Алгебра. Глава 9. Квадратичные формы и скалярное произведение

Квадратичные формы. Матрицы квадратичной формы в разных базисах.

Квадратичные формы

- Здесь и далее K — поле характеристики не 2 (то есть, $2 \neq 0$ в поле K).
- Мы будем иметь дело с линейным пространством V над K с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
- Элементы V будут записываться как столбцы координат в этом базисе: $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Определение

- Функция $f : V \to K$, заданная формулой

$$f((x_1, \ldots, x_n)^T) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{i,j} x_i x_j,$$

  где все коэффициенты $a_{i,j} \in K$, называется **квадратичной формой**.

- Зачем в определении фигурирует $2a_{i,j}x_ix_j$ при $i \neq j$?
  - Для того, чтобы была возможность расписать этот член как $a_{i,j}x_ix_j + a_{j,i}x_jx_i$, где $a_{i,j} = a_{j,i}$.
- Рассмотрим симметричную матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in M_n(K)$ (то есть, удовлетворяющую условию $a_{i,j} = a_{j,i}$ для всех пар индексов) и вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$.
- Тогда значение квадратичной формы f на векторе X может быть переписано как $f(X) = X^T A X$.
- Матрица A называется **матрицей квадратичной формы f.**

Замена базиса

- Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса V?

- Пусть базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ меняется на $\{e_1', \ldots, e_n'\}$, в котором координаты записываются как $X' = (x_1', \ldots, x_n')^T$ (мы считаем, что столбец координат без штрихов в старом базисе соответствует столбцу со штрихами в новом), а матрица квадратичной формы f обозначается A'.
- Это означает, что квадратичная форма f в исходном базисе записывается как $X^T AX$, а в новом базисе — как $(X')^T A' X'$.

- Как нам известно, изменение координат при замене базиса делается умножением на матрицу перехода.
    - Пусть C — матрица перехода от $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ к $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
    - Тогда $X = CX'$ и

$$X^T AX = (CX')^T A(CX') = (X')^T (C^T AC)X'.$$

    - Следовательно, $A' = C^T AC$.

Приведение квадратичной формы к диагональному виду.

Определение

- Квадратичная форма имеет диагональный вид, если она записывается $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, то есть, её матрица — диагональная.
- Привести квадратичную форму к диагональному виду значит найти такой базис, в котором эта форма имеет диагональный вид.

Теорема 1

- Любую квадратичную форму $f : V \to K$ можно привести к диагональному виду.

Доказательство

- Индукция по количеству переменных n.
- База $n = 1$ очевидна. Также утверждение очевидно в случае, когда все коэффициенты квадратичной формы равны 0 (такая форма уже имеет диагональный вид).
- Пусть $n > 1$, для меньшего числа переменных теорема доказана, и мы рассматриваем в базисе $e_1, \ldots, e_n$ квадратичную форму:

$$f((x_1,\dots,x_n)^T)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}2a_{i,j}x_ix_j,$$

имеющую хотя бы один ненулевой коэффициент.

Случай 1: $a_{i,i}\neq 0$ **для** $i\in\{1,\dots,n\}$

- Пусть $i=1$. Рассмотрим члены f, содержащие x_1:

$$a_{1,1}x_1^2+2a_{1,2}x_1x_2+\dots+2a_{1,n}x_1x_n=a_{1,1}(x_1+\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2+\dots+\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n)^2-a_{1,1}\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1,i}}{a_{1,1}}x_i^2.$$

- Построим новый базис $e_1'=e_1$ и $e_i'=e_i-\frac{a_{1,i}}{a_{1,1}}e_1$ при $i\in\{2,\dots,n\}$. (Очевидно, вектора $e_1',\dots,e_n'$ — линейно независимы, а значит, образуют базис n-мерного пространства.)
- Тогда вектор $(x_1,\dots,x_n)^T$ в исходном базисе в новом базисе имеет вид $(x_1',x_2',\dots,x_n')^T$, где:

$$x_1'=x_1+\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2+\dots+\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n,\quad x_i'=x_i \text{ при } i\in\{2,\dots,n\}.$$

- Поэтому, ввиду вышеуказанного преобразования, получаем:

$$f(x_1,\dots,x_n)=a_{1,1}(x_1')^2+g(x_2',\dots,x_n'),$$

где g — квадратичная форма, которую можно привести к диагональному виду по индукционному предположению.
- Сделаем это и оставим без изменений базисный вектор e_1', в результате получится базис, в котором f имеет диагональный вид.

Случай 2: все коэффициенты $a_{i,i}=0$

- Но есть ненулевой коэффициент — тогда, не умаляя общности, можно считать, что $a_{1,2}\neq 0$.
- Рассмотрим новый базис, в котором изменён только первый вектор: $e_1',e_2,e_3,\dots,e_n$, причём $e_1'=e_1-e_2$.
- Нетрудно понять, что вектор с координатами $(x_1,\dots,x_n)^T$ в исходном базисе в новом базисе имеет вид $(x_1',x_2',\dots,x_n')^T$, где:

$$x_2'=x_2+x_1,\quad x_i'=x_i \text{ при } i\neq 2.$$

- Одночлен $2a_{1,2}x_1x_2=2a_{1,2}x_1'(x_2'-x_1')$ в новом базисе содержит $-2a_{1,2}(x_1')^2$.
- В других одночленах $(x_1')^2$ появиться не может, поэтому мы получаем $a_{1,1}'=-2a_{1,2}\neq 0$ и попадаем в разобранный выше случай 1.

Закон инерции квадратичных форм.

Вещественные квадратичные формы

- В этом разделе мы рассмотрим вещественные квадратичные формы, то есть, случай $K = \mathbb{R}$.
- Вещественные числа в первую очередь хороши тем, что на них есть отношение порядка больше-меньше.
- Следующую теорему называют **законом инерции квадратичных форм** .

Теорема 2

- Пусть $f((x_1, \ldots, x_n)^T)$ — вещественная квадратичная форма, которая двумя способами приведена к диагональному виду:

$$g((y_1, \ldots, y_n)^T) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2, \quad h((z_1, \ldots, z_n)^T) = \sum_{i=1}^{n} b_i z_i^2.$$

- Тогда среди $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ поровну положительных коэффициентов. Также среди $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ поровну отрицательных коэффициентов, а значит, и поровну нулевых коэффициентов.

Доказательство

- Достаточно доказать равенство количеств положительных коэффициентов. Утверждение для отрицательных коэффициентов доказывается аналогично, после чего утверждение для нулевых выводится.
- Предположим противное, пусть, скажем, у g положительных коэффициентов меньше, чем у h.
- Можно занумеровать коэффициенты так, чтобы $a_1, \ldots, a_p > 0$, $b_1, \ldots, b_{p+q} > 0$, а все остальные коэффициенты не превосходили 0.
- По определению, диагональный вид квадратичной формы — это её запись в другом базисе, то есть, существуют такие невырожденные матрицы перехода $C, D \in M_n(\mathbb{R})$, что:

$$f((x_1, \ldots, x_n)^T) = a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2 = b_1 z_1^2 + \cdots + b_n z_n^2,$$

  где $(y_1, \ldots, y_n)^T = C(x_1, \ldots, x_n)^T$, $(z_1, \ldots, z_n)^T = D(x_1, \ldots, x_n)^T$.
- Попробуем подобрать такой ненулевой вектор $(x_1, \ldots, x_n)^T$, что для него $y_1 = \cdots = y_p = z_{p+q+1} = \cdots = z_n = 0$.
- Равенство нулю каждой координаты — это линейное уравнение на $x_1, \ldots, x_n$, вместе получаем ОСЛУ с переменными $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} y_1 = c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ y_p = c_{p,1}x_1 + c_{p,2}x_2 + \dots + c_{p,n}x_n = 0, \\ z_{p+q+1} = d_{p+q+1,1}x_1 + d_{p+q+1,2}x_2 + \dots + d_{p+q+1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ z_n = d_{n,1}x_1 + d_{n,2}x_2 + \dots + d_{n,n}x_n = 0. \end{cases}$$

- Значит, существует ненулевое решение — вектор x_0, которому соответствуют:

$$Cx_0 = y_0 = (0, \dots, 0, y_{p+1}, \dots, y_n), \quad Dx_0 = z_0 = (z_1, \dots, z_{p+q}, 0, \dots, 0).$$

- Тогда:

$$f(x_0) = \sum_{i=p+1}^{n} a_i y_i^2 \leq 0, \quad f(x_0) = \sum_{i=1}^{p+q} b_i z_i^2 \geq 0,$$

откуда следует, что $f(x_0) = 0$ и $z_1 = \dots = z_{p+q} = 0$.
- Таким образом, $z_0 = 0$, а это значит, что $D \cdot x_0 = 0$ для $x_0 \neq 0$, что для невырожденной матрицы D невозможно. Противоречие.

Положительно определенные квадратичные формы.

Положительно определенные квадратичные формы

- Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение

- Вещественная квадратичная форма $f : V \to \mathbb{R}$ называется **положительно определенной**, если для любого $x \in V$, $x \neq 0$, мы имеем $f(x) > 0$.
- На всякий случай заметим, что для квадратичной формы всегда выполнено $f(0) = f((0, \dots, 0)^T) = 0$.

Теорема 3

- Пусть положительно определенная квадратичная форма $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ приведена к диагональному виду $a_1 y_1^2 + \dots + a_n y_n^2$. Тогда все коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ положительны.

Доказательство

- Пусть это не так и, скажем, $a_1, \ldots, a_p > 0$, $a_{p+1}, \ldots, a_n \leq 0, p < n$.
- По определению, диагональный вид квадратичной формы — это её запись в другом базисе.
- Это означает, что существует такая невырожденная матрица перехода $C \in M_n(\mathbb{R})$, что:

$$f((y_1, \ldots, y_n)^T) = a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2, \quad (y_1, \ldots, y_n)^T = C(x_1, \ldots, x_n)^T.$$

- Попробуем подобрать такой ненулевой вектор $(x_1, \ldots, x_n)^T$, что для него $y_1 = \cdots = y_p = 0$.
- Получаем ОСЛУ:

$$\begin{cases} y_1 = c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \cdots + c_{1,n}x_n = 0, \\ \ldots \\ y_p = c_{p,1}x_1 + c_{p,2}x_2 + \cdots + c_{p,n}x_n = 0. \end{cases}$$

- В этой ОСЛУ n переменных и $p < n$ уравнений, а значит, существует ненулевое решение — вектор x_0.
- Так как матрица C невырождена, вектор $Cx_0 = y_0 = (0, \ldots, 0, y_{p+1}, \ldots, y_n)$ не равен 0.
- Тогда:

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2 = \sum_{i=p+1}^{n} a_i y_i^2 \leq 0,$$

  что противоречит положительной определенности f.

Кривые второго порядка на плоскости.

Кривые второго порядка на плоскости

Определение

- Кривая второго порядка — это все точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, являющиеся решением уравнения:

$$a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y = f',$$

  где коэффициенты $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$, среди которых a', b', c' есть ненулевые.

Уменьшение числа ненулевых коэффициентов

- Невырожденной заменой координат можно привести квадратичную форму $a'x^2 + b'y^2 + c'xy$ к диагональному виду (при этом изменятся коэффициенты d', e', f').
- Таким образом, достаточно рассматривать уравнения вида:

$$ax^2 + by^2 + c''x + e''y = f''.$$

- Легко видеть, что хотя бы один из коэффициентов a, b не равен 0.
- Вне зависимости от способа приведения квадратичной формы к диагональному виду, количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов среди a и b по закону инерции будет одним и тем же.

Случай 1: Коэффициенты a, b одного знака

- Пусть $a > 0$ и $b > 0$ (иначе умножим уравнение на -1).
- Уравнение:

$$ax^2 + by^2 + e''x + d''y = f'' \implies a\left(x + \frac{d''}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{e''}{2b}\right)^2 = f'' - \frac{(d'')^2}{4a} - \frac{(e'')^2}{4b}.$$

- После замены переменных получится уравнение вида:

$$ax^2 + by^2 = f.$$

- При $f < 0$ уравнение не имеет решений.
- При $f = 0$ единственное решение — точка $(0, 0)$.
- При $f > 0$ получаем кривую на плоскости, которая называется эллипсом.
- От исходной системы координат на плоскости мы перешли к итоговой с помощью обратимого линейного оператора (замены базиса) и параллельного переноса на вектор $\left(\frac{d''}{2a}, \frac{e''}{2b}\right)$.

Случай 2: Коэффициенты a, b разных знаков

- Пусть $a > 0$ и $b < 0$ (иначе умножим уравнение на -1).
- Аналогично случаю 1, заменой переменных уравнение приводится к виду:

$$ax^2 + by^2 = f.$$

- Поделим x на $\sqrt{a}$, а y на $\sqrt{-b}$ и получим в новых координатах уравнение:

$$x^2 - y^2 = f.$$

- При $f = 0$ решение этого уравнения — две прямые $x = y$ и $x = -y$.
- При $f \neq 0$ сделаем еще одну невырожденную замену переменных: $x' := x + y, y' := x - y$ и получим уравнение:

$$x'y' = f.$$

- Такая кривая на плоскости называется гиперболой.

Случай 3: Один из коэффициентов a, b равен 0

- Пусть $a > 0$ и $b = 0$ (иначе переобозначим переменные и при необходимости умножим уравнение на -1).
- Уравнение:

$$ax^2 + d'x + e'y = f'.$$

- Аналогично случаю 1, заменой переменных уравнение приводится к виду:

$$dy = ax^2 + f.$$

- При $d = 0$ уравнение задает на плоскости параболу.
- При $d \neq 0$ решение:
  - $ax^2 = -f$. При $f > 0$ решений нет, при $f = 0$ решения – прямая $x = 0$, а при $f < 0$ – две параллельные прямые $x = \sqrt{-f}$ и $x = -\sqrt{-f}$.\
- От исходной системы координат на плоскости мы перешли к итоговой с помощью обратимых линейных операторов и параллельного переноса.
- Эти преобразования плоскости обратимы и переводят прямую в прямую, а параллельные прямые– в параллельные прямые.
- Поэтому в случаях, когда получается прямая или две параллельные прямые или когда нет решений, то же самое получается и в исходных координатах.

Вещественное и комплексное скалярное произведение. Свойства. Матрица Грама

Вещественное скалярное произведение

Определение

- Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$, а отображение $(,) : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:
  1. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x, y, z \in V$;
  2. $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in V$;
  3. $(x, x) > 0$ для любого $x \in V$, отличного от 0.
- Тогда $(,)$ называется вещественным скалярным произведением, а V – пространством со скалярным произведением, или Евклидовым пространством.

Комплексное скалярное произведение

Определение

- Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, а отображение $(,): V \times V \to \mathbb{C}$ удовлетворяет следующим условиям:
    1. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $x, y, z \in V$;
    2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для любых $x, y \in V$;
    3. Для любого $x \in V$, отличного от 0, число (x, x) — вещественное и положительное.
- Тогда $(,)$ называется комплексным скалярным произведением, а V — пространством со скалярным произведением, или Эрмитовым пространством.

Свойство 1

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$. Тогда:

$$(z, \alpha x + \beta y) = \alpha(z, x) + \beta(z, y)$$

  для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $x, y, z \in V$.

Доказательство

- $(z, \alpha x + \beta y) = \overline{(\alpha x + \beta y, z)} = \overline{\alpha(x, z) + \beta(y, z)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{(x, z)} + \overline{\beta} \cdot \overline{(y, z)} = \overline{\alpha}(z, x) + \overline{\beta}(z, y)$.

Свойство 2

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над K, $x \in V$. Тогда:

$$(0, x) = (x, 0) = 0$$

  для любого $x \in V$.

Доказательство

- Ввиду определения, нам достаточно доказать, что $(0, x) = 0$. Это очевидно следует из:

$$(0, x) = (0 + 0, x) = (0, x) + (0, x).$$

Определение

- Пусть $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, V — пространство со скалярным произведением над K, а $e_1, \ldots, e_n$ — базис V.
- **Матрица Грама** базиса $e_1, \ldots, e_n$ — это матрица $G = (g_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$, где $g_{i,j} = (e_i, e_j)$.

Свойства матрицы Грама

- Непосредственно из определений можно вывести свойства матрицы Грама.

Свойство 3

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над K. Тогда на главной диагонали матрицы Грама стоят положительные вещественные коэффициенты.

Свойство 4

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$. Тогда матрица Грама симметрична (то есть, $G^T = G$).

Свойство 5

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$. Тогда $G^T = \overline{G}$ (то есть, $g_{i,j} = \overline{g_{j,i}}$).

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца над $\mathbb{R}$

Теорема 4

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$, $x, y \in V$. Тогда:

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y).$$

Доказательство

- По определению вещественного скалярного произведения, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y).$$

- При фиксированных x и y мы имеем квадратный трехчлен относительно λ, у которого, очевидно, не более одного корня, а значит, его дискриминант неположителен:

$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0,$$

откуда следует доказываемое неравенство.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца над $\mathbb{C}$

Теорема 5

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$, $x, y \in V$. Тогда:

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x) \cdot (y,y).$$

Доказательство

- Пусть $(x,y) = |(x,y)|e^{i\varphi}$.
- Тогда $\overline{(x,y)} = |(x,y)|e^{-i\varphi}$.
- По определению комплексного скалярного произведения и сказанному выше, для любого $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq (tx + e^{i\varphi}y, tx + e^{i\varphi}y) = (tx,tx) + (e^{i\varphi}y, tx) + (tx, e^{i\varphi}y) + (e^{i\varphi}y, e^{i\varphi}y).$$

- Раскрывая скобки:

$$\begin{gathered} t^2(x,x) + t \cdot ((e^{i\varphi}y, x) + (x, e^{i\varphi}y)) + e^{i\varphi} \cdot \overline{e^{i\varphi}}(y,y). = \\ t^2(x,x) + t \cdot (e^{i\varphi}\overline{(x,y)} + \overline{e^{i\varphi}}(x,y)) + N(e^{i\varphi})(y,y) = \\ t^2(x,x) + t \cdot (e^{i\varphi}e^{-i\varphi}|(x,y)| + e^{-i\varphi}e^{i\varphi}|(x,y)|) + (y,y) = \\ t^2(x,x) + 2t|(x,y)| + (y,y) \end{gathered}$$

- При фиксированных x и y мы имеем квадратный трехчлен относительно t, у которого, очевидно, не более одного корня, а значит, его дискриминант неположителен:

$$4|(x,y)|^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0,$$

откуда следует доказываемое неравенство.

Длина вектора.

Длина вектора

Определение

- Пусть $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, V — пространство со скалярным произведением над K, $x \in V$. Длина вектора x — это:

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}.$$

- Длина ненулевого вектора — положительное вещественное число.

Свойство 1

- Если $\lambda \in K$, то:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Доказательство

- При $K = \mathbb{R}$ считаем, что $\lambda = \overline{\lambda}$:

$$\|\lambda x\| = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot (x, x) = |\lambda|^2 \cdot (x, x) = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Свойство 2

- Если $x, y \in V$, то:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Доказательство

- $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x)$.
- При $K = \mathbb{R}$ по Теореме 4 (Нер-во КБШ) имеем $(x, y) = (y, x) \leq \|x\| \cdot \|y\|$, и продолжаем:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

  откуда следует доказываемое неравенство.
- При $K = \mathbb{C}$ по Теореме 5 имеем:

$$(x, y) + (y, x) = 2\,\mathrm{Re}((x, y)) \leq 2|(x, y)| \leq 2\|x\| \cdot \|y\|,$$

  и продолжаем точно так же, как в вещественном случае.

Свойство 3

- (Неравенство треугольника). Если $x, y, z \in V$, то:

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|.$$

Доказательство

- Так как $x - y = (x - z) + (z - y)$, утверждение следует из Свойства 2.

Ортогональный и ортонормированный базис. Вычисление скалярного произведения.

Ортогональный и ортонормированный базис

Определение

- Пусть $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а V — пространство со скалярным произведением.
- Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис V.
  1. Базис называется **ортогональным**, если его матрица Грама диагональна, и **ортонормированным**, если его матрица Грама равна E_n.
  2. Векторы $x, y \in V$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.
- Ортогональность базиса эквивалентна тому, что $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ (то есть, любые два различных базисных вектора ортогональны).
- Базис является ортонормированным, если и только если он ортогональный и $(e_i, e_i) = 1$ для каждого базисного вектора.

Свойство 1

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$, $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис V, $x, y \in V$, причем $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ — координаты векторов в указанном базисе. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Доказательство

- $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,
  так как $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. $\square$

Свойство 2

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$, $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис V, $x, y \in V$, причем $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ — координаты векторов в указанном базисе. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}.$$

Доказательство

- $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot \overline{y_j}(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \overline{y_i}$, так как $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Ортогонализация набора векторов.

Ортогонализация Грама-Шмидта

Теорема 6

- Пусть V — пространство со скалярным произведением над K, а $e_1, \ldots, e_m \in V$. Тогда существует такой ортогональный набор векторов $f_1, \ldots, f_m \in V$, что для любого $p \in \{1, \ldots, m\}$ выполнено $\mathrm{Lin}(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_p)$.

Доказательство

- Будем доказывать утверждение индукцией по m.
- **База** для $m = 1$ очевидна: возьмем $f_1 = e_1$.
- **Переход**. Пусть набор $f_1, \ldots, f_k$ уже построен.
- Будем искать следующий вектор в виде:

$$f_{k+1} = e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i.$$

- Так как $\mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Lin}(f_1, \ldots, f_k)$ и по построению f_{k+1}, мы имеем:

$$\mathrm{Lin}(f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}) = \mathrm{Lin}(f_1, \ldots, f_k, e_{k+1}) = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}).$$

- Если $f_i = 0$, коэффициент α_i может быть любым. Пусть $f_i \neq 0$.
- Для того, чтобы найти коэффициент α_i (где $i \in \{1, \ldots, k\}$), заметим, что:

$$0 = (f_{k+1}, f_i) = (e_{k+1}, f_i) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (f_j, f_i) = (e_{k+1}, f_i) + \alpha_i (f_i, f_i),$$

  откуда $\alpha_i = -\frac{(e_{k+1}, f_i)}{(f_i, f_i)}$.
- Если векторы $e_1, \ldots, e_k$ (где $k \leq m$) попарно ортогональны, то алгоритм ортогонализации их не изменит, и мы получим $f_i = e_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Следствие 2

- Любое подпространство $W < V$ имеет ортогональный и ортонормированный базис.

Доказательство

- Рассмотрим базис W и подвергнем его ортогонализации — получится ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$.
- Базис $e'_1, \ldots, e'_n$, где $e'_i = \frac{e_i}{\sqrt{(e_i, e_i)}}$, — ортонормированный (извлечение квадратного корня корректно, так как (e_i, e_i) — положительное вещественное число).

Ортогональное дополнение: теорема о размерности и прямой сумме.

Ортогональное дополнение

Определение

- Пусть $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а V — пространство над K со скалярным произведением.
- Для $W < V$ определим ортогональное дополнение как:

$$W^{\perp} = \{x \in V : \forall w \in W \ (x, w) = 0\}.$$

Теорема 7

- Пусть $W < V, \dim(V) = n, \dim(W) = m$. Тогда:
  - $W^{\perp} < V$,
  - $\dim(W^{\perp}) = n - m$,
  - $W \oplus W^{\perp} = V$,
  - $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Доказательство

- Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — ортогональный базис W, который мы уже научились строить.
- Дополним его до базиса V, пусть получился базис $f_1, \ldots, f_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$.
- Применим к этому базису ортогонализацию Грама-Шмидта, пусть в результате получились векторы $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n$ (напомним, что первые m векторов не изменились!).
- Рассмотрим $U = \mathrm{Lin}(f_{m+1}, \ldots, f_n)$.

Утверждение 1

- $U \subset W^{\perp}$.

Доказательство

- Пусть $u \in U, w \in W$. Нам нужно доказать, что $(w, u) = 0$.
- Тогда $w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$ и $u = \sum_{j=m+1}^{n} \beta_j f_j$, где $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$.
- Так как для любых $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{m+1, \dots, n\}$ мы имеем $(f_i, f_j) = 0$:

$$(w, u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{\beta_j} \cdot (f_i, f_j) = 0.$$

Утверждение 2

- $U \supset W^{\perp}$.

Доказательство

- Пусть $x \in W^{\perp}$. Тогда $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$.
- Для любого $s \in \{1, \dots, m\}$ имеем:

$$0 = (x, f_s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i, f_s) = \alpha_s (f_s, f_s),$$

  откуда следует, что $\alpha_s = 0$. Но тогда $x \in U$.

Итог

- Таким образом, $W^{\perp} = U = \mathrm{Lin}(f_{m+1}, \dots, f_n)$ и $\dim(W^{\perp}) = n - m$.
- Так как $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$ – базис V, то 0 единственным образом представляется в виде линейной комбинации этих векторов.
- Следовательно:

$$V = \mathrm{Lin}(f_1, \dots, f_m) \oplus \mathrm{Lin}(f_{m+1}, \dots, f_n) = W \oplus W^{\perp}.$$

- Теперь возьмем ортогональный базис $f_{m+1}, \dots, f_n$ пространства $W^{\perp}$, дополним его векторами $f_1, \dots, f_m$ до базиса V.
- Этот базис и так ортогонален, и мы аналогично сказанному выше получаем, что:

$$(W^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Lin}(f_1, \dots, f_m) = W.$$

Свойства ортогонального дополнения: сумма и пересечение.

Свойства ортогонального дополнения

Свойство 1

- Пусть $W, U < V$, причем $W \subset U$. Тогда $U^\perp \subset W^\perp$.

Доказательство

- Непосредственное следствие определения.

Свойство 2

- Пусть $W, U < V$. Тогда:

$$(W+U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp.$$

Доказательство

- По Свойству 1, $(W+U)^\perp \subset W^\perp$ и $(W+U)^\perp \subset U^\perp$, следовательно:

$$(W+U)^\perp \subset W^\perp \cap U^\perp.$$

- Наоборот, пусть $a \in W^\perp \cap U^\perp$.
- Рассмотрим любой вектор $x \in W+U$. Тогда $x = y+z$, где $y \in W$ и $z \in U$.
- Так как $a \in W^\perp$, мы имеем $(a, y) = 0$. Так как $a \in U^\perp$, мы имеем $(a, z) = 0$.
- Но тогда:

$$(a, x) = (a, y+z) = (a, y) + (a, z) = 0.$$

- Следовательно:

$$W^\perp \cap U^\perp \subset (W+U)^\perp.$$

Свойство 3

- Пусть $W, U < V$. Тогда:

$$(W \cap U)^\perp = W^\perp + U^\perp.$$

Доказательство

- По Свойству 2 мы имеем:

$$(W^\perp + U^\perp)^\perp = (W^\perp)^\perp \cap (U^\perp)^\perp = W \cap U.$$

- Следовательно:

$$(W \cap U)^\perp = (W^\perp + U^\perp)^{\perp\perp} = W^\perp + U^\perp.$$

Теорема об изоморфизме, сохраняющем скалярное произведение.

Теорема 8

Утверждение

- Пусть V и U — два пространства со скалярным произведением над $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\dim(V) = \dim(U) = n$. Тогда существует изоморфизм (то есть, биективное линейное отображение) $\varphi : V \to U$, сохраняющий скалярное произведение (то есть, $(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ для любых $x, y \in V$).

Доказательство

- Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис V, а $f_1, \dots, f_n$ — ортонормированный базис U.
- Зададим φ формулами $\varphi(e_i) = f_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Если $(x_1, \dots, x_n)^T$ — координаты $x \in V$ в базисе $e_1, \dots, e_n$, то $\varphi(x)$ имеет такие же координаты в базисе $f_1, \dots, f_n$.
- Аналогично, пусть $(y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты $y \in V$ в базисе $e_1, \dots, e_n$ и $\varphi(y)$ в базисе $f_1, \dots, f_n$.

Случай $K = \mathbb{R}$

- Тогда:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (\varphi(x), \varphi(y)).$$

Случай $K = \mathbb{C}$

- Тогда:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i} = (\varphi(x), \varphi(y)).$$