7. Матрицы, определители и системы линейных уравнений

Матрицы. Сложение, умножение. Свойства. Кольцо квадратных матриц $M_n(K)$.

Определение

- Пусть K — коммутативное кольцо, $m, n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $M_{m,n}(K)$ множество матриц с m строками и n столбцами, коэффициенты которых принадлежат кольцу K.
- При $m = n$ (для квадратных матриц $n \times n$) используют обозначение $M_n(K)$ вместо $M_{n,n}(K)$.
- Матрица $A \in M_{m,n}(K)$ имеет вид $\{a_{i,j}\}_{i\in\{1,...,m\},j\in\{1,...,n\}}$, где все $a_{i,j} \in K$.

Сложение матриц

- Для $A, B \in M_{m,n}(K)$ зададим матрицу $A + B \in M_{m,n}(K)$ формулой:

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ (A + B)_{i,j} := a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Умножение матриц

- Для $A \in M_{m,n}(K)$ и $B \in M_{n,\ell}(K)$ зададим матрицу $A \cdot B \in M_{m,\ell}(K)$ формулой:

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, \ell\},\ (A \cdot B)_{i,j} := \sum_{s=1}^{n} a_{i,s} b_{s,j}.$$

Свойства матриц

- Очевидно, сложение матриц ассоциативно и коммутативно (так как сложение поэлементное, свойства наследуются из K).
- 0-матрица имеет все коэффициенты, равные 0.
- Обратная по сложению матрица $-A$ задается формулой:

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ (-A)_{i,j} := -a_{i,j}.$$

Свойство 1

- Умножение матриц ассоциативно.

Доказательство

- Пусть $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,\ell}(K), C \in M_{\ell,k}(K)$.
- Так как умножение в K ассоциативно, имеем:

$$((ab)c)_{s,t} = \sum_{j=1}^{\ell} (ab)_{s,j} c_{j,t} = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{s,i} b_{i,j} \right) \cdot c_{j,t} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\ell} a_{s,i} \cdot b_{i,j} \cdot c_{j,t} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} \cdot (bc)_{i,t} = (a(bc))_{s,t}.$$

- Таким образом, соответствующие коэффициенты матриц $(AB)C$ и $A(BC)$ одинаковы.

Определение

- Пусть K — кольцо с 1. Определим матрицу $E_n \in M_n(K)$ формулами:

$$a_{i,i} = 1, \quad a_{i,j} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Свойство 2

- Для любой матрицы $B \in M_{n,\ell}(K)$ выполнено $E_n \cdot B = B$.
- Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ выполнено $A \cdot E_n = A$.
- Оба равенства легко проверяются.

Теорема 1

- Пусть K — коммутативное кольцо, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $M_n(K)$ — кольцо. Если K — кольцо с 1, то и $M_n(K)$ тоже.

Доказательство

- Сложение коммутативно и ассоциативно, нейтральный элемент (0-матрица) и обратный элемент по сложению определены.
- Умножение ассоциативно (Свойство 1).
- Если K — кольцо с 1, то $E_n \in M_n(K)$ — нейтральный элемент по умножению (Свойство 2).
- Осталось проверить дистрибутивность. Пусть $A, B, C \in M_n(K)$.

$$((a+b)c)_{s,t} = \sum_{i=1}^{n} (a+b)_{s,i} c_{i,t} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} c_{i,t} + \sum_{i=1}^{n} b_{s,i} c_{i,t} = (ac)_{s,t} + (bc)_{s,t}.$$

- Таким образом, соответствующие коэффициенты матриц $(A+B)C$ и $AC+BC$ одинаковы, а значит:

$$(A+B)C = AC + BC.$$

- Дистрибутивность $C(A+B) = CA + CB$ проверяется аналогично.

Определитель. Определение и свойства (1 элементарное преобразование, определитель с двумя одинаковыми строками)

Определитель

Определение

Пусть K — коммутативное кольцо, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$.
Тогда **определитель** матрицы A — это

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

где $\operatorname{sign}(\sigma) := (-1)^{I(\sigma)}$ — **знак** подстановки σ.

- Строки матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ обозначаются $A_1, \ldots, A_m$, а столбцы — $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$.
- Столбцы и строки удобно рассматривать как вектора из линейных пространств K^n и K^m соответственно.
- Определитель квадратной матрицы $A \in M_n(K)$ удобно рассматривать как функцию от n аргументов — строк этой матрицы: $\det(A_1, \ldots, A_n)$.
- Можно рассматривать определитель и как функцию от столбцов матрицы: $\det(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$.

Элементарные преобразования матриц

1. Поменять местами две строки.
2. К одной строке прибавить другую, умноженную на $\lambda \in K$.
3. Умножить строку на $\lambda \in K$, отличное от 0.

- Аналогичные элементарные преобразования можно выполнять и со столбцами матриц.

Лемма 1

Все три элементарных типа преобразования обратимы, то есть имеют обратные элементарные преобразования.

Доказательство

- Элементарное преобразование типа (1) само себе обратно.
- Рассмотрим элементарное преобразование типа (2), пусть мы к i-й строке прибавили j-ю, умноженную на λ.
  - Тогда обратное преобразование — прибавить к i-й строке j-ю, умноженную на $-\lambda$.
- Наконец, обратное преобразование к умножению строки на $\lambda \neq 0$ — умножить её же на λ^{-1}.

Свойства определителя

Свойство 1

При элементарном преобразовании типа I определитель меняет знак.

Доказательство

- Пусть $A, A' \in M_n(K)$, причём A' получена из A перестановкой i-й и j-й строк ($A'_i = A_j$, $A'_j = A_i$, остальные строки у матриц совпадают).

- Для $\sigma \in S_n$ положим $\sigma' := \sigma \cdot (ij)$. Понятно, что σ пробегает все значения из S_n, если и только если σ' пробегает все значения из S_n. По Лемме 6.8, $\operatorname{sign}(\sigma') = -\operatorname{sign}(\sigma)$. Тогда

$$\det(A') = \sum_{\sigma' \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma') \cdot a'_{1,\sigma'(1)} \dots a'_{i,\sigma'(i)} \dots a'_{j,\sigma'(j)} \dots a'_{n,\sigma'(n)} =$$
$$\sum_{\sigma' \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma') \cdot a_{1,\sigma'(1)} \dots a_{j,\sigma'(i)} \dots a_{i,\sigma'(j)} \dots a_{n,\sigma'(n)} =$$
$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma') \cdot a_{1,\sigma(1)} \dots a_{i,\sigma(i)} \dots a_{j,\sigma(j)} \dots a_{n,\sigma(n)} =$$
$$-\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \dots a_{i,\sigma(i)} \dots a_{j,\sigma(j)} \dots a_{n,\sigma(n)} = -\det(A). \quad \square$$

- 2 сумма $->$ 3 сумма У нас есть биекция между σ и σ', так что можно их подменить и как бы кайф

Свойство 2 определителя

Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен 0.

Доказательство

- Пусть $A_i = A_j$. Тогда перемена местами этих двух строк не меняет матрицу, но должна по Свойству 1 менять знак определителя.
- Следовательно, $\det(A) = 0$.

3. Свойства определителя: умножение строки на число, разложение по строке, 2 элементарное преобразование.

Свойство 3

Пусть $A, A' \in M_n(K)$, причём A' получена из A умножением i-й строки на $\lambda \in K$ ($A'_i = \lambda A_i$, остальные строки у матриц совпадают). Тогда $\det(A') = \lambda \cdot \det(A)$.

Доказательство

$$\det(A') = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a'_{n,\sigma(n)}.$$

- Подставляя $a'_{i,\sigma(i)} = \lambda \cdot a_{i,\sigma(i)}$, получаем:

$$\det(A') = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots (\lambda \cdot a_{i,\sigma(i)}) \cdots a_{n,\sigma(n)} = \lambda \cdot \det(A).$$

Свойство 4

Определитель матрицы с нулевой строкой равен 0.

Свойство 5

(Разложение определителя по строке.) Пусть $A, A', A'' \in M_n(K)$, причём эти матрицы совпадают во всех строках, кроме i-й, а $A_i = A'_i + A''_i$. Тогда

$$\det(A) = \det(A') + \det(A'').$$

Доказательство

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots (a'_{i,\sigma(i)} + a''_{i,\sigma(i)}) \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a'_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a''_{1,\sigma(1)} \cdots a''_{i,\sigma(i)} \cdots a''_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \det(A') + \det(A'').$$

$\square$

Свойство 6

При элементарном преобразовании типа II определитель сохраняется.

Доказательство

- Пусть $\lambda \in K$, $A, A' \in M_n(K)$, причём A' получена из A преобразованием i-й строки: $A'_i = A_i + \lambda A_j$ (остальные строки у матриц совпадают, $j \neq i$).
- Пусть матрица A^* совпадает с A во всех строках, кроме i, а $A^*_i = \lambda A_j$.
- По Свойствам 3 и 2:

$$\det(A^*) = \det(A^*_1, \ldots, A^*_i, \ldots, A^*_j, \ldots, A^*_n) = \det(A_1, \ldots, \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \lambda \cdot \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) =$$

- По Свойству 5:

$$\det(A') = \det(A'_1, \ldots, A'_i, \ldots, A'_j, \ldots, A'_n) = \det(A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) +$$

Определитель транспонированной матрицы.

Определение

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$. **Транспонированная матрица** $A^T \in M_{n,m}(K)$ – это матрица с элементами $a^T_{i,j} := a_{j,i}$ (для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$).

Теорема 2

Пусть $A \in M_n(K)$. Тогда $\det(A^T) = \det(A)$.

Доказательство

- По определению:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^T_{1,\sigma(1)} \cdots a^T_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} . (*)$$

- Чтобы посчитать $\det(A)$, нужно сложить те же произведения, что в $(*)$, вот только с какими знаками?
- Нужно переупорядочить $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ так, чтобы первые индексы шли в порядке $1, 2, \ldots, n$ (а не $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$).
- Это означает, что к первым индексам нужно применить подстановку σ^{-1}, она же применится ко вторым индексам, и мы получим $a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$.
- Понятно, что σ пробегает все значения из S_n, если и только если σ^{-1} пробегает все значения из S_n.
- Так как по Теореме 6.3, $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)$, мы можем продолжить $(*)$:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \det(A).$$

$\square$

Замечание

- Можно определить аналоги элементарных преобразований строк для столбцов.
- По Теореме 2 понятно, что аналоги всех свойств $1-6$ определителя верны и для столбцов вместо строк.

Минор, алгебраическое дополнение. Сумма произведений элементов строки матрицы на алгебраические дополнения этой (другой) строки (без доказательства теоремы Лапласа).

Минор и алгебраическое дополнение

Определение

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$ и $k \leq \min(m,n)$.

- Выделим строки с номерами $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и столбцы с номерами $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.
- На их пересечении находится k^2 элементов, составим из них матрицу, не меняя порядка строк и столбцов. Определитель этой матрицы Δ называется минором порядка k.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$, $k < n$, а Δ — минор со строками $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и столбцами $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

- Вычеркнем указанные строки и столбцы, после чего в остальных $n-k$ строках и $n-k$ столбцах аналогично определим минор Δ' порядка $n-k$ — это дополнительный минор для Δ.
- Алгебраическое дополнение минора Δ — это

$$A_\Delta = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\Delta'.$$

Теорема Лапласа

Теорема 3

Пусть $A \in M_n(K)$, $k < n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Тогда $\det(A)$ равен сумме $\Delta \cdot A_\Delta$ по всем минорам Δ в строках $i_1, i_2, \ldots, i_k$ (при всех возможных выборах k столбцов).

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$. Для $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ обозначим через $A_{i,j}$ **алгебраическое дополнение** элемента $a_{i,j}$ (как минора порядка 1). Это минор, полученный из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Следствие 1

Пусть $A \in M_n(K)$, $s, t \in \{1, \ldots, n\}$, $s \neq t$. Тогда:

1. $\sum_{i=1}^n a_{s,i}A_{s,i} = \det(A)$;
2. $\sum_{i=1}^n a_{t,i}A_{s,i} = 0$.

Доказательство

1. Теорема 3 для разложения по s-й строке.
2.
   - Пусть A' получена из A заменой s-й строки на t-ю (то есть $A'_s = A_t$ и $A'_j = A_j$ при $j \neq s$).
   - Тогда $A'_{s,i} = A_{s,i}$ и $a'_{s,i} = a_{t,i}$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   - Так как матрица A' имеет две одинаковые строки, по пункту 1 имеем:

$$0 = \det(A') = \sum_{i=1}^n a'_{s,i}A'_{s,i} = \sum_{i=1}^n a_{t,i}A_{s,i}.$$

Замечание

- Утверждения, аналогичные Теореме 3 и Следствию 1, верны и для столбцов вместо строк (транспонирование матрицы меняет местами строки и столбцы, но не меняет определитель).

- Таким образом, определитель можно раскладывать как по строкам, так и по столбцам.

Теорема Лапласа.

Теорема 3

Пусть $A \in M_n(K), k < n, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Тогда $\det(A)$ равен сумме $\Delta \cdot A_\Delta$ по всем минорам Δ в строках $i_1, i_2, \ldots, i_k$ (при всех возможных выборах k столбцов).

Доказательство

Утверждение 1

Сумма $\Delta \cdot A_\Delta$ по всем минорам Δ в строках $i_1, \ldots, i_k$ — это в точности сумма (с некоторыми знаками) произведений, входящих в $\det(A)$.

Доказательство

- Рассмотрим

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

  и конкретное произведение $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$, входящее в определитель.
- Для каждой из строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ отметим столбец с номером $\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k)$ соответственно.
- Мы получили k столбцов, в которых расположены перемножаемые элементы, упорядочим их по возрастанию — пусть получится $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.
- Обозначим через Δ минор со строками $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Тогда произведение $a_{i_1,\sigma(i_1)} \cdots a_{i_k,\sigma(i_k)}$ входит в минор Δ (с некоторым знаком).
- Элементы вида $a_{s,\sigma(s)}$ при $1 \le s \le n, s \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ попадут не в столбцы с номерами $j_1, \ldots, j_k$, следовательно, произведение этих $n-k$ элементов войдет в дополнительный минор Δ', а значит, и в алгебраическое дополнение A_Δ (опять же, с некоторым знаком).
- Таким образом, $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ входит в произведение $\Delta \cdot A_\Delta$ для столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$ и не входит в другие аналогичные слагаемые.
- Наоборот, рассмотрим минор Δ в столбцах $j_1, \ldots, j_k$ и любое произведение из $\Delta \cdot A_\Delta$.
- В этом произведении в каждой строке взято ровно по одному элементу матрицы (для строк $i_1, \ldots, i_k$ — в миноре Δ, для остальных строк — в A_Δ), в каждом столбце взято тоже ровно по одному элементу матрицы (для столбцов $j_1, \ldots, j_k$ — в миноре Δ, для остальных столбцов — в A_Δ).
- Значит, это произведение с некоторым знаком входит в $\det(A)$, и мы получаем обратное соответствие.

Утверждение 2

Для каждого минора Δ в строках $i_1, \ldots, i_k$ все произведения из $\Delta \cdot A_\Delta$ имеют такой же знак, какой они имеют в $\det(A)$.

Доказательство

- Рассмотрим конкретный минор Δ в строках $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и столбцах $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

- Для удобства мы переделаем элементарными преобразованиями матрицу A в матрицу B так, чтобы минор Δ попал в верхний левый угол, и при этом порядок строк и порядок столбцов из Δ не поменялся, а также порядок остальных строк и порядок остальных столбцов не поменялся.

- Сначала займемся строками: строка i_1 всплывает наверх (на место строки 1), меняясь местами последовательно со строками $i_1 - 1, \ldots, 2, 1$ — всего $i_1 - 1$ обмен.

- Потом аналогично строка i_2 всплывает на 2 место, делая $i_2 - 2$ обмена, и так далее, строка i_k всплывает на k место за $i_k - k$ обменов.

- Аналогично, столбцы $j_1, \ldots, j_k$ двигаются налево, делая $j_1 - 1, \ldots, j_k - k$ обменов.

- В итоге получилась матрица B, а каждое из выполненных элементарных преобразований меняло знак определителя, поэтому:

$$\det(B) = (-1)^{(i_1-1)+\cdots+(i_k-k)+(j_1-1)+\cdots+(j_k-k)} \cdot \det(A) = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \cdot \det(A).$$

- В этой матрице минор Δ занимает левый верхний угол, а его дополнительный минор — по построению, это по-прежнему Δ' — в правом нижнем углу.

- Поэтому алгебраическое дополнение Δ в матрице B считается как:

$$B_\Delta = (-1)^{1+\cdots+k+1+\cdots+k} \cdot \Delta' = \Delta' = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \cdot A_\Delta.$$

- Итак:

$$\det(B) = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \cdot \det(A), \quad \Delta \cdot B_\Delta = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \cdot \Delta \cdot A_\Delta.$$

- Поэтому нам достаточно доказать Утверждение 2 для матрицы B.

- Рассмотрим $\Delta \cdot B_\Delta = \Delta \cdot \Delta'$.

- Как мы знаем:

$$\Delta = \sum_{\tau \in S_k} (-1)^{I(\tau)} b_{1,\tau(1)} \cdots b_{k,\tau(k)}.$$

- С учетом того, что строки и столбцы в Δ' имеют в B номера $k+1, \ldots, n = k + (n-k)$, этот определитель можно переписать как:

$$\Delta' = \sum_{\tau' \in S_{n-k}} (-1)^{I(\tau')} b_{k+1,k+\tau'(1)} \cdots b_{k+(n-k),k+\tau'(n-k)}.$$

- Для конкретных τ и τ' произведение:

$$b_{1,\tau(1)} \cdots b_{k,\tau(k)} b_{k+1,k+\tau'(1)} \cdots b_{k+(n-k),k+\tau'(n-k)}$$

  входит в $\det(B)$ со знаком $(-1)^{I(\sigma)}$, где σ — подстановка, переставляющая $1, \ldots, k$ как τ и переставляющая $k+1, \ldots, n = k + (n-k)$ как $k + \tau'$.

- Но инверсий между блоками из первых k чисел и последних $n-k$ чисел в σ нет (первые k чисел не превосходят k, а все следующие больше k), поэтому $I(\sigma) = I(\tau) + I(\tau')$, что нам и нужно:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)}.$$

- Из Утверждения 1 и Утверждения 2 следует Теорема.

Определитель ступенчатой матрицы.

Ступенчатые матрицы

Определение

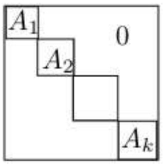
Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — квадратные матрицы, $A_i \in M_{n_i}(K), n = n_1 + \cdots + n_k$, $A \in M_n(K)$.

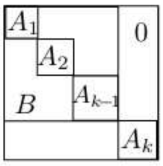
- Будем говорить, что $A \in M^+(A_1, \ldots, A_k)$, если в матрице A по диагонали расположены квадратные блоки $A_1, \ldots, A_k$, а все коэффициенты сверху от них равны 0.

- Будем говорить, что $A \in M^-(A_1, \ldots, A_k)$, если в матрице A по диагонали расположены квадратные блоки $A_1, \ldots, A_k$, а все коэффициенты снизу от них равны 0.
- Матрицы из

$$M(A_1, \ldots, A_k) := M^+(A_1, \ldots, A_k) \cup M^-(A_1, \ldots, A_k)$$

называются ступенчатыми.





Теорема 4

Пусть $A \in M(A_1, \ldots, A_k)$. Тогда

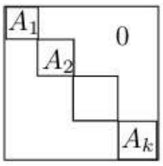
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i).$$

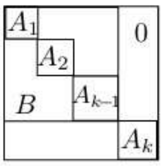
Доказательство

- Индукция по k. База для $k = 1$ очевидна.
- Переход $k - 1 \to k$. Пусть $k \geq 2$, а матрица $B \in M(A_1, \ldots, A_{k-1})$ — как на рисунке выше. Тогда $A \in M(B, A_k)$.
- Пусть $m = n_1 + \cdots + n_{k-1}$. Тогда применим теорему Лапласа для разложения матрицы A по строкам $1, \ldots, m$.
- Так как определитель матрицы с нулевым столбцом равен 0, в этих строках есть только один ненулевой минор порядка m — это $\det(B)$.
- Тогда по Теореме 3 и индукционному предположению:

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(A_k) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i).$$

$\square$





Определитель произведения матриц.

Определитель произведения матриц

Теорема 5

Пусть $A, B \in M_n(K)$. Тогда $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Доказательство

- Рассмотрим ступенчатую матрицу

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -E_n & B \end{bmatrix}.$$

(Здесь $-E_n$ — матрица с -1 по главной диагонали и остальными 0.)

- Тогда $C \in M^+(A,B)$ и $\det(C) = \det(A)\det(B)$ по Теореме 4.
- Элементарными преобразованиями столбцов типа II переведем C в матрицу $D \in M_{2n}(K)$ так, чтобы в правой нижней четверти B заменилась на нулевую матрицу.
- Для всех $k \in \{1,\dots,n\}$ столбец C_{n+k} имеет n нулей, а далее располагается столбец B_k.
- Для всех $i \in \{1,\dots,n\}$ столбец C_i сверху содержит A_i, а нижние n его элементов — это -1 на позиции $n+i$ и остальные 0.
- Для всех $k \in \{1,\dots,n\}$ проделаем следующие операции:
  - Прибавим $\sum_{i=1}^n b_{i,k} C_i$ к столбцу C_{n+k} (каждое прибавление — элементарное преобразование типа II, не меняет определитель).
  - В результате из C_{n+k} получился столбец D_{n+k}, нижние k элементов которого — нули. (Элемент $c_{n+s,n+k} = b_{s,k}$ обнуляется при прибавлении $b_{s,k}C_s$ и не меняется при остальных преобразованиях.)
  - Верхние k элементов столбца C_{n+k} были нулями. В результате преобразований для каждого $s \in \{1,\dots,n\}$ получилось:

$$d_{s,n+k} = \sum_{i=1}^n a_{s,i} \cdot b_{i,k} = (ab)_{s,k}.$$

- Таким образом, $D = \begin{bmatrix} A & AB \\ -E_n & 0 \end{bmatrix}$.
- Применим к D n элементарных преобразований столбцов типа I: поменяем местами столбцы D_k и D_{n+k} для всех $k \in \{1,\dots,n\}$.
- Получится матрица

$$D^* = \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & -E_n \end{bmatrix} \in M^-(AB, E_n).$$

- Так как каждое элементарное преобразование типа I меняет знак определителя, по Теореме 4 имеем:

$$\det(D^*) = \det(AB)\det(-E_n) = (-1)^n \det(AB),$$

и

$$\det(D^*) = (-1)^n \det(D) = (-1)^n \det(C) = (-1)^n \det(A)\det(B).$$

- Откуда следует, что $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Невырожденные (обратимые) матрицы. Матрица A обратима тогда и только тогда, когда определитель не равен 0. Обратимость матрицы, имеющей левую (правую) обратную.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$. Взаимная матрица $\tilde{A} \in M_n(K)$ задается формулой $\tilde{a}_{i,j} := A_{j,i}$ для всех $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

- Для $\lambda \in K$ и $A \in M_n(K)$ через λA обозначается матрица, полученная из A умножением всех коэффициентов на λ.

Лемма 2

Для любой матрицы $A \in M_n(K)$ выполнено:

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n.$$

Доказательство

$$(a \cdot \tilde{a})_{s,t} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} \cdot \tilde{a}_{i,t} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} \cdot A_{t,i} = \begin{cases} \det(A), & \text{при } s = t, \\ 0, & \text{при } s \neq t, \end{cases}$$

по Следствию 1. Значит, $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot E_n$.

Аналогично:

$$(\tilde{a} \cdot a)_{s,t} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{s,i} \cdot a_{i,t} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,s} \cdot a_{i,t} = \begin{cases} \det(A), & \text{при } s = t, \\ 0, & \text{при } s \neq t, \end{cases}$$

по аналогу Следствия 1 для столбцов. Значит, $\tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$.

- Матрица A — **обратимая справа**, если существует такая $B \in M_n(K)$, что $AB = E_n$.
- Матрица A — **обратимая слева**, если существует такая $C \in M_n(K)$, что $CA = E_n$.
- Обратимая и слева, и справа матрица называется **обратимой**, или **невырожденной**. Остальные матрицы — **необратимые**, или **вырожденные**.
- Если $B \in M_n(K)$ такова, что $AB = BA = E_n$, то B называется **обратной** к A и применяется обозначение $A^{-1} = B$.
- Если обратная матрица к A существует, то она единственна: мы знаем, что обратный элемент по умножению к обратимому элементу любого кольца ровно один.

Теорема 6

1. Обратимые матрицы — это в точности матрицы, имеющие ненулевой определитель.
2. Обратимая слева (или справа) матрица обратима.

Доказательство

1. - Пусть $A, B \in M_n(K)$, $AB = E_n$. Тогда по Теореме 5:

   $$\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(E_n) = 1 \implies \det(A) \neq 0, \ \det(B) \neq 0.$$

   - Таким образом, матрица с нулевым определителем не может быть обратимой ни слева, ни справа.
   - Наоборот, пусть $\det(A) \neq 0$, а $B = \det(A)^{-1} \cdot \tilde{A}$.
   - По Лемме 2 мы имеем $AB = BA = E_n$. Значит, A обратима.

2. Выше доказано, что обратимая слева или справа матрица имеет ненулевой определитель, а значит, она обратима.

Строчный и столбцовый ранг матрицы. Сохранение строчного ранга при элементарных преобразованиях строк.

Строчный и столбцовый ранг матрицы

Определение

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$.

- **Строчный ранг матрицы** A — это

$$r_s(A) := \dim(\mathrm{Lin}(A_1, \ldots, A_m)).$$

- **Столбцовый ранг матрицы** A — это

$$r^s(A) := \dim(\mathrm{Lin}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})).$$

это размерность линейной оболочки **строк/столбцов ** матрицы A.
- Наша цель — доказать, что $r_s(A) = r^s(A)$ для любой матрицы A. Это число называется **рангом** A и обозначается через $\mathrm{rk}(A)$.

Лемма 3

1. Строчный ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.
2. Столбцовый ранг сохраняется при элементарных преобразованиях столбцов.

Доказательство

- Утверждения аналогичны, достаточно доказать первое.
- Пусть матрица $A' \in M_{n,m}(K)$ получена из A элементарным преобразованием строк. Пусть $L = \mathrm{Lin}(A_1, \ldots, A_n)$ и $L' = \mathrm{Lin}(A'_1, \ldots, A'_n)$.
- Достаточно доказать, что $L = L'$, тогда

$$r_s(A) = \dim(L) = \dim(L') = r_s(A').$$

- Если это преобразование типа I, то строки остаются теми же (просто в другом порядке), значит, $L = L'$.
- Пусть это преобразование типа III, скажем, $A'_i = \lambda A_i$ для $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, а остальные строки матриц совпадают.
  - Тогда $A'_i = \lambda A_i \in L$, значит, $L' \subseteq L$.
  - Так как элементарные преобразования обратимы, аналогично $L \subseteq L'$, а значит, $L = L'$.
- Пусть это преобразование типа II, скажем, $A'_i = A_i + \lambda A_j$ для $\lambda \in K$, а остальные строки матриц совпадают.
  - Тогда $A'_i = A_i + \lambda A_j \in L$, значит, $L' \subseteq L$.
  - Так как элементарные преобразования обратимы, аналогично $L \subseteq L'$, а значит, $L = L'$.

Лемма 4

Пусть $A, B \in M_{m,n}(K)$, причем B получена из A элементарным преобразованием строк, $1 \leq s_1 < \cdots < s_k \leq n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$. Тогда

$$\lambda_1 A^{(s_1)} + \cdots + \lambda_k A^{(s_k)} = 0 \iff \lambda_1 B^{(s_1)} + \cdots + \lambda_k B^{(s_k)} = 0.$$

Доказательство

- Положим $c_{i,j} := a_{i,s_j}$ и $d_{i,j} := b_{i,s_j}$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_{1,1}y_1 + \cdots + c_{1,k}y_k = 0, \\ \vdots \\ c_{m,1}y_1 + \cdots + c_{m,k}y_k = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} d_{1,1}y_1 + \dots + d_{1,k}y_k = 0, \\ \vdots \\ d_{m,1}y_1 + \dots + d_{m,k}y_k = 0. \end{cases}$$

- Так как B получена из A элементарным преобразованием строк, вторая система получена из первой элементарным преобразованием.
- По Лемме 5.2, решения обеих систем совпадают.
  Лемма 5.2
- - 1. Элементарные преобразования всех трех типов обратимы, то есть имеют обратные элементарные преобразования.
- - 2. Элементарные преобразования не меняют решений СЛУ.
- Для завершения доказательства достаточно отметить, что

$$\lambda_1 A^{(s_1)} + \dots + \lambda_k A^{(s_k)} = 0 \iff y_1 = \lambda_1, \dots, y_k = \lambda_k$$

  — решение первой системы, и

$$\lambda_1 B^{(s_1)} + \dots + \lambda_k B^{(s_k)} = 0 \iff y_1 = \lambda_1, \dots, y_k = \lambda_k$$

  — решение второй системы.

Сохранение столбцового ранга при элементарных преобразованиях строк.

Лемма 5

1. Столбцовый ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.
2. Строчный ранг сохраняется при элементарных преобразованиях столбцов.

Доказательство

- Утверждения аналогичны, достаточно доказать первое.
- Пусть $A, B \in M_{m,n}(K)$, причем B получена из A элементарным преобразованием строк.
- Пусть $L = \mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ и $L' = \mathrm{Lin}(B^{(1)}, \dots, B^{(n)})$.
- По Теореме 5.1 из $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ можно выбрать базис L — пусть это $A^{(s_1)}, \dots, A^{(s_k)}$. Тогда $r_s(A) = k$.
- - **Теорема 5.1** Пусть V — конечно порожденное линейное пространство над полем K. Тогда V имеет базис. Более того, из любой конечной порождающей системы векторов V можно выделить базис.
- Тогда и $B^{(s_1)}, \dots, B^{(s_k)}$ линейно независимы (если $\lambda_1 B^{(s_1)} + \dots + \lambda_k B^{(s_k)} = 0$, то по Лемме 4 и $\lambda_1 A^{(s_1)} + \dots + \lambda_k A^{(s_k)} = 0$, откуда $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$).
- Значит, $r^{(s)}(B) \geq k = r^{(s)}(A)$.
- Так как элементарные преобразования обратимы, аналогично доказывается, что $r^{(s)}(A) \geq r^{(s)}(B)$.

Определение

Для $r \leq \min(m, n)$ пусть $E^r \in M_{m,n}(K)$ — матрица, в которой $e^r_{i,i} = 1$ для всех $i \in \{1, \dots, r\}$, а все остальные коэффициенты матрицы равны 0.

Лемма 6

Любую матрицу $A \in M_{m,n}(K)$ можно привести элементарными преобразованиями к матрице E^r для некоторого $r \leq \min(m, n)$.

Доказательство

- Мы будем менять матрицу, не переименовывая её.
- Если все элементы матрицы равны 0, то $A = E^0$.
- Если в матрице есть ненулевой элемент, то можно считать, что $a_{1,1} \neq 0$ (иначе поменяем местами строки и столбцы так, чтобы ненулевой элемент оказался на этой позиции).
- Далее поделим первую строку на $a_{1,1}$, получим новую матрицу, в которой $a_{1,1} = 1$.
- Для всех $i \in \{2, \ldots, m\}$ заменим строку A_i на $A_i - a_{i,1}A_1$. В результате этих элементарных преобразований в левом столбце все элементы, кроме $a_{1,1} = 1$, будут равны 0.
- Теперь для всех $j \in \{2, \ldots, n\}$ заменим столбец $A^{(j)}$ на $A^{(j)} - a_{1,j}A^{(1)}$. В результате этих элементарных преобразований в первой строке все элементы, кроме $a_{1,1} = 1$, будут равны 0. Элементы левого столбца не изменятся.
- Теперь рассмотрим подматрицу A', полученную удалением первой строки и первого столбца. Аналогичными действиями меньшую матрицу A' можно привести к виду $E^{r'}$.
- Выполним те же преобразования, что в матрице A', со столбцами $2, \ldots, n$ и строками $2, \ldots, m$ матрицы A. В результате первая строка и первый столбец не изменятся, и мы получим матрицу $E^{r'+1}$.

Равенство строчного и столбцового ранга матрицы.

Теорема 7

Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ выполнено:

$$r_s(A) = r^s(A).$$

Доказательство

- По Лемме 6 для некоторого $r \leq \min(m, n)$ можно элементарными преобразованиями привести A к E^r.
- Очевидно, $r_s(E^r) = r^d(E^r) = r$.
- По Леммам 3 и 5 мы имеем:

$$r_s(A) = r_s(E^r) = r = r^s(E^r) = r^s(A).$$

- Теперь мы знаем, что ранг матрицы определён корректно, и его можно вычислять как размерность пространства строк этой матрицы, так и как размерность пространства её столбцов.
- Если $A \in M_{m,n}(K)$, то $\mathrm{rk}(A) \leq m$ и $\mathrm{rk}(A) \leq n$.

Сохранение наибольшего порядка ненулевого минора матрицы при элементарных преобразованиях.

Лемма 7

При элементарных преобразованиях наибольший порядок ненулевого минора матрицы не изменяется.

Доказательство

- Пусть $A, A' \in M_{m,n}(K)$, причем A' получена из A элементарным преобразованием.
- Можно считать, что это преобразование строк (иначе транспонируем матрицу, те же самые миноры останутся ненулевыми по Теореме 2, а строки поменяются местами со столбцами).

Утверждение

Если у матрицы A нет ненулевых миноров порядка k, то и у матрицы A' нет ненулевых миноров порядка k.

Доказательство

- Пусть Δ' — ненулевой минор порядка k матрицы A', а Δ — минор A в тех же строках и столбцах. По условию $\Delta = 0$.
- Тогда $\Delta' \neq \Delta$ не является минором A, значит, содержит хотя бы одну из строк, над которыми произведено элементарное преобразование.
- Рассмотрим три случая.

Случай 1: элементарное преобразование имеет тип III

- Пусть строка матрицы A умножена на $\lambda \in K$. Тогда

$$\Delta' = \lambda\Delta = 0$$

 по Свойству 3 определителя, противоречие.

Случай 2: элементарное преобразование имеет тип I

- Пусть, скажем, $A'_i = A_j$ и $A'_j = A_i$.
- Если минор Δ' содержит части обеих строк A'_i и A'_j, то в миноре Δ они просто стоят в обратном порядке, и $\Delta' = \Delta = 0$ по Свойству 1 определителя, противоречие.
- Пусть Δ' содержит часть A'_i, но не содержит часть A'_j.
    - Так как часть A'_i — это аналогичная часть A_j, в этом случае матрица A также имеет минор Δ^* с точно такими же строками и столбцами (нужно вместо строки A_i взять A_j), возможно, расставленными в другом порядке.
    - Тогда $\Delta' = \pm\Delta^* = 0$, противоречие.

Случай 3: элементарное преобразование имеет тип II

- Пусть, скажем, $A'_i = A_i + \lambda A_j$.
- Пусть $\Delta' = \det(B')$, $\Delta = \det(B)$, где $B, B' \in M_k(K)$ — соответствующие матрицы. Тогда эти матрицы содержат части строк A_i и A'_i соответственно.
- Обозначим через B^* матрицу, полученную из B заменой части A_i на соответствующую часть A_j.
- Разложим $\det(B')$ по строке A'_i (точнее, её части). По [Свойству 5] определителя:

$$\Delta' = \det(B') = \det(B) + \lambda\det(B^*) = \lambda\det(B^*).$$

- Если B содержит части строки A_j, то B^* содержит две одинаковые строки, тогда по [Свойству 2] определителя:

$$\det(B^*) = 0,$$

 а значит, и $\Delta' = 0$, противоречие.
- Пусть B не содержит части строки A_j. Тогда рассмотрим подматрицу B^{**} матрицы A, в которой выбраны все строки матрицы B, кроме A_i, и строка A_j, а столбцы — те же, что в B.
- По условию:

$$\det(B^{**}) = 0.$$

- Так как B^* получается из B^{**} перестановкой строк:

$$\det(B^*) = \pm\det(B^{**}) = 0,$$

 откуда следует, что $\Delta' = 0$, противоречие.

Возвращение к доказательству Леммы 7

- Так как обе матрицы A и A' получены друг из друга элементарным преобразованием, наибольший порядок ненулевого минора в них — одинаковый.

Равенство ранга матрицы и наибольшего порядка ненулевого минора. Ранг невырожденной матрицы.

Теорема 8

Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ её ранг равен наибольшему порядку ненулевого минора в A.

Доказательство

- По Лемме 6 матрицу A можно привести элементарными преобразованиями к матрице E^r для некоторого $r \leq \min(m, n)$.
- Тогда $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(E^r) = r$.
- С другой стороны, наибольший порядок ненулевого минора в E^r — это, очевидно, r. По Лемме 7, это верно и для A.

Следствие 2

Матрица $A \in M_n(K)$ обратима, если и только если $\mathrm{rk}(A) = n$.

Доказательство

- $(\Rightarrow)$ Если A — обратима, то $\det(A) \neq 0$ по Теореме 6. Значит, максимальный порядок ненулевого минора равен n, тогда и $\mathrm{rk}(A) = n$ по Теореме 8.
- $(\Leftarrow)$ Если $\mathrm{rk}(A) = n$, то по Теореме 8 матрица $A \in M_n(K)$ имеет ненулевой минор порядка n. Значит, $\det(A) \neq 0$, и по Теореме 6 матрица A обратима.

Матрицы элементарных преобразований. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц.

Матрицы элементарных преобразований

- Пусть $A \in M_{m,n}(K)$.
- Элементарные преобразования матрицы A можно представить в виде умножения A на матрицы специального вида.

Элементарное преобразование I типа

- Пусть $s, t \in \{1, \ldots, m\}$, $s \neq t$. Рассмотрим матрицу $E_m^{s,t} \in M_m(K)$, полученную из E_m переменой позиций двух 1:

$$e^{s,t}(s,t) = e^{s,t}(t,s) = 1, \quad e^{s,t}(i,i) = 1 \text{ при } i \notin \{s,t\},$$

  остальные коэффициенты равны 0.
- Нетрудно проверить, что $E_m^{s,t} \cdot A$ — это матрица, полученная из A перестановкой s и t строк.
- Наоборот, пусть $s, t \in \{1, \ldots, n\}$, определим аналогично матрицу $E_n^{s,t} \in M_n(K)$.
- Тогда $A \cdot E_n^{s,t}$ — это матрица, полученная из A перестановкой s и t столбцов.

Элементарное преобразование II типа

- Пусть $s, t \in \{1, \ldots, m\}$, $s \neq t$, $\lambda \in K$. Рассмотрим матрицу $E_m^{s,t,\lambda} \in M_m(K)$, полученную из E_m изменением одного 0 на λ:

$$e^{s,t,\lambda}(s,t) = \lambda \quad (\text{остальные коэффициенты как в единичной матрице } E_m).$$

- Нетрудно проверить, что $A' = E_m^{s,t,\lambda} \cdot A$ — это матрица, полученная из A преобразованием II типа $A'_s = A_s + \lambda A_t$ (остальные строки в матрицах A и A' совпадают).
- Наоборот, пусть $s, t \in \{1, \ldots, n\}$, определим аналогично матрицу $E_n^{s,t,\lambda}$.
- Тогда $B = A \cdot E_n^{s,t,\lambda} \in M_n(K)$ — это матрица, полученная из A преобразованием II типа $B^{(s)} = A^{(s)} + \lambda A^{(t)}$ (остальные столбцы в матрицах A и B совпадают).

Элементарное преобразование III типа

- Пусть $s \in \{1, \ldots, m\}$, $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Рассмотрим матрицу $E_m^{s,\lambda} \in M_m(K)$, полученную из E_m изменением одной 1 на λ:

$$e_m^{s,\lambda}(s,s) = \lambda \quad (\text{остальные коэффициенты как в единичной матрице } E_m).$$

- Нетрудно проверить, что $A' = E_m^{s,\lambda} \cdot A$ — это матрица, полученная из A умножением s строки на λ.
- Наоборот, пусть $s \in \{1, \ldots, n\}$, определим аналогично матрицу $E_n^{s,\lambda} \in M_n(K)$.
- Тогда $A' = A \cdot E_n^{s,\lambda}$ — это матрица, полученная из A умножением s столбца на λ.

Алгоритм поиска обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк.

Алгоритм поиска обратной матрицы

- Пусть $A \in M_n(K)$. По Лемме 6 матрицу A можно привести элементарными преобразованиями к виду E^r, где $r \leq n$.
- Если $r < n$, то $\mathrm{rk}(A) = r < n$ и матрица A по Следствию 2 необратима.
- Пусть $r = n$, произведены элементарные преобразования строк с матрицами $P_1, \ldots, P_k$ (в указанном порядке) и элементарные преобразования столбцов с матрицами $Q_1, \ldots, Q_\ell$ (в указанном порядке). Тогда

$$P_k \cdots P_1 \cdot A \cdot Q_1 \cdots Q_\ell = E_n \implies A = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1} \cdot E_n \cdot Q_\ell^{-1} \cdots Q_1^{-1} \implies A^{-1} = Q_1 \cdots Q_\ell \cdot P_k \cdots P_1.$$

- Каждую матрицу можно элементарными преобразованиями строк привести к **ступенчатому виду**: пусть $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$, тогда i-я строка матрицы для $i \in \{1, \ldots, k\}$ будет иметь вид:

$$a_{i,j} = 0 \text{ при } j < s_i, \quad a_{i,s_i} = 1, \quad \text{далее произвольные коэффициенты;}$$

  строки с номерами более k будут нулевыми. (Алгоритм для СЛУ из Леммы 5.3 легко применяется для матриц.)
- Если $A \in M_n(K)$ — невырожденная матрица, то $k = n$ и $s_i = i$ для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ (иначе A имеет нулевую строку, а значит, $\det(A) = 0$, что не так).
- Значит, A приводится элементарными преобразованиями строк к верхнетреугольному виду: на главной диагонали 1, под ней 0.
- Теперь элементарными преобразованиями строк несложно обнулить верхний треугольник (все элементы над главной диагональю).
- Таким образом, мы приведем A к единичной матрице элементарными преобразованиями только строк, что бывает удобно.
- Соответственно, формула обратной матрицы будет иметь вид $A^{-1} = P_k \cdots P_1$.

Совместность системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Матричная запись СЛУ

- Пусть K — поле, $a_{i,j} \in K$ (где $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$).

- Рассмотрим СЛУ с неизвестными $x_1, \ldots, x_m$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n. \end{cases}$$

- Матрица системы $(*)$ — это матрица $A \in M_{n,m}(K)$ с коэффициентами $a_{i,j}$. Положим $X = (x_1, \dots, x_m)^T$ — столбец неизвестных, $B = (b_1, \dots, b_n)^T$.

- $AX = B$ — матричная запись системы $(*)$.

- $(A|B)$ — расширенная матрица системы $(*)$ (справа добавлен столбец B).

- Система $(*)$ называется совместной, если она имеет решение.

- ОСЛУ всегда совместна, так как имеет нулевое решение.

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 9

- СЛУ $AX = B$ совместна, если и только если $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B)$.

Доказательство

- $AX = B$ совместна

$$\iff \exists X \in K^m : AX = B \iff \exists x_1, \dots, x_m \in K : x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \dots + x_mA^{(m)} = B$$

$$\iff B \in \mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \iff \mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) = \mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}, B)$$

$$\iff \dim(\mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})) = \dim(\mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}, B)) \iff \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B).$$

- Равенство двух линейных оболочек эквивалентно равенству их размерностей (предпоследний переход), так как одна из них является линейным подпространством другой.

Пространство решений однородной системы линейных уравнений.

Пространство решений однородной системы линейных уравнений

- Как нам известно из Леммы 5.3, любую ОСЛУ можно привести к ступенчатому виду, от этого множество решений не меняется.
- Итак, мы имеем ОСЛУ в ступенчатом виде: пусть $1 \le s_1 < s_2 < \dots < s_k \le m$,

$$\begin{cases} x_{s_1} + a_{1,s_1+1}x_{s_1+1} + \dots + a_{1,m}x_m = 0, \\ x_{s_2} + a_{2,s_2+1}x_{s_2+1} + \dots + a_{2,m}x_m = 0, \\ \vdots \\ x_{s_k} + a_{k,s_k+1}x_{s_k+1} + \dots + a_{k,m}x_m = 0. \end{cases}$$

- Назовем главными все переменные, кроме $x_{s_1}, \dots, x_{s_k}$.

Лемма 8

- Пусть A — матрица системы $(*)$. Тогда $\mathrm{rk}(A) = k$.

Доказательство

- $\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Lin}(A_1, \ldots, A_k))$. Таким образом, нам нужно доказать, что все строки матрицы A линейно независимы.
- Сделаем это индукцией по k.
    - База $k = 1$ очевидна.
    - Докажем переход:
        - Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ таковы, что $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k = 0$.
        - В столбце s_1 есть 1 в строке A_1, остальные коэффициенты равны 0. Значит, $\lambda_1 = 0$.
        - Теперь $\lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k = 0$, и по индукционному предположению имеем $\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, то есть, строки A линейно независимы.

Лемма 9

- Решения ОСЛУ $AX = 0$ $(*)$ с $A \in M_{n,m}(K)$ образуют линейное подпространство K^m.

Доказательство

- Пусть $U \subset K^m$ — множество всех решений. Тогда $X \in U \iff AX = 0$.
- Пусть $X_1, X_2 \in U$, $\lambda \in K$.
    - Тогда $A(X_1 + X_2) = A(X_1) + A(X_2) = 0 + 0 = 0$, значит, $X_1 + X_2 \in U$.
    - Тогда $A(\lambda X_1) = \lambda A(X_1) = \lambda 0 = 0$, значит, $\lambda X_1 \in U$.
- По Лемме 5.1 получаем, что U — линейное подпространство K^m.

Определение

- U называется пространством решений системы $(*)$.

- Напомним: пусть $1 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leq m$,

$$\begin{cases} x_{s_1} + a_{1,s_1+1}x_{s_1+1} + \cdots + a_{1,m}x_m = 0, \\ x_{s_2} + a_{2,s_2+1}x_{s_2+1} + \cdots + a_{2,m}x_m = 0, \\ \vdots \\ x_{s_k} + a_{k,s_k+1}x_{s_k+1} + \cdots + a_{k,m}x_m = 0. \end{cases}$$

- Главные переменные — все, кроме $x_{s_1}, \ldots, x_{s_k}$.

Лемма 10

- Для любого набора значений главных переменных существует единственное решение системы с такими значениями.

Доказательство

- Из k-го уравнения однозначно вычисляется x_{s_k} (все переменные с большими номерами нам известны).
- Потом из $(k-1)$-го уравнения однозначно вычисляется $x_{s_{k-1}}$, и так далее, однозначно находятся значения всех неглавных переменных.
- Если в решении $(*)$ все главные переменные равны 0, то и все остальные тоже равны 0 (это следует из Леммы 10, а кроме того, несложно проверить напрямую).

Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений.

Теорема 10

Пусть U — пространство решений ОСЛУ $AX = 0$ $(*)$ с m неизвестными. Тогда $\dim(U) = m - \mathrm{rk}(A)$.

Доказательство

- Так как $\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Lin}(A_1, \dots, A_k)) = k$, достаточно доказать, что $\dim(U)$ равняется количеству главных переменных.
- Пронумеруем главные переменные: $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-k}}$.
- Определим решение $r^s \in U$: Положим $r^s_{i_s} = 1$ и $r^s_{i_j} = 0$ при $j \in \{1, \dots, m-k\}, j \neq s$. После чего по Лемме 10 однозначно определим значения неглавных переменных.

Докажем, что $r^1, \dots, r^{m-k}$ — базис U.

Порождающая система

- Пусть $x \in U$. Рассмотрим

$$x' = x_{i_1} r^1 + \dots + x_{i_{m-k}} r^{m-k}.$$

- По Лемме 9, $x' \in U$.
- Заметим, что

$$x'_{i_s} = \sum_{j=1}^{m-k} x_{i_j} r^j_{i_s} = x_{i_s} r^s_{i_s} = x_{i_s},$$

  для всех $s \in \{1, \dots, m-k\}$.
- Таким образом, $x, x' \in U$ — два решения $(*)$, в которых совпадают все значения главных переменных.
- По Лемме 10 тогда $x = x'$. Значит, $x \in \mathrm{Lin}(r^1, \dots, r^{m-k})$.

Линейная независимость

- Пусть $\alpha_1 r^1 + \dots + \alpha_{m-k} r^{m-k} = 0$.
- Тогда для любого $s \in \{1, \dots, m-k\}$

$$\alpha_1 r^1_{i_s} + \dots + \alpha_{m-k} r^{m-k}_{i_s} = 0.$$

- Так как $r^j_{i_s} = 0$ при $j \neq s$ и $r^s_{i_s} = 1$, отсюда следует, что $\alpha_s = 0$.
- Таким образом, $r^1, \dots, r^{m-k}$ — ЛНЗ, а следовательно, базис пространства решений системы $(*)$.
- Следовательно, $\dim(U) = m - k = m - \mathrm{rk}(A)$.

Определение

Фундаментальная система решений ОСЛУ $AX = 0$ — это любой базис её пространства решений.

Решения неоднородной системы линейных уравнений.

Решения неоднородной СЛУ

- Рассмотрим совместную СЛУ $AX = B$ $(*)$ с m неизвестными и соответствующую ей ОСЛУ $AX = 0$ $(**)$.
- Как мы знаем, решения ОСЛУ $(**)$ образуют линейное пространство — пространство решений U.

Лемма 11

- Множество решений W системы $(*)$ — аффинное подпространство K^m. Если U — пространство решений системы $(**)$, а X^0 — решение $(*)$, то $W = U + X^0$.

Доказательство

- Достаточно доказать второе утверждение.
- Пусть $X' \in W$. Тогда

$$A(X' - X^0) = AX' - AX^0 = B - B = 0,$$

  значит, $X' - X^0 \in U$.
- Наоборот, пусть $X' \in U + X^0$.
- Тогда $X' - X^0 \in U$, значит,

$$AX' = AX^0 + A(X' - X^0) = B + 0 = B,$$

  следовательно, $X' \in W$.
- Таким образом, $W = U + X^0$.