信陽師範學院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

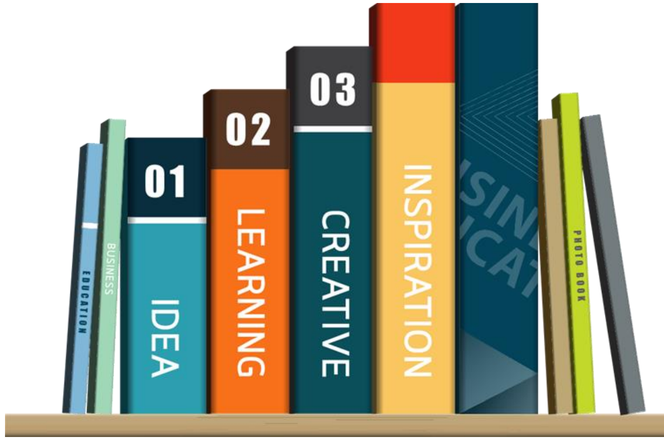
第2章 矩阵分析与计算

讲授人：牛言涛

日期：2020年2月17日

目录

CONTENTS



MATLAB处理向量

1. 向量共线或共面的判断
2. 向量方向余弦的计算
3. 向量的内积
4. 向量的夹角
5. 两点间的距离
6. 向量的向量积
7. 向量的混合积
8. 点到平面的距离

1. 向量定义与尺寸

- 向量是对相似数据项的集合进行分组的最简单方式，向量是数据的一维分组。
- 元素：向量中单个的数据项通常称为元素(element)。
- 元素属性：数值及在向量中的位置。

值	23	34		2	45
索引	1	2		n-1	n

- 创建：直接输入数值，使用冒号（起始值：增量：结束值），linspace()函数
- zeros(1,n)、ones(1,n)、rand(1,n)、randn(1,n)等函数。
- 函数size(V)：返回包含向量行数和列数的一个向量。
- 函数length(V)：对于向量，该数值即为其长度。

2. 向量共线或共面的判断

- 从线性代数中知道，当3(两)个向量线性相关时，则这3(两)个向量组成的矩阵的秩小于3(2)，并且这3(两)个向量共面(共线)，否则不共面(共线)。
- 例：判断3个向量的共线、共面问题：$X=(1,1,1)$，$Y=(-1,2,1)$，$Z=(2,2,2)$

```
>> X = [1,1,1];
>> Y = [-1,2,1];
>> Z = [2,2,2];
>> XY = [X;Y]   %构成2*3的矩阵
XY =
     1     1     1
    -1     2     1
>> XZ = [X;Z];
>> YZ = [Y;Z];
>> XYZ = [X;Y;Z] %构成3*3矩阵
XYZ =
     1     1     1
    -1     2     1
     2     2     2
```

```
>> r1 = rank(XY) %根据秩判断，不共线
r1 =
     2
>> r2 = rank(XZ) %共线
r2 =
     1
>> r3 = rank(YZ)  %不共线
r3 =
     2
>> r4 = rank(XYZ) %共面不共线
r4 =
     2
```

3. 向量方向余弦的计算

- 设$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$是一个空间三维向量，$\boldsymbol{r}$是$\boldsymbol{V}$的长度，称向量$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{x}/\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}/\boldsymbol{r}, \boldsymbol{z}/\boldsymbol{r})$是向量$\boldsymbol{V}$的方向余弦。
- 方向余弦矩阵(DCM, Direction Consine Matrix)，估计无人机在空间中的方位。

- 例：设向量V1 = (1,-2,3), V2 = (0,2,-1)，求方向余弦。

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{0-1, 2-(-2), -1-3\} = -1\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}, \cos\beta = \frac{y}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}, \cos\gamma = \frac{z}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}$$

```
>> V1 = [1 -2 3];
>> V2 = [0 2 -1];
>> costheta = (V2 - V1)/norm(V1 - V2)
costheta =
   -0.1741    0.6963   -0.6963
```

3. 向量方向余弦的计算

方向余弦矩阵：分别绕X轴、 Y轴、 Z轴旋转得到：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

由此 得到经过三个欧拉角转动后，导航坐标系下的向量$[X^b, Y^b, Z^b]^T$旋转后的与其对应的载体坐标系下的向量$[X^n, Y^n, Z^n]^T$之间的关系为，按$Z-Y-X$的顺序得到

方向余弦矩阵

$$\begin{bmatrix} X^b \\ Y^b \\ Z^b \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X^n \\ Y^n \\ Z^n \end{bmatrix}$$

4. 向量的内积

- 定义：向量的内积也就是数分中"内积"。

设向量 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\dots a_n]$，$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2\dots b_n]$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\dots\dots+a_nb_n$$

- 几何意义：一个向量在另一个向量上的投影的长度。
- 格式：dot(A,B)　　矩阵的内积如何推导计算？

```
>> A = rand(1,8)  %生成服从0-1区间的均匀分布的随机数
A =
    0.2769    0.0462    0.0971    0.8235    0.6948    0.3171    0.9502    0.0344
>> B = randi([-5,5],1,8) %生成-5到5区间的随机整数
B =
    -1    -1     3     3    -3     0    -1     2
>> C = dot(A,B)  %函数内积计算
C =
   -0.5271
>> S = sum(A.*B)  %按照内积的定义求解
S =
   -0.5271
```

5. 向量的夹角

- 设$U=(u_1,u_2,u_3)$，$V=(v_1,v_2,v_3)$是2两个空间向量，r_1、r_2分别是U、V的长度，$(U,V)=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$是$U$、$V$的内积，$\theta$是$U$、$V$的夹角，从解析几何中知道，向量内积与夹角间的关系是 $(U,V)=r_1r_2\cos\theta$ 。

```
>> U = rand(1,10)   %10个服从0-1之间均匀分布的数值组成向量
U =
    0.6557    0.0357    0.8491    0.9340    0.6787    0.7577    0.7431    0.3922    0.6555    0.1712
>> V = randn(1,10)   %10个服从N(0,1)分布的数值组成向量V
V =
    0.8884   -1.1471   -1.0689   -0.8095   -2.9443    1.4384    0.3252   -0.7549    1.3703   -1.7115
>> r1 = norm(U)   %向量U的长度，模
r1 =
    2.0554
>> r2 = norm(V)   %向量V的长度，模
r2 =
    4.4859
>> cosd = dot(U,V)/r1/r2   %求向量U、V之间的夹角余弦值，即cos(θ)
cosd =
   -0.1605
>> theta = acos(cosd)*180/pi   %求夹角，并转换为角度显示
theta =
   99.2356
```

5. 向量的夹角—计算文本的相似性

- 例：句子A：这只皮靴号码大了。那只号码合适

  句子B：这只皮靴号码不小，那只更合适

  问题：怎样计算上面两句话的相似程度?
- 基本思路
  - 如果这两句话的用词越相似，它们的内容就应该越相似。因此，可以从词频入手，计算它们的相似程度。
- 第一步，分词。
  - 句子A：这只/皮靴/号码/大了。那只/号码/合适。
  - 句子B：这只/皮靴/号码/不/小，那只/更/合适。
- 第二步，列出所有的词。
  - 这只，皮靴，号码，大了。那只，合适，不，小，更

6 向量的夹角—计算文本的相似性

- 第三步，计算词频。
  - 句子A：这只1，皮靴1，号码2，大了1。那只1，合适1，不0，小0，更0
  - 句子B：这只1，皮靴1，号码1，大了0。那只1，合适1，不1，小1，更1
- 第四步，写出词频向量。
  - 句子A：(1，1，2，1，1，1，0，0，0)
  - 句子B：(1，1，1，0，1，1，1，1，1)

```
>> A = [1 1 2 1 1 1 0 0 0];   %句子A的词频向量
>> B = [1 1 1 0 1 1 1 1 1];   %句子B的词频向量
>> costheta = dot(A,B)/norm(A)/norm(B)   %计算相似度，夹角余弦
costheta =
    0.7071
```

$$\cos(\theta)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i\times y_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2}}$$

6. 两点间的距离

- 设$U = (u_1, u_2, u_3)$，$V = (v_1, v_2, v_3)$是2两个空间点坐标，这两个向量的差向量的长度即为两点间的距离。

```
>> U = rand(1,10)   %10个服从0-1之间均匀分布的数值组成向量
U =
    0.4387    0.3816    0.7655    0.7952    0.1869    0.4898    0.4456    0.6463    0.7094    0.7547
>> V = randn(1,10)   %10个服从N(0,1)分布的数值组成向量V
V =
   -0.8637    0.0774   -1.2141   -1.1135   -0.0068    1.5326   -0.7697    0.3714   -0.2256    1.1174
>> UV = U - V   %计算向量差
UV =
    1.3024    0.3042    1.9796    1.9087    0.1937   -1.0429    1.2153    0.2749    0.9349   -0.3627
>> lt = norm(UV)   %向量差的长度即两点间的距离
lt =
    3.6103
```

7. 向量的向量积（叉积）

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- 定义：等于一个新的向量， 该向量与前两者垂直，且长度为前两者张成的平行四边形面积， 其方向按照右手螺旋决定。
- 几何含义：表示过两相交向量的交点，垂直于两向量所在平面的向量。
- 数学表达：叉积c=a×b可如下严格定义。

  （1）$|c| = |a \times b| = |a||b| sin < a, b >$

  （2）c⊥a， 且c⊥b，

  （3）c的方向要用“右手法则”判断
- 格式：cross(a,b)

```
>> X = rand(1,3)  %生成服从0-1区间的均匀分布的随机数
X =
    0.1190    0.4984    0.9597
>> Y = randi([-5,5],1,3) %生成-5到5区间的随机整数
Y =
    -2     1    -3
>> cr = cross(X,Y)  %向量的向量积，叉积
cr =
   -2.4548   -1.5625    1.1157
>> Xcr = dot(X,cr)  %垂直，内积为0
Xcr =
     0
>> Ycr = dot(Y,cr)  %垂直，内积为0
Ycr =
     0
```

7. 向量的向量积（叉积）

- 设$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$，$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)$，根据向量代数的知识，U、V的向量积U×V可以用一个行列式来表达：

$$U\times V=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

式中i、j、k分别是坐标轴Ox、Oy、Oz的单位向量。

- 例：设U=(2, -3, 1)，V=(3, 0, 4)，求U×V。

```
>> U = [2,-3,1]; V=[3,0,4];
>> W = eye(3);
>> A1 = [W(1,:);U;V];
>> A2 = [W(2,:);U;V];
>> A3 = [W(3,:);U;V];
>> UV = [det(A1),det(A2),det(A3)]
UV =
   -12    -5    9
```

```
>> cross(U,V)
ans =
   -12    -5    9
```

8. 向量的混合积

- 定义：设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是空间中三个向量，则 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$

- 几何意义：它的绝对值表示以向量为棱的平行六面体的体积.

- 格式：
  - dot(cross(a,b),c)
  - dot(a,cross(b,c))

```
>> X = randi([-10,10],1,3) %生成-5到5区间的随机整数
X =
     7    -5     9
>> Y = randi([-10,10],1,3) %生成-5到5区间的随机整数
Y =
    -3    -6    -5
>> Z = randi([-10,10],1,3) %生成-5到5区间的随机整数
Z =
     2    -1    -3
>> V = dot(X,cross(Y,Z))  %混合积
V =
   321
>> V2 = dot(cross(X,Y),Z)  %混合积
V2 =
   321
>> V3 = cross(X,dot(Y,Z))  %出错
错误使用 cross (line 25)
在获取交叉乘积的维度中，A 和 B 的长度必须为 3。
```

8. 向量的混合积

- 设$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{u1},\boldsymbol{u2},\boldsymbol{u3}), \boldsymbol{V}=(\boldsymbol{v1},\boldsymbol{v2},\boldsymbol{v3}), \boldsymbol{W}=(\boldsymbol{w1},\boldsymbol{w2},\boldsymbol{w3})$，$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{W}$的混合积为$(\boldsymbol{UVW})=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})$，即

$$U(V\times W)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- 例：设U=(0,0,2)，V=(3,0,5)，W=(1,1,0)，求以这3个向量构成的六面体的体积。

```
>> U = [0,0,2];  V = [3,0,5];  W = [1,1,0];
>> A = [U;V;W];  %三个向量构成3*3的矩阵
>> dc = det(A)     %dot(cross(U,V),W)
dc =
     6
```

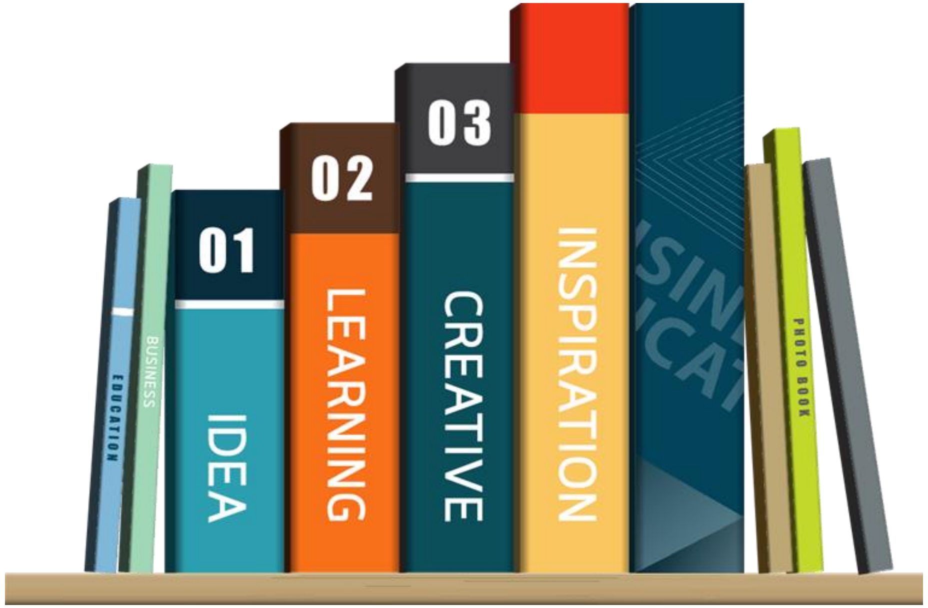
9. 点到平面的距离

- 点$U=(u1,u2,u3)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离r的计算公式是:

$$r=\frac{\left|Au_1+Bu_2+Cu_3+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

- 例：求原点到平面$5.8x-4.5y+3.9z=1.78$的距离。

```
>> O = [0,0,0]; %原点
>> V = [5.8,-4.5,3.9];  %平面向量
>> r = abs(dot(U,O)-1.78)/norm(V,2)  %距离计算公式
r =
     0.2141
```


EDUCATION
BUSINESS
01
IDEA
02
LEARNING
03
CREATIVE
INSPIRATION
PHOTO BOOK

感谢聆听