



信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第6章 优化与规划问题

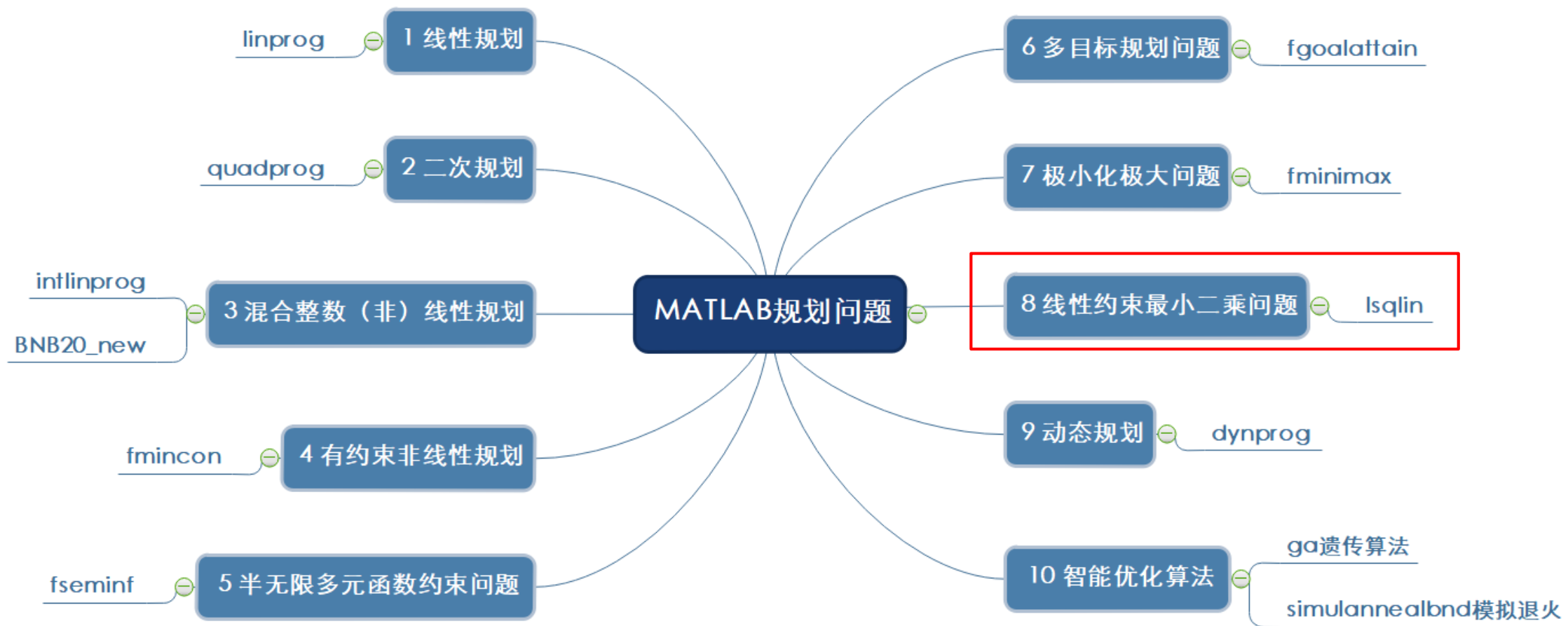


讲授人：牛言涛



日期：2020年3月15日

第6章 优化与规划问题知识结构图



运筹学（operational research）是一门解决一定约束条件下最优解的学科，应用现有的科学技术知识与数学手段，来解决实际生活之中的各种问题，是一门应用学科。运筹学分支还有规划论，排队论，图论，决策论等。

6.8 线性约束最小二乘问题

- 最小二乘法（又称最小平方法）是一种数学优化技术。它通过最小化误差的平方和寻找数据的最佳函数匹配。
- 利用最小二乘法可以简便地求得未知的数据，并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小。最小二乘法还可用于曲线拟合。

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1q} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{i1} & \cdots & \vdots & \cdots & x_{iq} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nl} & \cdots & x_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$$

可记为 $Ab = Y$

方程运用最小二乘法导出为线性平方差计算的形式为：

$$\min_b \|Ab - Y\|_2$$

最后的最优解为： $b = (A^T A)^{-1} A^T Y$

6.8 线性约束最小二乘问题

例如：实验得到4个数据 (x, y) ： $(1, 6), (2, 5), (3, 7), (4, 10)$ ，希望找出一条和这四个点最匹配的直线： $y = \beta_2 x + \beta_1$ 。

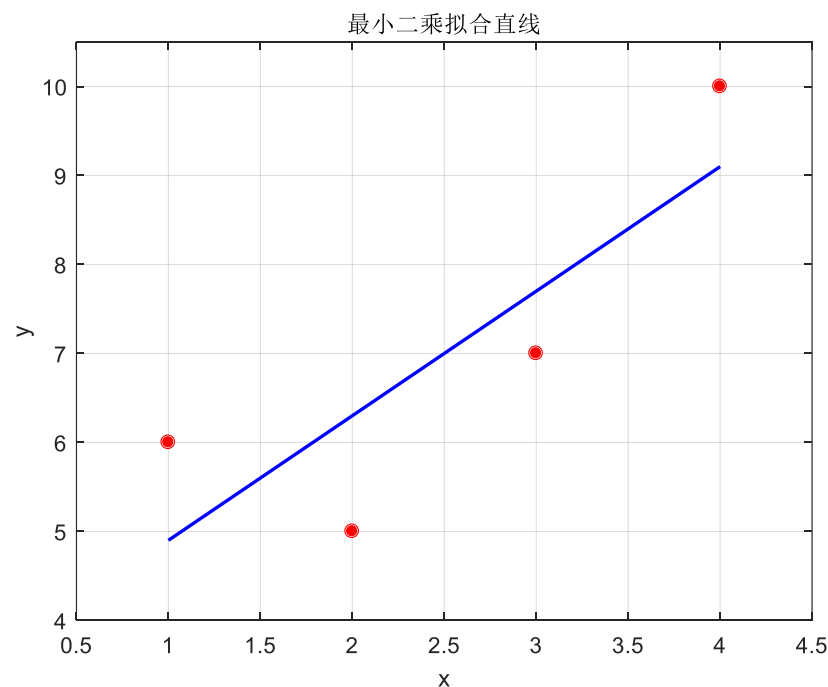
最小二乘法采用的手段是尽量使得等号两边的方差最小：

$$S(\beta_1, \beta_2) = [6 - (\beta_1 + 1 \cdot \beta_2)]^2 + [5 - (\beta_1 + 2 \cdot \beta_2)]^2 + [7 - (\beta_1 + 3 \cdot \beta_2)]^2 + [10 - (\beta_1 + 4 \cdot \beta_2)]^2$$

求 $\min S(\beta_1, \beta_2)$ ，通过对 β_1, β_2 求偏导

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 8\beta_1 + 20\beta_2 - 56 = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta_2} = 20\beta_1 + 60\beta_2 - 154 = 0$$

得到 $\beta_1 = 3.5$ ， $\beta_2 = 1.4$ ，所以 $y = 1.4x + 3.5$ 为最佳直线。



6.8 线性约束最小二乘问题

约束线性最小二乘的数学模型：

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} \|C \cdot x - d\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} A \cdot x \leq b \\ Aeq \cdot x \leq beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \end{aligned}$$

调用格式：[x,resnorm,residual,exitflag,output,lambda] =
lsqlin(C,d,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options): solves the linear system $C \cdot x = d$ in
the least-squares sense, subject to $A \cdot x \leq b$ and $Aeq \cdot x = beq$.

6.8 线性约束最小二乘问题

例1: 用约束线性最小二乘求解

$$\min_x \begin{cases} 0.9501x_1 + 0.7620x_2 + 0.6153x_3 + 0.4057x_4 = 0.0578 \\ 0.2311x_1 + 0.4564x_2 + 0.7917x_3 + 0.9354x_4 = 0.3528 \\ 0.6068x_1 + 0.0185x_2 + 0.9218x_3 + 0.9169x_4 = 0.8131 \\ 0.4859x_1 + 0.8214x_2 + 0.7382x_3 + 0.4102x_4 = 0.0098 \\ 0.8912x_1 + 0.4447x_2 + 0.1762x_3 + 0.8936x_4 = 0.1388 \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} 0.2027x_1 + 0.2721x_2 + 0.7467x_3 + 0.4659x_4 \leq 0.5251 \\ 0.1987x_1 + 0.1988x_2 + 0.4450x_3 + 0.4186x_4 \leq 0.2026 \\ 0.6037x_1 + 0.0152x_2 + 0.9318x_3 + 0.8462x_4 \leq 0.8462 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 4 \\ -0.1 \leq x_i \leq 2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

6.8 线性约束最小二乘问题

```
>> C = [0.9501  0.7620  0.6153  0.4057  
        0.2311  0.4564  0.7919  0.9354  
        0.6068  0.0185  0.9218  0.9169  
        0.4859  0.8214  0.7382  0.4102  
        0.8912  0.4447  0.1762  0.8936];  
>> d = [0.0578 0.3528 0.8131 0.0098 0.1388]';  
>> A = [0.2027  0.2721  0.7467  0.4659  
        0.1987  0.1988  0.4450  0.4186  
        0.6037  0.0152  0.9318  0.8462];  
>> b = [0.5251 0.2026 0.6721]';  
>> Aeq = [3 5 7 9];  
>> beq = 4;  
>> lb = -0.1*ones(4,1);  
>> ub = 2*ones(4,1);  
>> options = optimoptions('lsqlin','Algorithm','interior-point');  
>> x0 = rand(4,1);  
>> [x,resnorm,residual,exitflag,output,lambda] = lsqlin(C,d,A,b,[],[],lb,ub,x0,options)
```

```
x =  
-0.099999601238607  
-0.099999999393354  
0.215228023551503  
0.350151576062288  
resnorm = 0.167161298002293  
residual =  
0.045476676625174  
0.076420948529731  
-0.356178585819076  
0.161983697742930  
0.078428981764964
```

6.8 线性约束最小二乘问题

例2:
$$\begin{cases} \min Q(\beta) = \|y - X\beta\| \\ A\beta \geq c \end{cases}, \text{ 其中 } A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 4.94 \\ 2.81 \\ 5.18 \end{bmatrix}$$

No	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Y
1	100	100	100	100	100	100	92
2	10	72	90	100	95	100	74
3	50	66	88	98	95	89	72
4	48	58	33	66	88	100	48
5	36	45	27	52	87	100	42
6	21	29	12	15	79	96	31
7	15	21	4.7	1	5.2	78	19
8	14	36	4.2	0.6	2.4	72	21
9	17	12	1.5	0.2	0.4	56	13

6.8 线性约束最小二乘问题

```
dataf = xlsread('lsqldata.xlsx',1,'B2:H10');
```

```
d = dataf(:,7);
```

```
objfC = dataf(:,1:6);
```

```
A = [2 6 7 4 1 3;4 1 5 6 2 1;1 2 4 7 8 9];
```

```
b = [4.94;2.81;5.18];
```

```
options = optimoptions('lsqlin','Algorithm','interior-point');
```

```
lb = [];
```

```
ub = [];
```

```
x0 = rand(6,1);
```

```
[x,resnorm,residual,exitflag,output,lambda] = lsqlin(objfC,d,A,b,[],[],lb,ub,x0,options)
```

x =

0.0780 0.2216 0.4458 -0.0369 0.0648 0.1386

resnorm =

2.0418

residual =

-0.7916

-0.7366

0.3881

0.3995

0.5090

0.2075

0.0219

0.0470

-0.5075



感谢聆听
