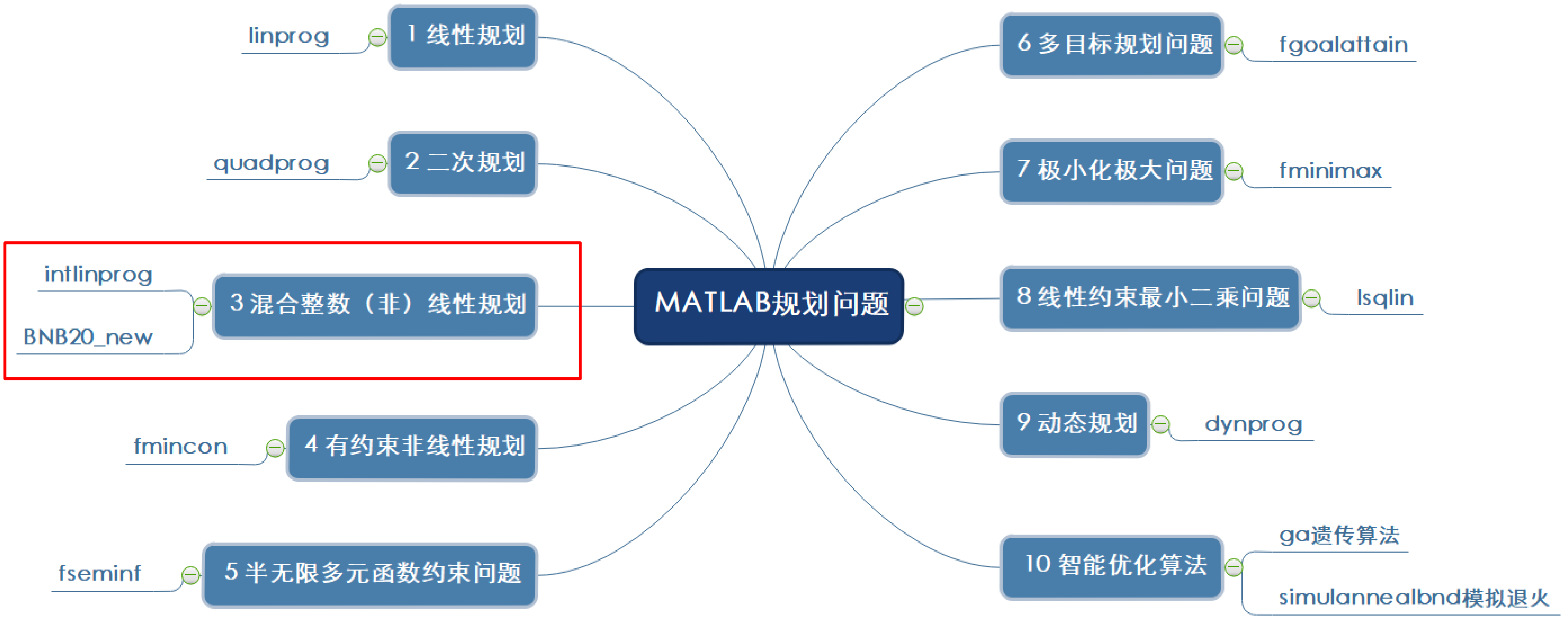
信陽師範學院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第6章 优化与规划问题

讲授人：牛言涛

日期：2020年3月13日

第6章 优化与规划问题知识结构图



运筹学（operational research）是一门解决一定约束条件下最优解的学科，应用现有的科学技术知识与数学手段，来解决实际生活之中的各种问题，是一门应用学科。运筹学分支还有规划论，排队论，图论，决策论等。

混合整数线性规划简介

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- 数学规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，称为整数规划。
- 对于整数线性规划模型大致可分为两类

  （1）变量全限制为整数时，称纯（完全）整数规划。

  （2）变量部分限制为整数的，称混合整数规划。

$$\min_{x} z = f^T x$$

$$s.t.\begin{cases} x(intcon)\ are\ \ integers \\ A \cdot x \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

函数intlinprog：Mixed-integer linear programming solver。

- [x,fval,exitflag,output] = intlinprog(problem)
- [x,fval,exitflag,output] = intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)

1. 决策变量0-1问题

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

例1（选址问题）：某快餐连锁经营公司有7个地点（A1，A2，…，A7）可以设立快餐店，由于地理位置因素，设立快餐店时必须满足以下要求：A1，A2，A3三个地点最多可选两个，A4和A5至少选取一个，A6和A7至少选取一个。已知各个地点设立快餐店的投入和预计收益如表所示。

地点	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
利润（万元）	10	11	8	12	15	12	5
投资（万元）	103	140	95	150	193	160	80

已知目前公司有650万元可以投资。问：怎样投资收益最高?

1. 决策变量0-1问题

首先引入0-1变量x_i。x_i=1表示选择A_i地址， $x_i = 0$表示不选择A_i地址，则数学模型：

$$\max z = 10x_1 + 11x_2 + 8x_3 + 12x_4 + 15x_5 + 12x_6 + 5x_7$$

$$s.t.\begin{cases} 103x_1 + 140x_2 + 95x_3 + 150x_4 + 193x_5 + 160x_6 + 80x_7 \le 650 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_4 + x_5 \ge 1 \\ x_6 + x_7 \ge 1 \\ x_i = 0,1 \end{cases}$$

```
f = [-10 -11 -8 -12 -15 -12 -5];
intcon = 1:7;
A = [103 140 95 150 193 160 80; 1 1 1 0 0 0 0; 0 0 0 -1 -1 0 0; 0 0 0 0 0 -1 -1];
b = [650;2;-1;-1];
lb = zeros(7,1);   %下限为0
ub = ones(7,1);   %上限为1。变量取整数，则取值的可能为0或1
[x,fval,exitfalg] = intlinprog(f,intcon,A,b,[],[],lb,ub)
maxf = -fval
```

1. 决策变量0-1问题

例2（指派问题）：某设备由七个配件组成，分别标记B1,B2,...,B7，现有A1,A2,...,A7七人，他们加工配件的时间（小时）如表所示。问：应指派何人去完成何种工作，使所需总时间最少?

人员\配件	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
A1	3	5	4	6	4	8	7
A2	4	6	3	7	6	5	3
A3	5	4	5	5	5	4	6
A4	4	3	6	8	7	6	4
A5	6	7	5	4	6	7	5
A6	7	8	3	4	3	5	8
A7	4	8	5	6	7	5	4

解：设x_{ij}表示第i个人去完成第j项任务，则依题意得：

1. 决策变量0-1问题

数学模型：

$$\min T=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}t_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{7}x_{ij}=1, & i=1,2,\cdots,7\\ \sum_{i=1}^{7}x_{ij}=1, & j=1,2,\cdots,7\\ x_{ij}=0,1 & i,j=1,2,\cdots,7\end{cases}$$

```
function [x,fval,exitflag] = zp_intlinprog()
  designate_data = xlsread('designate.xlsx');
  aij = designate_data(:);
  Aeq = zeros(14,49);
  for i = 1:7
     Aeq(i,(i-1)*7+1:i*7) = ones(1,7);
  end
  for i = 8:14
     k = i - 7;
     Aeq(i,[k:7:49]) = 1;
  end
  beq = ones(14,1);
  lb = zeros(49,1);
  ub = ones(49,1);
  intcon = 1:49;
  [x,fval,exitflag] = intlinprog(aij,intcon,[],[],Aeq,beq,lb,ub);
  x = reshape(x,7,7);
end
```

1. 决策变量0-1问题


```
>> [x,fval,exitflag] = zp_intlinprog()
x =
     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     1     0
     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     0     0     1
fval =
    24
exitflag =
     1
```

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
A1	3	5	4	6	4	8	7
A2	4	6	3	7	6	5	3
A3	5	4	5	5	5	4	6
A4	4	3	6	8	7	6	4
A5	6	7	5	4	6	7	5
A6	7	8	3	4	3	5	8
A7	4	8	5	6	7	5	4

A1指派B1，A2指派B3，A3指派B6 ， A4指派B2 ， A5指派B4 ， A6指派B5 ， A7指派B7，总用时最小为24小时。

2. 决策变量整数问题

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

例3（装箱问题、背包问题）：现有一个容积为46立方米，最大载重50吨的集装箱，需装入六种产品，如下表所示。问：箱子应当装入多少产品A、B、D（不可拆开包装）以及多少产品C、E、F（可以拆开包装）才能使集装箱载货价值最大?

产品	包装	体积/立方米	重量/吨	价值/万元	最少装载
A	箱式	0.3	0.7	1.5	8箱
B	箱式	0.45	0.55	1.8	5箱
C	袋式	0.5	0.35	1.0	10袋
D	箱式	0.35	0.64	1.7	10箱
E	袋式	0.33	0.40	1.25	8袋
F	袋式	0.25	0.32	1.14	10袋

解：设各产品装载数量$\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, 4, 5, 6}$

2. 决策变量整数问题

$$\max z = 1.5x_1 + 1.8x_2 + x_3 + 1.7x_4 + 1.25x_5 + 1.14x_6$$

$$s.t.\begin{cases} 0.3x_1 + 0.45x_2 + 0.5x_3 + 0.35x_4 + 0.33x_5 + 0.25x_6 \le 46 \\ 0.7x_1 + 0.55x_2 + 0.35x_3 + 0.64x_4 + 0.4x_5 + 0.32x_6 \le 50 \\ x_1 \ge 8, x_2 \ge 5, x_3 \ge 10, x_4 \ge 10, x_5 \ge 8, x_6 \ge 10 \\ x_1, x_2, x_4 \in Z \end{cases}$$

```
fcoff = -[1.5,1.8 1 1.7 1.25 1.14]';
intcon = [1 2 4]';
A = [0.3 0.45 0.5 0.35 0.33 0.25;0.7 0.55 0.35 0.64 0.4 0.32];
b = [46;50];
lb = [8 15 10 10 8 10]';
options = optimoptions('intlinprog','Display','iter');
[x,fval,exitflag,output] = intlinprog(fcoff,intcon,A,b,[],[],lb,[],options)
fmax = -fval
```

```
x =
    8.0000
   15.0000
   10.0000
   10.0000
    8.0000
   72.0313
fval =
  158.1156
```

A产品8箱，B产品15箱，C产品10袋，D产品10箱，E产品8袋，F产品72袋。价值最大158.1156万元。

2. 决策变量整数问题

例4（人力资源分配问题）：某个中型百货商场对售货人员（周工资1400元）的需求经统计如下表：

星期	一	二	三	四	五	六	七
人数	12	15	12	14	16	18	19

为了保证销售人员充分休息，销售人员每周工作5天，休息2天。问应如何安排销售人员的工作时间（每天工作8小时，不考虑夜班），使得所配售货人员的总费用最小？

解：假设每天工作8小时，不考虑夜班，休息为连续2天。设$x_i, i = 1, 2, \cdots, 7$为每天开始休息的人数。

$$\max z = 1400\sum_{i=1}^{7} x_i$$

$$s.t.\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 12 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 15 \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19 \\ x_i \in Z, x_i \geq 0 \end{cases}$$

2. 决策变量整数问题

例5（值班问题）：某实验室开放时间为上午8:00至晚上10:00，开放时间内须有且仅须一名学生值班。规定大学生每周值班不少于8小时，研究生每周不少于7小时，每名学生每周值班不超过3次，每次值班不少于2小时，每天安排的值班学生不超过3人，且其中必须有一名研究生。试为该实验室安排一张人员值班表，使总支付的报酬最少。

班次	报酬（元/时）	每天最多可安排的值班时间				
		周一	周二	周三	周四	周五
1	10	6	0	6	0	7
2	10	0	6	0	6	0
3	9.9	4	8	3	0	5
4	9.8	5	5	6	0	4
5	10.8	3	0	4	8	0
6	11.3	0	6	0	6	3

2. 决策变量整数问题

解：设x_{ij}为学生i在周j的值班时间，$y_{ij}=\begin{cases}1, & \text{安排学生 } i \text{ 在周} j \text{ 的值班时间} \\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

$$\min z=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij} \quad s.t.\begin{cases}2y_{ij}\le x_{ij}\le a_{ij}y_{ij}\,(i=1,\cdots,6,\ j=1,\cdots,5), & \text{不超过可安排的时间} \\ \sum_{j=1}^{5}x_{ij}\ge 8(i=1,2,3,4), & \text{大学生每周值班不少于8 小时} \\ \sum_{j=1}^{5}x_{ij}\ge 7\,(i=5,6), & \text{研究生每周值班不少于7 小时} \\ \sum_{i=1}^{6}x_{ij}=14\,(j=1,\cdots,5), & \text{实验室每天开放14 小时} \\ \sum_{j=1}^{5}y_{ij}\le 3\,(i=1,\cdots,6), & \text{每名学生一周不超过3 次} \\ \sum_{i=1}^{6}y_{ij}\le 3\,(j=1,\cdots,5), & \text{每天值班不超过3 人} \\ y_{5j}+y_{6j}\ge 1\,(j=1,\cdots,5), & \text{每天有一名研究生值班} \\ x_{ij}\ge 0, y_{ij}=0\text{或}1\ (i=1,\cdots,6,\ j=1,\cdots,5) & \end{cases}$$

其中a_{ij}表示学生i在周j最多可安排的值班时间，c_{ij}表示学生i在周j值班的单位时间报酬。

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

3. 混合整数非线性规划

MATLAB求解非线性规划问题函数：

- [errmsg,Z,X,t,c,fail] = BNB20_new(fun,x0,xstatus,xlb,xub,A,B,Aeq,Beq,nonlcon)
  - Minimize F(x) subject to: xlb <= x0 <=xub
  - A*x <= B Aeq*x=Beq
  - [C(x);Ceq(x)]=feval(nonlcon,x). Both C(x) and Ceq(x) should be column vectors.
  - x(i) is continuous for xstatus(i)=0 ， x(i) integer for xstatus(i)= 1， x(i) fixed for xstatus(i)=2
  - t is the time elapsed while the algorithm BNB has run and c is the number of BNB cycles.
  - fail is the number of nonconvergent leaf sub-problems.

注意：BNB20_new函数不是MATLAB自带库函数

高等应用数学问题的MATLAB求解 第3版 薛定宇著，清华大学出版社。

3. 混合整数非线性规划

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

例6：求解下列非线性整数规划求极值

$$\min f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4$$

$$\begin{cases} -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 8 \geq 0 \\ -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + x_1 + x_4 + 10 \geq 0 \\ -2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + x_2 + x_4 + 5 \geq 0 \\ x_i \in Z, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

```
function [c,ce] = unlinefun(x)
ce = [];
c = [ x(1)^2 + x(2)^2 + x(3)^2+x(4)^2+x(1)-x(2)+x(3)-x(4)-8;
      x(1)^2 + 2*x(2)^2 + x(3)^2+2*x(4)^2-x(1)-x(4)-10;
      2*x(1)^2 + x(2)^2 + x(3)^2+2*x(4)^2-x(2)-x(4)-5];
end
```

```
>> objfun = @(x)x(1)^2 + x(2)^2 +
2*x(3)^2+x(4)^2-5*x(1)-5*x(2)-21*x(3)+7*x(4);
>> intlist = [1,1,1,1];
>> x0 = zeros(1,4);
>> [err,fm,x] =
BNB20_new(objfun,x0',intlist',[],[],[],[],[],[],@unlinefun)
err =   ''
fm =
  -27.0000
x =
     1
     1
     1
     0
```

例7：试求解下面的0-1混合规划问题

$$\min\ 5y_1+6y_2+8y_3+10x_1-7x_3-18\ln(x_2+1)-19.2\ln(x_1-x_2+1)+10$$

$$x.y\ \ s.t\begin{cases}0.8\ln(x_2+1)+0.96\ln(x_1-x_2+1)-0.8x_3\le 0\\ \ln(x_2+1)+1.2\ln(x_1-x_2+1)-x_3-2y_3\ge -2\\ x_2-x_1\le 0\\ x_2-2y_1\le 0\\ x_1-x_2-2y_2\le 0\\ y_1+y_2\le 1\\ 0\le x\le [2,2,1]^T,\ \ y\in\{0,1\}\end{cases}$$

转化，令 $x_4=y_1,\ x_5=y_2,\ x_6=y_3$

$$\min\ 5x_4+6x_5+8x_6+10x_1-7x_3-18\ln(x_2+1)-19.2\ln(x_1-x_2+1)+10$$

$$x.y\ \ s.t\begin{cases}0.8\ln(x_2+1)+0.96\ln(x_1-x_2+1)-0.8x_3\le 0\\ \ln(x_2+1)+1.2\ln(x_1-x_2+1)-x_3-2x_6\ge -2\\ x_2-x_1\le 0\\ x_2-2x_4\le 0\\ x_1-x_2-2x_5\le 0\\ x_4+x_5\le 1\\ 0\le x\le [2,2,1,1,1,1]^T\end{cases}$$

3. 混合整数非线性规划

```
function [c,ce] = nonlinfun(x)
  c = [0.8*log(x(2)+1)+0.96*log(x(1)-x(2)+1)-0.8*x(3);
       -log(x(2)+1)-1.2*log(x(1)-x(2)+1)+x(3)+2*x(6)-2];
   ce = [];
end
```

```
fmin = @(x)5*x(4)+6*x(5)+8*x(6)+10*x(1)-7*x(3) - 18*log(x(2)+1)-19.2*log(x(1)-x(2)+1)+10;
intlist = [0;0;0;1;1;1];
x0 = zeros(6,1);
ub = [2 2 1 1 1 1]';
lb = [0 0 0 0 0 0]';
A = [-1 1 0 0 0 0;0 1 0 -2 0 0;1 -1 0 0 -2 0;0 0 0 1 1 0];
b = [0 0 0 1]';
[errmsg,fm,x] = BNB20_new(fmin,x0,intlist,lb,ub,A,b,[],[],@nonlinfun)
```

```
errmsg =
  空的 0×0 char 数组
fm =
    5.4198
x =
    0.8000
    0.8000
    1.0000
    1.0000
         0
         0
```

3. 混合整数非线性规划

例8：某厂向用户提供发动机，合同规定，第一、二、三季度末分别交货40台、60台、80台。每季度的生产费用为$f(x)=ax+bx^2$（单位:元），其中x是该季度生产的台数。若交货后有剩余，可用于下季度交货，但需支付存储费，每台每季度c元。

已知工厂每季度最大生产能力为100台，第一季度开始时无存货，设a=50、b=0.2、c=4.

问：工厂应如何安排生产计划，才能既满足合同又使总费用最低。讨论a、b、c变化对计划的影响，并作出合理的解释。

解：决策变量：设第1，2，3季度分别生产x1，x2，x3台发动机，第1，2季度末分别有存货40-x1，x1+x2-100台，第3季度末无存货。

目标函数：设总费用为

$$\min z=a\left(x_1+x_2+x_3\right)+b\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+c\left[\left(x_1-40\right)+\left(x_1+x_2-100\right)\right]$$

3. 混合整数非线性规划

约束条件：生产的发动机应该在第3季度末全部卖出，则有x1+x2+x3=180；同时要保证第1，2季度能供货且有能力生产，要求x1 ≥ 40，x1 + x2 ≥ 100，100 ≥ x1，100 ≥ x2，100 ≥ x3，且非负。

综上所述，数学模型为：

$$\min z = a\left(x_1 + x_2 + x_3\right) + b\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + c\left[\left(x_1 - 40\right) + \left(x_1 + x_2 - 100\right)\right]$$

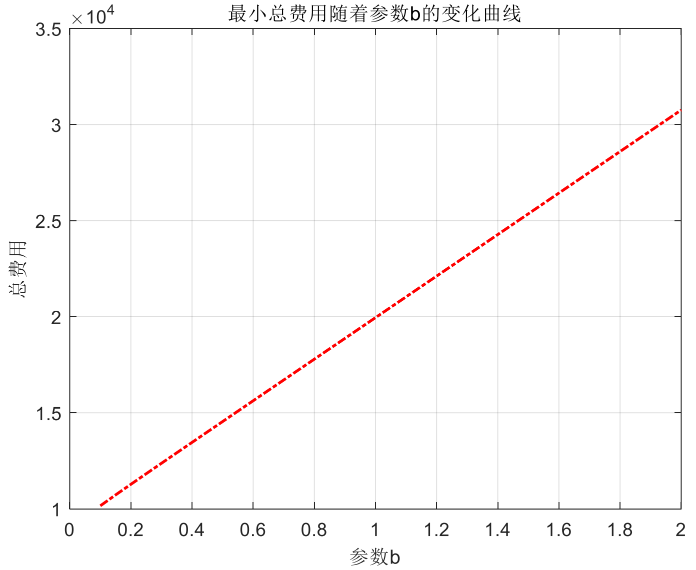
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 180 \\ x_1 + x_2 \geq 100 \\ x_1 \geq 40 \\ 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 100 \end{cases}$$

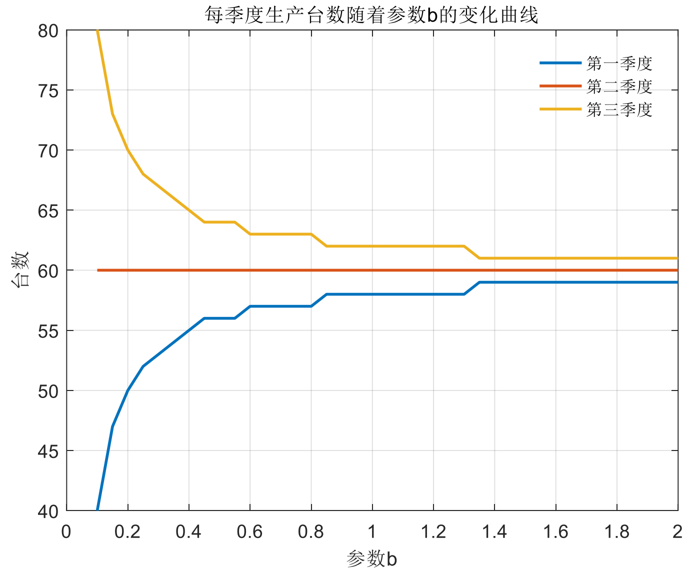
```
a = 50; b = 0.2;  c = 4;
fh = @(x)a*(x(1)+x(2)+x(3))+b*(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2)+c*((x(1)-40)+(x(1)+x(2)-100));
A = [-1 -1 0;-1 0 0];  b = [-100;-40];
Aeq = [1 1 1];  beq = [180];
lb = zeros(3,1);  ub = 100*ones(3,1);
intlist = [1;1;1];
x0 = ones(3,1);
[errmsg,fm,x] = BNB20_new(fh,x0,intlist,lb,ub,A,b,Aeq,beq,[])
```

```
errmsg = 空的 0×0 char 数组
fm =1.1280e+04
x = 50   60   70
```

3. 混合整数非线性规划

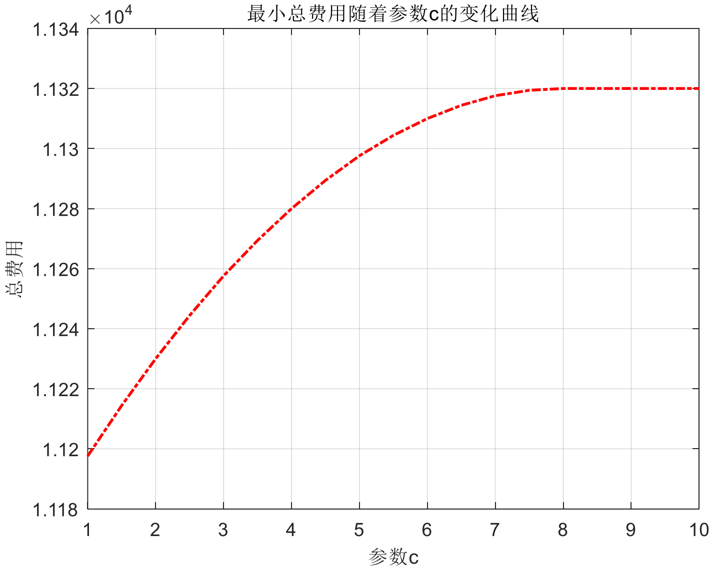
```
i = 1;
for b = 0.1:0.05:2.0
    a = 50; c = 4;
    fh = @(x)a*(x(1)+x(2)+x(3))+b*(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2)+c*((x(1)-40)+(x(1)+x(2)-100));
    A = [-1 -1 0;-1 0 0]; b = [-100;-40];
    Aeq = [1 1 1];  beq = [180];
    lb = zeros(3,1); ub = 100*ones(3,1);
    intlist = [1;1;1];
    x0 = ones(3,1);
    [errmsg,fm,x] = BNB20_new(fh,x0,intlist,lb,ub,A,b,Aeq,beq,[]);
    objf(i) = fm;  objx(:,i) = x;
    i = i + 1;
end
```

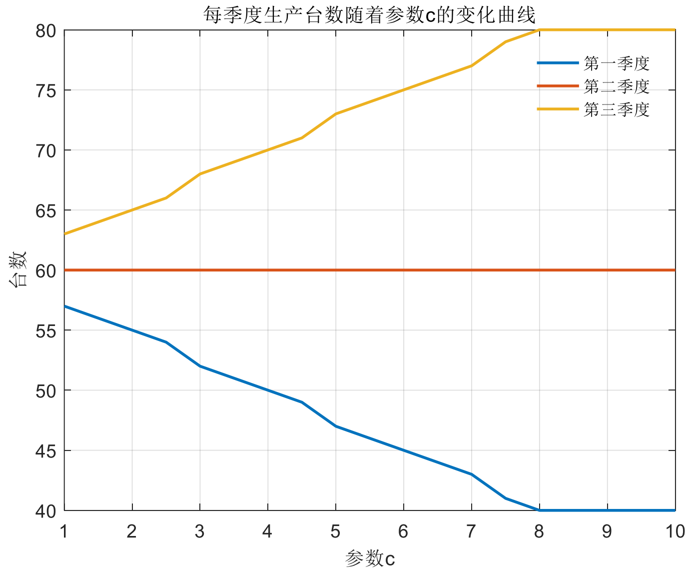




3. 混合整数非线性规划


```
i = 1;
for c = 1:0.5:10
    a = 50; b = 0.2;
    fh = @(x)a*(x(1)+x(2)+x(3))+b*(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2)+c*((x(1)-
40)+(x(1)+x(2)-100));
    A = [-1 -1 0;-1 0 0]; b = [-100;-40];
    Aeq = [1 1 1];  beq = [180];
    lb = zeros(3,1); ub = 100*ones(3,1);
    intlist = [1;1;1];
    x0 = ones(3,1);
    [errmsg,fm,x] = BNB20_new(fh,x0,intlist,lb,ub,A,b,Aeq,beq,[]);
    objf(i) = fm;  objx(:,i) = x;
    i = i + 1;
end
```





3. 混合整数非线性规划

进一步讨论参数a、b、c对生产计划的影响；

由于生产总量是恒定的，即x1+x2+x3=180，而

$$\min z = a\left(x_1 + x_2 + x_3\right) + b\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + c\left[\left(x_1 - 40\right) + \left(x_1 + x_2 - 100\right)\right]$$

，故 a 的变化不会影响生产计划；

b 是x的二次幂的系数，它反映了生产费用。当 b 比较大时，生产费用占主导地位，x1、x2、x3应趋于相等；而当 b 较小时，贮存费占主导地位，此时应使每季度的贮存量较少。

c 反映了贮存费，当 c 较大时，贮存费占主导地位，此时应使贮存量尽量少；而当 c 较小时，生产费用占主导地位，x1、x2、x3应趋于相等。


EDUCATION
BUSINESS
01
IDEA
02
LEARNING
03
CREATIVE
INSPIRATION
PHOTO BOOK

感谢聆听