Сети и потоки. Разрез сети. Лемма о потоке через разрез.

Сеть

Задано множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (**вход** или **исток**) и t (**выход** или **сток**).
Определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая для любых вершин $x, y \in V$ соотношениям

1. $c(x, y) \geq 0$,
2. c(x, s) = 0,
3. c(t, y) = 0

Тогда $G = (V, s, t, c)$ - **сеть**, функция c называется **пропускной способностью** сети G.
Множество $A(G) = \{(x, y) : c(x, y) > 0\}$ называется **множеством стрелок** сети G.

Поток

Определение

Пусть G – сеть, а функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трём условиям:

- $(F1)$ для любых $x, y \in V$, $f(x, y) \leq c(x, y)$;
- $(F2)$ для любых $x, y \in V$, $f(x, y) = -f(y, x)$;
- $(F3)$ для любой вершины $v \in V$, $v \neq s, t$ выполняется условие: $\sum_{x \in V} f(v, x) = 0$.
- Тогда f – поток в сети G.
- Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ называется величиной потока.
- Поток сети G с максимальной величиной называется **максимальным**.

Вообще-то не очевидно, что максимальный поток существует.

Пояснение

Разрез

Определение

1. Пусть G – сеть, а множество её вершин V разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) – **разрез** сети G.
2. Величина $c(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется **пропускной способностью разреза.**
3. Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется **минимальным**.
4. Для любого потока f в сети G величина $f(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} f(x, y)$ называется потоком через разрез (S, T).

   Нетрудно понять, что минимальный разрез сети существует. Возможно, таких разрезов несколько.

Лемма 1

Для любого потока f и разреза (S, T) сети G выполняется $|f| = f(S, T)$.

Доказательство

Ввиду условия $(F3)$:

$$|f| = \sum_{x \in V} f(s, x) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in S} f(y, x).$$

В правой части равенства для любых двух вершин $y, z \in S$ присутствуют слагаемые $f(y, z)$ и $f(z, y)$, которые в силу $(F2)$ в сумме дают 0. Поэтому:

$$\sum_{y \in S} \sum_{x \in V} f(y, x) = \sum_{y \in S} \sum_{x \in T} f(y, x), = f(S, T)$$

что и требовалось доказать.

Остаточная сеть и дополняющий путь. Лемма о сумме потоков. Поток вдоль пути

Остаточная сеть. Дополняющий путь

Определение

1. Пусть f — поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же V, s, t и пропускной способностью:

$$c_f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = s \text{ или } x = t, \\ c(x, y) - f(x, y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Назовем G_f **остаточной сетью** потока f.

2. **Дополняющий путь** потока f — это любой st-путь в остаточной сети G_f.

Лемма 2

Пусть f — поток в сети G, f' — поток в сети G_f. Тогда $f + f'$ — поток в сети G, причём:

$$|f + f'| = |f| + |f'|.$$

Доказательство

Нетрудно проверить для потока $f + f'$ условия $(F1)$, $(F2)$ и $(F3)$. Утверждение про величину потока очевидно.

Поток вдоль пути

Определение Пусть $P - st$-путь в сети G, а $c-$ минимальная пропускная способность стрелки пути P. Определим поток f_P **вдоль пути** P:

$f_p(x, y) = c$ при $xy \in A(P)$, $f_p(x, y) = -c$, при $yx \in A(P)$, $f_p(x, y) = 0$ при $xy, yx \notin A(P)$

Теорема Форда-Фалкерсона и следствие о минимальном разрезе.

Теорема 1

(L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956.)

В сети $G = (V, s, t, c)$ задан поток f. Тогда следующие три утверждения равносильны:

1. Поток f максимален.
2. Существует такой разрез (S, T), что $|f| = c(S, T)$.
3. В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

Доказательство

$2 \implies 1$. Рассмотрим другой поток f'. По Лемме 1:

$$|f'| = f'(S,T) = \sum_{x \in S, y \in T} f'(x,y) \le \sum_{x \in S, y \in T} c(x,y) = c(S,T) = f,$$

откуда следует максимальность f.

$1 \implies 3$

Предположим противное, пусть в остаточной сети G_f есть дополняющий путь P, а f_P – поток вдоль пути P. По Лемме 2 тогда $f + f_P$ – поток в G, причём:

$$f + f_P = f + f_P > f,$$

что противоречит максимальности f.

$3 \implies 2$

- Пусть S – множество всех вершин, достижимых из s в остаточной сети G_f (см. рисунок).
- Так как в G_f нет дополняющего пути, то $t \notin S$. Тогда $(S, T = V \setminus S)$ – разрез в сетях G и G_f.
- По построению $A_{G_f}(S,T) = \emptyset$, следовательно:

$$0 = c_f(S,T) = c(S,T) - f(S,T),$$

откуда:

$$c(S,T) = f(S,T) = f$$

(последнее равенство следует из Леммы 1).

Следствие 1

Величина максимального потока в сети G равна пропускной способности минимального разреза сети G.

Доказательство.

- Рассмотрим максимальный поток f и такой разрез (S, T), что $f = c(S, T)$ (такой разрез существует по теореме 1).
- Тогда для любого другого разреза (S', T') мы имеем $c(S', T') \geq f(S', T') = f(S, T) = c(S, T)$ Значит, разрез (S, T) минимален.

Целые сети. Целый максимальный поток в целой сети.

Определение

- Сеть G называется **целой**, если ее пропускная способность c – **целочисленная**.
- Поток f называется **целым**, если на любой паре вершин он принимает **целочисленное** значение.

Теорема 2

В целой сети G существует максимальный поток. Среди максимальных потоков целой сети найдется целый.

Доказательство.

- Будем последовательно строить поток. Изначально положим f = 0.
- Пусть в некоторый момент есть целый поток f в целочисленной сети G. Рассмотрим остаточную сеть G_f. Если в G_f нет дополняющего пути P, то по Теореме 1 поток f максимальный.
- Если же в G_f есть дополняющий путь P, то рассмотрим поток f_P вдоль пути P в остаточной сети G_f и положим $f := f + f_P$.
- По Лемме 2 мы построили новый целый поток в G, причем его пропускная способность на $|f_P|$ больше, чем у предыдущего.

- Так как с каждым шагом величина потока возрастает на целую величину (хотя бы на 1), процесс обязательно закончится, в результате мы получим целый максимальный поток в сети G.

Реберная теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.

Определение

Пусть G – неориентированный граф без петель, кратные рёбра допускаются. Для $x, y \in V(G)$ обозначим через $\lambda_G(x, y)$ размер минимального множества рёбер, отделяющего x от y. Назовем $\lambda_G(x, y)$ рёберной связностью вершин x и y
.

Теорема 3

(L. R.Ford, D.R.Fulkerson, 1956.) Пусть $s, t \in V(G)$. Тогда существует $\lambda_G(s, t)$ путей из s в t, не имеющих общих рёбер.

Доказательство.

- Построим сеть $\vec{G}$ на множестве вершин $V(G)$. Входом будет s, выходом будет t.
- Определим пропускные способности: $c(x, y)$ равняется кратности ребра xy в графе G (то есть, 0, если такого ребра нет, и m, если в графе G есть m кратных рёбер xy). Дополнительно определим $c(x, s) = c(t, x) = 0$ для всех $x \in V(G)$.
- Отметим, что при $x, y \notin \{s, t\}$ мы имеем $c(x, y) = c(y, x)$.
- Сеть $\vec{G}$ целая. По Теореме 2 в ней есть целый максимальный поток f. Пусть $|f| = k$.

Утверждение

Поток f распадается на k st-путей без общих рёбер.

Доказательство

- Построим новый орграф G' на тех же вершинах. Если $f(x, y) = l > 0$ для $x, y \in V(G)$, мы проведем в G' ровно l стрелок xy.
- Понятно, что $l \in \mathbb{Z}$ и в графе G есть не менее l ребер, соединяющих x и y.
- Из вершины s выходит ровно k стрелок, а в каждой отличной от s и t вершине v по свойству потока ($F3$) количества входящих и выходящих стрелок равны (см. рис.a). Встречных стрелок по свойству ($F2$) потока нет.

- Выйдем из s и будем каждый раз проходить по стрелке орграфа G', по которой еще не ходили. В некоторый момент мы достигнем t (если в любую другую вершину мы вошли, сможем и выйти, см. рис.b).

  -Удалим из G' стрелки пройденного пути, теперь из s выходит $k - 1$ стрелка. Повторим эти действия еще $k - 1$ раз. В результате будет выделено k непересекающихся по рёбрам st-путей в графе G (не обязательно простых).
- Вернемся к доказательству Теоремы 3. По Теореме 1 для максимального потока f существует такой разрез (S, T) нашей сети, что $c(S, T) = f = k$.
- Тогда из S в T выходит ровно k рёбер графа G (так как для $x \in S$ и $y \in T$ пропускная способность $c(x, y)$ равна количеству рёбер между x и y). Эти k рёбер отделяют S от T, а стало быть, и s от t в графе G. Значит, $k \geq \lambda_G(s, t)$.

Определение

Граф называется **рёберно k-связным**, если он остается связным после удаления любого множества, состоящего из менее чем k рёбер.

Следствие

В рёберно k-связном графе G для любых двух вершин s, t существует k путей из s в t, не имеющих общих рёбер.

Доказательство.

Достаточно применить Теорему 3 к паре вершин s и t.

Максимальный поток в произвольной сети. Алгоритм кратчайшего пути

Теорема 4

(Е.А.Диниц, 1970). В произвольной сети G существует максимальный поток.

Доказательство

- План доказательства такой же, как и в Теореме 2: мы будем постепенно увеличивать максимальный поток, добавляя к нему поток вдоль дополняющего пути. Однако, на этот раз нам нельзя произвольно выбирать дополняющий путь.
- Пусть в некоторый момент построен поток f в сети G. Рассмотрим остаточную сеть G_f. Если в G_f нет дополняющего пути P, то по Теореме 1 поток f максимальный. Пусть в G_f есть дополняющие пути.
- Мы выберем самый короткий дополняющий путь P в G_f , рассмотрим поток f_P вдоль пути P и положим $f' := f + f_P$. Почему же этот процесс когда-нибудь закончится?

Утверждение

Пусть Q – простой st-путь в остаточной сети $G_{f'}$, которого нет в остаточной сети G_f. Тогда Q длиннее, чем P.

Доказательство.

- Пусть $s = x_0 x_1 \dots x_k$ = t это путь P. Понятно, что путь P простой, а значит, все его вершины различны.
- Сначала поймем, какие же стрелки могут входить в $A(G_{f'}) \setminus A(G_f)$. Такая стрелка yz имеет $c_f(y,z) = 0$, но $0 < c_{f'}(y,z) = c_f(y,z) - f_p(y,z)$. Значит, $zy \in A(P)$, то есть, $z = x_i$ и $y = x_{i+1}$ для некоторого i. По условию, путь Q содержит хотя бы одну такую стрелку.
- **Трансверсаль** пути P это путь между двумя его вершинами, внутренние вершины которого не принадлежат P.
- Назовём $x_i x_j$-трансверсаль L пути P **правильной**, если $i < j$ и **неправильной** в противном случае.
- Стрелку $x_i x_{i+1}$, мы будем считать правильной трансверсалью пути P, а стрелку $x_{i+1} x_i$ неправильной.

- Путь Q разбивается на трансверсали пути P пусть это $L_1, \dots, L_m$. Как показано выше, среди них есть хотя бы одна обратная стрелка пути P а это неправильная трансверсаль.
- Пусть L правильная $x_i x_j$-трансверсаль пути P. Тогда все стрелки трансверсали L лежат в $A(G_f)$. Если L короче, чем $x_i P x_j$, то мы могли бы заменить этот участок пути P на трансверсаль L и найти в G_f более короткий путь, чем P, противоречие с выбором пути P.
- Таким образом, каждая правильная трансверсаль пути P не короче участка пути P между ее концами. Заменим каждую правильную трансверсаль на соответствующий участок между ее концами. в результате получится st-маршрут Q', который не длиннее st-пути Q.
- Поскольку и P, и Q' ведут из s в t, маршрут Q' содержит все рёбра пути P. Так как Q (а стало быть, и Q') содержит хотя бы одну неправильную трансверсаль пути P, маршрут Q' (а следовательно, и путь Q) строго длиннее чем P.
- **Вернемся к доказательству Теоремы 4**
- После каждого шага алгоритма построения потока взамен одного из кратчайших путей из s в t в остаточной сети могут появиться лишь строго более длинные пути.
- Значит, в результате каждого шага либо увеличивается длина кратчайшего st-пути, либо эта длина сохраняется, но уменьшается количество кратчайших st-путей.
- Отметим, что кратчайший путь всегда простой, а длина простого пути из s в t ограничена количеством вершин сети. Значит, процесс построения закончится, и в результате получится остаточная сеть без дополняющих путей. По Теореме 1 это означает, что будет построен максимальный поток