Изображение графа на плоскости, грань.

Определение

Граф называется **планарным**, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках. Вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Внутренние точки любой ломаной, изображающей ребро графа, не должны быть вершинами графа.

Грань плоского графа

• Изображение плоского графа делит плоскость на части — грани. Это ключевой объект для плоского графа, отличающий его от абстрактного планарного графа. Ниже мы дадим формальное определение граней.

• На плоскости изображен плоский граф G. Пусть M — множество всех точек плоскости, не входящих в изображение G.

• Пусть запись $A \sim B$ означает, что точки $A,B \in M$ можно соединить ломаной, не пересекающей изображение графа G.

Укажем три важных свойства $\sim$.

Утверждение

$\sim$ —отношение эквивалентности.

Доказательство.

- Рефлексивность. $A \sim A$
- Симметричность. Если $A \sim B$, то $B \sim A$.
- Транзитивность. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Определение

Грани плоского графа G — классы эквивалентности по отшению $\sim$.

- Таким образом, все точки плоскости, не лежащие на изображении графа G, разбиты на грани.
- Множество всех граней графа G обозначается через F(G), а их количество — через f(G).
- Две точки из одной грани графа G могут быть соединены ломаной, не пересекающей изображение G.
- Любая ломаная, соединяющая две точки из разных граней, пересекает изображение G

Теорема Жордана для замкнутой ломаной.

Теорема 1 Жордана

(C.Jordan, 1887.) Замкнутая несамопересекающаяся ломаная P делит точки плоскости, не лежащие на P, на две такие части, что выполнены следующие условия:

1. любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей P;
2. любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает P.

Доказательство

• Пусть $P_1 ... P_m$ – вершины P в порядке обхода по часовой стрелке. Обозначим через M множество всех точек плоскости, не лежащих на P.

• Зафиксируем на плоскости вектор ℓ, не параллельный ни одной из сторон P. Из каждой точки $A \in M$ выпустим луч $\ell(A)$ в направлении ℓ.

• В случае, если $\ell(A)$ содержит вершину P_i многоугольника P, но стороны $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1} лежат в одной полуплоскости относительно содержащей $\ell(A)$ прямой, мы будем говорить, что многоугольник P в вершине P_i **касается** $\ell(A)$

• Посчитаем число $p(A)$ точек пересечения $\ell(A)$ с P, не являющихся касаниями. Очевидно, что $p(A)$ конечно.

• Часть M_0 будет состоять из всех точек $A \in M$, для которых $p(A)$ четно, а часть M_1 будет состоять из всех точек $B \in M$, для которых $p(B)$ нечетно.

Утверждение M_0 и M_1 непусты

Доказательство

• Рассмотрим прямую ℓ_0, параллельную вектору ℓ, и проходящую через внутреннюю точку ломаной P (то есть точку, не являющуюся ее вершиной).
• При движении по ℓ_0 в направлении вектора ℓ отметим последнее пересечение с ℓ во внутренней точке — пусть это точка X.
• Рассмотрим содержащий X малый отрезок $[Y, Z]$ на этом ℓ_0, не пересекающий P в отличных от X точках, пусть Y лежит перед X при движении в направлении ℓ.
• Тогда $p(Y) = 1$ (единственное пересечение в точке X), а $p(Z) = 0$.

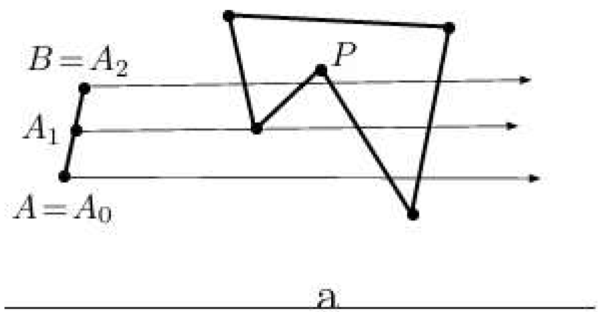
Утверждение

Пусть $A, B \in M$ и отрезок $[A, B]$ не пересекает P. Тогда $p(A)$ и $p(B)$ имеют одинаковую четность. В частности, выполнено условие (2).

Доказательство

• Если $AB||\ell$, то утверждение очевидно.
• Если нет, то отметим на отрезке AB все такие точки $A_1, ..., A_k$ в направлении от A к B, что $\ell(A_i)$ касается P (если они есть). Положим $A_0 = A$ и $A_{k+1} = B$.
• Тогда для каждого $i \in [0..k]$, все точки отрезка $[A_i, A_{i+1}]$ имеют, очевидно, одинаковое значение функции p, а при переходе на соседний отрезок функция p может иметь четный скачок (каждое касание $\ell(A_i)$ многоугольника P добавляет точкам с одной стороны от A_i двойку к количеству пересечений, см. рис.а).
• В любом случае, на всем отрезке $[A, B]$ функция p имеет одинаковую четность.

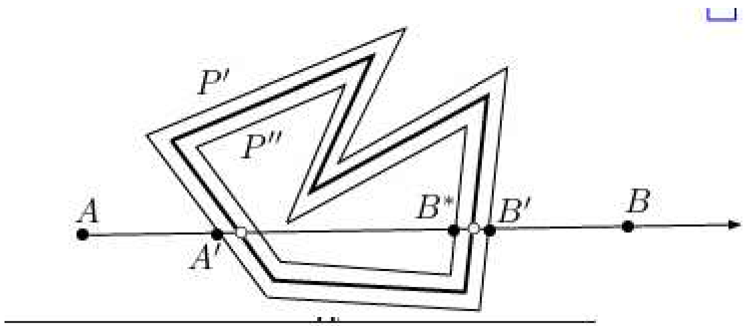
Рисунок а:



Докажем (1).

• Пусть $A, B \in M_i$. Если отрезок $[A, B]$ не пересекает P, то все понятно. Пусть пересекает, причем $A_1 \text{и} B_1$ – ближайшие к A и B соответственно точки пересечения.

• Отметим на отрезке $[A, A_1]$ точку A' очень близко к A_1, а на отрезке $[B_1, B]$ – точку B' очень близко к B_1, пусть $|A1A'|$ = $|B1B'|$ = δ (см. рис. b). Тогда $p(A) = p(A')$ и $p(B) = p(B')$.
Рисункок b:



• Проведем вдоль каждой стороны многоугольника P две параллельных прямых на расстоянии δ с разных сторон, выбрав это число столь малым, чтобы в результате получились два “очень близких” к P многоугольника P' и P'' так, чтобы стороны P' и P'' не пересекали сторон P. (Достаточно выбрать δ меньше, чем минимальное расстояние от стороны P до вершины, на ней не лежащей.)

• НУО $A\prime$ лежит на $P\prime$. Если и $B\prime$ лежит на $P\prime$, то мы построили от $A\prime$ до $B\prime$ ломаную, не пересекающую P, тогда такая ломаная построена и от A до B.
• Пусть $B\prime$ лежит на $P\prime\prime$, тогда обозначим через B^* точку пересечения $P\prime$ с прямой AB, лежащую около B (разумеется, на расстоянии δ).
• Несложно понять, что $p(B*)-p(B\prime) = \pm 1$ (разница состоит в том, что ровно для одной из этих точек учитывается пересечение около точки B_1).
• Однако применив доказанное выше утверждение, получим $p(B^*) \equiv p(A\prime) \equiv p(A) \equiv p(B) \equiv p(B\prime)(mod 2)$, противоречие.

Изображение графа на плоскости и сфере, их соответствие. Внешняя грань.

Плоскость и сфера

• Плоскость и сфера переводятся друг в друга стереографической проекцией.
• Поставим сферу на плоскость, точку касания назовём южным полюсом, противоположную точку — северным полюсом N. Каждая точка $A \neq N$ сферы перейдёт в точку пересечения плоскости и луча NA

Утверждение

Граф является планарным тогда и только тогда, когда его можно изобразить на сфере без пересечения рёбер во внутренних точках.

Доказательство.

• Переводя изображение графа со сферы на плоскость нужно лишь выбрать северный полюс так, чтобы он не совпадал ни с одной из вершин графа и не попадал на рёбра
• Плоское изображение планарного графа ограничено (его можно поместить в большой круг).
• Поэтому в плоском изображении планарного графа есть ровно одна неограниченная внешняя грань, которая визуально сильно отличается от всех остальных, а в сферическом изображении такой грани нет.
• Грань сферического изображения графа, содержащая северный полюс будет соответствовать при стереографической проекции внешней грани плоского изображения.
• Таким образом, перемещая северный полюс на разные грани, можно любую грань сферического изображения сделать внешней гранью в плоском изображении графа. Это лишний раз подчеркивает, что на самом деле внешняя грань не отличается от остальных.

Граница грани. Свойства.

Граница грани

• Рассмотрим ребро e плоского графа G. Либо по разные стороны от e расположены разные грани (тогда ребро e — **граничное** ребро этих двух граней), либо по обе стороны от e — одна и та же грань, тогда назовем ребро e **внутренним** ребром этой грани. Обозначим через E_d множество всех граничных и внутренних рёбер грани d.

• Граничные вершины грани d — это концы ребер из E_d. Обозначим множество граничных вершин грани d через V_d.

• Граничные и внутренние рёбра грани d — это в точности те рёбра, до которых от внутренней точки грани d можно дойти по ломаной, не пересекая изображение графа.

• Граничные вершины грани d — это в точности те вершины, до которых можно дойти по ломаной от внутренних точек этой грани, не пересекая её граничных и внутренних рёбер.

• **Граница** грани d — это подграф $B(d)$ графа G с множеством вершин V_d и множеством рёбер E_d.

• **Размер границы** грани d мы определим, как количество граничных рёбер этой грани плюс удвоенное количество внутренних рёбер. Обозначать эту величину будем через $b(d)$.

Свойство 1

Если сложить размеры границ всех граней, получится удвоенное количество рёбер.

Доказательство

Внутреннее ребро грани два раза считается в размере границы этой грани. Граничное ребро двух граней по разу считается в их размерах.

Свойство 2

Любые две точки на границе грани d можно соединить ломаной, проходящей в d.

Доказательство.

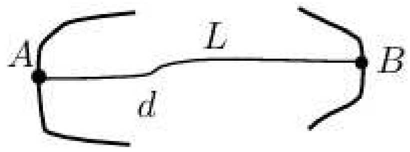
Пусть A — внутренняя точка грани d. От нее можно провести ломаные, не пересекающие изображение G до любых двух граничных. Все точки на этих ломаных лежат в d.

Свойство 3

Если две точки A и B на изображении графа G можно соединить ломаной L, не пересекающей изображения G, то A и B лежат на границе некоторой грани.

Доказательство.

A и B лежат на границе грани d, содержащей все внутренние точки L (см. рисунок а).



а.

Циклический обход границы грани.

Определение

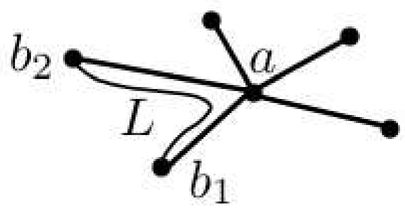
Рассмотрим любую вершину a плоского графа G и упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Два ребра, выходы которых — соседние в этом порядке, будем называть **соседними в вершине а**.

Свойство 4

Пусть ab_1 и ab_2 — два соседних ребра в вершине а. Тогда рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани.

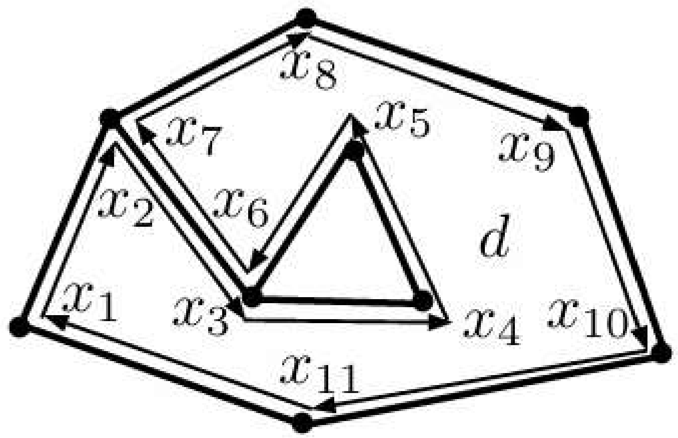
Доказательство.

Вершины b_1 и b_2 можно соединить ломаной вдоль b_1ab_2, не пересекающей изображения G (см. рисунок b). Поэтому, рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани.



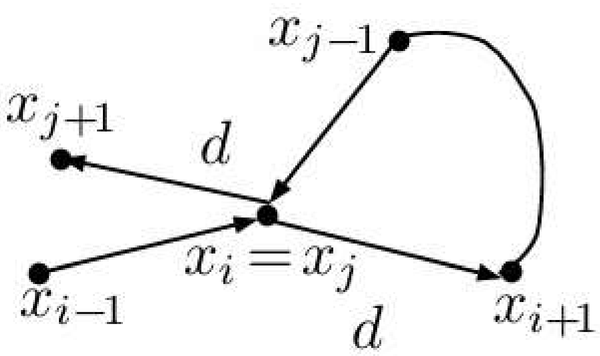
• Пусть G – плоский граф, $d \in F(G)$, а $x_1x_2 \in E_d$.

• Пройдем по ребру x_1x_2 от x_1 к x_2. НУО справа по ходу движения расположена грань d. Повернем в вершине x_2 направо до выхода соседнего ребра x_2x_3. (Если $d_G(x_2) = 1$, то $x_3 = x_1$, это нам не мешает.) Очевидно, $x_2x_3 \in E_d$. Пойдем по этому ребру от x_2 к x_3, справа опять будет расположена грань d. И так далее. В конечном итоге мы вернемся на ребро x_1x_2 (в вершину x_1 мы можем вернуться и раньше!). Получился замкнутый циклический маршрут (см. рис.a).



a

• Пусть получился циклический маршрут $Z = x_1x_2...x_k$. Рассмотрим вершину x_i. по построению, Z обходит вокруг x_i – скажем, против часовой стрелки. Пусть мы вышли из вершины x_i по ребру x_ix_{i+1}, а следующий раз вернулись в эту вершину по ребру $x_{j-1}x_j$ (в этом случае x$i = x$j, см. рис.b).



b

• Тогда сектор между выходами рёбер $x_i x_{i+1}$и$x_j x_{j-1}$ из вершины $x_i = x_j$ не принадлежит грани d. Следовательно, Z проходит все рёбра из E_d, инцидентные вершине x_i. Поскольку это верно для любой вершины Z, этот маршрут обходит все рёбра одной из компонент графа $B(d)$.
• Обозначим через $Z(U)$ такой маршрут для компоненты U, а через $Z(d)$ — объединение построенных маршрутов для всех компонент $B(d)$.
• Если маршрут $Z(d)$ проходит ребро e дважды, то, очевидно, в разных направлениях. Значит, по обе стороны от e расположена грань d, то есть e — внутреннее ребро d.
• Пусть e — внутреннее ребро грани d (см. ребро $x_2x_3 = x_6x_7$ на рисунке). Тогда при проходе по e в любом из направлений справа будет расположена грань d. Поэтому, маршрут $Z(d)$ дважды пройдет e — в обоих направлениях.

Несвязная граница грани у несвязного графа.

Лемма 1

Для плоского графа G выполнены следующие утверждения.

1. Если $d \in F(G)$ и $B(d)$ несвязна, то разные компоненты связности графа $B(d)$ лежат в разных компонентах связности графа G.
2. Граф G несвязен, если и только если он имеет грань с несвязной границей.

Доказательство

1. • Пусть $B_1 \text{и} B_2$ – две компоненты $B(d)$. Изображение компоненты B_1 ограничено и не пересекает других компонент $B(d)$. Следовательно, изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 замкнутой ломаной в грани d, не пересекающей ребер G (такую ломаную можно построить, почти повторив маршрут $Z(B_1)$: вместо каждого прохода по ребру, проведем его копию на малом расстоянии δ в грани d, как в доказательстве теоремы Жордана).
   • Значит, между B_1 и B_2 нет пути в графе G.
2. Очевидно, можно обойти все грани графа G, каждый раз переходя в грань имеющую с предыдущей общую сторону или вершину (достаточно отметить по внутренней точке на каждой грани и проложить на плоскости маршрут, все эти точки обходящий).
   • Тогда, если граница каждой грани связна, то связно и их объединение, а это граф G, противоречие. Значит, несвязный граф имеет грань с несвязной границей.
   • Если G имеет грань с несвязной границей, то G несвязен по пункту 1.

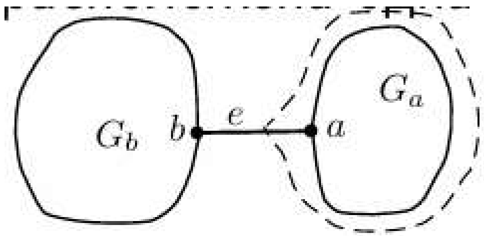
Внутренние рёбра граней — мосты. Границы граней графа без мостов — циклы.

Лемма 2

Внутренние рёбра граней плоского графа G – в точности все мосты графа G.

Доказательство.

• Пусть внутреннее ребро e грани d – не мост, тогда оно лежит в простом цикле C. По теореме Жордана цикл делит плоскость на две области, а грань d может лежать только в одной из них.
• Наоборот, пусть $e = ab$ – мост. Тогда граф $G{-}e$ имеет две компоненты G_a и G_b, содержащие a и b соответственно.
• Изображение компоненты G_a ограничено и не пересекает G_b, значит, существует замкнутая ломаная P в грани d, отделяющая G_a от G_b (см. рис.а). Очевидно, P пересекает ребро e, а значит, по обе стороны от моста e расположена одна и та же грань.



Лемма 3

Пусть d – грань реберно двусвязного графа G. Тогда $B(d)$ – цикл (не обязательно простой).

Доказательство.

• Так как G связен, $B(d)$ – связный граф по Лемме 1. Значит, и $Z(d)$ связен. Так как внутренних рёбер у d нет (граф не имеет мостов), $Z(d)$ – цикл.
• Докажем, что граница грани почти всегда однозначно задает эту грань.

Если есть две грани с одинаковой границей, то граф — простой цикл.

Лемма 4

Если две разные грани f и $f\prime$ плоского графа G имеют одинаковые границы, то G – простой цикл.

Доказательство.

- Пусть B — общая граница этих граней, $e \in E(B)$. По Лемме 2 тогда e — не мост графа G, а значит, существует простой цикл Z, содержащий e.
- Тогда Z делит плоскость на две области – $O \supset f$ и $O\prime \supset f\prime$
- Пусть $e\prime \in B\setminus Z$. Тогда $e\prime$ лежит внутри одной из областей O и $O\prime$ —скажем, в $O\prime$. В этом случае, $e\prime$ не может быть граничным ребром грани $f \subset O$, противоречие.
- Докажем, что $G = Z$, тогда G — простой цикл.
- Если $f = O$ и $f\prime = O\prime$, то $G = Z$, что нам и нужно.
- Пусть, скажем, $f \neq O$.
- Так как каждая грань целиком лежит в одной из областей, O разбивается на грани.
- Значит, существует еще одна грань $f^* \subset O$.
- Пусть $X \in f$ и $X^* \in f^*$.
- Так как точки X и X^* лежат в области O, их можно соединить ломаной L, проходящей в O.
- Пойдем по ломаной L от точки X. В некоторый момент мы перейдем из f в другую грань. Значит, мы пересечем изображение графа G – скажем, ребро e.
- Тогда e – граничное ребро грани f. Но при этом e изображено внутри O (там проходит ломаная L), следовательно, $e \notin E(Z)$. Противоречие с доказанным выше.

Границы граней двусвязного графа.

Лемма 5

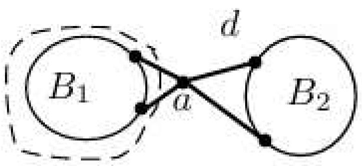
Пусть G — плоский граф.

1. Если грань d и ее граничная вершина a таковы, что B_1 и B_2 — разные компоненты графа $B(d) - a$, то B_1 и B_2 лежат в разных компонентах графа $G - a$. В частности, a — точка сочленения графа G.
2. Граф G без петель вершинно двусвязен, если и только если границы его граней — простые циклы.

Доказательство.

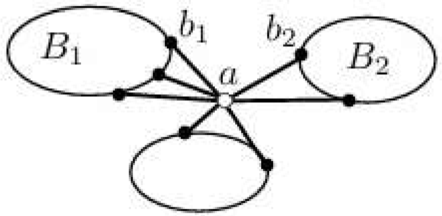
---

1. Аналогично доказательству Леммы 1, плоское изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 ломаной, не пересекающей ребер $G - a$ (см. рис.b), а значит, между B_1 и B_2 нет рёбер в графе $G - a$.
   - Следовательно, a — точка сочленения графа G



b

2. • Пусть a — точка сочленения графа G. Рассмотрим плоское изображение несвязного графа $G - a$, полученное из G удалением вершины a.
   - В силу Леммы 1, граф $G - a$ имеет несвязную грань d, а граф G не имеет. Значит, a лежит на грани d и смежна со всеми компонентами ее границы.
   - Упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Тогда есть два соседних ребра, выходящих к разным компонентам графа $B(d)$ — скажем, ребро ab_1 к компоненте B_1 и ребро ab_2 к компоненте B_2 (см. рис.c).



c

• Точка сочленения а отделяет b_1 от b_2 в графе G. Существует грань f графа G, граница которой содержит a, b_1 и b_2. Тогда а — точка сочленения $B(f)$.

• Наоборот, если грань d такова, что $B(d)$ имеет точку сочленения, то по пункту 1 граф G также имеет точку сочленения.