图论及其应用：第三次作业

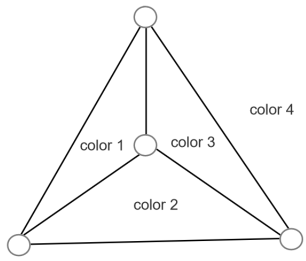
请回答任意五题，将答案于北京时间六月三十日午夜前发送至2160853158@qq.com，邮件题目请注明姓名学号

题一　最多可以将地球分成几个区域，使任何两个区域都相邻。

证明： 最多可分为 4 个区域。

设该图为 G，由定理可知（h16），图 G 可球面嵌入当且仅当 G 可平面嵌入，故问题转化为可以将平面图分成几个区域，使任何两个区域都相邻。

当分为 4 个区域时，如下图所示，显然满足条件。



若分为 5 个区域时，由对偶图的性质可知问题可转化为点着色问题，求出 $k=5$ 的一种着色方案，使得图中任意一个顶点和其他 4 种颜色的顶点相邻。设 π 是 G 的一种 5 着色方案，对顶点 v，v 在 π 有 4 个不同颜色的邻居，不失一般性，设 $\pi(x_i)=i$，记 $H(i,j)$ 为着 i 和着 j 色的点在 G 中导出子图。由于图中任意一个顶点和其他 4 种颜色的顶点相邻，必存在 x_1，x_3 属于 $H(1,3)$ 的相同连通分支，x_2，x_4 属于 $H(2,4)$ 的相同连通分支，$H(1,3)$ 和 $H(2,4)$ 相交，与 G 是平面图这一条件矛盾。大于 5 个区域时条件更强，故最多只可分为 4 个区域。

题二　证明有 10 个顶点的 5 正则图不是平面图。

证明： 对于有 10 个顶点的 5 正则图来说

$$m=\frac{5\times 10}{2}=25>3n-6=3\times 10-6=24$$

因此有 10 个顶点的 5 正则图不是平面图。

题三　考察图 $G\triangleq(V,E)$，记 $\chi(G)$ 为 G 的点色数，证明：

- 如果 $\forall v\in V:\chi(G-v)=\chi(G)-1$，$G$ 连通；
- 如果 $\forall x,y\in V:\chi(G-x-y)=\chi(G)-2$，$G$ 是完全图。

证明：

- 如果 $\forall v \in V : \chi(G-v) = \chi(G) - 1$，$G$ 连通；

先证明图的色数等于其所有连通分量色数的最大值。

记图 G 的色数最大的连通分量为 G_1，则 $\chi(G_1) = \chi(G)$，否则，G 中的其他连通分量存在 G_1 的顶点所不具有的颜色，可以将这些顶点染成 G_1 中有而它们所在的连通分量没有的颜色，否则这些点所在的连通分量具有比 G_1 更多的颜色，G_1 就不是图 G 的色数最大的连通分量，与假设矛盾。

对题目使用反证法，若 G 不连通，则对色数最大的连通分量以外的点 v，有 $\chi(G-v) = \chi(G)$，与假设矛盾，故得证。

- 如果 $\forall x, y \in V : \chi(G-x-y) = \chi(G) - 2$，$G$ 是完全图。

若 G 不是完全图，则存在顶点 $x, y \in V$，而边 $xy \notin E$，图 $G-x-y$ 可被 $\chi(G-x-y)$ 着色，将 x, y 都染成一种 $G-x-y$ 没有的颜色加入图中，这是 G 的一种正常着色方案，因此 $\chi(G) \leq \chi(G-x-y) + 1 < \chi(G-x-y) + 2$，即 $\chi(G-x-y) > \chi(G) - 2$，与条件矛盾，因此 G 一定是完全图，得证。

题四　图 G 有 n 个顶点，记 $\bar{G}$ 为 G 的补图，证明：

- $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$；
- $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$。

证明：

- $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$

设 G 的一种着色方案将 V 染成 $\chi(G)$ 种颜色，根据鸽笼原理，必存在至少 $n/\chi(G)$ 个点被染成了同一种颜色，这 $n/\chi(G)$ 个点互不相邻，因此在 $\bar{G}$ 中，这 $n/\chi(G)$ 个点的 $\bar{G}$ 导出子图为 $n/\chi(G)$ 个顶点的完全图，因此 $\chi(\bar{G}) \geq n/\chi(G)$，即 $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$。

- $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$

当 $n = 1$ 时，该式平凡成立。

假设在对 n 个顶点的图 G 该式成立，对 $n+1$ 个顶点的图 G'，考虑 $\chi(G) + \chi(\bar{G}) = n + 1$ 的情况（$\chi(G) + \chi(\bar{G}) < n + 1$ 时易证），若其不满足该式，则有 $\chi(G') + \chi(\bar{G}') > n + 1 + 1$，从 G' 中删除一个点，删除后 $\chi(G')$ 和 $\chi(\bar{G}')$ 都减小了，即这个点对 $\chi(G')$ 和 $\chi(\bar{G}')$ 均贡献 1，下面来说明这种情况不存在。

设这个点为 v，若 v 对 $\chi(G')$ 贡献 1，说明 G' 中仅有一个该颜色的点，它有 $\chi(G)$ 个不同颜色的邻居，故 $d(v) \geq \chi(G)$，因此 v 在 $\bar{G}'$ 中的度数 $d'(v) \leq n - \chi(G)$，由假设设 $\chi(G) + \chi(\bar{G}) = n + 1$ 可知设 $\chi(\bar{G}) = n + 1 - \chi(G)$，因此

$$d'(v) \leq n - \chi(G) < n + 1 - \chi(G) = \chi(\bar{G})$$

v 在 $\bar{G}'$ 中不可能有 $\chi(\bar{G})$ 个不同颜色的邻居，即 v 对 $\chi(\bar{G}')$ 的大小没有贡献，这种情况不可能发生。

归纳可得，上式对任意阶数都成立，得证。

题五　3 正则图 G 的边色数为 4，证明 G 不是 H 图。

证明： 假设图 G 是 3 正则图，边色数为 4，若 G 是 H 图，则存在 H 圈，使用 2 种颜色将 H 圈上的边交替染色，此时未染色的边构成了 G 的一个完美匹配，它们互不相邻，故可以被染成同一种颜色，构成了 G 边的 3 着色方案，与假设矛盾，因此 G 不可能为 H 图。

题六　给定一个点色数为 k 的 k 染色方案，证明对任何一种颜色 c，均存在 c 颜色的顶点，其邻居包含所有其他颜色。

证明： 反证法。给定一个点色数为 k 的图 G 的 k 染色方案，若 G 中存在一种颜色 c，对所有 c 颜色的点，它至少缺少一种颜色的邻居。对每一个 c 颜色的点，可将它的颜色重新染成和它以及它所有邻居都不同的颜色，由于它至少缺少一种颜色的邻居，必存在和它以及它的邻居都不同的颜色，所以这是能够办到的，操作完成后得到图 G 的一种 $k-1$ 染色方案，与假设矛盾，得证。

题七　给定 n 个顶点，m 条边的图 G，证明 G 包含一个偶子图 H，其边的数目至少为 $\dfrac{2\lfloor n^2/4\rfloor m}{n(n-1)}$。

题八　证明任何平面图最少有 4 个度数小于 6 的顶点。

题九　对 $p=1/n$ 的随机图 $G_{n,p}$，证明 $\forall\epsilon>0$，大概率不存在多于 $(1+\epsilon)n/2$ 个顶点的连通分支。