信陽師範學院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第2章 矩阵分析与计算

讲授人：牛言涛

日期：2020年2月19日

目录
CONTENTS

1、线性方程组求解

- 线性方程组$Ax = b$的求解归纳：

（1）A满秩， $Ax = b$称为恰定方程，有唯一解$x = A^{-1}b$，一般用$x = A\backslash b$求解速度更快。

（2）当右端向量$b = 0$时，称为齐次方程组，总有零解，称解$x = 0$为平凡解。A的秩小于n，无穷多个非平凡解，通解中包含$n - rank(A)$个线性无关的解向量，用函数$null(A,'r')$可求得基础解系。

（3）当右端向量$b \neq 0$时：

1）当rank(A) = rank([A,b]) = n时，方程组有唯一解：x=A\b 或 x = pinv(A)*b。

2）当rank(A) = rank([A,b]) < n时，有无穷多个解，通解由一个特解和对应的齐次方程组$Ax=0$的通解组成。用$A\backslash b$求特解，用$null(A,'r')$求通解。

3）当rank(A)<rank([A,b])，无解，可求x使得 $\|Ax-b\|_2 = 0$ 取最小值，其解为x=A\b 或 x = pinv(A)*b。

1、线性方程组求解

编辑器 - D:\demo\matlab2020file\line_solution.m

line_solution.m

```matlab
function [x,y] = line_solution(A,b)
%% 求线性方程组的解，输入参数A为系数矩阵，b为右端向量，输出参数x为唯一解或特解，y为基础解系
if nargin < 2
    disp('请输入系数矩阵A和右端向量b!');
    return
end
[m,n] = size(A); %取系数矩阵的维度长度
y = []; %y为基础解系
if norm(b) > 0   %非齐次方程组
    if rank(A) == rank([A,b])   %方程组相容
        if rank(A) == n   %有唯一解
            x = A\b;
        else   %原方程组有无穷多个解，基础解系
            disp('原方程组有无穷多个解，其齐次方程组的基础解系为y，特解为x');
            y = null(A,'r');
            x = A\b;
        end
    else   %方程组不相容，给出最小二乘法解
        disp('方程组的最小二乘解是：');
        x = A\b;
    end
else   %齐次方程组
    if rank(A) >= n   %列满秩
        x = zero(m,1);   % 0解
    else  %非0解
        disp('方程组有无穷多个解，基础解系为x');
        x = null(A,'r');
    end
end
```

例：分别求线性方程组的解。

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$$

1、线性方程组求解

信阳师范学院 数学与统计学院

例：分别求线性方程组的解。

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$$

```
>> A = [2,2,-1,1;4,3,-1,2;8,5,-3,4;3,3,-2,2];  %系数矩阵
>> b = [4,6,12,6]';  %右端向量
>> [x,y] = line_solution(A,b)  %调用函数
x =
    1.0000
    1.0000
   -1.0000
   -1.0000
y =
     []
```

```
>> B = [2,7,3,1;3,5,2,2;9,4,1,7];  %系数矩阵
>> b = [6,4,2]'; %右端向量
>> [x,y] = line_solution(B,b) %调用函数
原方程组有无穷多个解，其齐次方程组的基础解系为y，特解为x
> In line_solution (line 11)
警告: 秩不足，秩 = 2，tol =  8.611209e-15。
x =
   -0.1818
    0.9091
         0
         0
y =
    0.0909   -0.8182
   -0.4545    0.0909
    1.0000         0
         0    1.0000
>> B*y  %验证
ans =
   1.0e-15 *
         0   -0.2220
         0         0
    0.1110   -0.8882
```

y是原方程组所对应的齐次方程组的基础解系，包含2个线性无关的解向量。

验证解的正确性。结果很小，说明y是原方程组所对应的齐次方程组的解。理论上，B*y应该是0向量，但有计算误差。

2、矩阵方程求解

- Lyapunov（李雅普诺夫）方程：来源于微分方程的稳定性理论，连续Lyapunov方程可以表示成 $AX+XA^T=-C$ ， $-C$为对称正定的$n\times n$矩阵。
- 调用格式：X = lyap(A,C)
- 例：假设A、C矩阵如下，求解相应的Lyapunov方程，并验证解的精度。

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{bmatrix},\quad C=-\begin{bmatrix}10&5&4\\5&6&7\\4&7&9\end{bmatrix}$$

```
>> A = [1 2 3;4 5 6;7 8 0];
>> C = -[10 5 4;5 6 7;4 7 9];
>> X = lyap(A,C) %调用函数求解
X =
   -3.9444    3.8889    0.3889
    3.8889   -2.7778    0.2222
    0.3889    0.2222   -0.1111
>> n = norm(A*X+X*A'+C) %验证
n =
   2.3211e-14
```

2、矩阵方程求解

- Stein方程：$AXB - X + Q = 0$
- 离散Lyapunov方程：$AXA^T - X + Q = 0$
- Sylvester（西尔维斯特）方程：$AX + XB = -C$
- 解析解求解函数lyapsym统一调用格式如下：
  - X = lyapsym(sym(A),C)　%连续Lyapunov方程
  - X = lyapsym(sym(A),-inv(B),Q*inv(B))　%Stein方程
  - X = lyapsym(sym(A),-inv(A'),Q*inv(A'))　%离散Lyapunov方程
  - X = lyapsym(sym(A),B,C)　%Sylvester方程

2、矩阵方程求解

信阳师范学院
数学与统计学院

编辑器 - D:\demo\matlab2020file\lyapsym.m

lyapsym.m

```
function X = lyapsym(A,B,C)
    if nargin == 2
        C = B;
        B = A';
    end
    [nr,nc] = size(C);
    A0 = kron(A,eye(nc)) + kron(eye(nr),B');
    try
        C1 = C';
        x0 = -inv(A0)*C1(:);
        X = reshape(x0,nc,nr)';
    catch
        error('singular matrix found.');
    end
end
```

$$\begin{bmatrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{bmatrix}X+X\begin{bmatrix}16&4&1\\9&3&1\\4&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{bmatrix}$$

```
>> A = [8 1 6;3 5 7;4 9 2];
>> B = [16 4 1;9 3 1;4 2 1];
>> C = -[1 2 3;4 5 6;7 8 0];
>> X = lyapsym(A,B,C)
X =
    0.0749    0.0899   -0.4329
    0.0081    0.4814   -0.2160
    0.0196    0.1826    1.1579
>> norm(A*X+X*B+C) %验证
ans =
   2.8034e-15
>> Y = lyapsym(sym(A),B,C)  %符号求解
Y =
[ 1349214/18020305,  648107/7208122, -15602701/36040610]
[  290907/36040610, 3470291/7208122,  -3892997/18020305]
[    70557/3604061, 1316519/7208122,    8346439/7208122]
>> norm(A*Y+Y*B+C) %验证
ans =
0
```

2、矩阵方程求解

- Riccati（黎卡提）方程：是一类著名的二次型矩阵方程式，一般形式：

$$A^T X + XA - XBX + C = 0$$

- 调用格式：X = are(A,B,C)

- 例：求Riccati方程，其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [-2 1 -3;-1 0 -2;0 -1 -2];
>> B = [2 2 -2;-1 5 -2;-1 1 2];
>> C = [5 -4 4;1 0 4;1 -1 5];
>> X = are(A,B,C)
X =
    0.9874   -0.7983    0.4189
    0.5774   -0.1308    0.5775
   -0.2840   -0.0730    0.6924
>> n = norm(A'*X+X*A-X*B*X+C)
n =
  1.4370e-14
```

3、一类线性不等式的求解

- 假设已知一类线性不等式的数学形式为

$$\begin{cases} \left|a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right|\le b_1 \\ \left|a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\right|\le b_2 \\ \vdots \\ \left|a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\right|\le b_n \end{cases}$$

- 假设系数矩阵A为非奇异矩阵，且$b_i \ge 0, i = 1, 2, \dots, n$，则不等式的解为

$$\left|x_i\right|\le \frac{1}{\left|\det(A)\right|}\sum_{j=1}^{n} b_j\left|A_{ji}\right|,\ i=1,2,\cdots,n$$

，A_{ji}为代数余子式。

3、一类线性不等式的求解

编辑器 - D:\demo\matlab2020file\linineq.m

linineq.m

```
function b0 = linineq(A,b)
    n = length(b);
    for i = 1:n
        s = 0;
        for j = 1:n
            B = A;
            B(j,:) = [];
            B(:,i) = [];
            s = s + b(j)*abs(det(B));
        end
        b0(i,1) = s/abs(det(A));
    end
end
```

$$\left|x_i\right| \le \frac{1}{\left|\det(A)\right|}\sum_{j=1}^{n} b_j \left|A_{ji}\right|,\ i=1,2,\cdots,n$$

例：求解线性矩阵不等式

$|Ax| \le b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

```
>> A = [8 1 6;3 5 7;4 9 2];
>> b = [1;2;3];
>> X = linineq(A,b)
X =
    0.6278
    0.4222
    0.7056
```


01
IDEA
02
LEARNING
03
CREATIVE
INSPIRATION
EDUCATION
BUSINESS
PHOTO BOOK

感谢聆听