

Изображение графа на плоскости, грань.

Определение Граф называется планарным, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во

внутренних точках. Вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Внутренние точки любой ломаной, изображающей ребро графа, не должны быть вершинами графа.

Грань плоского графа

- Изображение плоского графа делит плоскость на части — грани. Это ключевой объект для плоского графа, отличающий его от абстрактного планарного графа. Ниже мы дадим формальное определение граней.
- На плоскости изображен плоский граф G . Пусть M — множество всех точек плоскости, не входящих в изображение G .
- Пусть запись $A \sim B$ означает, что точки $A, B \in M$ можно соединить ломаной, не пересекающей изображение графа G . Укажем три важных свойства \sim .

Утверждение

\sim — отношение эквивалентности.

Доказательство.

- Рефлексивность. $A \sim A$
- Симметричность. Если $A \sim B$, то $B \sim A$.

- Транзитивность. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Определение Границ плоского графа G – классы эквивалентности по отношению \sim .

- Таким образом, все точки плоскости, не лежащие на изображении графа G , разбиты на грани.
- Множество всех граней графа G обозначается через $F(G)$, а их количество – через $f(G)$.
- Две точки из одной грани графа G могут быть соединены ломаной, не пересекающей изображение G .
- Любая ломаная, соединяющая две точки из разных граней, пересекает изображение G

Теорема Жордана для замкнутой ломаной.

Теорема 1 Жордана (C.Jordan, 1887.) Замкнутая несамопересекающаяся ломаная P делит точки плоскости, не лежащие на P , на две такие части, что выполнены следующие условия:

1. любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей P ;
2. любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает P .

Доказательство • Пусть $P_1 \dots P_m$ – вершины P в порядке обхода по часовой стрелке. Обозначим через M множество всех точек плоскости, не лежащих на P .

- Зафиксируем на плоскости вектор ℓ , не параллельный ни одной из сторон P . Из каждой точки $A \in M$ выпустим луч $\ell(A)$ в направлении ℓ .
- В случае, если $\ell(A)$ содержит вершину P_i многоугольника P , но стороны $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1} лежат в одной полуплоскости относительно содержащей $\ell(A)$ прямой, мы будем говорить, что многоугольник P в вершине P_i **касается** $\ell(A)$
- Посчитаем число $p(A)$ точек пересечения $\ell(A)$ с P , не являющихся касаниями. Очевидно, что $p(A)$ конечно.
- Часть M_0 будет состоять из всех точек $A \in M$, для которых $p(A)$ четно, а часть M_1 будет состоять из всех точек $B \in M$, для которых $p(B)$ нечетно.

Утверждение M_0 и M_1 непусты ### Доказательство

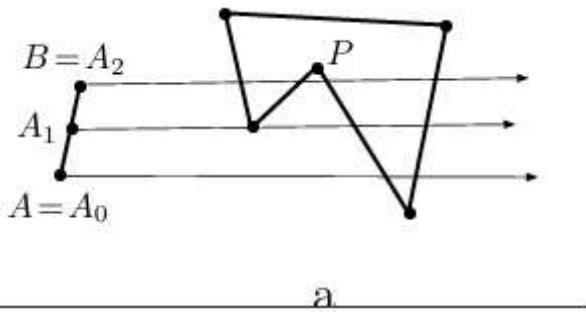
- Рассмотрим прямую ℓ_0 , параллельную вектору ℓ , и проходящую через внутреннюю точку ломаной P (то есть точку, не являющуюся ее вершиной).
- При движении по ℓ_0 в направлении вектора ℓ отметим последнее пересечение с ℓ во внутренней точке — пусть это точка X .
- Рассмотрим содержащий X малый отрезок $[Y, Z]$ на этом ℓ_0 , не пересекающий P в отличных от X точках, пусть Y лежит перед X при движении в направлении ℓ .
- Тогда $p(Y) = 1$ (единственное пересечение в точке X), а $p(Z) = 0$.

Утверждение Пусть $A, B \in M$ и отрезок $[A, B]$ не пересекает P . Тогда $p(A)$ и $p(B)$ имеют одинаковую четность. В частности, выполнено условие (2).

Доказательство • Если $AB \parallel \ell$, то утверждение очевидно.

- Если нет, то отметим на отрезке AB все такие точки A_1, \dots, A_k в направлении от A к B , что $\ell(A_i)$ касается P (если они есть). Положим $A_0 = A$ и $A_{k+1} = B$.
- Тогда для каждого $i \in [0..k]$, все точки отрезка $[A_i, A_{i+1}]$ имеют, очевидно, одинаковое значение функции p , а при переходе на соседний отрезок функция p может иметь четный скачок (каждое касание $\ell(A_i)$ многоугольника P добавляет точкам с одной стороны от A_i двойку к количеству пересечений, см. рис.а).
- В любом случае, на всем отрезке $[A, B]$ функция p имеет одинаковую четность.

Рисунок а:

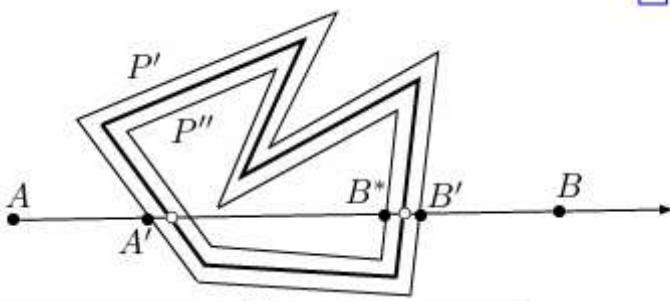


а

Докажем (1). • Пусть $A, B \in M_i$. Если отрезок $[A, B]$ не пересекает P , то все понятно. Пусть пересекает, причем A_1 и B_1 – ближайшие к A и B соответственно точки пересечения.

- Отметим на отрезке $[A, A_1]$ точку A' очень близко к A_1 , а на отрезке $[B_1, B]$ – точку B' очень близко к B_1 , пусть $|A_1A'| = |B_1B'| = \delta$ (см. рис. б). Тогда $p(A) = p(A')$ и $p(B) = p(B')$.

Рисунок б:



- Проведем вдоль каждой стороны многоугольника P две параллельных прямых на расстоянии δ с разных сторон, выбрав это число столь малым, чтобы в результате получились два “очень близких” к P многоугольника P' и P'' так, чтобы стороны P' и P'' не пересекали сторон P . (Достаточно выбрать δ меньше, чем минимальное расстояние от стороны P до вершины, на ней не лежащей.)
- НУО A' лежит на P' . Если и B' лежит на P' , то мы построили от A' до B' ломаную, не пересекающую P , тогда такая ломаная построена и от A до B .
- Пусть B' лежит на P'' , тогда обозначим через B^* точку пересечения P' с прямой AB , лежащую около B (разумеется, на расстоянии δ).
- Несложно понять, что $p(B^*) - p(B') = \pm 1$ (разница состоит в том, что ровно для одной из этих точек учитывается пересечение около точки B_1).
- Однако применив доказанное выше утверждение, получим $p(B^*) \equiv p(A') \equiv p(A) \equiv p(B) \equiv p(B') \pmod{2}$, противоречие.

Изображение графа на плоскости и сфере, их соответствие. Внешняя грань.

Плоскость и сфера • Плоскость и сфера переводятся друг в друга стереографической проекцией.

- Поставим сферу на плоскость, точку касания назовём южным полюсом, противоположную точку — северным полюсом N . Каждая точка $A \neq N$ сферы перейдёт в точку пересечения плоскости и луча NA

Утверждение Граф является планарным тогда и только тогда, когда его можно изобразить на сфере без пересечения рёбер во внутренних точках.

Доказательство.

- Переводя изображение графа со сферы на плоскость нужно лишь выбрать северный полюс так, чтобы он не совпадал ни с одной из вершин графа и не попадал на рёбра
- Плоское изображение планарного графа ограничено (его можно поместить в большой круг).
- Поэтому в плоском изображении планарного графа есть ровно одна неограниченная внешняя грань, которая визуально сильно отличается от всех остальных, а в сферическом изображении такой грани нет.
- Грань сферического изображения графа, содержащая северный полюс будет соответствовать при стереографической проекции внешней грани плоского изображения.
- Таким образом, перемещая северный полюс на разные грани, можно любую грань сферического изображения сделать внешней гранью в плоском изображении графа. Это лишний раз подчеркивает, что на самом деле внешняя грань не отличается от остальных.

Граница грани. Свойства.

Граница грани • Рассмотрим ребро e плоского графа G . Либо по разные стороны от e расположены разные грани (тогда ребро e – граничное ребро этих двух граней), либо по обе стороны от e – одна и та же грань, тогда назовем ребро e внутренним ребром этой грани. Обозначим через E_d множество всех граничных и внутренних рёбер грани d .

- Граничные вершины грани d – это концы ребер из E_d . Обозначим множество граничных вершин грани d через V_d .
- Граничные и внутренние рёбра грани d – это в точности те рёбра, до которых от внутренней точки грани d можно дойти по ломаной, не пересекая изображение графа.
- Граничные вершины грани d – это в точности те вершины, до которых можно дойти по ломаной от внутренних точек этой грани, не пересекая её граничных и внутренних рёбер.
- **Граница** грани d – это подграф $B(d)$ графа G с множеством вершин V_d и множеством рёбер E_d .
- **Размер границы** грани d мы определим, как количество граничных рёбер этой грани плюс удвоенное количество внутренних рёбер. Обозначать эту величину будем через $b(d)$.

Свойство 1

Если сложить размеры границ всех граней, получится удвоенное количество рёбер.

Доказательство Внутреннее ребро грани два раза считается в размере границы этой грани. Граничное ребро двух граней по разу считается в их размерах.

Свойство 2

Любые две точки на границе грани d можно соединить ломаной, проходящей в d .

Доказательство.

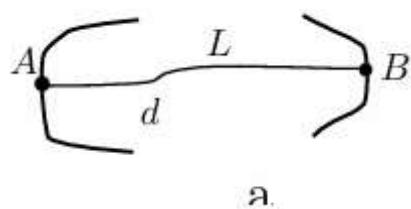
Пусть A – внутренняя точка грани d . От нее можно провести ломаные, не пересекающие изображение G до любых двух граничных. Все точки на этих ломаных лежат в d .

Свойство 3

Если две точки А и В на изображении графа G можно соединить ломаной L , не пересекающей изображения G , то А и В лежат на границе некоторой грани.

Доказательство.

А и В лежат на границе грани d , содержащей все внутренние точки L (см. рисунок а).



а

Циклический обход границы грани.

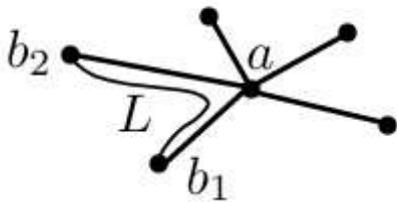
Определение

Рассмотрим любую вершину a плоского графа G и упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Два ребра, выходы которых — соседние в этом порядке, будем называть **соседними в вершине a** .

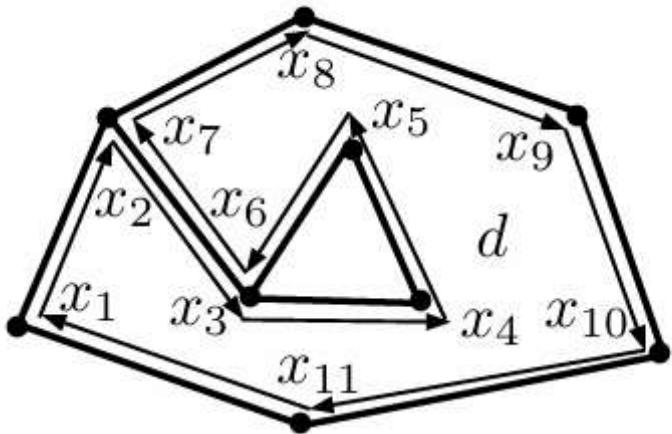
Свойство 4 Пусть ab_1 и ab_2 — два соседних ребра в вершине a . Тогда рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани.

Доказательство.

Вершины b_1 и b_2 можно соединить ломаной вдоль b_1ab_2 , не пересекающей изображения G (см. рисунок b). Поэтому, рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани.

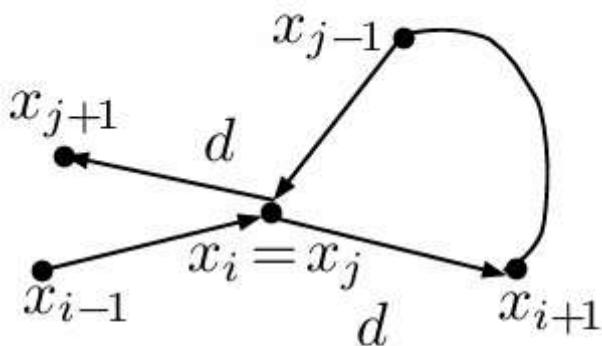


- Пусть G — плоский граф, $d \in F(G)$, а $x_1x_2 \in E_d$.
- Пройдем по ребру x_1x_2 от x_1 к x_2 . НУО справа по ходу движения расположена грань d . Повернем в вершине x_2 направо до выхода соседнего ребра x_2x_3 . (Если $d_G(x_2) = 1$, то $x_3 = x_1$, это нам не мешает.) Очевидно, $x_2x_3 \in E_d$. Пойдем по этому ребру от x_2 к x_3 , справа опять будет расположена грань d . И так далее. В конечном итоге мы вернемся на ребро x_1x_2 (в вершину x_1 мы можем вернуться и раньше!). Получился замкнутый циклический маршрут (см. рис.а).



a

- Пусть получился циклический маршрут $Z = x_1x_2\dots x_k$. Рассмотрим вершину x_i . По построению, Z обходит вокруг x_i — скажем, против часовой стрелки. Пусть мы вышли из вершины x_i по ребру x_ix_{i+1} , а следующий раз вернулись в эту вершину по ребру $x_{j-1}x_j$ (в этом случае $x_i = x_j$, см. рис.б).



b

- Тогда сектор между выходами рёбер x_ix_{i+1} и x_jx_{j-1} из вершины $x_i = x_j$ не принадлежит грани d . Следовательно, Z проходит все рёбра из E_d , инцидентные вершине x_i . Поскольку это верно для любой вершины Z , этот маршрут обходит все рёбра одной из компонент графа $B(d)$.
- Обозначим через $Z(U)$ такой маршрут для компоненты U , а через $Z(d)$ — объединение построенных маршрутов для всех компонент $B(d)$.
- Если маршрут $Z(d)$ проходит ребро e дважды, то, очевидно, в разных направлениях. Значит, по обе стороны от e расположена грань d , то есть e — внутреннее ребро d .
- Пусть e — внутреннее ребро грани d (см. ребро $x_2x_3 = x_6x_7$ на рисунке). Тогда

при проходе по e в любом из направлений справа будет расположена грань d .

Поэтому, маршрут $Z(d)$ дважды пройдет e — в обоих направлениях.

Несвязная граница грани у несвязного графа.

Лемма 1 Для плоского графа G выполнены следующие утверждения.

1. Если $d \in F(G)$ и $B(d)$ несвязна, то разные компоненты связности графа $B(d)$ лежат в разных компонентах связности графа G .
2. Граф G несвязен, если и только если он имеет грань с несвязной границей.

Доказательство

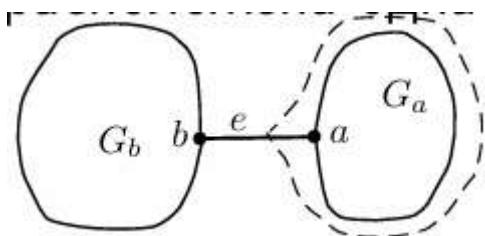
1. • Пусть B_1 и B_2 — две компоненты $B(d)$. Изображение компоненты B_1 ограничено и не пересекает других компонент $B(d)$. Следовательно, изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 замкнутой ломаной в грани d , не пересекающей ребер G (такую ломаную можно построить, почти повторив маршрут $Z(B_1)$: вместо каждого прохода по ребру, проведем его копию на малом расстоянии δ в грани d , как в доказательстве теоремы Жордана).
 - Значит, между B_1 и B_2 нет пути в графе G .
2. Очевидно, можно обойти все грани графа G , каждый раз переходя в грань имеющую с предыдущей общую сторону или вершину (достаточно отметить по внутренней точке на каждой грани и проложить на плоскости маршрут, все эти точки обходящий).
 - Тогда, если граница каждой грани связна, то связно и их объединение, а это граф G , противоречие. Значит, несвязный граф имеет грань с несвязной границей.
 - Если G имеет грань с несвязной границей, то G несвязен по пункту 1.

Внутренние рёбра граней – мосты. Границы граней графа без мостов – циклы. ## Лемма 2

Внутренние рёбра граней плоского графа G – в точности все мосты графа G .

Доказательство. • Пусть внутреннее ребро e грани d – не мост, тогда оно лежит в простом цикле C . По теореме Жордана цикл делит плоскость на две области, а грань d может лежать только в одной из них.

- Наоборот, пусть $e = ab$ – мост. Тогда граф $G - e$ имеет две компоненты G_a и G_b , содержащие a и b соответственно.
- Изображение компоненты G_a ограничено и не пересекает G_b , значит, существует замкнутая ломаная P в грани d , отделяющая G_a от G_b (см. рис.а). Очевидно, P пересекает ребро e , а значит, по обе стороны от моста e расположена одна и та же грань.



Лемма 3 Пусть d – грань реберно двусвязного графа G . Тогда $B(d)$ – цикл (не обязательно простой).

Доказательство.

- Так как G связан, $B(d)$ – связный граф по [Лемме 1](#). Значит, и $Z(d)$ связан. Так как внутренних рёбер у d нет (граф не имеет мостов), $Z(d)$ – цикл.
- Докажем, что граница грани почти всегда однозначно задает эту грань.

Если есть две грани с одинаковой границей, то граф – простой цикл.

Лемма 4

Если две разные грани f и f' плоского графа G имеют одинаковые границы, то G – простой цикл.

Доказательство.

- Пусть B – общая граница этих граней, $e \in E(B)$. По [Лемме 2](#) тогда e – не мост графа G , а значит, существует простой цикл Z , содержащий e .
- Тогда Z делит плоскость на две области – $O \supset f$ и $O' \supset f'$ • Пусть $e' \in B \setminus Z$. Тогда e' лежит внутри одной из областей O и O' – скажем, в O' . В этом случае, e' не может быть граничным ребром грани $f \subset O$, противоречие.
- Докажем, что $G = Z$, тогда G – простой цикл.
- Если $f = O$ и $f' = O'$, то $G = Z$, что нам и нужно.
- Пусть, скажем, $f \neq O$.
- Так как каждая грань целиком лежит в одной из областей, O разбивается на грани.
 - Значит, существует еще одна грань $f^* \subset O$.
 - Пусть $X \in f$ и $X^* \in f^*$.
 - Так как точки X и X^* лежат в области O , их можно соединить ломаной L , проходящей в O .
 - Пойдем по ломаной L от точки X . В некоторый момент мы перейдем из f в другую грань. Значит, мы пересечем изображение графа G – скажем, ребро e .
 - Тогда e – граничное ребро грани f . Но при этом e изображено внутри O (там проходит ломаная L), следовательно, $e \notin E(Z)$. Противоречие с доказанным выше.

Границы граней двусвязного графа.

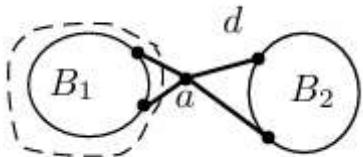
Лемма 5

Пусть G – плоский граф.

1. Если грань d и ее граничная вершина a таковы, что B_1 и B_2 – разные компоненты графа $B(d) - a$, то B_1 и B_2 лежат в разных компонентах графа $G - a$. В частности, a – точка сочленения графа G .
2. Граф G без петель вершинно двусвязен, если и только если границы его граней – простые циклы.

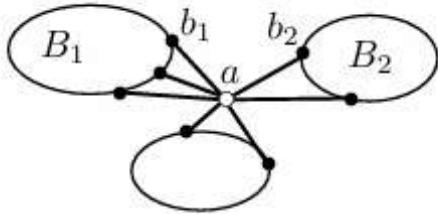
Доказательство.

1. Аналогично доказательству [Леммы 1](#), плоское изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 ломаной, не пересекающей ребер $G - a$ (см. рис.b), а значит, между B_1 и B_2 нет рёбер в графе $G - a$.
 - Следовательно, a – точка сочленения графа G



b

2. • Пусть a – точка сочленения графа G . Рассмотрим плоское изображение несвязного графа $G - a$, полученное из G удалением вершины a .
 - В силу [Леммы 1](#), граф $G - a$ имеет несвязную грань d , а граф G не имеет. Значит, a лежит на грани d и смежна со всеми компонентами ее границы.
 - Упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Тогда есть два соседних ребра, выходящих к разным компонентам графа $B(d)$ – скажем, ребро ab_1 к компоненте B_1 и ребро ab_2 к компоненте B_2 (см. рис.c).



C

- Точка сочленения a отделяет b_1 от b_2 в графе G . Существует грань f графа G , граница которой содержит a, b_1 и b_2 . Тогда a – точка сочленения $B(f)$.
- Наоборот, если грань d такова, что $B(d)$ имеет точку сочленения, то по пункту 1 граф G также имеет точку сочленения.

Границы граней трёхсвязного графа. ## Определение

- Цикл C графа G – **неразделяющий**, если граф $G - V(C)$ связен.
- Цикл C – **индуцированный**, если он не имеет хорд (то есть, является индуцированным подграфом на своем множестве вершин).

Лемма 6

Пусть G – трёхсвязный плоский граф. Тогда множество границ его граней есть в точности множество его неразделяющих индуцированных циклов.

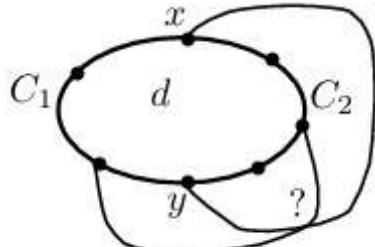
Доказательство.

- ⇨ Пусть C – неразделяющий индуцированный цикл в G . Тогда в одной из областей, на которые C делит плоскость – назовём ее d – нет вершин графа G . Так как индуцированный цикл C не имеет диагоналей, внутри d рёбер тоже нет. Значит d – грань, а цикл C – её граница.
- ⇨ • Пусть C – граница грани d графа G . Тогда C – простой цикл.
- Предположим, что C имеет диагональ xy . Вершины x и y делят цикл C на две

дуги C_1 и C_2 . • Граф $G - x - y$ должен быть связан ввиду трёхсвязности графа G .

Значит, в $G - x - y$ есть C_1C_2 -путь P .

• Понятно, что и диагональ xy , и путь P должны проходить вне грани d , но тогда они пересекаются (см. рис.а), что невозможно.

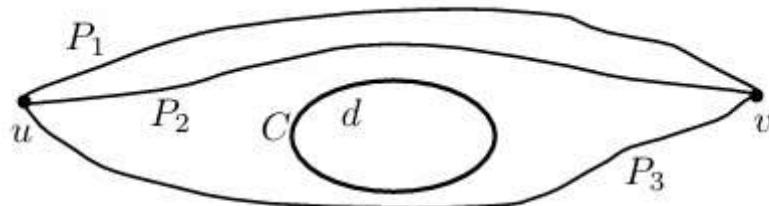


a

• Докажем, что граф $G - V(C)$ связан.

• Пусть $u, v \in V(G) \setminus V(C)$. По теореме Уитни в трёхсвязном графе G существуют три независимых uv -пути P_1, P_2 и P_3 , которые делят плоскость на три области.

• Грань d лежит в одной из этих областей, пусть это область, граница которой образована путями P_2 и P_3 (см. рис.б). Тогда P_1 не пересекается с границей грани d – циклом C – а значит, вершины u и v связаны в $G - V(C)$.



b

Изоморфизм графов и плоских изображений. Единственность изображения трёхсвязного планарного графа на плоскости.

Разные изображения одного графа. Изоморфизм •
Слева и справа на рисунке – плоские изображения одного и того же графа. Но это разные изображения!

У правого изображения есть грань, в границе которой 6 вершин, а у левого – нет.



Определение Пусть G и G' – два плоских графа, а биекция $\varphi : V(G) \rightarrow V(G')$ удовлетворяет следующим условиям.

1. $xy \in E(G) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(G')$;
2. $U \subset V(G)$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа G , если и только если $\varphi(U) = \{\varphi(x) : x \in U\}$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа G' . Тогда φ – изоморфизм плоских графов G и G' , а сами эти плоские графы изоморфны.

Теорема 2 (H.Whitney, 1933.) Любые два плоских изображения трёхсвязного планарного графа G изоморфны как плоские графы.

Доказательство.

- Пусть G_1 и G_2 плоские изображения G , причем $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ – изображения вершины $x \in V(G)$.
- Определим отображение $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ так: $\varphi(x_1) = x_2$ для любой вершины $x_1 \in V(G_1)$. Очевидно, $x_1y_1 \in E(G_1) \iff xy \in E(G) \iff \varphi(x_1)\varphi(y_1) = x_2y_2 \in E(G_2)$.
- По [Лемме 6](#) границы граней плоского графа G_1 – это в точности неразделяющие индуцированные циклы графа G_1 , а границы граней плоского графа G_2 – это в точности неразделяющие индуцированные циклы G_2 . Это свойство не имеет отношения к плоскому изображению.

- $U_1 \subset V(G_1)$ – множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G_1 (то есть, границы грани G_1) $\iff U \subset V(G)$ множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в $G \iff \varphi(U_1) = U_2 \subset V(G_2)$ – множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G_2 (то есть, границы грани G_2).
- Следовательно, φ – изоморфизм плоских графов.

Формула Эйлера

- В разных плоских изображениях планарного графа G могут получаться разные грани. Однако их количество является инвариантом графа, как говорит нам формула Эйлера.

Теорема 3 (L. Euler, 1752.)

Пусть G – плоский граф с v вершинами, e рёбрами и f гранями, имеющий k компонент связности. Тогда $v - e + f = 1 + k$.

Доказательство. Индукцией по количеству рёбер. #### База

для случая, когда граф G – лес, очевидна: в этом случае $f = 1$, $e = v - k$.

Переход

- Пусть для меньших графов формула Эйлера уже доказана и G – не лес.
- Тогда в графе есть цикл, пусть ребро ℓ входит в цикл. Так как ℓ – не мост, по ребру ℓ граничат две разные грани, которые объединяются в одну в графе $G - \ell$.
- Таким образом, в графе $G - \ell$ v вершин, k компонент, $e - 1$ ребро и $f - 1$ грань. Теперь формула Эйлера для G следует из формулы Эйлера для $G - \ell$, которая верна по индукционному предположению.
- Мы будем обозначать количество вершин, рёбер и граней плоского графа G буквами v , e и f соответственно.

Оценки на число ребер плоского графа и существование вершины степени не более 5.

Следствие 1

Пусть G – планарный граф без петель и кратных рёбер, $v \geq 3$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. $e \leq 3v - 6$.
2. Если граф G – двудольный, то $e \leq 2v - 4$.

Доказательство. 1) • Докажем, что размер границы каждой грани графа G не менее 3. В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \leq 2$.

- Так как петель и кратных рёбер нет, $B(d)$ не имеет циклов. Следовательно, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.
 - Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 3. Следовательно, $2e \geq 3f$ или $f \leq \frac{2e}{3}$.
 - Тогда из формулы Эйлера $v - \frac{e}{3} = v - e + \frac{2e}{3} \geq v - e + f \geq 2$, откуда следует доказываемое неравенство.
- 2) • Докажем, что размер границы каждой грани двудольного графа G не менее 4
- В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \leq 3$. Поскольку в двудольном графе нет циклов длины 3, и в G нет кратных рёбер, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.
 - Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 4. Следовательно, $f \leq \frac{e}{2}$.
 - Тогда из формулы Эйлера $v - \frac{e}{2} = v - e + \frac{e}{2} \geq v - e + f \geq 2$, откуда следует доказываемое неравенство.

Следствие 2 существование вершины степени не более 5.

Пусть G – планарный граф без петель и кратных рёбер. Тогда $\delta(G) \leq 5$.

Доказательство.

- В случае $v \leq 2$ утверждение очевидно.
- Пусть $v \geq 3$ и при этом $\delta(G) \geq 6$. Тогда $6v \leq 2e$, то есть, $e \geq 3v$ – противоречие со Следствием 1.

Непланарность K_5 и $K_{3,3}$ и их подразбиений.

Следствие 3 K_5 и $K_{3,3}$ – непланарные графы.

Доказательство.

1. Пусть K_5 планарен. Для этого графа $v = 5, e = 10$. По пункту 1 следствия 1 мы имеем $10 = e \leq 3v - 6 = 9$, что неверно. 2) Пусть $K_{3,3}$ планарен. Для этого двудольного графа $v = 6, e = 9$. По пункту 2 следствия 1 мы имеем $9 = e \leq 2v - 4 = 8$, что неверно

Определение • Граф H' называется подразбиением графа H , если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути (каждое заменяющее ребро xy меняется на простой xy -путь).

При этом, все добавляемые вершины различны и имеют степень 2.

- Вершины H в графе H' называются главными.
- $G \supset H$ означает, что граф G имеет подграф, изоморфный подразбиению графа H ## Следствие 4
 1. Подразбиение графа H планарно, если и только если H планарен.
 2. Любое подразбиение графа K_5 или $K_{3,3}$ непланарно.

Доказательство.

1. Изображение как ребра, так и простого пути — ломаная.
- 2) Следует из пункта 1 и Следствия 3.

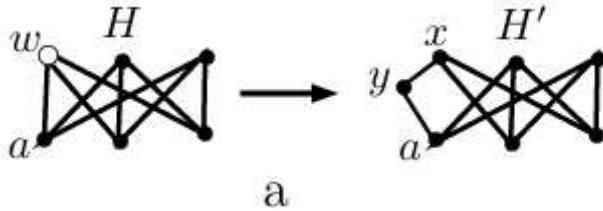
Подразбиения K_5 и $K_{3,3}$ и стягивание ребра. ## Лемма 7

Пусть $x, y \in V(G)$, $xy \in E(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

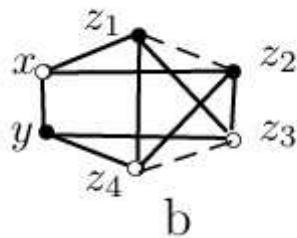
1. Если $G \cdot xy \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$.
2. Если $G \cdot xy \supset K_5$, то $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$ ## Доказательство
 - Пусть $w = x \cdot y$, а H — подграф $G \cdot xy$, являющийся подразбиением $K_{3,3}$ или K_5 .
 - Если $w \notin V(H)$ то, очевидно, $G \supset K_{3,3}$ или $G \supset K_5$, соответственно.
 - Далее $w \in V(H)$. Построим подграф H' графа G следующим образом: $V(H') = V(H) \setminus \{w\} \cup \{x, y\}$. Все рёбра из $E(H)$, не инцидентные w , включим в $E(H')$. Для каждого ребра $aw \in E(H)$ включим его в $E(H')$ то из ребер ax или ay , которое есть в графе G (если есть оба этих ребра, возьмем любое из них). Наконец, поместим в $E(H')$ ребро xy .
 - Рёбра графа $H' - xy$, инцидентные вершине x , назовем **красными**, а рёбра графа $H' - xy$, инцидентные вершине y — **синими**. Вместе красных и синих рёбер ровно $d_H(w)$.
 - Если в графе H' нет синих рёбер, то $H' - y$ — подграф графа G ,

изоморфный H . Аналогично для красных рёбер. В этом случае доказательство леммы закончено.

- Пусть ay – единственное синее ребро в H' . Тогда ребру $aw \in E(H)$ соответствует путь ayx в графе H' , то есть, H' является подразбиением графа H (см. рис.а). В этом случае лемма доказана, аналогично для случая, когда есть ровно одно красное ребро.



- Пусть теперь и красных, и синих рёбер не менее, чем по два. Тогда $d_H(w) \geq 4$, откуда сразу же следует, что $H \supset K_5$, $d_H(w) = 4$.
- Пусть тогда z_1, z_2, z_3, z_4 – четыре оставшиеся главные вершины графа H . Каждая пара из вершин w, z_1, z_2, z_3, z_4 соединена в H путём – подразбиением соответствующего ребра графа K_5 . Разные пути не имеют общих внутренних вершин. Этим путям соответствуют пути в графе H' .
- НУО в H' есть xz_1 -путь, xz_2 -путь, yz_3 -путь и yz_4 -путь (см. рис.б). Тогда $H' \supset K_{3,3}$: каждая из вершин x, z_3, z_4 соединена путём с каждой из вершин y, z_1, z_2 , разные пути не имеют общих внутренних вершин



Теорема Курацковского: трёхсвязность минимального контрпримера.

(K.Kuratowski, 1930) Граф G (возможно, имеющий кратные рёбра и петли) непланарен, если и только если G имеет подграф, являющийся подразбиением K_5 или $K_{3,3}$.

Доказательство.

\Leftarrow . Следствие 4.

\Rightarrow . • Предположим противное и рассмотрим минимальный контрпример G

(непланарный граф, не содержащий подразбиений K_5 и $K_{3,3}$).

• Любой не содержащий подразбиений K_5 и $K_{3,3}$ граф с меньшим числом вершин или с таким же, как у G числом вершин и меньшим числом рёбер обязательно является планарным.

Утверждение 1

G не имеет петель и кратных рёбер.

Доказательство.

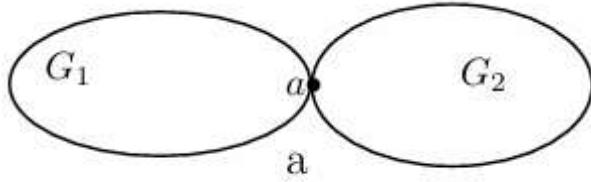
- Пусть e – петля графа G . Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа G (можно дорисовать петлю к плоскому изображению $G - e$).
- Теперь пусть G имеет два кратных ребра e и f . Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа G (можно дорисовать ребро e вдоль ребра f в плоском изображении $G - e$).

Утверждение 2

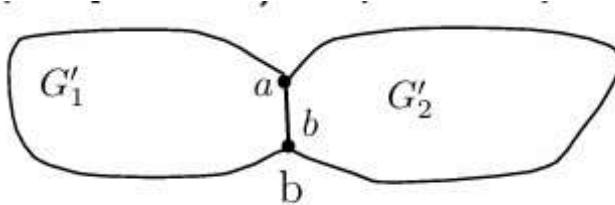
G трехсвязен.

Доказательство.

- Если G несвязен, то его компоненты не содержат подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, а значит, планарны. Тогда планарен и граф G , противоречие.
- Пусть G имеет точку сочленения a . Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = a$.
- Графы G_1 и G_2 не содержат подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, а значит, планарны.
- Тогда планарен и граф G (можно изобразить G_1 и G_2 так, чтобы a оказалась на границе внешней грани обоих изображений и склеить их, см. рисунок а). Противоречие.



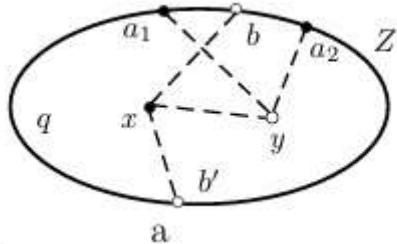
- Наконец, пусть G двусвязен, но имеет разделяющее множество $S = \{a, b\}$. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = S$. Пусть $G' = G_i + ab$.
- Предположим, что G'_1 содержит подграф H – подразбиение графа K_5 или $K_{3,3}$. Так как H не может быть подграфом G , $ab \in E(H) \setminus E(G)$.
- Однако, G содержит ab -путь P по вершинам G_2 . Заменив в H ребро ab на путь P , мы получим подразбиение H' графа H , являющееся подграфом G . Тогда G содержит подразбиение K_5 или $K_{3,3}$, что не так.
- Таким образом, G'_1 не содержит подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, а значит, G'_1 планарен. Аналогично, G'_2 планарен.
- Тогда можно изобразить эти графы на плоскости так, чтобы ребро ab в обоих изображениях лежало в границах внешних граней и склеить эти изображения (см. рис.б). Противоречие.



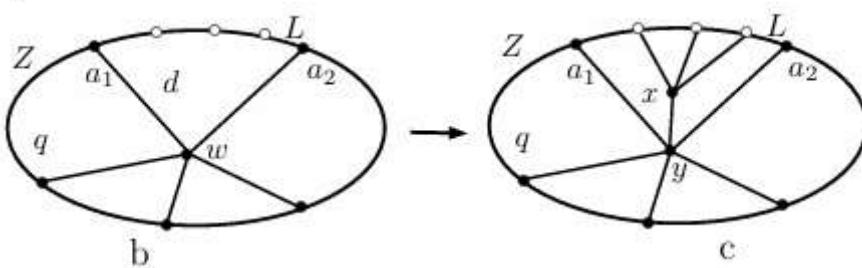
- Вернемся к доказательству теоремы.
- Очевидно, $G \neq K_4$. По Теореме 4.9 существует такое ребро $xy \in E(G)$, что граф $G - xy$ трёхсвязен (Теорема Татта), пусть $w = x \cdot y$.
- По [Лемме 7](#) мы имеем $G - xy \not\supset K_5, G - xy \not\supset K_{3,3}$, следовательно, граф $G - xy$ планарен.
- Пусть $G' = G - xy - w \simeq G - x - y$ (изоморфность этих двух графов очевидна).
- Рассмотрим плоское изображение графа G' , получающееся из изображения $G - xy$ удалением вершины w , пусть q – грань G' , на которой расположена вершина w .
- Граф G' двусвязен, поэтому граница грани q – это простой цикл Z .
- Отметим на Z вершины, смежные с y (обозначим их множество через A) и пронумеруем их в циклическом порядке: a_1, a_2, \dots, a_n . Из трёхсвязности G следует, что $n \geq 2$. Пусть B – множество вершин цикла Z , смежных с x .
- Если $A = B$ то $n \geq 3$ (так как граф $G - A$ в этом случае несвязен), тогда G содержит подразбиение K_5 с главными вершинами x, y, a_1, a_2, a_3 , противоречие.
- Далее НУО $B \subsetneq A$ пусть вершина $b \in B \setminus A$ лежит на дуге $L = a_1 Z a_2$, не

содержащей других вершин из A .

- Предположим, что вершина $b' \in B$ не лежит на L (возможно, b' совпадает с одной из вершин множества A , но $b' \notin \{a_1, a_2\}$).
- Тогда циклический порядок вершин a_1, b, a_2, b' на Z именно такой, а значит, G содержит подразбиение $K_{3,3}$ с главными вершинами x, a_1, a_2 (одна доля) и y, b, b' (вторая доля), противоречие (см. рис.а).



- Остается случай, когда все вершины множества B лежат на дуге L (возможно, совпадают с a_1 или a_2).
- В этом случае рассмотрим исходное плоское изображение графа $G \cdot xy$ и удалим с него все ребра от w до вершин из $B \setminus A$ (см. рис.б).



- Ребра от A до w делят грань q на n граней, одна из них — грань d , ограниченная L и ребрами wa_1, wa_2 .
- Мы можем изобразить внутри d вершину x и соединить ее ребрами с w и вершинами из B , не нарушая планарности (см. рис.с). Для построения плоского изображения G остается только переименовать w в y .

Триангуляция графа. ## Триангуляции

Определение

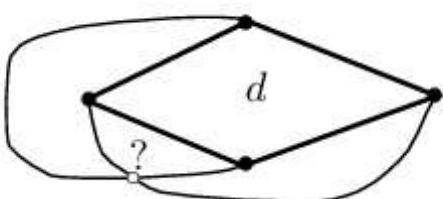
1. Будем называть грань треугольником, если ее граница — это треугольник.
2. Плоский граф называется триангуляцией, если каждая его грань — треугольник. Кратные рёбра и петли запрещены.

3. Триангулировать плоский граф значит провести в нём дополнительные рёбра так, чтобы получилась триангуляция
- По [Лемме 5](#) триангуляция — двусвязный граф. Тк границы граней - простые циклы

Лемма 8 Пусть G — плоский граф без петель, $v(G) \geq 3$, никакие два кратных ребра не образуют грань. Тогда G можно триангулировать без появления новых пар кратных ребер.

Доказательство.

- Пусть G — не триангуляция. Тогда G имеет грань d , не являющуюся треугольником. Пусть $H = G(V_d)$.
- По [Лемме 1](#) любые две вершины из V_d можно соединить ломаной в d , эта ломаная не будет пересекать ребер графа G .
- Значит, если граф H неполный, то мы можем добавить в него ребро без образования новых пар кратных ребер.
- Пусть $H = K_m$. Так как $|V_d| \geq 3$ и граф H планарен, $m \in \{3, 4\}$.
- Если граница $B(d)$ грани d недвусвязна, то ее точка сочленения по [Лемме 5](#) — точка сочленения графа G , но это невозможно в случае, когда V_d — клика.
- Следовательно, $B(d)$ — двусвязный граф, а значит, это простой цикл.
- Так как $B(d)$ — не треугольник, это цикл длины 4. Тогда две диагонали этого цикла проведены вне грани f , что, очевидно, невозможно: такие диагонали пересекут друг друга (см. рисунок).



- Пусть у триангуляции T $2n$ граней, тогда у нее $3n$ рёбер. По формуле Эйлера $v = n + 2$. Тогда $e(T) = 3v(T) - 6$.
- Мы знаем, что для любого плоского графа G выполнено $e(G) \leq 3v(G) - 6$. Таким образом, триангуляция — максимальный плоский граф, в котором нельзя дорисовать без пересечений ни одного нового ребра

Существование в триангуляции ребра, входящего ровно в два треугольника.

Лемма 9

В любой триангуляции T с $v(T) \geq 4$ есть ребро e , входящее ровно в два треугольника — в две грани, граничащие по e .

Доказательство.

- Любое ребро $f \in E(T)$ входит в две грани, и эти грани граничат только по f (иначе в T есть пара кратных рёбер). Значит, нам достаточно найти ребро e , не входящее в разделяющий треугольник — такой, что в обеих частях плоскости относительно него есть вершины графа.
- Если в T нет разделяющего треугольника, то утверждение очевидно — нам подойдет любое ребро.
- Предположим, что разделяющие треугольники есть и рассмотрим такой разделяющий треугольник abc , что внутри него нет других разделяющих треугольников.
- Однако, внутри abc есть вершины, а значит, есть и ребро e . Тогда ребро e не может входить в разделяющий треугольник, так как такой треугольник содержался бы внутри abc , что противоречит выбору abc .

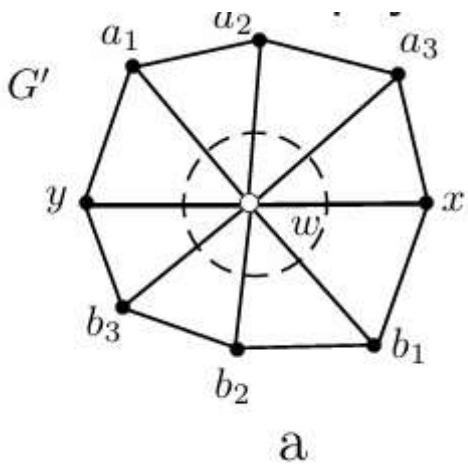
Теорема Вагнера о выпрямлении изображения планарного графа.

Теорема 5

(K.Wagner, 1936.) Пусть G — планарный граф без кратных рёбер. Тогда существует плоское изображение G , в котором все рёбра — отрезки.

Доказательство. • Будем доказывать утверждение индукцией по количеству вершин графа, база для графа на одной вершине очевидна.

- Достаточно доказать теорему для случая, когда G – триангуляция, так как по [Лемме 8](#) любой граф можно триангулировать без появления кратных рёбер. Будем доказывать, что можно выпрямить триангуляцию, тогда будет выпрямлен и исходный граф.
- По [Лемме 9](#) выберем ребро $e = uv \in E(G)$ так, чтобы оно входило ровно в два треугольника – грани xuv и yuv .
- Тогда $G' = G \cdot uv$ – триангуляция с плоским изображением, в котором “сжаты” грани xuv и yuv , а остальные грани – такие же, как в G . Кратных рёбер в G' нет.
- По индукционному предположению, существует изображение G' с прямыми рёбрами. Далее рассматриваем его.
- Упорядочим вершины из $N_G(u)$ в порядке выхода их рёбер из u по часовой стрелке: x, v, y, a_1, \dots, a_k . Так как G – триангуляция, любые две соседние в этом порядке вершины вместе с u образуют треугольную грань.
- Упорядочим вершины из $N_G(v)$ в порядке выхода их рёбер из v по часовой стрелке: y, u, x, b_1, \dots, b_m . Так как G – триангуляция, любые две соседние в этом порядке вершины вместе с v образуют треугольную грань.
- Тогда в графе G' вершины из $N_{G'}(w)$ будут упорядочены по часовой стрелке в порядке выходов рёбер из w так: $y, a_1, \dots, a_k, x, b_1, \dots, b_m$ (рис.а). Любые две соседние (по выходу ребра из w) вершины образуют вместе с w треугольную грань.

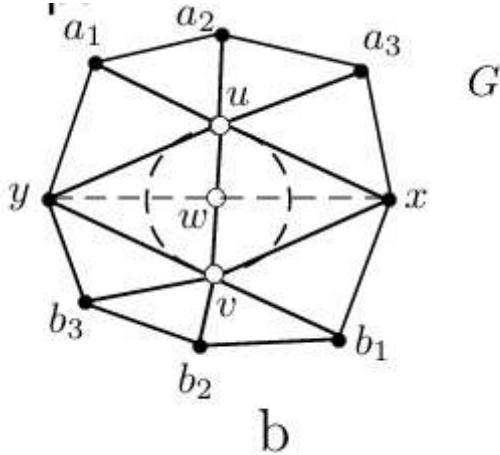


а

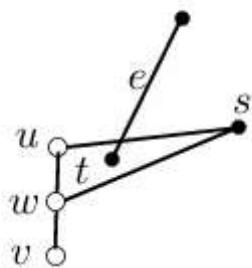
- Найдем минимум расстояний между вершинами в G' , а также минимум расстояний от вершин до не инцидентных им рёбер (напомним, что рёбра – это отрезки). Пусть d – наименьший из этих минимумов. Очевидно, $d > 0$.
- Проведем окружность S радиуса $\delta = \frac{d}{2}$ с центром w . Понятно, что внутри S

вершин графа G' нет и пересекают эту окружность только рёбра с концом в w .

- Ломаная xwy делит многоугольник $P = ya_1 \dots a_k x b_1 \dots b_m$ на два многоугольника: P_a , содержащий a_1, \dots, a_k и P_b , содержащий b_1, \dots, b_m .
- Проведем диаметр uv окружности S так, чтобы x и y лежали по разную сторону от соответствующей прямой и u лежала в P_a (тогда v лежит в P_b , см. рис.б).



- Удалим все рёбра, инцидентные w , из графа. Теперь проведем отрезки от u до x , y, a_1, \dots, a_k и от v до x, y, b_1, \dots, b_m (см. рис.б). Очевидно, никакие два проведенных отрезка не пересекают друг друга.
- Остается доказать, что проведенные отрезки не пересекают других рёбер графа G .
- Пусть, скажем, ребро us пересекает какое-то другое ребро e (см. рис.с).



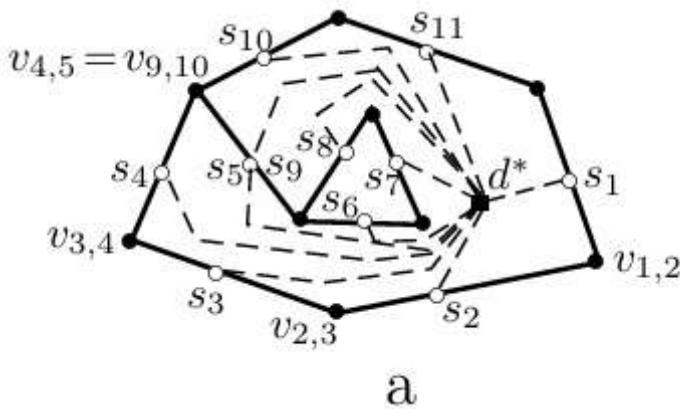
С

Стороны sw и wi треугольника swi не могут пересекать e . Следовательно, один из концов e — назовем его t — лежит в треугольнике swi . Но тогда t лежит в треугольнике swi и расстояние от t до отрезка sw , очевидно, меньше $|uw| = \frac{d}{2}$, противоречие.

Лемма о соединении точки на грани с “серединами” рёбер.

Лемма 10

Пусть G – связный плоский граф, $d \in F(G)$, Пусть $k = b(d)$, а $e_1 \dots e_k$ – рёбра из E_d в порядке циклического обхода $Z(d)$ (нумерация – циклическая по модулю k , внутренние рёбра грани d встречаются в этой нумерации дважды). Отметим точку d^* на грани d и по точке s_i на каждом ребре e_i . Тогда в грани d можно провести ломаные L_1, \dots, L_k без общих внутренних точек, соединяющие d^* с s_1, \dots, s_k соответственно. При этом, циклический порядок выходов ломаных в точке d^* будет L_1, \dots, L_k (см. рис.а).



Доказательство.

Рассмотрим отдельно от всего графа грань d и добавим вершины s_1, \dots, s_k, d^* .

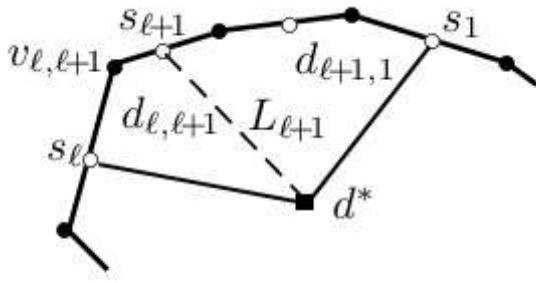
- Внутреннюю точку d^* грани d можно соединить ломаной L_1 в грани d с точкой s_1 на границе грани. Далее пусть $k \geq 2$.
- Так как добавленное ребро $L_1 = d^*s_1$ – мост, это внутреннее ребро полученной грани d_0 , в границу которой добавилась вершина d^* .
- Пусть $v_{i,i+1}$ – вершина, в которой обход $Z(d)$ переходит с ребра e_i на ребро e_{i+1} .
- Докажем индукцией по $2 \leq \ell \leq k$, что можно провести в грани d описанные выше ломаные L_1, L_2, \dots, L_ℓ так, что грань d будет разбита на грани $d_{1,2}, \dots, d_{\ell,1}$, причем границу $d_{i,i+1}$ образуют ломаные L_i и L_{i+1} , а также участок циклического обхода $Z(d)$ между s_i и s_{i+1} , содержащий $v_{i,i+1}$. Границу грани

$d_{\ell,1}$ образуют ломаные L_i и L_1 , а также участок циклического обхода $Z(d)$ между s_ℓ и s_1 , содержащий $v_{\ell,\ell+1}$.

База для $\ell = 2$ очевидна – в грани d_0 можно провести ломаную L_2 , соединяющую граничные точки d^* и s_2 . В результате ломаная L_2L_1 разобьет d на две части $d_{1,2}$ и $d_{2,1}$, очевидно, обладающие нужными свойствами.

Переход $\ell \rightarrow \ell+1$.

Рассмотрим грань $d_{\ell,1}$. На ее границе лежат точки d^* и $s_{\ell+1}$, которые можно соединить в грани $d_{\ell,1}$ ломаной $L_{\ell+1}$ (см. рис.б). В результате грань $d_{\ell,1}$ будет разбита этой ломаной на две грани $d_{\ell,\ell+1}$ и $d_{\ell+1,1}$ с нужными свойствами.



b

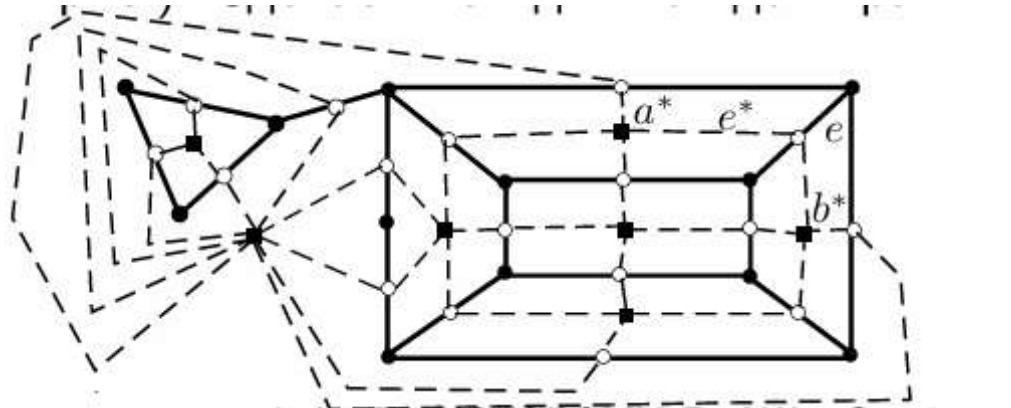
Двойственный граф. Соответствие объектов плоского графа и его двойственного (вершины, ребра, грани, петли, мосты итд).

Двойственный граф

- Пусть G – связный плоский граф. Вершины двойственного графа G^* будут соответствовать граням графа G : внутри каждой грани а графа G мы отметим соответствующую ей вершину a^* графа G^* . Будем говорить, что вершина a^*

двойственна грани a .

- Зафиксируем на каждом ребре графа G по точке, которую назовём серединой этого ребра. Точку a^* можно соединить внутри грани a непересекающимися ломаными с серединами всех входящих в границу грани a рёбер, как описано в Лемме 10 (см. рис.). Сделаем так для каждой грани графа G .



- Пусть $e \in E(G)$ – ребро, по которому граничат две грани a и b графа G (возможно, $a = b$). Ему будет соответствовать ребро e^* двойственного графа G^* , соединяющее двойственные граням a и b вершины a^* и b^* и проходящее через середину ребра e . Назовём ребро e^* двойственным к e .
 - Если грани a и b совпадают (или, что равносильно, ребро e – мост), то e^* – петля.
 - Вершины $a^*, b^* \in V(G^*)$ оказываются соединены таким количеством рёбер, сколько общих рёбер имеют границы граней a и b .
 - Таким образом, существует естественная биекция между рёбрами G и рёбрами G^* (каждому ребру графа G ставится в соответствие двойственное).
- Следовательно, $e(G) = e(G^*)$.
- Граф G^* зависит не только от графа G , но и от изображения этого графа на плоскости, потому мы определяем G^* для плоского графа G . Для разных плоских изображений одного планарного графа могут получиться неизоморфные двойственные графы.
 - Двойственный граф не зависит ни от того, какие точки мы выберем внутри граней исходного графа G , ни от того, какие точки мы назовем серединами рёбер. Нетрудно доказать, что получатся изоморфные плоские графы.
 - Итак, вершины графа G^* соответствуют граням графа G , а рёбра графа G^* соответствуют рёбрам графа G . Чему в G соответствуют грани G^* ?

Лемма 11

Пусть G – связный плоский граф. Тогда существует биекция между $V(G)$ и $F(G^*)$, которая ставит в соответствие каждой вершине $a \in V(G)$ грань $a^* \in F(G^*)$, содержащую a .

Доказательство.

- Рассмотрим грань $a^* \in F(G^*)$ и докажем, что на ней изображена хотя бы одна вершина графа G .
- Рассмотрим ребро $e^* \in E_{a^*}$. По построению его пересекает ребро e графа G . Следовательно, часть изображения ребра e лежит в грани a^* . По построению e пересекает ровно одно ребро графа G^* и ровно один раз, следовательно, хотя бы один конец e (а это вершина графа G) лежит в a^* .
- Нам известно, что $f(G) = v(G^*)$, $e(G) = e(G^*)$. По формуле Эйлера, $v(G) + f(G) - e(G) = 2 = v(G^*) + f(G^*) - e(G^*)$, откуда следует, что $f(G^*) = v(G)$.
- Значит, на каждой грани a^* плоского графа G^* лежит ровно одна вершина графа G , которую мы и обозначим через a . В обозначениях Леммы 11 мы будем говорить, что вершина $a \in V(G)$ и грань $a^* \in F(G^*)$ двойственны друг другу.

$$(G^*)^* \simeq G.$$

Пусть G – связный плоский граф. Тогда $(G^*)^* \simeq G$

Доказательство.

- Отметим на каждой грани $a^* \in F(G^*)$ двойственную ей вершину $a \in V(G)$ (это можно сделать по Лемме 11). На каждом ребре $e^* \in E(G^*)$ отметим в качестве середины как раз ту точку, что была использована при построении G^* .
- После этого от каждой вершине графа G проведем “половинки” инцидентных ей ребер из $E(G)$, как раз до их середин. В результате будут в точности проведены ребра графа G , как на исходном изображении. Получится граф G .
- Итак, на каждой грани $a^* \in F(G^*)$ отмечена ровно одна вершина, которая соединена с некоторыми серединами ребер из $E(G^*)$ непересекающимися

ломаными так, что для каждого ребра $e^* \in E(G^*)$ проведено двойственное ребро $e \in E(G)$.

- Следовательно, от точки a на грани $a^* \in G^*$ проведены ломаные до всех середин ребер из $B(a^*)$, причем до граничных ребер — с одной, а до внутренних — с обеих сторон. Таким образом, построенный граф G — это двойственный граф $(G^*)^*$.
- Так как построение двойственного графа не зависит от выбора точек на гранях и середин ребер, $(G^*)^* \simeq G$.

Раскраска граней плоского графа. Теорема о 5 красках.

Раскраски карт.

- **Карта** — связный плоский граф без мостов. Его грани иногда называют **странами**.
- Раскраска граней плоского графа G называется **правильной**, если две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета.
- Для плоского графа G мы будем обозначать через $\chi^*(G)$ минимальное количество цветов, для которого существует правильная раскраска граней графа G .
- Нетрудно понять, что правильные раскраски граней плоского графа G взаимно однозначно соответствуют правильным раскраскам вершин двойственного графа G^* . Поэтому $\chi^*(G) = \chi(G^*)$ и $\chi(G) = \chi^*(G^*)$
- **Гипотеза четырёх красок. (F.Guthrie, 1852.)** Страны любой карты можно правильным образом покрасить в 4 цвета.
- 4СС эквивалентна следующему утверждению: $\chi(G) \leq 4$ для любого планарного графа G без петель.

Теорема о 5 красках

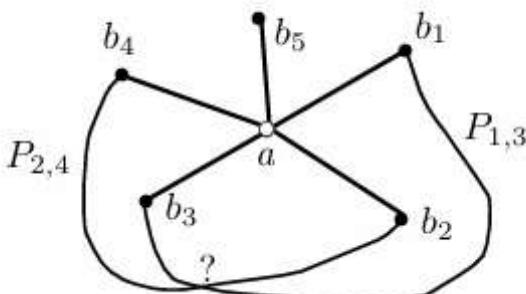
Теорема 6

(F. Kempe, 1879.)

Для любого планарного графа G без петель $\chi(G) \leq 5$.

Доказательство.

- Индукция по $v(G)$, база для случая $v(G) \leq 5$ очевидна. По [Следствию 2](#) граф G имеет вершину a степени не более 5.
- Граф $G - a$ также планарен и по индукционному предположению мы знаем, что $\chi(G - a) \leq 5$. Пусть ρ — правильная раскраска вершин $G - a$ в 5 цветов.
- Если вершины из $N_G(a)$ покрашены не более чем в 4 цвета, мы можем докрасить вершину a и получить правильную раскраску вершин G .
- Остается случай, когда ρ красит $N_G(a)$ в 5 цветов. Тогда $d_G(a) = 5$, пусть $N_G(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, причем соседи упорядочены по выходу рёбер из a (по часовой стрелке). Не умоляя общности, можно считать, что $\rho(b_i) = i$ для всех $i \in [1..5]$.
- Пусть $G_{1,3}$ — индуцированный подграф $G - a$ на вершинах цветов 1 и 3, а U — его компонента связности, содержащая b_1 . Если во всех вершинах U поменять местами цвета 1 и 3, раскраска останется правильной, а b_1 будет покрашена в цвет 3.
- Если в новой раскраске невозможно докрасить вершину a , в ее окрестности должен остаться цвет 1 — но в него может быть покрашена только вершина b_3 и только в случае $b_3 \in U$.
- Значит, достаточно рассмотреть случай, когда вершины b_1 и b_3 соединены путём $P_{1,3}$ по вершинам цветов 1 и 3 (см. рисунок).



- Аналогично, достаточно рассмотреть случай, когда вершины b_2 и b_4 соединены путём $P_{2,4}$ по вершинам цветов 2 и 4. Тогда пути $P_{1,3}$ и $P_{2,4}$ должны пересекаться, что, очевидно, невозможно.

Тэйтова раскраска триангуляции, связь с реберной раскраской кубического плоского графа без мостов.

Определение

Пусть T – **триангуляция**. Назовём **Тэйтовой раскраской** триангуляции T такую раскраску рёбер T в три цвета, что все рёбра каждой грани разноцветны.

- Далее рассматриваются графы без петель, иначе вопросы о правильной раскраске вершин бессмысленны.

Теорема 7

(P. G.Tait, 1880.) Четыре утверждения равносильны.

1. Для любого плоского графа G выполняется $\chi(G) \leq 4$.
2. Для любого рёберно двусвязного плоского графа G выполняется $\chi^*(G) \leq 4$.
3. Для любого рёберно двусвязного плоского кубического графа G выполняется $\chi'(G) = 3$.
4. Для любой триангуляции T существует Тэйтова раскраска.

Доказательство.

1 \circ \Rightarrow 2 \circ . Рёберно двусвязный граф G не имеет мостов, следовательно, его двойственный граф G^* не имеет петель. Тогда $\chi^*(G) = \chi(G^*) \leq 4$.

3 \circ \Rightarrow 4 \circ . Очевидно, двойственный граф T^* триангуляции T является рёберно двусвязным кубическим графом, а правильная раскраска его рёбер в 3 цвета – Тэйтовой раскраской рёбер T .

4 \circ \Rightarrow 3 \circ . Пусть G – кубический рёберно двусвязный плоский граф. Очевидно, двойственный граф G^* – триангуляция, а Тэйтова раскраска триангуляции G^* является правильной раскраской рёбер G в три цвета.

2 \circ \Rightarrow 3 \circ . • Пусть G — плоский рёберно двусвязный кубический граф. У него есть правильная раскраска ρ^* граней в 4 цвета. Поскольку всё равно, как нумеровать цвета, мы будем считать, что ρ^* принимает значения из $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

- Так как G — рёберно двусвязный граф, каждое ребро $e \in E(G)$ разделяет две разные грани a и b . Мы положим $\rho'(e) = \rho^*(a) + \rho^*(b)$. Так как $a \neq b$, то $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$, следовательно, $\rho'(e) = (0, 0)$. Таким образом, ρ' — раскраска рёбер графа G в три цвета.
- Докажем, что раскраска ρ' — правильная. Пусть v — вершина графа G , а a, b, c — три содержащие её грани. Как уже отмечалось, все эти грани различны, любые две из них имеют общее ребро.
- Следовательно, $\rho^*(a), \rho^*(b)$ и $\rho^*(c)$ — три разных цвета, откуда следует, что три цвета инцидентных вершине v рёбер $\rho^*(a) + \rho^*(b), \rho^*(a) + \rho^*(c), \rho^*(b) + \rho^*(c)$ также различны.
- Таким образом, ρ' — правильная раскраска рёбер G в 3 цвета.
- Следовательно, $\chi'(G) = 3$ (так как очевидно, что $\chi'(G) \geq 3$).

3 \circ \Rightarrow 1 \circ . • Достаточно рассмотреть связный граф G с $v(G) \geq 3$. По [Лемме 8](#) граф G является подграфом триангуляции H .

- Рассмотрим рёберно двусвязный кубический граф H^* . Существует правильная раскраска ρ' рёбер этого графа в 3 цвета.
- Пусть $H_{i,j}^*$ — подграф H^* на рёбрах цветов $i, j \in \{1, 2, 3\}$ в раскраске ρ' . Тогда $d_{H_{i,j}^*}(v) = 2$ для любой вершины $v \in V(H^*)$, следовательно, $H_{i,j}^*$ — объединение нескольких циклов.
- Легко видеть, что существует правильная раскраска $\rho_{i,j}^*$ граней графа $H_{i,j}^*$ в два цвета.
- Рассмотрим произвольную грань a графа H^* . Пусть a_{12} — грань H_{12}^* , частью которой является a , а a_{13} — грань H_{13}^* , частью которой является a (понятно, что a_{12} и a_{13} определены однозначно).
- Положим $\rho^*(a) = (\rho_{1,2}^*(a_{1,2}), \rho_{1,3}^*(a_{1,3}))$. • Мы получили раскраску граней графа H^* в четыре цвета.
- Покажем, что раскраска ρ^* является правильной.
- Рассмотрим имеющие общее ребро e грани a и b графа H^* , пусть $a = a_{1,2} \cap a_{1,3}, b = b_{1,2} \cap b_{1,3}$ — определённые выше представления в виде пересечений граней.
- Если $\rho'(e) \in \{1, 2\}$, то $a_{1,2} = b_{1,2}$, причём эти грани графа $H_{1,2}^*$ граничат по ребру e , следовательно, $\rho_{1,2}^*(a_{1,2}) = \rho_{1,2}^*(b_{1,2})$, а тогда и $\rho^*(a) = \rho^*(b)$.
- Если $\rho'(e) = 3$, то аналогично $\rho_{1,3}^*(a_{1,3}) = \rho_{1,3}^*(b_{1,3})$ и $\rho^*(a) = \rho^*(b)$.
- Таким образом, $\chi(G) \leq \chi(H) = \chi^*(H^*) \leq 4$, что и требовалось доказать.

Теорема о раскраске граней плоского графа в два цвета.

Теорема 8

Пусть G – плоский график. Тогда $\chi^*(G) \leq 2$ если и только если все вершины G имеют четную степень.

Доказательство.

⇒. Пусть $d_G(a) = n$, упорядочим выходящие из a ребра в порядке обхода по часовой стрелке: $ab_1, \dots ab_n$ (нумерация циклическая, некоторые из вершин $b_1, \dots b_n$ могут совпадать).

- Как мы знаем, каждая пара соседних ребер ab_i, ab_{i+1} входит в границу одной грани – назовем ее f_i . Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ грани f_i и f_{i+1} – разного цвета, откуда очевидно следует, что n четно.

⇐. Индукция по числу

База для графа без ребер очевидна.

Переход. • Пусть для меньших чем G графов утверждение доказано.

- Так как все вершины графа G имеют четную степень, в G есть простой цикл Z .
- Тогда степени всех вершин графа $G' = G - E(Z)$ также четны, и грани G' по индукционному предположению можно покрасить в два цвета правильным образом.
- Вернем на изображение цикл Z – он делит плоскость на две области, внутри и вне цикла.
- Перекрасим все, что внутри Z , наоборот
- Получится правильная раскраска граней графа G : любые две грани вне или внутри Z с общим ребром по-прежнему покрашены в разные цвета.
- Цикл Z разрезал некоторые грани графа G и теперь их части, граничащие по ребрам Z , покрашены в разные цвета.

Теорема Головиной-Яглома о раскраске вершин триангуляции в 3 цвета

Теорема о 3 красках.

- Понятно, что триангуляция — недвудольный граф. А что можно сказать о раскраске вершин триангуляции в три цвета?
- В 1898 году Хивуд впервые высказал гипотезу о том, что вершины триангуляции можно правильно покрасить в 3 цвета, если и только если степени всех ее вершин четны.
- Это было доказано лишь много лет спустя.

Теорема 9

(Л.И.Головина, И.М.Яглом, 1961.) Пусть T — плоская триангуляция. Тогда $\chi(T) = 3$, если и только если степени всех вершин T четны.

Доказательство. (Е.Аксенова, 2024.)

• Отметим, что для любой вершины $a \in T$ график $T(N_T(a))$ содержит циклический маршрут длины $d_T(a)$ (так как концы соседних в плоском изображении рёбер, выходящих из a — различные и смежны). Обозначим этот циклический маршрут через $Z_{T,a}$.

⇒. Пусть вершина a имеет нечетную степень. Тогда $Z_{T,a}$ нечетен и для его правильной раскраски нужно задействовать все три цвета, но в этом случае невозможно покрасить вершину a .

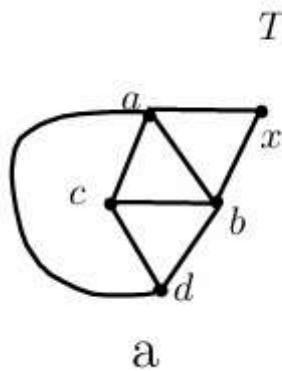
⇐. Пусть все вершины T имеют четную степень. Докажем существование правильной раскраски вершин T в три цвета индукцией по $v(T)$.

База для случая $v(T) = 3$ очевидна.

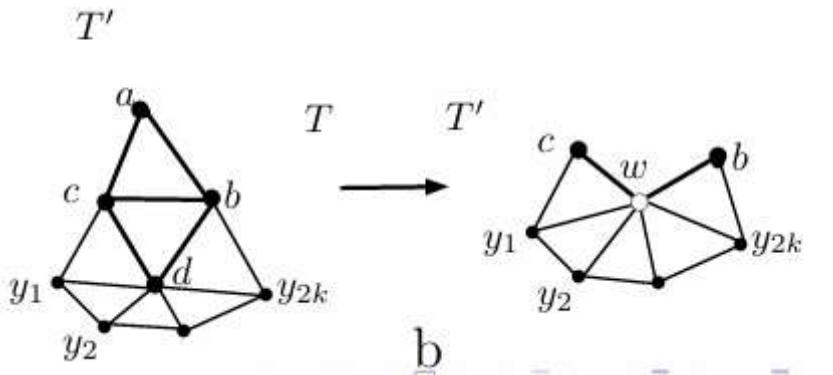
Переход. • Пусть $v(T) > 3$. Нам нужны две соседних треугольных грани abc и bcd такие, что $a \neq d$ и $ad \notin E(T)$.

• Предположим, что одна из этих неприятностей с вершинами a и d случилась. Тогда цикл abd (из двух кратных ребер при $a = d$ или треугольник при $ad \in$

$E(T)$) делит плоскость на две части, в одной из них лежит вершина с (см. рисунок а).



- Так как $v(T) > 3$, в другой части ребро ab входит в грань abx . Очевидно $x \neq d$ (иначе $d_T(b) = 3 \not\geq 2$, противоречие). Тогда $c \neq x$ и $cx \notin E(T)$.
- Таким образом, можно считать, что $a \neq d$ и $ad \notin E(T)$ (иначе рассмотрим грани bac и abx).
- Рассмотрим меньшую триангуляцию $T' = (T - bc) \# ad$ (склеиваем вершины a и d в новую вершину w , склеиваем пары ребер ab и bd , а также ac и cd , см. рисунок б).



- Тогда все степени вершин T' четны ($d_{T'}(ad) = d_T(a) + d_T(d) - 2$, $d_{T'}(b) = d_T(b) - 2$, $d_{T'}(c) = d_T(c) - 2$, а степени остальных вершин в T и T' одинаковы).
- По индукционному предположению триангуляция T' имеет правильную раскраску ρ в 3 цвета.
- НУО $\rho(w) = 1$ и $\rho(b) = 2$. Перенесем цвета вершин в T и положим $\rho(a) = \rho(d) = 1$.
- Остается лишь проверить, что $\rho(c) \neq \rho(b)$.
- Так как $d_T(d)$ четно, от db до dc из d выходит четное число ребер — скажем, dy_1, \dots, dy_{2k} против часовой стрелки. Эти же ребра выходят в T' из вершины ad против часовой стрелки между wb и wc .
- Тогда в последовательности вершин b, y_1, \dots, y_{2k}, c каждые две соседние смежны в T' , и все они имеют в ρ цвет, отличный от $\rho(w) = 1$.

- Значит, в этой последовательности чередуются цвета 2 и 3, тогда $\rho(c) = 3$, что нам и нужно.