



信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第2章 矩阵分析与计算



讲授人：牛言涛



日期：2020年2月17日

目录

CONTENTS



MATLAB数组定义与创建



数组操作方法



MATLAB处理向量



矩阵分析与处理

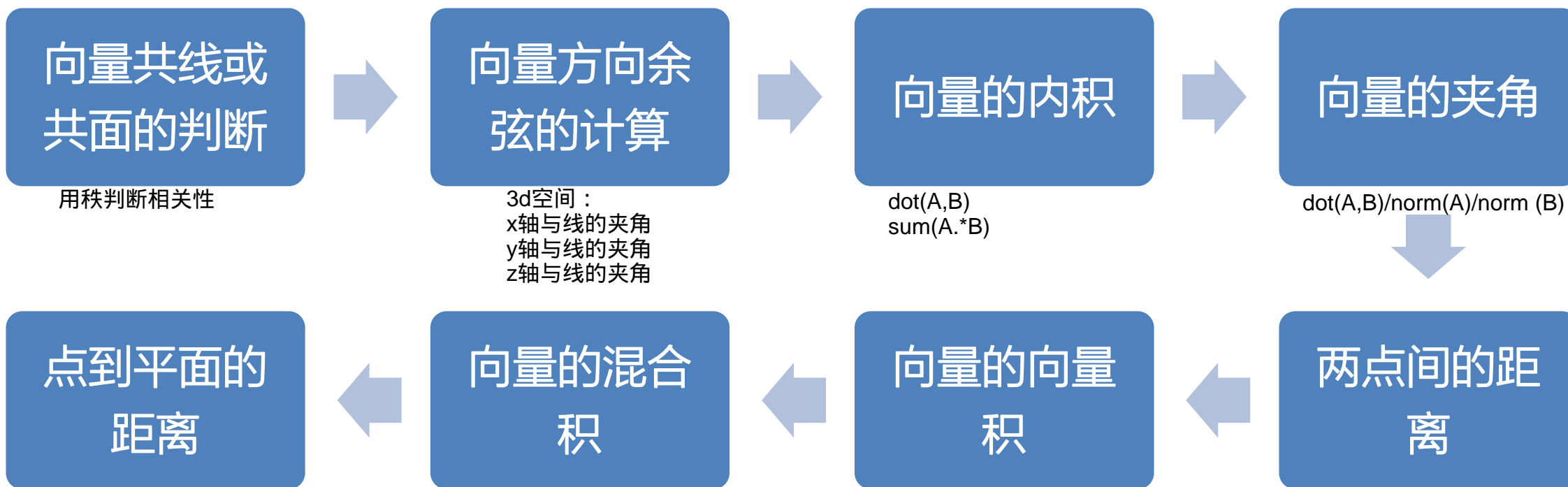


矩阵分解



矩阵方程的MALAB求解





1. 向量定义与尺寸

- **向量**是对相似数据项的集合进行分组的最简单方式，向量是数据的一维分组。
- **元素**：向量中单个的数据项通常称为元素(element)。
- **元素属性**：数值及在向量中的位置。

值	23	34				2	45
索引	1	2				n-1	n

- 创建：直接输入数值，使用**冒号**（起始值：增量：结束值），**linspace()**函数
- **zeros(1,n)**、**ones(1,n)**、**rand(1,n)**、**randn(1,n)**等函数。
- 函数**size(V)**：返回包含向量行数和列数的一个向量。
- 函数**length(V)**：对于向量，该数值即为其长度。

2. 向量共线或共面的判断

- 从线性代数中知道，当3(两)个向量线性相关时，则这3(两)个向量组成的矩阵的秩小于3(2)，并且这3(两)个向量共面(共线)，否则不共面(共线)。
- 例：判断3个向量的共线、共面问题： $X = (1,1,1)$, $Y = (-1,2,1)$, $Z = (2,2,2)$

```
>> X = [1, 1, 1];
>> Y = [-1, 2, 1];
>> Z = [2, 2, 2];
>> XY = [X;Y] %构成2*3的矩阵
XY =
     1     1     1
    -1     2     1
>> XZ = [X;Z];
>> YZ = [Y;Z];
>> XYZ = [X;Y;Z] %构成3*3矩阵
XYZ =
     1     1     1
    -1     2     1
     2     2     2
```

```
>> r1 = rank(XY) %根据秩判断，不共线
r1 =
     2
>> r2 = rank(XZ) %共线
r2 =
     1
>> r3 = rank(YZ) %不共线
r3 =
     2
>> r4 = rank(XYZ) %共面不共线
r4 =
     2
```

3. 向量方向余弦的计算

- 设 $V = (x, y, z)$ 是一个空间三维向量， r 是 V 的长度，称向量 $D = (x/r, y/r, z/r)$ 是向量 V 的方向余弦。
- 方向余弦矩阵(DCM, Direction Consine Matrix)，估计无人机在空间中的方位。
- 例：设向量 $V1 = (1, -2, 3)$, $V2 = (0, 2, -1)$ ，求方向余弦。

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \{0 - 1, 2 - (-2), -1 - 3\} = -1\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$$
$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{M_1 M_2}|}, \cos \beta = \frac{y}{|\overrightarrow{M_1 M_2}|}, \cos \gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{M_1 M_2}|}$$

```
>> V1 = [1 -2 3];  
>> V2 = [0 2 -1];  
>> costheta = (V2 - V1)/norm(V1 - V2)  
costheta =  
    -0.1741    0.6963   -0.6963
```

3. 向量方向余弦的计算

方向余弦矩阵：分别绕X轴、Y轴、Z轴旋转得到：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

由此 得到经过三个欧拉角转动后，导航坐标系下的向量 $[X^b, Y^b, Z^b]^T$ 旋转后的与其对应的载体坐标系下的向量 $[X^n, Y^n, Z^n]^T$ 之间的关系为，按Z - Y - X的顺序得到

方向余弦矩阵

$$\begin{bmatrix} X^b \\ Y^b \\ Z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^n \\ Y^n \\ Z^n \end{bmatrix}$$

4. 向量的内积

- 定义：向量的内积也就是数分中“内积”。

设向量 $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, 则

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

- 几何意义：一个向量在另一个向量上的投影的长度。
- 格式：dot(A,B) 矩阵的内积如何推导计算？

```
>> A = rand(1, 8) %生成服从0-1区间的均匀分布的随机数
A =
    0.2769    0.0462    0.0971    0.8235    0.6948    0.3171    0.9502    0.0344
>> B = randi([-5, 5], 1, 8) %生成-5到5区间的随机整数
B =
    -1    -1     3     3    -3     0    -1     2
>> C = dot(A, B) %函数内积计算
C =
   -0.5271
>> S = sum(A.*B) %按照内积的定义求解
S =
   -0.5271
```


5. 向量的夹角

- 设 $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ 是两个空间向量, r_1 、 r_2 分别是 U 、 V 的长度, $(U, V) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ 是 U 、 V 的内积, θ 是 U 、 V 的夹角, 从解析几何中知道, 向量内积与夹角间的关系是 $(U, V) = r_1r_2 \cos \theta$ 。

```
>> U = rand(1, 10) %10个服从0-1之间均匀分布的数值组成向量
U =
    0.6557    0.0357    0.8491    0.9340    0.6787    0.7577    0.7431    0.3922    0.6555    0.1712
>> V = randn(1, 10) %10个服从N(0, 1)分布的数值组成向量V
V =
    0.8884   -1.1471   -1.0689   -0.8095   -2.9443    1.4384    0.3252   -0.7549    1.3703   -1.7115
>> r1 = norm(U) %向量U的长度, 模
r1 =
    2.0554
>> r2 = norm(V) %向量V的长度, 模
r2 =
    4.4859
>> cosd = dot(U, V)/r1/r2 %求向量U、V之间的夹角余弦值, 即cos(θ)
cosd =
   -0.1605
>> theta = acos(cosd)*180/pi %求夹角, 并转换为角度显示
theta =
   99.2356
```

5. 向量的夹角—计算文本的相似性

- 例：句子A：这只皮靴号码大了。那只号码合适

句子B：这只皮靴号码不小，那只更合适

问题：怎样计算上面两句话的相似程度？

- **基本思路**

- 如果这两句话的用词越相似，它们的内容就应该越相似。因此，可以从词频入手，计算它们的相似程度。
- 第一步，分词。
 - 句子A：这只/皮靴/号码/大了。那只/号码/合适。
 - 句子B：这只/皮靴/号码/不/小，那只/更/合适。
- 第二步，列出所有的词。
 - 这只，皮靴，号码，大了。那只，合适，不，小，更

6 向量的夹角—计算文本的相似性

- 第三步，计算词频。
 - 句子A：这只1，皮靴1，号码2，大了1。那只1，合适1，不0，小0，更0
 - 句子B：这只1，皮靴1，号码1，大了0。那只1，合适1，不1，小1，更1
- 第四步，写出词频向量。
 - 句子A：(1, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0)
 - 句子B：(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)

```
>> A = [1 1 2 1 1 1 0 0 0]; %句子A的词频向量
>> B = [1 1 1 0 1 1 1 1 1]; %句子B的词频向量
>> costheta = dot(A,B)/norm(A)/norm(B) %计算相似度，夹角余弦
costheta =
    0.7071
```

$$\cos(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \times y_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i)^2}}$$

6. 两点间的距离

- 设 $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ 是2两个空间点坐标, 这两个向量的差向量的长度即为两点间的距离。

```
>> U = rand(1, 10) %10个服从0-1之间均匀分布的数值组成向量
U =
    0.4387    0.3816    0.7655    0.7952    0.1869    0.4898    0.4456    0.6463    0.7094    0.7547
>> V = randn(1, 10) %10个服从N(0, 1)分布的数值组成向量V
V =
   -0.8637    0.0774   -1.2141   -1.1135   -0.0068    1.5326   -0.7697    0.3714   -0.2256    1.1174
>> UV = U - V %计算向量差
UV =
    1.3024    0.3042    1.9796    1.9087    0.1937   -1.0429    1.2153    0.2749    0.9349   -0.3627
>> lt = norm(UV) %向量差的长度即两点间的距离
lt =
    3.6103
```

7. 向量的向量积（叉积）

- 定义：等于一个新的向量，该向量与前两者垂直，且长度为前两者张成的平行四边形面积，其方向按照右手螺旋决定。
- 几何含义：表示过两相交向量的交点，垂直于两向量所在平面的向量。
- 数学表达：叉积 $c=a \times b$ 可如下严格定义。
 - (1) $|c| = |a \times b| = |a||b|\sin \angle a, b$
 - (2) $c \perp a$, 且 $c \perp b$,
 - (3) c 的方向要用“右手法则”判断
- 格式：`cross(a,b)`

```
>> X = rand(1, 3) %生成服从0-1区间的均匀分布的随机数
X =
    0.1190    0.4984    0.9597
>> Y = randi([-5, 5], 1, 3) %生成-5到5区间的随机整数
Y =
    -2     1    -3
>> cr = cross(X, Y) %向量的向量积，叉积
cr =
   -2.4548   -1.5625    1.1157
>> Xcr = dot(X, cr) %垂直，内积为0
Xcr =
     0
>> Ycr = dot(Y, cr) %垂直，内积为0
Ycr =
     0
```

7. 向量的向量积 (叉积)

- 设 $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$, 根据向量代数的知识, U 、 V 的向量积 $U \times V$ 可以用一个行列式来表达:

$$U \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

式中 i 、 j 、 k 分别是坐标轴 Ox 、 Oy 、 Oz 的单位向量。

- 例: 设 $U = (2, -3, 1)$, $V = (3, 0, 4)$, 求 $U \times V$ 。

```
>> U = [2,-3,1]; V=[3,0,4];  
>> W = eye(3);  
>> A1 = [W(1,:);U;V];  
>> A2 = [W(2,:);U;V];  
>> A3 = [W(3,:);U;V];  
>> UV = [det(A1),det(A2),det(A3)]  
UV =  
-12  -5   9
```

```
>> cross(U,V)  
  
ans =  
-12  -5   9
```

8. 向量的混合积

- 定义：设 a, b, c 是空间中三个向量，则 $(a \times b) \cdot c$ 称为三个向量 a, b, c 的混合积。

$$(a \times b) \cdot c = |a \times b| |c| \cos(a \times b, c)$$

- 几何意义：它的绝对值表示以向量为棱的平行六面体的体积。

- 格式：

- `dot(cross(a,b),c)`
- `dot(a,cross(b,c))`

```
>> X = randi([-10, 10], 1, 3) %生成-5到5区间的随机整数
X =
     7     -5     9
>> Y = randi([-10, 10], 1, 3) %生成-5到5区间的随机整数
Y =
    -3    -6    -5
>> Z = randi([-10, 10], 1, 3) %生成-5到5区间的随机整数
Z =
     2     -1     -3
>> V = dot(X, cross(Y, Z)) %混合积
V =
    321
>> V2 = dot(cross(X, Y), Z) %混合积
V2 =
    321
>> V3 = cross(X, dot(Y, Z)) %出错
错误使用 cross (line 25)
在获取交叉乘积的维度中，A 和 B 的长度必须为 3。
```

8. 向量的混合积

- 设 $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$, $W = (w_1, w_2, w_3)$, U 、 V 、 W 的混合积为 $(UVW) = U(V \times W)$, 即

$$U(V \times W) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- 例：设 $U=(0,0,2)$, $V=(3,0,5)$, $W=(1,1,0)$, 求以这3个向量构成的六面体的体积。

```
>> U = [0, 0, 2]; V = [3, 0, 5]; W = [1, 1, 0];  
>> A = [U; V; W]; %三个向量构成3*3的矩阵  
>> dc = det(A) %dot(cross(U, V), W)  
dc =  
    6
```


9. 点到平面的距离

- 点 $U = (u_1, u_2, u_3)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离 r 的计算公式是：

$$r = \frac{|Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- 例：求原点到平面 $5.8x - 4.5y + 3.9z = 1.78$ 的距离。

```
>> o = [0, 0, 0]; %原点
>> v = [5.8, -4.5, 3.9]; %平面向量
>> r = abs(dot(U, o) - 1.78) / norm(v, 2) %距离计算公式
r =
    0.2141
```



感谢聆听
