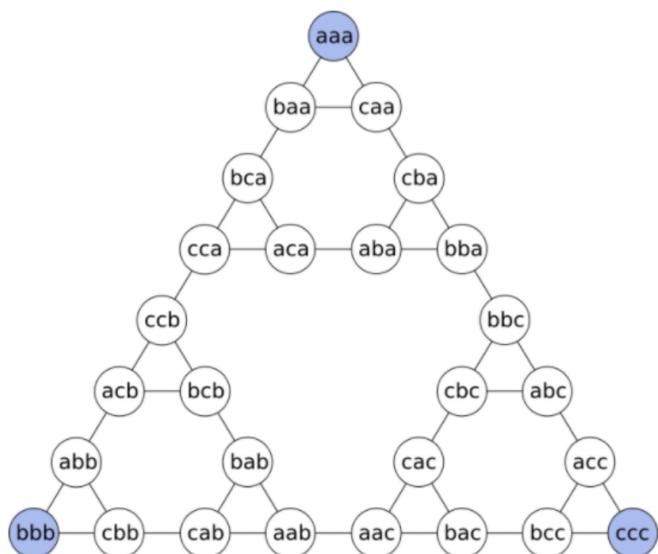


HW#3 Tower of Hanoi

河內塔源自於越南的一個傳說，在越南的某間寺院裡有三根銀棒，上串64個金盤，預言說當這些盤子移動完畢，世界就會滅亡，該傳說也稱作梵天寺之塔問題(Tower of Brahma puzzle)。

河內塔問題有三個規則必須遵守:1.一次只能移動一個盤子，2.大盤子永遠不能放在小盤子上面，3.這一疊盤子可以藉由另外一個外加的暫時位置從某個位置移到另一個位置。

然後河內塔如果被從某個位置搬到另一個位置就會世界末日的奇怪傳言，在我看完別人搬六盤的實際操作後就大概理解了呢((也太複雜了= =，搬六盤就好久了))。



這張圖就是以三個盤子的河內塔為例子，可以得到最短的路徑就是7個步驟，剛好跟我們下面放的那個公式符合， $2^3-1=7$ 。

想要解決河內塔問題的話，可以用遞迴關係式去代入計算，我們可以大概理解為就是一直搬搬搬……到最後移動圓盤數=1的時候，就是該遞迴式的中止條件。

我們可以套入公式並用遞迴關係式證明：

移動n個圓盤套在其他的同一根柱子

需要移動的次數是 a_n

$$a_1=1$$

$$a_2=2 \times a_1+1$$

$$a_3=2 \times a_2+1=2 \times (2 \times a_1+1)+1=(2^2 a_1+2)+1$$

$$a_4=2 \times a_3+1=2 \times ((2^2 a_1+2)+1)+1=(2^3 a_1+2^2 a_1+2)+1$$

·

·

$$a_n=2 \times a_{n-1}+1=(2^{n-1} a_1+2^{n-}$$

$$2 a_1+\dots+2^3 a_1+2^2 a_1+2)+1=2^{n-1} a_1+2^{n-}$$

$$2 a_1+\dots+2^3 a_1+2^2 a_1+2^1+2^0$$

$$=2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2^3+2^2+2^1+2^0$$

$$=2^0+2^1+2^2+2^3+\dots+2^{n-2}+2^{n-1}$$

$$=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

另有想法，利用遞迴關係式 $a_n=2 a_{n-1}+1$ ·

$a_1=1$ · 求 a_n 的通式 ·

因為 $a_n=2 a_{n-1}+1$ · 所以 $a_n+1=2 a_{n-1}+1+1$ ·

得 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$ 。因此

$$a_2+1=2(a_1+1) \quad \dots(1)$$

$$a_3+1=2(2a_2+1) \quad \dots(2)$$

$$a_4+1=2(2a_3+1) \quad \dots(3)$$

·

$$a_n+1=2(a_{n-1}+1) \quad \dots(n-1)$$

上列各式相乘 $(1) \times (2) \times (3) \times \dots \times (n-1)$ · 等號左

右等量除、對消後，得 $a_n+1=2(a_1+1) \times 2^{n-2}$

2。

因為 $a_1=1$ · 所以 $a_n+1=2^2 \times 2^{n-2}$ · 得 $a_n=2^{n-1}$ ·

可以得到最佳步驟為 2^n-1 次，n為金盤數量，所以呢，如果真的要搬完64盤，假設一秒

一盤的話，也要超過5849億年才搬得完((有夠可怕))。

程式碼：

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <time.h>
4
5 void hanoi(int n, char A, char B, char C) {
6     if(n == 1) {
7         printf("Move sheet from %c to %c\n", A, C);
8     }
9     else {
10        .....
11        hanoi(n-1, A, C, B);
12        hanoi(1, A, B, C);
13        hanoi(n-1, B, A, C);
14    }
15 }
16 int main() {
17     clock_t start, end;
18     int n;
19     printf("請輸入盤數:");
20     scanf("%d", &n);
21     start = clock();
22     hanoi(n, 'A', 'B', 'C');
23     end = clock();
24     double diff = end-start;
25     printf(" %f sec", diff / CLOCKS_PER_SEC );
26 }
```

運行時間:

4.003000 sec

CPU型號:

11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 @ 2.40GHz