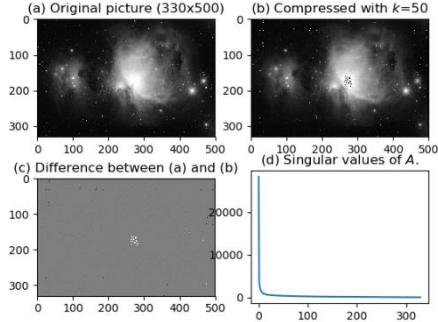
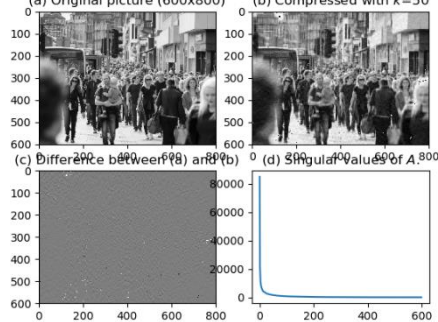
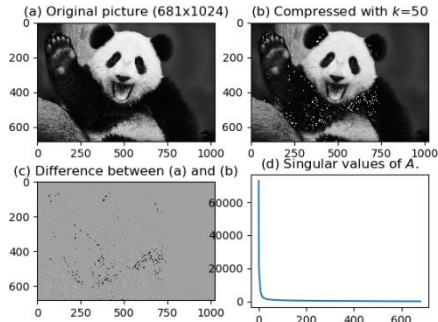
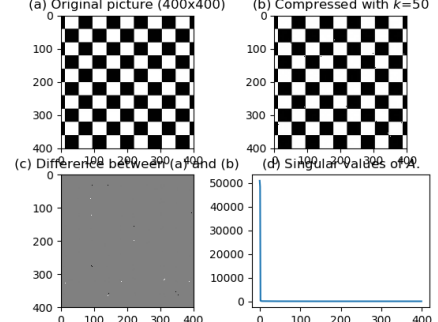
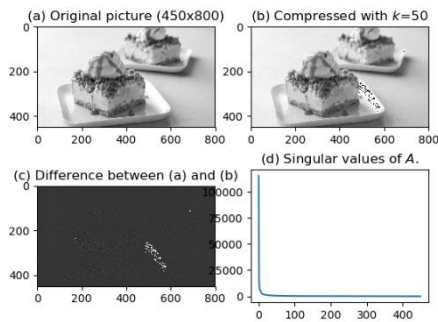


一、固定 size<k>=50

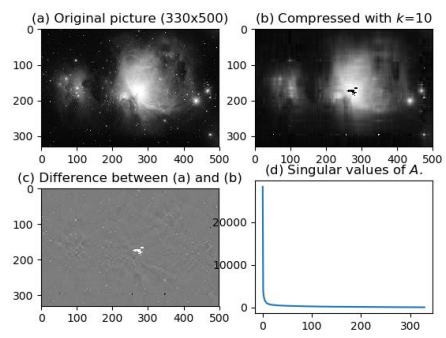
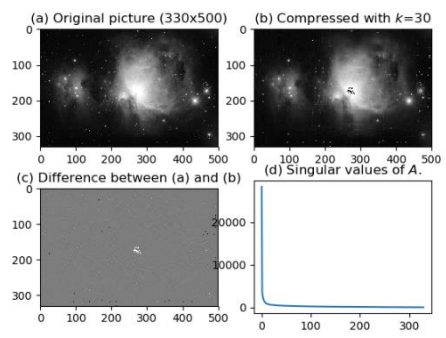
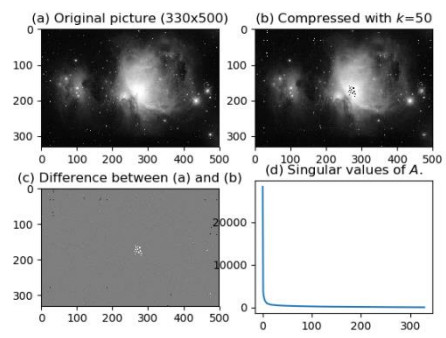
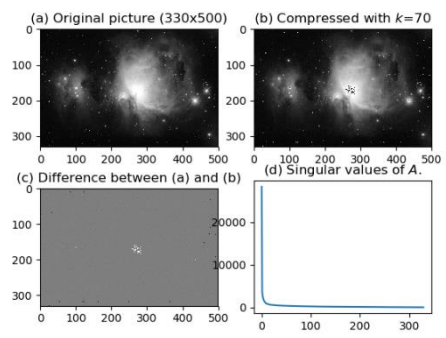
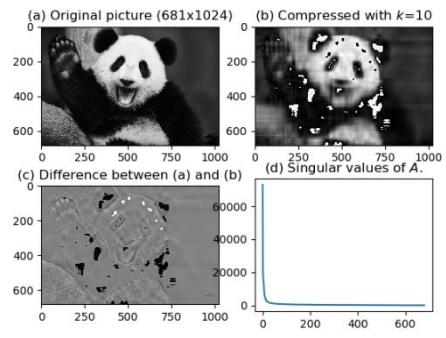
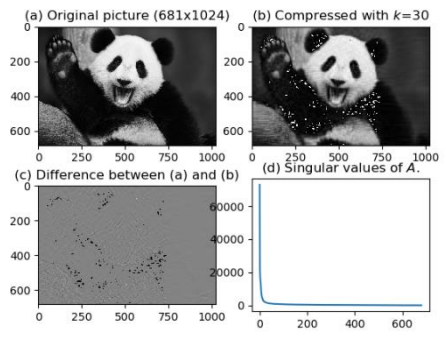
<p>330x500, k=50, ρ:0.251818, δ:0.17016047308945884</p> 	<p>600x800, k=50, ρ:0.1459375, δ:0.12346208780268265</p> 
<p>681x1024, k=50, ρ:0.122321, δ:0.5582570366817624</p> 	<p>400x400, k=50, ρ:0.2503125, δ:0.1810844473313084</p> 
<p>450x800, k=50, ρ:0.17375, δ:0.025889374245332466</p> 	

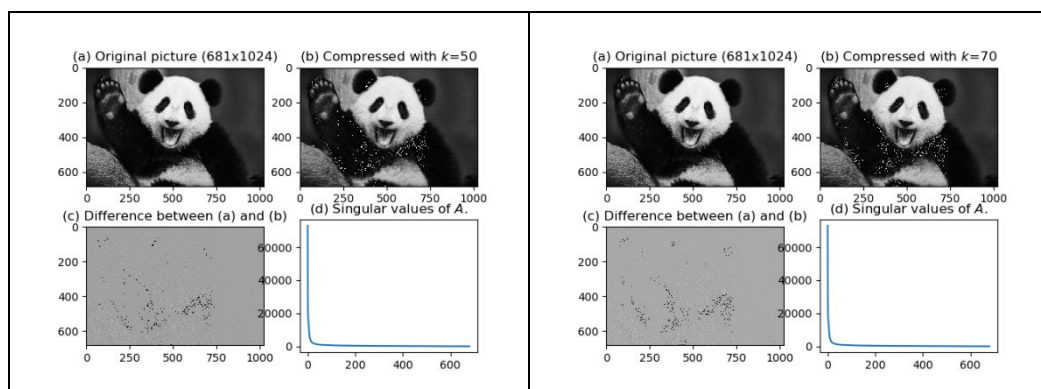
探討：

- (1) size<k>值固定時，圖片的大小決定 compression rate< ρ >值，因為 $\rho = \text{height} * k + k + k * \text{width} / \text{height} / \text{width}$ 。
- (2) 第三張圖（熊貓）有最大的 difference< δ >，判斷原因為該照片的顏色深淺差異大，造成使用 svd 壓縮後每個像素的資料量變少對圖片造成的影響大，圖片毀損嚴重。反之，第五張圖（蛋糕）因顏色深淺不明顯，壓

縮後的影響最小。

二、控制 k

<p>$k=10$, $\rho:0.050363$ $\delta:0.17732282801971738$</p> 	<p>$k=30$, $\rho:0.151090$, $\delta:0.17870181344399688$</p> 
<p>$k=50$, $\rho:0.251818$, $\delta:0.17016047308945884$</p> 	<p>$k=70$, $\rho:0.352545$, $\delta:0.15634658951752253$</p> 
<p>$k=10$, $\rho:0.024464$, $\delta:1.6289983579260596$</p> 	<p>$k=30$, $\rho:0.073392$, $\delta:0.6770851565444257$</p> 
<p>$k=50$, $\rho:0.122321$, $\delta:0.5582570366817624$</p>	<p>$k=70$, $\rho:0.171249$, $\delta:0.5707236860612374$</p>

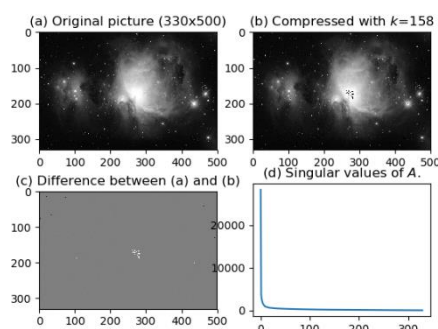


探討：

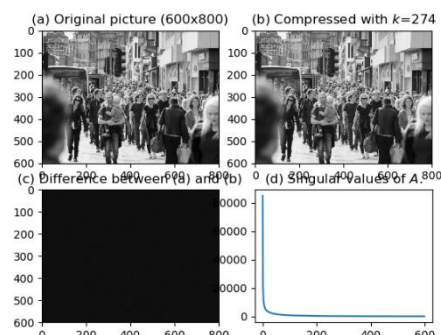
- (1) 同一張照片，size<k>與 compression rate<p>成正比，因此 size<k>=10 圖片毀損越嚴重。
- (2) 第五張照片（熊貓 k=10），壓縮後嚴重失真，判斷為該照片的顏色數值太過極端，又因 size<k>很小，壓縮後的 basis 過少。

三、控制 $p=0.8$

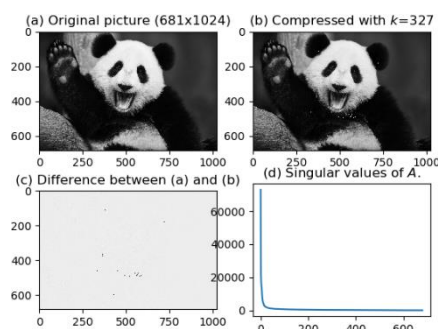
330x500,k:158,p:0.8,
 $\delta:0.09815256026025182$



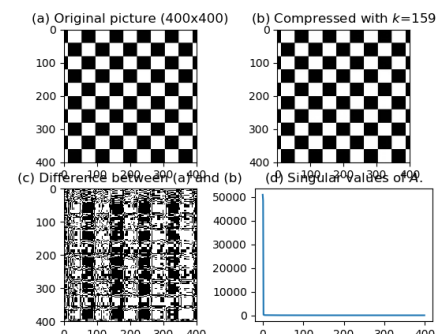
600x800,k:274,p:0.8
 $\delta:0.015726049563770148$



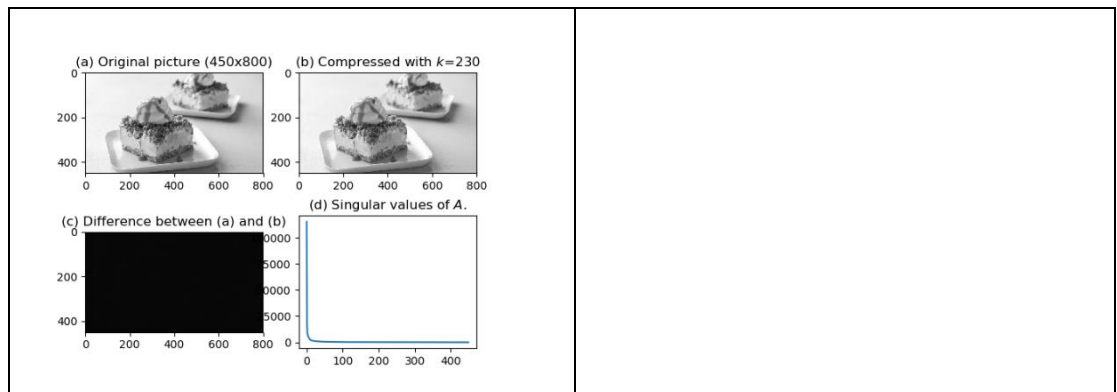
681x1024,k:327,p:0.8
 $\delta:0.15229101635395018$



400x400,k:159,p:0.8
 $\delta:0.20404177177374497$



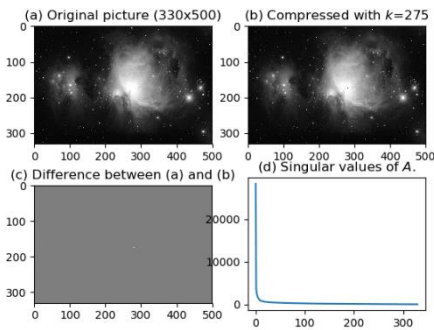
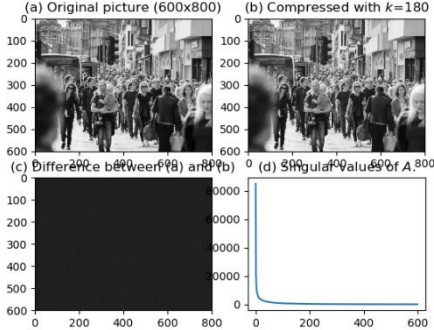
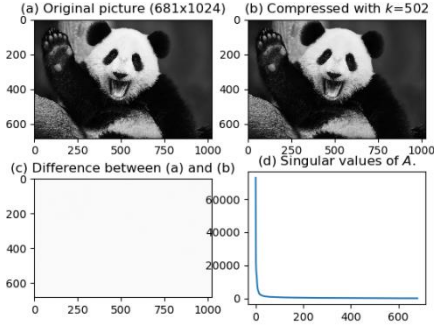
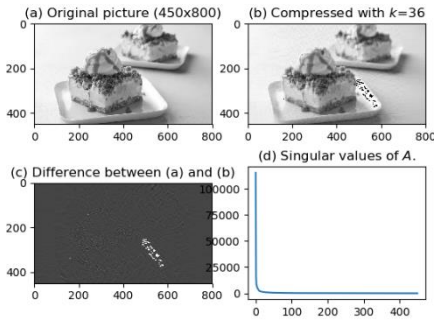
450x800,k:230,p:0.8
 $\delta:0.0040798588294365295$



探討：

- (1) 控制壓縮率 $\text{compression rate} \langle \rho \rangle$ ，可發現 $\text{difference} \langle \delta \rangle$ 的大小依序為第四張（黑白棋盤）>第三張（熊貓）>第一張（星雲）>第二張（街頭）>第五張（蛋糕），與第一點的結果相同，因第三、四張照片的數值極端、顏色差異大，且在大面積極端深或淺的地方，壓縮後毀損較嚴重。

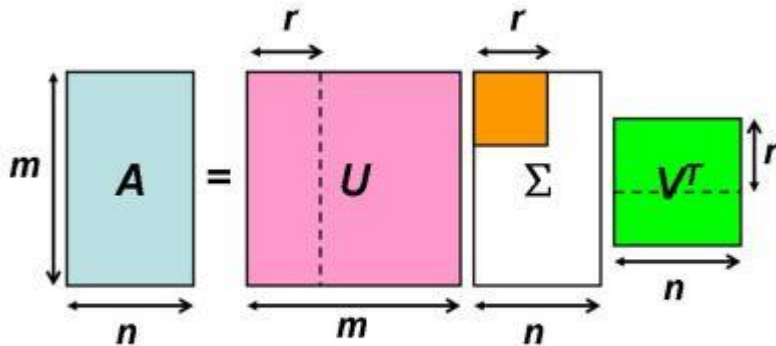
四、控制 $0.0275 < \delta < 0.0325$

<p>330x500, k:275, ρ:1.39003, δ:0.03242842635872902</p> 	<p>600x800, k:180, ρ:0.52829375, δ:0.03224629429913802</p> 
<p>681x1024, k:503, ρ:1.23055, δ:0.030952751876263906</p> 	<p>400x400, 無法使 δ 至此區間</p>
<p>450x800, k=36, ρ:0.128575, δ:0.03235971542331308</p> 	

探討：

(1) 用 for loop 改變 k 值，使 δ 約等於 3%（取正負 0.25% 的誤差）。

五、討論 SVD 演算法



- (1) 參照上圖，原圖片為矩陣 $A(m \times n)$ ，矩陣中的每個數值是該圖片的像素 (pixel)，一個 $m \times n$ 的矩陣代表該圖片的像素為 $m \times n$ 。
- (2) 透過 SVD 分解，將 A 矩陣拆解成三個矩陣相乘（大小分別為 $m \times r, r \times r, r \times n$ ），只要 $r < m$ 且 $r < n$ ，就可以在不降低像素(pixel)的前提下，減少記憶體的使用量。因為原先 A 矩陣的大小為 $m \times n$ ， $m \times r + r \times 1 + r \times n < m \times n$ ($r < m$ 且 $r < n$)。

參考資料：

<https://ccjou.wordpress.com/2009/09/01/%E5%A5%87%E7%95%B0%E5%80%BC%E5%88%86%E8%A7%A3-svd/>

- (3) 本實驗使用到的等式：

$$\text{size} \langle k \rangle = (\rho * \text{height} * \text{width}) / (\text{height} + 1 + \text{width})$$

size 決定 SVD 中間矩陣(Σ)的大小，影響壓縮後的資料量，size 越大，壓縮後的資料量減少越少（就是資料量越多）。

$$\text{compression rate} \langle \rho \rangle = (\text{height} * k + k + k * \text{width}) / \text{height} / \text{width}$$

用壓縮後的三個矩陣的大小除以原矩陣的大小，除了受 $\text{size} \langle k \rangle$ 影響，亦會受到圖片的 height 和 width 影響。

$\text{delta} \langle \delta \rangle$

以下為實驗中使用到的 python code：

```
for i in range(height):
    for j in range(width):
        if(img[i,j]):
```

$$\text{sum} = \text{sum} + \text{abs}(\text{img}[i,j] - \text{im1}[i,j]) / \text{img}[i,j]$$

$$\delta = \text{sum} / \text{width} / \text{height}$$

以數學式表示為：

$$\delta = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{|A_{i,j} - \tilde{A}_{i,j}|}{A[i,j]},$$

delta< δ >為原矩陣與壓縮後矩陣各 pixel 顏色的平均差異。

六、結論

- (1) 用 SVD 演算法壓縮圖片，把原本 mxn 的矩陣拆成三個矩陣相乘（大小分別為 mxk, kxk, kxn），以降低記憶體的使用量，但同時因 basis 減少，每個像素的資料量減少，圖片的清晰度也會降低。
- (2) 由第五點的等式可知，像素（mxn）和 compression rate< ρ >呈正相關。
- (3) 由上面的實驗可以推論，size<math>k>、compression rate< ρ >、delta< δ >三者其實是互相牽連的，size 和 compression rate 呈正相關，compression rate< ρ >和 delta< δ >呈負相關。另外，像素亦會影響 delta< δ >。
- (4) 照片的風格亦會影響壓縮後的影像品質，顏色有極端差異（白和黑），圖片毀損較嚴重。
- (5) 理論上 compression rate< ρ >越大，圖片毀損越嚴重，但並不是絕對的，亦會受到圖片的風格影響。
- (6) 比較上面五張圖，第三張（熊貓）與第四張（黑白棋盤）壓縮後毀損最嚴重，第五張（甜點）毀損最少。