Доказательства свойств для множества Мандельброта

Формула: $z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0$

1 свойство

Симметрия относительно вещественной оси

Доказательство:

Пусть дана последовательность $\{z_n\}$ для параметра c

$$z_0 = 0, z_{n+1} = z_n^2 + c$$

По определению, $c \in M$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\mid z_n \mid\}$ ограничена.

Рассмотрим последовательность $\{k_n\}$ для сопряженного параметра $\overline{c}$:
$k_0 = 0$
$k_{n+1} = k_n^2 + \overline{c}$

Нужно доказать, что $k_n = z_n$ для всех $n \geq 0$. Используем метод математической индукции

1. База индукции:

   $$k_0 = 0 \quad \overline{z_0} = \overline{0} = 0$$

   Мы видим, что $k_0 = \overline{z_0}$. База индукции есть
2. Индукционный переход:
   Допустим, что $k_i = \overline{z_i}$. Рассмотрим $k_{i+1} = k_i^2 + \overline{c}$:
   Используя индуктивное предположение подставим $\overline{z_i} = k_i$:

   $$k_{i+1} = (\overline{z_i})^2 + \overline{c}$$

   Так как $\overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{c_1 + c_2}$, а $\overline{z^2} = \overline{z}^2$ Получаем, что

   $$k_{i+1} = \overline{z_i^2 + c}$$

Таким образом
$k_i = \overline{z_i}$

Мы доказали, что последовательность для $\overline{c}$ является последовательностью сопряженных значений для c: $k_n = \overline{z_n}$.
Сравним их модули:
$\mid k_n \mid = \mid \overline{z_n} \mid$
Так как $\mid \overline{z_n} \mid = \mid z_n \mid$ получаем, что $\mid k_n \mid = \mid z_n \mid$

Таким образом, последовательность $\{\mid z_n \mid\}$ ограничена тогда и только тогда, когда последовательность $\{\mid k_n \mid\}$ ограничена.

По определению множества Мандельброта:

$c \in M \iff \{\mid z_n \mid\}$ ограничена ⇔ $\{\mid k_n \mid\}\text{ограничена} \iff \overline{c} \in M$
Это доказывает симметрию M относительно вещественной оси.

2 свойство

Если $\mid c \mid > 2$, то c не принадлежит множеству Мандельброта (с $\notin M$).

Определение: $c \in M$ тогда и только тогда, когда последовательность $z_{n+1} = z_n^2 + c$, где $z_0 = 0$, остается ограниченной, то есть $\{\mid z_n \mid\}$ ограничена.

При $\mid c \mid > 2$. Докажем, что $\{\mid z_n \mid\}$ неограничена.

Докажем, что если $\mid z_n \mid$ достигает $\mid c \mid$, то последовательность начинает строго монотонно расти.

Рассмотрим

$$\mid z_{k+1} \mid = \mid z_k^2 + c \mid \geq \mid z_k^2 - c \mid \geq \mid \mid z_k^2 \mid - \mid c \mid \mid$$

Нам необходимо избавиться от внешнего модуля, доказав, что внутреннее выражение неотрицательно:

$$\mid z_k^2 \mid - \mid c \mid \geq 0$$

Мы ведем доказательство при условии, что $\mid z_k \mid \geq \mid c \mid$.
Поскольку $\mid c \mid > 2$, то $\mid z_k \mid \geq \mid c \mid \geq 2$. Умножим неравенство $\mid z_k \mid \geq \mid c \mid \text{ на } \mid z_k \mid$
:

$$| z_k |^2 \geq | c | \cdot | z_k |$$

Поскольку $| z_k | \geq 2 > 1$, то $| zk | \cdot | c | > | c |$. Следовательно, $|z_k|^2 > | c |$, что означает

$$|z_k|^2 - | c | \geq 0$$

Таким образом, внешний модуль снимается строго:

$$|z_{k+1}| \geq |z_k|^2 - | c |$$

Доказательство монотонного роста

Нам нужно доказать, что если $| z_k | \geq | c |$, то $| z_{k+1} | > | z_k |$. Это эквивалентно неравенству:

$$|z_k|^2 - | c | > | z_k | \Longleftrightarrow | z_k | (| z_k | -1) > | c |$$

Поскольку $| z_k | \geq | c |$ и $| c | > 2$:

1. Оценка первого множителя: $| z_k | \geq | c |$.
2. Оценка второго множителя: $| z_k | -1 \geq | c | -1$. Поскольку $| c | > 2$, то $| c | -1 > 1$.

Подставим минимальные оценки:

$$| z_k | (| z_k | -1) > | c | \cdot 1 = | c |$$

Вывод:
Если $| z_k | \geq | c |$, то $| z_{k+1} | > | z_k |$ и $| z_{k+1} | > | c |$.

Доказательство неограниченности

Поскольку $| c | > 2$, определим константу λ:

$$\lambda = | c | -1$$

Очевидно, $\lambda > 1$.
Используя доказанное выше неравенство $| z_{n+1} | \geq |z_n^2| - | c |$, мы выделяем множитель $| z_n |$:

$$| z_{n+1} | \geq | z_n | (| z_n | - 1) + (| z_n | - | c |)$$

Поскольку $| z_n | \geq | c |$ для $n \geq 1$:

1. Отбрасываем положительный член $| z_n | - | c | \geq 0$:
   $| z_{n+1} | \geq | z_n | (| z_n | - 1)$
2. Оцениваем множитель:
   Так как $| z_n | \geq | c |$, то $| z_n | - 1 \geq | c | - 1 = \lambda$.
   $| z_{n+1} | \geq | z_n | \cdot \lambda$

Мы начинаем с первого члена $| z_1 | = | c |$ (который удовлетворяет условию $| z_1 | \geq | c |$), и применяем неравенство $| z_{k+1} | \geq \lambda | z_k |$ последовательно

- k=1: $| z_2 | \geq \lambda | z_1 |$
- k=2: $| z_3 | \geq \lambda | z_2 | \geq \lambda(\lambda | z1 |) = \lambda^2 | z1 | \backslash$
- ...
- k=n-1 $| z_n | \geq \lambda^{n-1} | z_1 |$

Подставляя $| z_1 | = | c |$, получаем:
$| z_n | \geq \lambda^{n-1} | c |$

Вывод

Поскольку λ — это константа, строго большая 1, и $| c |$ — положительное число, показатель λ^{n-1} стремится к бесконечности при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} | z_n | \geq \lim_{n \to \infty} | c | \cdot \lambda^{n-1}$$

Последовательность $\{| z_n |\}$ неограничена. Следовательно, $|c| > 2$ не принадлежит множеству Мандельброта.