图论及其应用：第二次作业

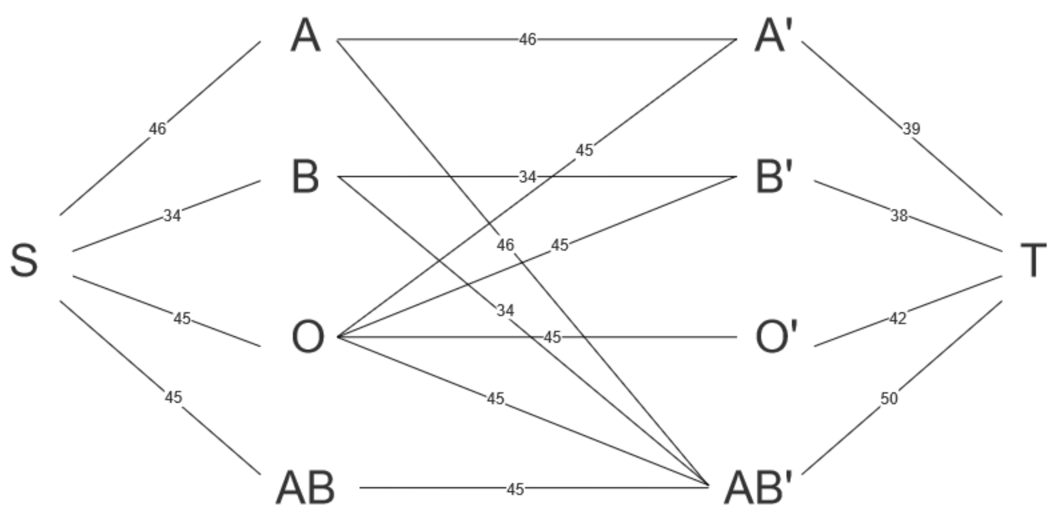
注意 请回答任意六题，并将答案在北京时间五月十六日午夜前发送至`2160853158@qq.com`，邮件题目中请注明姓名学号

题一 某医院急诊某夜有 169 名病人需要输血，假设每人需要 1 个单位的血量，对 A, B, O, AB 四种血型的需求分别是 $39, 38, 42, 50$ 单位，医院共有 170 单位的储备，对应 A, B, O, AB 分别为 $46, 34, 45, 45$ 单位。

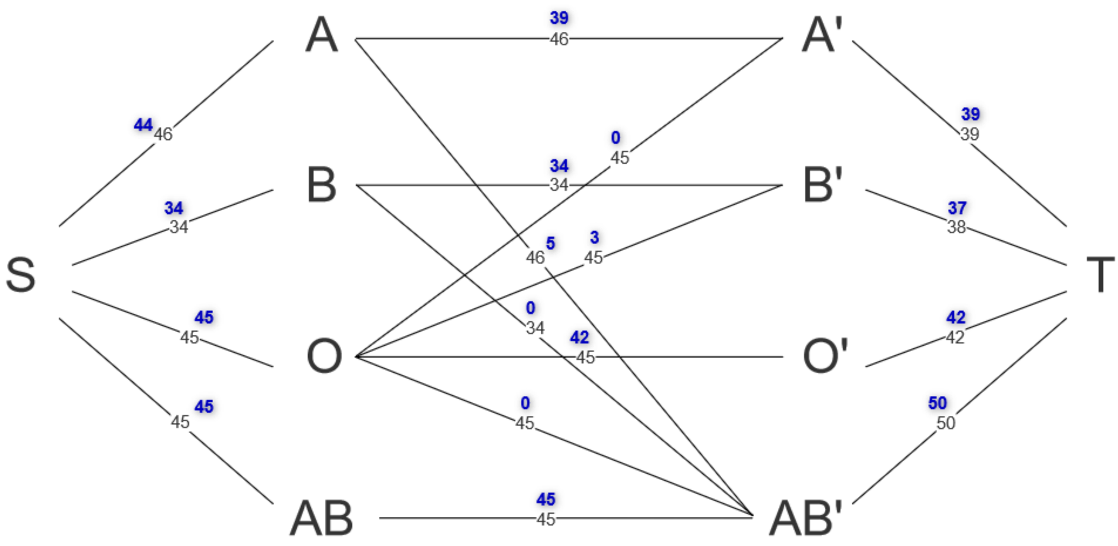
- 请用最大流模型求解最多可以满足多少病人；
- 找出一个容量小于 169 的割，并向精通医学然而并不十分精通图论的医院工作人员用他们可以理解的方式解释为什么不能满足所有病人。

解:

（1）由于 O 型血能输给其他血型的病人，AB 型病人能接收其他血型的血，同血型可直接供血，由题意可作出下图：



题目可转化为求从 s 到 t 的最大流，s 到 t 的最大流量等于最小的割 (s, t) 的容量，求得 s 到 t 的最大流如下所示。



最大流的流量为 $39+37+42+50=168$。

因此最多可满足 168 名病人。

（2）对（1）中所构建的图，S 代表医院储备的血，A、B、O、AB 代表将要供给的 A、B、O、AB 血型的血，T 代表病人。边 SA、SB、SO、SAB 的容量分别表示医院可供给的 A、B、O、AB 型血的最大单位，显然，医院供给的该血型的血不能超过所储备的该血型的血的最大值，边 $A'T$、$B'T$、$O'T$、$AB'T$ 分别代表从医院供给的血输给 A、B、O、AB 血型的病人的最大值，显然，病人不需要多余的血。由于每个病人需要 1 个单位的血量，求从 S 到 T 的流相当于求一种供血方式，该流的流量即得到供应的病人的数量，由（1）可知，最大流流量为 168，且有流 $\leq$ 割，由于存在一个容量小于 169 的割 $\{SA, SB, S0, SAB,\}$，而任何流的流量 $\leq$ 任何割的容量，因此必不能满足所有病人。

题二　已知图中任何两条边的权值不相等，证明以下两个结论成立：

- 任何割中的最短的边在所有的最小生成树中；
- 任何圈中的最长边不在任何一棵最小生成树中。

题三　给定任一有偶数条边且每个顶点度数为偶数的连通图 G，证明可以把每条边染成黑白两种颜色中的一种，对每个顶点，与之相连的黑边与白边一样多。

解：

对任意顶点，设其度数为 $2k$，若 $k>1$ 则将其拆分为 k 个顶点，从而使每个顶点的度数为 2。拆分策略为：将与之相连的 $2k$ 条边两两分组，一共有 k 个分组，每个分组里的两条边和一个顶点相连。

这样处理后每个顶点的度数仍为偶数，边的总数不变，因此该图仍为欧拉图，必存在一条经过所有边的欧拉回路，且该欧拉回路的长度为偶数。因此可以将欧拉回路上的边交替的染成黑色和白色，再合并拆分的顶点，此时每条边都被染成了黑白两种颜色中的一种，且对每个顶点，与之相连的黑边与白边一样多。

题四　$G=(V,E)$ 为简单 Euler 图，证明或推翻以下推断：

- 若 G 是偶图，则 $m=|E|$ 为偶数；
- 若 $n=|V|$ 是偶数，则 m 也是偶数；
- e 与 f 为关联的两条边，他们必然连续出现在某条 Euler 回路里。

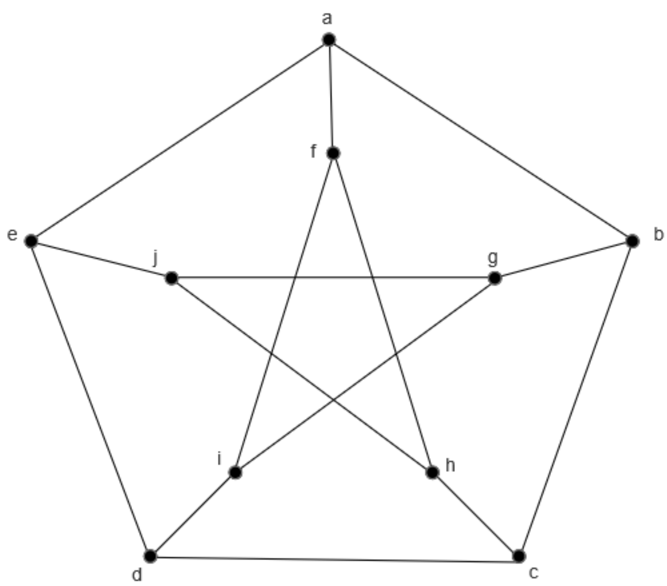
解：

1. 将 $V(G)$ 的点分为两个集合 X 和 Y，使得每边一头在 X，一头在 Y，由于 G 为简单欧拉图，对 X 中的顶点，每个顶点的度数均为偶数，与每个顶点相连的边数也是偶数，故 G 有偶数条边。
2. 若 $n=|V|$ 是偶数，每个顶点的度数为偶数，则所有顶点度数之和是 4 的倍数，故边的数量为偶数。
3. 将 e 和 f 从 G 中删除，则与将 e 和 f 都相连的顶点的度数减 2，只与 e 相连或只与 f 相连的顶点的度数减 1，此时图中只有两个顶点度数为奇数，故存在欧拉迹，欧拉迹的两端分别是只与 e 相连和只与 f 相连的顶点，将 e 和 f 加入该欧拉迹中就形成了一条欧拉回路，因此 e 和 f 必然连续出现在某条 Euler 回路中。

题五　给定每边长度为一的连通偶图 G 以及顶点 $v\in V(G)$，证明对 G 中所有的边 $xy\in E(G)$，v 到 x 的最短路不可能和 v 到 y 的最短路一样长。
解：

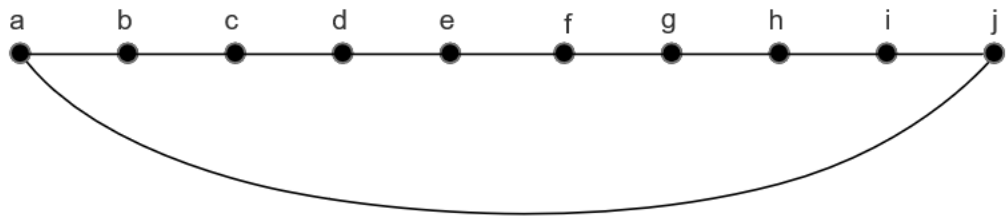
将 $V(G)$ 的点分为两个集合 X 和 Y，使得每边一头在 X，一头在 Y，不妨设 $x\in X$，$y\in Y$，若 $v\in X$，则 v 到 x 的最短路长度必为偶数，v 到 y 的最短路长度必为奇数，因此，v 到 x 的最短路不可能和 v 到 y 的最短路一样长。

题六　证明 Peterson 图不是 H 图。

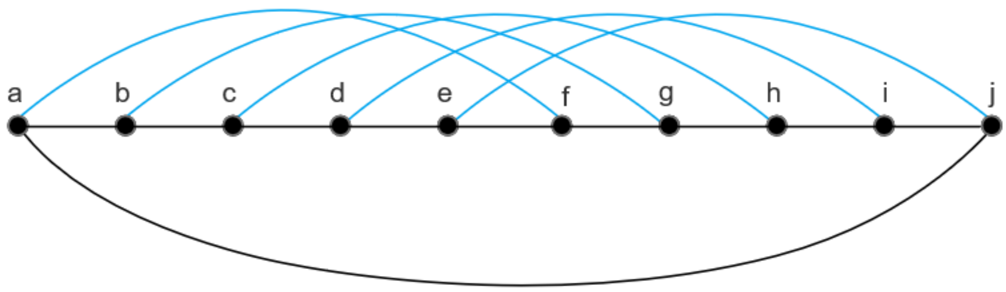


解:

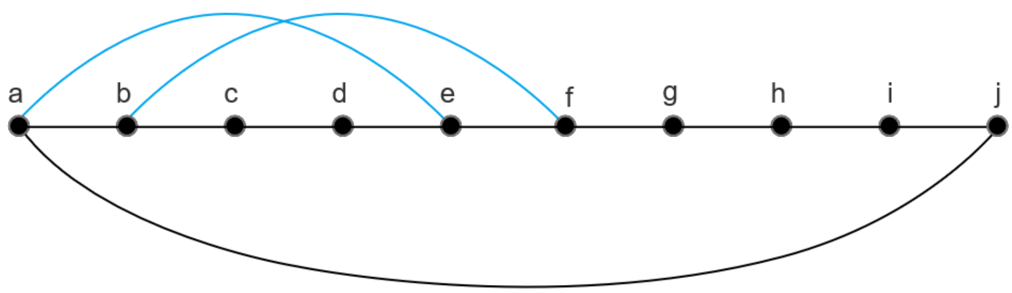
若 Peterson 图是 H 图，则必存在 H 圈，如下所示。



由于 Peterson 图的每个点和 3 条边相连，除了在 H 圈中的 2 条边外，每个点有 1 条边不在回路中。由于 Peterson 图有 15 条边，其中 10 条在 H 圈中，因此剩余的 5 条边一定是 Peterson 图的一个匹配。又由于 Peterson 图中不存在长度为 3 或 4 的环，因而每条匹配边两端点在 H 圈中的距离一定是 4 或 5。如果匹配边端点距离全是 5，则有回路 a-b-g-f-a，长度为 4，矛盾。



因此必有一条匹配边端点距离是 4，不妨设 b-f 相连，则 a-e 相连（有回路 a-b-f-e-a，长度为 4）或 a-g 相连（有回路 a-b-f-g-a，长度为 4），矛盾。



因此 Peterson 图不存在 H 圈，故不是 H 图。

题七 对 $n \geq 4$，如果 n 阶完全图 K_n 可以被划分成边不交的长度为 4 的圈，证明 $n = 1 \bmod 8$。

题八　给定一棵树 T 以及 T 的 k 棵子树 $T_1, T_2, \cdots, T_k$，已知这 k 棵子树两两均有公共顶点，即对任意 $1 \le i < j \le k$ 有 $V(T_i) \cap V(T_j) \neq \emptyset$，证明 $V(T_1) \cap V(T_2) \cap \cdots \cap V(T_k) \neq \emptyset$。

解:

考虑 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ 都是非平凡的。

由题意可知，必存在子树的集合 $Q = \{T_i, i \in 1, 2, \cdots, k\}$，$|Q| \ge 2$，Q 中的子树有公共顶点。

若 $|Q| = k$，显然结论成立。

若不然，则必存在子树 $T_j, j \in 1, 2, \cdots, k$，而 T_j 和 Q 中的子树的公共顶点没有交点，记 Q 中子树的一个公共顶点为 v，T_j 和 Q 中任意 2 棵子树的公共顶点分别为 v_1、v_2，$v_1 \neq v_2 \neq v$，则 v_1 到 v_2、v_2 到 v、v 到 v_1 之间有唯一的路径，它们构成了一个环，与树的性质相矛盾，因此结论成立。

题九　C 为简单图 G 的一个点不重复的圈，已知有一条长度为 k 的路 P 连接 C 上的两个顶点 x 与 y，证明 G 包含一条长度至少为 $\sqrt{2k}$ 的点不重复的圈。

题十　证明对于如下图，如果 $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$，Ford-Fulkerson 最大流算法可能永远不会终止。