黄玟瑜
19335074
huangmy73@mail2.sysu.edu.cn

Homework 12
数值计算方法，2021 春

2021-06-06

周一作业

$x=a$ 到 $x=b$ 的 $f(x)$ 所定义的曲线弧长由积分 $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$ 给出。取 $m=32$ 用复合 Simpson 法则近似以下曲线的长度：

(a)$y=x^3, x\in[0,1]$;

(b)$y=tanx, x\in[0,\frac{\pi}{4}]$;

(c)$y=arctanx, x\in[0,1]$;

m 为区间等分的份数。

解：

(a) $f'(x)=3x^2$，故弧长 $l=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx=\int_0^1 \sqrt{1+9x^4}dx$

编写函数如下：

```python
import numpy as np


def f(x):
    return np.sqrt(1+9*x*x)


def Simpson(f, a, b, m):
    h = (b - a) / m  # 区间长度为h
    x = a
    sum = f(x) - f(b)
    for i in range(0, m):  # 对[x, x+h]使用Simpson公式
        x += h / 2
        sum += 4 * f(x)  # 4 * f((a+b)/2)
        x += h / 2
        sum += 2 * f(x)  # f(a') + f(b)

    return h * sum / 6


print(Simpson(f, 0, 1, 32))
```

结果为

$$1.8842132397018547$$

(b) $f'(x)=sec^2x$，故弧长 $l=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+sec^4x}dx$

编写函数如下：

```python
import numpy as np
import sympy


def f(x):
    return np.sqrt(np.double(1 + np.power(sympy.sec(x), 4)))


def Simpson(f, a, b, m):
    h = (b - a) / m  # 区间长度为h
    x = a
    sum = f(x) - f(b)
    for i in range(0, m):  # 对[x, x+h]使用Simpson公式
        x += h / 2
        sum += 4 * f(x)  # 4 * f((a+b)/2)
        x += h / 2
        sum += 2 * f(x)  # f(a') + f(b)

    return h * sum / 6


print(Simpson(f, 0, np.pi / 4, 32))
```

结果为

$$1.277978069583177$$

(c) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，故弧长 $l=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{(1+x^2)^2}}dx$

编写函数如下：

```python
import numpy as np


def f(x):
    tmp = (1 + x*x) * (1 + x*x)
    return np.sqrt(np.double(1 + 1/tmp))


def Simpson(f, a, b, m):
    h = (b - a) / m  # 区间长度为h
    x = a
    sum = f(x) - f(b)
    for i in range(0, m):  # 对[x, x+h]使用Simpson公式
        x += h / 2
        sum += 4 * f(x)  # 4 * f((a+b)/2)
        x += h / 2
        sum += 2 * f(x)  # f(a') + f(b)

    return h * sum / 6


print(Simpson(f, 0, 1, 32))
```

结果为

$$1.2779780591356387$$

周四作业

15. **建立仅用数据 $f(x-2h)$、$f(x)$ 及 $f(x+3h)$ 的二阶方法来近似 $f'(x)$，求出误差项。**

解:

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - \frac{4}{3}h^3 f'''(c_1)$$
$$f(x+3h) = f(x) + 3hf'(x) + \frac{9}{2}h^2 f''(x) + \frac{9}{2}h^3 f'''(c_2)$$

这里 $x-2h < c_1 < x < c_2 < x+3h$，因此

$$\frac{9}{4}f(x-2h) - f(x+3h) = \frac{5}{4}f(x) - \frac{15}{2}hf'(x) + O(h^2)$$

$$\to f'(x) = \frac{5f(x) - 9f(x-2h) + 4f(x+3h)}{30h} - h^2 f'''(c)$$

其中 $x-2h < c < x+3h$。

18. **证明 3 阶导数的二阶公式：**

$$f'''(x) = \frac{f(x-3h) - 6f(x-2h) + 12f(x-h) - 10f(x) + 3f(x+h)}{2h^3} + O(h^2)$$

解:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^3) \tag{1}$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^3) \tag{2}$$
$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - \frac{4h^3}{3}f'''(x) + O(h^3) \tag{3}$$
$$f(x-3h) = f(x) - 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) - \frac{9h^3}{2}f'''(x) + O(h^3) \tag{4}$$

$(1)\times 3 + (2)\times 12 - (3)\times 6 + (4)$，得到

$$12f(x-h) + 3f(x+h) - 6f(x-2h) + f(x-3h) = 10f(x) + 2h^3 f'''(x) + O(h^3)$$

因此 3 阶导数的二阶公式为:

$$f'''(x) = \frac{f(x-3h) - 6f(x-2h) + 12f(x-h) - 10f(x) + 3f(x+h)}{2h^3} + O(h^2)$$

19. **证明 4 阶导数的二阶公式：**

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x-2h)-4f(x-h)+6f(x)-4f(x+h)+f(x+2h)}{h^4}+O(h^2)$$

解：

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+O(h^4) \tag{1}$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+O(h^4) \tag{2}$$

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+2h^2f''(x)+\frac{4h^3}{3}f'''(x)+\frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x)+O(h^4) \tag{3}$$

$$f(x-2h)=f(x)-2hf'(x)+2h^2f''(x)-\frac{4h^3}{3}f'''(x)+\frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x)+O(h^4) \tag{4}$$

$(1)\times 4+(2)\times 4-(3)-(4)$，得到

$$4f(x-h)+4f(x+h)-f(x-2h)-f(x+2h)=6f(x)-h^4f^{(4)}(x)+O(h^4)$$

因此 4 阶导数的二阶公式为：

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x-2h)-4f(x-h)+6f(x)-4f(x+h)+f(x+2h)}{h^4}+O(h^2)$$