《Robotics》第四章

1 引言：什么是正运动学

机械臂有多个关节和连杆，每个关节可以转动或滑动。所谓“**正运动学**（Forward Kinematics)”就是——

已知每个关节的运动参数（角度或位移)，求出末端执行器的位置与方向。

相对地，“逆运动学”是已知末端位置，求各关节参数。

举个例子： 假设一个两连杆机械臂（类似人类的肩膀和手肘)：- 第一个关节角为 θ_1；- 第二个关节角为 θ_2；- 连杆长度为 L_1, L_2；则末端的位置是：

$$\begin{cases} x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

这就是一个最简单的正运动学问题。

—

2 Denavit–Hartenberg（DH）建模法

为了描述任意复杂的机械臂，我们需要一种统一的数学表示。1955 年，Denavit 和 Hartenberg 提出了一种方法（简称 **DH 参数法**)。

DH 方法通过为每个连杆定义一个坐标系，用四个参数描述它与前一连杆的几何关系。

—

3 四个 DH 参数的定义

考虑第 $i-1$ 与第 i 个连杆之间的连接关系：

| 符号 | 名称 | 含义 | |——|——|——| | a_i | 连杆长度 | x_i 轴在 x_{i-1} 轴方向上的投影长度 | | α_i | 连杆扭角 | z_{i-1} 与 z_i 之间的夹角 | | d_i | 连杆偏距 | z_{i-1} 轴到 x_i 轴的距离（沿 z_{i-1}） | | θ_i | 关节角 | x_{i-1} 与 x_i 之间的夹角（绕 z_{i-1}） |

说明： - 对于转动关节（R 型），θ_i 是变量，d_i 为常量；- 对于移动关节（T 型），d_i 是变量，θ_i 为常量。

—

4 DH 坐标系建立规则

每个关节分配一个坐标系 $O_i - x_i y_i z_i$：

1. z_i 轴沿关节轴线方向；2. x_i 轴沿着 z_{i-1} 与 z_i 之间的公法线；3. 原点 O_i 设在两轴公法线与 z_i 的交点处；4. y_i 轴由右手定则确定。

这样，每个坐标系之间的几何关系就唯一确定。

—

5 单个连杆的变换矩阵

根据 DH 定义，坐标系 i 相对于坐标系 $i-1$ 的齐次变换矩阵为：

$$
{}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

推导思路： 它由以下四个基本变换依次组成：1. 绕 z_{i-1} 旋转 θ_i；2. 沿 z_{i-1} 平移 d_i；3. 沿 x_i 平移 a_i；4. 绕 x_i 旋转 α_i。
将这四步的齐次矩阵相乘即可得到上式。

—

6 整条机械臂的正运动学

对于 n 个关节的机械臂，末端坐标系 n 相对基座坐标系 0 的齐次变换矩阵为：

$$
{}^0T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \cdots {}^{n-1}T_n
$$

含义： 这个矩阵的上 3×3 部分给出末端方向（旋转矩阵 R），右上角的 3×1 列给出末端位置（平移向量 $\boldsymbol{p}$）：

$$
{}^0T_n = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

因此，末端执行器的“姿态（Pose）”完全由 ${}^0T_n$ 决定。

—

7 二维平面两连杆机械臂示例

7.1 几何关系

设：

- 第一连杆长度 L_1，关节角 θ_1；
- 第二连杆长度 L_2，关节角 θ_2；
- 所有运动在 xy 平面内。

7.2 位置推导

从几何上：

$$\begin{cases} x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

写成齐次矩阵形式：

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & L_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & L_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & L_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & L_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

两者相乘：

$${}^0T_2 = {}^0T_1\,{}^1T_2$$

化简后：

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这给出了末端的完整位姿。

—

8 三维例子：RRR 机械臂（空间三转动）

三自由度仿人型机械臂（RRR 型）通常每个关节都是转动的。它的末端姿态由三个角度（常称“Euler angles”或“roll–pitch–yaw”）决定。

对应的总变换：

$$^{0}T_3 = {}^{0}T_1 {}^{1}T_2 {}^{2}T_3$$

通过给出各关节的 DH 参数，可依次求出每个 $^{i-1}T_i$ 并相乘。

—

9 物理意义与结论

- 正运动学求解了“关节变量 $\to$ 末端姿态”的映射；
- 齐次变换矩阵将所有旋转与平移统一在一个框架；
- DH 参数提供了系统化的建模方法；
- 任意多连杆机械臂的位姿可通过矩阵连乘得到；
- 该结果是运动学、雅可比矩阵和控制分析的基础。

—

10 总结公式表

| 概念 | 表达式 | |——|———-| | 单连杆变换 | $^{i-1}T_i = R_z(\theta_i)T_z(d_i)T_x(a_i)R_x(\alpha_i)$ | | 多连杆合成 | $^{0}T_n = \prod_{i=1}^{n} {}^{i-1}T_i$ | | 末端位置 | 右上角 3×1 向量 | | 末端姿态 | 左上角 3×3 旋转矩阵 | | 二连杆平面臂 | $x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$ |

—