HW2-3 prove Beta-Binomial conjugation

$$\because \text{marginal} = \int_0^1 \beta(\theta, m+a-1, N-m+b-1)\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \theta^{m+a-1}(1-\theta)^{N-m+b-1} \frac{\Gamma(a+N+b)}{\Gamma(m+a)\Gamma(N-m+b)}\, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(a+N+b)}{\Gamma(m+a)\Gamma(N-m+b)} \int_0^1 \theta^{m+a-1}(1-\theta)^{N-m+b-1}\, d\theta = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \theta^{m+a-1}(1-\theta)^{N-m+b-1}\, d\theta = \frac{\Gamma(m+a)\Gamma(N-m+b)}{\Gamma(a+N+b)}$$

$$P(\theta, \text{event}) = \frac{\text{likelihood} \times \text{prior}}{\text{marginal}}$$

$$= \frac{C^N_m p^m (1-p)^{N-m} p^{a-1}(1-p)^{b-1} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}{\int_0^1 C^N_m \theta^m (1-\theta)^{N-m} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\, d\theta}$$

$$= \frac{p^{m+a-1}(1-p)^{N-m+b-1}}{\int_0^1 \theta^{m+a-1}(1-\theta)^{N-m+b-1}\, d\theta} = \frac{p^{m+a-1}(1-p)^{N-m+b-1}}{\frac{\Gamma(m+a)\Gamma(N-m+b)}{\Gamma(a+N+b)}}$$

$$= \frac{\Gamma(a+N+b)}{\Gamma(m+a)\Gamma(N-m+b)} p^{m+a-1}(1-p)^{N-m+b-1} = \beta(p, a+m, b+N-m)$$

posterior 也是一個 beta distribution，

得證 #

故求 posterior 只需要將原來的 a 加上 m-1，b 加上 N-m-1。