信陽師範學院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第2章 矩阵分析与计算

讲授人：牛言涛

日期：2020年2月18日

目录

CONTENTS

2.4 矩阵分析与处理

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

MATLAB提供的部分矩阵分析函数如下表所示。

函数名	功能描述	函数名	功能描述
norm	向量和矩阵的距离度量（范数）	null	化零空间
rank	矩阵的秩	orth	正交空间（正交基矩阵）
det	矩阵的行列式	rref	矩阵的简化梯形形式 阶梯矩阵 和 主元列
trace	矩阵的迹	subspace	两个子空间的角度
'	矩阵的转置	eig	特征值特征向量
inv	矩阵求逆	cond	矩阵条件数
chol	正定矩阵	trigle	矩阵对角化（自定义函数）

1 矩阵的逆

- 在MATLAB中，求方阵A的逆矩阵可调用函数inv(A)。
- 例：用求逆矩阵的方法解线性方程组：

$$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x+4y+9z=-2 \\ x+8y+27z=6 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

则原线性方程组可简写为 $Ax=b$，

其解为：$x=A^{-1}b$

```
>> A = [1,2,3;1,4,9;1,8,27];  %系数矩阵
>> b = [5,-2,6]'; %右端向量
>> x = inv(A)*b  %矩阵求逆的方法求解
x =
   23.0000
  -14.5000
    3.6667
>> x = A\b  %运用左除运算符求解线性代数方程组
x =
   23.0000
  -14.5000
    3.6667
```

1 矩阵的逆

- 如果误差矩阵的范数是一个微小的数(10^{-15}~10^{-16})，则可以接受得出的逆矩阵，否则应该认为是不正确的。

```
>> H = hilb(10);
>> H1 = inv(H);       %直接求逆矩阵
>> n1 = norm(H*H1 - eye(size(H)))          %误差比较大
n1 =
   2.2677e-04
>> H2 = invhilb(10);     %利用自带函数求hilbert逆矩阵
>> n2 = norm(H*H2 - eye(size(H)))      %误差比较大
n2 =
   1.6148e-04
>> H3 = sym(hilb(10)); %使用符号工具箱，即使对更高阶的非奇异矩阵也可以精确求解出矩阵的逆矩阵来。
>> n3 = norm(H*inv(H3) - eye(size(H)))
n3 =
0
```

2 方阵的行列式

- MATLAB中，求方阵A所对应的行列式的值得函数det(A).
- 例：用克拉默（Cramer）方法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

```
>> D=[2,2,-1,1;4,3,-1,2;8,5,-3,4;3,3,-2,2];    %定义系数矩阵
>> b = [4;6;12;6];    %定义常数项向量
>> D1 = [b,D(:,2:4)];    %用方程组的右端向量置换D的第1列
>> D2 = [D(:,1:1),b,D(:,3:4)];    %用方程组的右端向量置换D的第2列
>> D3 = [D(:,1:2),b,D(:,4:4)];    %用方程组的右端向量置换D的第3列
>> D4 = [D(:,1:3),b];    %用方程组的右端向量置换D的第4列
>> DD = det(D);
>> x1 = det(D1)/DD;
>> x2 = det(D2)/DD;
>> x3 = det(D3)/DD;
>> x4 = det(D4)/DD;
>> X = [x1,x2,x3,x4]
X =
    1.0000    1.0000   -1.0000   -1.0000
```

2 方阵的行列式

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

Cramer.m

```
function Cramer(A,b)
%% 克拉默法则求解线性方程组的解，其中A为系数矩阵，b为右端向量
%% 1、输入参数的判断
    if nargin == 0 || nargin == 1 %判断输入参数个数
        disp('您输入的参数个数不足！');
        return
    end
%% 2、判断矩阵是否为方阵
    [rs,cs] = size(A); %求矩阵的维度长度
    if rs ~= cs
        disp('系数矩阵必须是方阵，否则无法用克拉默法则求解！');
        return
    end
%% 3、求解判断系数矩阵行列式的值
    D = det(A);  %求系数矩阵的行列式值
    if D == 0
        disp('系数矩阵行列式的值等于零！');
        return
    end
%% 4、克拉默法则求解和输出
    disp('线性方程组的解为：');
    for i = 1:rs
        AX = [A(:,1:i-1),b,A(:,i+1:cs)]; %用方程组的右端向量置换A的第i列
        x = det(AX)/D; %克拉默法则
        fprintf('x%d = %.6f\n',i,x); %指定输出格式
    end
end
```

```
>> A = [2,2,-1,1;4,3,-1,2;8,5,-3,4;3,3,-2,2] %系数矩阵
A =
     2     2    -1     1
     4     3    -1     2
     8     5    -3     4
     3     3    -2     2
>> b = [4;6;12;6]   %定义常数项向量
b =
     4
     6
    12
     6
>> Cramer(A,b)
线性方程组的解为：
x1 = 1.000000
x2 = 1.000000
x3 = -1.000000
x4 = -1.000000
```

3 矩阵的秩

- 一个矩阵中行（列）向量的最大线性无关组包含的行（列）向量的个数称为该矩阵的秩。（满秩）
- 所谓一个线性变换的秩，无非就是变换后，还能保持非零体积的几何形状的最大维度。「秩」是图像经过矩阵变换之后的空间维度。
- MATLAB中，求矩阵秩的函数是rank(A)。
- 例：求矩阵的秩 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

```
>> D=[2,2,-1,1;4,3,-1,2;8,5,-3,4;3,3,-2,2]    %系数矩阵
D =
     2     2    -1     1
     4     3    -1     2
     8     5    -3     4
     3     3    -2     2
>> r = rank(D)
r =
     4
```

4 向量和矩阵的范数

- 设向量V=($v_1,v_2,\ldots,v_n$)，下面讨论向量的4种范数：

  (1) 2 - 范数： $\|V\|_2=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$

  (2) 1 – 范数： $\|V\|_1=|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_n|$

  (3) ∞ - 范数： $\|V\|_\infty=\max\{|v_i|\}$ $\|V\|_{-\infty}=\min\{|v_i|\}$

  (4) p – 范数： $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

- 在MATLAB中，求解3种向量范数的函数为：

  norm(V)或norm(V,2)： 2 - 范数；norm(V,1)： 1 - 范数；norm(V,inf)： ∞ - 范数；

  norm(V,p)：p范数

4 向量和矩阵的范数

多个单位向量 --变换--> 变换后矩阵

（变换的）矩阵范数 = 变换矩阵中最长的向量

数学与统计学院

- 设A是一个m×n的矩阵，V是一个含有n个元素的列向量，定义 $\|A\| = \max\|AV\|, \|V\| = 1$

(1) $\|A\|_1 = \max\limits_{\|V\|=1}\{\|AV\|_1\} = \max\limits_{k}\{\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ik}|\}$ 列和范数，A每一列元素绝对值之和的最大值。

(2) $\|A\|_2 = \max\limits_{\|V\|=1}\{\|AV\|_2\} = \sqrt{\lambda_1}$ 谱范数，λ为A'A的最大特征值。

(3) $\|A\|_\infty = \max\limits_{\|V\|=1}\{\|AV\|_\infty\} = \max\limits_{i}\{\sum\limits_{k=1}^{m}|a_{ik}|\}$ 行和范数

(4) $\|A\|_F = \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Frobenius范数，norm(A, 'fro')。

MATLAB中，前三种矩阵范数函数与向量范数函数相同。

4 向量和矩阵的范数

信阳师范学院 数学与统计学院 SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

➢ 例：求矩阵的4种范数

\>> A = [17,0,1,0,15; 23,5,7,14,16; 4,0,13,0,22; 10,12,19,21,3; 11,18,25,2,19]

```
>> A = [17,0,1,0,15; 23,5,7,14,16; 4,0,13,0,22; 10,12,19,21,3; 11,18,25,2,19]
A =
    17     0     1     0    15
    23     5     7    14    16
     4     0    13     0    22
    10    12    19    21     3
    11    18    25     2    19
>> a1 = norm(A,1)      %求A的1 - 范数
a1 =
    75
>> a2 = norm(A) %求A的2 - 范数
a2 =
   59.3617
>> a3 = norm(A,inf)     %求A的∞ - 范数
a3 =
    75
>> a4 = norm(A,'fro')     %求A的F范数
a4 =
   68.7677
```

5 矩阵的条件数和迹

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- 定义 $cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$，即矩阵A的条件数等于A的范数与A的逆矩阵的范数的乘积。条件数越接近于1，矩阵的性能越好，反之，矩阵的性能越差。
- 条件数是线性方程组Ax=b的解对b中的误差或不确定度的敏感性的度量。
  - (1) cond(A,1)
  - (2) cond(A)或cond(A,2)
  - (3) cond(A,inf)
- 例6：求矩阵A三种条件数。

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

```
>> A = [2,2,3;4,5,-6;7,8,9]
A =
     2     2     3
     4     5    -6
     7     8     9
>> c1 = cond(A,1)
c1 =
  149.1429
>> c2 = cond(A,2)
c2 =
   87.9754
>> c3 = cond(A,inf)
c3 =
  144.0000
```

```
>> c4 = norm(A,1)*norm(inv(A),1)   %1-范数求条件数
c4 =
  149.1429
>> c5 = norm(A,2)*norm(inv(A),2)   %2-范数求条件数
c5 =
   87.9754
>> c6 = norm(A,inf)*norm(inv(A),inf)   %inf-范数求条件数
c6 =
  144.0000
```

5 矩阵的条件数和迹


```
>> A = [2,2,3;4,5,-6;7,8,9];
>> b = [1;2;3];
>> X = A\b   %求解线性方程组的解
X =
    1.1429
   -0.5714
   -0.0476
>> A1 = A;
>> A1(1,1) =  A1(1,1)-0.01
>> A1(2,2) =  A1(2,2)+0.005
>> X2 = A1\b
X2 =
    1.2070
   -0.6216
   -0.0529
```

条件数是线性方程组Ax=b的解对b中的误差或不确定度的敏感性的度量。

$$\begin{bmatrix} 400 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

很容易得到解为： x1 = -100, x2 = -200. 比如，将 A 矩阵的系数 400 改变成 401：

$$\begin{bmatrix} 401 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

则得到一个截然不同的解： x1 = 40000, x2 = 79800.

主要是两个向量可以互相近似线性表达（如[401 -201]与[-800 401]），从而另一项近似残差项，这样微小的扰动带来大的扰动。

5 矩阵的条件数和迹

- 矩阵的迹等于矩阵对角线元素之和，也等于矩阵的特征值之和。MATLAB中，求矩阵的迹的函数是trace(A).
- 例：求矩阵A的迹。

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\4 & 5 & -6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

迹、特征值、行列式都是相似不变量。与坐标基变换无关。

```
>> A = [2,2,3;4,5,-6;7,8,9]
A =
     2     2     3
     4     5    -6
     7     8     9
>> tr = trace(A)
tr =
    16
>> tr2 = sum(diag(A))  %取出对角线元素向量，然后求和
tr2 =
    16
>> [C,D] = eig(A)
C =
  -0.7586 + 0.0000i   0.2444 - 0.0372i   0.2444 + 0.0372i
   0.6514 + 0.0000i  -0.3196 + 0.5155i  -0.3196 - 0.5155i
   0.0113 + 0.0000i   0.7557 + 0.0000i   0.7557 + 0.0000i
D =
   0.2380 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   7.8810 + 5.1126i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   7.8810 - 5.1126i
>> tr3 = sum(D(:))  %矩阵特征值之和
tr3 =
   16.0000
```

6 矩阵的特征值与特征向量

计算矩阵A的特征值和特征向量的函数是eig(A)和eigs(A)：

（1）E=eig(A)：求矩阵A的全部特征值，构成向量E

（2）[V,D]=eig(A)：求矩阵A的全部特征值，构成对角阵D，并求A的特征向量构成V的列向量。

（3）[V,D]=eig(A, 'nobalance')：与第2种相似，但第2种先对A作相似变换，后求特征值特征向量，本格式直接求。

（4）[V,D,flag] = eigs(A,k,sigma) 求稀疏矩阵A的k个最大特征值

- sigma取值：lm表示绝对值最大的特征值；sm绝对值最小特征值；对实对称问题：la表示最大特征值；sa为最小特征值；对非对称和复数问题：lr表示最大实部；sr表示最小实部；li表示最大虚部；si表示最小虚部。
- flag表示特征值的收敛性，若flag=0，则所有特征值都收敛，否则，不是所有都收敛。

6 矩阵的特征值与特征向量


```
>> A = gallery('lehmer',4)  %生成正定矩阵
>> D = eig(A)  %计算特征向量，返回列向量形式
>> D = eig(A,'matrix') %计算特征向量，返回矩阵形式
>> [V,D] = eig(A) %计算特征值D和特征向量V
>> [V,D] = eig(A,'nobalance') %对A不做相似变换
>> A*V-V*D   %验证所求 A*V = V*D.
>> Ac = gallery('circul',4) %生成循环矩阵
>> [Vc,Dc] = eig(Ac)
>> Ad = [ 3.0    -2.0     -0.9     2*eps;
    -2.0      4.0      1.0    -eps;
    -eps/4    eps/2    -1.0      0;
    -0.5     -0.5      0.1     1.0];  %元素尺度差异很大
>>[Vd, Dd] = eig(Ad)
```

```
>> A = gallery('lehmer',4)  %生成正定矩阵
A =
    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500
    0.5000    1.0000    0.6667    0.5000
    0.3333    0.6667    1.0000    0.7500
    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000
>> D = eig(A)  %计算特征值，返回列向量形式，用eigs(A)求解，验证
D =
    0.2078
    0.4078
    0.8482
    2.5362
>> D2 = eig(A,'matrix') %计算特值，返回矩阵形式
D2 =
    0.2078         0         0         0
         0    0.4078         0         0
         0         0    0.8482         0
         0         0         0    2.5362
>> [V,D] = eig(A) %计算特征值D和特征向量V
V =
    0.0693   -0.4422   -0.8105    0.3778
   -0.3618    0.7420   -0.1877    0.5322
    0.7694    0.0486    0.3010    0.5614
   -0.5219   -0.5014    0.4662    0.5088
D =
    0.2078         0         0         0
         0    0.4078         0         0
         0         0    0.8482         0
         0         0         0    2.5362
```

6 矩阵的特征值与特征向量

- A是一个矩阵，poly(A)表示生成矩阵A的特征多项式 $|\lambda I - A|$

```
>> A=[ 3 1 4 1; 5 9 2 6;5 3 5 8; 9 7 9 3]
A =
     3     1     4     1
     5     9     2     6
     5     3     5     8
     9     7     9     3
>> p=poly(A)     %V = roots(p)求解特征多项式的解，即特征值。
p =
    1.0000  -20.0000  -16.0000  480.0000   98.0000
>> y=poly2sym(p)   %把多项式系数转换为手写多项式形式
y =
x^4 - 20*x^3 - 16*x^2 + 480*x + 98
>> R = roots(p)
R =
   19.5494
    5.3052
   -4.6514
   -0.2031
```

```
>> [V,D] = eig(A)
V =
   -0.1971    0.2690   -0.7834    0.3292
   -0.5470   -0.3087    0.2910   -0.8582
   -0.5231   -0.6076    0.5487    0.3717
   -0.6231    0.6806    0.0237    0.1303
D =
   19.5494         0         0         0
         0   -4.6514         0         0
         0         0   -0.2031         0
         0         0         0    5.3052
```

7 矩阵初等变换及二次型

- 求行阶梯矩阵及向量组的基
- 正交基，正交矩阵
- 正定矩阵
- 矩阵对角化
- 二次型化为标准型

(1) 求行阶梯矩阵及向量组的基

- 行阶梯矩阵使用初等变换化为行最简形式，从而找到列向量组的一个最大无关组。
- MATLAB将矩阵化成最简形的命令：rref
  - R = rref(A)：用高斯—约当消元法和行主元法求A的行最简形矩阵R。
  - [R, jb] = rref(A)：jb是一个向量，其含义r = length(jb)为A的秩，A(:,jb)为A的列向量基，jb中元素表示基向量所在的列。
  - [R, jb] = rref(A, tol)：tol为指定的精度。
- 例：用初等行变换将下列矩阵化成行最简阶梯形

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1\\ 2 & -2 & -4 & 6 & -1\\ 3 & -3 & -5 & 7 & -1\end{bmatrix}$$

```
>> A = [1 -1 -1 1 0;0 1 2 -4 1;2 -2 -4 6 -1;3 -3 -5 7 -1]
A =
     1    -1    -1     1     0
     0     1     2    -4     1
     2    -2    -4     6    -1
     3    -3    -5     7    -1
>> R = rref(A)
R =
    1.0000         0         0   -1.0000    0.5000
         0    1.0000         0         0         0
         0         0    1.0000   -2.0000    0.5000
         0         0         0         0         0
```

(1) 求行阶梯矩阵及向量组的基

信阳师范学院 数学与统计学院

- 例：求下列向量组的一个最大无关组。

$$a_1=(1,-2,2,3),\ a_2=(-2,4,-1,3),\ a_3=(-1,2,0,3),\ a_4=(0,6,2,3),\ a_5=(2,-6,3,4)$$

```
>> a1 = [1 -2 2 3]'; a2 = [-2 4 -1 3]'; a3 = [-1 2 0 3]'; a4 = [0 6 2 3]'; a5 = [2 -6 3 4]';
>> A = [a1 a2 a3 a4 a5]  %五个向量构成矩阵
A =
     1    -2    -1     0     2
    -2     4     2     6    -6
     2    -1     0     2     3
     3     3     3     3     4
>> [R,jb] = rref(A) %高斯一约当消元法和行主元法求A的行最简形矩阵R
R =
    1.0000         0    0.3333         0    1.7778
         0    1.0000    0.6667         0   -0.1111
         0         0         0    1.0000   -0.3333
         0         0         0         0         0
jb =
     1     2     4
>> jdwgz = A(:,jb)  %获得矩阵A的极大线性无关组
jdwgz =
     1    -2     0
    -2     4     6
     2    -1     2
     3     3     3
```

a1 = [1 -2 2 3]'; a2 = [-2 4 -1 3]'; a3 = [-1 2 0 3]'; a4 = [0 6 2 3]'; a5 = [2 -6 3 4]';

即a1、a2、a4为向量组的一个基，即为向量组的一个极大无关组。

(2) 正交基、正交矩阵

➢ 如果矩阵Q满足：$QQ' = I$，$Q'Q = I$，则Q为正交矩阵，求正交矩阵函数orth()。格式：Q = orth(A)，A为非奇异矩阵。

1. A^T是正交矩阵
2. $AA^T = A^TA = E$（E为单位矩阵）
3. A的各行是单位向量且两两正交
4. A的各列是单位向量且两两正交
5. (Ax,Ay)=(x,y) x,y∈R
6. |A| = 1或-1
7. $A^T = A^{-1}$

```
>> A = [4 0 0; 0 3 1; 0 1 3];
>> r = rank(A)
r =
     3
>> Q = orth(A)   %求正交矩阵
Q =
          0    1.0000         0
    -0.7071         0   -0.7071
    -0.7071         0    0.7071
>> B = Q'*Q %验证Q'Q = I
B =
     1.0000         0    0.0000
          0    1.0000         0
     0.0000         0    1.0000
>> E = norm(eye(r)-Q'*Q,'fro') %在合理误差界限内验证基向量 Q 是正交、归一化向量。
E =
    5.3003e-16
```

```
>> B = [1 0 1; 0 1 0; 1 0 1];
>> r = rank(B)
r =
     2
>> Q = orth(B)  %求秩亏矩阵的正交基
Q =
    -0.7071   -0.0000
          0    1.0000
    -0.7071    0.0000
```

(3) 正定矩阵

- 正定矩阵是在对称矩阵的基础上建立起来的概念。如果一个对称矩阵所有的主子行列式均为正数，则称该矩阵为正定矩阵。如果所有的主子式均为非负的数值，则称为半正定矩阵。
- 格式[D, p] = chol(A)：若$p=0$，则A为正定矩阵，其中D矩阵为A的cholesky分解矩阵；若$p>0$，则A为非正定矩阵，p为整数，表示分解失败的主元位置的索引。
- 例：判定下列矩阵的正定性：

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

```
>> A = [1 -1 0;-1 2 1;0 1 3];
>> [D,p] = chol(A)
D =
    1.0000   -1.0000         0
         0    1.0000    1.0000
         0         0    1.4142
p =
     0
>> B = [2 -2 0;-2 1 -2;0 -2 0];
>> [D,p] = chol(B)
D =
    1.4142
p =
     2
```

A矩阵是正定矩阵，

B矩阵不是正定矩阵

(4) 矩阵的对角化

数学与统计学院

- $n\times n$矩阵对角化的条件是A具有n个线性无关的特征向量。如果存在一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵，则它就被称为可对角化的。
- 例：判断下列实矩阵是否可以相似对角化，若可相似对角化，求出可逆矩阵P和对角矩阵D，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵

$$\begin{bmatrix} 11 & -6 & 4 & -10 & -4 \\ -3 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ -8 & 12 & -3 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & -2 & 3 & -1 \\ 8 & -18 & 8 & -14 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [11 -6 4 -10 -4; -3 5 -2 4 1;
A =
    11    -6     4   -10    -4
    -3     5    -2     4     1
    -8    12    -3    12     4
     1     6    -2     3    -1
     8   -18     8   -14    -1
>> [V,D] = eig(A)
V =
    0.3244   -0.6922    0.0408    0.
   -0.1622    0.1831    0.1280   -0.
   -0.6489    0.5493    0.3840   -0.
   -0.1622   -0.1428    0.4248    0.
    0.6489   -0.4065   -0.8088    0.
D =
    3.0000         0         0
         0    5.0000         0
         0         0    5.0000
         0         0         0    1.
         0         0         0
>> r = rank(V)
r =
     5
```

```
>> A1 = 3*eye(rank(A)) - A; %求特征值3所对应的基础解系
>> x1 = null(A1,'r')
x1 =
    0.5000
   -0.2500
   -1.0000
   -0.2500
    1.0000
>> A2 = 5*eye(rank(A)) - A; %求特征值5所对应的基础解系
>> x2 = null(A2,'r')
x2 =
    2.0000    1.0000
   -0.3333   -0.3333
   -1.0000   -1.0000
    1.0000         0
         0    1.0000
>> A3 = 1*eye(rank(A)) - A; %求特征值5所对应的基础解系
>> x3 = null(A3,'r')
x3 =
    0.8000    0.6000
   -0.6000   -0.2000
   -0.4000   -0.8000
    1.0000         0
         0    1.0000
```

基础解系中解的数等于特征根重数，可对角化

(4) 矩阵的对角化

- 如果矩阵A有n个不同的特征根，则可对角化；如果特征根有重根，则对于每一个特征根，求其$(\lambda I - A)$所对应的基础解系，如果基础解系所含的解的个数等于重根数，则可对角化。
- null(A,'r') 返回 A 的零空间的“有理”基，它通常不是正交基。

```
>> T = [x1,x2,x3] %基础解系构成矩阵T
T =
    0.5000    2.0000    1.0000    0.8000    0.6000
   -0.2500   -0.3333   -0.3333   -0.6000   -0.2000
   -1.0000   -1.0000   -1.0000   -0.4000   -0.8000
   -0.2500    1.0000         0    1.0000         0
    1.0000         0    1.0000         0    1.0000
>> E = inv(T)*A*T %对角化矩阵
E =
    3.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    5.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.0000         0    5.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000   -0.0000    1.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000    1.0000
```

```
>> B = [-3 1 -1;-7 5 -1;-6 6 -2]
B =
    -3     1    -1
    -7     5    -1
    -6     6    -2
>> [V,D] = eig(B)   %求A的特征值和特征向量
V =
    0.0000   -0.7071    0.7071
   -0.7071   -0.7071    0.7071
   -0.7071    0.0000    0.0000
D =
    4.0000         0         0
         0   -2.0000         0
         0         0   -2.0000
```

```
>> %求特征值4所对应的基础解系
>> y1 = null(4*eye(3) - B,'r')
y1 =
     0
     1
     1
>> %求特征值-2所对应的基础解系
>> y2 = null(-2*eye(3) - B,'r')
y2 =
     1
     1
     0
```

基础解系中解的数不等于特征根重数，不可对角化

(5) 二次型化为标准型

- 实对称矩阵A都是可以对角化的，并且都存在正交矩阵Q，使得 $inv(Q)AQ$ 为对角阵，对角阵的对角线元素为矩阵A的特征值。对于实对称矩阵，特征值分解函数eig(A)返回的特征向量矩阵就是正交矩阵Q。

- 例：将下列二次型通过正交变换化为标准型。

$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

>> A = [17 -2 -2;-2 14 -4;-2 -4 14];

```
>> A = [17 -2 -2;-2 14 -4;-2 -4 14];
>> [P,D] = eig(A)
P =
    0.3333   -0.2981    0.8944
    0.6667   -0.5963   -0.4472
    0.6667    0.7454         0
D =
     9     0     0
     0    18     0
     0     0    18
>> syms y1 y2 y3
>> y = [y1;y2;y3];
>> X = vpa(P*y,3)      %正交变换X = Py
X =
 0.333*y1 - 0.298*y2 + 0.894*y3
 0.667*y1 - 0.596*y2 - 0.447*y3
            0.667*y1 + 0.745*y2
>> fn = [y1 y2 y3]*D*y    %标准型
fn =
9*y1^2 + 18*y2^2 + 18*y3^2
```


01
IDEA
02
LEARNING
03
CREATIVE
INSPIRATION
BUSINESS
EDUCATION
PHOTO BOOK

感谢聆听