《Robotics》第六章

1 轨迹规划的基本概念

1.1 问题定义

在机器人控制中，轨迹规划的目标是生成一个时间函数，描述机器人从初始状态到目标状态的运动过程。对于单个关节，我们考虑：

- 位置轨迹：$q(t)$
- 速度轨迹：$\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$
- 加速度轨迹：$\ddot{q}(t) = \frac{d^2q}{dt^2}$

给定约束条件：

$$
\begin{aligned}
q(0) &= q_i \quad (\text{初始位置}) \\
q(t_f) &= q_f \quad (\text{最终位置}) \\
\dot{q}(0) &= 0 \quad (\text{初始速度为零}) \\
\dot{q}(t_f) &= 0 \quad (\text{最终速度为零})
\end{aligned}
$$

2 两点间轨迹插值的详细推导

2.1 梯形速度曲线方法

2.1.1 阶段划分

我们将运动分为三个阶段：

1. 加速阶段：$0 \leq t \leq t_c$，恒定加速度 a_c
2. 匀速阶段：$t_c < t \leq t_f - t_c$，恒定速度 v_c
3. 减速阶段：$t_f - t_c < t \leq t_f$，恒定减速度 $-a_c$

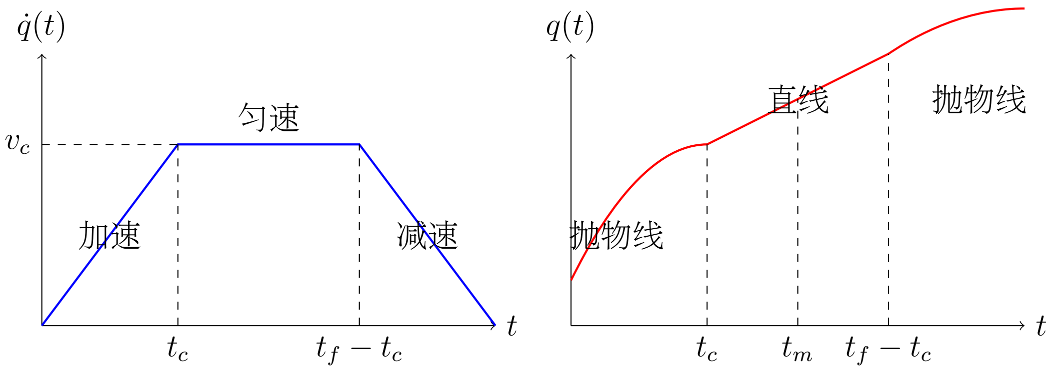

图 1: 梯形速度曲线及其对应的位置轨迹

2.1.2 步骤 1：确定关键参数

定义中点时间和位置：

$$t_m = \frac{t_f}{2} \tag{1}$$
$$q_m = \frac{q_i + q_f}{2} \tag{2}$$

在加速阶段结束时：

$$v_c = a_c t_c \tag{3}$$
$$q_c = q_i + \frac{1}{2} a_c t_c^2 \tag{4}$$

2.1.3 步骤 2：建立位移方程

总位移等于速度曲线下的面积：

$$\begin{aligned} q_f - q_i &= \text{梯形面积} \\ &= \frac{1}{2}[(t_f - (t_f - 2t_c)) + t_f] \cdot v_c \\ &= (t_f - t_c) \cdot v_c \end{aligned}$$

代入公式 (3)：

$$q_f - q_i = (t_f - t_c) a_c t_c \tag{5}$$

2.1.4 步骤 3：求解加速时间 t_c

将方程 (5) 展开：

$$q_f - q_i = a_c t_f t_c - a_c t_c^2$$
$$a_c t_c^2 - a_c t_f t_c + (q_f - q_i) = 0$$

这是一个关于 t_c 的二次方程，解为：

$$\begin{aligned}t_c &= \frac{a_c t_f \pm \sqrt{(a_c t_f)^2 - 4a_c(q_f - q_i)}}{2a_c} \\ &= \frac{t_f}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{t_f^2 - \frac{4(q_f - q_i)}{a_c}}\end{aligned}$$

由于 $t_c < \frac{t_f}{2}$，我们取负号：

$$\boxed{t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t_f^2 - \frac{4(q_f - q_i)}{a_c}}} \tag{6}$$

2.1.5 步骤 4：推导各阶段轨迹方程

阶段 **1**：加速阶段 $(0 \leq t \leq t_c)$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1(t) &= a_c \\ \dot{q}_1(t) &= \int a_c dt = a_c t + C_1\end{aligned}$$

由初始条件 $\dot{q}_1(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$，所以：

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= a_c t \\ q_1(t) &= \int a_c t dt = \frac{1}{2}a_c t^2 + C_2\end{aligned}$$

由 $q_1(0) = q_i$ 得 $C_2 = q_i$，所以：

$$\boxed{q_1(t) = q_i + \frac{1}{2}a_c t^2} \tag{7}$$

阶段 **2**：匀速阶段 $(t_c < t \leq t_f - t_c)$

$$\begin{aligned}\dot{q}_2(t) &= v_c = a_c t_c \\ q_2(t) &= \int v_c dt = v_c t + C_3\end{aligned}$$

在 $t = t_c$ 时，位置应连续：$q_2(t_c) = q_1(t_c) = q_i + \frac{1}{2}a_c t_c^2$

$$\begin{aligned}v_c t_c + C_3 &= q_i + \frac{1}{2}a_c t_c^2 \\ a_c t_c^2 + C_3 &= q_i + \frac{1}{2}a_c t_c^2 \\ C_3 &= q_i - \frac{1}{2}a_c t_c^2\end{aligned}$$

所以：

$$\begin{aligned}q_2(t) &= v_c t + q_i - \frac{1}{2}a_c t_c^2 \\ &= a_c t_c t + q_i - \frac{1}{2}a_c t_c^2 \\ &= q_i + a_c t_c(t - \frac{t_c}{2})\end{aligned}$$

$$\boxed{q_2(t) = q_i + a_c t_c (t - \frac{t_c}{2})} \tag{8}$$

阶段 **3**：减速阶段 **(**$t_f - t_c < t \leq t_f$**)** 设 $\tau = t_f - t$，则当 $t = t_f - t_c$ 时，$\tau = t_c$；当 $t = t_f$ 时，$\tau = 0$。

减速阶段是加速阶段的逆过程：

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_3(t) &= -a_c \\
\dot{q}_3(t) &= -a_c \tau + C_4 = -a_c(t_f - t) + C_4
\end{aligned}$$

由 $\dot{q}_3(t_f) = 0$ 得：

$$-a_c(t_f - t_f) + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

所以：

$$\begin{aligned}
\dot{q}_3(t) &= -a_c(t_f - t) \\
q_3(t) &= \int -a_c(t_f - t)dt = a_c \int (t - t_f)dt \\
&= \frac{1}{2} a_c (t - t_f)^2 + C_5
\end{aligned}$$

由 $q_3(t_f) = q_f$ 得：

$$\frac{1}{2} a_c (t_f - t_f)^2 + C_5 = q_f \Rightarrow C_5 = q_f$$

所以：

$$\boxed{q_3(t) = q_f - \frac{1}{2} a_c (t_f - t)^2} \tag{9}$$

2.1.6 步骤 5：连续性验证

在 $t = t_c$ 处验证连续性：

位置连续：

$$\begin{aligned}
q_1(t_c) &= q_i + \frac{1}{2} a_c t_c^2 \\
q_2(t_c) &= q_i + a_c t_c (t_c - \frac{t_c}{2}) = q_i + \frac{1}{2} a_c t_c^2 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

速度连续：

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1(t_c) &= a_c t_c \\
\dot{q}_2(t_c) &= a_c t_c \quad \checkmark
\end{aligned}$$

在 $t = t_f - t_c$ 处验证连续性：

位置连续：

$$
\begin{aligned}
q_2(t_f - t_c) &= q_i + a_c t_c(t_f - t_c - \frac{t_c}{2}) = q_i + a_c t_c(t_f - \frac{3}{2}t_c) \\
q_3(t_f - t_c) &= q_f - \frac{1}{2}a_c(t_f - (t_f - t_c))^2 = q_f - \frac{1}{2}a_c t_c^2
\end{aligned}
$$

由方程 (5)：$q_f - q_i = a_c t_c(t_f - t_c)$，代入得：

$$
\begin{aligned}
q_3(t_f - t_c) &= [q_i + a_c t_c(t_f - t_c)] - \frac{1}{2}a_c t_c^2 \\
&= q_i + a_c t_c(t_f - t_c) - \frac{1}{2}a_c t_c^2 \\
&= q_i + a_c t_c(t_f - \frac{3}{2}t_c) \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

速度连续：

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_2(t_f - t_c) &= a_c t_c \\
\dot{q}_3(t_f - t_c) &= -a_c(t_f - (t_f - t_c)) = -a_c t_c \quad ?
\end{aligned}
$$

这里出现速度不连续！我们需要修正。

2.1.7 步骤 6：修正减速阶段的速度方程

实际上，减速阶段应该从当前速度 v_c 开始减速。正确的推导：

设 $\tau = t - (t_f - t_c)$，则：

$$
\begin{aligned}
\ddot{q}_3(t) &= -a_c \\
\dot{q}_3(t) &= -a_c\tau + C_6
\end{aligned}
$$

当 $\tau = 0$ 时（即 $t = t_f - t_c$），$\dot{q}_3 = v_c = a_c t_c$：

$$
-a_c \cdot 0 + C_6 = a_c t_c \Rightarrow C_6 = a_c t_c
$$

所以：

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_3(t) &= -a_c\tau + a_c t_c = a_c(t_c - \tau) = a_c[t_c - (t - (t_f - t_c))] \\
&= a_c(t_f - t)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\dot{q}_3(t) = a_c(t_f - t)} \tag{10}
$$

现在验证速度连续性：

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_2(t_f - t_c) &= a_c t_c \\
\dot{q}_3(t_f - t_c) &= a_c(t_f - (t_f - t_c)) = a_c t_c \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

位置轨迹：

$$
\begin{aligned}
q_3(t) &= \int \dot{q}_3(t)dt = \int a_c(t_f - t)dt \\
&= a_c(t_f t - \frac{1}{2}t^2) + C_7
\end{aligned}
$$

由 $q_3(t_f) = q_f$：

$$
\begin{aligned}
a_c(t_f^2 - \frac{1}{2}t_f^2) + C_7 = q_f \\
\frac{1}{2}a_c t_f^2 + C_7 = q_f \Rightarrow C_7 = q_f - \frac{1}{2}a_c t_f^2
\end{aligned}
$$

所以：

$$
\begin{aligned}
q_3(t) &= a_c(t_f t - \frac{1}{2}t^2) + q_f - \frac{1}{2}a_c t_f^2 \\
&= q_f - \frac{1}{2}a_c(t_f^2 - 2t_f t + t^2) \\
&= q_f - \frac{1}{2}a_c(t_f - t)^2
\end{aligned}
$$

这与之前的公式 (9) 一致。

3 多路径点轨迹规划

3.1 问题定义

给定 n 个路径点：$\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$，对应时间：$\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$。
目标：构造平滑轨迹 $q(t)$，使其经过所有路径点，且速度连续。

3.2 线性段与抛物线过渡方法

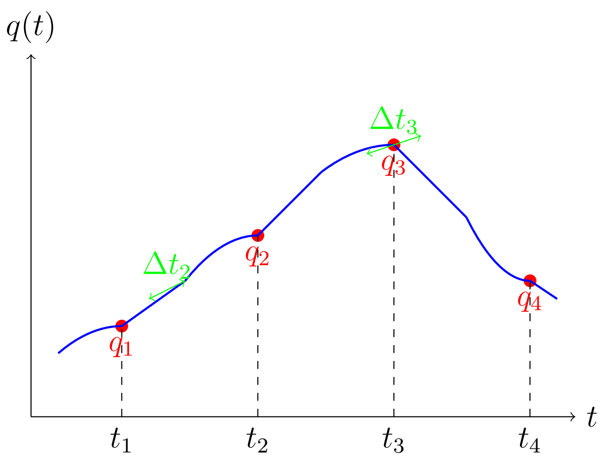

图 2: 多路径点轨迹规划：线性段与抛物线过渡

3.3 数学推导

3.3.1 步骤 1：计算直线段速度

对于每个直线段 $[t_{k-1}, t_k]$，计算平均速度：

$$\dot{q}_{k-1,k} = \frac{q_k - q_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \ldots, n \tag{11}$$

边界条件：$\dot{q}_{0,1} = 0$, $\dot{q}_{n,n+1} = 0$。

3.3.2 步骤 2：确定抛物线参数

在路径点 k 附近，使用二次函数：

$$q(t) = b_{2,k}(t - t_k)^2 + b_{1,k}(t - t_k) + b_{0,k}, \quad t \in [t_k - \frac{\Delta t_k}{2}, t_k + \frac{\Delta t_k}{2}] \tag{12}$$

速度函数：

$$\dot{q}(t) = 2b_{2,k}(t - t_k) + b_{1,k} \tag{13}$$

3.3.3 步骤 3：求解系数

在过渡区间的边界处，速度应与相邻直线段的速度匹配：
在 $t = t_k - \frac{\Delta t_k}{2}$ 处：

$$\dot{q}(t_k - \frac{\Delta t_k}{2}) = 2b_{2,k}(-\frac{\Delta t_k}{2}) + b_{1,k} = -b_{2,k}\Delta t_k + b_{1,k} = \dot{q}_{k-1,k} \tag{14}$$

在 $t = t_k + \frac{\Delta t_k}{2}$ 处：

$$\dot{q}(t_k + \frac{\Delta t_k}{2}) = 2b_{2,k}(\frac{\Delta t_k}{2}) + b_{1,k} = b_{2,k}\Delta t_k + b_{1,k} = \dot{q}_{k,k+1} \tag{15}$$

将方程 (14) 和 (15) 相加：

$$\begin{aligned} (-b_{2,k}\Delta t_k + b_{1,k}) + (b_{2,k}\Delta t_k + b_{1,k}) &= \dot{q}_{k-1,k} + \dot{q}_{k,k+1} \\ 2b_{1,k} &= \dot{q}_{k-1,k} + \dot{q}_{k,k+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{b_{1,k} = \frac{\dot{q}_{k-1,k} + \dot{q}_{k,k+1}}{2}} \tag{16}$$

将方程 (15) 减去方程 (14)：

$$\begin{aligned} (b_{2,k}\Delta t_k + b_{1,k}) - (-b_{2,k}\Delta t_k + b_{1,k}) &= \dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k} \\ 2b_{2,k}\Delta t_k &= \dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k} \end{aligned}$$

$$\boxed{b_{2,k} = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{2\Delta t_k}} \tag{17}$$

加速度为：

$$\ddot{q}_k = 2b_{2,k} = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t_k} \tag{18}$$

3.3.4 步骤 4：确定位置系数 $b_{0,k}$

在 $t = t_k + \frac{\Delta t_k}{2}$ 处，位置应连续。直线段的位置为：

$$q_{\text{linear}}(t_k + \frac{\Delta t_k}{2}) = q_k + \dot{q}_{k,k+1} \cdot \frac{\Delta t_k}{2} \tag{19}$$

抛物线段的位置为：

$$\begin{aligned} q_{\text{quad}}(t_k + \frac{\Delta t_k}{2}) &= b_{2,k}(\frac{\Delta t_k}{2})^2 + b_{1,k}(\frac{\Delta t_k}{2}) + b_{0,k} \\ &= \frac{b_{2,k}\Delta t_k^2}{4} + \frac{b_{1,k}\Delta t_k}{2} + b_{0,k} \end{aligned} \tag{20}$$

令两者相等：

$$q_k + \dot{q}_{k,k+1} \cdot \frac{\Delta t_k}{2} = \frac{b_{2,k}\Delta t_k^2}{4} + \frac{b_{1,k}\Delta t_k}{2} + b_{0,k}$$

代入 $b_{2,k}$ 和 $b_{1,k}$：

$$\begin{aligned} b_{0,k} &= q_k + \dot{q}_{k,k+1} \cdot \frac{\Delta t_k}{2} - \frac{b_{2,k}\Delta t_k^2}{4} - \frac{b_{1,k}\Delta t_k}{2} \\ &= q_k + \dot{q}_{k,k+1} \cdot \frac{\Delta t_k}{2} - \frac{(\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k})\Delta t_k}{8} - \frac{(\dot{q}_{k-1,k} + \dot{q}_{k,k+1})\Delta t_k}{4} \end{aligned}$$

合并同类项：

$$\begin{aligned} b_{0,k} &= q_k + \left[\frac{\dot{q}_{k,k+1}}{2} - \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{8} - \frac{\dot{q}_{k-1,k} + \dot{q}_{k,k+1}}{4}\right]\Delta t_k \\ &= q_k + \left[\frac{4\dot{q}_{k,k+1} - (\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}) - 2(\dot{q}_{k-1,k} + \dot{q}_{k,k+1})}{8}\right]\Delta t_k \\ &= q_k + \left[\frac{4\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k,k+1} + \dot{q}_{k-1,k} - 2\dot{q}_{k-1,k} - 2\dot{q}_{k,k+1}}{8}\right]\Delta t_k \\ &= q_k + \left[\frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{8}\right]\Delta t_k \end{aligned}$$

$$\boxed{b_{0,k} = q_k + \frac{(\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k})\Delta t_k}{8}} \tag{21}$$

3.3.5 步骤 5：误差分析

在路径点 $t = t_k$ 处，实际位置为：

$$\begin{aligned} q(t_k) &= b_{2,k}(0)^2 + b_{1,k}(0) + b_{0,k} = b_{0,k} \\ &= q_k + \frac{(\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k})\Delta t_k}{8} \end{aligned}$$

因此，轨迹误差为：

$$\boxed{e_k = q(t_k) - q_k = \frac{(\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k})\Delta t_k}{8}} \tag{22}$$

只有当 $\dot{q}_{k,k+1} = \dot{q}_{k-1,k}$（速度连续）或 $\Delta t_k = 0$（瞬时加速）时，误差才为零。

3.4 起点和终点的特殊处理

为了确保轨迹精确经过起点和终点，需要对第一段和最后一段进行特殊处理。

3.4.1 起点修正

对于第一段，我们有：

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1 - \frac{\Delta t_1}{2}}$$

$$\dot{q}_{1,2} = \ddot{q}_1 \Delta t_1$$

其中 $\ddot{q}_1 = \mathrm{sign}(q_2 - q_1)|\ddot{q}_1|$。
解得：

$$\boxed{\Delta t_1 = (t_2 - t_1) - \sqrt{(t_2 - t_1)^2 - \frac{2(q_2 - q_1)}{\ddot{q}_1}}} \tag{23}$$

3.4.2 终点修正

类似地，对于最后一段：

$$\boxed{\Delta t_n = (t_n - t_{n-1}) - \sqrt{(t_n - t_{n-1})^2 - \frac{2(q_n - q_{n-1})}{\ddot{q}_n}}} \tag{24}$$