四元数完全解析及资料汇总

本文原帖出自匿名四轴论坛，附件里的资源请到匿名论坛下载：

http://www.anobbs.com/forum.php

感谢匿名的开源分享，感谢群友的热心帮助。

说什么四元数完全解析其实都是前辈们的解析，小弟真心是一个搬砖的，搬得不好希望大神们给以批评和指正，在此谢过了。因为本人是小菜鸟一枚，对，最菜的那种菜鸟······所以对四元数求解姿态角这么一个在大神眼里简单的算法，小弟我还是费了很大劲才稍微理解了那么一点点，小弟搬砖整理时也是基于小弟的理解和智商的，有些太基础，有些可能错了，大牛们发现了再骂过我后希望能够给与指正哈。

好，废话到此为止，开始说主体。四元数和姿态角怎么说呢？先得给和我一样的小菜鸟们理一理思路，小鸟我在此画了一个“思维导图”（我承认我画的丑），四元数解算姿态首先分为两部分理解：第一部分先理解什么是四元数，四元数与姿态角间的关系；第二部分要理解怎么由惯性单元测出的加速度和角速度求出四元数，再由四元数求出欧拉角。

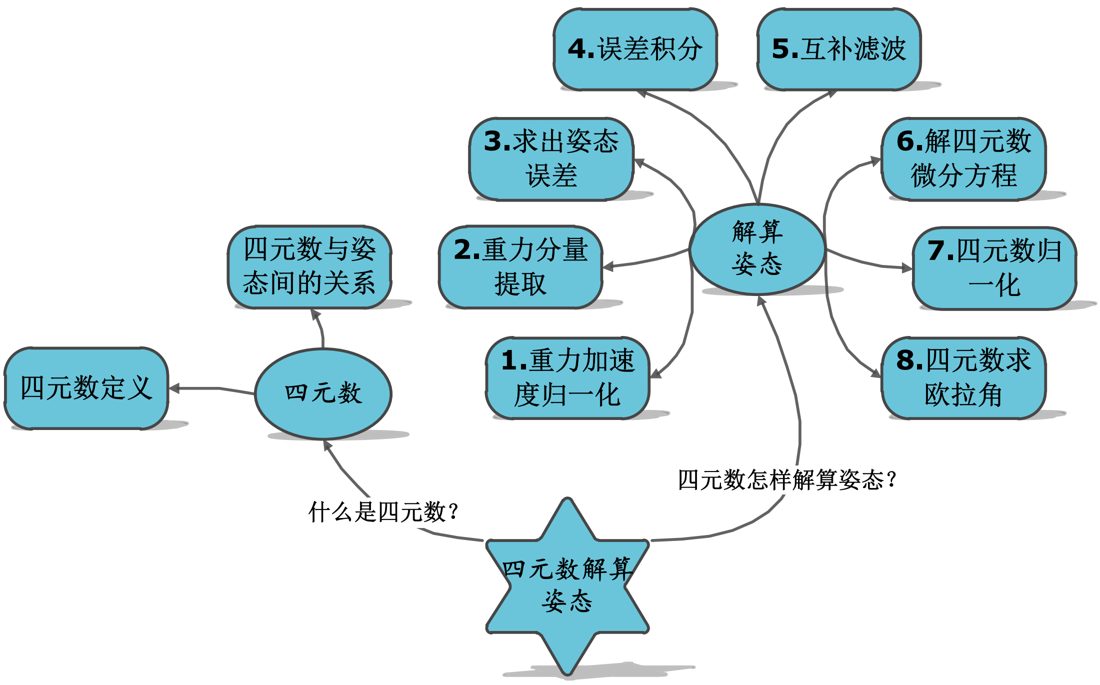

图 1 渣渣思维导图

在讲解什么是四元数时，小弟的思维是顺着说的，先由四元数的定义说起，说到四元数与姿态角间的关系。但在讲解姿态解算时，小弟的思维是逆向的，就是反推回来的，从欧拉角一步步

反推回到惯性器件的测量数据，这样逆向说是因为便于理解，因为实际在工程应用时和理论推导有很大差别。

实际应用时正确的求解顺序应该为图 1 中序号顺序，即 1->2->3->…….

但在笔者讲解姿态求解时思路是如图 2 的。

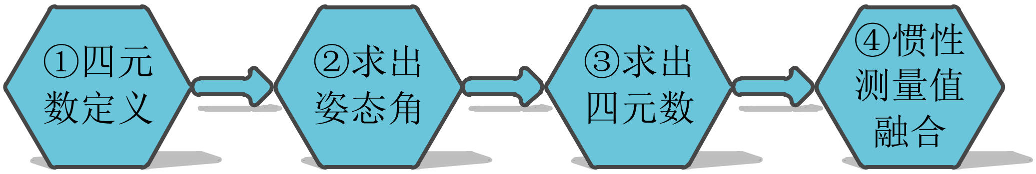

图 2 逆向讲解思路

大家在看四元数时最好结合着代码一块看，小弟看的是匿名四轴的代码，感觉写的非常好也非常清晰，粘出来大家一块观摩。红色部分是核心代码，总共分为八个步骤，和图 1 中的八个步骤是一一对应的。讲解介绍时也是和代码对比起来讲解的。代码可以去匿名官网上下载，都是开源的，不是小弟的，所以小弟不方便加在附件中。

```
//四元数更新姿态
#define Kp 2.0f  //加速度权重，越大则向加速度测量值收敛越快
#define Ki 0.001f    //误差积分增益
void ANO_IMU::Quaternion_CF(Vector3f gyro,Vector3f acc, float deltaT)
{
    Vector3f V_gravity, V_error, V_error_I;
    //1.重力加速度归一化
    acc.normalize();
    //2.提取四元数的等效余弦矩阵中的重力分量
    Q.vector_gravity(V_gravity);
    //3.向量叉积得出姿态误差
    V_error = acc % V_gravity;
    //4.对误差进行积分
    V_error_I += V_error * Ki;
    //5.互补滤波，姿态误差补偿到角速度上，修正角速度积分漂移
    Gyro += V_error * Kp + V_error_I;
    //6.一阶龙格库塔法更新四元数
    Q.Runge_Kutta_1st(Gyro, deltaT);
    //7.四元数归一化
    Q.normalize();
    //8.四元数转欧拉角
    Q.to_euler(&angle.x, &angle.y, &angle.z);
}
```

好的，下面搬砖开始！。。。。。。。。嘿咻嘿咻！！！！

一．什么是四元数？

关于四元数的定义摘自秦永元的《惯性导航》，里面有非常好的讲解，大家可以直接看绪论和第九章就可以。下面我粘贴了部分原文，粘贴的比较多比较详细，应为本人比较笨还爱较真，所以按本人的风格就要详尽一点，大牛们都可以自动忽略。

四元数定义、表达方式及运算方法——摘自《惯性导航》-秦永元 P289-292

9.2　姿态更新计算的四元数算法

设由运载体的机体轴确定的坐标系为 b，惯导系统所采用的导航坐标系为 n，则由 b 系到 n 系的坐标变换矩阵 C_b^n 称为运载体的姿态矩阵。姿态更新是指根据惯性器件的输出实时计算出 C_b^n 矩阵。由于 n 系和 b 系均为直角坐标系，各轴之间始终保持直角，所以可将坐标系理解成刚体，当只研究两个坐标系间的角位置关系时，可对一个坐标系作平移，使其原点与另一个坐标系的原点重合。因此，两坐标系间的空间角位置关系可理解成刚体的定点转动。从这一基本思想出发，可获得姿态更新的四元数算法及旋转矢量算法。本节详细介绍四元数更新算法。

9.2.1　四元数

1. 四元数定义

顾名思义，四元数是由四个元构成的数：

$$\boldsymbol{Q}(q_0,q_1,q_2,q_3) = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} \tag{9.2.1}$$

其中，q_0、q_1、q_2、q_3 是实数，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 既是互相正交的单位向量，又是虚单位 $\sqrt{-1}$，具体规定体现在如下四元数乘法关系中：

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}=-1, & \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}=-1, & \boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k}=-1 \\ \boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j} \end{array}\right\} \tag{9.2.2}$$

式中，$\otimes$表示四元数乘法。

上述关系可叙述为：相同单位向量作四元数乘时呈虚单位特性；相异单位向量作四元数乘时呈单位向量叉乘特性。所以四元数既可看作四维空间中的一个向量，又可看作一个超复数。

2. 四元数的表达方式

(1) 矢量式

$$Q = q_0 + \boldsymbol{q} \tag{9.2.3}$$

其中,q_0 称四元数 $\boldsymbol{Q}$ 的标量部分,$\boldsymbol{q}$ 称四元数 $\boldsymbol{Q}$ 的矢量部分。对照式(9.2.1),可看出 $\boldsymbol{q}$ 是三维空间中的一个向量。

(2) 复数式

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} \tag{9.2.4}$$

可视为一个超复数,$\boldsymbol{Q}$ 的共轭复数记为

$$\boldsymbol{Q}^* = q_0 - q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k} \tag{9.2.5}$$

$\boldsymbol{Q}^*$ 称为 $\boldsymbol{Q}$ 的共轭四元数。

(3) 三角式

$$\boldsymbol{Q} = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2} \tag{9.2.6}$$

式中,θ 为实数,$\boldsymbol{u}$ 为单位向量。

(4) 指数式

$$\boldsymbol{Q} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{u}\frac{\theta}{2}} \tag{9.2.7}$$

θ 和 $\boldsymbol{u}$ 同上。

(5) 矩阵式

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{9.2.8}$$

3. 四元数的大小——范数

四元数的大小用四元数的范数来表示:

$$\|\boldsymbol{Q}\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \tag{9.2.9}$$

若 $\|\boldsymbol{Q}\| = 1$,则 $\boldsymbol{Q}$ 称为规范化四元数。

4. 四元数的运算——加减乘除

1) 加法和减法

设

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{P} = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$$

则

$$\boldsymbol{Q} \pm \boldsymbol{P} = (q_0 \pm p_0) + (q_1 \pm p_1)\boldsymbol{i} + (q_2 \pm p_2)\boldsymbol{j} + (q_3 \pm p_3)\boldsymbol{k} \tag{9.2.10}$$

2）乘法

$$aQ = aq_0 + aq_1\boldsymbol{i} + aq_2\boldsymbol{j} + aq_3\boldsymbol{k} \tag{9.2.11}$$

其中，a 为标量。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q} &= (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}) \otimes (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\boldsymbol{i} \\ &\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\boldsymbol{j} + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\boldsymbol{k} \\ &= r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j} + r_3\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{9.2.12}$$

上式写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q} \tag{9.2.13}$$

或

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}'(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P} \tag{9.2.14}$$

其中，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{P})$的构成形式为：第一列是四元数 $\boldsymbol{P}$ 本身，第一行是 $\boldsymbol{P}$ 的共轭四元数 $\boldsymbol{P}^*$ 的转置，划去第一行和第一列余下的部分。

$$\boldsymbol{V}_P = \begin{bmatrix} p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \tag{9.2.15}$$

称为 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{P})$的核，是由四元数 $\boldsymbol{P}$ 的元构成的反对称矩阵。同理 $\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{Q})$的核为

$$\boldsymbol{V}'_Q = \begin{bmatrix} q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \tag{9.2.16}$$

可见 $\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{Q})$与 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{Q})$构成相似，但核不同。

由式(9.2.13)和式(9.2.14)，得四元数乘法的矩阵表示形式：

$$\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q} \tag{9.2.17a}$$

$$\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}'(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P} \tag{9.2.17b}$$

由于 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{P})$和 $\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{P})$的核不同，所以

$$\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{M}'(\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \otimes \boldsymbol{P}$$

上式说明四元数乘法不满足交换律。

四元数乘法满足分配律和结合律：

$$\boldsymbol{P} \otimes (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{R} \tag{9.2.18}$$

$$\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q} \otimes \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q}) \otimes \boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} \otimes (\boldsymbol{Q} \otimes \boldsymbol{R}) \tag{9.2.19}$$

3）除法——求逆

如果 $\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{R}=1$，则称 $\boldsymbol{R}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的逆，记为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}^{-1}$，或称 $\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的逆，记为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}^{-1}$。

根据范数定义和式(9.2.12)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P}^{*}&=(p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k})\otimes(p_0-p_1\boldsymbol{i}-p_2\boldsymbol{j}-p_3\boldsymbol{k})\\&=p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2\\&=\|\boldsymbol{P}\|\end{aligned}$$

所以，$\boldsymbol{P}\otimes\frac{\boldsymbol{P}^{*}}{\|\boldsymbol{P}\|}=1$，根据上述关于逆的定义，$\frac{\boldsymbol{P}^{*}}{\|\boldsymbol{P}\|}$ 即为 $\boldsymbol{P}$ 的逆，即

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{\boldsymbol{P}^{*}}{\|\boldsymbol{P}\|}\tag{9.2.22}$$

好，关于四元数定义就搬这么多，其他的大家去附件下载《惯性导航》的 pdf 自己看吧。

下面开始搬四元数与姿态解算关系的。。。。。。嘿咻嘿咻~~~~