Дискретное вероятностное пространство. Основные определения и примеры

Определение

• Дискретным вероятностным пространством называется упорядоченная пара (Ω, P), где Ω — конечное множество и $P : \Omega \to [0, 1]$ — такая функция, что $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$.

• Элементы множества Ω называются **элементарными событиями**, а само Ω — **пространством элементарных событий** или **пространством исходов**.

• Величина $P(\omega)$, где $\omega \in \Omega$, называется **вероятностью** элементарного события ω. Функция P называется **распределением вероятностей**

• **Событием** называется любое подмножество $A \subset \Omega$.

• **Вероятностью** события $A \subset \Omega$ называется величина $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega)$.

• $\emptyset$ —**невозможное событие**. Очевидно, что его вероятность равна нулю. Но могут быть и другие события, имеющие нулевую вероятность

Замечание

• Удобно считать, что $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ и $P(\omega_i) = p_i$. Дискретная математика. Тогда $\forall i(0 \le p_i \le 1)$ и $p_1 + ... + p_n = 1$.

Дискретное вероятностное пространство: примеры

1.

- Пусть мы n раз подбросили монетку и после каждого подбрасывания отмечаем, упала ли она орлом или решкой.
- Если выпал орел, будем писать 1, а если выпала решка — 0.
- Элементарным событием будем считать совокупность результатов всех n подбрасываний монетки.
- То есть $\Omega = \{(a_1, ..., a_n)|\forall i\ a_i \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^n$. Элементы Ω соответствуют подмножествам $[1..n]$ — случайное подмножество.
- • Будем считать, что вероятности всех элементарных событий равны. Тогда $\forall\omega \in \Omega(P(\omega) = \frac{1}{2^n})$.
- В получившемся вероятностном пространстве можно рассмотреть, например, следующие события.
-
  - A: “При первом подбрасывании выпал орел”;
-
  - B: “При втором подбрасывании выпала решка”;
-
  - C: “Результаты первого и второго подбрасываний одинаковы”.
- Легко видеть, что $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$.

Определение

Распределение вероятностей называется **равномерным**, если вероятности всех элементарных событий равны.

2.

Снова подбросим n раз монетку. Но распределение вероятностей выберем другое.
• Пусть $p, q \geq 0$ таковы, что $p+q=1$
• Обозначим через $s(\omega)$ число выпавших орлов в элементарном событии ω. (Т.е. $s(a_1, ..., a_n) = a_1 + ... + a_n$).
• Пусть $P(\omega) = p^{s(\omega)} q^{n-s(\omega)}$.
• Заметим, что

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1,$$

следовательно, (Ω, P) — дискретное вероятностное пространство.
• Рассмотрим следующие события:

- $S_i = \{\omega \in \Omega | s(\omega) = i\}$, где $i \in [0..n]$, – "выпало ровно i орлов";
- $T_j = \{(a_1, ..., a_n) \in \Omega | a_j = 1\}, j \in [1..n]$, – "на j-м шаге выпал орёл".•

• Легко видеть, что $P(S_i) = C_n^i p^i q^{n-i}$;
• Далее,

1. **Вероятность P(ω):**

$P(\omega) = p^{k+1} q^{n-(k+1)} = p \cdot p^k q^{(n-1)-k}$.

$$P(T_i) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^{k+1} q^{n-1-k} = p(p+q)^{n-1} = p.$$

• Последнее равенство означает, что на j-м шаге с вероятностью p выпадет орел и с вероятностью q — решка

3.

Заметим, что события S_i из предыдущего примера образуют разбиение множества Ω.

• Тогда $P(S_0) + P(S_1) + ... + P(S_n) = 1$. • Это означает, что S_i можно рассматривать как элементарные события.
• Более точно, пусть $\Omega' = \{S_0, S_1, ..., S_n\}$ и $P(S_i) = C_n^i p^i q^{n-i}$. Тогда пара (Ω', P) является дискретным вероятностным пространством.

Определение

Распределение вероятностей, задаваемое формулой $P(S_i) = C_n^i p^i q^{n-i}$, называется **биномиальным**

Условная вероятность. Определение, формула полной вероятности. Формула Байеса и теорема Байеса.

• Пусть (Ω, P) — дискретное вероятностное пространство; $A, B \subset \Omega$
• Будем обозначать через AB событие, задаваемое множеством $A \cap B$. (Т.е. AB — это событие, означающее то, что одновременно произошли события A и B.)

Определение

Пусть $P(B) > 0$. Тогда условной вероятностью события A при условии события B называется величина $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Замечание

То есть мы предполагаем, что событие B выполнено: рассматриваем только те исходы, при которых это так. И считаем среди них долю тех исходов, для которых выполнено A. Эта доля и есть условная вероятность

Лемма (Формула Байеса)

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

Доказательство.
$P(B|A)P(A) = P(AB) = P(B)P(A|B)$

Теорема (Формула полной вероятности)

Пусть $\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_m$ – разбиение Ω и $\forall i P(B_i) > 0$.

Тогда $P(A) = \sum_{i=1}^m P(A|B_i)P(B_i)$

Доказательство. Пусть $A_i = AB_i$=$A \cap B_i$.
- Тогда $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ – разбиение A.
- Следовательно, $P(A) = \sum_{i=1}^m P(A_i) = \sum_{i=1}^m P(A|B_i)P(B_i)$.

Теорема (Байеса)

Пусть $\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_m$ – разбиение Ω и $\forall_i \ P(B_i) > 0$.
Тогда $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^m P(A|B_j)P(B_j)}$

Доказательство.
$P(A|B_i)P(B_i) = P(AB_i)$
$\sum_{j=1}^m P(A|B_j)P(B_j) = P(A)$.

Независимые события. Определение, примеры и свойства.

Независимые события

Определение

• События A и B независимы, если $P(AB) = P(A)P(B)$.
• События $A_1, ..., A_n$ независимы, если для любых $k \in [1..n]$ и $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$ выполнено $P(A_{i_1}...A_{i_k}) = P(A_{i_1})...P(A_{i_k})$.

Замечание

• Независимость не означает отсутствия пересечения. Если $A \cap B = \emptyset$, то события A и B зависимы!
• Попарная независимость n событий не означает того, что все n событий независимы.

- ▶ Например, события A, B и C из первого примера попарно независимы. Но все вместе они зависимы: $P(ABC) = 0$, но $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$.

• Во втором примере события $T_1, ..., T_n$ независимы (напомним, что T_j — это событие "на j-м шаге выпал орёл")

Утверждение

Если A и B независимы, то A и $\overline{B}$ тоже независимы.
Доказательство.
$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$

Замечание

• Аналогично можно доказать, что если события $A_1, ..., A_i, ..., A_n$ независимы, то и $A_1, ..., \overline{A_i}, ..., A_n$ независимы.
• Тогда независимым будет также и любой набор событий вида $A'_1, ..., A'_n$, где для любого j событие A'_j — это либо A_j, либо $\overline{A_j}$.

Случайные величины. Определение и примеры. Распределение случайной величины. Независимые случайные величины.

• Пусть (Ω, P) — дискретное вероятностное пространство.

Определение

• **Случайной величиной** называется произвольное отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Примеры

1. Если Ω — множество результатов n подбрасываний монетки, то $s(\omega)$ (количество выпавших "орлов") является случайной величиной.
2. Каждому событию $A \subset \Omega$ соответствует случайная величина, являющаяся характеристической функцией множества A:
   $\chi_A(\omega) \begin{cases} 0, \omega \notin A \\ 1, \omega \in A \end{cases}$
   • Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина и $X = \xi(\Omega)$ — множество значений случайной величины ξ. Тогда

мы можем рассматривать события вида $\xi(\omega) = x$, где $x \in X$, или $\xi(\omega) \in B$, где $B \subset X$. Тем самым, мы получаем распределение вероятностей на множестве X.

Случайные величины: распределение и независимость

- Пусть $X = \{x_1, ..., x_m\}$. Тогда $P_\xi(x_i) = P(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x_i\})$.
- Очевидно, что $P_\xi(x_1) + ... + P_\xi(x_m) = 1$
- Следовательно, (X, P_ξ) — дискретное вероятностное пространство.
- Функция P_ξ называется **распределением случайной величины** ξ.
- Для обозначения индуцированной вероятности мы также будем использовать также обозначение $P\{\xi = x_i\}$

Определение

Случайные величины $\xi_1, ..., \xi_r : \Omega \to X$ называются независимыми, если $\forall t_1, ..., t_r \in X$ $(P\{\xi_1 = t_1, ..., \xi_r = t_r\} = P\{\xi_1 = t_1\} ... P\{\xi_r = t_r\})$.

Замечание

Если события $A_1, ..., A_r$ независимы если и только если их характеристические функции $\chi_{A_1}, ..., \chi_{A_r}$ — независимые случайные величины.

Математическое ожидание. Определение и свойства. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин.

Определение
- Пусть $\xi : \Omega \to X$ — случайная величина.
- Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega)$$

Замечание

- Очевидно, что $E\xi = \sum_{x \in X} x P\{\xi = x\}$
- Если ξ — случайная величина и $a \in \mathbb{R}$, то $E(a\xi) = aE\xi$
- Если $\xi_1, ..., \xi_r : \Omega \to X$ — случайные величины, то $E(\xi_1 + ... + \xi_r) = E\xi_1 + ... + E\xi_r$.
- Другое обозначение для математического обозначения: $M\xi$.

Теорема

Если случайные величины $\xi_1, ..., \xi_r : \Omega \to X$ независимы, то $E(\xi_1 ... \xi_r) = E\xi_1 ... E\xi_r$.
Доказательство.

Пусть случайная величина $\xi_1 ... \xi_r$ принимает значения из множества $\mathcal{X}_r$.
• Заметим, что $\mathcal{X}_r$. состоит из произведений вида $x_1 ... x_r$, где $\forall i(x_i \in X)$.
• Тогда

$$E(\xi_1 ... \xi_r) = \sum_{x \in \mathcal{X}_r} xP\{\xi_1 ... \xi_r = x\} =$$
$$= \sum_{x_1, ..., x_r \in X} x_1 ... x_r P\{\xi_1 = x_1, ..., \xi_r = x_r\} =$$
$$= \sum_{x_1, ..., x_r \in X} x_1 ... x_r P\{\xi_1 = x_1\} ... P\{\xi_r = x_r\} =$$
$$= (\sum_{x_1 \in X} x_1 P\{\xi_1 = x_1\}) ... (\sum_{x_r \in X} x_r P\{\xi_r = x_r\}) = E\xi_1 ... E\xi_r.$$

Дисперсия и её свойства. Дисперсия суммы независимых случайных величин.

Дисперсией случайной величины ξ называется число $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$

Замечание

• Из определения очевидно, что $D\xi \geq 0$.
• Также очевидно, что $D\xi = 0$, если и только если $P\{\xi = E\xi\} = 1$ (т. е. случайная величина ξ почти всегда постоянна: за исключением, возможно, множества с нулевой вероятностью).
• По сути, $D\xi$ показывает то, насколько сильно случайная величина ξ отклоняется от своего среднего.

Утверждение

1. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$.
2. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда $D(a + b\xi) = b^2 D\xi$

Доказательство.

1.
   - $$D\xi = E(\xi^2 - 2\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$
2.
   - $$D(a + b\xi) = E((a + b\xi) - (a + bE\xi))^2 = E(b(\xi - E\xi))^2 = b^2 D\xi.$$

Теорема

Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Тогда $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

Доказательство.

- Заметим, что случайные величины $\xi - E\xi$ и $\eta - E\eta$ также независимы.
- Следовательно, $E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi - E\xi)E(\eta - E\eta) = 0$.
- Тогда

$$D(\xi + \eta) = E((\xi - E\xi) + (\eta - E\eta))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + E(\eta - E\eta)^2 + 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = D\xi + D\eta$$

Ковариация случайных величин и её свойства. Коэффициент корелляции.

Определение

Величина $cov(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$ называется **ковариацией** случайных величин ξ и η.

Утверждение

$cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$

Доказательство.

$cov(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi\eta - \xi E\eta - \eta E\xi + E\xi E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta - E\xi E\eta + E\xi E\eta = E(\xi\eta) - E\xi E\eta.$

Свойства ковариации

Пусть ;$\xi, \eta, \theta : \Omega \to \mathbb{R}$ – случайные величины и $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $cov(a\xi + b\eta, \theta) = acov(\xi, \theta) + bcov(\eta, \theta)$;
2. $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$;
3. $cov(\xi, \xi) = D\xi \geq 0$.

Доказательство.

1. $$\begin{gathered} cov(a\xi + b\eta, \theta) = E((a\xi + b\eta)\theta) - E(a\xi + b\eta)E\theta = \\ = E(a\xi\theta + b\eta\theta) - (aE\xi + bE\eta)E\theta = \\ = aE(\xi\theta) + bE(\eta\theta) - aE\xi E\theta - bE\eta E\theta = acov(\xi, \theta) + bcov(\eta, \theta). \end{gathered}$$

Теорема

$|cov(\xi, \eta)| \leq \sqrt{D\xi \cdot D\eta}.$

Доказательство.

• Заметим, что все случайные величины, заданные на вероятностном пространстве Ω, образуют линейное пространство над $\mathbb{R}$
• По лемме $cov(\xi, \eta)$ — вещественное скалярное произведение на этом пространстве.
• Тогда по неравенству Коши-Буняковского-Шварца имеем
$cov(\xi,\eta)^2 \leq cov(\xi,\xi)cov(\eta,\eta) = D\xi \cdot D\eta.$

Коэффициент кореляции

• Величина $\rho(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$ называется **коэффициентом корреляции** случайных величин ξ и η.

Замечание

По доказанной выше теореме $\rho(\xi,\eta) \in [-1,1]$.
Если ξ и η независимы, то $\rho(\xi,\eta) = 0$ (но обратное неверно)

Доказательство нижней оценки для $r(k,k)$ на языке теории вероятностей.

Для любого натурального $k \geq 2$ выполняется неравенство $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.

Доказательство

Пусть $k \geq 3$ и $n < 2^{k/2}$ (случай $k = 2$ тривиален).

- Рассмотрим полный граф G на n вершинах и раскрасим его рёбра в два цвета случайным образом.
    - То есть мы C_n^2 раз подбрасываем монетку и выбираем цвет очередного ребра в зависимости от результата подбрасывания.
    - Все исходы равновероятны. То есть каждое ребро может быть покрашено в цвет 1 или в цвет 2 с вероятностью $1/2$, и все эти события независимы.
- Для любого подмножества $S \subset V(G)$, где $|S| = k$, определим событие A_S: “все рёбра подграфа $G(S)$ одноцветны”. Тогда $P(A_S) = 2 \cdot 2^{-C_k^2}$.
- Тогда:

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S\right) \leq \sum_{|S|=k} P(A_S) = 2 \cdot 2^{-C_k^2} \cdot C_n^k = 2 \cdot 2^{-k(k-1)/2} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

- Оценим:

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S\right) < 2 \cdot \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{-k(k-1)/2}.$$

- Подставляя $n < 2^{k/2}$, получаем:

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S\right) < \frac{2\cdot(2^{k/2})^k}{k!}\cdot 2^{-k(k-1)/2} = \frac{2\cdot 2^{k^2/2}}{k!}\cdot 2^{-k(k-1)/2}.$$

- Упростим:

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S\right) < \frac{2\cdot 2^{k/2}}{k!}.$$

- При $k \geq 3$:

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S\right) < 1.$$

- Следовательно, существует раскраска, при которой нет одноцветной клики размера k.

Теорема Эрдёша-Мозера о наименьшем ациклическом подтурнире.

Турнир с наименьшим ациклическим подтурниром

- Обозначим через $v(n)$ наибольшее целое число, для которого всякий турнир на n вершинах содержит ациклический подтурнир на $v(n)$ вершинах.
- Другими словами, $v(n)$ — это такое наибольшее целое число v, что в любом турнире T с множеством вершин $V(T) = \{u_1, \ldots, u_n\}$ можно выбрать такую последовательность вершин $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_v})$, что все стрелки между её вершинами будут направлены слева направо (т. е. при $1 \leq k < \ell \leq n$ имеем $u_{i_k} \to u_{i_\ell} \in A(T)$).

Теорема (P. Erdős, L. Moser, 1964)

$$v(n) \leq 1 + \lfloor 2\log_2 n \rfloor.$$

Доказательство

Пусть $t = 2 + \lfloor 2\log_2 n \rfloor$.

- Нужно доказать, что существует такой турнир на n вершинах, в котором нет ациклического подтурнира на t вершинах.

- Построим случайный турнир на n вершинах.
  - То есть зафиксируем множество вершин $V(T) = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и зададим направления его стрелок при помощи C_n^2 подбрасываний монетки.
  - Все исходы равновероятны. То есть каждая стрелка может быть направлена в любую из двух сторон с вероятностью $1/2$, и все эти события независимы.

- Пусть $\mathcal{P} = \{(u_{i_1}, \ldots, u_{i_t}) \mid i_k \neq i_\ell \text{ при } k \neq \ell\}$ — множество всех последовательностей из t различных вершин.

- Для каждой последовательности $S = (u_{i_1}, \ldots, u_{i_t}) \in \mathcal{P}$ определим событие A_S: $\forall k, \ell \in [1..t](k < \ell \to u_{i_k} \to u_{i_\ell} \in A(T))$.

- Тогда $P(A_S) = 2^{-C_t^2} = 2^{-t(t-1)/2} = 2^{-t(1+\lfloor 2\log_2 n \rfloor)/2} \le 2^{-t\log_2 n} = n^{-t}$.
- Всего последовательностей $|\mathcal{P}| = A_n^t = n(n-1)\dots(n-t+1) < n^t$.

- Тогда:

$$P\left(\bigcup_{S\in\mathcal{P}} A_S\right) \le \sum_{S\in\mathcal{P}} P(A_S) < n^t n^{-t} = 1.$$

- Следовательно, найдётся турнир, в котором нет ациклического подтурнира на t вершинах.

Замечание

- R. Stearns доказал, что $v(n) \ge 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$.
- Тем самым, $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor \le v(n) \le 1 + \lfloor 2\log_2 n \rfloor$.

Теорема Клейтмана-Спенсера об (n, k)-универсальных множествах.

(n, k)-универсальные множества

- Пусть $a = (a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n$ – 0-1 вектор и $S = \{i_1, \dots, i_k\}$ – набор координат $(1 \le i_1 < \dots < i_k \le n)$.
- Тогда $a|_S \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ – проекция вектора a на координаты из S.
- Аналогично, если $A \subset \{0,1\}^n$, то $A|_S \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \mid (a_1, \dots, a_n) \in A\}$ – проекция множества A на координаты из S.

Определение

Множество $A \subset \{0,1\}^n$ называется (n, k)-универсальным, если для любого набора координат $S = \{i_1, \dots, i_k\}$, где $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, проекция $A|_S$ содержит все 2^k возможных комбинаций нулей и единиц.

Теорема (D.J. Kleitman, J. Spencer, 1973)

Пусть $n, k, r \in \mathbb{N}$ таковы, что $n \ge k$ и $C_n^k 2^k (1 - 2^{-k})^r < 1$.
Тогда существует (n, k)-универсальное множество размера r.

Доказательство

Рассмотрим случайную матрицу M размера $n \times r$ с коэффициентами из $\{0, 1\}$.

- То есть мы $n \cdot r$ раз подкидываем монетку и определяем значения всех коэффициентов m_{ij} этой матрицы. Каждый из коэффициентов будет равен 0 или 1 с вероятностью $1/2$, и все эти события независимы.
- Обозначим через A множество строк матрицы M. Её i-ю строку будем обозначать a_i.
- Для фиксированного набора координат $S = \{j_1, \dots, j_k\}$, где $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$, и фиксированного вектора $v \in \{0,1\}^k$ посчитаем вероятность того, что проекция A на координаты из S не содержит v:

$$P(v \notin A|_S) = \prod_{i=1}^{r} P(v \neq a_i|_S) = (1 - 2^{-k})^r.$$

- Тогда вероятность того, что множество A не является (n, k)-универсальным, не превосходит:

$$C_n^k 2^k (1 - 2^{-k})^r < 1.$$

Для того, чтобы показать, как из этой теоремы следует существование (n, k)-универсального множества малого размера, нам потребуется следующая лемма.

Лемма об экспоненте. Следствие о (n, k)-универсальных множествах малого размера

(n, k)-универсальные множества малого размера

Лемма

При всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $e^x \geq x + 1$, причём равенство достигается только при $x = 0$.

Доказательство

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - x - 1$.

- $f'(x) = e^x - 1$, следовательно, $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0$.
- Тогда $f(x)$ убывает на $(-\infty, 0)$ и возрастает на $(0, +\infty)$.
- Таким образом, при $x = 0$ имеем $f(x) \geq f(0) = 0$.

Следствие (A.K. Chandra, L. Kou, G. Markowsky, S. Zaks, 1983)

При любых $n \geq 2$ и $k \geq 4$ существует (n, k)-универсальное множество размера не более $\lceil k 2^k \ln n \rceil$.

Доказательство

Пусть $r = \lceil k 2^k \ln n \rceil$. Тогда:

- $C_n^k 2^k (1 - 2^{-k})^r < \frac{n^k}{k!} * 2^k e^{-r/2^k} \leq \frac{(2n)^k}{k!} \cdot e^{-k \ln n} = \frac{(2n)^k}{k!} \cdot n^{-k} = \frac{2^k}{k!} < 1.$
- Следовательно, по теореме Клейтмана-Спенсера существует (n, k)-универсальное множество размера r.

Факты о матожидании: оценки наибольшего и наименьшего значения случайной величины, неравенства Маркова и Чебышёва.

- Использование математического ожидания в доказательстве комбинаторных фактов основывается на следующих фактах.

Утверждение

- Пусть (Ω, P) — дискретное вероятностное пространство и $\xi : \Omega \to X$ — случайная величина, такая, что $E(\xi) \geq \lambda$. Тогда существует элементарное событие $\omega \in \Omega$, такое, что $\xi(\omega) \geq \lambda$.
- Аналогично, если $E(\xi) \leq \lambda$, то существует элементарное событие $\omega \in \Omega$, такое, что $\xi(\omega) \leq \lambda$.

Доказательство

- Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично).
- Предположим противное: пусть $\forall \omega \in \Omega(\xi(\omega) < \lambda)$.
- Тогда $E(\xi) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)\xi(\omega) < \lambda \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \lambda$. Противоречие.

Неравенства Маркова и Чебышёва

Теорема (Неравенство Маркова)

Пусть (Ω, P) — дискретное вероятностное пространство, $\xi : \Omega \to X$ — случайная величина, принимающая неотрицательные значения, и $\lambda > 0$.
Тогда:

$$P\{\xi \geq \lambda\} \leq \frac{E\xi}{\lambda}.$$

Доказательство

- $E\xi = \sum_{x \in X} xP\{\xi = x\} \geq \sum_{x \geq \lambda} \lambda P\{\xi = x\} = \lambda P\{\xi \geq \lambda\}$.

Теорема (Неравенство Чебышёва)

Пусть $\xi : \Omega \to X$ — произвольная случайная величина и $\lambda > 0$.
Тогда:

$$P\{|\xi - E\xi| \geq \lambda\} \leq \frac{D\xi}{\lambda^2}.$$

Доказательство

- $P\{|\xi - E\xi| \geq \lambda\} = P\{(\xi - E\xi)^2 \geq \lambda^2\} \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\lambda^2} = \frac{D\xi}{\lambda^2}$.

Теорема Селе о количестве гамильтоновых путей в турнире.

Гамильтоновы пути в турнирах

Теорема (T.Szele, 1943)

Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует турнир на n вершинах, в котором есть как минимум $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

Доказательство

Рассмотрим случайный турнир T на множестве вершин $V(T) = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

- Как и раньше, ориентация всех стрелок определяется при помощи C_n^2 подбрасываний монетки; каждая стрелка будет ориентирована в любую из сторон с вероятностью $\frac{1}{2}$, и все эти события независимы.
- Для каждой перестановки $\sigma \in S_n$ обозначим через ξ_σ характеристическую функцию следующего события: "последовательность вершин $(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)})$ — гамильтонов путь".
- Тогда $E\xi_\sigma = \frac{1}{2^{n-1}}$.
- Пусть $\xi(T) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \xi_\sigma(T)$ — случайная величина, означающая количество гамильтоновых путей в случайном турнире T.
- Тогда $E(\xi) = \sum_{\sigma \in S_n} E(\xi_\sigma) = \frac{n!}{2^{n-1}}$.
- Следовательно, существует турнир T, для которого $\xi(T) \geq \frac{n!}{2^{n-1}}$.

Теорема Алона о размере доминирующего множества.

Доминирующие множества большого размера

Определение

В графе G множество $S \subset V(G)$ называется **доминирующим**, если $V(G) = S \cup N_G(S)$ (т.е. если любая вершина графа либо принадлежит S, либо смежна с вершиной из S).

Теорема (N. Alon, 1990)

Пусть $v(G) = n$ и $\delta(G) = d$. Тогда в графе G есть доминирующее множество размера не более

$$\frac{n^{1+\ln(d+1)}}{d+1}.$$

Доказательство

Выделим случайное подмножество $S \subset V(G)$ следующим образом:

- Каждая вершина будет включаться в S с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$. Все эти события независимы.
- Тогда $|S|$ — случайная величина; $E(|S|) = np$.

Для каждого подмножества $S \subset V(G)$ определим подмножество

$$\overline{S} = V(G) \setminus (S \cup N_G(S)).$$

- Очевидно, что тогда $S \cup \overline{S}$ — доминирующее множество.
- Оценим математическое ожидание случайной величины $|\overline{S}|$.
- Для этого для каждой вершины $v \in V(G)$ рассмотрим случайную величину ξ_v, являющуюся характеристической функцией события "$v \in \overline{S}$".
- Тогда $E(\xi_v) = (1-p)^{d_G(v)+1} \leq (1-p)^{d+1}$.
- Следовательно, $E(|\overline{S}|) = \sum_{v \in V(G)} E(\xi_v) \leq n(1-p)^{d+1} \leq ne^{-p(d+1)}$.

Таким образом,

$$E(|S| + |\overline{S}|) \le np + ne^{-p(d+1)} = \frac{n^{1+\ln(d+1)}}{d+1},$$

откуда и следует существование доминирующего множества размера не более

$$\frac{n^{1+\ln(d+1)}}{d+1}.$$

Вероятностное доказательство теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа. Два утверждения о стремящихся к нулю вероятностях — без доказательства.

Теорема (P. Erdős, 1959)

Пусть $k, g \in \mathbb{N}$, $k, g \ge 3$. Тогда существует граф G с $g(G) \ge g$ и $\chi(G) \ge k$.

Доказательство (Alon-Spencer, 1992)

- Зафиксируем число $\theta \in \left(0, \frac{1}{g}\right)$.
- Выберем достаточно большое n (насколько большим его нужно взять, мы определим позже) и рассмотрим случайный граф G на n вершинах, в котором каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью $p = n^{\theta-1}$ (как и раньше, все такие события независимы).
- Рассмотрим случайные величины ξ_i — количество циклов длины i в графе G, а также $\xi = \sum_{i=3}^{g-1} \xi_i$ — количество циклов, длина которых меньше g.
- Оценим математическое ожидание этих случайных величин.

• Пусть $m = \lceil \frac{5}{p} lnn \rceil$. Далее мы оценим вероятность того, что $\alpha(G) \ge m$.

Утверждение

$$P\{\xi \ge \frac{n}{2}\} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{и} \quad P\{\alpha(G) \ge m\} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

- Следовательно, при достаточно больших n каждая из вышеприведенных вероятностей будет меньше $\frac{1}{2}$.
- Выберем n настолько большим, чтобы выполнялись оба условия:

$$P\{\xi \ge \frac{n}{2}\} < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad P\{\alpha(G) \ge m\} < \frac{1}{2}.$$

- Тогда найдется такой граф G, что $v(G) = n$, $\alpha(G) < m$ и в G есть не более $\frac{n}{2}$ циклов, длина которых меньше g.
- Удалим из каждого такого цикла по вершине. Получим граф G', такой, что:

$$v(G') \ge \frac{n}{2}, \quad g(G') \ge g, \quad \text{и} \quad \alpha(G') \le \alpha(G) \le m - 1 \le 5n^{1-\theta} \ln n.$$

- Тогда:

$$\chi(G') \ge \frac{v(G')}{\alpha(G')} \ge \frac{n/2}{5n^{1-\theta} \ln n} = \frac{n^\theta}{10 \ln n},$$

что больше k при достаточно большом n.

Доказательства утверждений о стремлении к нулю вероятности того, что в случайном графе будет много длинных циклов и будет большое независимое множество (из доказательства теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа)

Утверждение 1

$$P\{\xi \geq \frac{n}{2}\} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Доказательство

В графе G есть $n^{\underline{i}} = n(n-1)\dots(n-i+1)$ последовательностей вершин длины i.

- Каждая из них задает цикл длины i с вероятностью p^i.
- Каждый цикл длины i задается $2i$ такими последовательностями.

Итого:

$$E\xi_i = \frac{n^{\underline{i}}}{2i} \cdot p^i \leq \frac{(np)^i}{2i} = \frac{n^{\theta i}}{2i}.$$

- Тогда:

$$E\xi = \sum_{i=3}^{g-1} E\xi_i \leq \sum_{i=3}^{g-1} \frac{n^{\theta i}}{2i} \leq n^{\theta g} \sum_{i=3}^{g-1} \frac{1}{2i}.$$

- По неравенству Маркова получаем:

$$P\{\xi \geq \frac{n}{2}\} \leq 2E\xi.$$

- Заметим, что $\theta g - 1 < 0$. Следовательно:

$$n^{\theta g-1} \sum_{i=3}^{g-1} \frac{1}{i} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Таким образом:

$$P\{\xi \geq \frac{n}{2}\} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Утверждение 2

$$P\{\alpha(G) \geq m\} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Доказательство

Для любого подмножества $S \subset V(G)$, где $|S| = m$, вероятность того, что S — независимое множество, равна $(1-p)^{C_m^2}$.

- Тогда:

$$P\{\alpha(G) \geq m\} \leq C_n^m \cdot (1-p)^{C_m^2} < n^m \cdot (e^{-p})^{m(m-1)}.$$

- Заметим, что при $n > 2$ выполнено неравенство:

$$p(m-1) \geq 5 \ln n - p > 4 \ln n.$$

- Следовательно:

$$e^{-p(m-1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

- Тогда:

$$n^m \cdot e^{-p(m-1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

- Таким образом:

$$P\{\alpha(G) \geq m\} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$