《Robotics》第七章

1 机器人控制概述

1.1 控制问题的数学描述

机器人控制的目标是计算执行器所需的力或力矩，以完成给定的任务。机器人动力学方程可表示为：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{1}$$

其中：

- $\boldsymbol{\tau}$：关节力矩向量
- $\mathbf{q}$：关节位置向量
- $\mathbf{B}(\mathbf{q})$：惯性矩阵
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$：科里奥利力和离心力矩阵
- $\mathbf{F}_v$：粘性摩擦系数矩阵
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$：重力向量

1.2 坐标系定义

- 内部坐标：关节空间坐标 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^T$
- 外部坐标：任务空间坐标 $\mathbf{x} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$
- 正运动学：$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$
- 逆运动学：$\mathbf{q} = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{x})$

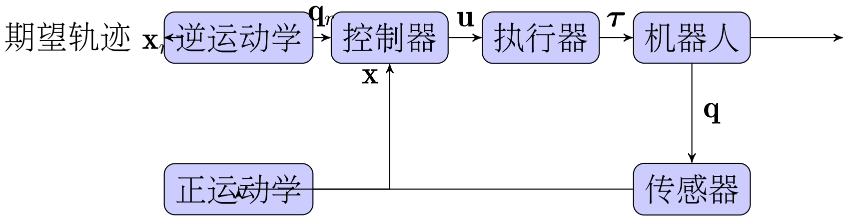

图 1: 机器人控制系统总体结构

2 基于内部坐标的控制

2.1 PD 位置控制

2.1.1 基本 PD 控制

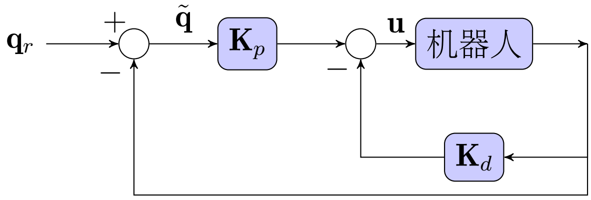

图 2: 基本 PD 位置控制

控制律:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_p(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}} \tag{2}$$

其中:

- $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_r - \mathbf{q}$: 位置误差
- $\mathbf{K}_p = \mathrm{diag}(k_{p1}, \dots, k_{pn})$: 比例增益矩阵
- $\mathbf{K}_d = \mathrm{diag}(k_{d1}, \dots, k_{dn})$: 微分增益矩阵

2.1.2 改进的 PD 控制

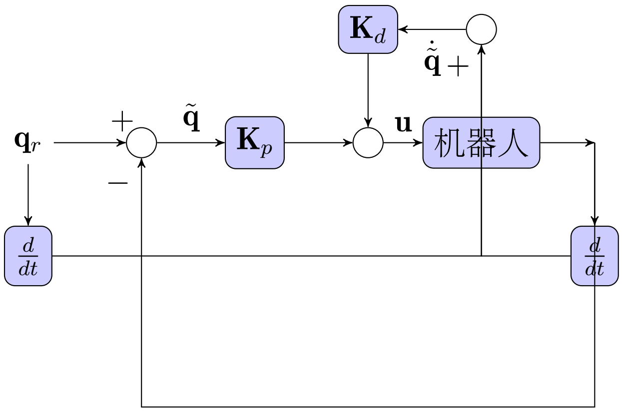

图 3: 改进的 PD 位置控制（包含参考速度）

控制律:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_p(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}) \tag{3}$$

2.2 带重力补偿的 PD 控制

考虑重力项的动力学方程:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \tag{4}$$

在准静态条件下（$\ddot{\mathbf{q}} \approx 0$, $\dot{\mathbf{q}} \approx 0$）:

$$\boldsymbol{\tau} \approx \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{5}$$

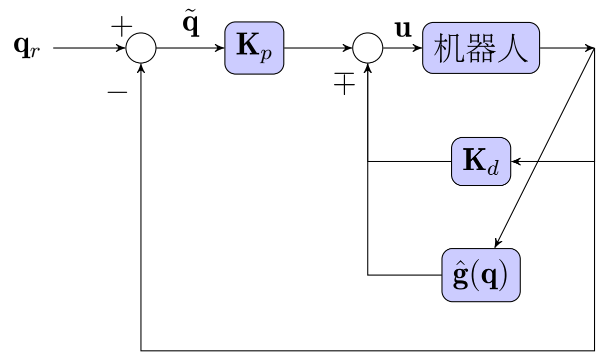

图 4: 带重力补偿的 PD 控制

控制律:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_p(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \tag{6}$$

其中 $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$ 是重力项的估计值。

2.3 基于逆动力学的控制

2.3.1 系统线性化

定义简化动力学项:

$$\mathbf{n}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{7}$$

动力学方程简化为:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \tag{8}$$

直接动力学模型:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\right) \tag{9}$$

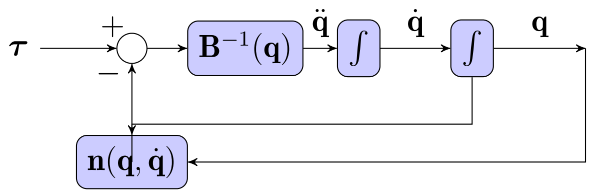

图 5: 机器人直接动力学模型

2.3.2 逆动力学控制律

采用控制律:

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \tag{10}$$

其中 $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})$ 和 $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ 是系统模型的估计值。

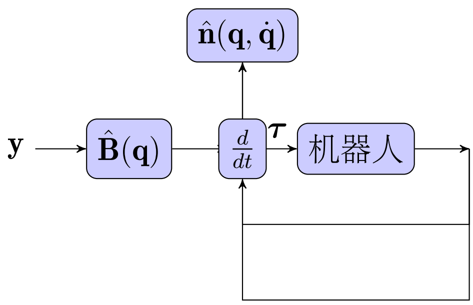

图 6: 基于逆动力学的控制

将控制律 (10) 代入动力学方程 (8):

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) &= \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} &= \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{n}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})]\end{aligned}$$

如果模型完全准确（$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$）, 则:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} \tag{11}$$

系统被完全线性化和解耦。

2.3.3 闭环控制设计

定义误差：

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_r - \mathbf{q} \tag{12}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} \tag{13}$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}}_r - \ddot{\mathbf{q}} \tag{14}$$

设计控制输入：

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_p(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}) \tag{15}$$

代入线性化系统 $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$：

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_p(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_r - \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_p(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) = 0$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} = 0$$

这是线性二阶误差动力学方程。

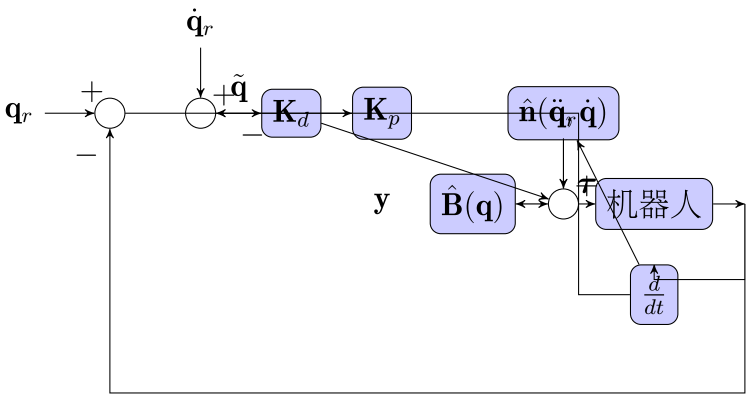

图 7: 完整的基于逆动力学的控制系统

3 基于外部坐标的控制

3.1 基于雅可比转置的控制

3.1.1 基本原理

从机器人静力学关系：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f} \tag{16}$$

其中 $\mathbf{f}$ 是末端执行器上的作用力。

控制策略：在末端执行器上虚拟地安装弹簧，产生与位置误差成正比的力：

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_p(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}) \tag{17}$$

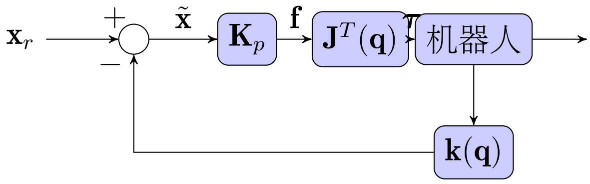

图 8: 基于雅可比转置的控制

控制律：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_p(\mathbf{x}_r - \mathbf{k}(\mathbf{q})) \tag{18}$$

3.2 基于逆雅可比的控制

从微分运动学关系：

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J}(\mathbf{q})d\mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{q} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})d\mathbf{x} \tag{19}$$

将外部坐标误差映射到内部坐标误差：

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{x}} \tag{20}$$

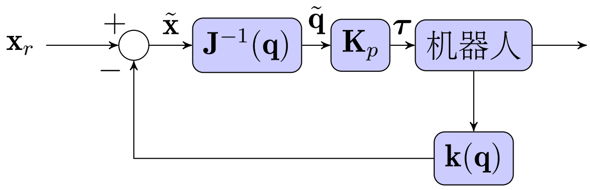

图 9: 基于逆雅可比的控制

控制律：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{x}_r - \mathbf{k}(\mathbf{q})) \tag{21}$$

3.3 外部坐标下的 PD 控制与重力补偿

微分运动学关系：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{22}$$

控制律设计：

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{x}} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \tag{24}$$

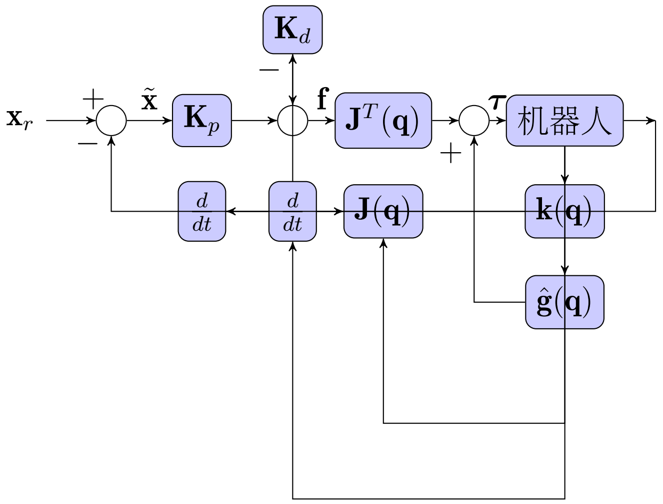

图 10: 外部坐标下的 PD 控制与重力补偿

3.4 外部坐标下的逆动力学控制

3.4.1 加速度关系

对速度关系 (22) 求导:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \tag{25}$$

定义外部坐标误差:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_r - \mathbf{x} \tag{26}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}}_r - \dot{\mathbf{x}} \tag{27}$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} = \ddot{\mathbf{x}}_r - \ddot{\mathbf{x}} \tag{28}$$

设计误差动力学:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{x}} = 0 \tag{29}$$

解得:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{x}} \tag{30}$$

3.4.2 控制律推导

由方程 (25):

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) \tag{31}$$

代入 (30):

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) \tag{32}$$

完整的控制律:

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{33}$$

其中 $\mathbf{y}$ 由方程 (32) 给出。

4 接触力控制

4.1 与环境交互的动力学

当机器人与环境接触时，动力学方程为：

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f} \tag{34}$$

其中 $\mathbf{f}$ 是接触力。

4.2 基于逆动力学的线性化

采用控制律：

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f} \tag{35}$$

代入动力学方程 (34)：

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$$

如果模型准确，则 $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$，系统被线性化。

4.3 力控制策略

将力控制问题转化为位置控制问题。设计虚拟系统：

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}_c\ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{F}_c\dot{\mathbf{x}}_c \tag{36}$$

其中：

- $\mathbf{f} = \mathbf{f}_r - \mathbf{f}$：力误差
- $\mathbf{B}_c$：虚拟惯性矩阵
- $\mathbf{F}_c$：虚拟阻尼矩阵

解得虚拟运动：

$$\ddot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{B}_c^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{F}_c\dot{\mathbf{x}}_c) \tag{37}$$

通过积分得到虚拟位置 $\mathbf{x}_c$ 和速度 $\dot{\mathbf{x}}_c$。

4.4 并行组合控制

同时控制位置和力：

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_d + \mathbf{x}_c \tag{38}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \dot{\mathbf{x}}_d + \dot{\mathbf{x}}_c \tag{39}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_r = \ddot{\mathbf{x}}_d + \ddot{\mathbf{x}}_c \tag{40}$$

其中：

- $\mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{x}}_d$：期望的位置轨迹
- $\mathbf{x}_c, \dot{\mathbf{x}}_c, \ddot{\mathbf{x}}_c$：由力控制产生的修正轨迹

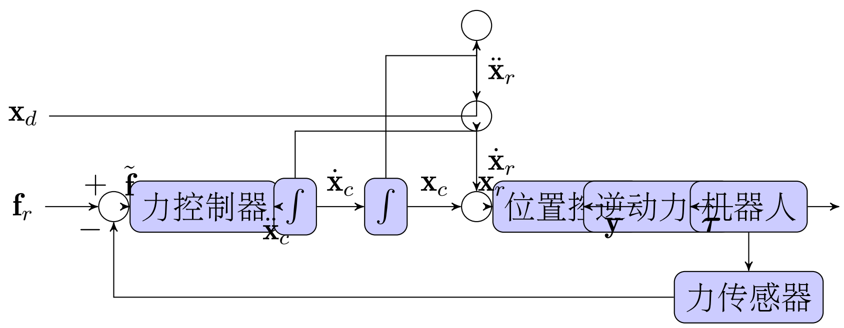

图 11: 并行组合力控制系统