



信阳师范学院  
数学与统计学院  
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

## 第6章 优化与规划问题

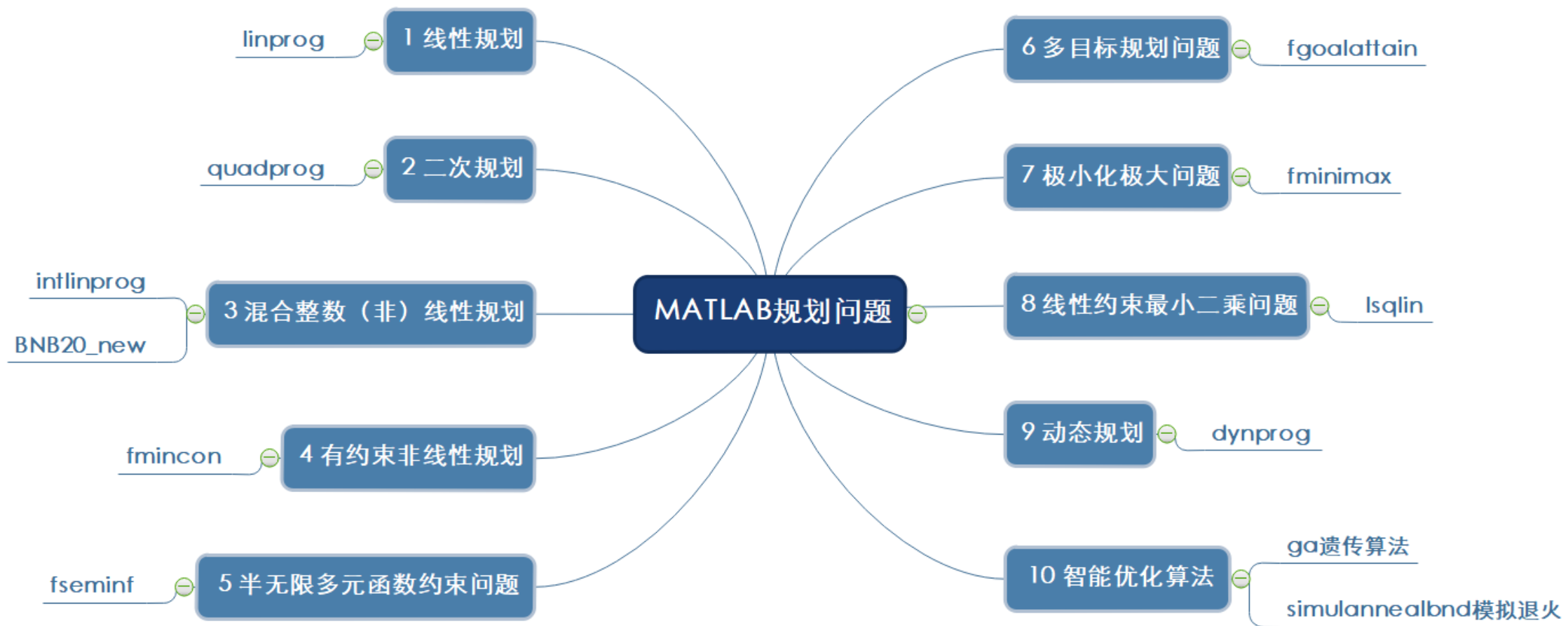


讲授人：牛言涛



日期：2020年3月10日

# 第6章 优化与规划问题知识结构图



运筹学（operational research）是一门解决一定约束条件下最优解的学科，应用现有的科学技术知识与数学手段，来解决实际生活之中的各种问题，是一门应用学科。运筹学分支还有规划论，排队论，图论，决策论等。

## 6.2 二次规划

- 二次规划是非线性规划中的一类特殊数学规划问题，在很多方面都有应用，如投资组合、约束最小二乘问题的求解、序列二次规划在非线性优化问题中应用等。
- 在过去的几十年里，二次规划已经成为运筹学、经济数学、管理科学、系统分析和组合优化科学的基本方法。
- 已经出现了很多求解二次规划问题的算法，如拉格朗日方法、Lemke方法、内点法、有效集法、椭球算法等等，并且仍有很多学者在从事这方面的研究工作。

## 6.2 二次规划

- 二次规划的标准型：

$$\min Z = \frac{1}{2} X^T H X + f^T X$$

$$s.t. \begin{cases} A X \leq b \\ Aeq X = beq \\ lb \leq X \leq ub \end{cases}$$



$$\min f(x_1, x_2) = -2x_1 - 6x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

其中： $f$ 、 $b$ 、 $beq$ 、 $lb$ 、 $ub$ 、 $X$ 是矢量， $H$ 、 $A$ 、 $Aeq$ 为矩阵。

$H$ 是Hessian矩阵。如果Hessian矩阵是半正定的，则该式是一个凸二次规划，在这种情况下该问题的困难程度类似于线性规划。如果有至少一个向量满足约束并且在可行域有下界，则凸二次规划问题就有一个全局最小值。如果是正定的，则这类二次规划为严格的凸二次规划，那么全局最小值就是唯一的。如果是一个非正定矩阵，则为非凸二次规划，这类二次规划更有挑战性，因为它们有多个平稳点和局部极小值点。

### 求解二次规划问题函数quadprog 调用格式

- $[x, fval, exitflag, output, lambda] = \text{quadprog}(H, f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x0, options)$ 
  - $options = \text{optimoptions}('quadprog', 'Algorithm', 'interior-point-convex', 'Display', 'iter')$
  - $x$ 为最优解， $fval$ 解 $x$ 处的目标函数值。
  - $exitflag$ 退出条件，正值表示目标函数收敛于解 $x$ 处；负值不收敛，零值表示已达到函数评价或迭代的最大次数。
  - $output$ 为优化的一些信息，如 $iterations$ 、 $algorithm$ 、 $constrviolation$ 、 $firstorderopt$ 等。
  - $lambda$ 为解 $x$ 的Lagrange乘子，求函数  $f(x_1, x_2, \dots)$  在  $g(x_1, x_2, \dots) = 0$  的约束条件下的极值的方法。

## 6.2 二次规划

### 例1: 求解二次规划问题

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad lb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min Z = \frac{1}{2} X^T H X + f^T X$$
$$s.t. \begin{cases} A X \leq b \\ Aeq X = beq \\ lb \leq X \leq ub \end{cases}$$

给出一个规律：设矩阵H第i行第j列的元素大小为H(i,j)，二次项 $x_i x_j$ 的系数为a(i,j)，则：

$$H(i,j) = \begin{cases} 2a(i,j), & i = j \\ a(i,j), & i \neq j \end{cases}$$

$$H = [1 \ -1; \ -1 \ 2];$$

$$f = [-2; \ -6];$$

$$A = [1 \ 1; \ -1 \ 2; \ 2 \ 1];$$

$$b = [2; \ 2; \ 3];$$

$$lb = [0; \ 0];$$

%调用函数

options =

optimoptions('quadprog','Display','iter');

[x,fval,exitflag,output,lamda] =

quadprog(H,f,A,b,[],[],lb,[],[],options)

## 6.2 二次规划

### 例2：求解二次规划问题

$$\min f(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -2.5x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min Z = \frac{1}{2} X^T H X + f^T X$$

$$s.t. \begin{cases} A X \leq b \\ Aeq X = beq \\ lb \leq X \leq ub \end{cases}$$

```
H = [4,-4,0;-4,8,2;0,2,4];
```

```
f = [-6;-3;-2];
```

```
A = [1 1 1;4 1 1];
```

```
b = [3;9];
```

```
Aeq = [-2.5,3,1];
```

```
beq = [6];
```

```
lb = [0;0;0];
```

```
%调用函数
```

```
options = optimoptions('quadprog','Display','iter');
```

```
[x,fval,exitflag,output,lamda] = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,[],[],options)
```



---

# 感谢聆听

---