

求所给矩阵的LU分解，并用矩阵相乘检验

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

解：

(a) 消去过程如下：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \text{第2行减去第1行的2倍} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \text{第3行减去第1行的1倍} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

把1放在主对角线上，然后乘子按消去时它们所在的特定位置放在下三角矩阵中。得到

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

现在检查

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A$$

结果符合预期。

(b) 消去过程如下：

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{第2行减去第1行的1倍} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \text{第3行减去第1行的}\frac{1}{2}\text{倍} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \text{第3行减去第2行的}\frac{1}{2}\text{倍} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

把1放在主对角线上，然后乘子按消去时它们所在的特定位置放在下三角矩阵中。得到

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

现在检查

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

结果符合预期。

(c)消去过程如下：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} &\rightarrow \text{第3行减去第1行的1倍} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \text{第3行减去第2行的2倍} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \text{第4行减去第2行的1倍} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U \end{aligned}$$

把1放在主对角线上，然后乘子按消去时它们所在的特定位置放在下三角矩阵中。得到

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

现在检查

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A$$

结果符合预期。