就方程组$x_1+2x_2=3$，$2x_1+4.01x_2=6.01$的下列近似解，求出相对前向误差和相对后向误差以及误差放大因子：

正确解是$x=[1,1]$，该系数矩阵为$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4.01\end{bmatrix}$，b为$\begin{bmatrix}3\\ 6.01\end{bmatrix}$.

$(a)[-10,6]$;

使用无穷范数，前向误差是

$$||x-x_a||_\infty=||\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-10\\ 6\end{bmatrix}||_\infty=||\begin{bmatrix}11\\ -5\end{bmatrix}||_\infty=11$$

因此它的相对前向误差是

$$\frac{||x-x_a||_\infty}{||x||_\infty}=\frac{11}{1}=11$$

使用无穷范数，后向误差是

$$\begin{aligned}||r||_\infty=||b-Ax_a||_\infty&=||\begin{bmatrix}3\\ 6.01\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4.01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10\\ 6\end{bmatrix}||_\infty\\ &=||\begin{bmatrix}3\\ 6.01\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\ 4.06\end{bmatrix}||_\infty\\ &=||\begin{bmatrix}1\\ 1.95\end{bmatrix}||_\infty\\ &=1.95\end{aligned}$$

因此它的相对后向误差是

$$\frac{||r||_\infty}{||b||_\infty}=\frac{1.95}{6.01}$$

因此误差放大因子为

$$\frac{\text{相对前向误差}}{\text{相对后向误差}}=\frac{11}{\frac{1.95}{6.01}}=33.9025641025641$$

$(b)[-100,52]$;

使用无穷范数，前向误差是

$$||x-x_a||_\infty=||\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-100\\ 52\end{bmatrix}||_\infty=||\begin{bmatrix}101\\ -51\end{bmatrix}||_\infty=101$$

因此它的相对前向误差是

$$\frac{||x-x_a||_\infty}{||x||_\infty}=\frac{101}{1}=101$$

使用无穷范数，后向误差是

$$
\begin{aligned}
||r||_\infty = ||b - Ax_a||_\infty &= || \begin{bmatrix} 3 \\ 6.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -100 \\ 52 \end{bmatrix} ||_\infty \\
&= || \begin{bmatrix} 3 \\ 6.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 8.52 \end{bmatrix} ||_\infty \\
&= || \begin{bmatrix} 1 \\ -2.51 \end{bmatrix} ||_\infty \\
&= 2.51
\end{aligned}
$$

因此它的相对后向误差是

$$
\frac{||r||_\infty}{||b||_\infty} = \frac{2.51}{6.01}
$$

因此误差放大因子为

$$
\frac{\text{相对前向误差}}{\text{相对后向误差}} = \frac{101}{\frac{2.51}{6.01}} = 241.8366533864541
$$

$(c)[-600, 301]$;

使用无穷范数，前向误差是

$$
||x - x_a||_\infty = || \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -600 \\ 301 \end{bmatrix} ||_\infty = || \begin{bmatrix} 601 \\ -300 \end{bmatrix} ||_\infty = 601
$$

因此它的相对前向误差是

$$
\frac{||x - x_a||_\infty}{||x||_\infty} = \frac{601}{1} = 601
$$

使用无穷范数，后向误差是

$$
\begin{aligned}
||r||_\infty = ||b - Ax_a||_\infty &= || \begin{bmatrix} 3 \\ 6.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -600 \\ 301 \end{bmatrix} ||_\infty \\
&= || \begin{bmatrix} 3 \\ 6.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 7.01 \end{bmatrix} ||_\infty \\
&= || \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ||_\infty \\
&= 1
\end{aligned}
$$

因此它的相对后向误差是

$$
\frac{||r||_\infty}{||b||_\infty} = \frac{1}{6.01}
$$

因此误差放大因子为

$$
\frac{\text{相对前向误差}}{\text{相对后向误差}} = \frac{601}{\frac{1}{6.01}} = 3612.01
$$

$(d)[-599, 301]$;

使用无穷范数，前向误差是

$$
||x - x_a||_\infty = || \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -599 \\ 301 \end{bmatrix} ||_\infty = || \begin{bmatrix} 600 \\ -300 \end{bmatrix} ||_\infty = 600
$$

因此它的相对前向误差是

$$\frac{||x-x_a||_\infty}{||x||_\infty}=\frac{600}{1}=600$$

使用无穷范数，后向误差是

$$\begin{aligned}||r||_\infty=||b-Ax_a||_\infty&=||\begin{bmatrix}3\\6.01\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\2&4.01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-599\\301\end{bmatrix}||_\infty\\&=||\begin{bmatrix}3\\6.01\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\9.01\end{bmatrix}||_\infty\\&=||\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}||_\infty\\&=3\end{aligned}$$

因此它的相对后向误差是

$$\frac{||r||_\infty}{||b||_\infty}=\frac{3}{6.01}$$

因此误差放大因子为

$$\frac{相对前向误差}{相对后向误差}=\frac{600}{\frac{3}{6.01}}=1202$$

(e)系数矩阵的条件数是什么?

记该系数矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4.01\end{bmatrix}$，它的逆为$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\2&4.01\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}401&-200\\-200&100\end{bmatrix}$

因此$||A||=6.01$，$||A^{-1}||$=601.

由定理2.6可知$cond(A)=||A||\cdot||A^{-1}||=3612.01.$

$A=\begin{bmatrix}1&5&1\\-1&2&-3\\1&-7&0\end{bmatrix}$矩阵A的2范数、0范数、无穷范数分别是?

该矩阵的2范数为

$$||A||_2=\sqrt{\lambda_1}$$
$$(\lambda_1为A^TA的最大特征值)$$

而

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&-1&1\\5&2&-7\\1&-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5&1\\-1&2&-3\\1&-7&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\-4&78&-1\\4&-1&10\end{bmatrix}$$

令A^TA的特征多项式$|A^TA-\lambda E|=0$

$$|A^TA-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-4&4\\-4&78-\lambda&-1\\4&-1&10-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+91\lambda^2-1011\lambda+961=0$$

使用MATLAB绘图，可知该特征方程的最大解，也就是A^TA的最大特征值$\lambda_1\in(78,79)$，使用割线方法法可得

$$\lambda_1=78.234288087600433$$

因此A的2范数为

$$||A||_2=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{78.234288087600433}=8.845014872096057$$

0范数表示的是矩阵的稀疏度，也就是非0元素的个数，因此A的0范数为

$$||A||_0=8$$

由定义

$$||A||_\infty=\text{每行元素绝对值之和的最大值}$$

可知，A的无穷范数为

$$||A||_\infty=max\{7,6,8\}=8$$

求满足$||A||_\infty=||Ax||_\infty/||x||_\infty$的一个向量$x$.

记$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

已知$||A||_\infty=8$，因此需满足

$$8\times max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}=max\{|x_1+5x_2+x_3|,|-x_1+2x_2-3x_3|,|x_1-7x_2|\}$$

易知一个满足条件的非零解为$x_1=1,x_2=-1,x_3=1$，因此一个向量x为

$$x=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

求满足$||A||_1=||Ax||_1/||x||_1$的一个向量x.

A的1范数为

$$\begin{aligned}||A||_1&=\text{矩阵所有列向量绝对值之和的最大值}\\&=max\{3,14,4\}\\&=14\end{aligned}$$

因此需满足

$$14\times(|x_1|+|x_2|+|x_3|)=|x_1+5x_2+x_3|+|-x_1+2x_2-3x_3|+|x_1-7x_2|$$

易知一个满足条件的非零解为$x_1=0,x_2=1,x_3=0$，因此一个向量x为

$$x=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$