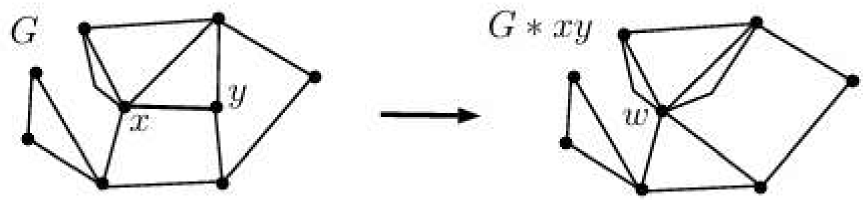
Остовные деревья

Определение

• Пусть G — граф, в котором допустимы петли и кратные рёбра, а $e = xy \in E(G)$
, причем $x \neq y$.
• Положим $V(G*e) = (V(G) \setminus \{x, y\}) \cup \{w\}$
• Отображение $\varphi : V(G) \to V(G*e)$ задано так, что $\varphi(x) = \varphi(y) = w$ и $\varphi(z) = z$ для остальных вершин z.
• Для любого ребра $f = ab \in E(G-e)$ в графе $G*e$ будет ребро $\varphi(f)$ с концами $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$, а других рёбер в определяемом графе нет.
• Будем говорить, что граф $G*e$ получен из G в результате стягивания ребра e и применять обозначение $w = x*y$.
D



• Отображение $\varphi : E(G-e) \to E(G*e)$, определенное выше — биекция. Далее мы будем отождествлять соответствующие друг другу при этой биекции рёбра.

Количество остовных деревьев

• Обозначим через $st(G)$ количество остовных деревьев связного графа G.

Теорема 1

(A.Cayley, 1889.) Пусть G — граф, в котором возможны петли и кратные рёбра, а ребро $e \in E(G)$ – не петля. Тогда $st(G)$ = $st(G-e) + st(G*e)$.

Доказательство

• Количество остовных деревьев графа G, не содержащих ребра e, очевидно, равно $st(G-e)$.
• Между остовными деревьями, содержащими ребро e и остовными деревьями графа $G*e$ существует взаимно однозначное соответствие $T \to T*e$ (где T – остовное дерево графа G, $e \in E(T)$).

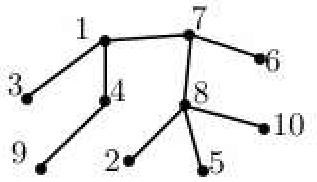
Остовные деревья полного графа. Код Прюфера.

Теорема 2

(A.Cayley, 1889.) $st(K_n) = n^{n-2}$.

Доказательство. (Прюфер 1918.)

• Пусть $V(K_n) = [1..n]$. Мы построим взаимно однозначное соответствие между остовными деревьями K_n (то есть всеми деревьями на вершинах $[1..n]$.) и последовательностями длины $n-2$, в которых каждый член принимает натуральное значение от 1 до n.
• Количество таких последовательностей равно в точности n^{n-2}.
• Пусть T – дерево на вершинах $[1..n]$. Построим соответствующую ему последовательность $t_1, ..., t_{n-2}$.
• Пусть ℓ_1 – висячая вершина наименьшего номера в дереве T, тогда t_1 – единственная смежная с ℓ_1 вершина дерева T, $T_1 = T-\ell_1$.
• Затем найдём в T_1 висячую вершину наименьшего номера ℓ_2, пусть t_2 – единственная смежная с ℓ_2 вершина дерева T_1, $T_2 = T_1-\ell_2$, и так далее, будем повторять процесс, пока не получим последовательность длины $n-2$ (при этом, останется дерево T_{n-2} на двух вершинах).



8 1 8 7 4 1 7 8

• Построим обратное соответствие. Пусть дана последовательность $t_1, ..., t_{n-2}$ с элементами из $[1..n]$.
• Отметим, что по построению каждая вершина x встречается в последовательности дерева T ровно $d_T(x)-1$ раз, поэтому вершины, которые в этой последовательности не встречаются, и есть висячие вершины дерева.
• Выберем такую вершину ℓ_1 с наименьшим номером и соединим её с t_1, после чего удалим ℓ_1 из списка номеров: $V_1 = V \setminus \{\ell_1\}$.
• Теперь выберем вершину $\ell_2 \in V_1$ с наименьшим номером, которая не встречается в последовательности $t_2, ..., t_{n-2}$, соединим ℓ_2 с t_2 и положим $V_2 = V_1 \setminus \{\ell_2\}$. И так далее, повторим такую операцию n −2 раза.
• В результате будет использована вся последовательность и проведено $n-2$ ребра, останется множество V_{n-2} из двух вершин и одно непроведённое ребро дерева T.
• Именно две вершины из V_{n-2} и нужно соединить ребром: их степени в имеющемся графе равны количеству вхождений этих вершин в последовательность $t_1, ..., t_{n-2}$, то есть на 1 меньше, чем их степени в дереве T.

Количество листьев в остовном дереве: теорема о промежуточных значениях.

Теорема 3

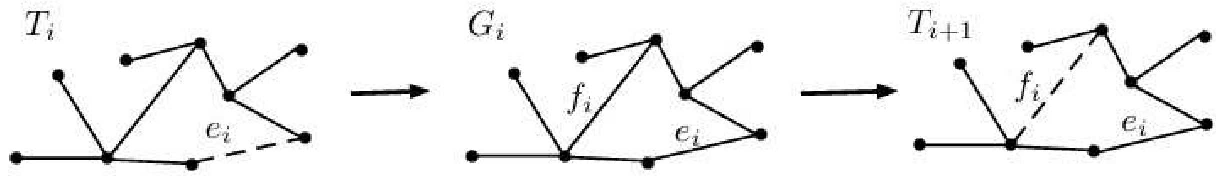
(S. Schuster, 1983.) Пусть связный граф G имеет остовные деревья с m и n висячими вершинами, $m < n$. Тогда для любого натурального $k \in [m..n]$ существует остовное дерево графа G ровно с k висячими вершинами.

Доказательство

• Пусть T_1 и T^* – остовные деревья с $u(T_1) = n$ и $u(T^*) = m$.

• Начиная с дерева T_1, будем выполнять следующий шаг. Пусть уже построена последовательность остовных деревьев $T_1, \dots, T_i$ графа G.

• Если $T_i = T^*$, то существует ребро $e_i \in E(T^*) \setminus E(T_i)$, пусть $G_i = T_i + e_i$.



• В графе G_i есть ровно один простой цикл C_i, проходящий по ребру e_i. Понятно, что $E(C_i) \notin E(T^*)$, поэтому существует ребро $f_i \in E(C_i) \setminus E(T^*)$. Положим $T_{i+1} = G_i - f_i = T_i + e_i - f_i$.

• Поскольку в дереве T_{i+1} больше рёбер из $E(T^*)$, чем в T_i, в некоторый момент мы получим $T_\ell = T^*$. Рассмотрим последовательность деревьев $T_1, T_2, \dots, T_\ell = T^*$.

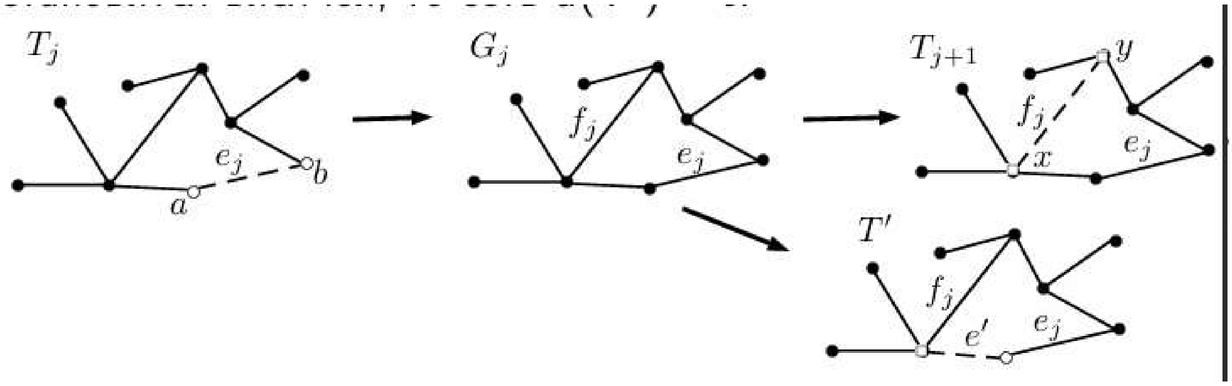
• Деревья T_i и T_{i+1} отличаются двумя рёбрами, поэтому, $|u(T_i) - u(T_{i+1})| \le 2$. Следовательно, количества висячих вершин деревьев нашей последовательности деревьев покрывают отрезок натурального ряда [m…n] с пробелами не более чем в одно число.

• Пусть $t \in [m..n]$ и в нашей последовательности нет дерева с t вершинами.

• Тогда существует такое j, что $u(T_j) = t + 1$ и $u(T_{j+1}) = t - 1$. По построению, $T_{j+1} = G_j - f_j$ и $T_j = G_j - e_j$, пусть $f_j = xy, e_j = ab$.

• Тогда $d_{G_j}(a) = d_{G_j}(b) = 2$ (обе вершины a и b становятся висячими после удаления ребра e_j), $d_{G_j}(x) > 2$ и $d_{G_j}(y) > 2$ (вершины x и y не становятся висячими после удаления ребра f_j).

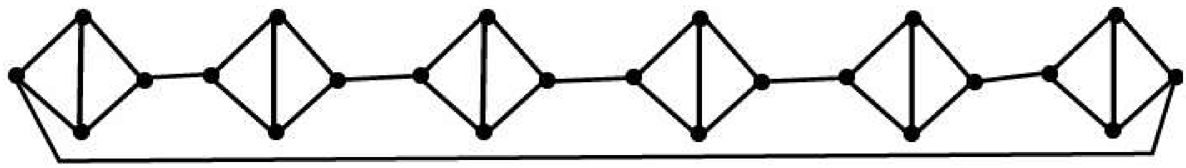
• Таким образом, в цикле C_j есть вершины степени 2 и есть вершины степени более 2, тогда одно из рёбер $e' = uw \in E(C_i)$ таково, что $d_{G_j}(u) > 2$ и $d_{G_j}(w) = 2$. Значит, в дереве $T' = G_i - e'$ ровно одна из вершин $V(C_i)$ – вершина w – становится висячей, то есть $u(T') = t$.



Алгоритм выделения остовного дерева с большим числом листьев в связном графе, степени вершин которого не менее 3.

Теорема 4

(D.J.Kleitman, D.B.West, 1991.) В связном графе G с $\delta(G) \geq 3$ существует остовное дерево с не менее чем $\frac{v(G)}{4}$ листьями.



• Изображенный пример показывает, что эта оценка почти точная

Доказательство.

• Мы приведем алгоритм построения остовного дерева с соответствующим количеством висячих вершин. Алгоритм будет выделять в графе G дерево, последовательно, по шагам добавляя к нему вершины.
• Пусть в некоторый момент уже построено дерево F — подграф графа G.
Определение
• Висячую вершину x дерева F назовем мертвой, если все вершины графа G, смежные с x, входят в дерево F.
• Количество мёртвых вершин дерева F мы обозначим через $b(F)$.
• Мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения. Для дерева F мы определим

$$\alpha(F) = \frac{3}{4}u(F) + \frac{1}{4}b(F) - \frac{1}{4}v(F).$$

Мы хотим построить такое остовное дерево T графа G, что $\alpha(T) \geq 0$.
• Так как в остовном дереве все висячие вершины — мертвые, то $u(T) = b(T) =$

$\frac{1}{4}v(G) + \alpha(T)$ и дерево T нас устраивает.

Базовое дерево F' — это дерево, в котором произвольная вершина a соединена со всеми $k \geq 3$ вершинами из ее окрестности. Мы имеем $v(F') = k + 1, u(F') = k$

$$\alpha(F') \geq \frac{3}{4}k - \frac{1}{4}(k+1) = \frac{2k-1}{4} \geq \frac{5}{4}$$

Шаг алгоритма

Пусть после нескольких шагов построения мы получили дерево F (естественно $V(F) \subset V(G), E(F) \subset E(G)$).

Пусть в результате шага добавилось Δv вершин, количество висячих вершин увеличилось на Δu, а количество мертвых вершин — на Δb.

Назовем доходом шага S величину:

$$P(S) = \frac{3}{4}\Delta u + \frac{1}{4}\Delta b - \frac{1}{4}\Delta v.$$

Мы будем выполнять только шаги с неотрицательным доходом. При вычислении дохода шага мы будем полагать, что все добавленные вершины, про которые не сказано, что они мертвые, не являются мёртвыми. Это предположение лишь уменьшит доход шага.

• Понятно, что для итогового остовного дерева T число $\alpha(T)$ будет складываться из $\alpha(F')$ (где F' — базовое дерево, с которого мы начали построение) и суммы доходов всех шагов.

• Остается построить дерево T с помощью шагов с неотрицательным доходом — тогда $\alpha(T) \geq \alpha(F') > 0$ и, как объяснено ранее, дерево T нам подходит.

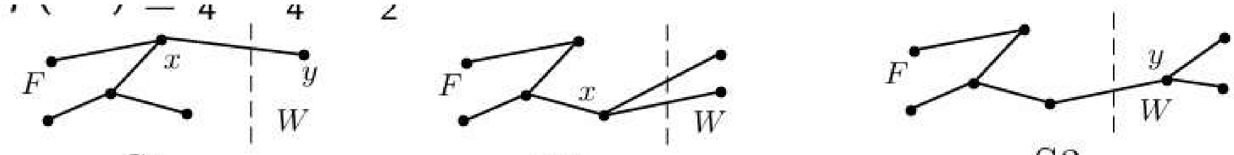
• Мы опишем несколько вариантов шага алгоритма. К очередному варианту мы будем переходить, только когда убедимся в невозможности всех предыдущих.

• Введём обозначение $W = V(G) \setminus V(F)$.

• Вот какие шаги мы будем выполнять.

S1. В дереве F есть невисячая вершина x, смежная с $y \in W$.

Добавим в дерево вершину y, получим $\Delta v = \Delta u = 1$ и $p(S1) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.



S1 S2 S3

S2. В дереве F есть вершина x, смежная хотя бы с двумя вершинами из W.

Добавим в дерево эти две вершины, получим $\Delta v = 2, \Delta u = 1$ и
$p(S2) \geq \frac{3}{4} - 2 * \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

S3. Существует вершина $y \in W$, смежная с деревом F и хотя бы с двумя вершинами из W.

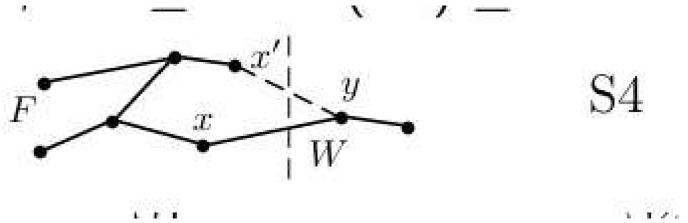
Добавим в дерево y и две смежные с ней вершины из W. Получим $\Delta v = 3, \Delta u = 1$ и
$p(S3) \geq \frac{3}{4} - 3 * \frac{1}{4} = 0$.

S4. Существуют не вошедшие в дерево F вершины

• Тогда существует и смежная с деревом F вершина $y \in W$. Так как невозможно выполнить $S3$, то y смежна не более, чем с одной вершиной из W.

• Однако $d_G(y) \geq 3$, следовательно, вершина y смежна с двумя вершинами $x, x' \in V(F)$. Присоединим y к x. Так как невозможно выполнить шаги $S1$ и $S2$, вершина x' — висячая в дереве F и смежна ровно с одной вершиной из W — свершиной y.

• Поэтому, в новом дереве вершина x' — мёртвая. Таким образом, $\Delta v = 1, \Delta b \geq 1$ и $P(S4) \geq 0$.



• Ввиду конечности графа, построение закончится, и мы получим искомое остовное дерево графа G.

Матричная теорема о деревьях.

• Для $x, y \in V(G)$ через $e_G(x, y)$ обозначается количество рёбер графа G между вершинами x и y

Определение

Пусть G — граф на множестве вершин [1...n]. **Лапласиан** графа G —это квадратная матрица $L = (\ell_{i,j})_{i,j \in [1..n]}$, заданная следующим образом: $\ell_{i,i} = d_G(i)$, и $\ell_{i,j} = -e_G(i, j)$ при $i \neq j$.

• Из определения и отсутствия петель следует, что сумма элементов в любой строке и в любом столбце матрицы L равна 0.
• Таким образом, матрица L вырождена (сумма строк равна 0, значит, они ЛЗ). Следовательно, $det(L) = 0$.
• Матрица L симметрична относительно главной диагонали.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$ – матрица с коэффициентами из поля K.

1. Через $A_{i_1,...,i_k;j_1,...,j_m}$ будем обозначать матрицу, полученную из A удалением строк с номерами $i_1, ..., i_k$ и столбцов с номерами $j_1, ..., j_m$.
2. Число $(-1)^{i+j} det(A_{i;j})$ называется **алгебраическим дополнением** элемента $a_{i,j}$ матрицы A.

Теорема 5

(G.Kirhhoff, 1847.) Пусть G — граф без петель (возможно, с кратными ребрами) на $n \geq 2$ вершинах, а L – его лапласиан. Тогда $st(G) = det(L_{i;i})$ для любого $i \in [1..n]$.

Доказательство.

• При одновременной перестановке пары строк и пары столбцов с такими же номерами знак определителя не меняется. Поэтому нумерация вершин не имеет значения, что мы будем использовать.
• Докажем, что $st(G) = det(L1; 1)$.
• При $n = 1$ матрица $L_{1;1}$ – пустая. Мы будем считать, что $det(L_{1;1}) = 1$ – именно столько остовных деревьев у графа на одной вершине.
• Если граф имеет более одной вершины и не имеет ребер, то его лапласиан — нулевая матрицы размера не менее чем 2×2, и алгебраическое дополнение любого ее элемента равно 0. Эти случаи будут базой индукции.
• Далее рассмотрим случай, когда G имеет ребро e. Будем считать, что для всех меньших графов утверждение теоремы доказано
• Если $d_G(1) = 0$ (то есть, вершина 1 — изолированная), то $st(G) = 0$ ввиду

несвязности графа.

• В этом случае в L первая строка и первый столбец состоят из 0.

• Поэтому, i строка $L_{1;1}$ получается из соответствующей строки L вычеркиванием 0.

• Следовательно, сумма элементов в каждой строке $L_{1,1}$ равна 0, откуда следует, что $rk(L_{1;1}) < n-1$, а значит, $det(L_{1;1}) = 0$.

• Случай разобран, далее считаем, что $d_G(1) \geq 1$.

• Тогда НУО ребро e соединяет вершины 1 и 2

• По Теореме 1 мы знаем, что $st(G) = st(G-e) + st(G*e)$.

• Пусть H – граф, полученный из $G*e$ удалением всех петель. Понятно, что $st(H) = st(G*e)$.

• Пусть L' и L^* – лапласианы графов $G-e$ и H соответственно. Тогда по индукцинному предпложению $st(G-e) = det(L'_{1;1})$ и $st(H) = det(L^*_{1;1})$.

• Остается доказать, что $det(L_{1;1}) = det(L'_{1;1}) + det(L^*_{1;1})$.

• Как изменяется лапласиан графа при удалении ребра между вершинами 1 и 2?

• Из $\ell_{1,1}$ и $\ell_{2,2}$ вычитается по 1, а к $\ell_{1,2}$ и $\ell_{2,1}$ прибавляется по 1.

• При вычеркивании первого столбца и первой строчки получается, что $L'_{1,1}$ отличается от $L_{1,1}$ только элементом в левом верхнем углу – это $\ell_{2,2}-1$ у $L'_{1,1}$ вместо $\ell_{2,2}$ у $L_{1,1}$.

• Пусть вершина графа H, полученная объединением 1 и 2 вершин графа G, имеет номер 1, а остальные вершины H занумеруем так же, как в графе G – числами $3, 4, \ldots, n$ (пропустив индекс 2).

• Тогда все элементы матрицы L^* вне 1 строки и 1 столбца равны элементам L с соответствующим индексами.

• Значит, $L^*_{1;1} = L_{1,2;1,2}$.

• Разложим определитель $L_{1,1}$ по первой строке (она же вторая строка матрицы L с удаленным 1 элементом), используя обозначения элементов матрицы L (но учитывая, что вторая строка матрицы L – это первая строка $L_{1;1}$, а $j \geq 2$ столбец L – это $j-1$ столбец матрицы $L_{1;1}$):

$$\det(L_{1,1}) = \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+(j-1)}\ell_{2,j} \cdot \det(L_{1,2;1,j}) =$$

$$\det(L_{1,2;1,2})+\left((\ell_{2,2}-1)\cdot\det(L_{1,2;1,2})+\sum_{j=3}^{n}(-1)^{1+(j-1)}\ell_{2,j}\cdot\det(L_{1,2;1,j})\right)$$

$$\det(L^*_{1;1}) + \det(L'_{1;1}). \qquad \square$$

Количество остовных деревьев равно алгебраическому дополнению любого элемента лапласиана.

Следствие 1

Пусть L – лапласиан связного графа G без петель на $n \geq 2$ вершинах. Тогда $st(G) = (-1)^{i+j} det(L_{i;j})$ для любых $i, j \in [1..n]$.

Доказательство.

• Так как сумма элементов любой строки матрицы L равна 0, система уравнений $LX = 0$ имеет ненулевое решение – столбец из n единиц
• Следовательно, матрица L вырождена, а значит, $rk(L) \leq n{-}1$ и $det(L) = 0$.
• По Теореме 5 мы знаем, что $det(L_{i;i}) = st(G) = 0$ (так как граф G связен).
• Таким образом, матрица L имеет ненулевой минор порядка $n{-}1$, а значит, $rk(L) = n{-}1$.
• Размерность пространства решений системы (*) равна $n{-}rk(L) = 1$.
• Значит, все решения пропорциональны вектору из n единиц, то есть все n координат любого решения (*) равны.
• Введем обозначение для алгебраических дополнений элементов матрицы L: пусть $a_{i,j} := (-1)^{i+j} det(L_{i;j})$.
• Напомним, что сумма произведений элементов строки матрицы на их алгебраические дополнения равна ее определителю, а сумма произведений элементов строки матрицы на алгебраические дополнения другой строки равна 0.
• Так как det(L) = 0, мы имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \ell_{k,j} a_{k,j} = det(L), \qquad \sum_{j=1}^{n} \ell_{s,j} a_{k,j} = 0 \ \text{ при } s \neq k$$

• Таким образом, столбец из алгебраических дополнений любой строки $(a_{k,1}, ..., a_{k,n})^T$ является решением системы (*).

- Следовательно, алгебраические дополнения всех элементов одной строки равны и $(-1)^{i+k} det(L_{k;i}) = a_{k,i} = a_{k,k} = det(L_{k;k}) = st(G)$ по Теореме 5