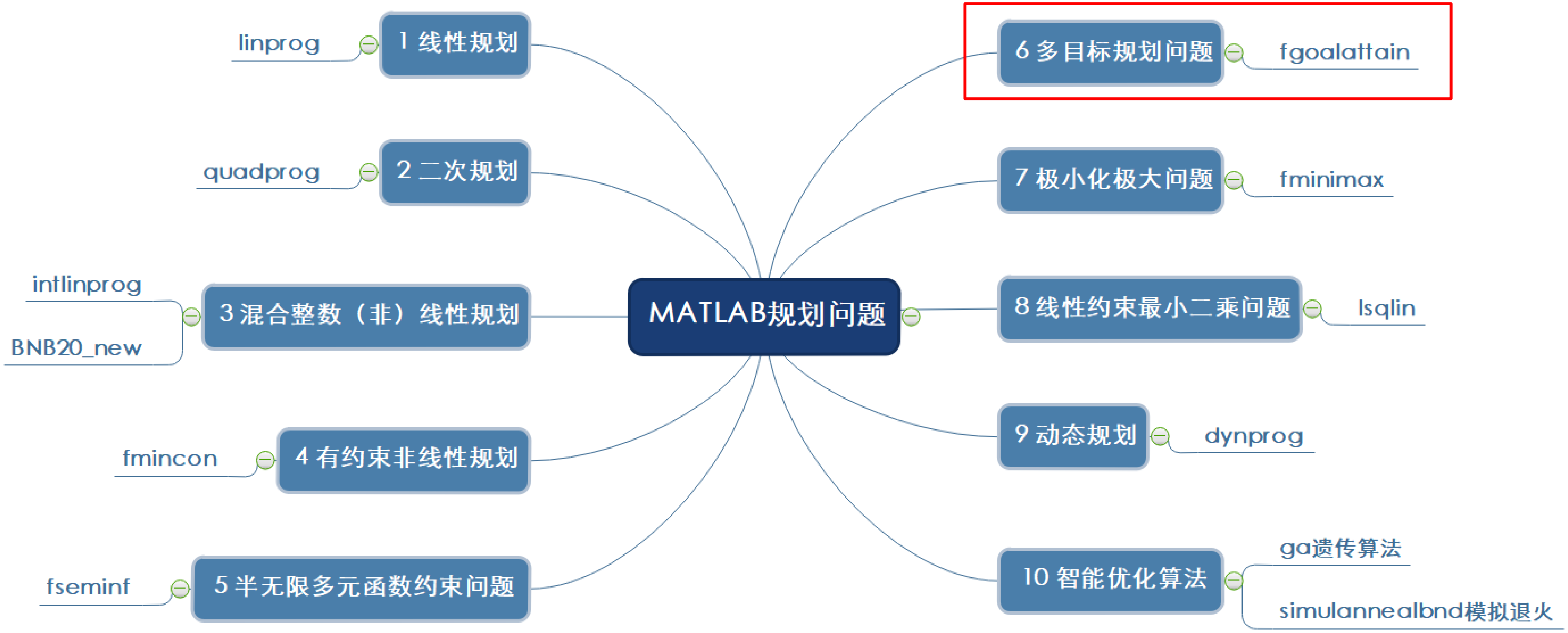
信陽師範學院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第6章 优化与规划问题

讲授人：牛言涛

日期：2020年3月14日

第6章 优化与规划问题知识结构图



运筹学（operational research）是一门解决一定约束条件下最优解的学科，应用现有的科学技术知识与数学手段，来解决实际生活之中的各种问题，是一门应用学科。运筹学分支还有规划论，排队论，图论，决策论等。

6.6 多目标规划问题

- 多目标规划是数学规划的一个分支，研究多于一个的目标函数在给定区域上的最优化。通常记为 MOP(multi-objective programming)。
- 在很多实际问题中，例如经济、管理、军事、科学和工程设计等领域，衡量一个方案的好坏往往难以用一个指标来判断，而需要用多个目标来比较，而这些目标有时不甚协调，甚至是矛盾的。因此有许多学者致力于这方面的研究。
- 求解多目标规划的方法大体上有以下几种：一种是化多为少的方法， 即把多目标化为比较容易求解的单目标或双目标，如主要目标法、线性加权法、理想点法等；另一种叫分层序列法，即把目标按其重要性给出一个序列，每次都在前一目标最优 解集内求下一个目标最优解，直到求出共同的最优解。对多目标的线性规划除以上方法外还可以适当修正单纯形法来求解；还有一种称为层次分析法，是一种定性与定量相结合的多目标决策与分析方法，对于目标结构复杂且缺乏必要的数据的情况更为实用。

6.6 多目标规划问题

多目标规划是指在一组约束下，对多个不同目标函数进行优化。一般形式为：

$$\left[f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x) \right]_{\min}$$

$$sub.to \quad g_j(x) \le 0,\ j = 1, 2, 3, \cdots, p$$

- 其中， $x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n \right)$
- 在同一约束下，当目标函数处于冲突状态时，不存在最优解 x 使所有目标函数同时达到最优。此时，使用有效解，即如果不存在 $x \in S$，使得 $f_i(x) \ge f_i(x^*), i = 1, 2, \cdots, m$，则称 x^* 为有效解。

6.6 多目标规划问题

例1（购买决策问题）：设某商店有五种糖果A_1, A_2, A_3, A_4, A_5，单价分别为36.9、35.8、24.9、29.9、45.8元/kg，现在要筹办一次茶话会，要求买糖果的钱不超过1850元，糖果总量不得少于55kg，考虑糖果搭配合理，每种糖果不少于8Kg，A_1和A_2两种糖果总量不得少于23kg，A_4和A_5两种糖果总量不得少于20kg，应该如何确定最好的买糖方案，使得花费最少，购买的糖果够多?

$$\min f_1(x) = 36.9x_1 + 35.8x_2 + 24.9x_3 + 29.9x_4 + 45.8x_5$$

$$\max f_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$s.t.\begin{cases} 36.9x_1 + 35.8x_2 + 24.9x_3 + 29.9x_4 + 45.8x_5 \le 1850 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 55 \\ x_1 + x_2 \ge 23 \\ x_4 + x_5 \ge 20 \\ x_i \ge 8,\ i = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

6.6 多目标规划问题

多目标规划问题MATLAB求解函数：

- [x, fval, attainfactor, exitflag, output, lambda] = fgoalattain(fun, x0, goal, weight, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon, options)
  - goal为用户设计的目标函数数值问题；
  - weight为权值系数向量，用于控制目标函数与用户自定义目标值的接近程度；
  - nonlcon对应于非线性不等式约束C和Ceq所建立的函数；
  - attainfactor为解x处的目标规划因子，超出或未达到目标的值；
  - lambda为解x处的拉格朗日乘子。

例1（续）：两个目标函数可以接受的目标分别是1850和-55（最大转最小）。此外，还需要人为选择权重，如更看重“少花钱”这一指标，则可以将权重设置为80%，而将另一指标权重设置为20%。

```
fh = @(x)[[36.9,35.8,24.9,29.9,45.8]*x;[-1,-1,-1,-1,-1]*x];
goal = [1850,-55];
weight = [0.8,0.2];
A = [-1,-1,0,0,0;0 0 0 -1,-1];
b = [-23;-20];
lb = 8*ones(5,1);
x0 = ones(5,1);
[x, fval, attainfactor, exitflag] = fgoalattain(fh,x0,goal,weight,A,b,[],[],lb)
```

```
x =
    8.0000
   15.0000
   11.7855
   12.0000
    8.0000
fval =
   1.0e+03 *
    1.8509
   -0.0548
attainfactor =
    1.0727
```

若钱只有1850元，则适当降低第三种糖果的购买量，可得解X = [8,15,11.5,12,8]，总花费1843.8，总重量54.5kg。

6.6 多目标规划问题

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

例2（生产安排）：某工厂在一个计划期内生产甲、乙两种产品，各产品都要消耗A、B、C三种不同的资源。每件产品对资源的单位消耗、各种资源的限量以及各产品的单位价格、单位利润和所造成的单位污染如下表。假定产品能全部销售出去，且要求每种产品最少生产量为8，问每期怎样安排生产，才能使利润和产值都最大，且造成的污染最小？

	甲	乙	资源限量
资源A单位消耗	9	4	240
资源B单位消耗	4	5	200
资源C单位消耗	3	10	300
单位产品的价格	400	600	
单位产品的利润	70	120	
单位产品的污染	3	2	

$$\max f_1(X) = 70x_1 + 120x_2$$
$$\max f_2(X) = 400x_1 + 600x_2$$
$$\min f_2(X) = 3x_1 + 2x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 240 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 8 \end{cases}$$

6.6 多目标规划问题

```
objf = @(x)[-[70 120]*x;-[400 600]*x;[3 2]*x];
A = [9 4;4 5;3 10];
b = [240;200;300];
lb = [8;8];
%经研究发现，利润达到2万单位，污染控制在80个单位以下
goal = [-3900,-20000,80]; %通过约束条件猜测，可按照实际情况给出
weight = [0.3 0.3 0.4]; %更看重污染
x0 = ones(2,1);
[x, fval, attainfactor, exitflag] = fgoalattain(objf,x0,goal,weight,A,b,[],[],lb)
```

若严格控制污染指标，则解可为X = [9,26]，则产值最大为3750，利润19200，污染79。

```
x =
    9.0848
   27.2746
fval =
   1.0e+04 *
   -0.3909
   -1.9999
    0.0082
attainfactor =
    4.5086
```

6.6 多目标规划问题

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

例3（投资计划）：某市计划发展委员会安排下一个年度的重大项目规划，计划一年安排总投资不超过8亿元，经过初期筛选选中12项可供考虑，每个项目需要投资的数量（单位千万元）、建成后的年利润（千万元）、每年废物排放量（万吨）和租用的劳动力（千人）如下表所示。

为了保护环境该市签订了环保责任书，承诺新增废物量不超过20万吨，从经济的角度要求利润尽可能的高，从社会发展的角度讲要求新增就业岗位尽量多，问应如何选择投资项目?

项目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
投资	2.4	5.2	11	6.2	17	21	3.5	6.1	4.8	15	8.5	30
利润	0.4	1	3	2	4	5	0.7	1.5	1.2	4	2.3	6
废物	0.3	2	3	3	3	5	1	0.5	1.4	2	2	4
劳动力	0.6	1.1	2	2.8	1.5	2.6	0.7	1.5	1	2	1	1.2

6.6 多目标规划问题

解：设是否投资：x_i，投资$x_i=1$，$i=1,2,\cdots,12$，a_i为每个项目的投资额，b_i为每个项目的利润，c_i为每个项目的废物排放量，d_i为劳动力使用量。

$$\max\sum_{i=1}^{12} b_i x_i$$

$$\max\sum_{i=1}^{12} d_i x_i$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{12} a_i x_i \le 80\\ \sum_{i=1}^{12} c_i x_i \le 20\\ x_i = 0or1;\ i=1,2,\cdots,12\end{cases}$$

```
plan = xlsread('planning.xlsx',1,'B2:M5');
invest = plan(1,:);  %投资
profit = plan(2,:);  %利润
waste = plan(3,:);   %废物
labour = plan(4,:);  %劳动力
objf = @(x)-[profit*x;labour*x];  %目标函数，最大值转化为最小值
x0 = zeros(12,1);  %初值选择
lb = zeros(12,1);  %决策变量下限
ub = ones(12,1);   %决策变量上限
```

6.6 多目标规划问题

```
goal = -[sum(profit);sum(labour)]; %目标
%goal = -[20.74;14.86]; %通过线性规划求解在满足约束条件下的目标值
weight = abs(goal); %权重
A = [invest;waste]; %线性约束不等式系数矩阵
b = [80;20]; %线性约束不等式右端向量
options =
optimoptions('fgoalattain','Display','iter','MaxIterations',100,'ConstraintT
olerance',1e-8);
[x,fval,attainfactor,exitflag,output,lambda] =
fgoalattain(objf,x0,goal,weight,A,b,[],[],lb,ub,[],options)
```

选择的投资项目分别为：第3、4、6、8、9、10、11，其中第5个项目可根据实际情况决定是否投资。

```
x =
   -0.0000
   -0.0000
    1.0000
    1.0000
    0.4353
    1.0000
    0.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
   -0.0000
fval =
  -20.7412   -13.5529
attainfactor = 0.3331
```

例4：设线性系统 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

其中 $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，要求设计

输出反馈控制器K，使闭环系统 $\begin{cases} \dot{x} = (A + BKC)x + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ 在复平面实轴上点[-5,-3,-1]的左侧有极点，并要求 $-4 \le K_{ij} \le 4 \quad (i, j = 1, 2).$

6.6 多目标规划问题


```
%目标函数文件
function F = eigfun(K,A,B,C)
  F = sort(eig(A+B*K*C));
end

>> A = [-0.5 0 0;0 -2 10;0 1 -2];
>> B = [1 0;-2 2;0 1];
>> C = [1 0 0;0 0 1];
>> K0 = [-1 -1;-1 -1];
>> goal = [-5,-3,-1];
>> weight = abs(goal);
>> lb = -4 * ones(size(K0));
>> ub = 4 * ones(size(K0));
>> options = optimset('Display','iter');
>> [K,fval,attainfactor] = fgoalattain(@eigfun,K0,goal,weight,[],[],[],[],lb,ub,[],options,A,B,C)
```

```
K =
   -4.0000   -0.2564
   -4.0000   -4.0000
fval =
   -6.9313
   -4.1588
   -1.4099
attainfactor =
   -0.3863
```


01
IDEA
02
LEARNING
03
CREATIVE
INSPIRATION
EDUCATION
BUSINESS
PHOTO BOOK

感谢聆听