信陽師範学院

数学与统计学院

SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

-1975-

第1章 MATLAB基础

讲授人：牛言涛

日期：2020年2月12日

目录
CONTENTS

问题提出

假设你受雇于某家蹦极公司。你的任务是要预测蹦极过程中在自由落体阶段蹦极运动员的速度，它是时间的函数。

得到的信息可以用更进一步的分析，如针对不同质量的蹦极运动员确定蹦极绳索的长度和必要强度。

基于牛顿第二定律和基本的物理、流体力学知识，建立数学模型：

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

其中c_d是集总阻力系数(kg/m)。

问题求解——解析解

信阳师范学院 数学与统计学院 SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

```
>> syms m cd g v(t)  %符号定义
>> eq = diff(v,t) == g - cd/m*v^2;  %微分方程matlab语言写法
>> sol = dsolve(eq)  %求解微分方程
sol =  -(g^(1/2)*m^(1/2)*tanh(cd^(1/2)*g^(1/2)*m^(1/2)*(C2 - t/m)))/cd^(1/2)
>> cond = v(0) == 0;  %初值条件
>> sol = dsolve(eq,cond)
sol = (g^(1/2)*m^(1/2)*tanh((cd^(1/2)*g^(1/2)*t)/m^(1/2)))/cd^(1/2)
```

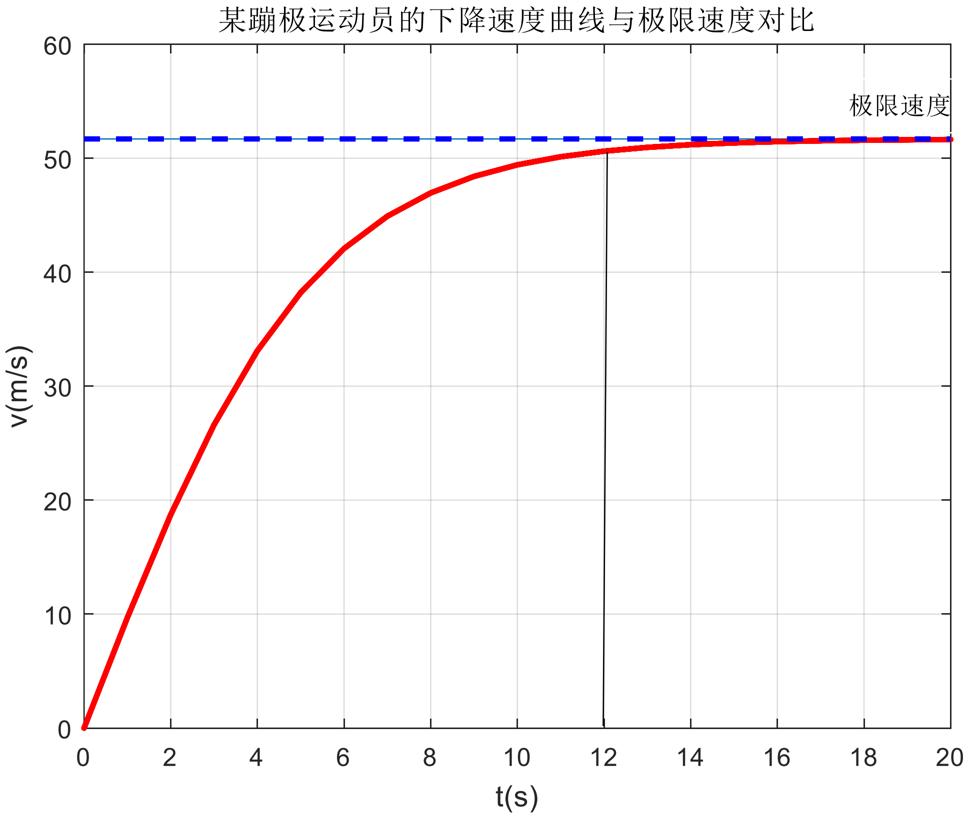
$$v(t)=\sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

问题：一个质量为68.1kg的蹦极运动员从一个静止的热气球上滑落，计算蹦极运动员前12s自由落体过程中的速度。如果所使用的绳索无限长，那么还可以确定蹦极运动员能达到的最终速度。假设阻尼系数为0.25kg/m。

问题求解——解析解

编写脚本文件，实现求解并绘图，适当添加图形标记

```
sol = dsolve('Dv = g - cd/m*v^2', 'v(0)=0');   %另一种求解方法，符号运算，求解微分方程通解
vt = subs(subs(subs(sol, 'm',68.1), 'g',9.81), 'cd',0.25);  %符号表达式带入值求解
t = findsym(vt);   %获取表达式的符号变量
for ti = 0:20   %在t = [0,20]区间每隔1s求解速度值
    v(ti+1) = subs(vt,t,ti);
end
plot(0:20,v,'r.-','LineWidth',2);  %绘制图像
grid on  %添加网格
hold on  %保持当前图像不变，再添加图形
val = double(limit(vt,'t',inf));   %求极限
fh = @(x)val;  %常量函数
fplot(fh,[0,20],'b--',1e-6);  %绘制极限值曲线
```



解析解与数值解的对比

信阳师范学院
数学与统计学院

- 遗憾的是，很多数学模型还不能精确地求解，遇到这种情况时，多数情况下唯一的选择就是建立逼近精确解的数值解。
- 借助有限差分逼近(finite-difference approximation)

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2 \right] (t_{i+1} - t_i)$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \frac{dv_i}{dt} \Delta t$$

欧拉法

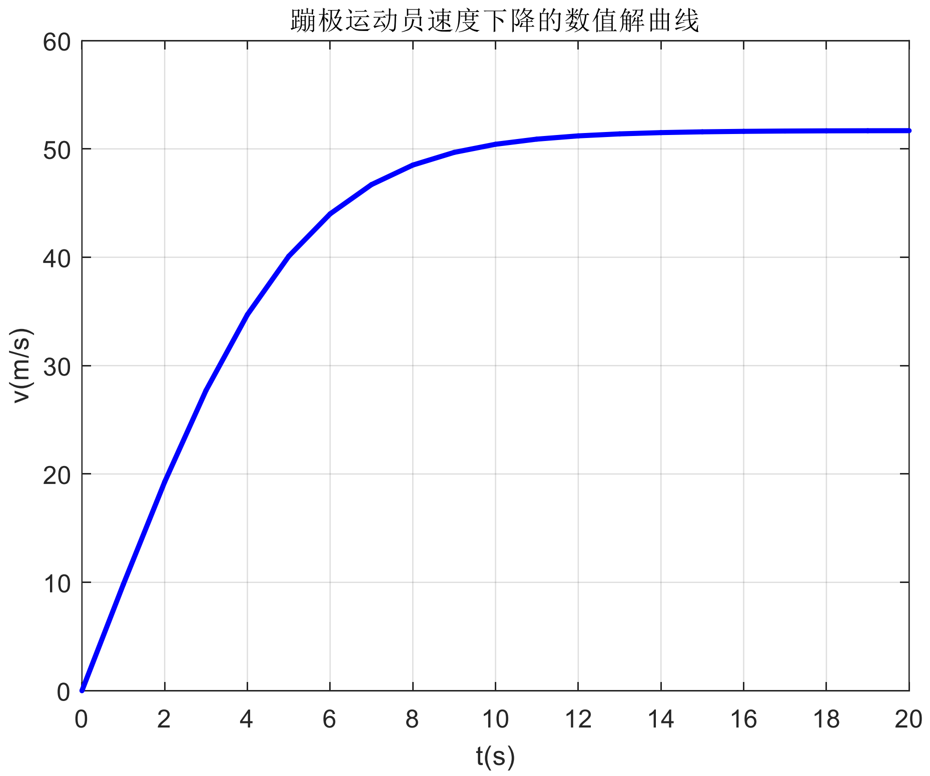
数值方法求解

编写函数文件，实现数值求解，注意与脚本文件的区别

```
function vt = bungee_speed(m,cd,dt,tend)
  g = 9.81;
  vb = 0; %对应于v(i)
  bn = 0; %对应于v(i+1)
  i = 1;  %用于记录每次迭代中变量保存的行标
  for ti = 0:dt:tend
      vn = vb + (g - cd/m*vb^2)*dt;
      vt(i,1) = ti;  vt(i,2) = vb;   %保存每次迭代速度值
      i = i + 1;
      vb = vn;   %迭代
  end
  plot(vt(:,1),vt(:,2),'b.-','LineWidth',2);  %绘制曲线
  title('蹦极运动员速度下降的数值解曲线');  %添加标题
  xlabel('t(s)'); ylabel('v(m/s)');grid on  %添加坐标轴标题
end
```

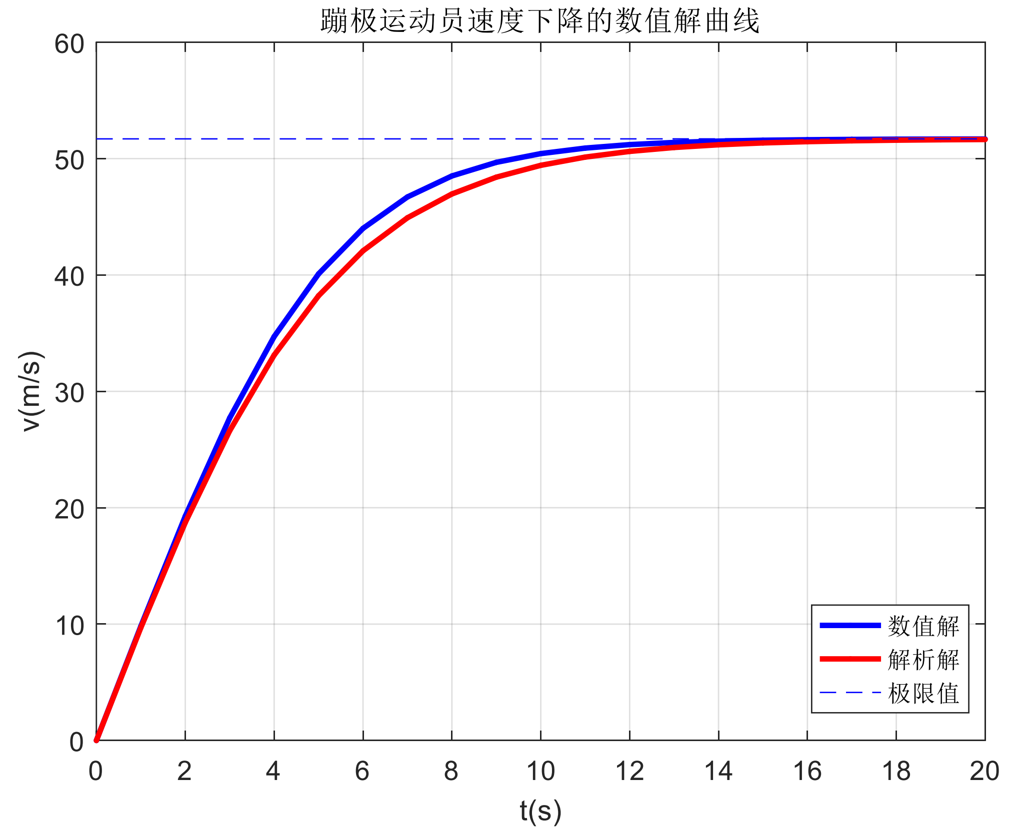
函数调用

```
>> vt = bungee_speed(68.1,0.25,1,20)
```



解析解与数值解的对比

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

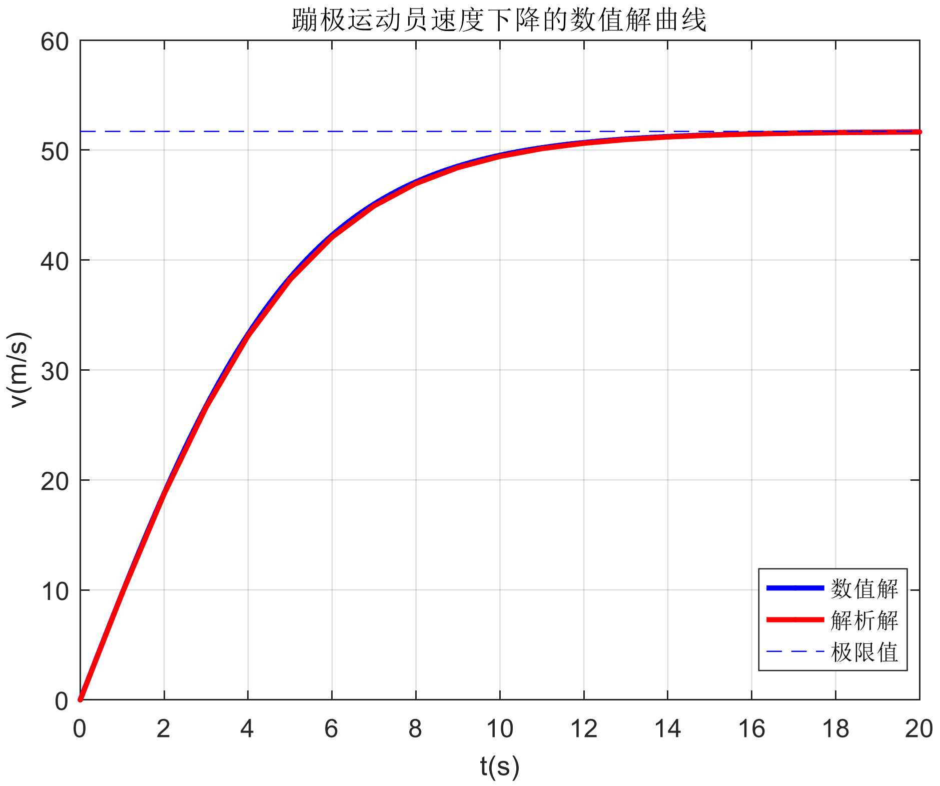


t	数值解	解析解
0	0	0
1.0000	9.8100	9.6939
2.0000	19.2667	18.7292
3.0000	27.7140	26.6148
4.0000	34.7044	33.1118
5.0000	40.0930	38.2154
6.0000	44.0019	42.0762
7.0000	46.7041	44.9145
8.0000	48.5065	46.9575
9.0000	49.6789	48.4058
10.0000	50.4287	49.4214
11.0000	50.9030	50.1282
12.0000	51.2008	50.6175
13.0000	51.3870	50.9550
14.0000	51.5031	51.1871
15.0000	51.5753	51.3466
16.0000	51.6202	51.4560
17.0000	51.6481	51.5310
18.0000	51.6654	51.5823
19.0000	51.6762	51.6175
20.0000	51.6828	51.6416

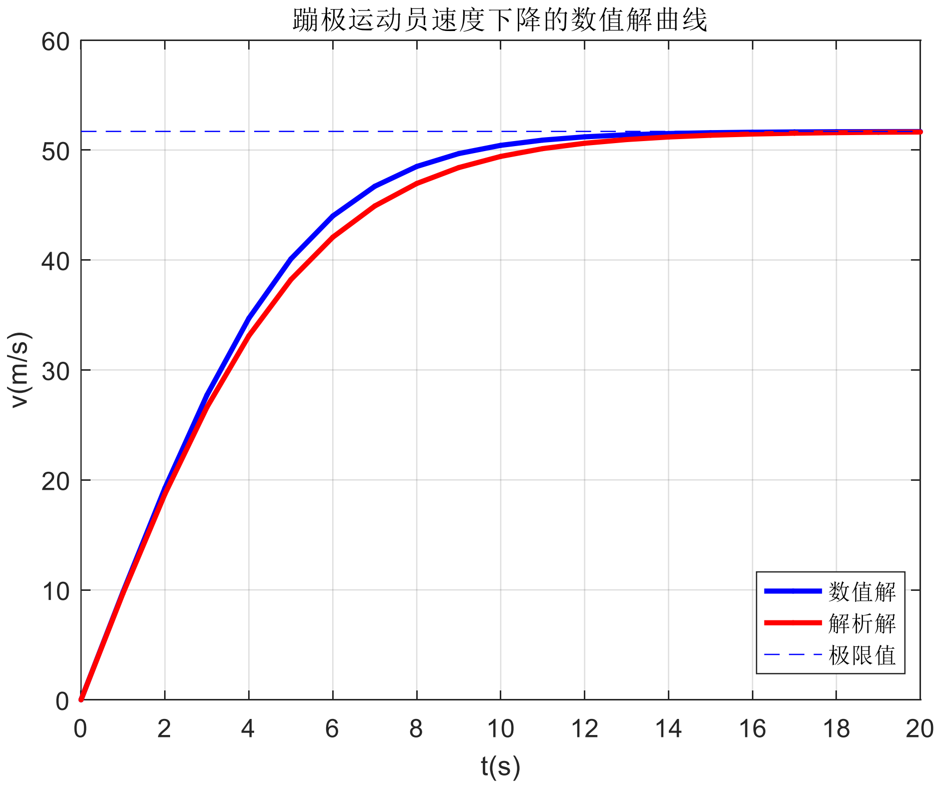
误差比较大，源于欧拉法公式的构造问题，可用其他方法，如 Runge-Kutta公式、Adams公式。或者减少步长。

解析解与数值解的对比

- 减少步长为原来的1/10，即0.1s，则误差变小，为什么？



步长0.1s



步长1s


01
IDEA
02
LEARNING
03
CREATIVE
INSPIRATION
EDUCATION
BUSINESS
PHOTO BOOK

感谢聆听