信陽師範學院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

-1975-

第2章 矩阵分析与计算

讲授人：牛言涛

日期：2020年2月18日

目录

CONTENTS

2.4 矩阵分析与处理

MATLAB提供的部分矩阵分析函数如下表所示。

函数名	功能描述	函数名	功能描述
norm	向量和矩阵的距离度量（范数）	null	化零空间
rank	矩阵的秩	orth	正交空间（正交基矩阵）
det	矩阵的行列式	rref	矩阵的简化梯形形式
trace	矩阵的迹	subspace	两个子空间的角度
'	矩阵的转置	eig	特征值特征向量
inv	矩阵求逆	cond	矩阵条件数
chol	正定矩阵	trigle	矩阵对角化（自定义函数）

1 矩阵的逆

信陽師範學院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- 在MATLAB中，求方阵A的逆矩阵可调用函数inv(A)。
- 例：用求逆矩阵的方法解线性方程组：

$$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x+4y+9z=-2 \\ x+8y+27z=6 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

则原线性方程组可简写为$Ax=b$，

其解为：$x=A^{-1}b$

```
>> A = [1,2,3;1,4,9;1,8,27];   %系数矩阵
>> b = [5,-2,6]'; %右端向量
>> x = inv(A)*b  %矩阵求逆的方法求解
x =
   23.0000
  -14.5000
    3.6667
>> x = A\b  %运用左除运算符求解线性代数方程组
x =
   23.0000
  -14.5000
    3.6667
```

1 矩阵的逆

- 如果误差矩阵的范数是一个微小的数($10^{-15} \sim 10^{-16}$)，则可以接受得出的逆矩阵，否则应该认为是不正确的。

```
>> H = hilb(10);
>> H1 = inv(H);       %直接求逆矩阵
>> n1 = norm(H*H1 - eye(size(H)))          %误差比较大
n1 =
   2.2677e-04
>> H2 = invhilb(10);     %利用自带函数求hilbert逆矩阵
>> n2 = norm(H*H2 - eye(size(H)))      %误差比较大
n2 =
   1.6148e-04
>> H3 = sym(hilb(10)); %使用符号工具箱，即使对更高阶的非奇异矩阵也可以精确求解出矩阵的逆矩阵来。
>> n3 = norm(H*inv(H3) - eye(size(H)))
n3 =
0
```

2 方阵的行列式

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- MATLAB中，求方阵A所对应的行列式的值得函数det(A).
- 例：用克拉默（Cramer）方法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$$

```
>> D=[2,2,-1,1;4,3,-1,2;8,5,-3,4;3,3,-2,2];    %定义系数矩阵
>> b = [4;6;12;6];    %定义常数项向量
>> D1 = [b,D(:,2:4)];    %用方程组的右端向量置换D的第1列
>> D2 = [D(:,1:1),b,D(:,3:4)];    %用方程组的右端向量置换D的第2列
>> D3 = [D(:,1:2),b,D(:,4:4)];    %用方程组的右端向量置换D的第3列
>> D4 = [D(:,1:3),b];    %用方程组的右端向量置换D的第4列
>> DD = det(D);
>> x1 = det(D1)/DD;
>> x2 = det(D2)/DD;
>> x3 = det(D3)/DD;
>> x4 = det(D4)/DD;
>> X = [x1,x2,x3,x4]
X =
    1.0000    1.0000   -1.0000   -1.0000
```

2 方阵的行列式

Cramer.m

```matlab
function Cramer(A,b)
%% 克拉默法则求解线性方程组的解，其中A为系数矩阵，b为右端向量
%% 1、输入参数的判断
    if nargin == 0 || nargin == 1 %判断输入参数个数
        disp('您输入的参数个数不足！');
        return
    end
%% 2、判断矩阵是否为方阵
    [rs,cs] = size(A); %求矩阵的维度长度
    if rs ~= cs
        disp('系数矩阵必须是方阵，否则无法用克拉默法则求解！');
        return
    end
%% 3、求解判断系数矩阵行列式的值
    D = det(A);  %求系数矩阵的行列式值
    if D == 0
        disp('系数矩阵行列式的值等于零！');
        return
    end
%% 4、克拉默法则求解和输出
    disp('线性方程组的解为：');
    for i = 1:rs
        AX = [A(:,1:i-1),b,A(:,i+1:cs)]; %用方程组的右端向量置换A的第i列
        x = det(AX)/D; %克拉默法则
        fprintf('x%d = %.6f\n',i,x); %指定输出格式
    end
end
```

```
>> A = [2,2,-1,1;4,3,-1,2;8,5,-3,4;3,3,-2,2] %系数矩阵
A =
     2     2    -1     1
     4     3    -1     2
     8     5    -3     4
     3     3    -2     2
>> b = [4;6;12;6]   %定义常数项向量
b =
     4
     6
    12
     6
>> Cramer(A,b)
线性方程组的解为：
x1 = 1.000000
x2 = 1.000000
x3 = -1.000000
x4 = -1.000000
```

3 矩阵的秩

- 一个矩阵中行（列）向量的最大线性无关组包含的行（列）向量的个数称为该矩阵的秩。（满秩）
- 所谓一个线性变换的秩，无非就是变换后，还能保持非零体积的几何形状的最大维度。「秩」是图像经过矩阵变换之后的空间维度。
- MATLAB中，求矩阵秩的函数是rank(A)。
- 例：求矩阵的秩 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

```
>> D=[2,2,-1,1;4,3,-1,2;8,5,-3,4;3,3,-2,2]    %系数矩阵
D =
     2     2    -1     1
     4     3    -1     2
     8     5    -3     4
     3     3    -2     2
>> r = rank(D)
r =
     4
```

4 向量和矩阵的范数

- 设向量V=($v_1,v_2,\ldots,v_n$)，下面讨论向量的4种范数：

  (1) 2 - 范数： $\|V\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$

  (2) 1 – 范数： $\|V\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$

  (3) ∞ - 范数： $\|V\|_\infty = \max\{|v_i|\}$ $\|V\|_{-\infty} = \min\{|v_i|\}$

  (4) p – 范数： $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

- 在MATLAB中，求解3种向量范数的函数为：

  norm(V)或norm(V,2)： 2 - 范数；norm(V,1)： 1 - 范数；norm(V,inf)： ∞ - 范数；

  norm(V,p)：p范数

4 向量和矩阵的范数

- 设A是一个m×n的矩阵，V是一个含有n个元素的列向量，定义 $\|A\| = \max\|AV\|, \|V\| = 1$

(1) $\|A\|_1 = \max_{\|V\|=1}\{\|AV\|_1\} = \max_k\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|\}$ 列和范数，A每一列元素绝对值之和的最大值。

(2) $\|A\|_2 = \max_{\|V\|=1}\{\|AV\|_2\} = \sqrt{\lambda_1}$ 谱范数，λ为A'A的最大特征值。

(3) $\|A\|_\infty = \max_{\|V\|=1}\{\|AV\|_\infty\} = \max_i\{\sum_{k=1}^{m}|a_{ik}|\}$ 行和范数

(4) $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Frobenius范数，norm(A, 'fro')。

MATLAB中，前三种矩阵范数函数与向量范数函数相同。

4 向量和矩阵的范数

- **例：求矩阵的4种范数**

>> A = [17,0,1,0,15; 23,5,7,14,16; 4,0,13,0,22; 10,12,19,21,3; 11,18,25,2,19]

```
>> A = [17,0,1,0,15; 23,5,7,14,16; 4,0,13,0,22; 10,12,19,21,3; 11,18,25,2,19]
A =
    17     0     1     0    15
    23     5     7    14    16
     4     0    13     0    22
    10    12    19    21     3
    11    18    25     2    19
>> a1 = norm(A,1)     %求A的1 - 范数
a1 =
    75
>> a2 = norm(A) %求A的2 - 范数
a2 =
   59.3617
>> a3 = norm(A,inf)     %求A的∞ - 范数
a3 =
    75
>> a4 = norm(A,'fro')     %求A的F范数
a4 =
   68.7677
```

5 矩阵的条件数和迹

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- 定义 $cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$，即矩阵A的条件数等于A的范数与A的逆矩阵的范数的乘积。条件数越接近于1，矩阵的性能越好，反之，矩阵的性能越差。
- 条件数是线性方程组Ax=b的解对b中的误差或不确定度的敏感性的度量。
  - (1) cond(A,1)
  - (2) cond(A)或cond(A,2)
  - (3) cond(A,inf)
- 例6：求矩阵A三种条件数。

$$A=\begin{bmatrix}2&2&3\\4&5&-6\\7&8&9\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

```
>> A = [2,2,3;4,5,-6;7,8,9]
A =
     2     2     3
     4     5    -6
     7     8     9
>> c1 = cond(A,1)
c1 =
  149.1429
>> c2 = cond(A,2)
c2 =
   87.9754
>> c3 = cond(A,inf)
c3 =
  144.0000
```

```
>> c4 = norm(A,1)*norm(inv(A),1)   %1-范数求条件数
c4 =
  149.1429
>> c5 = norm(A,2)*norm(inv(A),2)   %2-范数求条件数
c5 =
   87.9754
>> c6 = norm(A,inf)*norm(inv(A),inf)   %inf-范数求条件数
c6 =
  144.0000
```

5 矩阵的条件数和迹

```
>> A = [2,2,3;4,5,-6;7,8,9];
>> b = [1;2;3];
>> X = A\b   %求解线性方程组的解
X =
    1.1429
   -0.5714
   -0.0476
>> A1 = A;
>> A1(1,1) =  A1(1,1)-0.01
>> A1(2,2) =  A1(2,2)+0.005
>> X2 = A1\b
X2 =
    1.2070
   -0.6216
   -0.0529
```

条件数是线性方程组Ax=b的解对b中的误差或不确定度的敏感性的度量。

$$\begin{bmatrix} 400 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

很容易得到解为： x1 = -100, x2 = -200. 比如，将 A 矩阵的系数 400 改变成 401：

$$\begin{bmatrix} 401 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

则得到一个截然不同的解： x1 = 40000, x2 = 79800.

主要是两个向量可以互相近似线性表达（如[401 -201]与[-800 401]），从而另一项近似残差项，这样微小的扰动带来大的扰动。

5 矩阵的条件数和迹

- 矩阵的迹等于矩阵对角线元素之和，也等于矩阵的特征值之和。MATLAB中，求矩阵的迹的函数是trace(A).
- 例：求矩阵A的迹。

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

迹、特征值、行列式都是相似不变量。与坐标基变换无关。

```
>> A = [2,2,3;4,5,-6;7,8,9]
A =
     2     2     3
     4     5    -6
     7     8     9
>> tr = trace(A)
tr =
    16
>> tr2 = sum(diag(A))  %取出对角线元素向量，然后求和
tr2 =
    16
>> [C,D] = eig(A)
C =
  -0.7586 + 0.0000i   0.2444 - 0.0372i   0.2444 + 0.0372i
   0.6514 + 0.0000i  -0.3196 + 0.5155i  -0.3196 - 0.5155i
   0.0113 + 0.0000i   0.7557 + 0.0000i   0.7557 + 0.0000i
D =
   0.2380 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   7.8810 + 5.1126i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   7.8810 - 5.1126i
>> tr3 = sum(D(:))  %矩阵特征值之和
tr3 =
   16.0000
```

6 矩阵的特征值与特征向量

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

计算矩阵A的特征值和特征向量的函数是eig(A)和eigs(A)：

（1）E=eig(A)：求矩阵A的全部特征值，构成向量E

（2）[V,D]=eig(A)：求矩阵A的全部特征值，构成对角阵D，并求A的特征向量构成V的列向量。

（3）[V,D]=eig(A, 'nobalance')：与第2种相似，但第2种先对A作相似变换，后求特征值特征向量，本格式直接求。

（4）[V,D,flag] = eigs(A,k,sigma) 求稀疏矩阵A的k个最大特征值

- sigma取值：lm表示绝对值最大的特征值；sm绝对值最小特征值；对实对称问题：la表示最大特征值；sa为最小特征值；对非对称和复数问题：lr表示最大实部；sr表示最小实部；li表示最大虚部；si表示最小虚部。
- flag表示特征值的收敛性，若flag=0，则所有特征值都收敛，否则，不是所有都收敛。

6 矩阵的特征值与特征向量

```
>> A = gallery('lehmer',4)  %生成正定矩阵
>> D = eig(A)  %计算特征向量，返回列向量形式
>> D = eig(A,'matrix') %计算特征向量，返回矩阵形式
>> [V,D] = eig(A) %计算特征值D和特征向量V
>> [V,D] = eig(A,'nobalance') %对A不做相似变换
>> A*V-V*D   %验证所求 A*V = V*D.
>> Ac = gallery('circul',4) %生成循环矩阵
>> [Vc,Dc] = eig(Ac)
>> Ad = [ 3.0    -2.0     -0.9     2*eps;
     -2.0      4.0       1.0    -eps;
     -eps/4    eps/2    -1.0      0;
     -0.5     -0.5       0.1     1.0];  %元素尺度差异很大
>>[Vd, Dd] = eig(Ad)
```

```
>> A = gallery('lehmer',4)  %生成正定矩阵
A =
    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500
    0.5000    1.0000    0.6667    0.5000
    0.3333    0.6667    1.0000    0.7500
    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000
>> D = eig(A)  %计算特征值，返回列向量形式，用eigs(A)求解，验证
D =
    0.2078
    0.4078
    0.8482
    2.5362
>> D2 = eig(A,'matrix') %计算特值，返回矩阵形式
D2 =
    0.2078         0         0         0
         0    0.4078         0         0
         0         0    0.8482         0
         0         0         0    2.5362
>> [V,D] = eig(A) %计算特征值D和特征向量V
V =
    0.0693   -0.4422   -0.8105    0.3778
   -0.3618    0.7420   -0.1877    0.5322
    0.7694    0.0486    0.3010    0.5614
   -0.5219   -0.5014    0.4662    0.5088
D =
    0.2078         0         0         0
         0    0.4078         0         0
         0         0    0.8482         0
         0         0         0    2.5362
```

6 矩阵的特征值与特征向量

- A是一个矩阵，poly(A)表示生成矩阵A的特征多项式 $|\lambda I - A|$

```
>> A=[ 3 1 4 1; 5 9 2 6;5 3 5 8; 9 7 9 3]
A =
     3     1     4     1
     5     9     2     6
     5     3     5     8
     9     7     9     3
>> p=poly(A)      %V = roots(p)求解特征多项式的解，即特征值。
p =
    1.0000  -20.0000  -16.0000  480.0000   98.0000
>> y=poly2sym(p)   %把多项式系数转换为手写多项式形式
y =
x^4 - 20*x^3 - 16*x^2 + 480*x + 98
>> R = roots(p)
R =
   19.5494
    5.3052
   -4.6514
   -0.2031
```

```
>> [V,D] = eig(A)
V =
   -0.1971    0.2690   -0.7834    0.3292
   -0.5470   -0.3087    0.2910   -0.8582
   -0.5231   -0.6076    0.5487    0.3717
   -0.6231    0.6806    0.0237    0.1303
D =
   19.5494         0         0         0
         0   -4.6514         0         0
         0         0   -0.2031         0
         0         0         0    5.3052
```

7 矩阵初等变换及二次型

- 求行阶梯矩阵及向量组的基
- 正交基，正交矩阵
- 正定矩阵
- 矩阵对角化
- 二次型化为标准型

(1) 求行阶梯矩阵及向量组的基

- 行阶梯矩阵使用初等变换化为行最简形式，从而找到列向量组的一个最大无关组。
- MATLAB将矩阵化成最简形的命令：rref
  - R = rref(A)：用高斯—约当消元法和行主元法求A的行最简形矩阵R。
  - [R, jb] = rref(A)：jb是一个向量，其含义r = length(jb)为A的秩，A(:,jb)为A的列向量基，jb中元素表示基向量所在的列。
  - [R, jb] = rref(A, tol)：tol为指定的精度。
- 例：用初等行变换将下列矩阵化成行最简阶梯形

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & 6 & -1 \\ 3 & -3 & -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [1 -1 -1 1 0;0 1 2 -4 1;2 -2 -4 6 -1;3 -3 -5 7 -1]
A =
     1    -1    -1     1     0
     0     1     2    -4     1
     2    -2    -4     6    -1
     3    -3    -5     7    -1
>> R = rref(A)
R =
    1.0000         0         0   -1.0000    0.5000
         0    1.0000         0         0         0
         0         0    1.0000   -2.0000    0.5000
         0         0         0         0         0
```

(1) 求行阶梯矩阵及向量组的基

➢ 例：求下列向量组的一个最大无关组。

$$a_1=(1,-2,2,3),\ a_2=(-2,4,-1,3),\ a_3=(-1,2,0,3),\ a_4=(0,6,2,3),\ a_5=(2,-6,3,4)$$

```
>> a1 = [1 -2 2 3]'; a2 = [-2 4 -1 3]'; a3 = [-1 2 0 3]'; a4 = [0 6 2 3]'; a5 = [2 -6 3 4]';
>> A = [a1 a2 a3 a4 a5]  %五个向量构成矩阵
A =
     1    -2    -1     0     2
    -2     4     2     6    -6
     2    -1     0     2     3
     3     3     3     3     4
>> [R,jb] = rref(A) %高斯—约当消元法和行主元法求A的行最简形矩阵R
R =
    1.0000         0    0.3333         0    1.7778
         0    1.0000    0.6667         0   -0.1111
         0         0         0    1.0000   -0.3333
         0         0         0         0         0
jb =
     1     2     4
>> jdwgz = A(:,jb)  %获得矩阵A的极大线性无关组
jdwgz =
     1    -2     0
    -2     4     6
     2    -1     2
     3     3     3
```

a1 = [1 -2 2 3]'; a2 = [-2 4 -1 3]'; a3 = [-1 2 0 3]'; a4 = [0 6 2 3]'; a5 = [2 -6 3 4]';

即a1、a2、a4为向量组的一个基，即为向量组的一个极大无关组。

(2) 正交基、正交矩阵

➢ 如果矩阵Q满足：$QQ' = I$，$Q'Q = I$，则Q为正交矩阵，求正交矩阵函数orth()。格式：Q = orth(A)，A为非奇异矩阵。

1. A^T是正交矩阵
2. $AA^T = A^TA = E$（E为单位矩阵）
3. A的各行是单位向量且两两正交
4. A的各列是单位向量且两两正交
5. (Ax,Ay)=(x,y) x,y∈R
6. |A| = 1或-1
7. $A^T = A^{-1}$

```
>> A = [4 0 0; 0 3 1; 0 1 3];
>> r = rank(A)
r =
     3
>> Q = orth(A)   %求正交矩阵
Q =
         0    1.0000         0
   -0.7071         0   -0.7071
   -0.7071         0    0.7071
>> B = Q'*Q %验证Q'Q = I
B =
    1.0000         0    0.0000
         0    1.0000         0
    0.0000         0    1.0000
>> E = norm(eye(r)-Q'*Q,'fro') %在合理误差界限内验证基向量 Q 是正交、归一化向量。
E =
   5.3003e-16
```

```
>> B = [1 0 1; 0 1 0; 1 0 1];
>> r = rank(B)
r =
     2
>> Q = orth(B)  %求秩亏矩阵的正交基
Q =
   -0.7071   -0.0000
         0    1.0000
   -0.7071    0.0000
```

(3) 正定矩阵

- 正定矩阵是在对称矩阵的基础上建立起来的概念。如果一个对称矩阵所有的主子行列式均为正数，则称该矩阵为正定矩阵。如果所有的主子式均为非负的数值，则称为半正定矩阵。
- 格式[D, p] = chol(A)：若$p=0$，则A为正定矩阵，其中D矩阵为A的cholesky分解矩阵；若$p>0$，则A为非正定矩阵，p为整数，表示分解失败的主元位置的索引。
- 例：判定下列矩阵的正定性：

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

```
>> A = [1 -1 0;-1 2 1;0 1 3];
>> [D,p] = chol(A)
D =
    1.0000   -1.0000         0
         0    1.0000    1.0000
         0         0    1.4142
p =
     0
>> B = [2 -2 0;-2 1 -2;0 -2 0];
>> [D,p] = chol(B)
D =
    1.4142
p =
     2
```

A矩阵是正定矩阵，

B矩阵不是正定矩阵

(4) 矩阵的对角化

- $n \times n$矩阵对角化的条件是A具有n个线性无关的特征向量。如果存在一个可逆矩阵 P 使得 P $^{-1}$AP 是对角矩阵，则它就被称为可对角化的。

- 例：判断下列实矩阵是否可以相似对角化，若可相似对角化，求出可逆矩阵P和对角矩阵D，使得 P $^{-1}$AP 是对角矩阵

$$\begin{bmatrix} 11 & -6 & 4 & -10 & -4 \\ -3 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ -8 & 12 & -3 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & -2 & 3 & -1 \\ 8 & -18 & 8 & -14 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [11 -6 4 -10 -4; -3 5 -2 4 1;
A =
    11    -6     4   -10    -4
    -3     5    -2     4     1
    -8    12    -3    12     4
     1     6    -2     3    -1
     8   -18     8   -14    -1
>> [V,D] = eig(A)
V =
    0.3244   -0.6922    0.0408    0.5
   -0.1622    0.1831    0.1280   -0.
   -0.6489    0.5493    0.3840   -0.5
   -0.1622   -0.1428    0.4248    0.3
    0.6489   -0.4065   -0.8088    0.4
D =
    3.0000         0         0
         0    5.0000         0
         0         0    5.0000
         0         0         0    1.(
         0         0         0
>> r = rank(V)
r =
     5
```

```
>> A1 = 3*eye(rank(A)) - A; %求特征值3所对应的基础解系
>> x1 = null(A1,'r')
x1 =
    0.5000
   -0.2500
   -1.0000
   -0.2500
    1.0000
>> A2 = 5*eye(rank(A)) - A; %求特征值5所对应的基础解系
>> x2 = null(A2,'r')
x2 =
    2.0000    1.0000
   -0.3333   -0.3333
   -1.0000   -1.0000
    1.0000         0
         0    1.0000
>> A3 = 1*eye(rank(A)) - A; %求特征值5所对应的基础解系
>> x3 = null(A3,'r')
x3 =
    0.8000    0.6000
   -0.6000   -0.2000
   -0.4000   -0.8000
    1.0000         0
         0    1.0000
```

基础解系中解的数等于特征根重数，可对角化

(4) 矩阵的对角化

- 如果矩阵A有n个不同的特征根，则可对角化；如果特征根有重根，则对于每一个特征根，求其$(\lambda I - A)$所对应的基础解系，如果基础解系所含的解的个数等于重根数，则可对角化。
- null(A,'r') 返回 A 的零空间的“有理”基，它通常不是正交基。

```
>> T = [x1,x2,x3] %基础解系构成矩阵T
T =
     0.5000    2.0000    1.0000    0.8000    0.6000
    -0.2500   -0.3333   -0.3333   -0.6000   -0.2000
    -1.0000   -1.0000   -1.0000   -0.4000   -0.8000
    -0.2500    1.0000         0    1.0000         0
     1.0000         0    1.0000         0    1.0000
>> E = inv(T)*A*T %对角化矩阵
E =
     3.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    -0.0000    5.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
    -0.0000         0    5.0000    0.0000   -0.0000
    -0.0000    0.0000   -0.0000    1.0000   -0.0000
     0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000    1.0000
```

```
>> B = [-3 1 -1;-7 5 -1;-6 6 -2]
B =
    -3     1    -1
    -7     5    -1
    -6     6    -2
>> [V,D] = eig(B)   %求A的特征值和特征向量
V =
     0.0000   -0.7071    0.7071
    -0.7071   -0.7071    0.7071
    -0.7071    0.0000    0.0000
D =
     4.0000         0         0
          0   -2.0000         0
          0         0   -2.0000
```

```
>> %求特征值4所对应的基础解系
>> y1 = null(4*eye(3) - B,'r')
y1 =
     0
     1
     1
>> %求特征值-2所对应的基础解系
>> y2 = null(-2*eye(3) - B,'r')
y2 =
     1
     1
     0
```

基础解系中解的数不等于特征根重数，不可对角化

(5) 二次型化为标准型

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- 实对称矩阵A都是可以对角化的，并且都存在正交矩阵Q，使得 $inv(Q)AQ$ 为对角阵，对角阵的对角线元素为矩阵A的特征值。对于实对称矩阵，特征值分解函数eig(A)返回的特征向量矩阵就是正交矩阵Q。
- 例：将下列二次型通过正交变换化为标准型。

$$f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

```
>> A = [17 -2 -2;-2 14 -4;-2 -4 14];
```

```
>> A = [17 -2 -2;-2 14 -4;-2 -4 14];
>> [P,D] = eig(A)
P =
    0.3333   -0.2981    0.8944
    0.6667   -0.5963   -0.4472
    0.6667    0.7454         0
D =
     9     0     0
     0    18     0
     0     0    18
>> syms y1 y2 y3
>> y = [y1;y2;y3];
>> X = vpa(P*y,3)      %正交变换X = Py
X =
 0.333*y1 - 0.298*y2 + 0.894*y3
 0.667*y1 - 0.596*y2 - 0.447*y3
            0.667*y1 + 0.745*y2
>> fn = [y1 y2 y3]*D*y    %标准型
fn =
9*y1^2 + 18*y2^2 + 18*y3^2
```


01
IDEA
02
LEARNING
03
CREATIVE
INSPIRATION
BUSINESS
EDUCATION
PHOTO BOOK

感谢聆听