\ \frac{1}{\mathbf{g}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{bx} & \mathbf{f}^{by} & \mathbf{f}^{bz} \\ \omega_{ie}^{bx} & \omega_{ie}^{by} & \omega_{ie}^{bz} \\ \mathbf{w}^{bx} & \mathbf{w}^{by} & \mathbf{w}^{bz} \end{bmatrix} \quad (9.4.1 - 9)$$

等式右端的第一个矩阵，由当地的纬度和重力加速度确定，如果这两个参数能够精确地给定，就没有误差；第二个矩阵取决于陀螺和加速度计的测量值，其中含有惯性仪表本身的误差和外界干扰引起的测量误差。由此可知，只要能够得到陀螺和加速度计的测量值，便可唯一地确定姿态矩阵 \mathbf{C}_b^t ，完成捷联系统的初始对准。由于这种方法是靠数学推演实现的，所以称为“解析对准”。