二、四元数与姿态阵间的关系

从上面我们知道了四元数的定义，可这四个数和我们要求的三个姿态角有什么关系呢？下面是详细的推导，同样摘自《惯性导航》-秦永元 P292-297。

四元数与姿态阵间的关系——摘自《惯性导航》-秦永元 P292-297

9.2.2 四元数与姿态阵间的关系

设有参考坐标系 R，坐标轴为 x_0、y_0、z_0，坐标轴方向的单位向量为 $\boldsymbol{i}_0$、$\boldsymbol{j}_0$、$\boldsymbol{k}_0$。刚体相对 R 系作定点转动，定点为 O。取坐标系 b 与刚体固联，b 系的坐标轴为 x、y、z，坐标轴方向的单位向量为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。假设初始时刻 b 系与 R 系重合。为了便于分析刚体的空间角位置，在刚体上取一点 A，转动点 O 至该点引位置向量 $\boldsymbol{OA}$，如图 9.2.1 所示。则该位置向量的空间位置实际上描述了刚体的空间角位置。

设刚体以 $\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$ 相对 R 系旋转，初始时刻位置向量处于 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{r}$，经过时间 t 后位置向量处于 $\boldsymbol{OA}'=\boldsymbol{r}'$。根据欧拉定理，仅考虑刚体在 0 时刻和 t 时刻的角位置时，刚体从 A 位置转到 A' 位置的转动可等效成绕瞬轴 $\boldsymbol{u}$（单位向量）转过 θ 角一次完成。这样，位置向量做圆锥运动，A 和 A' 位于同一圆上，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 位于同一圆锥面上。

下面分析 $\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的关系。在圆上取一点 B，使 $\angle AO'B=90°$，由图得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{OO'} &= (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{O'A} &= \boldsymbol{r}-\boldsymbol{OO'}=\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{O'B} &= \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{O'A} \\
&= \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r} \\
\boldsymbol{O'A'} &= \boldsymbol{O'A}\cos\theta+\boldsymbol{O'B}\sin\theta \\
&= \boldsymbol{r}\cos\theta-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\cos\theta+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r}\sin\theta
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{OO'}+\boldsymbol{O'A'}=\boldsymbol{r}\cos\theta+(1-\cos\theta) \\
&\quad \times(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r}\sin\theta
\end{aligned}
$$

由三重矢积计算公式：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{r} \\
&= (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}-\boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

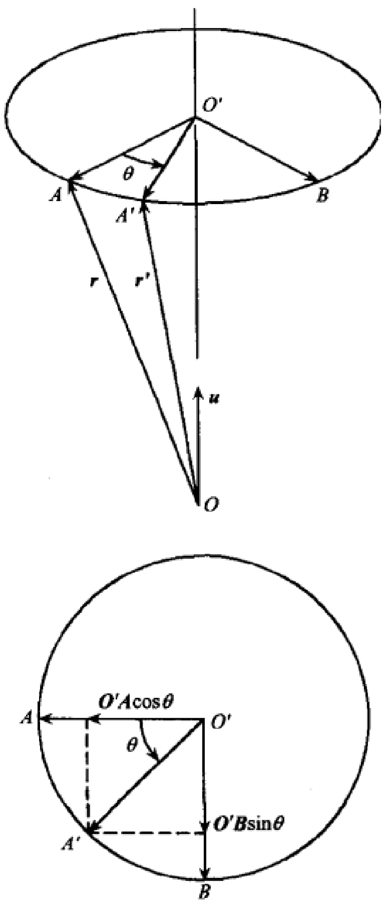

图 9.2.1 刚体的等效旋转

即

$$
(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r})
$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r}\cos\theta + (1-\cos\theta)[\boldsymbol{r} + \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r})] + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r}\sin\theta \\ &= \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r}\sin\theta + (1-\cos\theta)\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

将上式向 R 系内投影：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'^R &= \boldsymbol{r}^R + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r})^R\sin\theta \\ &\quad + (1-\cos\theta)[\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r})]^R \end{aligned}$$

记

$$\boldsymbol{r}'^R = \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}^R = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}^R = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

又根据叉乘关系表达式：

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r})^R = \begin{bmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

记

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{bmatrix} \tag{9.2.23}$$

则

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r})^R = \boldsymbol{U}\boldsymbol{r}^R$$

$$[\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r})]^R = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}\boldsymbol{r}^R$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'^R &= \boldsymbol{r}^R + \boldsymbol{U}\boldsymbol{r}^R\sin\theta + (1-\cos\theta)\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}\boldsymbol{r}^R \\ &= \left(\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{U}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}\right)\boldsymbol{r}^R \end{aligned} \tag{9.2.24}$$

令

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{U}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} \tag{9.2.25}$$

则式(9.2.24)可写成：

$$\boldsymbol{r}'^R = \boldsymbol{D}\boldsymbol{r}^R \tag{9.2.26}$$

记初始时刻的刚体固联坐标系为 b_0，由于初始时刻刚体固联坐标系与参考坐标系重合，所以

$$\boldsymbol{r}^R = \boldsymbol{r}^{b_0} \tag{9.2.27}$$

而在转动过程中，位置向量和 b 系都同刚体固联，所以位置向量和 b 系的相对角位置始终不变，即有

$$\boldsymbol{r}^{b_0} = \boldsymbol{r}'^b \tag{9.2.28}$$

将式(9.2.28)代入式(9.2.27)，得

$$\boldsymbol{r}^R = \boldsymbol{r}'^b \tag{9.2.29}$$

将式(9.2.29)代入式(9.2.26)，得

$$\boldsymbol{r}'^R = \boldsymbol{D}\boldsymbol{r}'^b$$

该式说明 $\boldsymbol{D}$ 即为 b 系至 R 系的坐标变换矩阵，根据式(9.2.25)和式(9.2.23)

$$C_b^R = \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{U}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U} \tag{9.2.30a}$$

即

$$C_b^R = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + 2\cos\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}0 & -n\sin\frac{\theta}{2} & m\sin\frac{\theta}{2}\\ n\sin\frac{\theta}{2} & 0 & -l\sin\frac{\theta}{2}\\ -m\sin\frac{\theta}{2} & l\sin\frac{\theta}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$+2\begin{bmatrix}-(m^2+n^2)\sin^2\frac{\theta}{2} & lm\sin^2\frac{\theta}{2} & ln\sin^2\frac{\theta}{2}\\ lm\sin^2\frac{\theta}{2} & -(l^2+n^2)\sin^2\frac{\theta}{2} & mn\sin^2\frac{\theta}{2}\\ ln\sin^2\frac{\theta}{2} & mn\sin^2\frac{\theta}{2} & -(m^2+l^2)\sin^2\frac{\theta}{2}\end{bmatrix} \tag{9.2.30b}$$

令

$$\begin{cases} q_0 = \cos\frac{\theta}{2} \\ q_1 = l\sin\frac{\theta}{2} \\ q_2 = m\sin\frac{\theta}{2} \\ q_3 = n\sin\frac{\theta}{2} \end{cases} \tag{9.2.31}$$

并以 q_0、q_1、q_2、q_3 构造四元数：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} &= q_0 + q_1\boldsymbol{i}_0 + q_2\boldsymbol{j}_0 + q_3\boldsymbol{k}_0 = \cos\frac{\theta}{2} + (l\boldsymbol{i}_0 + m\boldsymbol{j}_0 + n\boldsymbol{k}_0)\sin\frac{\theta}{2}\\ &= \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{u}^R\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned} \tag{9.2.32}$$

则可得如下结论：

(1) 四元数 $\boldsymbol{Q}=\cos\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{u}^R\sin\frac{\theta}{2}$ 描述了刚体的定点转动，即当只关心 b 系相对 R 系的角位置时，可认为 b 系是由 R 系经过无中间过程的一次性等效旋转形成的，$\boldsymbol{Q}$ 包含了这种等效旋转的全部信息：$\boldsymbol{u}^R$ 为旋转瞬轴和旋转方向，θ 为转过的角度。

(2) 四元数可确定出 b 系至 R 系的坐标变换矩阵。将式(9.2.31)代入式(9:2.30)，得

$$\boxed{C_b^R = \begin{bmatrix}1-2(q_2^2+q_3^2) & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2)\\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & 1-2(q_1^2+q_3^2) & 2(q_2q_3-q_0q_1)\\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & 1-2(q_1^2+q_2^2)\end{bmatrix}} \tag{9.2.33}$$

由于 $\|Q\|=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=\cos^2\frac{\theta}{2}+(l^2+m^2+n^2)\sin^2\frac{\theta}{2}=1$，所以可进一步推得如下结论：

（1）描述刚体旋转的四元数是规范化四元数。

（2）式(9.2.33)可写成：

$$\boxed{C_b^R=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2)\\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1)\\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}} \tag{9.2.34}$$

如果参考坐标系 R 是导航坐标系 n，刚体固联坐标系 b 为机体坐标系，则坐标变换阵 C_b^R 就是姿态矩阵 C_b^n，而由姿态矩阵可计算出航向角和姿态角。

设运载体的航向角为 Ψ（习惯上以北偏东为正），俯仰角为 θ，横滚角为 γ，取地理坐标系 g 为导航坐标系，并规定 x_g、y_g、z_g 的指向依次为东、北、天，则机体坐标系 b 与导航坐标系 n（即地理坐标系 g）的关系如图 1.2.3 所示。

由该图可得三次基本旋转对应的坐标变换阵为

$$C_n^1=C_g^1=\begin{bmatrix}\cos\Psi & -\sin\Psi & 0\\ \sin\Psi & \cos\Psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{9.2.37}$$

$$C_1^b=C_2^bC_1^2=\begin{bmatrix}\cos\gamma & 0 & -\sin\gamma\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\theta\sin\gamma & -\cos\theta\sin\gamma\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ \sin\gamma & -\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta\cos\gamma\end{bmatrix} \tag{9.2.38}$$

$$C_n^b=C_1^b\cdot C_n^1$$

$$=\boxed{\begin{bmatrix}\cos\gamma\cos\Psi+\sin\gamma\sin\Psi\sin\theta & -\cos\gamma\sin\Psi+\sin\gamma\cos\Psi\sin\theta & -\sin\gamma\cos\theta\\ \sin\Psi\cos\theta & \cos\Psi\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\gamma\cos\Psi-\cos\gamma\sin\Psi\sin\theta & -\sin\gamma\sin\Psi-\cos\gamma\cos\Psi\sin\theta & \cos\gamma\cos\theta\end{bmatrix}} \tag{9.2.39}$$

记 $C_b^n=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{bmatrix}$，由于 n 系至 b 系的旋转过程中坐标系始终保持直角坐标系，所以 C_b^n 为正交矩阵

$$\boxed{C_n^b=(C_b^n)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{21} & T_{31}\\ T_{12} & T_{22} & T_{32}\\ T_{13} & T_{23} & T_{33}\end{bmatrix}} \tag{9.2.40}$$

比较式(9.2.39)和式(9.2.40),得

$$
\begin{cases}
\theta = \arcsin(T_{32}) \\
\gamma_{主} = \arctan\left(-\dfrac{T_{31}}{T_{33}}\right) \\
\Psi_{主} = \arctan\left(\dfrac{T_{12}}{T_{22}}\right)
\end{cases}
\tag{9.2.41}
$$

航向角和横滚角的真值按表 9.2.1 和表 9.2.2 确定。

表 9.2.1 航向角Ψ真值表

T_{22}	T_{12}	Ψ
→0	+	90°
→0	−	−90°
+	+	$\Psi_{主}$
+	−	$\Psi_{主}$
−	+	$\Psi_{主}+180°$
−	−	$\Psi_{主}-180°$

表 9.2.2 横滚角γ真值表

$\gamma_{主}$	T_{33}	γ
+	+	$\gamma_{主}$
−		
+	−	$\gamma_{主}-180°$
−	−	$\gamma_{主}+180°$

上述分析说明：如果表征 n 系至 b 系的旋转四元数 Q 已确定，则按式(9.2.33)或式(9.2.34)可计算出姿态阵 C_b^n，再按式(9.2.41)和表 9.2.1 及表 9.2.2 可确定出运载体的航向角、俯仰角和横滚角，因此，四元数 Q 包含了所有的姿态信息，捷联惯导中的姿态更新实质上是如何计算四元数 Q。

呃，粘了这么多其实就是为了想知道推导过程小伙伴好理解，真正有用的就是（9.2.34）这个公式。▲这个公式把四元数转换成了方向余弦矩阵中的几个元素，再用这几个元素转换为欧拉角。就求解除了姿态！

$$
C_b^R = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}
\tag{9.2.34}
$$

先从四元数 q0~q3 转成方向余弦矩阵：

$$
\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}
$$

再从方向余弦矩阵转换为欧拉角：

$$\theta = \sin^{-1}(T_{32}) \text{——俯仰角} pitch$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{T_{31}}{T_{33}}\right) \text{——横滚角} roll$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{T_{12}}{T_{22}}\right) \text{——航向角} yaw$$

好的，公式原理都讲清楚了，下面来看一下匿名的代码：

```
//四元数转欧拉角，这里四元数是 q1~q4 和公式里 q0~q3 相对应。
void Quaternion::to_euler(float *roll, float *pitch, float *yaw)
{
    if (roll) {
        *roll = degrees(atan2f(2.0f*(q1*q2 + q3*q4),1 - 2.0f*(q2*q2 + q3*q3)));
        //*roll = degrees(atan2f(-2.0f*(q2*q4 - q1*q3),1 - 2.0f*(q2*q2 + q3*q3)));
    }
    if (pitch) {
        // 使用 safe_asin()来处理 pitch 接近 90/-90 时的奇点
        *pitch = degrees(safe_asin(2.0f*(q1*q3 - q2*q4)));
        //*pitch = degrees(safe_asin(2.0f*(q3*q4 + q1*q2)));
    }
    if (yaw) {
        *yaw = degrees(atan2f(2.0f*(q2*q3 - q1*q4), 2.0f*(q1*q1 + q2*q2) - 1));
        //*yaw = degrees(atan2f(2.0f*(q2*q3 - q1*q4), 2.0f*(q1*q1 + q3*q3) - 1));
    }
}
```

对比余弦矩阵转换为欧拉角的公式很容易理解了吧，注意一下，红色是匿名原版的代码，和公式还是有出入的，自己细心观察一下吧。被注释了的黑色代码是我根据上面的公式写的。但黑色的求解出来的欧拉角反映出来的姿态是不对的，具体表现为俯仰（pitch）和横滚（roll）是相反的，为啥根据公式写的是不对的？群里的小伙伴给与了我热心的解答。

这个错误主要是由于方向余弦矩阵的旋转顺序不一样，也就是公式（9.2.39）不一样，这是由于旋转的先后顺序不同引起的，具体大家参考《惯性导航》绪论来看就能明白，因为这一点小弟还有点混乱，就点到这为止。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_n^b &= \boldsymbol{C}_1^b \cdot \boldsymbol{C}_n^1 \\
&= \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\Psi + \sin\gamma\sin\Psi\sin\theta & -\cos\gamma\sin\Psi + \sin\gamma\cos\Psi\sin\theta & -\sin\gamma\cos\theta \\ \sin\Psi\cos\theta & \cos\Psi\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\gamma\cos\Psi - \cos\gamma\sin\Psi\sin\theta & -\sin\gamma\sin\Psi - \cos\gamma\cos\Psi\sin\theta & \cos\gamma\cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9.2.39}
$$

以上就是四元数求解欧拉角的方法。通过公式可以看到，要求欧拉角需要求得四元数的方向余弦矩阵；要求得四元数方向余弦矩阵，需要求得四元数 q0~q3，那么如何求得 q0~q3？接下来详细介绍。