

---

# 微积分

## ——关于累积量和变化率的语言

---

吴金闪

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega$$

$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^x f(\xi) d\xi \right] = f(x)$  插图化成  
一个人嘴里说出来这个 Stokes 公式

微积分是描述累积量-变化率关系的语言

微积分是对累积量-变化率关系做推理的语言

Teach Less, Learn More

2021 年 12 月 8 日



# 目录

<b>第一章 世界需要微积分</b>	13
1.1 微积分是描述累积量和变化率这个关系的语言 . . . . .	13
1.2 微积分是对微分-积分关系做逻辑运算的语言 . . . . .	13
1.3 微积分如何开展研究和计算——无穷小 . . . . .	13
1.4 需要微积分的其他典型场景 . . . . .	14
1.5 微积分发展线路图 . . . . .	14
1.6 本章小结 . . . . .	14
1.7 推荐阅读材料 . . . . .	18
1.8 作业 . . . . .	18
<b>第二章 实数</b>	19
2.1 集合论 . . . . .	19
2.2 从整数到实数 . . . . .	20
2.3 实数是个过程以及极限的朴素思想 . . . . .	20
2.4 实数的公理化定义和数学危机 . . . . .	20
2.5 有界集合有确界 . . . . .	20
2.6 推荐阅读材料 . . . . .	20
2.7 作业 . . . . .	20
2.8 本章小结 . . . . .	20
<b>第三章 极限</b>	21
3.1 序列和序列的极限 . . . . .	21
3.2 无穷小 . . . . .	21
3.3 Cauchy 序列和收敛序列 . . . . .	21
3.4 区间套定理 . . . . .	21

3.5	函数的极限和连续性 . . . . .	21
3.6	推荐阅读材料 . . . . .	21
3.7	作业 . . . . .	21
3.8	本章小结 . . . . .	22
<b>第四章</b>	<b>导数</b>	<b>23</b>
4.1	导数的定义 . . . . .	23
4.2	高阶导数的定义 . . . . .	23
4.3	函数极值点的导数 . . . . .	23
4.4	不定积分 . . . . .	23
4.5	Lagrangian 微分中值定理 . . . . .	23
4.6	不定积分的解析计算 . . . . .	24
4.7	微分和微商 . . . . .	24
4.8	推荐阅读材料 . . . . .	24
4.9	作业 . . . . .	24
4.10	本章小结 . . . . .	24
<b>第五章</b>	<b>定积分</b>	<b>25</b>
5.1	定积分的定义 . . . . .	25
5.2	定积分的数值计算 . . . . .	25
5.3	Newton-Leibniz 定积分-不定积分关系 . . . . .	25
5.4	积分中值定理 . . . . .	25
5.5	推荐阅读材料 . . . . .	25
5.6	作业 . . . . .	26
5.7	本章小结 . . . . .	26
<b>第六章</b>	<b>三角级数</b>	<b>27</b>
6.1	三角函数的积分微分和正交性 . . . . .	27
6.2	函数的三角函数级数展开 . . . . .	27
6.3	函数的 Fourier 级数展开 . . . . .	27
6.4	函数的 Fourier 变换 . . . . .	27
6.5	推荐阅读材料 . . . . .	27
6.6	作业 . . . . .	27
6.7	本章小结 . . . . .	27

目录	5
<b>第七章 简单微分方程</b>	<b>29</b>
7.1 微分方程的定义 . . . . .	29
7.2 一阶可分离变量的微分方程 . . . . .	29
7.3 二阶常系数齐次微分方程 . . . . .	29
7.4 高阶系数齐次微分方程 . . . . .	29
7.5 微分方程数值求解 . . . . .	29
7.6 推荐阅读材料 . . . . .	29
7.7 作业 . . . . .	29
7.8 本章小结 . . . . .	29
<b>参考文献</b>	<b>33</b>
<b>插图目录</b>	<b>33</b>
<b>举例目录</b>	<b>37</b>



# 献给

给常常被我逼迫的也经常逼迫我的学生们





# 致谢

感谢黄思应，由于其对数学的严肃的深入的不懈的又想偷懒的追求，才有了本书，一本遵循“教的更少，学得更多”，尽可能通过学习最少的具体知识来体会到微积分是什么。

在这里感谢老师、学生、家人

本书的电子版可以从网页“吴金闪的书们”找到。如果你是实体书的读者，需要输入网址的话，它是：<http://www.systemsci.org/jinshanw/books>。



# 前言

为什么要有这样一本书，核心理念是什么，怎么用这本书。



# 第一章 世界需要微积分

在这一章里，我们通过非常不准确地回顾微积分发展的历史，尤其是我们要假装地并且是蜻蜓点水式地重新提出和解决其发展过程中的各个问题，来体会一下为什么世界需要微积分。

## 1.1 微积分是描述累积量和变化率这个关系的语言

微积分是描述累积量和变化率这个关系的语言，以及符合这个关系的一对或者多对量的语言。例如速度的时间累积是位移，力的空间累积是功（其实势能更准确），以及反过来，位移的时间变化率是速度，功（更准确地，势能）的空间变化率是力。

以后为了简单计，我们称累积量和变化率这对关系为积分-微分关系，或者更加符合微积分的语言习惯，称为微分-积分关系。

## 1.2 微积分是对微分-积分关系做逻辑运算的语言

发现了微分-积分关系了又怎么样呢？我们需要对微分-积分关系做逻辑推理，来得到一些基于这个关系能够得到的结果。这个时候，微积分的计算就是这个推理过程的语言。

Newton 的力学方程和微积分。

## 1.3 微积分如何开展研究和计算——无穷小

严密的逻辑体系，用最少的基本假设和基本概念构建整个概念大厦。

操作表达式。把一个对象，例如线段、面积，分下去，得到直到无穷小的极限下才正确的表达式（例如微分和积分的定义），回到有限大小仍然正

确的表达式（例如微分中值定理、积分中值定理），再合起来。

Maxwell 和 Maxwell 方程的对称性。

$\delta$  函数和 Green 函数。

微积分概念体系自己的逻辑基础，极限，或者说无穷小。无穷小不是零，是一个过程，当然过程的最后结果，也就是在极限下等于零。从极限到连续，从连续到可导，导函数和原函数（不定积分），从极限到定积分，从定积分到不定积分。

## 1.4 需要微积分的其他典型场景

函数的级数展开，或者说级数近似，例如，Taylor 级数、三角级数（Fourier 级数）。从级数展开可以拓展到更一般的函数的基函数展开，例如函数的多项式展开、三角级数展开、Fourier 变换。从初等函数过渡到高等函数。

把看起来不是微积分的问题变成微积分的问题，核心是发现微分-积分关系，例如把数论问题变成微积分的问题，把群论问题变成代数问题（李群到李代数）。

## 1.5 微积分发展线路图

从哪里走来，走到了哪里，要到哪里去？

从实数域上的极限，到实数域上的导数、微分和积分，到欧式空间（ $\mathbb{R}^n$ ）上的导数、微分和积分，到任意流形上的导数、微分和积分。更容易识别和计算更多的微分-积分关系，无论在纯数学中，还是科学中。

## 1.6 本章小结

在这一章里面，我们非常粗略地介绍了微积分主要研究什么问题，怎么研究，从哪里来到哪里去，现在怎样。我们把这些叫做一个学科的大图景：典型研究对象、典型研究问题、典型思维方式、典型分析方法、和世界以及其他学科的关系。在这里，我们把大图景放到教给你具体知识之前。

我们这样做是非常危险和困难的，因为你还没有真的学习过微积分，不可能对上面这些微积分的学科大图景产生比较好的理性的和直觉的认知。可是，这是非常有必要的。这会使得我们的学习有方向感不迷失，提升学动机，

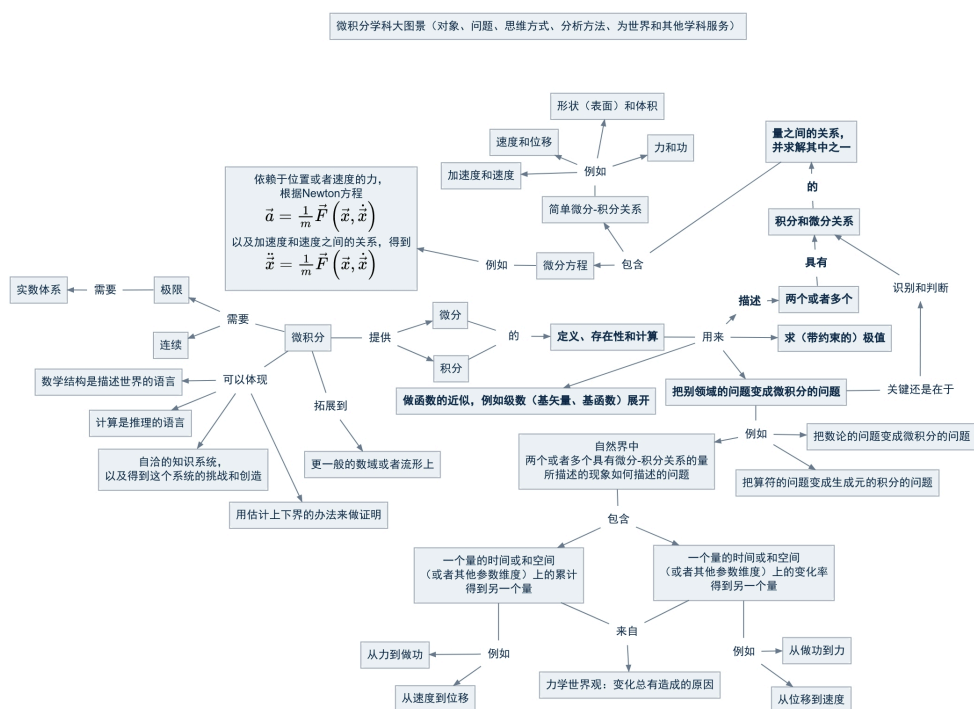


图 1.1: 微积分主要研究什么问题, 如何研究, 为世界和其他学科解决哪些问题? 其自身的理论基础是什么, 未来走向哪里? 从微积分的学习和使用还可以促进更好地体会数学的哪些方面?

可以再调整一下布局，美观一点

甚至做创造体验式学习，也就是一边提出和面对挑战，一边假装着创造尽管前人已经创造出来过的知识，而达到主动学习的目标，从而将来更容易把学到的知识做创造性使用或者用于创造新知识。有的时候，学习数学容易变成跟着教材一步步地走，不知道走向哪里，直到有一天看到整体从而幡然醒悟之前为什么这样学为什么学这些，或者直到看不到整体，不能醒悟也能忍受而放弃。

这就好像你去一个地区旅游，你不希望你仅仅是做无脑随机行走或者无脑跟着导游走，而是你希望提前能够看到一张地图，或者有人给你介绍一下概貌，接着在爬山的过程中不断地加深对这个整体地图的认知。在学习上，这就是尽量学之前就有一个概貌，学习过程中不断地丰富和深化这个概貌，并且冲着这个概貌去学习，去提出和面对问题创造知识来学习。这样的学习能够做到“教的更少，学的更少，学得更多”，通过学习（或者说假装着创造）最少量的最核心的具体知识领会到这个学科的大图景。这样的学习被称为“人类知识高速公路上以高层知识生成器为目标的理解型学习” [1]。

本章参考了 Strogatz 的《Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe》[2]，张筑生的《数学分析新讲》第一册 [3]，Morris 的《Mathematical thought from ancient to modern times》[4] 和《Calculus: An Intuitive and Physical Approach》[5]，Spivak 的《Calculus》[6]，[7]。以及 Apostol 的《Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra》。

注意，我们已经知道了将来微积分要能够处理累积量-变化率这对关系，以及由这对关系所描述的两个量，甚至若干对联合在一起的这样的关系所描述的多个量。我们也已经知道这样的关系的例子，例如曲线形状和曲线在某点的切线的斜率，例如速度和位移，例如力和功。我们下一步的任务是构建出来这样的知识体系，尽可能从最少的假设也就是公理和定义出发。警告，历史上，这是一次对数学的挑战，或者说数学危机——有微分和积分但是没有相应的基础概念来清楚地定义微分和积分。

这是这个微积分知识体系的结构图，或者称为微积分学科概念网络。下面，我们来一起把这个知识体系构建起来。



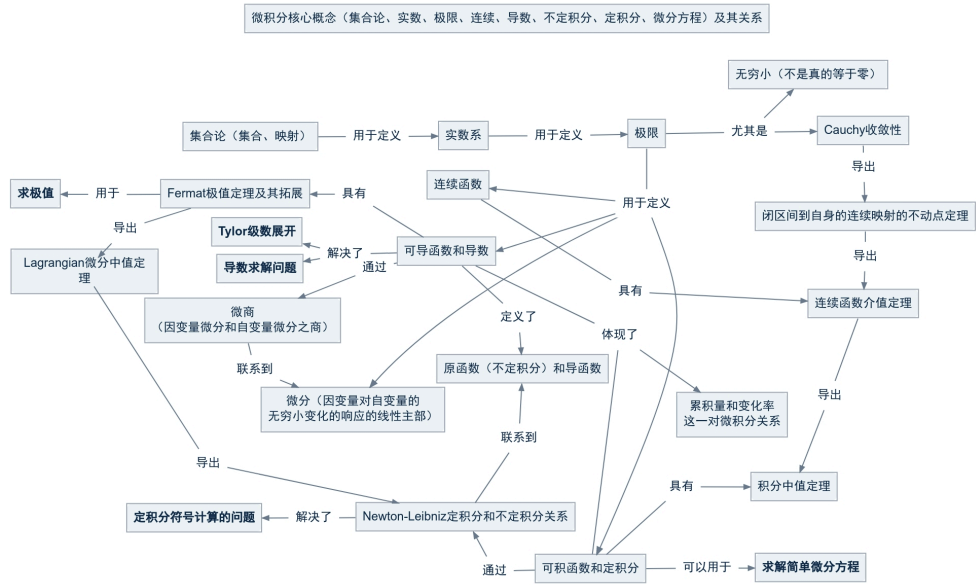


图 1.2: 微积分包含哪些主要公理、定义和定理，它们之间于什么关系，这些定义和定理分别解决了微积分学科大图景中的哪些主要问题？  
可以再调整一下布局，美观一点

## 1.7 推荐阅读材料

本章相关内容推荐大家去阅读一下: Strogatz 的《Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe》[2], 张筑生的《数学分析新讲》第一册 [3], Gowers的《牛津通识读本: 数学》。

## 1.8 作业

**习题 1.1** 阅读Gowers的《牛津通识读本: 数学》[8], 并做读书报告, 回答: 说了什么, 怎么说的, 为什么这样说为什么说这个, 我觉得怎么样也就是对我有什么意义。

**习题 1.2** 阅读 Strogatz 的《Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe》[2], 并做读书报告, 回答: 说了什么, 怎么说的, 为什么这样说为什么说这个, 我觉得怎么样也就是对我有什么意义。

**习题 1.3** 阅读吴金闪的《教的更少, 学得更多》[1], 学会制作概念地图, 并做读书报告。读书报告要求概念地图和文字相结合, 回答: 说了什么, 怎么说的, 为什么这样说为什么说这个, 我觉得怎么样也就是对我有什么意义。

**习题 1.4** 建议你在完成作业之后, 把上面的作业和作业重新完成一次, 按照概念地图和文字结合的方式。对比一下前后两次的作业。

## 第二章 实数

在这一章里，我们来定义实数。我们会考虑到实数需要什么性质，目前能够清楚定义哪些性质，目前暂时接受将来再搞清楚哪些性质。

有界必有确界。

Cauchy 收敛性。

### 2.1 集合论

补充一点点集合论。集合、映射、子集、交集、并集、开集、闭集、卡氏积、关系、定价关系和等价类。

从集合论到整数。

## 2.2 从整数到实数

## 2.3 实数是个过程以及极限的朴素思想

## 2.4 实数的公理化定义和数学危机

## 2.5 有界集合有确界

## 2.6 推荐阅读材料

## 2.7 作业

## 2.8 本章小结

## 第三章 极限

为了定义导数，我们需要无穷小，一个很神奇的等于零又不等于零的东西（过程、数）。

### 3.1 序列和序列的极限

自然语言和  $\epsilon - N$  语言。

### 3.2 无穷小

### 3.3 Cauchy 序列和收敛序列

### 3.4 区间套定理

### 3.5 函数的极限和连续性

联系函数（映射）、连续函数介值定理

自然语言和  $\epsilon - \delta$  语言。

### 3.6 推荐阅读材料

### 3.7 作业

求一些序列极限，求几个极限的四则运算，判断几个函数是否连续

### 3.8 本章小结

## 第四章 导数

有了函数的极限，我们来定义导数，以及做一些简单计算。

### 4.1 导数的定义

导数的定义和几个典型初等函数的导数的计算。可导函数的条件。处处连续处处不可导的函数。光滑性的定义。

### 4.2 高阶导数的定义

对前一阶导函数再求导数。无穷小领域内的 Taylor 级数,  $o(\Delta x)$  和  $O(\Delta x)$  的定义。

### 4.3 函数极值点的导数

可导函数、连续函数，在某点取到极值的条件。

### 4.4 不定积分

原函数（不定积分）和导函数。差一个常数的函数等价类。

### 4.5 Lagrangian 微分中值定理

无穷小形式和有限大小形式

## 4.6 不定积分的解析计算

## 4.7 微分和微商

线性主部，一元函数中微商和导数为什么是同一个东西

## 4.8 推荐阅读材料

画个概念地图，做几个简单导数的计算，几个简单不定积分的计算

## 4.9 作业

## 4.10 本章小结



## 第五章 定积分

通过极限定义定积分，把定积分的计算变成不定积分的计算，

### 5.1 定积分的定义

定积分的定义和几个典型初等函数的定积分的计算。

### 5.2 定积分的数值计算

算出来结果，试着和不定积分原函数对比一下

### 5.3 Newton-Leibniz 定积分-不定积分关系

定积分化成不定积分来计算，不定积分通过看做导数求逆来计算。  
不定积分看做积分上线为变量的定积分。

### 5.4 积分中值定理

### 5.5 推荐阅读材料

画个概念地图，做几个简单导数的计算，几个简单定积分的数值和解析计算

## 5.6 作业

## 5.7 本章小结

## 第六章 三角级数

### 6.1 三角函数的积分微分和正交性

### 6.2 函数的三角函数级数展开

### 6.3 函数的 Fourier 级数展开

### 6.4 函数的 Fourier 变换

### 6.5 推荐阅读材料

画个概念地图，做几个简单导数的计算，几个简单定积分的数值和解析计算

### 6.6 作业

### 6.7 本章小结



## 第七章 简单微分方程

微分-积分关系的直接计算——求导或者求积分，一阶微分方程——只包含原函数和导函数的方程——的求解，高阶常系数齐次微分方程的求解。

### 7.1 微分方程的定义

方程、初始条件、边条件

### 7.2 一阶可分离变量的微分方程

### 7.3 二阶常系数齐次微分方程

### 7.4 高阶系数齐次微分方程

### 7.5 微分方程数值求解

Euler 方法，Runge-Kutta 方法。

### 7.6 推荐阅读材料

画个概念地图，求解几个简单的微分方程的数值和解析解。

### 7.7 作业

### 7.8 本章小结



## 结束语

整本书到此结束。本书在内容选择甚至具体内容的展开上都和大多数书不太一样。希望这个企图做到不一样的努力能够对于学习者的学习和理解有点效果 (make a difference)。

内容上贯穿全书的是从什么是微积分——关于微分和积分关系的语言。

谢谢你作为学习者付出的时间和努力，希望你喜欢这个深入思考的过程。





## 参考文献

- [1] 吴金闪. 教的更少, 学得更多——概念地图学习与教学方法 [M/OL]. Unpublished, retrieved March 2016, 2016. <http://www.systemsci.org/jinshanw/books/>.
- [2] Strogatz S. Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe [M]. Mariner Books, 2019.
- [3] 张筑生. 数学分析新讲 (第一册) [M]. 北京大学出版社, 1990.
- [4] Kline M. Mathematical thought from ancient to modern times [M]. Oxford University Press New York, 1972.
- [5] Kline M. Calculus: An Intuitive and Physical Approach [M]. Dover Publications, 1998.
- [6] Spivak M. Calculus [M]. Publish or Perish, 2008.
- [7] Apostol T M. Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra [M]. Publish or Perish, 1991.
- [8] Gowers T. Mathematics: A Very Short Introduction [M]. Oxford: Oxford University Press, 2002.



# 插图

1.1	微积分学科大图景 . . . . .	15
1.2	微积分学科概念网络 . . . . .	17



## 举例