

# Сети и потоки. Разрез сети. Лемма о потоке через разрез.

---

## Сеть

---

Задано множество вершин  $V$ , в котором выделены две вершины:  $s$  (**вход** или **исток**) и  $t$  (**выход** или **сток**).

Определена функция  $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая для любых вершин  $x, y \in V$  соотношениям

1.  $c(x, y) \geq 0$ ,
2.  $c(x, s) = 0$ ,
3.  $c(t, y) = 0$

Тогда  $G = (V, s, t, c)$  - **сеть**, функция  $c$  называется **пропускной способностью** сети  $G$ .

Множество  $A(G) = \{(x, y) : c(x, y) > 0\}$  называется **множеством стрелок** сети  $G$ .

## Поток

---

### Определение

---

Пусть  $G$  — сеть, а функция  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет трём условиям:

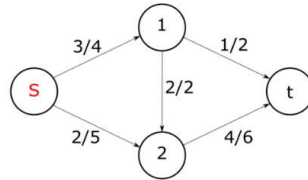
- (F1) для любых  $x, y \in V$ ,  $f(x, y) \leq c(x, y)$ ;
- (F2) для любых  $x, y \in V$ ,  $f(x, y) = -f(y, x)$ ;
- (F3) для любой вершины  $v \in V$ ,  $v \neq s, t$  выполняется условие:  
$$\sum_{x \in V} f(v, x) = 0.$$
- Тогда  $f$  — поток в сети  $G$ .
- Число  $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$   
называется величиной потока.
- Поток сети  $G$  с максимальной величиной называется **максимальным**.

Вообще-то не очевидно, что максимальный поток существует.

## Пояснение

### Пример

Пример сети с источником  $s$  и стоком  $t$ .



Первое число означает величину потока, второе — пропускную способность ребра. Отрицательные величины потока не указаны (так как они мгновенно получаются из антисимметричности:

## Разрез

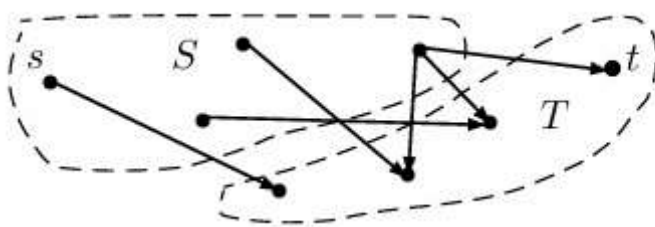
### Определение

1. Пусть  $G$  — сеть, а множество её вершин  $V$  разбито на два непересекающихся множества  $S \ni s$  и  $T \ni t$ . Тогда  $(S, T)$  — **разрез** сети  $G$ .

2. Величина  $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$  называется **пропускной способностью разреза**.

3. Любой разрез сети  $G$  с минимальной пропускной способностью называется **минимальным**.

4. Для любого потока  $f$  в сети  $G$  величина  $f(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y)$  называется потоком через разрез  $(S, T)$ .



Нетрудно понять, что минимальный разрез сети существует. Возможно, таких разрезом несколько.

## Лемма 1

Для любого потока  $f$  и разреза  $(S, T)$  сети  $G$  выполняется  $|f| = f(S, T)$ .

## Доказательство

Ввиду условия  $(F3)$ :

$$|f| = \sum_{x \in V} f(s, x) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in S} f(y, x).$$

В правой части равенства для любых двух вершин  $y, z \in S$  присутствуют слагаемые  $f(y, z)$  и  $f(z, y)$ , которые в силу  $(F2)$  в сумме дают 0. Поэтому:

$$\sum_{y \in S} \sum_{x \in V} f(y, x) = \sum_{y \in S} \sum_{x \in T} f(y, x) = f(S, T)$$

что и требовалось доказать.

# Остаточная сеть и дополняющий путь. Лемма о сумме потоков. Поток вдоль пути

---

## Остаточная сеть. Дополняющий путь

---

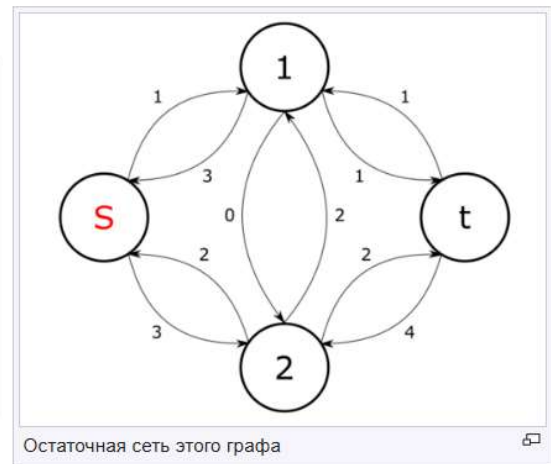
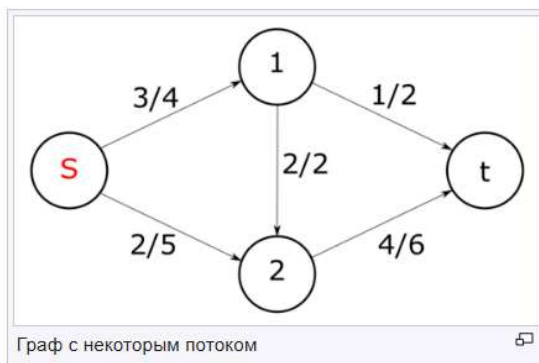
### Определение

1. Пусть  $f$  — поток в сети  $G$ . Рассмотрим сеть  $G_f$  с теми же  $V, s, t$  и пропускной способностью:

$$c_f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = s \text{ или } x = t, \\ c(x, y) - f(x, y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Назовем  $G_f$  **остаточной сетью** потока  $f$ .

2. **Дополняющий путь** потока  $f$  — это любой  $st$ -путь в остаточной сети  $G_f$ .



## Лемма 2

Пусть  $f$  — поток в сети  $G$ ,  $f'$  — поток в сети  $G_f$ . Тогда  $f + f'$  — поток в сети  $G$ , причём:

$$|f + f'| = |f| + |f'|.$$

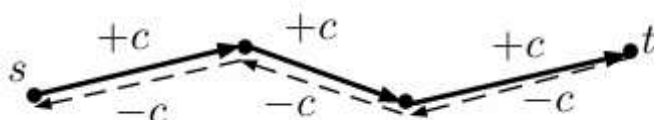
## Доказательство

Нетрудно проверить для потока  $f + f'$  условия  $(F1)$ ,  $(F2)$  и  $(F3)$ . Утверждение про величину потока очевидно.

## Поток вдоль пути

Определение Пусть  $P$  —  $st$ -путь в сети  $G$ , а  $c$  — минимальная пропускная способность стрелки пути  $P$ . Определим поток  $f_P$  **вдоль пути**  $P$ :

$f_P(x, y) = c$  при  $xy \in A(P)$ ,  $f_P(x, y) = -c$ , при  $yx \in A(P)$ ,  $f_P(x, y) = 0$  при  $xy, yx \notin A(P)$



# Теорема Форда-Фалкерсона и следствие о минимальном разрезе.

## Теорема 1

(L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956.)

В сети  $G = (V, s, t, c)$  задан поток  $f$ . Тогда следующие три утверждения равносильны:

1. Поток  $f$  максимален.
2. Существует такой разрез  $(S, T)$ , что  $|f| = c(S, T)$ .
3. В остаточной сети  $G_f$  нет дополняющего пути.

### Доказательство

2  $\implies$  1. Рассмотрим другой поток  $f'$ . По [Лемме 1](#):

$$|f'| = f'(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f'(x, y) \leq \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y) = c(S, T) = |f|,$$

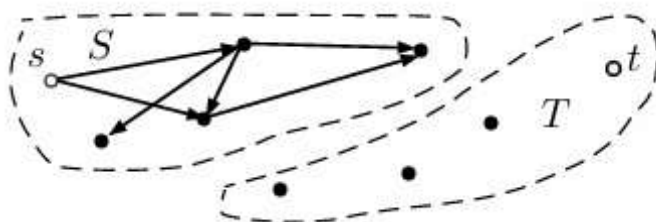
откуда следует максимальность  $f$ .

1  $\implies$  3

Предположим противное, пусть в остаточной сети  $G_f$  есть дополняющий путь  $P$ , а  $f_P$  — поток вдоль пути  $P$ . По [Лемме 2](#) тогда  $f + f_P$  — поток в  $G$ , причём:

$$f + f_P = f + f_P > f,$$

что противоречит максимальности  $f$ .



3  $\implies$  2

- Пусть  $S$  — множество всех вершин, достижимых из  $s$  в остаточной сети  $G_f$  (см. рисунок).
- Так как в  $G_f$  нет дополняющего пути, то  $t \notin S$ . Тогда  $(S, T = V \setminus S)$  — разрез в сетях  $G$  и  $G_f$ .
- По построению  $A_{G_f}(S, T) = \emptyset$ , следовательно:

$$0 = c_f(S, T) = c(S, T) - f(S, T),$$

откуда:

$$c(S, T) = f(S, T) = f$$

(последнее равенство следует из Леммы 1).

## Следствие 1

---

Величина максимального потока в сети  $G$  равна пропускной способности минимального разреза сети  $G$ .

## Доказательство.

---

- Рассмотрим максимальный поток  $f$  и такой разрез  $(S, T)$ , что  $f = c(S, T)$  (такой разрез существует по теореме 1).
- Тогда для любого другого разреза  $(S', T')$  мы имеем  $c(S', T') \geq f(S', T') = f(S, T) = c(S, T)$ . Значит, разрез  $(S, T)$  минимален.

## Целые сети. Целый максимальный поток в целой сети.

---

## Определение

---

- Сеть  $G$  называется **целой**, если ее пропускная способность  $c$  – **целочисленная**.
- Поток  $f$  называется **целым**, если на любой паре вершин он принимает **целочисленное** значение.

## Теорема 2

---

В целой сети  $G$  существует максимальный поток. Среди максимальных потоков целой сети найдется целый.

### Доказательство.

---

- Будем последовательно строить поток. Изначально положим  $f = 0$ .
- Пусть в некоторый момент есть целый поток  $f$  в целочисленной сети  $G$ . Рассмотрим остаточную сеть  $G_f$ . Если в  $G_f$  нет дополняющего пути  $P$ , то по [Теореме 1](#) поток  $f$  максимальный.
- Если же в  $G_f$  есть дополняющий путь  $P$ , то рассмотрим поток  $f_P$  вдоль пути  $P$  в остаточной сети  $G_f$  и положим  $f := f + f_P$ .
- По [Лемме 2](#) мы построили новый целый поток в  $G$ , причем его пропускная способность на  $|f_P|$  больше, чем у предыдущего.
- Так как с каждым шагом величина потока возрастает на целую величину (хотя бы на 1), процесс обязательно закончится, в результате мы получим целый максимальный поток в сети  $G$ .

## Реберная теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.

---

### Определение

---

Пусть  $G$  – неориентированный граф без петель, кратные рёбра допускаются. Для  $x, y \in V(G)$  обозначим через  $\lambda_G(x, y)$  размер минимального множества

рёбер, отделяющего  $x$  от  $y$ . Назовем  $\lambda_G(x, y)$  рёберной связностью вершин  $x$  и  $y$ .

## Теорема 3

---

(L. R.Ford, D.R.Fulkerson, 1956.) Пусть  $s, t \in V(G)$ . Тогда существует  $\lambda_G(s, t)$  путей из  $s$  в  $t$ , не имеющих общих рёбер.

## Доказательство.

---

- Построим сеть  $\vec{G}$  на множестве вершин  $V(G)$ . Входом будет  $s$ , выходом будет  $t$ .
- Определим пропускные способности:  $c(x, y)$  равняется кратности ребра  $xy$  в графе  $G$  (то есть, 0, если такого ребра нет, и  $m$ , если в графе  $G$  есть  $m$  кратных рёбер  $xy$ ). Дополнительно определим  $c(x, s) = c(t, x) = 0$  для всех  $x \in V(G)$ .
- Отметим, что при  $x, y \notin \{s, t\}$  мы имеем  $c(x, y) = c(y, x)$ .
- Сеть  $\vec{G}$  целая. По [Теореме 2](#) в ней есть целый максимальный поток  $f$ . Пусть  $|f| = k$ .

## Утверждение

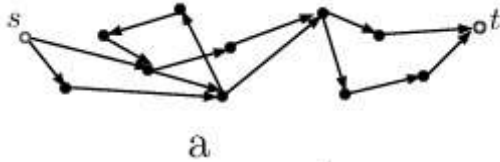
Поток  $f$  распадается на  $k$   $st$ -путей без общих рёбер.

## Доказательство

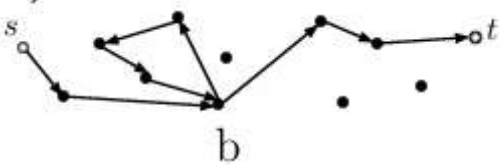
- Построим новый орграф  $G'$  на тех же вершинах. Если  $f(x, y) = l > 0$  для  $x, y \in V(G)$ , мы проведем в  $G'$  ровно  $l$  стрелок  $xy$ .
- Понятно, что  $l \in \mathbb{Z}$  и в графе  $G$  есть не менее  $l$  ребер, соединяющих  $x$  и  $y$ .
- Из вершины  $s$  выходит ровно  $k$  стрелок, а в каждой отличной от  $s$  и  $t$  вершине  $v$  по свойству потока ( $F3$ ) количества входящих и выходящих



стрелок равны (см. рис.а). Встречных стрелок по свойству ( $F2$ ) потока нет.



- Выйдем из  $s$  и будем каждый раз проходить по стрелке орграфа  $G'$ , по которой еще не ходили. В некоторый момент мы достигнем  $t$  (если в любую другую вершину мы вошли, сможем и выйти, см. рис.б).



-Удалим из  $G'$  стрелки пройденного пути, теперь из  $s$  выходит  $k - 1$  стрелка. Повторим эти действия еще  $k - 1$  раз. В результате будет выделено  $k$  непересекающихся по рёбрам  $st$ -путей в графе  $G$  (не обязательно простых).

- Вернемся к доказательству Теоремы 3. По [Теореме 1](#) для максимального потока  $f$  существует такой разрез  $(S, T)$  нашей сети, что  $c(S, T) = f = k$ .
- Тогда из  $S$  в  $T$  выходит ровно  $k$  рёбер графа  $G$  (так как для  $x \in S$  и  $y \in T$  пропускная способность  $c(x, y)$  равна количеству рёбер между  $x$  и  $y$ ). Эти  $k$  рёбер отделяют  $S$  от  $T$ , а стало быть, и  $s$  от  $t$  в графе  $G$ . Значит,  $k \geq \lambda_G(s, t)$ .

## Определение

Граф называется **рёберно  $k$ -связным**, если он остается связным после удаления любого множества, состоящего из менее чем  $k$  рёбер.

## Следствие

В рёберно  $k$ -связном графе  $G$  для любых двух вершин  $s, t$  существует  $k$  путей из  $s$  в  $t$ , не имеющих общих рёбер.

## Доказательство.

Достаточно применить Теорему 3 к паре вершин  $s$  и  $t$ .

# Максимальный поток в произвольной сети. Алгоритм кратчайшего пути

---

## Теорема 4

---

(Е.А.Диниц, 1970). В произвольной сети  $G$  существует максимальный поток.

## Доказательство

---

- План доказательства такой же, как и в [Теореме 2](#): мы будем постепенно увеличивать максимальный поток, добавляя к нему поток вдоль дополняющего пути. Однако, на этот раз нам нельзя произвольно выбирать дополняющий путь.
- Пусть в некоторый момент построен поток  $f$  в сети  $G$ . Рассмотрим остаточную сеть  $G_f$ . Если в  $G_f$  нет дополняющего пути  $P$ , то по [Теореме 1](#) поток  $f$  максимальный. Пусть в  $G_f$  есть дополняющие пути.
- Мы выберем самый короткий дополняющий путь  $P$  в  $G_f$ , рассмотрим поток  $f_P$  вдоль пути  $P$  и положим  $f' := f + f_P$ . Почему же этот процесс когда-нибудь закончится?

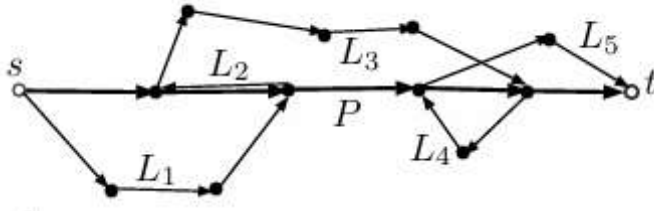
## Утверждение

Пусть  $Q$  – простой  $st$ -путь в остаточной сети  $G_{f'}$ , которого нет в остаточной сети  $G_f$ . Тогда  $Q$  длиннее, чем  $P$ .

## Доказательство.

- Пусть  $s = x_0x_1 \dots x_k = t$  это путь  $P$ . Понятно, что путь  $P$  простой, а значит, все его вершины различны.
- Сначала поймем, какие же стрелки могут входить в  $A(G_{f'}) \setminus A(G_f)$ . Такая стрелка  $yz$  имеет  $c_f(y, z) = 0$ , но  $0 < c_{f'}(y, z) = c_f(y, z) - f_p(y, z)$ . Значит,  $zy \in A(P)$ , то есть,  $z = x_i$  и  $y = x_{i+1}$  для некоторого  $i$ . По условию, путь  $Q$  содержит хотя бы одну такую стрелку.

- **Трансверсаль** пути  $P$  это путь между двумя его вершинами, внутренние вершины которого не принадлежат  $P$ .
- Назовём  $x_i x_j$ -трансверсаль  $L$  пути  $P$  **правильной**, если  $i < j$  и **неправильной** в противном случае.
- Стрелку  $x_i x_{i+1}$ , мы будем считать правильной трансверсалью пути  $P$ , а стрелку  $x_{i+1} x_i$  неправильной.



- Путь  $Q$  разбивается на трансверсали пути  $P$  пусть это  $L_1, \dots, L_m$ . Как показано выше, среди них есть хотя бы одна обратная стрелка пути  $P$  а это неправильная трансверсаль.
- Пусть  $L$  правильная  $x_i x_j$ -трансверсаль пути  $P$ . Тогда все стрелки трансверсали  $L$  лежат в  $A(G_f)$ . Если  $L$  короче, чем  $x_i P x_j$ , то мы могли бы заменить этот участок пути  $P$  на трансверсаль  $L$  и найти в  $G_f$  более короткий путь, чем  $P$ , противоречие с выбором пути  $P$ .
- Таким образом, каждая правильная трансверсаль пути  $P$  не короче участка пути  $P$  между ее концами. Заменяем каждую правильную трансверсаль на соответствующий участок между ее концами. в результате получится  $st$ -маршрут  $Q'$ , который не длиннее  $st$ -пути  $Q$ .
- Поскольку и  $P$ , и  $Q'$  ведут из  $s$  в  $t$ , маршрут  $Q'$  содержит все рёбра пути  $P$ . Так как  $Q$  (а стало быть, и  $Q'$ ) содержит хотя бы одну неправильную трансверсаль пути  $P$ , маршрут  $Q'$  (а следовательно, и путь  $Q$ ) строго длиннее чем  $P$ .

#### • Вернемся к доказательству Теоремы 4

- После каждого шага алгоритма построения потока взамен одного из кратчайших путей из  $s$  в  $t$  в остаточной сети могут появиться лишь строго более длинные пути.
- Значит, в результате каждого шага либо увеличивается длина кратчайшего  $st$ -пути, либо эта длина сохраняется, но уменьшается количество кратчайших  $st$ -путей.
- Отметим, что кратчайший путь всегда простой, а длина простого пути из  $s$  в  $t$  ограничена количеством вершин сети. Значит, процесс построения закончится, и в результате получится остаточная сеть без дополняющих путей. По [Теореме 1](#) это означает, что будет построен максимальный поток