由求出的$PA=LU$分解，求解方程组并执行两步回代过程。

(a) $\begin{bmatrix}4&2&0\\4&4&2\\2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

解：使用置换矩阵P记录已经累计进行的行交换，第一列消元

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}4&2&0\\4&4&2\\2&2&3\end{bmatrix}\rightarrow \text{第}2\text{行减去}1\times\text{第}1\text{行}\rightarrow\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\2&2&3\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\2&2&3\end{bmatrix}\rightarrow \text{第}3\text{行减去}\frac{1}{2}\times\text{第}1\text{行}\rightarrow\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\0&1&3\end{bmatrix}$$

第二列消元

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\0&1&3\end{bmatrix}\rightarrow \text{第}3\text{行减去}\frac{1}{2}\times\text{第}2\text{行}\rightarrow\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}$$

这就完成了消元，可得到$PA=LU$分解

$$\underset{P}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix}4&2&0\\4&4&2\\2&2&3\end{bmatrix}}=\underset{L}{\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}}\underset{U}{\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}}$$

回代的过程分两个步骤：

(1) $Lc=Pb$得到c ，其中$b=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$
$$\begin{cases}c_1=2\\1\times2+c_2=4\rightarrow c_2=2\\\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2+c_3=6\rightarrow c_3=4\end{cases}$$

可得$c_1=2$，$c_2=2$，$c_3=4$，所以方程组的解为$c=\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$

(2) $Ux=c$得到x

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

从底下的方程开始

$$\begin{cases} 2x_3 = 4 \to x_3 = 2 \\ 2x_2 + 2 \times 2 = 2 \to x_2 = -1 \\ 4x_1 + 2 \times (-1) = 2 \to x_1 = 1 \end{cases}$$

可得$x_1 = 1$，$x_2 = -1$，$x_3 = 2$，所以方程组的解为$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

验证：

$$Ax = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times 2 \\ 4 \times 1 + 4 \times (-1) + 2 \times 2 \\ 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = b$$

经验证，$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$是该方程组的解。

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \\ 3 \end{bmatrix}$

解：首先，1，2两行需要交换，根据部分选主元法：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to 交换第1行和第2行 \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

使用置换矩阵P记录已经累计进行的行交换，下面进行两次行运算

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to 第2行减去(-\frac{1}{2}) \times 第1行 \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to 第3行减去(-\frac{1}{2}) \times 第1行 \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

第2，3两行需要交换

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \to 交换第1行和第2行 \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

再进行运算

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \to 第3行减去\frac{1}{5} \times 第2行 \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

这就完成了消元，可得到$PA=LU$分解

$$\underset{P}{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix}-1&0&1\\2&1&1\\-1&2&0\end{bmatrix}}=\underset{L}{\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{5}&1\end{bmatrix}}\underset{U}{\begin{bmatrix}2&1&1\\0&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{7}{5}\end{bmatrix}}$$

回代的过程分两个步骤：

(1) $Lc=Pb$得到c ，其中$b=\begin{bmatrix}-2\\17\\3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\17\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\3\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1=17\\-\dfrac{1}{2}\times17+c_2=3\to c_2=\dfrac{23}{2}\\-\dfrac{1}{2}\times17+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{23}{2}+c_3=-2\to c_3=\dfrac{21}{5}\end{cases}$$

可得$c_1=17$，$c_2=\frac{23}{2}$，$c_3=\frac{21}{5}$，所以方程组的解为$c=\begin{bmatrix}17\\\frac{23}{2}\\\frac{21}{5}\end{bmatrix}$.

(2) $Ux=c$得到x

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\0&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{7}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\\frac{23}{2}\\\frac{21}{5}\end{bmatrix}$$

从底下的方程开始

$$\begin{cases}\dfrac{7}{5}x_3=\dfrac{21}{5}\to x_3=3\\\dfrac{5}{2}x_2+\dfrac{1}{2}\times3=\dfrac{23}{2}\to x_2=4\\2x_1+1\times4+1\times3=17\to x_1=5\end{cases}$$

可得$x_1=5$，$x_2=$4，$x_3=3$，所以方程组的解为$x=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}$.

验证：

$$Ax=\begin{bmatrix}-1&0&1\\2&1&1\\-1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)\times5+0\times4+1\times3\\2\times5+1\times4+1\times3\\(-1)\times5+2\times4+0\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\17\\3\end{bmatrix}=b$$

经验证，$x=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}$是该方程组的解。