《Robotics》第二章

1　为什么要引入齐次变换矩阵

在机器人学中，机械臂的每一段（连杆）都可以视为一个刚体。描述刚体在空间中的位置与姿态，需要同时考虑：

- **平移**（translation）：描述物体在空间中的位置；
- **旋转**（rotation）：描述物体的方向。

但在实际计算中，我们希望能用**一个统一的数学表达式**来同时处理平移和旋转。这就是为什么引入——** 齐次变换矩阵（Homogenous Transformation Matrix）**。

齐次矩阵将旋转和平移统一为一个 4×4 矩阵运算，使得：

$$\text{旋转} + \text{平移} = \text{一次矩阵相乘}$$

—

2　平移变换的数学表示

设有一个点 P，其在坐标系中的位置为：

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

如果我们让这个点平移一个向量

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

则平移后的点 P' 坐标为：

$$P' = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \end{bmatrix}$$

这种表达很直观，但无法与旋转统一起来。于是我们引入一个“** 齐次坐标 **”，也就是是在坐标向量末尾加上一个 1：

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

这样，平移就可以写成一个矩阵乘法：

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{平移矩阵}T(a,b,c)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix}$$

我们称这个 4×4 矩阵为**平移齐次矩阵**：

$$T(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

—

3 旋转变换的推导

旋转描述物体绕坐标轴的转动。我们采用右手定则：右手大拇指指向旋转轴正方向，四指弯曲方向为正旋转方向。

3.1 绕 x 轴旋转

如图所示，旋转角度为 α。原点不动，x 轴方向不变，y 轴和 z 轴发生变化：

$$\begin{cases} y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

写成矩阵形式：

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 绕 y 轴旋转

绕 y 轴旋转角度 β:

$$\begin{cases} x' = x\cos\beta + z\sin\beta \\ z' = -x\sin\beta + z\cos\beta \end{cases}$$

齐次矩阵表示:

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 绕 z 轴旋转

绕 z 轴旋转角度 γ:

$$\begin{cases} x' = x\cos\gamma - y\sin\gamma \\ y' = x\sin\gamma + y\cos\gamma \end{cases}$$

齐次矩阵为:

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

—

4 综合旋转和平移：齐次变换矩阵

现在我们希望一个矩阵能同时描述物体的“旋转 + 平移”。定义:

$$H = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中:

- R 是 3×3 的旋转矩阵;
- $\boldsymbol{d} = [a\ b\ c]^T$ 是平移向量;

那么，对于任意点

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

其经过旋转和平移后的新坐标为：

$$\boldsymbol{p}' = H\boldsymbol{p}$$

即：

$$\boxed{\boldsymbol{p}' = R\boldsymbol{p} + \boldsymbol{d}}$$

这就是机器人学中描述刚体位置和方向的**基本方程**。

—

5 齐次矩阵的物理含义

5.1 表示姿态（Pose）

矩阵 H 不仅仅是一个变换运算符，它也代表一个坐标系相对于另一个坐标系的姿态：

$$H = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

含义：- R：新坐标系的三个轴方向在旧坐标系中的投影；- $\boldsymbol{d}$：新坐标系原点在旧坐标系中的位置。

5.2 多个变换的组合

如果一个坐标系先经历 H_1 变换，再经历 H_2 变换，则总变换为：

$$H = H_1 H_2$$

这叫做"** 齐次变换的链式法则 **"，在机器人机械臂建模中极其重要。

—

6 例子：连续变换

假设一个坐标系先绕 z 轴旋转 $90°$，再平移 $(4, -3, 7)$。写成矩阵：

$$H = T(4, -3, 7)\, R_z(90°)$$

数值代入：

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这表示：- 新坐标系的 x' 轴指向旧坐标系的 y 方向；- 新原点位于 $(4, -3, 7)$。

—

7 总结

- 平移和旋转都可表示为 4×4 矩阵;
- 齐次变换矩阵 H 将两者统一;
- 通过矩阵乘法可以方便地进行多级坐标变换;
- 在机器人学中，每个连杆之间的关系都用齐次矩阵描述。