Помеченные графы и графы с точностью до изоморфизма. Группа автоморфизмов графа и её свойства.

Помеченные и непомеченные объекты

- Во многих комбинаторных задачах ответ и трудность его нахождения существенно зависят от того, рассматриваются ли помеченные или непомеченные объекты.
- Например, сколько существует различных графов на n вершинах? Ответ на этот вопрос зависит от того, какие графы мы будем считать различными.

1. Помеченные графы

- Пусть n вершин занумерованы числами от 1 до n. Тогда у нас есть C_n^2 пар вершин, каждую из которых можно соединить или не соединить ребром. Итого, получаем:

$$2^{C_n^2} = 2^{n(n-1)/2}$$

различных графов.

- Графы, все вершины которых занумерованы натуральными числами от 1 до $v(G)$, называют помеченными, а полученное выше количество графов — это число помеченных графов на n вершинах.

2. Непомеченные графы

- Совсем другой результат получается, если никаких пометок на вершинах нет и все вершины считаются идентичными.

- Напомним, что изоморфизмом графов G_1 и G_2 называется биекция $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$, удовлетворяющая условию:

$$\forall x, y \in V(G_1)\,(xy \in E(G_1) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(G_2)).$$

- Сами графы G_1 и G_2 в этом случае называют изоморфными. Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

По сути

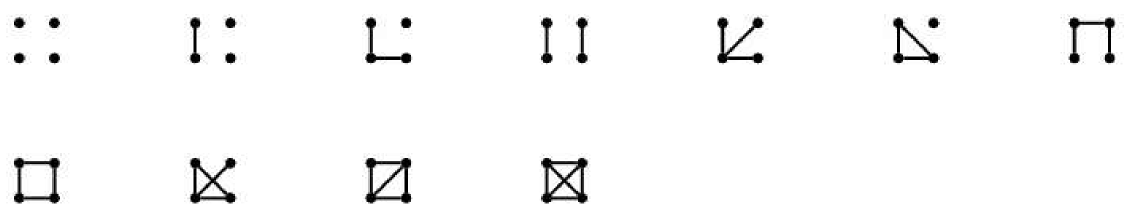
- Если мы стираем пометки на вершинах графа, то мы перестаем различать изоморфные друг другу графы. Тогда возникает вопрос о количестве графов с точностью до изоморфизма.

Изоморфизм графов

- Легко видеть, что изоморфность двух помеченных графов — это отношение эквивалентности.
- Интересующее нас количество графов с точностью до изоморфизма — это число классов эквивалентности.

Пример

- Есть $2^6 = 64$ помеченных графов на 4 вершинах, но всего 11 попарно неизоморфных графов на 4 вершинах.



Расстановка пометок и автоморфизмы графа

- Посмотрим на этот вопрос с другой стороны. Сколько есть способов расставить пометки на вершинах данного непомеченного графа?

- Другими словами, сколько помеченных графов входят в данный класс эквивалентности?

-
    - Количество классов эквивалентности было бы легко посчитать, если бы все классы содержали одинаковое число элементов. Однако, это,

увы, не так.

- - Например, очевидно, что полный граф является единственным элементом своего класса эквивалентности. Но есть $n(n-1)/2$ помеченных графов на n вершинах ровно с одним ребром — и все они изоморфны.

Способы расстановки пометок

- Всего есть $n!$ способов расставить пометки на данных n вершинах. Но некоторые из этих способов могут давать один и тот же помеченный граф.
- То есть граф может оказаться изоморфен сам себе.

Определение

- **Автоморфизмом графа** G называется изоморфизм из G в G.
- Множество всех автоморфизмов графа G обозначается $\mathrm{Aut}(G)$.

Группа автоморфизмов графа

Замечание

- Итак, автоморфизм графа — это перестановка на множестве его вершин, сохраняющая отношение смежности.
- Пусть вершины графа G занумерованы числами от 1 до n. Тогда $\mathrm{Aut}(G) \subset S_n$.

Утверждение

$$\mathrm{Aut}(G) < S_n.$$

Доказательство

- Очевидно, что $e \in \mathrm{Aut}(G)$. Далее нужно проверить замкнутость относительно умножения и взятия обратного элемента.

- Пусть $\varphi, \psi \in \operatorname{Aut}(G)$. Поскольку φ и ψ — биекции, их композиция — также биекция. Далее, для любых $x, y \in V(G)$ имеем:

$$xy \in E(G) \iff \psi(x)\psi(y) \in E(G) \iff \varphi(\psi(x))\varphi(\psi(y)) \in E(G).$$

- Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$. Поскольку φ — биекция, сохраняющая отношение смежности, то φ^{-1} — также биекция, сохраняющая отношение смежности.

Группа автоморфизмов и её свойства

Определение

Определённая выше группа $\operatorname{Aut}(G)$ называется группой автоморфизмов графа G
.

Утверждение

1. Если $G_1 \cong\ G_2$, то $\operatorname{Aut}(G_1) \cong\ \operatorname{Aut}(G_2)$.
2. Для любого графа G выполнено $\operatorname{Aut}(G) \cong\ \operatorname{Aut}(G)$.

Замечание

- То есть группы автоморфизмов изоморфных графов всегда изоморфны.
- Но обратное неверно. Например, легко построить граф, не изоморфный своему дополнению. У этих графов группы автоморфизмов будут изоморфны, а сами графы — нет.
- Порядок группы автоморфизмов тесно связан с числом способов расставить пометки на вершинах данного непомеченного графа (или, что то же самое, с размером класса эквивалентности по отношению изоморфности, содержащего данный помеченный граф).

Группа автоморфизмов и число способов расставить пометки

Лемма

Пусть G — помеченный граф и $n = v(G)$. Тогда существует ровно $\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}$ помеченных графов на том же множестве вершин, изоморфных G.

Доказательство

- Не умаляя общности, будем считать, что $V(G) = [1..n]$.
- Пусть $\mathcal{G}_n$ — множество всех помеченных графов на множестве $[1..n]$.
- Рассмотрим следующее действие группы S_n на множестве $\mathcal{G}_n$:
    - Для любых $\sigma \in S_n$ и $H \in \mathcal{G}_n$ обозначим через σH граф с:

$$V(\sigma H) = [1..n], \quad E(\sigma H) = \{\sigma(x)\sigma(y) \mid xy \in E(H)\}.$$

- Тогда:
    - $\langle G \rangle$ — множество всех графов на множестве $[1..n]$, изоморфных G;
    - $\mathrm{St}(G) = \mathrm{Aut}(G)$.
- Следовательно, по теореме из курса алгебры получаем, что:

$$|\langle G \rangle| = \frac{|S_n|}{|\mathrm{St}(G)|} = \frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}.$$

Задача о числе раскрасок p точек на окружности с точностью до поворота в случае простого p. Вывод малой теоремы Ферма из решения этой задачи.

Задачи о раскрашивании ожерелья

- Сейчас мы отложим на некоторое время задачу о перечислении непомеченных графов и рассмотрим две более простые задачи о перечислении непомеченных объектов.

1. На окружности расставлены n точек, разбивающие её на равные дуги. Сколькими способами можно раскрасить эти точки в a цветов, если раскраски, отличающиеся друг от друга поворотом окружности, считаются одинаковыми?

    - Как обычно, под раскраской множества M в a цветов мы понимаем отображение $c : M \to [1..a]$.
    - Неформальная формулировка: Дана карусель с n одинаковыми кабинками. Сколькими способами можно раскрасить кабинки в a цветов?

2. Тот же вопрос, но одинаковыми считаются раскраски, отличающиеся либо поворотом, либо осевой симметрией.

    - Неформальная формулировка: Дано ожерелье с n одинаковыми бусинками. Ожерелье можно как угодно поворачивать и переворачивать. Сколькими способами можно раскрасить бусинки в a цветов?

Простой частный случай задачи о каруселях

Утверждение

- Пусть $p \in P$. Тогда существует ровно $\frac{a^p - a}{p} + a = \frac{a^p + (p-1)a}{p}$ раскрасок p точек на окружности в a цветов, если раскраски, отличающиеся друг от друга поворотом окружности, считаются одинаковыми.

Доказательство

- Занумеруем все точки в порядке обхода по часовой стрелке числами от 0 до $p-1$.

    - Номера точек мы будем рассматривать по модулю p.
    - То есть можно считать, что мы нумеруем точки элементами кольца $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
    - Тогда поворот окружности на угол $\frac{2\pi k}{p}$ переводит точку с номером i в точку номер $i + k$.
    - Число k также можно рассматривать как элемент кольца $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
    - То есть всего получаем p различных поворотов.

- Рассмотрим произвольную раскраску $c : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to [1..a]$ точек окружности в a цветов.

Простой частный случай задачи о каруселях

- Докажем, что для раскраски c выполнено ровно одно из следующих двух утверждений:
    - либо раскраска не изменяется ни при каком повороте (и тогда цвета всех точек одинаковы);
    - либо все p возможных поворотов приводят к различным раскраскам.
- Пусть раскраска c не изменилась при повороте на угол $\frac{2\pi k}{p}$, где $0 < k < p$.
    - Тогда $c(0) = c(k) = c(2k) = \cdots = c((p-1)k)$.
    - Заметим, что $0, k, 2k, \ldots, (p-1)k$ – это все элементы кольца $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
    - Следовательно, цвета всех точек при раскраске c одинаковы.
- Всего есть a^p различных раскрасок помеченных точек. Среди них есть a одноцветных. Остальные $a^p - a$ раскрасок разбиваются на $\frac{a^p-a}{p}$ классов эквивалентности, по p раскрасок в каждом.
- Итого, получаем $\frac{a^p-a}{p} + a$ раскрасок с точностью до поворота.

Следствие (Малая теорема Ферма)

Дискретная математика. Глава 9. Перечисление непомеченных объектов. А.В. Пастор

- Пусть $a \in \mathbb{N}$ и $p \in P$. Тогда $a^p - a \equiv 0 \pmod p$.

Лемма Бернсайда о подсчете числа орбит.

Лемма Бернсайда

Определение

Пусть задано действие группы A на множестве X. Тогда для любого $\alpha \in A$:

- $\mathrm{Fix}(\alpha) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in X \mid \alpha x = x\}$ – множество неподвижных точек элемента α;
- элементы множества $\mathrm{Fix}(\alpha)$ – неподвижные точки элемента α.

Неподвижные точки:

- Для $\alpha \in A$: $Fix(\alpha) = \{x \in X \mid \alpha x = x\}$

- Это элементы, которые элемент α оставляет на месте

Стабилизатор:

- Для $x \in X$: $St(x) = \{\alpha \in A \mid \alpha x = x\}$

- Это подгруппа элементов, фиксирующих x

Утверждение

$$\sum_{\alpha \in A} |\mathrm{Fix}(\alpha)| = \sum_{x \in X} |\mathrm{St}(x)|.$$

Доказательство

Обе части равны $|\{(\alpha, x) \in A \times X \mid \alpha x = x\}|$.

Теорема (Лемма Бернсайда)

Количество орбит действия группы A на множестве X равно:

$$\frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} |\mathrm{Fix}(\alpha)|.$$

Доказательство

Присвоим каждому элементу $x \in X$ вес $w(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{|\langle x \rangle|}$.

- Тогда сумма весов элементов любой орбиты равна 1.

- Следовательно, сумма весов всех элементов множества X равна количеству орбит (обозначим его N).

$$N = \sum_{x \in X} w(x) = \sum_{x \in X} \frac{1}{|\langle x \rangle|} = \sum_{x \in X} \frac{|St(x)|}{|\langle x \rangle||St(x)|} = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} |\mathrm{Fix}(\alpha)|.$$

Замечание

Доказанное выше утверждение обычно называют **леммой Бернсайда**. Но оно было известно и ранее. Сам William Burnside в своей книге *“Theory of Groups of Finite Order”* 1897 года называл первооткрывателем этой леммы Фробениуса. Однако, судя по всему, это утверждение было известно ещё раньше.

Задача о числе раскрасок n точек на окружности с точностью до поворота. Решение для общего случая.

Теорема

Пусть $a, n \in \mathbb{N}$. Тогда существует ровно $\sum_{d|n} \frac{\phi\left(\frac{n}{d}\right)a^d}{n}$ раскрасок n точек на окружности в a цветов, если раскраски, отличающиеся друг от друга поворотом окружности, считаются одинаковыми.

Доказательство

- Как и ранее, занумеруем точки на окружности элементами кольца $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Пусть $X = \{c \mid c : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to [1..a]\}$ – множество всех раскрасок точек в a цветов.
- Повороты окружности можно рассматривать как действие циклической группы C_n порядка n на этом множестве.
  - Пусть образующая ε группы C_n соответствует повороту на угол $\frac{2\pi}{n}$.
  - Тогда элемент ε^k соответствует повороту на угол $\frac{2\pi k}{n}$.
- Пусть раскраска c является неподвижной точкой для элемента ε^k.

- Докажем, что раскраска c является d-периодичной, где $d = \gcd(k, n)$ (т. е. $\forall i\, (c(i) = c(i+d))$).

Задача о каруселях: общий случай

- Пусть $d = sk + tn$ – линейное представление $\gcd(k, n)$.
- Тогда $c(i) = c(i + sk) = c(i + sk + tn) = c(i + d)$.
- Обратно, любая d-периодичная раскраска, очевидно, является неподвижной точкой для элемента ε^k.
- Итак, $\mathrm{Fix}(\varepsilon^k)$ – это в точности множество всех d-периодичных раскрасок, где $d = \gcd(k, n)$.
- Тогда $|\mathrm{Fix}(\varepsilon^k)| = a^d$, поскольку любая d-периодичная раскраска однозначно задаётся цветами точек $0, 1, \ldots, d-1$.
- Следовательно, по лемме Бернсайда, число раскрасок с точностью до поворота равно:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a^{\gcd(k,n)}.$$

- Далее, запишем числа k и n в виде $k = k_1 d$ и $n = n_1 d$. Тогда $\gcd(k_1, n_1) = 1$.
  - То есть число k_1 можно выбрать $\phi(n_1)$ способами.
  - Следовательно, существует ровно $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ таких k, что $d = \gcd(k, n)$.
- Таким образом, число раскрасок равно:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a^{\gcd(k,n)} = \sum_{d|n} \frac{\phi\left(\frac{n}{d}\right) a^d}{n}.$$

Задача о числе раскрасок n точек на окружности с точностью до поворота и осевой симмет рии. Решение для общего случая.

Теорема

Пусть $a, n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $B(n, a)$ количество раскрасок n точек на окружности в a цветов, если раскраски, отличающиеся друг от друга поворотом окружности или осевой симметрией, считаются одинаковыми. Тогда:

- $B(n,a) = \frac{1}{2n}\sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) a^d + \frac{a^m}{2}$, при $n = 2m-1$;
- $B(n,a) = \frac{1}{2n}\sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) a^d + \frac{a^m(a+1)}{4}$, при $n = 2m$.

Доказательство

В отличие от предыдущей теоремы, здесь нужно рассматривать на множестве всех раскрасок действие группы D_n.

- D_n – это группа самосовмещений правильного n-угольника или диэдральная группа.
- В этой группе $2n$ элементов: n из них соответствуют поворотам, оставшиеся n – осевым симметриям.
- Также эту группу можно представлять себе как группу автоморфизмов цикла на n вершинах.

Задача об ожерелье: общий случай

- Мы уже знаем, что число неподвижных точек поворота на угол $\frac{2\pi k}{n}$ равно $a^{\gcd(k,n)}$.

Неподвижные точки для осевой симметрии

- При $n = 2m-1$ любая ось симметрии проходит через одну из отмеченных точек. Остальные $2m-2$ точки разбиваются на пары симметричных. Точки в каждой паре должны быть одного цвета. Итого, нам нужно выбрать цвета m точек: по одной точке в каждой паре и точки, лежащей на оси симметрии. Таких раскрасок a^m.

- При $n = 2m$ оси симметрии бывают двух видов: $\frac{n}{2}$ осей не проходят через отмеченные точки и $\frac{n}{2}$ проходят через две отмеченные точки.

- В первом случае раскраска однозначно задаётся выбором цветов m точек, а во втором — выбором цветов $m+1$ точки.
- То есть в первом случае получаем a^m раскрасок, а во втором — a^{m+1}.

Итог

- Тогда при $n = 2m - 1$ получаем, что:

$$B(n,a) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{\gcd(k,n)} + \frac{na^m}{2}.$$

- А при $n = 2m$ получаем:

$$B(n,a) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{\gcd(k,n)} + \frac{n}{2}a^m + \frac{n}{2}a^{m+1}.$$

Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма. Эквивалентность $g_n $\sim g_n^{(0)}$ —без доказательства.

Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма

- Введем следующие обозначения:
  - G_n — число помеченных графов на n вершинах;
  - g_n — число графов на n вершинах с точностью до изоморфизма.
- Мы уже знаем, что $G_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
- Оказывается, что g_n примерно в $n!$ раз меньше.
  - Неформально это означает, что почти у всех графов группа автоморфизмов тривиальна (т.е. состоит из единственного элемента: тождественного преобразования).

Теорема

$$g_n \sim \frac{G_n}{n!} = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}.$$

Доказательство

- Пусть G_n – множество всех помеченных графов на множестве вершин $V = [1..n]$.
- Как и ранее, рассмотрим следующее действие группы S_n на множестве G_n:
  - для любых $\sigma \in S_n$ и $H \in G_n$ обозначим через σH граф с

$$V(\sigma H) = V \quad \text{и} \quad E(\sigma H) = \{\sigma(x)\sigma(y) \mid xy \in E(H)\}.$$

Неподвижные точки

- Нам нужно посчитать число неподвижных точек для перестановки $\sigma \in S_n$.
- Для этого рассмотрим множество $V^{(2)}$ двухэлементных подмножеств множества V.
  - Другими словами, $V^{(2)}$ – это множество рёбер полного графа K_n на множестве вершин V.
- Заметим, что группа S_n действует также и на множестве $V^{(2)}$:

$$\sigma \cdot xy \overset{\text{def}}{=} \sigma(x)\sigma(y).$$

  Тем самым, каждая перестановка $\sigma \in S_n$ индуцирует перестановку $\sigma' \in S(V^{(2)})$, а группа S_n индуцирует подгруппу $S_n^{(2)} \subset S(V^{(2)})$, состоящую из всех перестановок множества $V^{(2)}$ вида σ'.
  - Группа $S_n^{(2)}$ называется парной группой группы S_n.
  - Фактически, мы построили гомоморфизм групп $S_n \to S(V^{(2)})$.
  - Группа $S_n^{(2)}$ – это образ данного гомоморфизма.
  - Нетрудно проверить, что при $n > 2$ группы S_n и $S_n^{(2)}$ изоморфны.

Рёберные циклы

- Для перестановки $\sigma \in S_n$ нас будут интересовать циклы соответствующей ей перестановки $\sigma' \in S_n^{(2)}$. Эти циклы мы будем называть рёберными циклами перестановки σ.

Свойства графов

- Заметим, что граф $G \in G_n$ является неподвижной точкой для перестановки $\sigma \in S_n$, если и только если для любого рёберного цикла C перестановки σ либо $C \subset E(G)$, либо $C \cap E(G) = \emptyset$.
- Тем самым, $|\mathrm{Fix}(\sigma)| = 2^{q(\sigma)}$, где $q(\sigma)$ – число рёберных циклов перестановки σ.
- Тогда по лемме Бернсайда:

$$g_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} 2^{q(\sigma)}.$$

Оценка $q(\sigma)$

- Обозначим через $S_{n,k}$ множество перестановок из S_n, имеющих ровно $n-k$ неподвижных точек.
- Пусть $g_n^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} 2^{q(\sigma)}$. Тогда:

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} g_n^{(k)}.$$

  - Очевидно, что $g_n^{(0)} = \frac{1}{n!} 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
  - То есть нам нужно доказать, что $g_n \sim g_n^{(0)}$.

Лемма

- Если $\sigma \in S_{n,k}$, то:

$$q(\sigma) \leq C_n^2 + \frac{1}{2}(k - nk + \frac{k^2}{2}).$$

Итог

- Заметим, что $|S_{n,k}| \leq C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} \leq n^k$.
- Тогда:

$$g_n^{(k)} \leq \frac{1}{n!} |S_{n,k}| 2^{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{2}(k - nk + k^2)} \leq g_n^{(0)} \cdot n^k \cdot 2^{\frac{1}{2}(k - nk + k^2)}.$$

- Следовательно:

$$1 \leq \frac{g_n}{g_n^{(0)}} \leq \sum_{k=0}^{n} n^k \cdot 2^{\frac{1}{2}(k-nk+k^2)}.$$

- При $n \to \infty$:

$$\frac{g_n}{g_n^{(0)}} \to 1.$$

- Таким образом:

$$g_n \sim g_n^{(0)} = \frac{G_n}{n!} = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}.$$