一、符号逻辑: “通用数学语言”

　　莱布尼茨对数学问题的最早探索和最初贡献是试图沿着笛卡尔和霍布斯的思路建构所谓的“通用语言”。这种语言是一种用来代替自然语言的人工语言, 它通过字母和符号进行逻辑分析与综合,把一般逻辑推理的规则改变为演算规则,以便更精确更敏捷地进行推理。或者说,“通用语言”是一套表达思想和事物的符号系统,利用这些符号可以进行演算并推出各种知识。在《论组合术》中,二十岁的莱布尼茨曾立志要创设“一个一般的方法,在这个方法中所有推理的真实性都要简化为一种计算。同时,这会成为一种通用语言或文字,但与那些迄今为止设想出来的全然不同;因为它里面的符号甚至词汇要指导推理;错误,除去那些事实上的错误,只会是计算上的错误。形成或者发明这种语言或者记号会是非常困难的,但是可以不借助任何词典就很容易懂得它。”在1679年9月8日给惠更斯的信中他又写道,有一个“完全不同于代数的新符号语言,它对于精确而自然地在脑子里再现(不用图形) 依赖于想象的一切有很大的好处。……它的主要效用在于能够通过记号〔符号〕的运算完成结论和推理,这些记号不经过非常精细的推敲或使用大量的点和线会把它们混淆起来,因而不得不作出无穷多个无用的试验;另一方面,这个方法会确切而简单地导向〔所需要的〕结果。我相信力学差不多可以象几何学一样用这种方法去处理。”　　综合莱布尼茨零零碎碎的设想,他的宏伟规划大体旨在创造两种工具:其一是通用语言,其二是推理演算 (calaulusratiocinator)。前者的主要使命是消除现存语言的局限性和不规则性,使新语言变成世界上人人会用的具有简明符号、合理规则的语言,规定符号的演变规则与运算规则,使逻辑演变依照一条明确的道路进行下去,进而解决所有可用语言表达的问题。

　　为此,莱布尼茨做了两方面的努力:一是寻找能够代表所有概念并可认作最根本的不可分析的符号;二是给出表述诸如断定、合取、析取、否定、全称、 特殊、条件联结等形式概念的设计。关于第一方面,莱布尼茨首次设想用数目代表原初概念,而逻辑演算则用如同算术中的乘或除来代替。他认为用这种数字的不同方式排列组合,进行各种运算,就可产生无穷多的复合概念。这一思想后来改进为以素数代表基本概念,而复合词项即可借分解相应的数字成为它们的素数因子来加以分析。以“人是理智动物”为例,用素数“3”代表“动物”、“5”代表“理智”,则“人”即以“15=3.5”代表。为了更好地构设“通用语言”,莱布尼茨又以设想的“人类概念字母表”为语言词汇基础创制了一些逻辑符号,如“∪”(并)、“∩”(交)等,一直沿用下来。

关于第二方面,莱布尼茨的工作大致可以1679、1686、1690三个年代为标志划分为三个阶段。

第一阶段,莱布尼茨改进从数字代替概念以其演算,代之以对普通命题经验分析为基础的代数逻辑。他以全称肯定命题“a是b”的形式开始,提出五条基本演算规则:(1)ab是ba(交换律);(2)a是aa(重言律);(3)a是a(同一原则);(4)ab是a或ab是b(化简原则);(5)如a是 b且b是c,则a是c(传递原则)。以此为据,他证明了同一和包含两个逻辑系词之间的重要关系,即,如a是b且b是a,则a与b是同一的。进而,他又提出四个定理:(1)如a是b且a是c,则a是bc;(2)如a是bc,则a是b且a是c;(3)如a是b,则ac是bc;(4)如a是b且c是d,则ac是 bd。由此可见,莱布尼茨在第一阶段的逻辑演算已相当完善和科学化,为逻辑的系统化打下了坚实的基础。

　　第二阶段,莱布尼茨用等式符号作系词符号,借公式A=BY表述全称肯定命题(Y为一未确定的系数,用以修饰B而使B成为A的一部分),同时提出双重否定之为肯定,即“非非A=A”,并由此演释出一系列定理。为了进一步发展演算,莱布尼茨还试图通过与属性组合的关系,用代数方法来描述四个直言命题,甚至对四个直言命题的表示法提出了九个方案。

　　第三个阶段,莱布尼茨最有价值的工作是罗列了十四个基本命题:(1)A=A+A“+”表示逻辑相乘,下同);(2)如A=B且B=C,则A=C;(3)如A=B且B≠C,则A≠C;(4)如A=B,且B

　　上述符号构设显示,莱布尼茨的中心思想是致力于以符号表示普遍概念的“通用语言”和以代换法进行数学演算他自称的“通用数学”。就今天的眼光看来,他实际上已经发现了符号逻辑的若干重要原则和定理,触及到后由哈米尔顿所阐发的谓项量化问题,认识到在直言与假言命题之间的基本类比(即原因包含它的结果正如主项包含它的谓项),并且把握了逻辑相加的问题,甚至讨论过非三段论的关系推理。因此,莱布尼茨实际上已探察到后来为布尔和施罗德所发展的逻辑代数的整个基础。数理逻辑学家有没有看过莱氏的着作,知道不知道莱氏的计划,但所作的研究大体上都是沿着莱氏所期望的方向进行的。”所以,整个数学界都一致公认他是数理逻辑的首创者和真正奠基人。

莱布尼茨的符号数学研究在生前没有公布,结果使数理逻辑的发展延迟了一个半世纪。可他关于微积分的成果却由于较早发表而惠泽数学界并引发一场争论持久的历史公案。

　　二、微积分: “理性的代数学”

　　1684年莱布尼茨在莱比锡的《教师学报》(Acta Eruditorum)上首次发表了题为《关于求极大、极小和切线的新方法,也能用于分数和无理量的情形及非寻常类型的有关计算》(简称《新方法》)的文章。这是他关于微分计算要点的代表作,全文只有六页。1686年莱布尼茨又在《教师学报》上发表了题为《论一种深邃的几何学和不可分元分析以及无穷》一文。这是他最早发表的以讨论积分学为主的文章,实际可看作《新方法》的续篇。

　　莱布尼茨把最初的微积分称为求差的方法与求和的方法。他的基本思想是把一条曲线下的面积分割成许多小矩形与曲线之间微小直角三角形的两边分别是曲线上相邻两点的纵坐标和横坐标之差。当这两无限减小时,曲线上相邻两点便无限接近。联结这样两点就得出曲线在该点的切线。这就是求差的方法。求差的反面就是求和。当曲线下面的矩形被分割得无限小时,矩形上面的那个三角形可以忽略不计,此时就用这些矩形之和代表曲线下的面积。

　　早在1666年,莱布尼茨就发现帕斯卡算术三角形与调合三角形之间存在着有趣的关系。在帕斯卡三角形中,任意一个元素既等于其上一行左边各项之和,又等于其下一行相邻两项之差;而在调合三角形中,任一元素均是其下一行右边各项之和,也是紧靠其上两项之差。

　　算术三角形调合三角形

　　莱布尼茨在笔记中写出了各阶的差和微分:

　　自然数 0, 1, 2, 3, 4, 5, … y

　　一阶差 1, 1, 1, 1, 1, 1, … dy

　　二阶差 0, 0, 0, 0, 0, …

　　自然数平方 0, 1, 4, 9, 16,… y

　　一阶差 1, 3, 5, 7, … dy

　　二阶差 1, 2, 2, 2, … d(dy)

　　三阶差 1, 0, 0, …

　　他把这些与微积分联系起来:一阶差相当于dy,它们的和等于y,如1+3+5+7=16。莱布尼茨认为,这种和与差之间的互逆性,与依赖于坐标之差的切线问题及依赖于坐标之和的求积问题的互逆性是一样的。差别仅在于帕斯卡算术三角形与调合三角形中的两个元素之差为有限值,而曲线的纵坐标之差是无穷小量。这说明他在考虑无穷小量的和差运算时,已将其与他早些时候关于有限量和差可逆性关系的研究联系起来。由此也可看出莱布尼茨研究微积分的代数出发点,而不是几何出发点。

为解决求积问题,莱布尼茨把流动纵坐标是y的平面曲线下的曲边梯形的面积用符号y表示。这样,曲线的纵坐标就与面积变量明显地联系起来。过了几年,他便用“sydx”表示面积,“∫”是“Sum(和)”的第一个字母“S”的拉长。

　　在求量的差即微分方面,莱布尼茨先是引进了符号“x/d”表示x的微分,意思是求“差”要关系到量的同次的降低,并且他还认为,如果同时出现不同阶的微分,则只留下最低阶的,而把所有高阶的微分舍去。至于这样做的理由,莱布尼茨虽提供了多种解释,但都不充分,其实毋宁说他是当作“公理”来使用的。后来,他将“x/d”改为“dx”,一直沿用至今。

　　从上述思路出发,莱布尼茨给出了微积分的基本公式:

　　d(x±y)=dx±dy (1)

　　d(xy)=xdy+ydx (2)

　　d(x/y)=ydx-xdy/y[2] (3)

　　对于(2),他的推导是,令x、y分别成为x+dx、y+dy,则

　　(x+dx)(y+dy)=xdy+ydx+dxdy+xy于是 d(xy)=(x+dx)(y+dy)-xy=xdy+ydx+dxdy

　　dxdy是比xdy+ydx高一阶的无限小量,可以舍去,所以 d(xy)=xdy+ydx

　　用同样的方法也可推导出公式(1)和(3)。

　　有了微分法的基本运算律,对整指数的幂函数x[n]就有dx[n]=nx[n-1]。又由于求和是求差的逆运算,所以还有 ∫x[n]dx=1/n+1x[n+1] (n≠-1)。这两个公式虽只对n是正整数情况而言,但莱布尼茨却断然宣布它们当n取其它数值时仍然成立。接着,莱布尼茨陆续地推导出指数和对数等超越函数的微分公式。

　　莱布尼茨的微积分算法是在解决几何和物理问题的过程中建立和完善起来的。他边建立新算法,边用这种算法解决当时物理学与几何学提出的疑难问题, 有时还用老方法来解决问题以检验新方法的正确性。除了切线问题、极值问题、曲率问题、求积问题等几何问题,他还曾用新方法证明了光的折射定律。所有这些都显示了新算法比传统方法更加优越。

　　除了以上成果,莱布尼茨在微积分方面的具体研究还有:(1)复合函数的微分法则;(2)弧微分法则ds=根号下dx[,2]+dy[,2]; (3)对数函数和指数函数的微分法则;(4)在积分号下对参变量求微分的方法;(5)曲线绕x轴旋转所成的旋转体体积公式V=π∫y[2]dx;(6)求切线、求最大值最小值以及求拐点的方法;(7)讨论曲率,密切圆和包络理论。莱布尼茨微积分研究的背景与当时整个西欧的数学家们是一致的,他的工作基础也是建立在对无穷小的分析上。因此,此后很长一段时间,人们一直把微积分叫无穷小分析。由于莱布尼茨从有限差值开始无穷小的运算,因而他最初曾试图将实无穷小代之以与其成比例的有限数量,即不用dx、dy本身,而用它们的比值 dy/dx。他以为把dx、dy看成有限量,问题就解决了。但是,比值dy/dx的获得同样需要说清dx、dy两个量本身的实际情况,而不能有半点含糊。 于是,莱布尼茨提出用“充分大”和“充分小”去代替无穷大和无穷小。他解释说:“我们可以不用无穷大、无穷小,而用充分大和充分小的量,使得误差小于给定的误差限度,所以我们和阿基米德方式的不同之处仅仅在于表达方面,而我们的表达更为直接,更适合于发明家的艺术。”为了更好地说明这一点,他不得不诉诸于感性的直观——物理或几何模型,用现实事物中量的不同层次的相对性解释无穷大和无穷小。所以有人说,莱布尼茨其实是半个理性主义, 因为他在理性困厄之时,不得不借助经验。例如,他认为点同直线不能相比,所以点加到直线上从直线上去掉等于不加也不减。于是,“当我们谈到有不同阶的无穷大与无穷小时,就象对恒星的距离而言,把太阳看成一个点;对地球半径而言,把普通的球看做一个点。这样,恒星的距离对于普通球的半径而言是无穷的无穷大,或无穷倍的无穷大。”[10]而“如果你不承认无限长、无限短线段具有形而上学的严密性,也不承认它们是实在的东西,那么你一定可以把它们当作一种能够缩短论证的思想的东西来使用,正如在普通分析中使用虚根一样,……老实说,我不十分相信除了把无限大、无限小看作理想的东西,看作有根据的假设,还有什么必要去考察他们,”甚至“我不相信确有无限大量和无限小量存在,它们只是虚构,但是对于缩短论证和在一般叙述中是有用的虚构。” [(10)]可见,莱布尼茨主要是把微积分当作了求得正确结果的一种方法,只要按这个方法去做,就能得出正确的结果,而不必关心基本概念怎样。事实上,莱布尼茨对于微积分基础的这种看似冒失的大胆相信态度,反倒可能促进了微积分及其应用的迅速发展。

　　三、单子论: 理性的僭越

　　莱布尼茨是古往今来唯一的一位驰骋于数学思想的两个宽广的、对偶的领域——分析与组合或连续和离散领域的数学大师,而且在每个领域都表现了人类的最高能力。这除了他的已为人所周知的天赋和勤勉以外,就数学内部而言,最合理的解释应该是莱布尼茨数学研究的代数出发点和哲学研究方式。他的“通用语言”工作,今天看来实际上是在创立一种普遍适用的逻辑代数(数学)。而在微积分上,尽管他赞同那种认为无穷小需要一个几何学基础的偏见,但是他达到微积分的途径却是代数的和哲学的,而不是几何的。莱布尼茨的发现起因于寻找一个无限聚敛数列或交错级数1/1-1/3+1/5-1 /7+……之和(=π/4)的方法(最后莱布尼茨给出了自己满意的最一般的公式:arctgx=x=x[,3]/3+x[,5]/5+x[,7] /c+……)。在莱布尼茨看来:微分学就是确定这种数列极限的一种方法,所以他才习惯于将无穷小等视作有限量;积分学则是发现数列总和的一种方法,因而他的积分总是今天所说的定积分,而不是牛顿的不定积分。在莱布尼茨时代,几何学由于笛卡尔和费尔马杰出的工作而倍受数学界欢迎,莱布尼茨抱着“通用数学”的信念,企图运用几何方法解决代数问题,结果却将自己代数的观点导入几何学,从而做出了对“天地间通用的微积分”的发现。因此,为了深入追索莱布尼茨数学创造的思想渊薮,必须诉诸他的数学观及所接受的研究传统。

莱布尼茨最早的思想活动是在哲学领域,这与其父作为一个道德哲学教授的影响有关。少年莱布尼茨读了不少古典哲学着作,入大学后又首先接受了雅可布• 托马修斯教授严格的经院哲学训练。他的毕业论文De principio individui(《论个体原则》)就是维护经院哲学中唯名论派观点的。尽管莱布尼茨后来到巴黎去认真学习和研究数学,并且首先在数学上有了划时代的贡献,但作为其全部科学研究起点的思维观念与思想传统却是在早年打下的,而且一生基本没有什么大的变化。这在他的着作《新系统》 (1695)中有明确表述。

　　虽然莱布尼茨生前没有留下一部令自己满意的哲学着作,他在哲学方面的所有主要着作都是为了某个人而写,但他却是第一个创立独立哲学体系的德国人。这体系的“拱心石”通常称为“单子论”,他自己则称之为“前定和谐系统”。

　　作为单子论核心范畴的单子是一种没有部分的只是组成复合物的单纯实体。莱布尼茨认为单子具有六种规定性:(1)单子是最小的精神实体,它是能动的而又不具有广延(可分)性,因而是世界的实(主)体;(2)单子是上帝创造的,因其不能通过组合而生,只能凭创造而生,凭毁灭而亡;(3)单子是彻底孤立的实体,绝对封闭,各自独立;(4)每个单子各具不同的质,因其没有量的规定性,所以实际上存在着无限多样的单子;(5)单子运动变化的原因在自身,每个单子都是一个“力的中心”;(6)单子的基本属性是知觉,知觉反映自身和他物,因此每一个单子都是宇宙的一面永恒的镜子。从单子的规定出发,莱布尼茨提出了他的本体论原则:第一,连续性原则,认为宇宙是一个从低级到高级的发展过程;第二,前定和谐原则,认为各自独立的单子能同时一致行动的原因来自前定和谐;第三,普遍联系原则,认为整个宇宙中的单子和事物均处于普遍的相互联系之中。以上三个原则,连续性是用来调和事物质的对立的,前定和谐是用来调和“不可分点”(间断)与“连续性”的矛盾的,普遍联系则为了调合有限与无限、个别与一般、部分与整体的矛盾。[15]

　　上述本体论承诺决定了莱布尼茨的认识论必然是一种主张能动性然而却是唯心的先验论体系。它最终注定莱布尼茨的方法论只能是一种以逻辑为主干的多元方法论,既相信直觉,又看重形式。[15]他不仅承继了笛卡尔、斯宾诺莎一贯的唯理论传统,而且将理性主义原则扩展到在前者的哲学中遭拒斥的许多领域。 他从哲学出发去理解科学活动及其本质,数学也仅是其哲学探索的一种智力模型。譬如,他的微分就是“原形先蕴”,通过形而上学的解释假定的。莱布尼茨注重运算的过程和探究结果。他在对待作为微积分逻辑基础的无穷小时,既不怯懦回避,也不轻易神秘化,而是从有限差开始,充满自信地大胆使用无穷小量及其阶,就如他自己所说,仅仅诉诸智力,更注重这种方法的运算性质。[16]他相信,假如他清楚地给出了适当的运算法则,并且把它们应用得恰当,就一定会得到某种合理的、正确的结果。他似乎觉得,根据充足理由(前定和谐)律,他就可以在这方面来实现从可能性到现实性的转变。为此,他特别强调理论内容的形式化问题。他所建立的“通用数学”及无穷小量运算都是符号和术语体系的极好范例,是真正的现代意义形式化的始祖。

于是,我们不难理解,莱布尼茨为什么在离散与连续或组合与分析两个不同数学领域都表现出了同样的研究方式和最高创造力,因为它们在“理性”上是一致的。接续以“离散”为基础,是“离散”的连续,就如同“认识”不过是单子的活动而已。所以,莱布尼茨一直以代数的、有限的方法研究分析的、无限性的问题。 这种研究在观念上从属于按照准确本体论原则建构起来的认识目的,它试图“在理智活动的各个领域内的那些早期传统间的看起来不可调和的矛盾冲突中创造出一个新的综合。”

　　当然,莱布尼茨这种近于偏执和幻想式的理性主义传统,也使其数学研究遇到了许多困难。首先是在微积分的基本概念上,作为研究基础的无穷小量始终不明确,要么看作要多小有多小,要么看作理想之物,要么看作是纯粹然而有用的虚构,将科学基础概念的界定最终留给了信仰。其次是他的数学研究在逻辑上是不严谨的,尽管他发展了逻辑学,但其推导是不严格的,有主观臆造成分。特别是其微积分表示法的优越性更强烈地掩蔽了这一学科的逻辑基础,使之在严格论述方面走上了歧途。至于他的理论推导中有时包含逻辑错误,如曾认为d(uv)=dudv、d(u/v)=du/dv(1675),这已属情理之中的事。他的零乱的工作如果不经Bernoulli兄弟整理加工,就很难有后来的局面。此外,英国科学家牛顿关于微积分严谨而扎实的工作更表明, 对数学的发明与创造而言,理性主义方法也并不是唯一有效和可靠的途径。

　　四、流数术: 数学需要两种传统

　　1705年《教师学报》上发表了一篇评述牛顿《求积术》的论文。文中说到,在那本书里只不过是把莱布尼茨的微分换成了流数。言下之意,两者实质上不外是同一样东西。这在那个极重个人荣誉的时代,无疑于掷出一枚重磅炸弹,立刻激起轩然大波,引发了究竟牛顿和莱布尼茨谁先发明了微积分的长时间争论。 为此,英国皇家学会还于1712年在其《通讯》上公布了评判结果:“微分法和流数法是一回事,只是名称和记法不同而已;牛顿先生称之为瞬或流数的那些量, 莱布尼茨先生称为微积分,并用牛顿先生不曾用过的记法,记作字母d。”显然,上述两种看法是截然对立的。由于这种争论只是涉及发明的优先权问题,所以对微积分的进步没有任何益处。但争论也反映出一个问题,即当时的人们(包括牛顿和莱布尼茨本人)除了发觉两种微积分在概念和记法上不同外,并没有看出二者质的联系与差别。关于微积分的基础工作,是两个人去世后很久的事。

众所周知,就牛顿而言,他首先是个物理学家或主要是力学家。这不仅可以从其科学成就看出,而且在其对待微积分的方式上也表露得十分清楚。他称自己的微积分为流数术,即表明主要是为解决流体力学等问题而探讨和使用的新方法。牛顿关于微积分的主要着述有三部:《运用无穷多项方程的分析学》(1669)、 《流数法和无穷级数》(1671)、《曲线求积术》(1690)。此外,他的代表作《自然哲学的数学原理》(1687)中也有不少论述。这些成果大致反映了牛顿对微积分的研究和认识的三个主要阶段。第一个阶段是静态的无穷小量方法阶段,他象费尔马等人一样把变量看作是无穷小元素的集合;第二个阶段是变量流动生成法阶段,认为变量是由点、线或面的连续运动产生的,因此把变量叫作流量,把变量的变化率叫流数;第三个阶段是最初比和最终比方法阶段,这种方法是牛顿对第一个阶段无穷小量方法的排除,转向极限观点。牛顿的微积分(流数术)中有三个重要概念:流量、流数和瞬。其中“瞬”是刚刚产生的一种无穷小量。这几个概念的提出,不仅使一切与变化率有关的问题有了统一认识和表述,而且直接揭示了原函数与导函数之间的可逆关系。由此可见,尽管牛顿后来用几何形式表述了微积分基本定理及其它一系列重要命题,但其把物理学作为出发点的做法却是十分明显的。就如他自己所说:“这里,流数术赖以建立的主要原理,及是取自理论力学中的一个非常简单的原理,这就是:数学量,特别是外延量,就可以看成是由连续轨迹运动产生的;而且所有不管什么量,都可以认为是在同样方式之下产生的, 至少经过类比和调整后可以如此。因此在产生这些具有固定的、可确定的关系的量时,其相对速度一定有增减,因而也就可以作为一个问题提出如何去求它们。”所以,“甚至最草率的牛顿研究者也明显看到,牛顿是一位彻底的经验主义者。”

　　从物理经验出发,牛顿把速度、距离、加速度等作为中心概念,以变量x和y的无穷小增量作为求流数(导数)的手段(当增量越来越小时,流数实际上就是增量比的极限);牛顿更多关心微积分的实际内容和基本方法,一些法则没有充分推广,对普通的讨论较少;他从变化率出发解决面积和体积问题,微分是其基础,通过微分及其逆来解决微积分问题。因此,作为自然科学家的牛顿处理问题十分严谨小心,讲究实在具体。人们认为他迟迟不发表微积分研究成果的原因,可能是因为没有为其基础找到合理的解释所致。德摩根甚至认为牛顿是由“一种病态的害怕别人反对的心理统治了他的一生。”这和莱布尼茨那种从几何出发,整体求和的、注重推广和演绎的理性化方式大为不同。由此直接导致了他们所发明的微积分的基本差别:(1)莱布尼茨的微积分是由人工符号语言表述的法则与公式系统,他花了很多时间选择富有提示性的符号;牛顿的微积分主要是用自然语言进行叙述的数学体系,很少涉及符号,他基本认为符号无关紧要。 (2)莱布尼茨的研究是从“整体”到“部分”,他首先讨论“和”即积分,用和来得到面积、体积或重心,其出发点是反微分;牛顿的研究是由“部分”到“整体”其基础是微分,他从变化率出发来解决面积和体积问题。(3)莱布尼茨的微分是高阶的,其积分是定积分;牛顿的微分是一阶的,其积分是不定积分。

但是,尽管在出发点、研究方式和表述形式上有巨大的差别,两人仍然创立了同一个微积分,并且彼此互补。经过他们的工作,微积分再不象希腊时期所有数学都是几何学的分支那样,被束缚在几何框架内,而是成为一个崭新的既不同于几何也不同于代数的独立的分析数学。并且,二人都不象他们的先驱那样仅限于解决某些实际问题,而是把微积分建立在一般问题和运算基础上,使之成为具有普遍性的通用方法。他们不再把微分问题和积分问题看作互不相干,而是找到了彼此的互逆关系,建立起微积分基本定理,使面积、体积及以往作为求和来处理的各种问题都归并为反微分,为求积运算开辟了一条新的便捷途径。这样,经过二人不懈的努力,微积分作为“天地间通用”的学科终于获得了资格证书。

　　在科学史上,几个人同时创造一项科学成就的事例并不少见。但是,牛顿和莱布尼茨各自从不同的研究传统出发发明了微积分,对数学的进步有着特别的意义。原因在于,微积分处于古代数学向近代数学转折的关节点上。经过微积分,近代以来的数学观及其方法论已大为改观,所以许多讨论近代数学的书往往称“微积分以来的数学”。牛顿的工作无疑再一次表明了数学与经验的不可分割性,而莱布尼茨则以自己的探索证明了理性要素在近代数学发展中的增长。300年后的今天,数学哲学关于数学真理的实在性与非实在性问题的讨论进一步印证了两种数学传统对现代数学的发展都是必不可少的。

　　同样,莱布尼茨关于通用数学语言的构想,由于过份浪漫和理性化,也只是在200年后才找到自己数学的“经验”基础,从而经过皮亚诺、罗素等人的工作部分地成为现实。其思想为后来的逻辑经验主义者特别是卡尔纳普等人所继承和推广,开启了人工语言学的先河。这种状况与其说是历史造成的,毋宁说是数学和科学自身的特性使然。

　　数学的发展再一次证明了经验主义传统和理性主义传统同为科学进步的思想源泉,它们之间的一定的张力状态是数学能够顺利发展的思维基础,而牛顿治学的严肃审慎与莱布尼茨运思的浪漫机警同为科学工作者的必备素养。