信陽師範学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第5章 微分方程(组)数值解

讲授人：牛言涛
日期：2020年3月10日

目录
CONTENTS

A 显示微分方程

B 完全隐式微分方程

C 代数微分方程

D 延迟\时滞微分方程

E 微分方程边值问题

5.4 延迟微分方程（组）（DDEs）

- 在许多现实模型中，我们需要知道系统过去时刻的状态，这就形成了延迟微分方程（Delay Differential Equations）模型。延迟微分方程在生命科学、控制理论、电力控制等领域常常被使用到。
- 所谓延迟/时滞微分方程，指微分方程中信号不是同时发生的，除了当前时刻信号的值，还含有信号以前时刻的值。

$$y' = f\left(t, y, y\left(t-\underline{t_1}\right), y\left(t-\underline{t_2}\right), \dots, y\left(t-t_n\right)\right)$$ 典型（常数）

$$y' = f\left(t, y, y\left(t-t_1\right), y\left(t-\underline{g(t)}\right), \dots, y\left(t-t_n\right)\right)$$ 变时间

$$y' = f\left(t, y, y\left(t-t_1\right), \dots, y\left(t-t_n\right), \underline{y'\left(t-t_{n+1}\right), \cdots, y'\left(t-t_{n+m}\right)}\right)$$ 中立型

5.4 延迟微分方程（组）（DDEs）

信阳师范学院 数学与统计学院 SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- 延迟（时滞）微分方程是微分方程表达式要依赖某些状态变量过去一些时刻的状态，即形如：

$$y' = f\left(t, y, y\left(t-t_1\right), y\left(t-t_2\right), \ldots, y\left(t-t_n\right)\right)$$

其中，$t_1, t_2, \ldots, t_n > 0$ 是时间延迟项。既可以是常数也可以是关于 t 和 y 的函数。当是常数时可以用dde23和ddesd来求解，另一种情况可以用ddesd 求解。

- 例10：求解延迟微分方程（常数）

$$\begin{cases} y_1' = 0.5y_3(t-3) + 0.5y_2(t)\cos t \\ y_2' = 0.3y_1(t-1) + 0.7y_3(t)\sin t \\ y_3' = y_2(t) + \cos(2t) \end{cases}$$

，当 $t \le 0$ 时 $y_1(t) = 0, y_2(t) = 0, y_3(t) = 1$

5.4 延迟微分方程（组）（DDEs）——典型

信阳师范学院
数学与统计学院

sol = dde23(ddefun,lags,history,tspan,option)

- ddefun表示函数句柄，形式dydt=ddefun(t,y,Z)：
  - t与当前t对应；y是对y(t)的近似；
  - Z(:,j)是对所有延迟为t_j的状态变量即$y(t-t_j)$的估计，t_j=lags(j)。
- lags存储各延迟常数的向量；
- history是描述$t<=t_0$时的状态变量的值的函数，

  可以为句柄形式或者常数形式。

	lags1	lags2	lags3
y1	Z(1,1)	Z(1,2)	Z(1,3)
y2	Z(2,1)	Z(2,2)	Z(2,3)
y3	Z(3,1)	Z(3,2)	Z(3,3)

延迟微分方程（组）（DDEs）——典型

例10：求解延迟微分方程（常数）

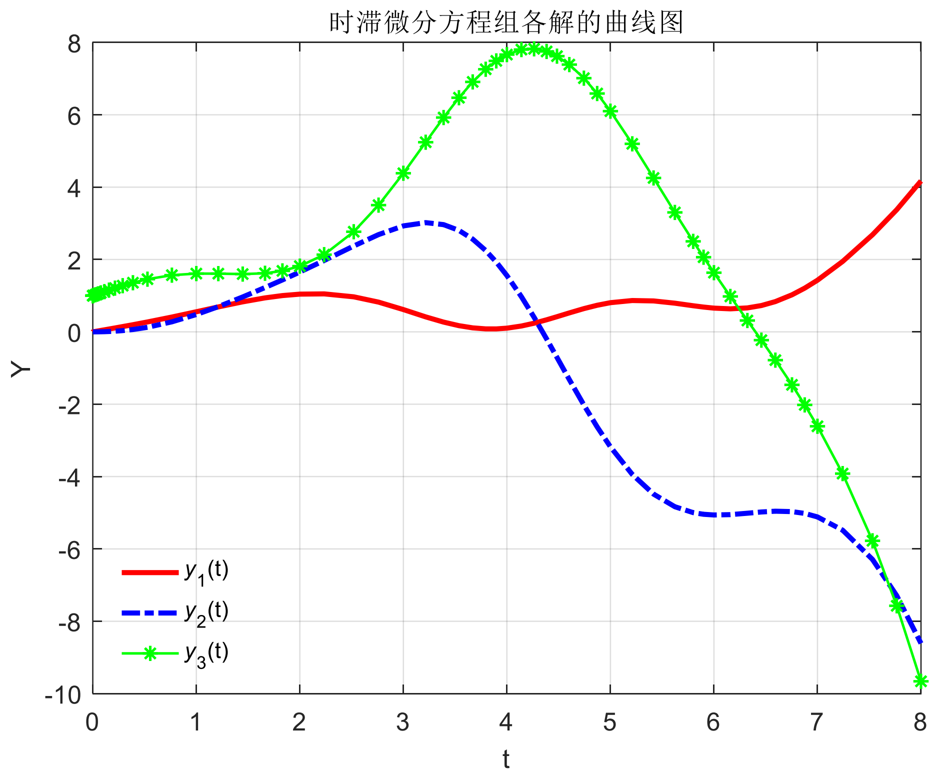
$$\begin{cases} y_1' = 0.5y_3(t-3)+0.5y_2(t)\cos t \\ y_2' = 0.3y_1(t-1)+0.7y_3(t)\sin t \\ y_3' = y_2(t)+\cos(2t) \end{cases}$$，当$t \le 0$ 时 $y_1(t)=0, y_2(t)=0, y_3(t)=1$

```
function dy = ddefunNestedFun(t,y,Z)
  y1d = Z(:,1);%对所有延迟为lags(1)的状态变量的近似
  y3d = Z(:,2);%对所有延迟为lags(2)的状态变量的近似
  %y3(t-3)的时间延迟了lags(2),而y3又是第三个状态变量，因此y3(t-3)用y3d(3)来表 示，同理，y1(t-1)用y1d(1)来表示。因此得到dy的如下表达式
  dy = [0.5*y3d(3)+0.5*y(2)*cos(t);
      0.3*y1d(1)+0.7*y(3)*sin(t);
      y(2)+cos(2*t)];
end
```

```
ddefun = @(t,y,Z)[0.5*Z(3,2)+0.5*y(2)*cos(t);
            0.3*Z(1,1)+0.7*y(3)*sin(t);
            y(2)+cos(2*t)];
```

延迟微分方程（组）（DDEs）——典型

```
lags = [1,3];%延迟常数向量
history = [0,0,1];%小于初值时的历史函数
tspan = [0,8];
sol = dde23(@ddefunNestedFun,lags,history,tspan); %调用dde23求解
plot(sol.x,sol.y(1,:),'r-','linewidth',2);
hold on; grid on
plot(sol.x,sol.y(2,:),'b-.','linewidth',2);
plot(sol.x,sol.y(3,:),'g-*','linewidth',1);
legend('{\ity}_1(t)','{\ity}_2(t)','{\ity}_3(t)','Location','best');
title('方程各解的曲线图')
legend('boxoff')
```

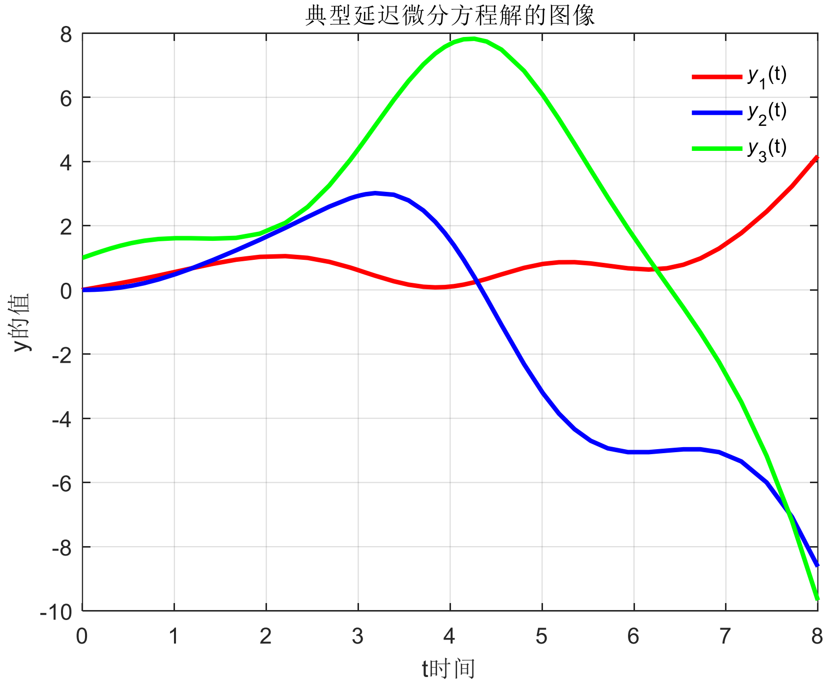


延迟微分方程（组）（DDEs）——典型

- ddesd函数求解过程：

```
delays = [1,3];
history = [0;0;1];
tspan = [0,8];
sol = ddesd(@ddefun1,delays,history,tspan)
plot(sol.x, sol.y(1,:),'r-','LineWidth',2)
hold on; grid on
plot(sol.x, sol.y(2,:),'b-','LineWidth',2)
plot(sol.x, sol.y(3,:),'g-','LineWidth',2)
title('典型延迟微分方程解的图像')
legend('{\ity}_1(t)', '{\ity}_2(t)', '{\ity}_3(t)')
xlabel('t时间'),ylabel('y的值')
```

```
function dydt = ddefun1(t,y,Z)
%% delays = [1,3];
  dydt = [0.5*Z(3,2) + 0.5*y(2)*cos(t);
          0.3*Z(1,1) + 0.7*y(3)*sin(t);
          y(2) + cos(2*t)];
end
```



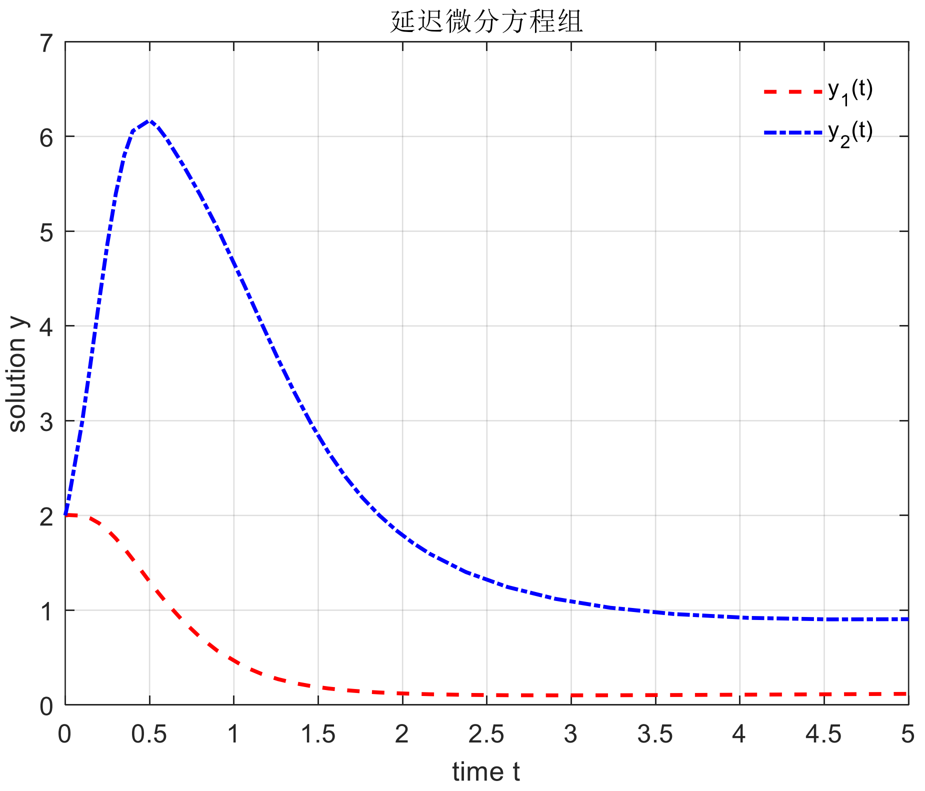
延迟微分方程（组）（DDEs）——典型

- 例11：求解延迟微分方程（常数）

$$\begin{cases} y_1' = y_1(1+0.1\sin t - 0.1 y_1(t-0.1) - \dfrac{y_2}{1+y_1}) \\ y_2' = y_2(\dfrac{1}{10^5}(2+\sin t) + \dfrac{9y_1(t-0.3)}{1+y_1(t-0.3)} - y_2(t-0.1)) \\ y_1(t)=2,\quad y_2(t)=2,\quad t\le 0 \\ t\in[0,5] \end{cases}$$

```
history = @(t) 2*ones(2,1);
sol = dde23(ddefun,[0.1, 0.3],history,[0, 5]);
plot(sol.x,sol.y(1,:) ,'r--', sol.x,sol.y(2,:),'b-.','LineWidth',1.5)
title('延迟微分方程组');
xlabel('time t');  ylabel('solution y');
legend('y_1(t)','y_2(t)');
legend('boxoff')
grid on
```

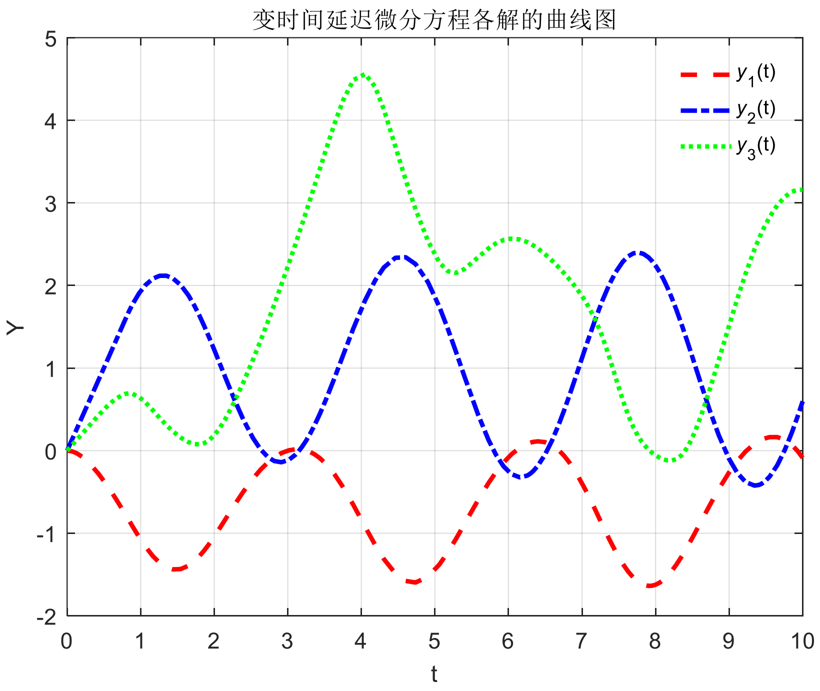
```
%定义匿名函数
ddefun = @(t,y,Z) [ y(1)*(1 + 0.1*sin(t)-0.1*Z(1,1) - y(2)/(1+y(1)));
                    y(2)*( (2+sin(t))*10^(-5) + 9*Z(1,2)/(1+Z(1,2)) - Z(2,1) )];
```



信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

- 例12：变时间延迟微分方程的求解

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_2(t) - 3x_1(t - 0.2|\sin t|) \\ x_2'(t) = -0.05x_1(t)x_3(t) - 2x_2(t - 0.8) + 2 \\ x_3'(t) = 0.3x_1(t)x_2(t)x_3(t) + \cos(x_1(t)x_2(t)) + 2\sin 0.1t^2 \end{cases}$$



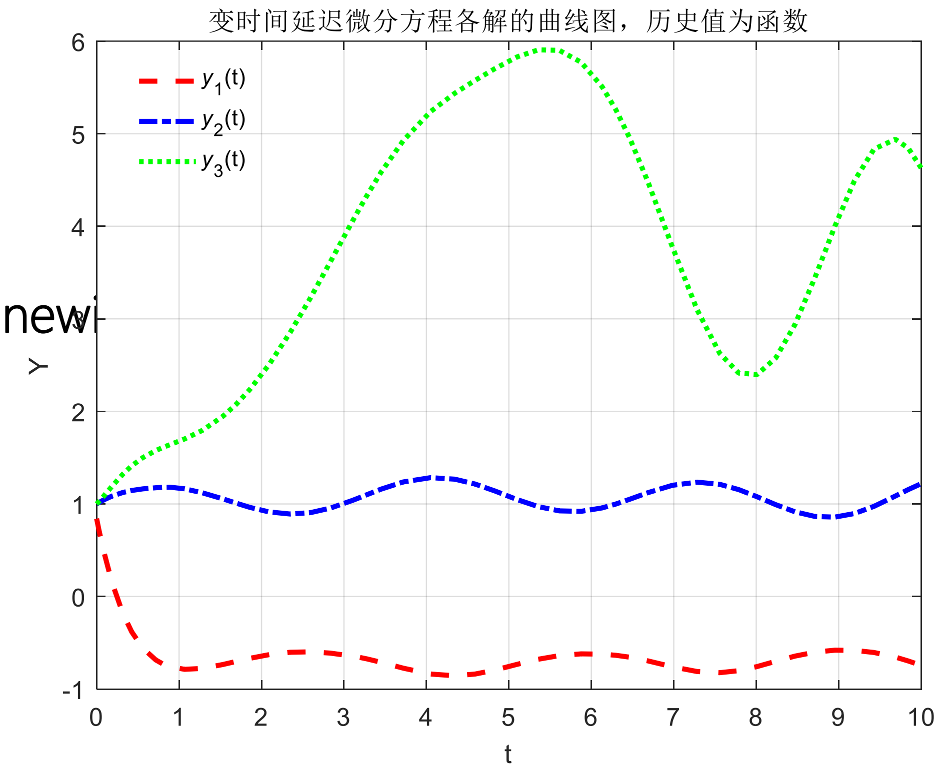

```
tau = @(t,x)[t-0.2*abs(sin(t)); t - 0.8];
fun = @(t,x,Z)[-2*x(2) - 3*Z(1,1); -0.05*x(1)*x(3) - 2*Z(2,2) + 2;
          0.3*x(1)*x(2)*x(3) + cos(x(1)*x(2)) + 2*sin(0.1*t^2)];
sol = ddesd(fun,tau,zeros(3,1),[0,10]) ;
plot(sol.x,sol.y(1,:),'r--',sol.x,sol.y(2,:),'b-.',sol.x,sol.y(3,:),'g:','linewidth',2);
legend('{\ity}_1(t)','{\ity}_2(t)','{\ity}_3(t)','Location','best');
title('变时间延迟微分方程各解的曲线图')
```

延迟微分方程（组）（DDEs）——变时间

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

如果历史值由函数给出$t \le 0$时，$x_1(t) = sin(t+1), x_2(t) = cos(t), x_3(t) = e^{3t}$.

```
tau = @(t,x)[t-0.2*abs(sin(t)); t - 0.8];
fun = @(t,x,Z)[-2*x(2) - 3*Z(1,1); -0.05*x(1)*x(3) - 2*Z(2,2) + 2;
           0.3*x(1)*x(2)*x(3) + cos(x(1)*x(2)) + 2*sin(0.1*t^2)];
fint = @(t,x)[sin(t+1); cos(t); exp(3*t)];
sol = ddesd(fun,tau,fint,[0,10])
plot(sol.x,sol.y(1,:), 'r--',sol.x,sol.y(2,:), 'b-. ',sol.x,sol.y(3,:), 'g:', 'linewi
grid on
legend('{\ity}_1(t)', '{\ity}_2(t) ', '{\ity}_3(t)');
title('变时间延迟微分方程各解的曲线图，历史值为函数')
```



延迟微分方程（组）（DDEs）——中立型

- 中立型延迟微分方程，含有导数以前的值，模型：

$$x_1'(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau_{p1}), \cdots, x(t-\tau_{pm}), x'(t-\tau_{q1}), \cdots, x'(t-\tau_{qk})\right)$$

- MATLAB 求解函数：（MATLAB 8.0以后）

sol = ddensd(ddefun,dely,delyp,history,tspan,options)

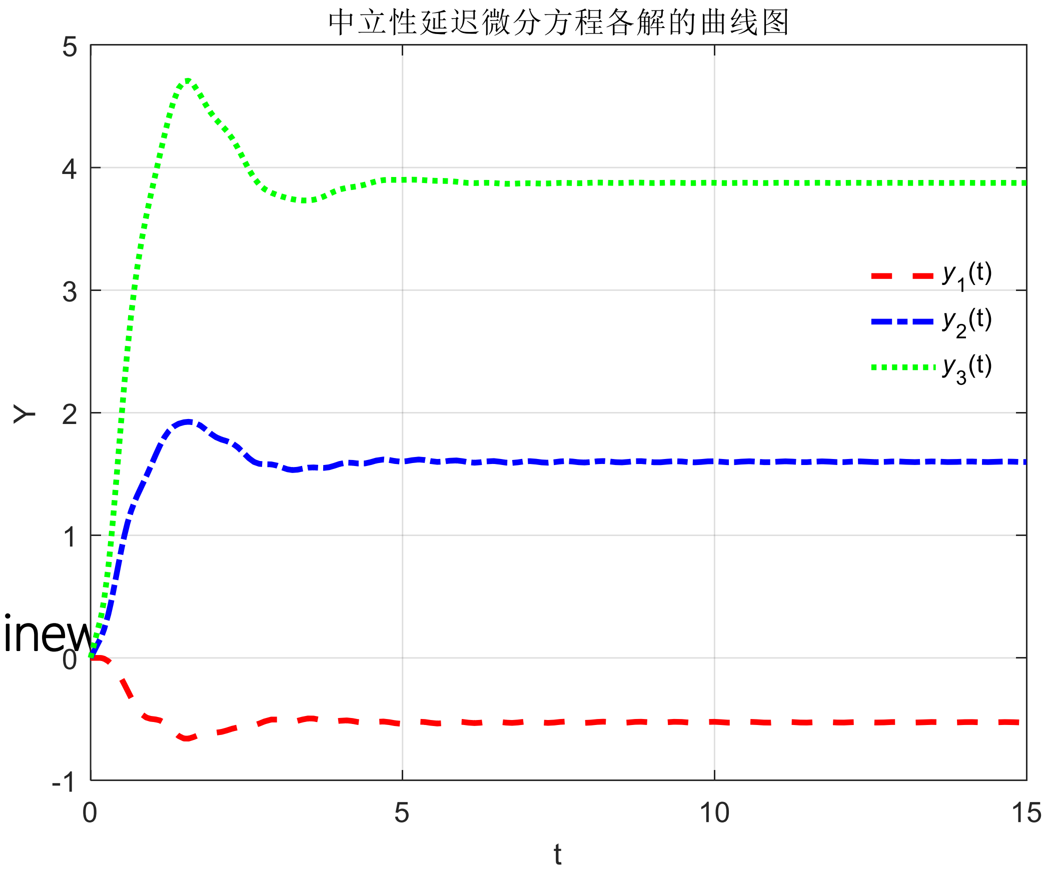
- 例13：中立型延迟微分方程，其中输入信号$\boldsymbol{u(t)} \equiv \mathbf{1}$

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-0.15) + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}'(t-0.5) + \boldsymbol{B}u(t)$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -13 & 3 & -3 \\ 106 & -116 & 62 \\ 207 & -207 & 113 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

延迟微分方程（组）（DDEs）——中立型

```
A1 = [-13 3 -3; 106 -116 62; 207 -207 113];
u = 1;
A2 = diag([0.02 0.03 0.04]);
B = [0;1;2];
ddefun = @(t,x,Z1,Z2)A1*Z1+A2*Z2+B*u;
history = zeros(3,1);
sol = ddensd(ddefun,0.15,0.5, history, [0,15])
plot(sol.x,sol.y(1,:),'r--',sol.x,sol.y(2,:),'b-.',sol.x,sol.y(3,:),'g:','linew
grid on;
legend('{\ity}_1(t)','{\ity}_2(t)','{\ity}_3(t)','Location','best');
legend('boxoff')
title('中立性延迟微分方程各解的曲线图')
```




01
IDEA
02
LEARNING
03
CREATIVE
INSPIRATION
EDUCATION
BUSINESS
PHOTO BOOK

感谢聆听