Совершенные графы. Элементарные примеры, гипотезы Бержа, теорема Ловаса (формулировка)

Совершенные графы

Определение

Кликовое число графа G (обозначение: $\omega(G)$) — это количество вершин в наибольшей клике (то есть полном подграфе) этого графа.
• Очевидно, $\chi(G) \geq \omega(G)$.
• Как нам известно, большое хроматическое число в графе может быть даже в графе без треугольников, тем более без больших клик.
• Однако важное место в теории графов занимают графы, для которых хроматическое и кликовое число равны. Определение Граф G называется совершенным, если для любого его индуцированного подграфа H выполняется условие $\chi(H) = \omega(H)$.
• Простейшим примером совершенных графов являются полные графы и двудольные графы.
• Отметим, что любой индуцированный подграф совершенного графа также совершенен.
• В 1963 году Берж высказал две гипотезы о том, как устроены совершенные графы.

Слабая гипотеза Бержа.

Граф G совершенен тогда и только тогда, когда граф $\overline{G}$ совершенен.

Сильная гипотеза Бержа.

Граф G совершенен тогда и только тогда, когда ни G, ни $\overline{G}$ не содержат нечётного цикла длины более 3 в качестве индуцированного подграфа.

Теорема Ловаса о совершенных графах.

Теорема (L. Lovász, 1972)

Граф G совершенен тогда и только тогда, когда для любого его индуцированного подграфа G' выполняется:

$$\omega(G\prime)\omega(\overline{G\prime}) = \alpha(G\prime)\omega(G\prime) \geq v(G\prime).$$

Следствие 1

Граф G совершенен тогда и только тогда, когда граф $\overline{G}$ совершенен.

Доказательство (G. Gasparian, 1996)

- Следствие 1 очевидно, так как Теорема 14 даёт критерий совершенности графа, одинаковый для графа и его дополнения.
- Приступим к доказательству теоремы.

Прямое доказательство $(\Rightarrow)$

Если граф совершенен, то для любого его индуцированного подграфа G' в силу его совершенности и Леммы 1 мы имеем:

$$\omega(G') = \chi(G') \geq \frac{v(G')}{\alpha(G')},$$

откуда умножением на $\alpha(G')$ получаем то, что нужно.

Обратное доказательство $(\Leftarrow)$

- Докажем обратную импликацию индукцией по $v(G)$.
- **База**: $v(G) = 1$ очевидна.
- **Переход**: Рассмотрим граф G, удовлетворяющий условию:

$$\omega(G\prime)\omega(\overline{G\prime}) = \alpha(G\prime)\omega(G\prime) \geq v(G\prime).$$

- По индукционному предположению любой индуцированный подграф G совершенен.
- В частности, для любой вершины $u \in V(G)$ граф $G - u$ совершенен.
- Пусть $\alpha = \alpha(G), \omega = \omega(G)$.
- Тогда для любой вершины $u \in V(G)$ выполняется:

$$\chi(G-u) = \omega(G-u) \leq \omega. \tag{1}$$

- Предположим, что граф G не совершенен, то есть $\chi(G) > \omega(G)$.
- Пусть $A_0 = \{u_0, \ldots, u_{\alpha-1}\}$ – независимое множество в графе G.
- Ввиду условия (1) существует правильная раскраска вершин $G - u_i$ в ω цветов. Тогда $V(G - u_i)$ можно разбить на ω независимых множеств: $A_{i\omega+1}, \ldots, A_{(i+1)\omega}$.
- Итого мы имеем $\alpha \cdot \omega + 1$ независимых множеств: $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha\cdot\omega}$.

Утверждение

Пусть C – множество вершин клики размера ω в графе G. Тогда C пересекает все множества $A_0, \ldots, A_{\alpha\cdot\omega}$, кроме одного.

Доказательство

- Рассмотрим разбиение вершин графа G на $\omega + 1$ независимых множеств $\{\{u_i\}, A_{i\omega+1}, \ldots, A_{(i+1)\omega}\}$.

- Так как C может пересекать независимое множество лишь по одной вершине, C пересекает все эти множества, кроме одного.

- Значит, C либо пересекает все множества $A_{i\omega+1}, \ldots, A_{(i+1)\omega}$, либо все эти множества, кроме одного, и при этом $C \ni u_i$.

- Поскольку $|C \cap A_0| \leq 1$, то C содержит не более, чем одну из вершин $u_0, \ldots, u_{\alpha-1}$.

- • Тогда либо $|C \cap A_0| = 1$ и C пересекает все множества $A_1, \ldots, A_{\alpha\omega}$, кроме одного, либо $C \cap A_0 = \emptyset$ и C пересекает все множества $A_1, \ldots, A_{\alpha\omega}$.

- Пусть $M \in M_{\alpha\cdot\omega+1}(\mathbb{R})$ – матрица, заданная равенством $m_{i,j} = |A_i \cap C_j|$ (индексы пробегают значения из $[0, \ldots, \alpha \cdot \omega]$).

- Понятно, что $m_{i,j} \in \{0, 1\}$, причём по построению $m_{i,i} = 0$.

- Тогда по утверждению $m_{i,j} = 1$ при $i \neq j$.

- Таким образом, матрица M имеет нули на главной диагонали и единицы на всех остальных позициях.

Утверждение

Ранг матрицы M равен $\alpha \cdot \omega + 1$.

- Пусть $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Рассмотрим матрицу $A \in M_{\alpha\cdot\omega+1,n}(\mathbb{R})$, где $a_{i,j} = 1$, если $A_i \ni v_j$, и $a_{i,j} = 0$ в противном случае.
- Рассмотрим матрицу $B \in M_{n,\alpha\cdot\omega+1}(\mathbb{R})$, где $b_{j,\ell} = 1$, если $v_j \in C_\ell$, и $b_{j,\ell} = 0$ в противном случае.
- Легко видеть, что $(AB)_{s,t} = |A_s \cap C_t| = m_{s,t}$.
- Так как $\mathrm{rk}(M) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$, мы имеем:

$$v(G) = n \geq \mathrm{rk}(A) \geq \mathrm{rk}(M) = \alpha \cdot \omega + 1,$$

что противоречит неравенству $(*)$, а значит, и условию теоремы.