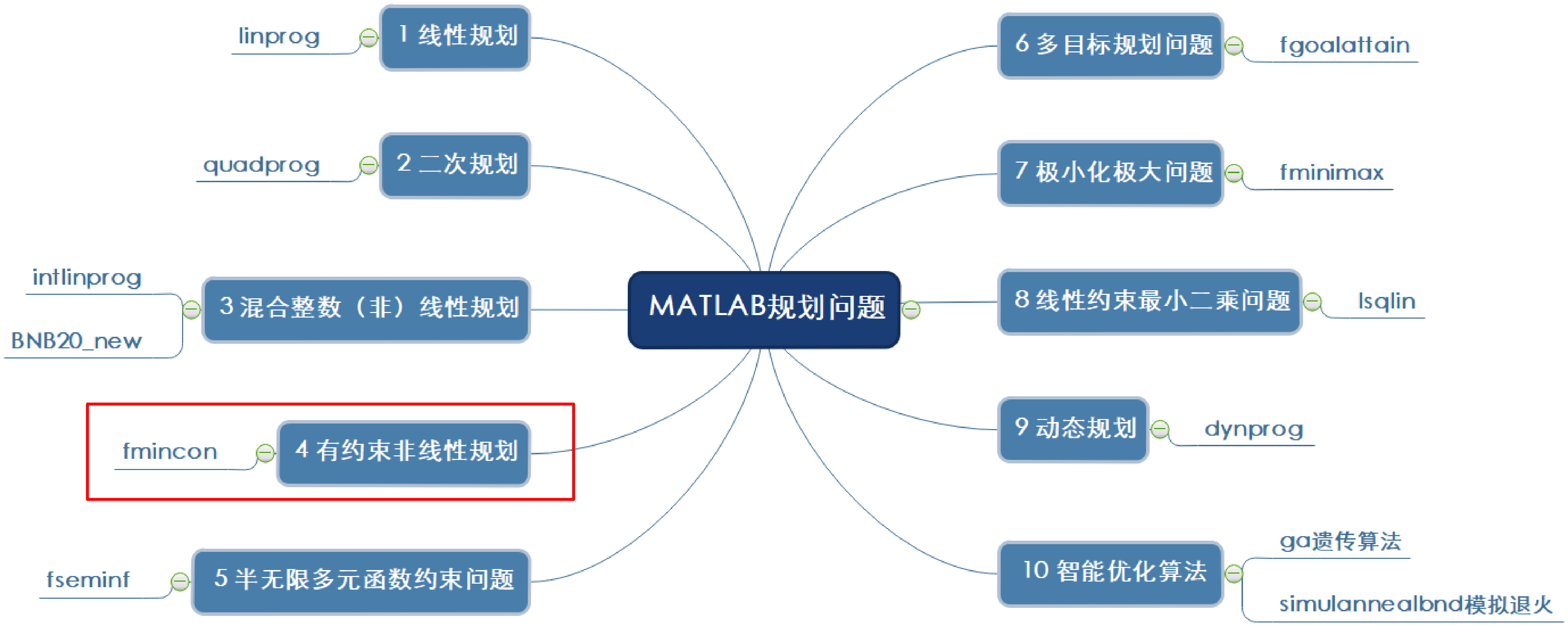
信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第6章 优化与规划问题

讲授人：牛言涛

日期：2020年3月13日

第6章 优化与规划问题知识结构图



运筹学（operational research）是一门解决一定约束条件下最优解的学科，应用现有的科学技术知识与数学手段，来解决实际生活之中的各种问题，是一门应用学科。运筹学分支还有规划论，排队论，图论，决策论等。

1. 无约束最优化问题求解函数

1、有界单变量优化：函数fminbnd

2、多元无约束最优化问题：函数fminunc，调用格式：

- [x,fval]=fminunc(fun,x0,option)
- [x,fval]=fminunc(fun,x0,option,P1,P2)
- [x,fval,exitflag,output,grad,hessian]=(f,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,option)
  - grad返回目标函数在x处的梯度，hessian返回在x处目标函数的Hessian矩阵信息。

2. 有约束非线性规划问题求解函数

数学模型：

$$\min_x f(x)$$

$$s.t.\begin{cases} Ax \le b & \text{线性不等式约束} \\ Aeq.x = beq & \text{线性等式约束} \\ C(x) \le 0 & \text{非线性不等式约束} \\ Ceq(x) = 0 & \text{非线性等式约束} \\ lb \le x \le ub & \text{有界约束} \end{cases}$$

有约束非线性规划问题调用函数fmincon：

- [x,fval,exitflag,output,lambda] = fmincon(f,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,option)：A,b为不等式约束的系数矩阵和右端列向量。Aeq,beq等式约束问题，若没有，则为[ ]。
- nonlcon=@fun，有M文件fun.m给定非线性不等式约束c(x)≤0和等式约束g(x)=0；非线性约束条件函数格式一般如下：

```
function [C,Ceq] = mycon(x)
C = …    %计算x处的非线性不等式约束c(x)≤0的函数值
Ceq = …  %计算x处的非线性等式约束Ceq(x)=0的函数值
```

2. 有约束非线性规划问题案例分析

例1：求解 $\min f = e^{x_1}(6x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2 + 1)$

$$
s.t.\begin{cases} x_1x_2 - x_1 - x_2 \le 0 \\ -2x_1x_2 - 5 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}
$$

```
function [c, ceq] = nlinconfun_1(x)
 %非线性约束不等式
  c(1) = x(1)*x(2)-x(1)-x(2)+1;
  c(2) = -2*x(1)*x(2)-5;
  ceq = [];
end
```

```
objf = @(x)exp(x(1))*(6*x(1)^2+3*x(2)^2+2*x(1)*x(2)+4*x(2)+1);
Aeq = [1,2];  beq = [0];
x0 = [-1,1];
%序列二次规划(SQP)算法是求解中小规划约束最优化问题的一类有效算法
options = optimoptions('fmincon','Display','iter','Algorithm','sqp');
[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon(objf,x0,[],[],Aeq,beq,[],[],@nlinconfun_1,options)
```

```
x = -2.2361    1.1180
fval = 3.6576
```

2. 有约束非线性规划问题案例分析

例2：设一个战略轰炸机群奉命携带A,B种型号的炸弹轰炸敌军的四个重要目标。为完成好此项任务要求飞机的耗油量不超过2700L，炸弹A和B都不超过4枚。

已知飞机携带A型炸弹时每升油料可飞行2km，携带B型炸弹时每升油料可飞行3km，空载时每升油料可飞行4km，每次起降各耗油100L。又知每架飞机每次只能携带一枚炸弹。有关参数如表所示。

问题是：如何制定轰炸方案，使摧毁目标的可能性最大?

目标	距离/km	炸毁目标的可能性	
		A	B
I	640	0.65	0.76
II	850	0.50	0.70
III	530	0.56	0.72
IV	72	0.68	0.66

（注：此题属于非线性整数规划问题，在次用非线性规划函数求解）

2. 有约束非线性规划问题案例分析

第一步：计算飞机携带 A or B 炸弹分别摧毁4个目标所需要的油量

炸毁目标Ⅰ：A型（Da/2+Da/4+200）＝Va1　　B型（Db/3+Db/4+200）＝Vb1

第二步：构造该问题的数学模型

设：向目标Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ分别投掷A型炸弹 x11, x12, x13, x14 枚，B型 x21, x22, x23, x24 枚；每一个目标不被摧毁的可能性为Z（转化为最小值问题）；则该问题的数学模型为：

$$\min z=(1-0.65)^{x_{11}}\times(1-0.76)^{x_{21}}\times(1-0.50)^{x_{12}}\times(1-0.70)^{x_{22}}\times(1-0.56)^{x_{13}}\times(1-0.72)^{x_{23}}\times(1-0.68)^{x_{14}}\times(1-0.66)^{x_{24}}$$

$$s.t.\begin{cases}680x_{11}+573.3x_{21}+837.5x_{12}+695.8x_{22}+597.5x_{13}+509.2x_{23}+254x_{14}+242x_{24}\le 2700\\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 4\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 4\\ 1\le x_{1j}+x_{2j}\le 2\ (j=1,2,3,4)\\ x_{ij}\ge 0(i=1,2;\ j=1,2,3,4)\end{cases}$$

已知每一枚炸弹摧毁目标的可能性都在50%以上，因此，要摧毁所有目标，每一个目标至少需要1枚炸弹，至多需要两枚。

2. 有约束非线性规划问题案例分析


```
d = [640,850,530,72];  %目标距离
af = 2;  %携带A型炸弹时每升油料可飞行2km
bf = 3;  %携带B型炸弹时每升油料可飞行3km
ef = 4;   %空载时每升油料可飞行4km
udf = 100;  %每次起降各耗油100L
%飞机携带A或B炸弹分别摧毁4个目标所需要的油量
Ad = (d/af + d/ef + 2*udf);
Bd = (d/bf + d/ef + 2*udf);
D = [Ad;Bd]; %油量矩阵
D = D(:)'; %变换成对应决策变量的油量向量，构成约束系数行向量
objfun = @(x)(1-0.65)^x(1)*(1-0.76)^x(2)*(1-0.50)^x(3)*(1-0.70)^x(4)*...
    (1-0.56)^x(5)*(1-0.72)^x(6)*(1-0.68)^x(7)*(1-0.66)^x(8);
A = [D;1 0 1 0 1 0 1 0;0 1 0 1 0 1 0 1;
     1 1 0 0 0 0 0 0; 0 0 1 1 0 0 0 0;0 0 0 0 1 1 0 0;0 0 0 0 0 0 1 1;
     -1 -1 0 0 0 0 0 0; 0 0 -1 -1 0 0 0 0;0 0 0 0 -1 -1 0 0;0 0 0 0 0 0 -1 -1];
b = [2700;4;4;2;2;2;2;-1;-1;-1;-1];
lb = zeros(8,1);
x0 = zeros(8,1);
[x,fval,exitflag] = fmincon(objfun,x0,A,b,[],[],lb,[],[])
x = reshape(x,2,4)
```

```
x =
    0.0007    0.0005    0.0006    1.9860
    1.0730    1.0003    1.7278    0.0131
>> p = 1-fval
p =
    0.9993
```

向目标Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ分别投掷 B 型炸弹1,1,2枚；向目标Ⅳ投掷 A 型炸弹2枚。摧毁率为0.9993。

2. 有约束非线性规划问题案例分析

例3：（效用理论）某同学计划用5万元购买四种商品——手机、笔记本、平板电脑和单车，假定购买四种商品的效用函数为$U(x,y,z,w)=3ln(x/z)+2.5ln(y/z)+ln(xy/z)+1.5ln(w^2)$。已知手机可消费区间为[2500,5000]，笔记本可选价格区间[6000,12000]，平板电脑可选价格区间[2000,6000]，单车可选价格区间[5000,30000]，购买笔记本和平板电脑的费用不超过15000万。假设四种商品各购买一件，问：如何购买，才能使购买这四种商品的效用最大?

解：设四种商品价格为$x_i, i=1,2,3,4$，建立数学模型：

$$\max z = 3\ln\frac{x_1}{x_3} + 2.5\ln\frac{x_2}{x_3} + \ln\left(\frac{x_1x_2}{x_3}\right) + 5.6\ln\left(x_4^2\right)$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_2+x_3\le 1.5 \\ 0.25\le x_1\le 0.5, 0.6\le x_2\le 1.2, 0.2\le x_3\le 0.6, 0.5\le x_4\le 3 \end{cases}$$

2. 有约束非线性规划问题案例分析

```
objf = @(x)-(3*log(x(1)/x(3))+2.5*log(x(2)/x(1))+log(x(1)*x(2)/x(3))+1.5*log(x(4)^2));
A = [0 1 1 0];
b = [1.5];
Aeq = [1,1,1,1];
beq = [5];
lb = [0.25 0.6 0.2 0.5]';
ub = [0.5 1.2 0.6 3]';
x0 = 0.1*ones(4,1);
options = optimoptions('fmincon','Display','iter','Algorithm','sqp');
[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon(objf,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options)
```

```
x =
    0.5000
    1.2000
    0.3000
    3.0000
fval =
   7.7101
```

故购买手机费用5000元，笔记本12000万，平板电脑3000元，单车30000万。

2. 有约束非线性规划问题案例分析

例4 资金问题：设有400万元资金，要求4年内使用完，若在一年内使用资金x万元，则可得效益$\sqrt{x}$万元（效益不能再使用），当年不用的资金可存入银行，年利率为10%。试制定出资金的使用计划，以使4年效益之和为最大。

解：设x_i表示第i年所使用的资金数，则有

$$\max\ z=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}$$

$$s.t.\begin{cases} x_1\le 400 \\ 1.1x_1+x_2\le 440 \\ 1.21x_1+1.1x_2+x_3\le 484 \\ 1.331x_1+1.21x_2+1.1x_3+x_4\le 532.4 \\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4 \end{cases}$$

```
>> fh = @(x)-(sqrt(x(1))+sqrt(x(2))+sqrt(x(3))+sqrt(x(4)));
>> x0=[1;1;1;1];
>> lb=[0;0;0;0];
>> [x,fval,exitflag] = fmincon(fh,x0,[],[],[],[],lb,[],@myconfun)
x =
   86.1883
  104.2879
  126.1883
  152.6879
fval = -43.0860
exitflag = 1
```

```
%把线性不等式约束当作非线性写入函数文件
function [c,ceq] = myconfun(x)
   c = [x(1)-400;
        1.1*x(1)+x(2)-440;
        1.21*x(1)+1.1*x(2)+x(3)-484;
        1.331*x(1)+1.21*x(2)+1.1*x(3)+x(4)-532.4];
   ceq = [];
end
```

2. 有约束非线性规划问题案例分析

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

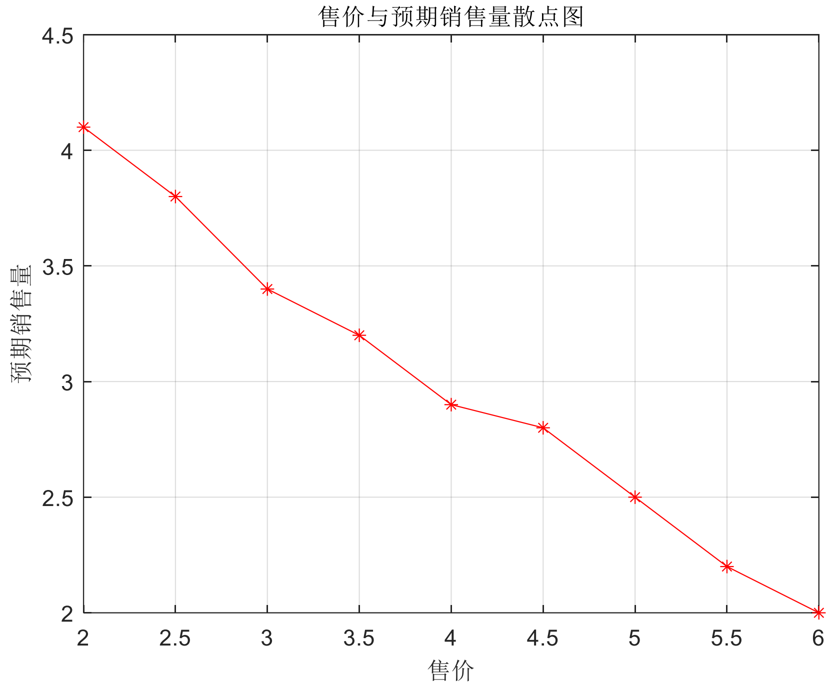
例5：某公司欲以每件2元的价格购进一批商品。一般来说，随着商品售价的提高，预期销售将减少，并对此进行了估算，结构如表前两行所示。为了尽快回收资金并获得较多的盈利，公司打算做广告，投入一定的广告费用后，销售量将有一个增长，可由销售增长因子来表示。据统计，广告费与销售因子关系如表后两行所示。问公司采取怎样的营销决策能使预期的利润最大?

售价/元	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00
预期销售量/万件	4.1	3.8	3.4	3.2	2.9	2.8	2.5	2.2	2.0
广告费/万元	0	1	2	3	4	5	6	7	
销售增长因子	1.00	1.40	1.70	1.85	1.95	2.00	1.95	1.80	

2. 有约束非线性规划问题案例分析

解：设x表示售价（元），y表示预期销售量（万元），z表示广告费（万元），k表示销售增长因子。投入广告费后，实际销售量记为s（万元），获得的利润记为p（万元）。

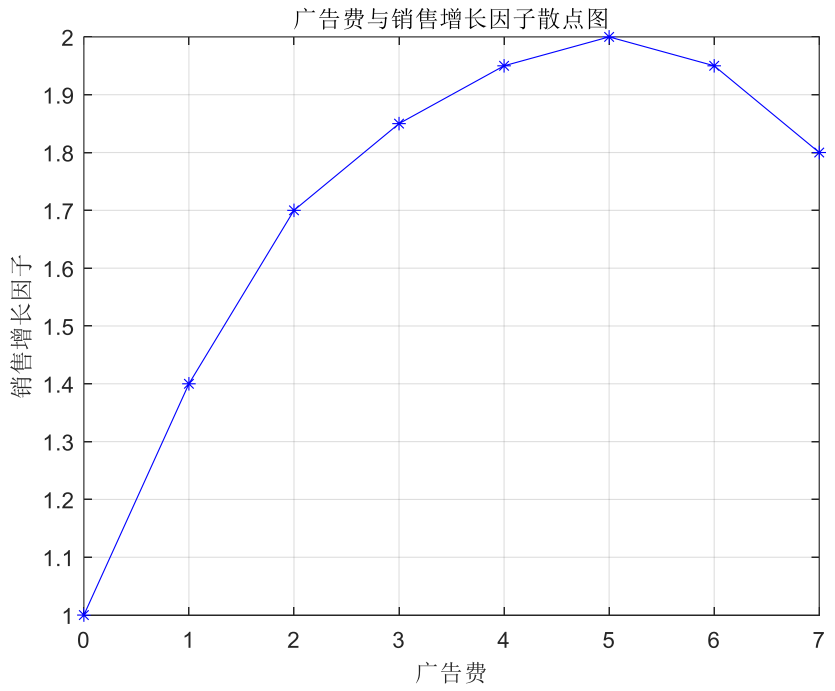
```
>> x = [2:0.5:6];
>> y = [4.1 3.8 3.4 3.2 2.9 2.8 2.5 2.2 2.0];
>> plot(x,y,'r-*')
>> grid on
>> title('售价与预期销售量散点图')
>> xlabel('售价');
>> ylabel('预期销售量');
```



售价x与预期销售量y近似线性关系，建立拟合函数模型$y = ax + b$.

2. 有约束非线性规划问题案例分析


```
>> z = [0:7];
>> k = [1 1.4 1.7 1.85 1.95 2 1.95 1.8];
>> figure
>> plot(z,k,'b-*')
>> grid on
>> title('广告费与销售增长因子散点图')
>> xlabel('广告费');
>> ylabel('销售增长因子');
```



广告费z与销售增长因子k近似二次曲线关系，建立拟合函数模型：$k = c + dz + ez^2$.

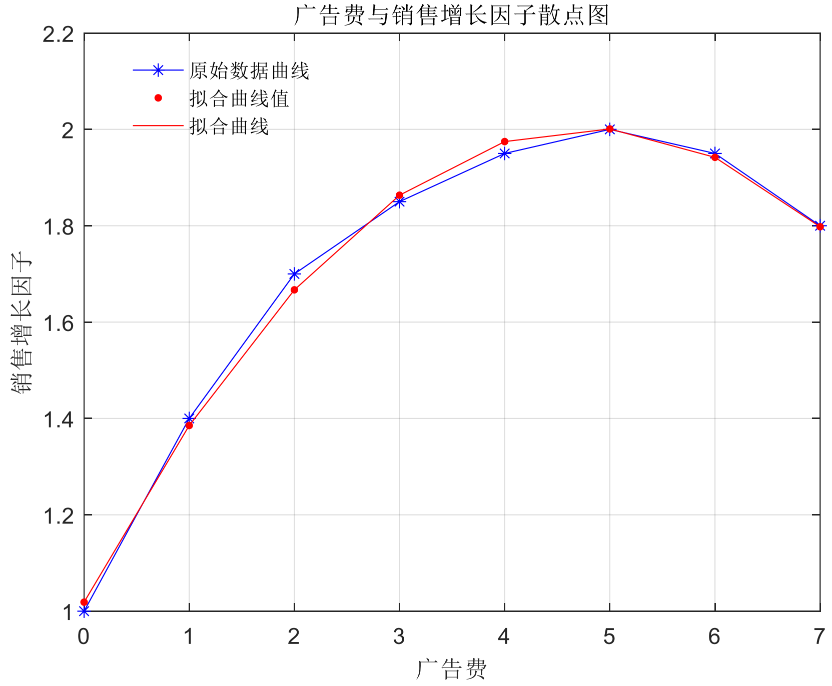
建立优化模型：
$$\max_{x,z} p = \left(c+dz+ez^2\right)\left(a+bx\right)\left(x-2\right)-z$$
$$s.t.\begin{cases} x \geq 2 \\ z > 0 \end{cases}$$
，其中a, b, c, d, e系数为待定参数.

2. 有约束非线性规划问题案例分析

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

模型求解：首先通过拟合函数polyfit求解系数a,b,c,d,e

```
>> py = polyfit(x,y,1)
py =
   -0.5133    5.0422
>> pz = polyfit(z,k,2)
pz =
   -0.0426    0.4092    1.0188
>> zk = polyval(pz,z);
>> plot(z,k,'b*')
>> hold on
>> plot(z,zk,'r-.','MarkerSize',10)
>> legend('原始数据曲线','拟合曲线值','拟合曲线')
>> legend('boxoff')
```



故而： $a=5.0422, b=-0.5133,$

$c=1.0188, d=0.4092,\ e=-0.0426.$

2. 有约束非线性规划问题案例分析

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

数学模型：$$\max_{x,z} p = \left(1.0188 + 0.4092z - 0.0426z^2\right)\left(5.0422 - 0.5133x\right)\left(x-2\right) - z$$

$$s.t.\begin{cases} x \geq 2 \\ z > 0 \end{cases}$$

```
>> fh = @(x)-((1.0188+0.4092*x(2)-0.0426*x(2).^2).*(5.0422-0.5133*x(1)).*(x(1)-2)-x(2));
>> lb = [2;0];
>> [x,fval,exitflag] = fmincon(fh,[2;3],[],[],[],[],lb)
x =
    5.9116
    3.3083
fval =
  -11.6631
exitflag =
     1
```

故销售价格为5.9116元，广告费3.3083万元时，公司预期的利润最大，为11.6631万元。


01
IDEA
02
LEARNING
03
CREATIVE
INSPIRATION
EDUCATION
BUSINESS
PHOTO BOOK

感谢聆听