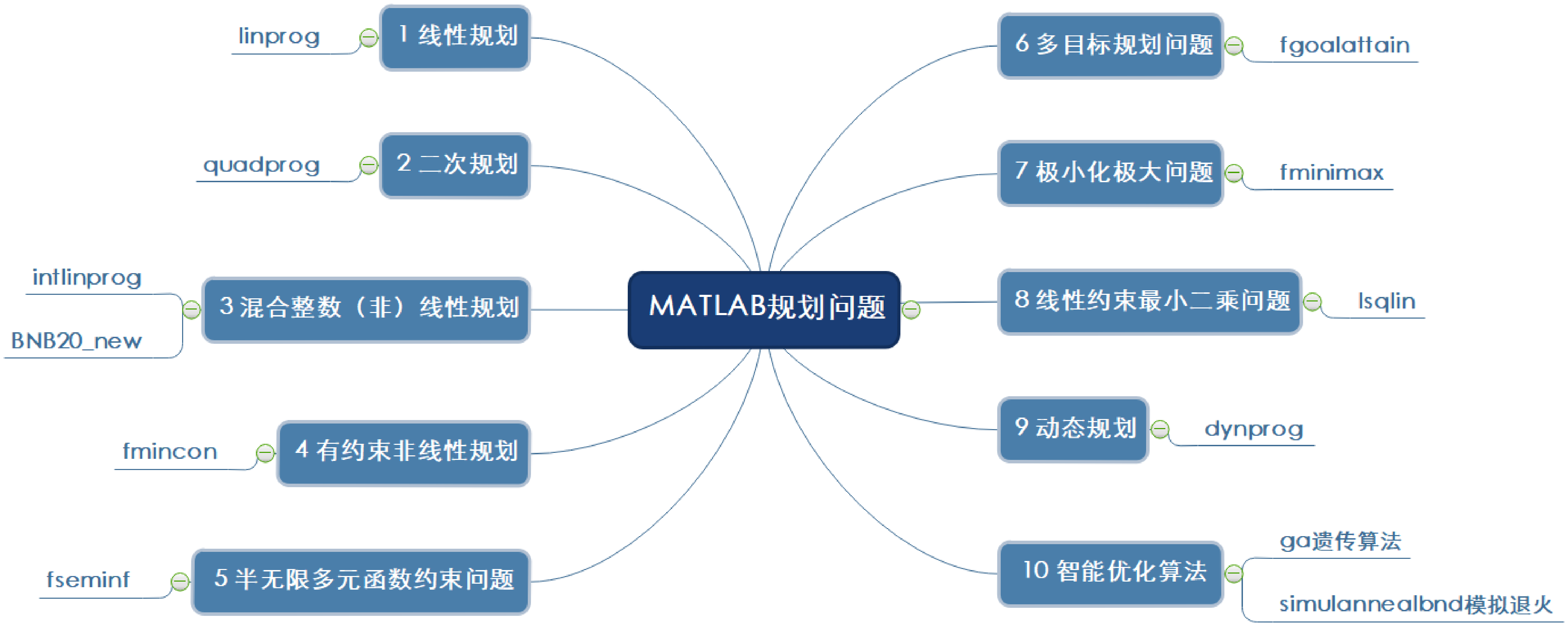
信陽師範学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

第6章 优化与规划问题

讲授人：牛言涛

日期：2020年3月10日

第6章 优化与规划问题知识结构图



运筹学（operational research）是一门解决一定约束条件下最优解的学科，应用现有的科学技术知识与数学手段，来解决实际生活之中的各种问题，是一门应用学科。运筹学分支还有规划论，排队论，图论，决策论等。

线性规划问题简介

- 线性规划（Linear programming, 简称LP）是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支，它是辅助人们进行科学管理的一种数学方法。研究线性约束条件下线性目标函数的极值问题的数学理论和方法。

- 线性规划广泛应用于军事作战、经济分析、经营管理和工程技术等方面。为合理地利用有限的人力、物力、财力等资源作出的最优决策，提供科学的依据。

- 从实际问题中建立数学模型一般有以下三个步骤；

  1. 根据影响所要达到目的的因素找到决策变量；

  2. 由决策变量和所在达到目的之间的函数关系确定目标函数；

  3. 由决策变量所受的限制条件确定决策变量所要满足的约束条件。

1. 线性规划数学模型

- 线性规划问题数学模型，一般可表示为：

$$\min(\max)\ f^T X$$

$$s.t.\begin{cases} AX \le b \\ AeqX = beq \\ lb \le X \le ub \end{cases}$$

$$\min\ f = 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 8x_5$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 \le 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 10 \\ 0 \le x_j \le 15, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

注意：当用MATLAB作优化问题时，所求maxf的问题化为求min(-f)来做。约束$g_i(x) \ge 0$化为$-g_i(x) \le 0$来做。

其中X为n维未知向量，$f^T = [f_1, f_2, \cdots, f_n]$为目标函数系数向量；

小于等于约束系数矩阵A为m×n矩阵，b为其右端m维列向量，Aeq为等式约束系数矩阵，beq为等式约束右端常数列向量；

lb、ub为自变量取值上界与下界约束的n维常数向量。

2. 线性规划求解格式

线性规划问题求最优解函数，调用格式：

- [x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(fun, A, b, Aeq, beq, lb, ub, options)
  - options = optimoptions('linprog','Algorithm','interior-point','Display','iter')
  - x为最优解，fval解x处的目标函数值。
  - exitflag退出条件，正值表示目标函数收敛于解x处；负值不收敛，零值表示已达到函数评价或迭代的最大次数。
  - output为优化的一些信息，如iterations、algorithm、constrviolation、firstorderopt等。
  - lambda为解x的Lagrange乘子，求函数 f(x1,x2,...) 在 g(x1,x2,...)=0 的约束条件下的极值的方法。

3. 线性规划例题解析

例1（生产安排）：假设某厂计划生产甲、乙、丙、丁四种产品，现库存主要材料有A类3600公斤、B类2900公斤、C类3000公斤、D类2800公斤、E类2200公斤。每件产品需用材料情况如下表所示。甲单位产品的利润75元、乙利润120元、丙利润90元、丁利润105元，且由于市场需求，每种产品最少需要生产50件。（注：可考虑用料最少或考虑用料费用，转化为多目标规划问题）

问：如何安排生产，才能使该厂所获的利润最大？

产品/材料		产品				库存材料
		甲	乙	丙	丁	
主要材料	A	9	4	7	5	3600
	B	4	5	6	10	2900
	C	5	10	8	5	3000
	D	3	8	9	7	2800
	E	7	6	4	8	2200

3. 线性规划例题解析

$$\max\ f = 75x_1 + 120x_2 + 90x_3 + 105x_4$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 \le 3600 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 10x_4 \le 2900 \\ 5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 5x_4 \le 3000 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 7x_4 \le 2800 \\ 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 2200 \\ x_i \ge 50,\ \ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

```
fcoff = -[75 120 90 105]; %目标函数系数向量
A = [9 4 7 5;4 5 6 10;5 10 8 5;3 8 9 7;7 6 4 8]; %约束不等式系数矩阵
b = [3600 2900 3000 2800 2200]'; %约束不等式右端向量
Aeq = []; %约束等式系数矩阵
beq = []; %约束等式右端向量
lb = 50*ones(4,1);  %决策变量下限
ub = [];  %决策变量上限
options = optimoptions('linprog','Algorithm','dual-simplex');
[x,fval,exitflag] = linprog(fcoff,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)
fval = - fval
```

该问题内点法和单纯性法求解结果一致。

生产安排方案为：甲产品生产50件，乙产品生产161件，丙产品生产107件，丁产品生产57件，最大利润为38679元.

3. 线性规划例题解析

信阳师范学院
数学与统计学院
SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS

例2（投资收益问题）：某公司有一批资金用于7个工程项目的投资，其投资各项目时所得的净收益（投入资金百分比）如表所示。

工程项目	A	B	C	D	E	F	G
收益%	15	10	8	12	11	15	13

由于某种原因，决定用于项目A、B的投资不大于其他各项投资之和，用于项目B和C的投资要大于项目D、F的投资，而用于项目C和E的投资大于项目G的投资2.5倍。各项目最低投资比例5%，最高不超过35%。

试确定该公司收益最大的投资分配方案。

收益最大投资分配方案转化为最小问题

$$\min z = -\left(0.15x_1 + 0.1x_2 + 0.08x_3 + 0.12x_4 + 0.11x_5 + 0.15x_6 + 0.13x_7\right)$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 \le 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_6 \ge 0 \\ x_3 + x_5 - 2.5x_7 \ge 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ 0.05 \le x_j \le 0.35,\ j = 1,2,3,4,5,6,7 \end{cases}$$

3. 线性规划例题解析

```
fcoff = -[0.15 0.1 0.08 0.12 0.11 0.15 0.13];
A = [1 1 -1 -1 -1 -1 -1; 0 -1 -1 1 0 1 0; 0 0 -1 0 -1 0 2.5];
b = [0;0;0];
Aeq = ones(1,7);
beq = [1];
lb = 0.05*ones(7,1);
ub = 0.35*ones(7,1);
options = optimoptions('linprog','Algorithm','dual-simplex');
[x,fval,exitflag] = linprog(fcoff,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)
fval = - fval
```

```
x =
    0.3500
    0.1500
    0.1167
    0.0500
    0.0500
    0.2167
    0.0667
fval = -0.1295
exitflag = 1
fval = 0.1295
```

该问题内点法和单纯性法求解结果一致。

利益最大投资分配方案为：A投资35%，B投资15%，C投资11.67%，D投资5%，E投资5%，F投资21.67%，G投资6.67%，最大净收益为0.1295（占投资比例）.

3. 线性规划例题解析

例3（运输问题）：有A、B、C、D四个食品加工厂，负责供给甲乙丙丁戊五个市场。四个厂每天生产食品箱数上限、五个市场每天的需求量和从各厂到各市场运输费（元/每箱）如表所示：

收点/发点		市场					生产数
		甲	乙	丙	丁	戊	
工厂	A	2	1	3	2	1	60
	B	1	3	2	1	3	40
	C	3	4	1	1	2	50
	D	2	1	3	2	2	55
需求量		20	35	33	34	30	

问题：求在基本满足供需平衡的约束条件下使总运输费用最小。

解：设a_{ij}为由工厂i运到市场j的费用，x_{ij}是由工厂i运到市场j的箱数。b_i是工厂i的生产量，d_j是市场j的需求量。

3. 线性规划例题解析

解：设a_{ij}为由工厂i运到市场j的费用，x_{ij}是由工厂i运到市场j的箱数。b_i是工厂i的生成量，d_j是市场j的需求量。

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3&2&1\\1&3&2&1&3\\3&4&1&1&2\\2&1&3&2&2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&x_{44}&x_{45}\end{pmatrix},$$

$$b=(60;40;50;55),\quad d=(20;35;33;34;30)$$

$$\min f=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}a_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{5}x_{ij}\le b_i, & i=1,2,3,4\\ \sum_{i=1}^{4}x_{ij}=d_j, & j=1,2,3,4,5\\ x_{ij}\ge 0\end{cases}$$

3. 线性规划例题解析

```
fcoff = [2 1 3 2 1 3 4 1 3 2 1 3 2 1 1 2 1 3 2 2]';
A = [1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0
     0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0
     0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0
     0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1];
b = [60 40 50 55]';
Aeq = [1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1;];
beq = [20 35 33 34 30]';
lb = zeros(20,1);
options = optimoptions('linprog','Algorithm','interior-point');
[x,fval,exitflag,output,lamda] = linprog(fcoff,A,b,Aeq,beq,lb,[],options)
```

```
>> x = reshape(x,4,5)
x =
    0.0000   10.4327    0.0000    0.0000   30.0000
   20.0000    0.0000    0.0000   18.5479    0.0000
    0.0000    0.0000   33.0000   15.4521    0.0000
    0.0000   24.5673    0.0000    0.0000    0.0000
fval =
   152
exitflag =
     1
```

运输方案：

- 甲市场的货由B厂送20箱；
- 乙市场由A厂送10箱，由D厂送25箱；
- 丙市场由C厂送33箱；
- 丁市场由B厂送19箱，由C厂送15箱；
- 戊市场由A厂送30箱；

最低总运费约为152元。

3. 线性规划例题解析

```
fcoff = [2 1 3 2 1 3 4 1 3 2 1 3 2 1 1 2 1 3 2 2]';
A = [1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0
     0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0
     0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0
     0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1];
b = [60 40 50 55]';
Aeq = [1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1;];
beq = [20 35 33 34 30]';
lb = zeros(20,1);
options = optimoptions('linprog','Algorithm','dual-simplex','Display','iter');
[x,fval,exitflag,output,lamda] = linprog(fcoff,A,b,Aeq,beq,lb,[],options)
```

```
>> x = reshape(x,4,5)
x =
     0    30     0     0    30
    20     0     0    17     0
     0     0    33    17     0
     0     5     0     0     0
fval =
   152
exitflag =
     1
```

运输方案：

- 甲市场的货由B厂送20箱；
- 乙市场由A厂送30箱，由D厂送5箱；
- 丙市场由C厂送33箱；
- 丁市场由B厂送17箱，由C厂送17箱；
- 戊市场由A厂送30箱；

最低总运费204元。


01
02
03
EDUCATION
BUSINESS
IDEA
LEARNING
CREATIVE
INSPIRATION
PHOTO BOOK

感谢聆听