Компоненты сильной связности ориентированного графа, граф компонент сильной связности. Их свойства.

Определение

1. Мы будем называть рёбра орграфа **стрелками**, а множество всех стрелок ориентированного графа D будем обозначать через $A(D)$. Будем использовать обозначение $a(D)$ = $|A(D)|$.
2. Через $E(D)$ мы будем обозначать множество ребер орграфа D без ориентации (каждую стрелку заменим обычным неориентированным ребром).
3. Для непересекающихся множеств $X, Y \subset V(D)$ через $A_D(X, Y)$ мы будем обозначать множества всех стрелок орграфа D с началом в X и концом в Y. Будем использовать обозначение $a_D(X, Y) = |A_D(X, Y)|$.
4. Запись $e = xy \in A(D)$ будет обозначать, что e — стрелка с началом x и концом y. В случае, когда допускаются кратные стрелки, эта запись не утверждает, что e— единственная стрелка с началом x и концом y.
   • Если не оговорено обратное, мы будем считать, что в орграфе нет петель и сонаправленных кратных стрелок (у которых совпадают и начала, и концы).
   • Пары встречных стрелок (вида uv и vu), как правило, допускаются.
   • **Подграф** орграфа (в частности, **индуцированный подграф**) определяется так же, как для неориентированных графов. Индуцированный подграф орграфа D на множестве вершин $X \subset V(D)$ будем обозначать через $D(X)$.
   • Для любой вершины v орграфа D мы через $N_D^+(v)$ обозначим множество вершин орграфа D, в которые выходят стрелки из v, а через $N_D^-(v)$ обозначим множество вершин орграфа D, из которых выходят стрелки в v.
   • $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$ – окрестность вершины v.
   • **Степень** вершины $x \in V(D)$ – это количество инцидентных ей рёбер из E(D).
   • Для вершины $x \in V(D)$ через $d_D^+(x)$ мы будем обозначать исходящую степень вершины v, то есть, количество стрелок орграфа D, выходящих из

вершины x, а через $d_D^-(x)$ мы будем обозначать входящую степень вершины v – количество стрелок орграфа D, входящих в вершину x.

• $\delta(D), \delta^+(D)и\delta^-(D)$ – **минимальные** степень, исходящую степень и входящую степень вершин D соответственно.
Аналогично, $\Delta(D), \Delta^+(D)и\Delta^-(D)$ – это **максимальные** степень, исходящая степень и входящая степень орграфа D.

• Нетрудно понять, что для орграфа D и вершины $v \in V(D)$ выполнено $d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$

• Если в орграфе нет кратных стрелок, то $d_D^+(v) = |N_D^+(v)|, d_D^-(v) = |N_D^-(v)|, d_D(v) = |N_D(v)|$.

• **Пути** и **циклы** в ориентированном графе отличаются от обычного графа тем, что каждая стрелка может быть пройдена только в соответствии с направлением от начала к концу. Таким образом, у каждого пути в орграфе есть **начало** и **конец**, а у каждого цикла — фиксированное направление обхода.

• **Расстояние** $dist_D(x, y)$ от вершины x до вершины y в орграфе D есть длина кратчайшего $xy - \text{пути}$. В орграфе D возможно, что $dist_D(x, y) \neq dist_D(y, x)$.

• Удаление вершин и стрелок из орграфа мы определим и будем обозначать так же, как удаление вершин и рёбер из неориентированного графа

• Аналогично неориентированному графу определяется стягивание стрелки.

• Для неориентированного графа H его ориентацией является любой орграф $\vec{H}$ с $V(\vec{H}) = V(H)$, стрелки которого — это ориентированные каким-либо способом рёбра из $E(H)$. Таким образом, у графа H есть $2^{e(H)}$ ориентаций.

• Для орграфа D определим неориентированный граф $\underline{D}$ с множеством вершин $V(D)$ и множеством рёбер $E(D)$.

• Иногда допускается **частичная ориентация** рёбер графа G, когда часть рёбер остается неориентированными, по ним разрешен проход в обе стороны.

Сильная связность

Определение

Вершины a и b ориентированного графа G назовем связанными, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a.
Ориентированный граф G называется **сильно связным**, если любые две его вершины связаны.

• Отношение связанности вершин ориентированного графа G является отношением эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно).
• Множество вершин $V(G)$ разбивается на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть **компонентами сильной связности**.
• Для краткости, вместо “компонента сильной связности” будем писать КСС.
• Построим для орграфа G **орграф компонент сильной связности** $C(G)$, вершины которого — КСС G. Проведем в орграфе $C(G)$ стрелку $V_i \to V_j$ тогда и только тогда, когда в орграфе G есть хотя бы одна стрелка, направленная от КСС V_i к V_j.\

Определение

Орграф называется **ациклическим**, если он не имеет ориентированных циклов.

Лемма 1

Для любого ориентированного графа G выполняются следующие утверждения.

1. C(G) — ациклический орграф.
2. Для любой компоненты сильной связности V_i индуцированный подграф $G(V_i)$ сильно связен.

Доказательство.

1. Предположим противное, пусть в C(G) есть цикл $V_1V_2...V_k$. Тогда в орграфе G все вершины из $\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$ попарно связаны и, следовательно, входят в одну КСС. Противоречие.
2. • Пусть $w_1, w_2 \in V_i$. Тогда существует w_1w_2-путь S и w_2w_1-путь T в орграфе G.
   • Понятно, что все вершины из $V(S) \cup V(T) \ni w_1, w_2$ связаны в орграфе G, следовательно, $V(S) \cup V(T) \subset V_i$, то есть, вершины w_1 и w_2 связаны в $G(V_i)$. Таким образом, орграф $G(V_i)$ сильно связен.

Определение

Пусть V_i — компонента сильной связности ориентированного графа G.
• Назовем эту компоненту **промежуточной**, если в графе $C(G)$ существует стрелка, входящая в V_i, и существует стрелка, выходящая из V_i
• В противном случае назовем компоненту V_i **крайней**.
• Так как в $C(G)$ нет циклов, любой максимальный путь в этом графе начинается в вершине, из которой все ребра выходят, и заканчивается в вершине, в которую все ребра входят. Такие вершины соответствуют крайним компонентам сильной связности.
• Таким образом, любая промежуточная компонента сильной связности орграфа G лежит в $C(G)$ на пути между какими-то двумя крайними компонентами.

Критерии сильной связности и ацикличности орграфа.

Лемма 2

Орграф D сильно связен, **если и только если** для любого множества $W \subsetneq V(D)$ существует стрелка из $W \text{в} V(D) \setminus W$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Если из некоторого множества $W \subset V(D)$ нет стрелки в $V(D) \setminus W$, то невозможно попасть из W в $V(D) \setminus W$, что противоречит сильной связности D.
$\Leftarrow$. Если орграф не является сильно связным, то он имеет крайнюю компоненту сильной связности W, из которой не выходит ни одной стрелки в $V(D) \setminus W$, что противоречит условию, что для любого множества $W \subsetneq V(D)$ существует стрелка из $W \text{в} V(D) \setminus W$.

Лемма 3

Орграф D является **ациклическим**, если и только если его вершины можно занумеровать так, что любая стрелка ведет из вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.

Доказательство.

$\Leftarrow$**.** Если такая нумерация существует, отсутствие циклов очевидно: ни из какой вершины нельзя попасть в вершину с меньшим номером.
$\Rightarrow$. Существование нумерации для орграфа, не являющегося сильно связным, докажем по индукции.
• База для одновершинного орграфа очевидна.
• Понятно, что в ациклическом орграфе есть вершина a, из которой не выходит ни одной стрелки. По индукционному предположению построим нумерацию для (очевидно, ациклического) орграфа $D-a$, после чего присвоим вершине a последний, самый большой номер.

Входящее и исходящее дерево вершины.

Определение

Пусть T – такой орграф, что неориентированный граф T – дерево, $a \in V(T)$.

1. Если из каждой вершины орграфа T, кроме a, выходит ровно одно ребро, то T называется входящим деревом вершины a.
2. Если в каждую вершину орграфа T, кроме a, входит ровно одно ребро, то T называется исходящим деревом вершины a.

Лемма 4

1. Если D – входящее дерево вершины a, то из каждой вершины D существует путь до a.

2. Если D — исходящее дерево вершины a, то из a существует путь до каждой вершины D.

Доказательство.

1. Пусть $x \in V(D)$. Построим максимальный путь P с началом в x. Так как D — ациклический орграф, из конца пути P не выходит ни одной стрелки, значит, этот конец — вершина a.
2. Аналогично.

Теорема 1

Пусть G — орграф, $a \in V(G)$, V_a^- — множество всех вершин G, из которых можно дойти до a, а V_a^+ — множество всех вершин G, до которых можно дойти из a (мы считаем, что $a \in V_a^- \text{ и } a \in V_a^+$). Тогда существует входящее дерево вершины a с множеством вершин V_a^- и исходящее дерево вершины a с множеством вершин V_a^+ .

Доказательство.

Построим входящее дерево, исходящее строится аналогично
• Положим $L_0 = \{a\}$, пусть $L_k = \{x : dist_G(x, a) = k\}$. Если m — наибольшее расстояние от вершины множества V_a^- до a, то $\bigcup\limits_{k=0}^{m} L_k = V_a^-$.
• Для всех $k > 0$ проведем от каждой вершины $x \in L_k$ ровно одну стрелку, выходящую из x к вершине уровня L_{k-1} — предку x (такая стрелка, очевидно, есть). Обозначим через D орграф с построенным множеством стрелок. В D из каждой вершины, кроме a, выходит ровно одна стрелка.
• Предположим, что в $\underline{D}$ есть цикл Z. Пусть v — вершина наибольшего уровня L_m в Z.
• Тогда оба соседа v в Z должны лежать в уровнях не более m. Но по построению v смежна в D только с одной вершиной уровня не более m — со своим предком. Противоречие.
• Значит, $\underline{D}$ ацикличен, тогда D — входящее дерево вершины а.

Следствие 1

В сильно связном орграфе G для любой вершины a существует исходящее и входящее деревья вершины a с множеством вершин $V(G)$.

Доказательство.

Так как орграф G сильно связен, $V_a^- = V_a^+ = V(G)$.

Минимальные сильно связные графы. Оценки на число стрелок.

Теорема 2

Для сильно связного орграфа G на n вершинах выполняются следующие утверждения.

1. Существует сильно связный остовный подграф орграфа G, в котором не более $2n{-}2$ стрелок.
2. Пусть k — длина наибольшего простого цикла в орграфе G. Тогда существует сильно связный остовный подграф орграфа G, в котором не более $2n{-}k$ стрелок.

Доказательство.

1. Пусть $v \in V(G)$, а T_v^+ и T_v^- — это исходящее и входящее деревья вершины v, соответственно (они существуют по Следствию 1 тк граф сильносвязный).
   • Понятно, что остовный подграф орграфа G, полученный объединением этих двух деревьев, будет сильно связным и содержит не более $2n{-}2$ стрелок.

2. Пусть Z — простой цикл длины k в G.

• Построим новый орграф G', объединив все вершины цикла Z в одну новую вершину z. (Все стрелки, соединяющие остальные вершины орграфа G с вершинами цикла Z, в новом графе будут соединять эти же вершины с z. Возможно, в орграфе G' появятся кратные стрелки.)

• Орграф G' на $n – k + 1$ вершинах также будет сильно связным.

• По **пункту 1** в нем можно оставить не более $2(n – k)$ стрелок, обеспечивающих его сильную связность. В орграфе G к соответствующим стрелкам мы добавим k стрелок цикла Z и получим сильно связный остов, в котором не более $2(n – k) + k = 2n – k$ стрелок.

Следствие

Если в сильно связном орграфе G между **любыми** двумя вершинами проведено **не более** одной стрелки, то существует сильно связный остовный подграф орграфа G, в котором не более $2n – 3$ стрелок.

Доказательство.

• Очевидно, в сильно связном орграфе есть простой цикл. Пусть k – длина наибольшего простого цикла в G. Из условия следует, что k ≥ 3.

• По пункту 2 Теоремы 2 у G существует сильно связный остовный подграф, в котором не более чем $2(n – k) + k \leq 2n – 3$ стрелок

Критерий существования гамильтонова цикла в орграфе.

• **Гамильтонов цикл в орграфе** — это простой ориентированный цикл, проходящий по всем вершинам.

• Можно обобщить на орграфы и один из классических критериев гамильтоновости — критерий Дирака. С критерием Оре это сделать не получается.

Лемма 5

Пусть орграф G таков, что $max(\delta^+(G), \delta^-(G)) = k$. Тогда G имеет простой путь длины хотя бы k и простой цикл длины хотя бы $k+1$.

Доказательство.

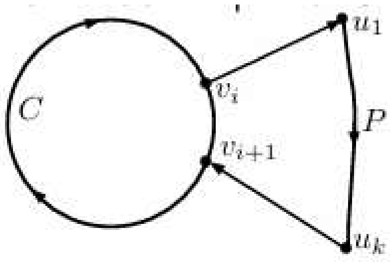
• НУО $\delta^+(G) \geq k$.
• Рассмотрим путь максимальной длины $P = a_1 a_2 ... a_n$ в орграфе G. Из его последней вершины a_n выходит хотя бы k стрелок. Так как путь P нельзя продлить, все эти стрелки выходят в $a_1, ..., a_{n-1}$.
• Пусть a_m – вершина наименьшего номера, для которой $a_n a_m \in A(G)$. Тогда в множестве {$a_m, ..., a_{n-1}$} лежат не менее k концов выходящих из a_n стрелок, следовательно, в этом множестве хотя бы k вершин. Значит, путь и цикл $a_m ... a_{n-1} a_n$ нам подходят.

Теорема 3

(A.Ghouila-Houri, 1960.) Пусть орграф G таков, что $min(\delta^+(G), \delta^-(G)) \geq \frac{v(G)}{2}$. Тогда G имеет гамильтонов цикл.

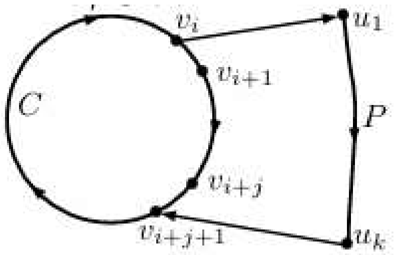
Доказательство.

• Рассмотрим максимальный цикл $C = v_1 ... v_m$. Тогда $m \geq \frac{v(G)}{2} + 1$ по Лемме 5. Нумерацию вершин считаем циклической по модулю m.
• Предположим, что цикл C не является гамильтоновым и рассмотрим орграф $H = G - V(C)$. Пусть $P = u_1 ... u_k$ – максимальный путь в H.
• Тогда $m + k \leq v(G)$ и $k \leq \frac{v(G)}{2} - 1$.
• Положим $S = \{i : v_i u_1 \in A(G)\}$ и $T = \{i : u_k v_{i+1} \in A(G)\}$.
• Если $S \cap T \ni i$, то мы увеличим цикл C, заменив стрелку $v_i v_{i+1}$ на путь $v_i u_1 P u_n v_{i+1}$ (см. рис.а), что противоречит максимальности цикла C. Следовательно, S ∩ T = ∅.



a

• В силу максимальности пути P мы имеем $N_G^+(u_k) \subset V(C) \cup V(P)$ и $N_G^-(u_1) \subset V(C) \cup V(P)$.
• Следовательно, $\frac{v(G)}{2} \le d_G^+(u_k) \le k - 1 + |T|$ и $\frac{v(G)}{2} \le d_G^-(u_1) \le k - 1 + |S|$.
• Так как $S \cap T = \emptyset$ и $k \le \frac{v(G)}{2} - 1$, получим $|S| \ge 1$, $|T| \ge 1$ и $|S \cup T| = |S| + |T| \ge v(G) - 2k + 2 \ge m - k + 2$.
• Существуют такие индексы i и j, что $i \in S, i+1, \dots, i+j-1 \notin S \cup T$ и $i + j \in T$. По доказанному выше $j - 1 \le k - 2$.
• Тогда $v_i u_1, u_k v_{i+j+1} \in A(G)$ и мы получаем цикл $v_{i+j+1} C v_i u_1 P u_k$ (см. рис.b), в котором хотя бы на одну вершину больше чем в C. Противоречие.



b

Существование гамильтонова пути в турнире.

Турниры

Турниром, называется орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.
• Такие орграфы называют турнирами, так как с их помощью удобно изображать однокруговые турниры без ничьих.

Лемма 6

В турнире существует **гамильтонов** путь.

Доказательство.

• Рассмотрим самый длинный простой путь $P = a_1...a_k$ в турнире T.
• Предположим, что он не гамильтонов и рассмотрим не вошедшую в P вершину $b \in V(T)$.
• Если $ba_1 \in A(T)$, то добавим b в начало пути. Если $a_nb \in A(T)$, то добавим b в конец пути. Так как это противоречит максимальности P, $a_1b \in A(T)$ и $ba_n \in A(T)$
• Тогда существует такое $i \leq k{-}1$, что $a_ib \in A(T)$ и $ba_{i+1} \in A(T)$. В этом случае можно вставить b между a_i и a_{i+1} и увеличить путь. Противоречие с максимальностью P.
• Значит, наше предположение неверно и P — гамильтонов путь.

Следствие 2

Структура компонент сильной связности турнирного графа представляет собой простой путь $V_1V_2...V_m$, в котором для любых двух различных компонент V_i и V_j, где i < j, все ребра графа ориентированы от V_i к V_j.

Доказательство.

• Между любыми двумя компонентами турнира T есть стрелка. Следовательно, орграф КСС $C(T)$ – турнир.
• Пусть $V_1, ..., V_m$ – все КСС турнира T. По Лемме 6 в $C(T)$ есть гамильтонов путь $V_1V_2...V_m$.
• Так как турнир $C(T)$ ацикличен, $V_iV_j \in A(C(T))$ при $i < j$.

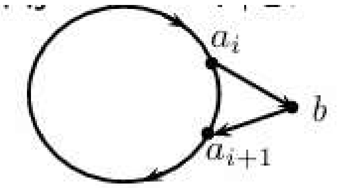
Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе.

Теорема 4

(P. Camion, 1959.) В сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.

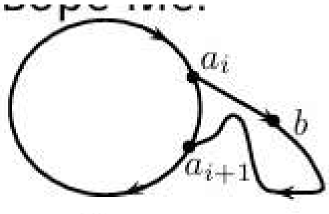
Доказательство.

• В сильно связном турнире T есть циклы. Рассмотрим максимальный простой цикл $C = a_1 a_2 ... a_k$. Предположим, что он не гамильтонов, пусть вершина b не вошла в этот цикл.
• Пусть не все стрелки между b и циклом C ориентированы одинаково. Тогда существуют последовательные вершины цикла a_i и a_{i+1} такие, что $a_i b, b_a i + 1$ ∈ A(T) (см. рис.a). В этом случае можно удлинить максимальный цикл C, вставив вершину b между a_i и a_{i+1}, противоречие.



a

• Пусть из всех вершин цикла C стрелки входят в b (если стрелки выходят из b к C — аналогично). Ввиду сильной связности турнира T существует путь S от b до цикла C.
• Пусть S впервые пересекает цикл C в вершине $a_{i+1} (см. рис.b). Тогда можно удлинить C, заменив стрелку $a_i a_{i+1}$ на путь $a_i b S a_{i+1}$. Противоречие.



b

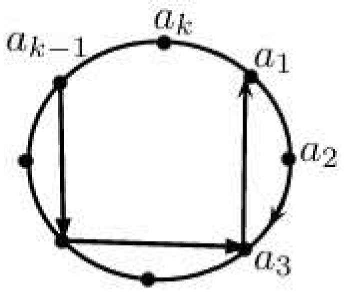
Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности

Теорема 5

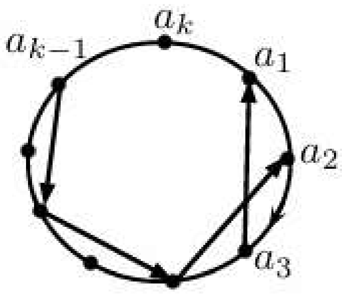
В сильно связном турнире G с четырьмя и более вершинами существуют две такие вершины $a, b \in V(G)$, что турниры $G - a$ и $G - b$ сильно связны.

Доказательство.

- По Теореме 4 в турнире G есть ГЦ $a_1 a_2 \ldots a_k$ (нумерация вершин — циклическая).
- Если $a_i a_{i+2} \in A(G)$, то турнир $G - a_{i+1}$ сильно связен. Если таких i хотя бы два, то теорема доказана.
- Пусть в $A(G)$ существует не более чем одна стрелка вида $a_i a_{i+2}$. Тогда можно предположить, что $a_{i+2} a_i \in A(G)$ при $i = k$, а ориентация ребра $a_k a_{k+2} = a_k a_2$ может быть произвольной.
- Докажем, что в таком случае орграф $G - a_k$ сильно связен. Для этого достаточно показать, что существует путь из a_{k-1} в a_1. Это несложно: по стрелкам-диагоналям ГЦ существует путь $a_{k-1} a_{k-3} \ldots$, приходящий, в зависимости от четности $k - 1$, в a_1 (рис.a) или в a_2 (рис.b). Во втором случае дополним этот путь участком $a_2 a_3 a_1$.



a



b

- Таким образом, турнир $G - a_k$ сильно связен. Отметим, что мы не пользовались при этом рёбрами $a_k a_2$ и $a_k a_{k-2}$, их ориентация не имеет для нас значения. Поэтому аналогично доказывается, что турнир $G - a_2$ сильно связен

Циклы в сильно связных турнирах. Теорема Муна.

(J. W.Moon, 1966.) Пусть G – сильно связный турнир, а $k \in N, 3 \leq k \leq v(G)$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Для любой вершины $v \in V(G)$ существует простой цикл длины k, проходящий через v.
2. В турнире G существует хотя бы $v(G) + 1 - k$ простых циклов длины k.

Доказательство.

• Зафиксируем k и будем доказывать оба утверждения индукцией по количеству вершин турнира G. При $v(G) = k$ оба утверждения следуют из Теоремы 4: в сильно связном турнире G есть гамильтонов цикл.

1. • Пусть $v(G) > k$. Тогда по Теореме 5 существует такая вершина $w \neq v$, что турнир $G - w$ сильно связен.
   • Так как $3 \leq k \leq v(G) - 1 = v(G - w)$, по индукционному предположению в турнире $G - w$ есть простой цикл длины k, проходящий через v. Этот же цикл есть и в турнире G.
2. • Пусть $v(G) > k$. Тогда по Теореме 5 существует такая вершина w, что турнир $G - w$ сильно связен.
   • В турнире $G - w$ существует не менее $v(G - w) + 1 - k = v(G) - k$ простых циклов длины k.
   • По пункту 1 в турнире G существует простой цикл длины k, проходящий через вершину w, следовательно, в турнире G не менее чем $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k.

Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе

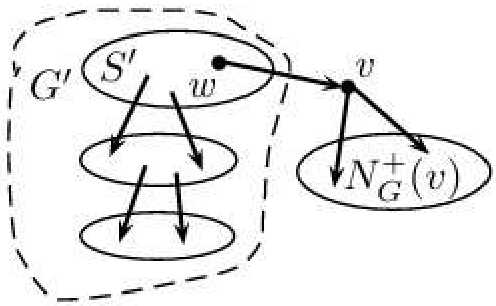
• Пусть G – орграф. Как и в неориентированном случае, $\alpha(G)$ – количество вершин в максимальном независимом множестве вершин орграфа G (то есть, максимальном множестве вершин, никакие две из которых не соединены стрелкой).

Теорема 7

(V.Chvatal; L.Lovasz, 1974.) В любом орграфе G существует такое независимое множество $S \subset V(G)$, что для любой вершины $v \in V(G) \setminus S$ существует путь длины не более 2 с началом в S и концом v.

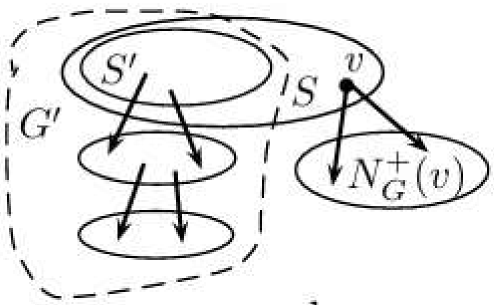
Доказательство.

Доказательство будет индукцией по количеству вершин в орграфе.
База при $v(G) = 1$ очевидна.
• **Индукционный переход**. Пусть для меньших орграфов утверждение доказано. Рассмотрим любую вершину $v \in V(G)$. Если $V(G) = \{v\} \cup N_G^+(v)$, то утверждение теоремы очевидно, нам подходит $S = \{v\}$.
• Пусть $V(G) \neq \{v\} \cup N_G^+(v)$. Для орграфа $G' = G - (v \cup N_G^+(v))$ утверждение доказано, возьмем соответствующее этому графу независимое множество S'.
• Если существует такая вершина $w \in S'$, что $v \in N_G^+(w)$, то множество S' подходит и для графа G (см. рис.a).



a

• Если такой вершины w нет, положим $S = S' \cup \{v\}$. Так как $S' \cap N_G^+(v) = \emptyset$, в этом случае множество S независимо, и любая вершина $x \in V(G) \setminus S$ достижима из S по пути длины не более 2 (см. рис.b).



b

Следствие 3

В любом турнире G существует такая вершина v, что для любой вершины $w \in V(G)$ существует vw-путь длины не более 2.

Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях.

Теорема 8

(B.Roy, 1967; T.Gallai, 1968) Пусть G — неориентированный граф, $\vec{G}$ — его ориентация. Тогда орграф $\vec{G}$ содержит путь длины не менее $\chi(G) - 1$.

Доказательство.

• Пусть $A \subset A(\vec{G})$ — минимальное по включению такое множество стрелок, что орграф $G' = \vec{G} - A$ — ациклический.
• Для любой вершины $v \in V(G)$ положим $\rho(v)$ равным длине наибольшего простого пути в орграфе G' с началом в v. Покажем, что ρ — правильная раскраска вершин графа G.

Утверждение

Пусть вершины $a, b \in V(G)$ соединены простым путём P в орграфе $G\prime$. Тогда $\rho(a) > \rho(b)$.

Доказательство.

Рассмотрим путь P_b длины $\rho(b)$ в орграфе G'. Так как G' — ациклический, то любой путь в орграфе G' — простой. В частности, равный объединению P и P_b путь P_a с началом в a — простой. Так как $|P_a| > |P_b|$, то $\rho(a) > \rho(b)$

• **Вернемся к доказательству теоремы 8**.
• Пусть $x, y \in V(G)$ и $xy \in E(G)$. НУО $xy \in A(\vec{G})$. Если $xy \in A(G\prime)$, то, как доказано выше, $\rho(x) \neq \rho(y)$.
• Если $xy \notin A(G')$, то $xy \in A$. Из минимальности A следует, что в орграфе $G' + xy$ есть цикл, но тогда в орграфе G' есть yx-путь, а следовательно, $\rho(x) \neq \rho(y)$.
• Мы доказали правильность раскраски ρ. Пусть k — номер наибольшего цвета в ρ. Тогда в орграфе G' (а значит, и в $\vec{G}$) есть простой путь длины k. Поскольку раскраска ρ красит вершины в цвета $0, 1, ..., k$, то $\chi(G) \leq k + 1$.

Ядро орграфа. Критерий раскрашиваемости графа в терминах ядер ориентаций.

Ядро орграфа и списочные раскраски рёбер.

Определение

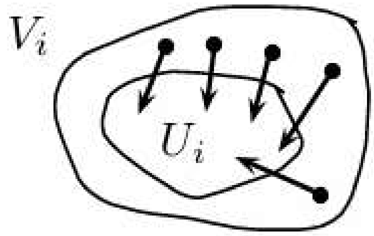
Пусть H — орграф. Независимое множество вершин $U \subset V(H)$ называется **ядром**, если для любой вершины $v \in V(H) \setminus U$ существует хотя бы одна стрелка $vu \in A(H)$, где $u \in U$.

Лемма 7

Пусть H — орграф, каждой вершине $v \in V(H)$ соответствует список цветов $L(v)$, причём $d^+_H(v) < \ell(v)$. Предположим, что каждый индуцированный подграф орграфа H имеет ядро. Тогда существует правильная раскраска вершин H в соответствии с данными списками.

Доказательство.

• Индукция по $v(H)$, база для пустого орграфа очевидна.
• Предположим, что для меньших орграфов лемма доказана. Пусть i — цвет, присутствующий в списках, $V_i \subset V(H)$ — множество из всех вершин, чьи списки содержат цвет i, $H_i = H(V_i)$.
• По условию, орграф H_i имеет ядро U_i. Покрасим все вершины из U_i в цвет i (это не нарушит правильности раскраски, так как ядро является независимым множеством), после чего исключим цвет i из списков всех вершин $v \in V_i \setminus U_i$ и получим новые списки $L'(v)$.



• Пусть H' = $H - U_i$. Поскольку U_i — ядро орграфа H_i = $H(V_i)$, то для любой вершины $v \in V_i \setminus U_i$ выполняется $d^+_{H'}(v) \leq d^+_H(v) - 1 < \ell(v) - 1 = \ell'(v)$.
• По индукционному предположению, вершины орграфа H' можно покрасить правильным образом по новым спискам, в которых нет цвета i. В результате получится правильная раскраска всех вершин орграфа H по спискам.

Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа.

(F. Galvin, 1995.) Для любого двудольного графа G выполняется $ch'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$.

Доказательство.

• Пусть $G = (V_1, V_2, E)$, $k = \Delta(G)$. По теореме 4.9 (теорема Кёнинга) мы имеем χ'(G) = k, то есть, существует правильная раскраска ρ рёбер графа G в k цветов (пусть это цвета $1, \ldots, k$).
• Обозначим через G' рёберный граф двудольного графа G. (Вершины G' соответствуют рёбрам G. Две вершины G' смежны, если и только если смежны

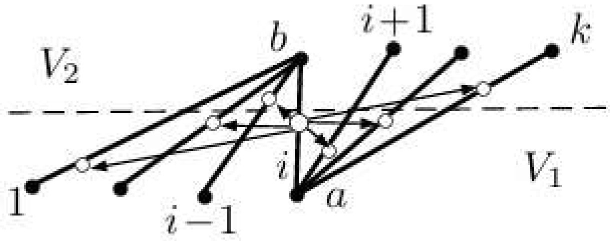
соответствующие рёбра.)

• Пусть каждому ребру e графа G (а значит, и каждой вершине графа G') соответствует список $L(e)$ из k цветов. Наша цель — построить правильную раскраску вершин графа G' по данным спискам. Для этого мы хотим применить к рёберному графу G' Лемму 7.

• Введём множество предпочтений для вершин исходного графа G. Для вершины $a \in V_1$ предпочтение $<_a$ строго упорядочивает инцидентные a рёбра по возрастанию их цветов в раскраске ρ, а для вершины $b \in V2$, предпочтение $<_b$ строго упорядочивает инцидентные b рёбра по убыванию их цветов в раскраске ρ

• Мы ориентируем каждое ребро ef рёберного графа G' от e к f, если для их общей вершины v рёбер e и f имеет место $e <_v f$. Тем самым, мы получим ориентацию $\vec{G}'$ графа G'.

• По построению множества предпочтений мы имеем $d^+_{\vec{G}'}(e) \le k{-}1 < \ell(e)$. (Если e = ab, $a \in V_1, b \in V_2$ и $\rho(e) = i$, то из e могут выходить стрелки к инцидентным a рёбрам цветов $i+1, \ldots, k$ и к инцидентным b рёбрам цветов $1, \ldots, i{-}1$, всего не более $k{-}1$ стрелки, см. рис.)



• Остаётся доказать, что у любого индуцированного подграфа $\vec{H}'$ орграфа $\vec{G}'$ есть ядро. Для этого мы воспользуемся теоремой Гэйла-Шепли (Stable Marriage Theorem).

• Пусть F — множество всех рёбер графа G, соответствующих вершинам из $\vec{H}'$, а $H = G(F)$. Для введённого выше множества предпочтений существует стабильное паросочетание M графа H. Рёбра из M образуют независимое множество вершин орграфа $\vec{H}'$.

• По определению стабильного паросочетания и по построению ориентации $\vec{H}'$, для любого ребра $f \in F \setminus M$ существует такое ребро $e \in M$ и общая вершина v рёбер e и f, что $f <_v e$, то есть, $fe \in A(\vec{H}')$. Таким образом, M — ядро $\vec{H}'$.

• Теперь воспользуемся Леммой 7 и получим, что существует правильная раскраска вершин графа G' (и, соответственно, рёбер графа G) по заданным спискам. Таким образом, $ch'(G) = k$.

Теорема Галлаи-Мильграма о покрытии орграфа путями.

Теорема 10

(T.Gallai; A.Milgram, 1960.) Вершины орграфа G можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ попарно непересекающимися простыми путями.

Доказательство.

• Для каждого простого пути P обозначим его конец через $t(P)$.
• Будем называть **покрытием** орграфа G множество из нескольких попарно непересекающихся простых путей в G, покрывающих все его вершины. Для каждого покрытия $\mathcal{P}$ обозначим через $T(\mathcal{P})$ множество концов всех путей из $\mathcal{P}$.
• На множестве покрытий орграфа G мы введём отношение порядка: будем считать, что $\mathcal{P}_1$ < $\mathcal{P}_2$, если $|\mathcal{P}_1| < |\mathcal{P}_2|$ и $T(\mathcal{P}_1) \subset T(\mathcal{P}_2)$.

Утверждение

Пусть $\mathcal{P}$ — минимальное по введённому отношению порядка покрытие орграфа G. Тогда на каждом пути из $\mathcal{P}$ можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым.

Доказательство.

• Будем считать, что для меньших орграфов утверждение доказано.
• Пусть $\mathcal{P}$ = $\{P_1, \ldots, P_n\}$, $u_i = t(P_i)$. Если множество $\{u_1, \ldots, u_n\}$ — независимое, то утверждение доказано.
• Предположим, что $u_i u_j \in A(G)$. Пусть путь Q_i получен из P_i добавлением стрелки $u_i u_j$.
• Если $V(P_j) = \{u_j\}$, то заменой P_i и P_j на Q_i получаем строго меньшее в нашем порядке чем $\mathcal{P}$, покрытие, что невозможно.
• Значит, $V(P_j) \neq \{u_j\}$. Тогда рассмотрим орграф $G' = G - u_j$ и его покрытие

$\mathcal{P}'$, полученное заменой пути P_j на $P'_j = P_j - u_j$.
• Докажем, что $\mathcal{P}'$ — минимальное покрытие орграфа G'.
• Если это не так, рассмотрим строго меньшее в нашем порядке покрытие $\mathcal{Q}'$ орграфа G'.
• Пусть $u'_j = t(P'_j)$, ясно, что $u'_j u_j \in A(G)$. Отметим, что единственная вершина, которая может входить в $T(\mathcal{Q}')$ и не входит в $T(\mathcal{P})$ – это u'_j . Рассмотрим три случая.

Случай 1: Существует путь $Q' \in \mathcal{Q}'$ с $t(Q') = u'_j$.

• Пусть $Q = Q' u'_j u_j$, тогда $t(Q) = u_j$.
• Рассмотрим покрытие $\mathcal{Q}$ орграфа G, полученное из $\mathcal{Q}'$ заменой пути Q' на Q. Очевидно $\mathcal{Q}$ < $\mathcal{P}$: мы имеем $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$ и $|Q| = |Q'| < |P'| = |P|$. Противоречие с выбором $\mathcal{P}$.

Случай 2: В $\mathcal{Q}'$ нет пути с концом в u'_j, но существует путь $Q' \in \mathcal{Q}'$ с $t(Q') = u_i$.

• Пусть путь Q получен из Q' добавлением ребра $u_i u_j$, тогда $t(Q) = u_j$.
• Рассмотрим покрытие $\mathcal{Q}$ орграфа G, полученное из $\mathcal{Q}'$ заменой пути Q' на Q. Очевидно $\mathcal{Q}$ < $\mathcal{P}$: мы имеем $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$ и $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{Q}'| < |\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$. Противоречие с выбором $\mathcal{P}$.

Случай 3: В покрытии $\mathcal{Q}'$ нет ни пути с концом в u'_j, ни пути с концом в u_i.

• Тогда $|T(\mathcal{Q}')| \leq |T(\mathcal{P}')| - 2$, следовательно, $|\mathcal{Q}'| \leq |\mathcal{P}'| - 2$.
• Дополним $\mathcal{Q}'$ до покрытия $\mathcal{Q}$ орграфа G, добавив путь $\{u_j\}$. И на этот раз оказывается, что $\mathcal{Q}$ < $\mathcal{P}$, противоречие

• Таким образом, $\mathcal{P}'$ — минимальное покрытие орграфа G'.
• Так как $v(G') < v(G)$, по индукционному предположению на путях покрытия $\mathcal{P}'$ можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым. По построению покрытия $\mathcal{P}'$, выбранные вершины подходят и для покрытия $\mathcal{P}$ орграфа G.

• Теперь легко доказать теорему. Рассмотрим любое минимальное покрытие $\mathcal{P}$ орграфа G. На путях покрытия $\mathcal{P}$ можно выбрать по вершине так, чтобы эти вершины образовывали независимое множество, следовательно, $|\mathcal{P}| \leq \alpha(G)$.

Теорема Дилворса

Определение

Пусть V — частично упорядоченное множество с порядком $<$. Подмножество $U \subset V$ — **цепь**, если любые два его элемента сравнимы и **антицепь**, если никакие два его элемента несравнимы.

(R.P.Dilworth, 1950.) Пусть V — конечное частично упорядоченное множество. Тогда минимальное количество цепей, покрывающих V, равно количеству вершин в максимальной антицепи множества V.

Доказательство.

• Построим орграф G на элементах множества V, как на вершинах: для любых $x, y \in V$ мы положим $xy \in A(G)$, если и только если $x < y$.
• Очевидно, $\alpha(G)$ равно количеству вершин в максимальной антицепи множества V, а путь в орграфе G проходит по вершинам цепи множества V.
• По Теореме 10 вершины орграфа G можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ путями, то есть, множество V можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ цепями.
• Остаётся лишь добавить, что две вершины антицепи не могут оказаться в одной цепи, поэтому покрывающих множество V цепей будет ровно $\alpha(G)$.