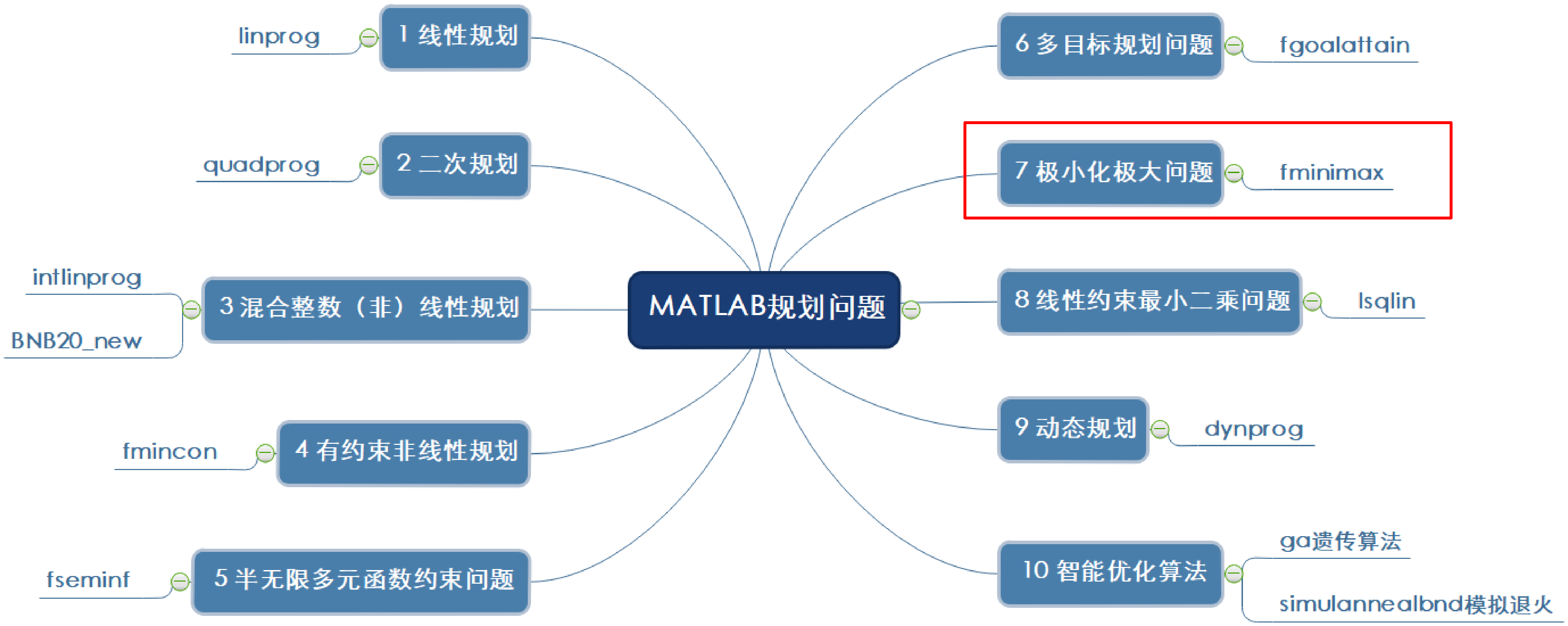
信陽師範學院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第6章 优化与规划问题

讲授人：牛言涛

日期：2020年3月15日

第6章 优化与规划问题知识结构图



运筹学（operational research）是一门解决一定约束条件下最优解的学科，应用现有的科学技术知识与数学手段，来解决实际生活之中的各种问题，是一门应用学科。运筹学分支还有规划论，排队论，图论，决策论等。

1. 极小化极大（Minmax）问题引论

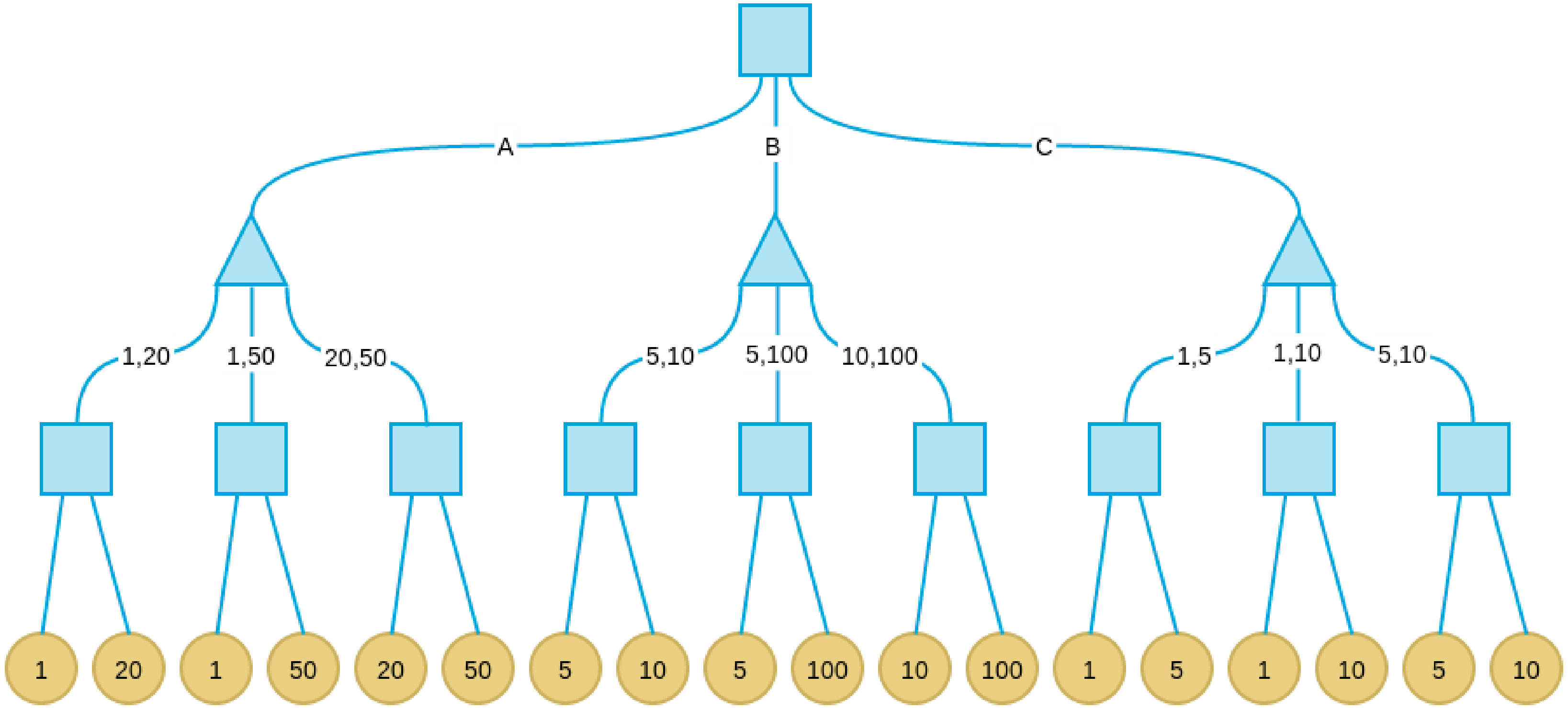
现在考虑这样一个游戏：有三个盘子A、B和C，每个盘子分别放有三张纸币。A放的是1、20、50；B放的是5、10、100；C放的是1、5、20。单位均为“元”。有甲、乙两人，两人均可以对三个盘子和上面放置的纸币任意查看。游戏分三步：

- 甲从三个盘子中选取一个。
- 乙从甲选取的盘子中拿出两张纸币交给甲。
- 甲从乙所给的两张纸币中选取一张，拿走。

其中甲的目标是最后拿到的纸币面值尽量大，乙的目标是让甲最后拿到的纸币面值尽量小。

1. 极小化极大（Minmax）问题引论

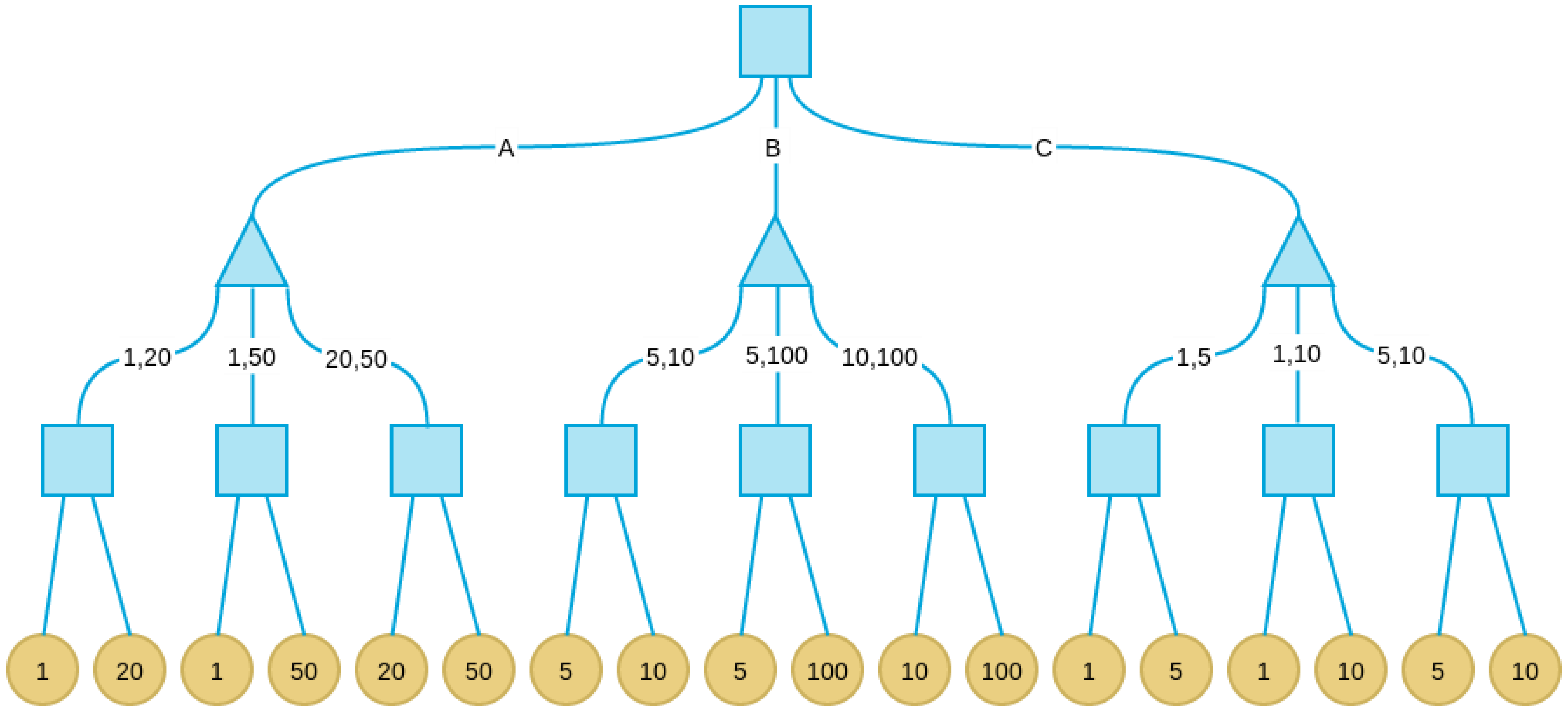
一般解决博弈类问题的自然想法是将格局组织成一棵树，树的每一个节点表示一种格局，而父子关系表示由父格局经过一步可以到达子格局。Minimax也不例外，它通过对以当前格局为根的格局树搜索来确定下一步的选择。而一切格局树搜索算法的核心都是对每个格局价值的评价。



注意，由于示例问题格局数非常少，可以给出完整的格局树。这种情况下可以找到Minimax算法的全局最优解。而真实情况中，格局树非常庞大，即使是计算机也不可能给出完整的树，因此往往只搜索一定深度，这时只能找到局部最优解。

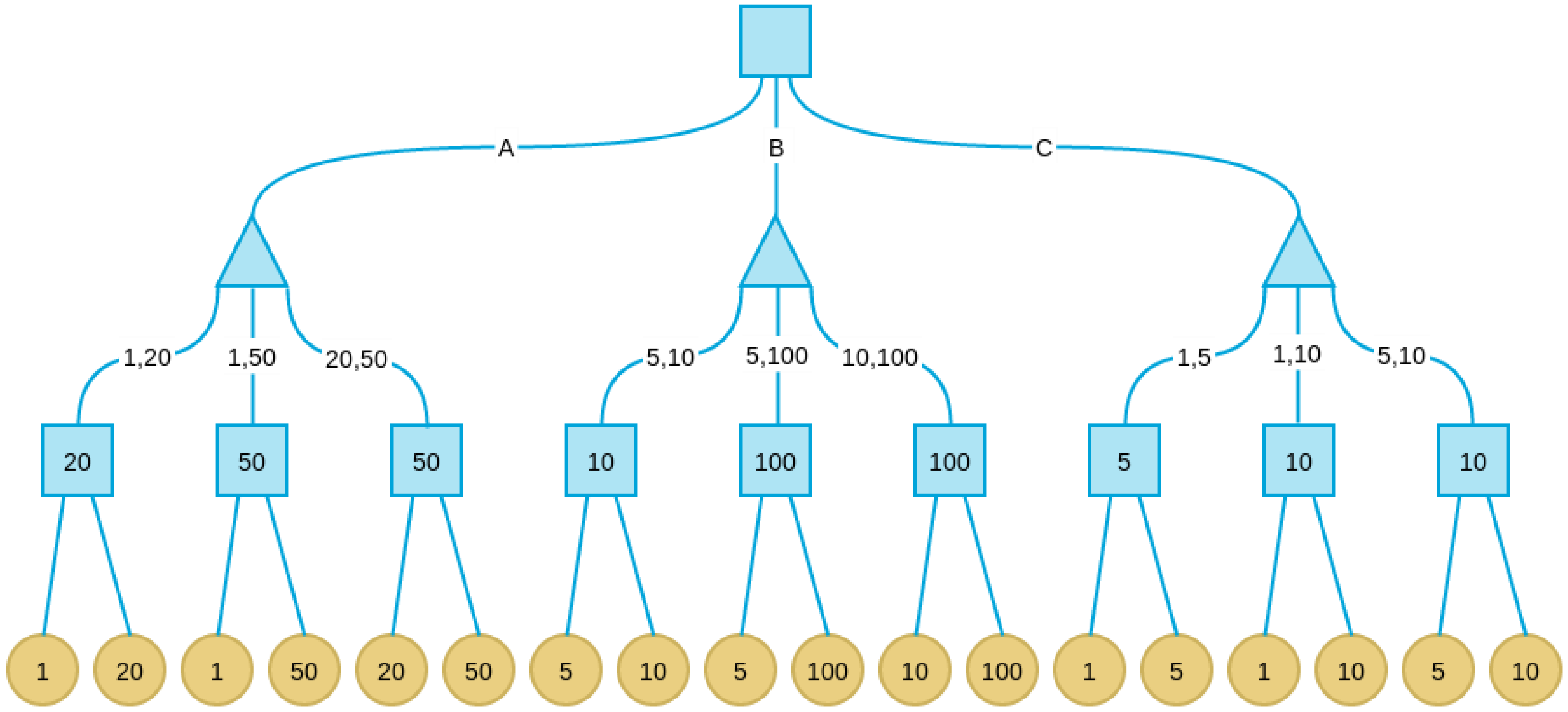
1. 极小化极大（Minmax）问题引论

从甲的角度考虑。其中正方形节点表示轮到我方（甲），而三角形表示轮到对方（乙）。经过三轮对弈后（我方-对方-我方），将进入终局。黄色叶结点表示所有可能的结局。从甲方看，由于最终的收益可以通过纸币的面值评价，自然可以用结局中甲方拿到的纸币面值表示终格局的价值。



1. 极小化极大（Minmax）问题引论

下面考虑倒数第二层节点，在这些节点上，轮到我方选择，所以我们应该引入可选择的最大价值格局，因此每个节点的价值为其子节点的最大值：

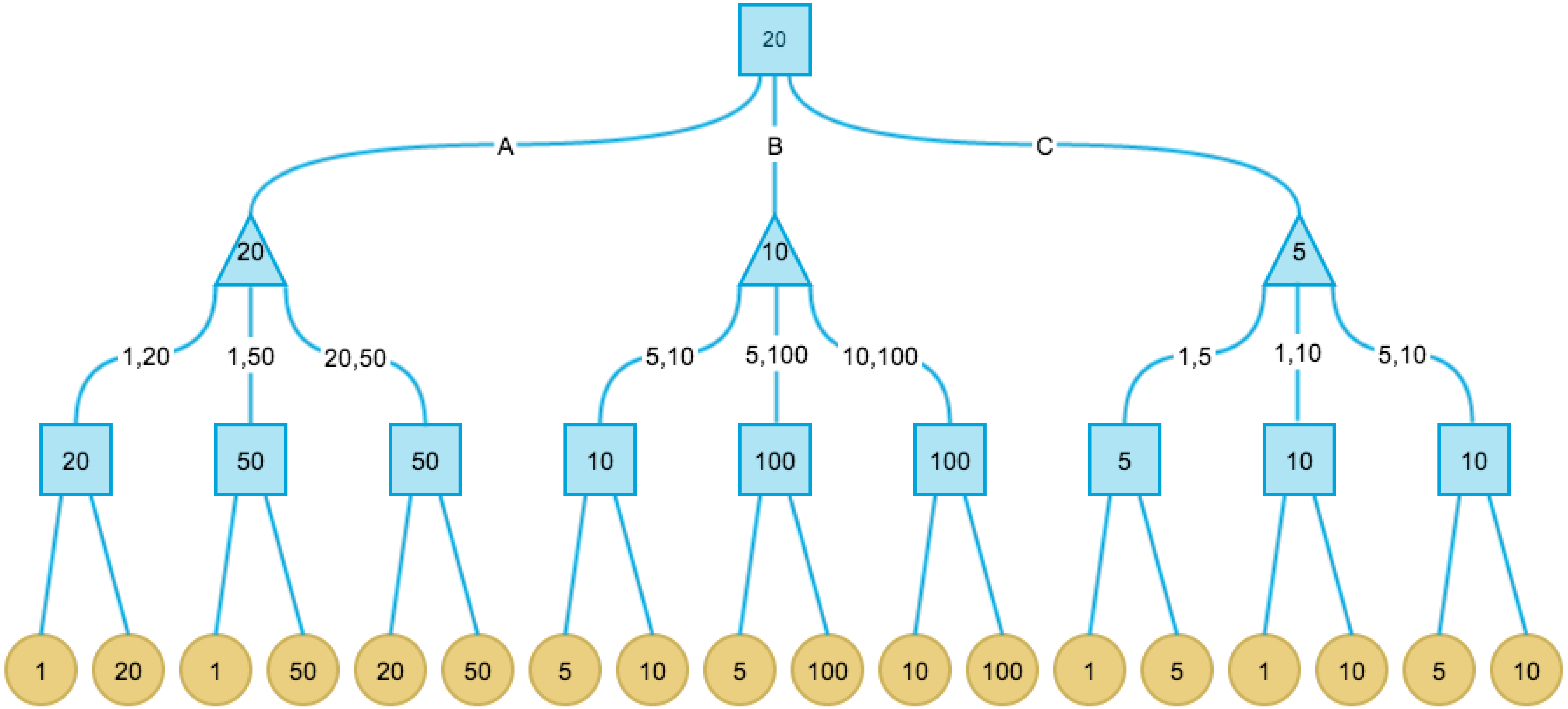


这些轮到我方的节点叫做max节点，max节点的值是其子节点最大值。

1. 极小化极大（Minmax）问题引论

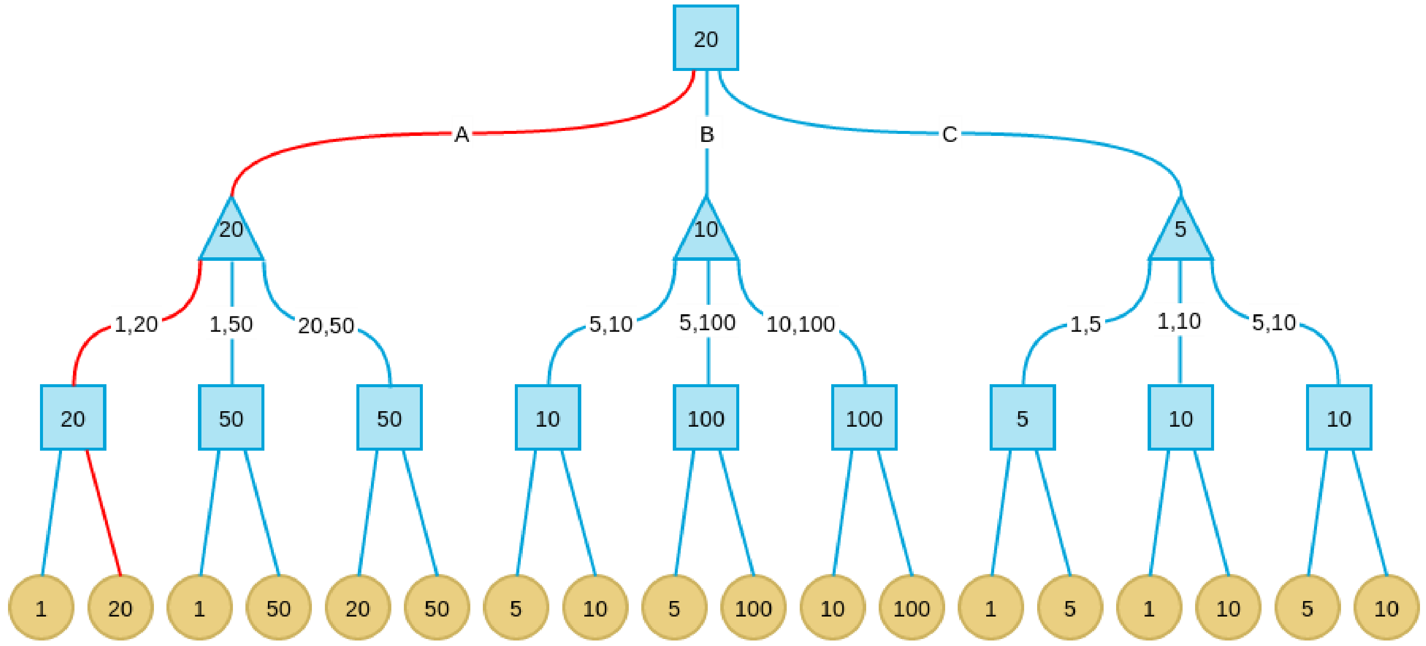
倒数第三层轮到对方选择，假设对方会尽力将局势引入让我方价值最小的格局，因此这些节点的价值取决于子节点的最小值。　这些轮到对方的节点叫做min节点。

最后，根节点是max节点，因此价值取决于叶子节点的最大值。最终完整赋值的格局树如下：



1. 极小化极大（Minmax）问题引论

在上面的例子中，根节点的价值为20，表示如果对方每一步都完美决策，则我方按照上述算法可最终拿到20元，这是我方在Minimax算法下最好的决策。格局转换路径如下图红色路径所示：



- 真实问题一般无法构造出完整的格局树，所以需要确定一个最大深度D，每次最多从当前格局向下计算D层。
- 因为上述原因，<u>Minimax一般是寻找一个局部最优解而不是全局最优解</u>，搜索深度越大越可能找到更好的解，但计算耗时会呈指数级膨胀。
- 因为无法一次构造出完整的格局树，所以真实问题中Minimax一般是边对弈边计算局部格局树，而不是只计算一次，但已计算的中间结果可以缓存。

1. 极小化极大（Minmax）问题引论

极小极大算法

极小极大算法常用于二人博弈游戏，目的是寻找最优的方案使得自己能够利益最大化。基本思想就是假设自己（A）足够聪明，总是能选择最有利于自己的方案，而对手（B）同样足够聪明，总会选择最不利A的方案。

Minimax是一种悲观算法，即假设对手每一步都会将我方引入从当前看理论上价值最小的格局方向，即对手具有完美决策能力。因此我方的策略应该是选择那些对方所能达到的让我方最差情况中最好的，也就是让对方在完美决策下所对我造成的损失最小。

Minimax不找理论最优解，因为理论最优解往往依赖于对手是否足够愚蠢，Minimax中我方完全掌握主动，如果对方每一步决策都是完美的，则我方可以达到预计的最小损失格局，如果对方没有走出完美决策，则我方可能达到比预计的最悲观情况更好的结局。总之我方就是要在最坏情况中选择最好的。

2. 极小化极大（Minmax）问题数学模型

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- 假设有某一组p个目标函数$f_i(x), i = 1, 2, \cdots, p$，它们中的每一个均可以提取出一个最大值 $\max\limits_{s.t.G(x)\le 0} f_i(x)$，而这样得出的一组最大值仍然是$x$的函数，现在想对这些最大值进行最小化搜索，即

$$J = \min\left[\max_{s.t.G(x)\le 0} f_i(x)\right]$$

则这类问题称为极小极大问题。

- 换句话说，极小极大问题是在最不利的条件下寻找最有利的决策方案的一种方法。

考虑规划城市中急救中心或者消防中心的建造位置，目标约束函数应该是到城市中各个房屋最大距离的最小值，而不是到达所有目的地距离和的最小值。简单地说就是前者考虑如何降低最恶劣情况的影响，后者考虑整体的联合优化。因为整个城市同时着火几率极低的，所以建模的时候更倾向于考虑前者这样的模型。

2. 极小化极大（Minmax）问题数学模型

- 极小化极大问题的标准形式为

$$\min_{x}\max_{\{F_i\}}\ \{F_i(x)\}$$

$$s.t.\begin{cases} C(x)\le 0 \\ Ceq(x)=0 \\ AX\le b \\ AeqX=b \\ lb\le x\le ub \end{cases}$$

$$\min\max\begin{bmatrix} x_1^2\sin x_2+x_2-3x_1x_2\cos x_1 \\ -x_1^2e^{-x_2}-x_2^2e^{-x_1}+x_1x_2\cos x_1x_2 \\ x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+x_1-x_2 \\ -x_1^2-x_2^2\cos x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$s.t.\begin{cases} 4.3x_1+3.8x_2\le 4.9 \\ x_1+x_2\le 3 \end{cases}$$

其中：x、b、beq、lb、ub是向量，A、Aeq为矩阵，C(x)、Ceq(x)和F(x)是返回向量的函数，F(x)、C(x)、Ceq(x)可以是非线性函数。

3. 极小化极大（Minmax）问题求解函数

信陽師範學院 数学与统计学院 SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

[x,fval,maxfval,flag,output,lambda] = fminimax(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)

- fminimax用来求最小的最大值。比如城市建设消防站点时，考虑到最主要的因素是到最远的地方的用时（可换算为距离）最小；比如A方案到6个区域的用时为（1 1 1 1 1 12），B方案到6个区域的用时为（3 4 3 2 3 5），则虽然A方案总体用时较少，但是B方案优于A方案，因为该问题中消防安全（对每个区域）权重最大。
- nonlcon的作用是通过接受的向量x来计算非线性不等约束和等式约束分别在x处的值C和Ceq，通过指定函数柄来使用，如：function [C,Ceq] = mycon(x)
- fval为最优点处的目标函数值；maxfval为目标函数在x处的最大值；

4. 案例分析

例1：设某城市有某种物品的10个需求点，第i个需求点p_i的坐标为(a,b)，道路网与坐标轴平行，彼此正交。现打算建一个该物品的供应中心，且由于受到城市某些条件的限制，该供应中心只能设在x界于[5,8]，y界于[5,8]的范围之内。问该中心应建在何处为好?

需求点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	4	3	5	9	12	6	20	17	8
b	2	10	8	18	1	4	5	10	8	9

$$\min\left\{\max_{1\le i\le 10}\left[\left|x-a_i\right|+\left|y-b_i\right|\right]\right\}$$

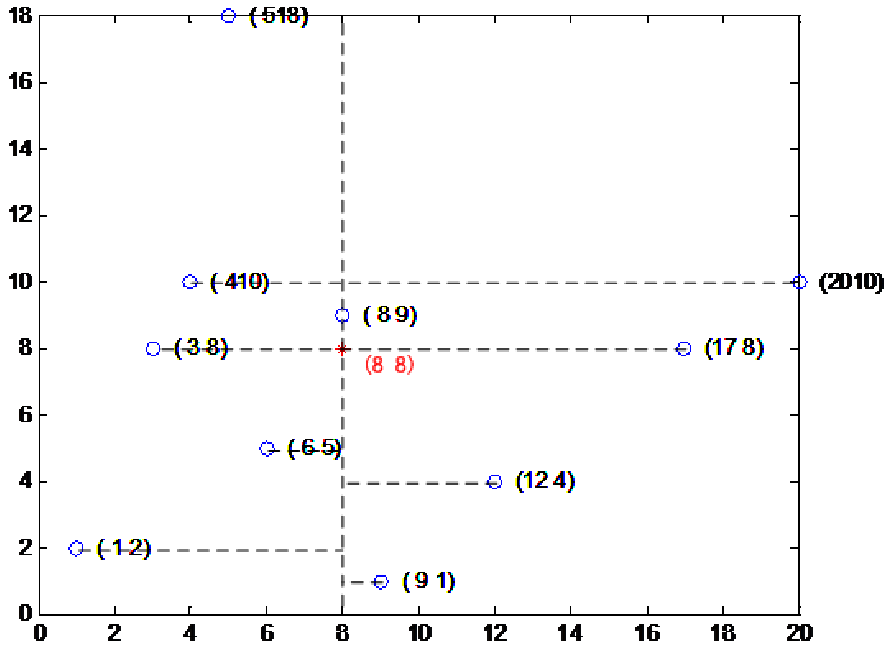
$$s.t.\begin{cases}5\le x\le 8\\5\le y_2\le 8\end{cases}$$

4. 案例分析

```
function fh = fminmaxfun(X)
  x = X(1);
  y = X(2);
  a = [1 4 3 5 9 12 6 20 17 8];
  b = [2 10 8 18 1 4 5 10 8 9];
  for i = 1:length(a)
        fh(i) = abs(x-a(i)) + abs(y-b(i));
  end
  fh = -fh';
end
```

```
>> lb = [5;5];
>> ub = [8;8];
>> [x,fval,maxfval,flag] = fminimax(@fminmaxfun,[1;1],[],[],[],[],lb,ub)
x =
    8  8
fval =
   13  6  5  13  8  8  5  14  9  1
maxfval =
   14
flag =
    4
```

需求点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	4	3	5	9	12	6	20	17	8
b	2	10	8	18	1	4	5	10	8	9



4. 案例分析

例2：在城市规划中经常涉及公共设施的选址问题。公共设施选址的依据不单单是建筑成本或经营成本的最小化，还涉及效用的最大化与公平性的最大化。

例如在A、B、C、D、E五个城市建立垃圾处理厂P，不仅需要考虑各城市将垃圾运往P的运输成本达到最小，还应使得各城市的运输成本尽可能地接近。由于运输成本主要由城市与P之间的距离决定，所以垃圾处理厂P的选址目标是使得五个城市到P的距离尽量相近。如果把这五个城市与P的距离之和最小化作为优化目标，可能会造成某个城市到P的距离明显大于其他四个城市到P的距离，在某种意义上造成不公平，即中国名言“不患寡而患不均”。

为使得公平性最大化，应使得各城市与垃圾处理厂P的距离差异化最小，也就是使得五个城市与P的最大距离达到最小，这就是一个极小化极大问题。

又已知五个城市之间有一条高速公路，直线方程为$y = x - 2.5$，为方便转运垃圾， P需要紧邻公路。

城市	A	B	C	D	E
a坐标	1.5	6.0	8.9	3.5	7.4
b坐标	6.8	7.0	6.9	4.0	3.1

4. 案例分析

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

假设垃圾处理厂(x, y)到某个城市(a, b)的距离为直线距离，则建立数学模型，

$$\min\left\{\max\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_5(x)\right)\right\}$$

$$f_i = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},\ i = 1, 2, \cdots, 5$$

$$s.t.\quad x_1 - x_2 = 2.5$$

城市	A	B	C	D	E
a坐标	1.5	6.0	8.9	3.5	7.4
b坐标	6.8	7.0	6.9	4.0	3.1

```
minimaxfun = @(x)sqrt([(x(1)-1.5)^2+(x(2)-6.8)^2;
    (x(1)-6.0)^2+(x(2)-7.0)^2;  (x(1)-8.9)^2+(x(2)-6.9)^2;
    (x(1)-3.5)^2+(x(2)-4.0)^2;  (x(1)-7.4)^2+(x(2)-3.1)^2]);  %目标函数
x0 = [0;0];
Aeq = [1 -1];
beq = 2.5;
[x,fval,maxfval,exitflag,output] = fminimax(minimaxfun,x0,[],[],Aeq,beq)
```

```
x =
    5.4000  2.9000
fval =
    5.5154  4.1437  5.3151
2.1954  2.0100
maxfval = 5.5154
```

4. 案例分析

例3：试求解下面的极小极大问题

$$\min\max\begin{bmatrix} x_1^2\sin x_2 + x_2 - 3x_1x_2\cos x_1 \\ -x_1^2e^{-x_2} - x_2^2e^{-x_1} + x_1x_2\cos x_1x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 - x_2 \\ -x_1^2 - x_2^2\cos x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$s.t.\begin{cases} 4.3x_1 + 3.8x_2 \le 4.9 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

```
function fh = fminmaxfun(x)
  fh = [x(1)^2*sin(x(2))+x(2)-3*x(1)*x(2)*cos(x(1));
        -x(1)^2*exp(-x(2))-x(2)^2*exp(-x(1))+x(1)*x(2)*cos(x(1)*x(2));
         x(1)^2+x(2)^2-2*x(1)*x(2)+x(1)-x(2);
        -x(1)^2-x(2)^2*cos(x(1)*x(2))];
end
```

```
>> A = [4.3 3.8;1 1];
>> b = [4.9;3];
>> [x,fval,maxfval] = fminimax(@fminmaxfun,randn(2,1),A,b)
```

```
x =
    0.5319   0.6876
fval =
   -0.0785  -0.0785  -0.1314  -0.7244
maxfval = -0.0785
```

4. 案例分析

例4： 求下列函数最大值的最小化问题

$$\left[f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ f_5(x) \right]$$

$$\begin{cases} f_1(x)=2x_1^2+x_2^2-48x_1-40x_2+304 \\ f_2(x)=-x_2^2-3x_2^2 \\ f_3(x)=x_1+3x_2-18 \\ f_4(x)=-x_1-x_2 \\ f_5(x)=x_1+x_2-8 \end{cases}$$

```
function fx = minmaxfun(x)
  fx(1)= 2*x(1)^2+x(2)^2-48*x(1)-40*x(2)+304;
  fx(2)= -x(1)^2 - 3*x(2)^2;
  fx(3)= x(1) + 3*x(2) -18;
  fx(4)= -x(1)- x(2);
  fx(5)= x(1) + x(2) - 8;
end
```

```
>> x0 = [1;1];
>> [x,fval,maxfval] = fminimax(@minmaxfun,x0)
x =
    4.0000    4.0000
fval =
    0.0000  -64.0000    -2.0000    -8.0000    -0.0000
maxfval =
   8.5265e-12
```

4. 案例分析

例5：求上述问题绝对值 $\left[\left|f_1(x)\right|,\left|f_2(x)\right|,\left|f_3(x)\right|,\left|f_4(x)\right|,\left|f_5(x)\right|\right]$ 的最大值最小化问题

先建立目标函数文件（与上例相同），然后，在命令窗口或编辑器中建立M文件：

```
>>x0 = [0.1; 0.1];        % 初始点
>>options = optimset('MinAbsMax',5);   % 指定绝对值的最小化
>>[x,fval] = fminimax(@minmaxfun2,x0,[ ],[ ],[ ],[ ],[ ],[ ],[ ],options)
```

则结果为

```
x =
    4.9256
    2.0796
fval =
   37.2356  -37.2356   -6.8357   -7.0052   -0.9948
```


01
02
03
EDUCATION
BUSINESS
IDEA
LEARNING
CREATIVE
INSPIRATION
PHOTO BOOK

感谢聆听