
图论及其应用：第三次作业

请回答任意五题，将答案于北京时间六月三十日午夜前发送至2160853158@qq.com，邮件题目请注明姓名学号

题一 最多可以将地球分成几个区域，使任何两个区域都相邻。

题二 证明有 10 个顶点的 5 正则图不是平面图。

题三 考察图 $G \triangleq (V, E)$ ，记 $\chi(G)$ 为 G 的点色数，证明：

- 如果 $\forall v \in V : \chi(G - v) = \chi(G) - 1$ ， G 连通；
- 如果 $\forall x, y \in V : \chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ ， G 是完全图。

题四 图 G 有 n 个顶点，记 \bar{G} 为 G 的补图，证明：

- $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$ ；
- $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ 。

题五 3 正则图 G 的边色数为 4，证明 G 不是 H 图。

题六 给定一个点色数为 k 的 k 染色方案，证明对任何一种颜色 c ，均存在 c 颜色的顶点，其邻居包含所有其他颜色。

题七 给定 n 个顶点， m 条边的图 G ，证明 G 包含一个偶子图 H ，其边的数目至少为 $\frac{2\lfloor n^2/4 \rfloor m}{n(n-1)}$ 。

题八 证明任何平面图最少有 4 个度数小于 6 的顶点。

题九 对 $p = 1/n$ 的随机图 $G_{n,p}$ ，证明 $\forall \epsilon > 0$ ，大概率不存在多于 $(1 + \epsilon)n/2$ 个顶点的连通分支。