

# Компоненты сильной связности ориентированного графа, граф компонент сильной связности. Их свойства.



## Определение

1. Мы будем называть рёбра орграфа **стрелками**, а множество всех стрелок ориентированного графа  $D$  будем обозначать через  $A(D)$ . Будем использовать обозначение  $a(D) = |A(D)|$ .
2. Через  $E(D)$  мы будем обозначать множество ребер орграфа  $D$  без ориентации (каждую стрелку заменим обычным неориентированным ребром).
3. Для непересекающихся множеств  $X, Y \subset V(D)$  через  $A_D(X, Y)$  мы будем обозначать множества всех стрелок орграфа  $D$  с началом в  $X$  и концом в  $Y$ . Будем использовать обозначение  $a_D(X, Y) = |A_D(X, Y)|$ .
4. Запись  $e = xy \in A(D)$  будет обозначать, что  $e$  – стрелка с началом  $x$  и концом  $y$ . В случае, когда допускаются кратные стрелки, эта запись не утверждает, что  $e$  – единственная стрелка с началом  $x$  и концом  $y$ .
  - Если не оговорено обратное, мы будем считать, что в орграфе нет петель и сонаправленных кратных стрелок (у которых совпадают и начала, и концы).
  - Пары встречных стрелок (вида  $uv$  и  $vu$ ), как правило, допускаются.
  - **Подграф** орграфа (в частности, **индуцированный подграф**) определяется так же, как для неориентированных графов. Индуцированный подграф орграфа  $D$  на множестве вершин  $X \subset V(D)$  будем обозначать через  $D(X)$ .
    - Для любой вершины  $v$  орграфа  $D$  мы через  $N_D^+(v)$  обозначим множество вершин орграфа  $D$ , в которые выходят стрелки из  $v$ , а через  $N_D^-(v)$  обозначим множество вершин орграфа  $D$ , из которых выходят стрелки в  $v$ .
    - $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$  – окрестность вершины  $v$ .
    - **Степень** вершины  $x \in V(D)$  – это количество инцидентных ей рёбер из  $E(D)$ .
    - Для вершины  $x \in V(D)$  через  $d_D^+(x)$  мы будем обозначать исходящую степень вершины  $v$ , то есть, количество стрелок орграфа  $D$ , выходящих из

вершины  $x$ , а через  $d_D^-(x)$  мы будем обозначать входящую степень вершины  $v$  — количество стрелок орграфа  $D$ , входящих в вершину  $x$ .

- $\delta(D), \delta^+(D)$  и  $\delta^-(D)$  — **минимальные** степень, исходящую степень и входящую степень вершин  $D$  соответственно.

Аналогично,  $\Delta(D), \Delta^+(D)$  и  $\Delta^-(D)$  — это **максимальные** степень, исходящая степень и входящая степень орграфа  $D$ .

- Нетрудно понять, что для орграфа  $D$  и вершины  $v \in V(D)$  выполнено  $d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$

- Если в орграфе нет кратных стрелок, то  $d_D^+(v) = |N_D^+(v)|, d_D^-(v) = |N_D^-(v)|, d_D(v) = |N_D(v)|$ .

• **Пути и циклы** в ориентированном графе отличаются от обычного графа тем, что каждая стрелка может быть пройдена только в соответствии с направлением от начала к концу. Таким образом, у каждого пути в орграфе есть **начало и конец**, а у каждого цикла — фиксированное направление обхода.

• **Расстояние**  $dist_D(x, y)$  от вершины  $x$  до вершины  $y$  в орграфе  $D$  есть длина кратчайшего  $xy$  — пути. В орграфе  $D$  возможно, что  $dist_D(x, y) \neq dist_D(y, x)$ .

• Удаление вершин и стрелок из орграфа мы определим и будем обозначать так же, как удаление вершин и рёбер из неориентированного графа

• Аналогично неориентированному графу определяется стягивание стрелки.

• Для неориентированного графа  $H$  его ориентацией является любой орграф  $\vec{H}$  с  $V(\vec{H}) = V(H)$ , стрелки которого — это ориентированные каким-либо способом рёбра из  $E(H)$ . Таким образом, у графа  $H$  есть  $2^{e(H)}$  ориентаций.

• Для орграфа  $D$  определим неориентированный граф  $\underline{D}$  с множеством вершин  $V(D)$  и множеством рёбер  $E(D)$ .

• Иногда допускается **частичная ориентация** рёбер графа  $G$ , когда часть рёбер остается неориентированными, по ним разрешен проход в обе стороны.

## Сильная связность

### Определение

Вершины  $a$  и  $b$  ориентированного графа  $G$  назовем связанными, если в графе  $G$  существуют пути из  $a$  в  $b$  и из  $b$  в  $a$ .

Ориентированный граф  $G$  называется **сильно связным**, если любые две его вершины связаны.

- Отношение связности вершин ориентированного графа  $G$  является отношением эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно).
- Множество вершин  $V(G)$  разбивается на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть **компонентами сильной связности**.
- Для краткости, вместо “компоненты сильной связности” будем писать КСС.
- Построим для орграфа  $G$  **орграф компонент сильной связности**  $C(G)$ , вершины которого – КСС  $G$ . Проведем в орграфе  $C(G)$  стрелку  $V_i \rightarrow V_j$  тогда и только тогда, когда в орграфе  $G$  есть хотя бы одна стрелка, направленная от КСС  $V_i$  к  $V_j$ .

## Определение

Орграф называется **ациклическим**, если он не имеет ориентированных циклов.

## Лемма 1

---

Для любого ориентированного графа  $G$  выполняются следующие утверждения.

1.  $C(G)$  – ациклический орграф.
2. Для любой компоненты сильной связности  $V_i$  индуцированный подграф  $G(V_i)$  сильно связан.

## Доказательство.

---

1. Предположим противное, пусть в  $C(G)$  есть цикл  $V_1V_2\dots V_k$ . Тогда в орграфе  $G$  все вершины из  $\bigcup_{i=1}^k V_i$  попарно связаны и, следовательно, входят в одну КСС. Противоречие.

2. • Пусть  $w_1, w_2 \in V_i$ . Тогда существует  $w_1w_2$ -путь  $S$  и  $w_2w_1$ -путь  $T$  в орграфе  $G$ .
  - Понятно, что все вершины из  $V(S) \cup V(T) \ni w_1, w_2$  связаны в орграфе  $G$ , следовательно,  $V(S) \cup V(T) \subset V_i$ , то есть, вершины  $w_1$  и  $w_2$  связаны в  $G(V_i)$ . Таким образом, орграф  $G(V_i)$  сильно связан.

## Определение

---

Пусть  $V_i$  – компонента сильной связности ориентированного графа  $G$ .

- Назовем эту компоненту **промежуточной**, если в графе  $C(G)$  существует стрелка, входящая в  $V_i$ , и существует стрелка, выходящая из  $V_i$
- В противном случае назовем компоненту  $V_i$  **крайней**.
- Так как в  $C(G)$  нет циклов, любой максимальный путь в этом графе начинается в вершине, из которой все ребра выходят, и заканчивается в вершине, в которую все ребра входят. Такие вершины соответствуют крайним компонентам сильной связности.
- Таким образом, любая промежуточная компонента сильной связности орграфа  $G$  лежит в  $C(G)$  на пути между какими-то двумя крайними компонентами.

---

## Критерии сильной связности и ацикличности орграфа.

---

### Лемма 2

---

Орграф  $D$  сильно связан, **если и только если** для любого множества  $W \subsetneq V(D)$  существует стрелка из  $W$  в  $V(D) \setminus W$ .

### Доказательство.

---

$\Rightarrow$ . Если из некоторого множества  $W \subset V(D)$  нет стрелки в  $V(D) \setminus W$ , то невозможно попасть из  $W$  в  $V(D) \setminus W$ , что противоречит сильной связности  $D$ .

$\Leftarrow$ . Если орграф не является сильно связным, то он имеет крайнюю компоненту сильной связности  $W$ , из которой не выходит ни одной стрелки в  $V(D) \setminus W$ , что противоречит условию, что для любого множества  $W \subsetneq V(D)$  существует стрелка из  $W$  в  $V(D) \setminus W$ .

### Лемма 3

---

Орграф  $D$  является **ациклическим**, если и только если его вершины можно занумеровать так, что любая стрелка ведет из вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.

## Доказательство.

---

⇐. Если такая нумерация существует, отсутствие циклов очевидно: ни из какой вершины нельзя попасть в вершину с меньшим номером.

⇒. Существование нумерации для орграфа, не являющегося сильно связным, докажем по индукции.

- База для одновершинного орграфа очевидна.
- Понятно, что в ациклическом орграфе есть вершина  $a$ , из которой не выходит ни одной стрелки. По индукционному предположению построим нумерацию для (очевидно, ациклического) орграфа  $D - a$ , после чего присвоим вершине  $a$  последний, самый большой номер.

## Входящее и исходящее дерево вершины.

---

### Определение

---

Пусть  $T$  – такой орграф, что неориентированный граф  $T$  – дерево,  $a \in V(T)$ .

1. Если из каждой вершины орграфа  $T$ , кроме  $a$ , выходит ровно одно ребро, то  $T$  называется **входящим деревом** вершины  $a$ .
2. Если в каждую вершину орграфа  $T$ , кроме  $a$ , входит ровно одно ребро, то  $T$  называется **исходящим деревом** вершины  $a$ .

## Лемма 4

---

1. Если  $D$  – входящее дерево вершины  $a$ , то из каждой вершины  $D$  существует путь до  $a$ .

2. Если  $D$  – исходящее дерево вершины  $a$ , то из  $a$  существует путь до каждой вершины  $D$ .

## Доказательство.

---

1. Пусть  $x \in V(D)$ . Построим максимальный путь  $P$  с началом в  $x$ . Так как  $D$  – ациклический орграф, из конца пути  $P$  не выходит ни одной стрелки, значит, этот конец – вершина  $a$ .

2. Аналогично.

## Теорема 1

---

Пусть  $G$  – орграф,  $a \in V(G)$ ,  $V_a^-$  – множество всех вершин  $G$ , из которых можно дойти до  $a$ , а  $V_a^+$  – множество всех вершин  $G$ , до которых можно дойти из  $a$  (мы считаем, что  $a \in V_a^-$  и  $a \in V_a^+$ ). Тогда существует входящее дерево вершины  $a$  с множеством вершин  $V_a^-$  и исходящее дерево вершины  $a$  с множеством вершин  $V_a^+$ .

## Доказательство.

---

Построим входящее дерево, исходящее строится аналогично

- Положим  $L_0 = \{a\}$ , пусть  $L_k = \{x : \text{dist}_G(x, a) = k\}$ . Если  $m$  – наибольшее расстояние от вершины множества  $V_a^-$  до  $a$ , то  $\bigcup_{k=0}^m L_k = V_a^-$ .
- Для всех  $k > 0$  проведем от каждой вершины  $x \in L_k$  ровно одну стрелку, выходящую из  $x$  к вершине уровня  $L_{k-1}$  – предку  $x$  (такая стрелка, очевидно, есть). Обозначим через  $D$  орграф с построенным множеством стрелок. В  $D$  из каждой вершины, кроме  $a$ , выходит ровно одна стрелка.
- Предположим, что в  $D$  есть цикл  $Z$ . Пусть  $v$  – вершина наибольшего уровня  $L_m$  в  $Z$ .
- Тогда оба соседа  $v$  в  $Z$  должны лежать в уровнях не более  $m$ . Но по построению  $v$  смежна в  $D$  только с одной вершиной уровня не более  $m$  – со своим предком. Противоречие.
- Значит,  $D$  ациклический, тогда  $D$  – входящее дерево вершины  $a$ .

## Следствие 1

---

В сильно связном орграфе  $G$  для любой вершины  $a$  существует исходящее и входящее деревья вершины  $a$  с множеством вершин  $V(G)$ .

## Доказательство.

---

Так как орграф  $G$  сильно связан,  $V_a^- = V_a^+ = V(G)$ .

# Минимальные сильно связные графы. Оценки на число стрелок.

---

## Теорема 2

---

Для сильно связного орграфа  $G$  на  $n$  вершинах выполняются следующие утверждения.

1. Существует сильно связный оставной подграф орграфа  $G$ , в котором не более  $2n - 2$  стрелок.
2. Пусть  $k$  – длина наибольшего простого цикла в орграфе  $G$ . Тогда существует сильно связный оставной подграф орграфа  $G$ , в котором не более  $2n - k$  стрелок.

## Доказательство.

---

1. Пусть  $v \in V(G)$ , а  $T_v^+$  и  $T_v^-$  – это исходящее и входящее деревья вершины  $v$ , соответственно (они существуют по [Следствию 1](#) тк граф сильно связный).
  - Понятно, что оставной подграф орграфа  $G$ , полученный объединением этих двух деревьев, будет сильно связным и содержит не более  $2n - 2$  стрелок.

2. Пусть  $Z$  – простой цикл длины  $k$  в  $G$ .

- Построим новый орграф  $G'$ , объединив все вершины цикла  $Z$  в одну новую вершину  $z$ . (Все стрелки, соединяющие остальные вершины орграфа  $G$  с вершинами цикла  $Z$ , в новом графе будут соединять эти же вершины с  $z$ . Возможно, в орграфе  $G'$  появятся кратные стрелки.)
- Орграф  $G'$  на  $n-k+1$  вершинах также будет сильно связным.
- По пункту 1 в нем можно оставить не более  $2(n-k)$  стрелок, обеспечивающих его сильную связность. В орграфе  $G$  к соответствующим стрелкам мы добавим  $k$  стрелок цикла  $Z$  и получим сильно связный остов, в котором не более  $2(n-k)+k=2n-k$  стрелок.

## Следствие

---

Если в сильно связном орграфе  $G$  между **любыми** двумя вершинами проведено **не более** одной стрелки, то существует сильно связный остовной подграф орграфа  $G$ , в котором не более  $2n-3$  стрелок.

## Доказательство.

---

- Очевидно, в сильно связном орграфе есть простой цикл. Пусть  $k$  – длина наибольшего простого цикла в  $G$ . Из условия следует, что  $k \geq 3$ .
- По пункту 2 [Теоремы 2](#) у  $G$  существует сильно связный остовной подграф, в котором не более чем  $2(n-k)+k \leq 2n-3$  стрелок

## Критерий существования гамильтонова цикла в орграфе.

---

- **Гамильтонов цикл в орграфе** – это простой ориентированный цикл, проходящий по всем вершинам.
- Можно обобщить на орграфы и один из классических критериев гамильтоновости – критерий Дирака. С критерием Оре это сделать не получается.

## Лемма 5

---

Пусть орграф  $G$  таков, что  $\max(\delta^+(G), \delta^-(G)) = k$ . Тогда  $G$  имеет простой путь длины хотя бы  $k$  и простой цикл длины хотя бы  $k + 1$ .

### Доказательство.

---

- НУО  $\delta^+(G) \geq k$ .
- Рассмотрим путь максимальной длины  $P = a_1a_2\dots a_n$  в орграфе  $G$ . Из его последней вершины  $a_n$  выходит хотя бы  $k$  стрелок. Так как путь  $P$  нельзя продлить, все эти стрелки выходят в  $a_1, \dots, a_{n-1}$ .
- Пусть  $a_m$  – вершина наименьшего номера, для которой  $a_n a_m \in A(G)$ . Тогда в множестве  $\{a_m, \dots, a_{n-1}\}$  лежат не менее  $k$  концов выходящих из  $a_n$  стрелок, следовательно, в этом множестве хотя бы  $k$  вершин. Значит, путь и цикл  $a_m \dots a_{n-1} a_n$  нам подходит.

## Теорема 3

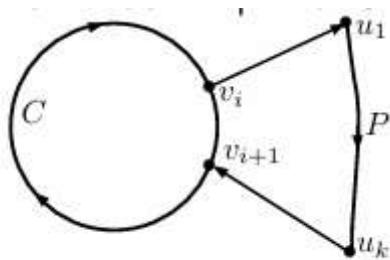
---

(A.Ghouila-Houri, 1960.) Пусть орграф  $G$  таков, что  $\min(\delta^+(G), \delta^-(G)) \geq \frac{v(G)}{2}$ . Тогда  $G$  имеет гамильтонов цикл.

### Доказательство.

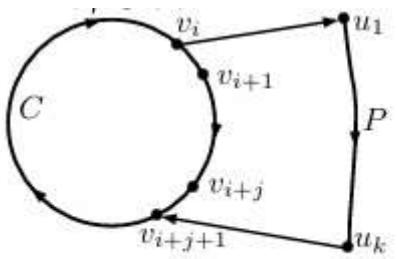
---

- Рассмотрим максимальный цикл  $C = v_1 \dots v_m$ . Тогда  $m \geq \frac{v(G)}{2} + 1$  по [Лемме 5](#). Нумерацию вершин считаем циклической по модулю  $m$ .
  - Предположим, что цикл  $C$  не является гамильтоновым и рассмотрим орграф  $H = G - V(C)$ . Пусть  $P = u_1 \dots u_k$  – максимальный путь в  $H$ .
  - Тогда  $m + k \leq v(G)$  и  $k \leq \frac{v(G)}{2} - 1$ .
  - Положим  $S = \{i : v_i u_1 \in A(G)\}$  и  $T = \{i : u_k v_{i+1} \in A(G)\}$ .
  - Если  $S \cap T \ni i$ , то мы увеличим цикл  $C$ , заменив стрелку  $v_i v_{i+1}$  на путь  $v_i u_1 P u_n v_{i+1}$  (см. рис.а), что противоречит максимальности цикла  $C$ .
- Следовательно,  $S \cap T = \emptyset$ .



a

- В силу максимальности пути  $P$  мы имеем  $N_G^+(u_k) \subset V(C) \cup V(P)$  и  $N_G^-(u_1) \subset V(C) \cup V(P)$ .
- Следовательно,  $\frac{v(G)}{2} \leq d_G^+(u_k) \leq k-1 + |T|$  и  $\frac{v(G)}{2} \leq d_G^-(u_1) \leq k-1 + |S|$ .
- Так как  $S \cap T = \emptyset$  и  $k \leq \frac{v(G)}{2} - 1$ , получим  $|S| \geq 1$ ,  $|T| \geq 1$  и  $|S \cup T| = |S| + |T| \geq v(G) - 2k + 2 \geq m - k + 2$ .
- Существуют такие индексы  $i$  и  $j$ , что  $i \in S$ ,  $i+1, \dots, i+j-1 \notin S \cup T$  и  $i+j \in T$ . По доказанному выше  $j-1 \leq k-2$ .
- Тогда  $v_i u_1, u_k v_{i+j+1} \in A(G)$  и мы получаем цикл  $v_{i+j+1} C v_i u_1 P u_k$  (см. рис.b), в котором хотя бы на одну вершину больше чем в  $C$ . Противоречие.



b

## Существование гамильтонова пути в турнире.

---

### Турниры

---

Турниром, называется орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

- Такие орграфы называют турнирами, так как с их помощью удобно изображать однокруговые турниры без ничьих.

### Лемма 6

---

В турнире существует **гамильтонов** путь.

---

## Доказательство.

---

- Рассмотрим самый длинный простой путь  $P = a_1 \dots a_k$  в турнире  $T$ .
- Предположим, что он не гамильтонов и рассмотрим не вошедшую в  $P$  вершину  $b \in V(T)$ .
- Если  $ba_1 \in A(T)$ , то добавим  $b$  в начало пути. Если  $a_n b \in A(T)$ , то добавим  $b$  в конец пути. Так как это противоречит максимальности  $P$ ,  $a_1 b \in A(T)$  и  $ba_n \in A(T)$
- Тогда существует такое  $i \leq k-1$ , что  $a_i b \in A(T)$  и  $ba_{i+1} \in A(T)$ . В этом случае можно вставить  $b$  между  $a_i$  и  $a_{i+1}$  и увеличить путь. Противоречие с максимальностью  $P$ .
- Значит, наше предположение неверно и  $P$  – гамильтонов путь.

---

## Следствие 2

---

Структура компонент сильной связности турнирного графа представляет собой простой путь  $V_1 V_2 \dots V_m$ , в котором для любых двух различных компонент  $V_i$  и  $V_j$ , где  $i < j$ , все ребра графа ориентированы от  $V_i$  к  $V_j$ .

---

## Доказательство.

---

- Между любыми двумя компонентами турнира  $T$  есть стрелка. Следовательно, орграф КСС  $C(T)$  – турнир.
- Пусть  $V_1, \dots, V_m$  – все КСС турнира  $T$ . По [Лемме 6](#) в  $C(T)$  есть гамильтонов путь  $V_1 V_2 \dots V_m$ .
- Так как турнир  $C(T)$  ацикличен,  $V_i V_j \in A(C(T))$  при  $i < j$ .

---

## Существование гамильтонова цикла в сильно связанном турнирном графе.

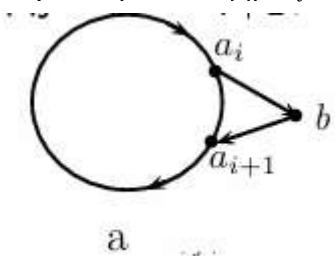
---

## Теорема 4

(P. Camion, 1959.) В сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.

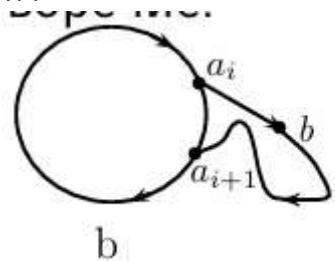
### Доказательство.

- В сильно связном турнире  $T$  есть циклы. Рассмотрим максимальный простой цикл  $C = a_1a_2\dots a_k$ . Предположим, что он не гамильтонов, пусть вершина  $b$  не вошла в этот цикл.
- Пусть не все стрелки между  $b$  и циклом  $C$  ориентированы одинаково. Тогда существуют последовательные вершины цикла  $a_i$  и  $a_{i+1}$  такие, что  $a_ib, b_{a_i} \in A(T)$  (см. рис.а). В этом случае можно удлинить максимальный цикл  $C$ , вставив вершину  $b$  между  $a_i$  и  $a_{i+1}$ , противоречие.



а

- Пусть из всех вершин цикла  $C$  стрелки входят в  $b$  (если стрелки выходят из  $b$  к  $C$  – аналогично). Ввиду сильной связности турнира  $T$  существует путь  $S$  от  $b$  до цикла  $C$ .
- Пусть  $S$  впервые пересекает цикл  $C$  в вершине  $a_{i+1}$  (см. рис.б). Тогда можно удлинить  $C$ , заменив стрелку  $a_ia_{i+1}$  на путь  $a_ibSa_{i+1}$ . Противоречие.



б

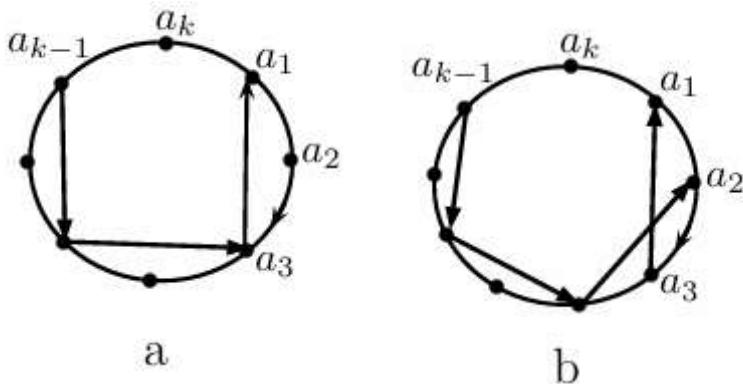
### Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности

## Теорема 5

В сильно связном турнире  $G$  с четырьмя и более вершинами существуют две такие вершины  $a, b \in V(G)$ , что турниры  $G-a$  и  $G-b$  сильно связны.

### Доказательство.

- По [Теореме 4](#) в турнире  $G$  есть ГЦ  $a_1a_2\dots a_k$  (нумерация вершин — циклическая).
- Если  $a_i a_{i+2} \in A(G)$ , то турнир  $G-a_{i+1}$  сильно связан. Если таких  $i$  хотя бы два, то теорема доказана.
- Пусть в  $A(G)$  существует не более чем одна стрелка вида  $a_i a_{i+2}$ . Тогда можно предположить, что  $a_{i+2} a_i \in A(G)$  при  $i = k$ , а ориентация ребра  $a_k a_{k+2} = a_k a_2$  может быть произвольной.
- Докажем, что в таком случае орграф  $G-a_k$  сильно связан. Для этого достаточно показать, что существует путь из  $a_{k-1}$  в  $a_1$ . Это несложно: по стрелкам-диагоналям ГЦ существует путь  $a_{k-1} a_{k-3} \dots$ , приходящий, в зависимости от четности  $k-1$ , в  $a_1$  (рис.а) или в  $a_2$  (рис.б). Во втором случае дополним этот путь участком  $a_2 a_3 a_1$ .



- Таким образом, турнир  $G-a_k$  сильно связан. Отметим, что мы не пользовались при этом рёбрами  $a_k a_2$  и  $a_k a_{k-2}$ , их ориентация не имеет для нас значения. Поэтому аналогично доказывается, что турнир  $G-a_2$  сильно связан

## Циклы в сильно связных турнирах. Теорема Муна.

(J. W. Moon, 1966.) Пусть  $G$  – сильно связный турнир, а  $k \in N, 3 \leq k \leq v(G)$ .

Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Для любой вершины  $v \in V(G)$  существует простой цикл длины  $k$ , проходящий через  $v$ .
2. В турнире  $G$  существует хотя бы  $v(G) - k$  простых циклов длины  $k$ .

## Доказательство.

---

• Зафиксируем  $k$  и будем доказывать оба утверждения индукцией по количеству вершин турнира  $G$ . При  $v(G) = k$  оба утверждения следуют из [Теоремы 4](#): в сильно связном турнире  $G$  есть гамильтонов цикл.

1. • Пусть  $v(G) > k$ . Тогда по [Теореме 5](#) существует такая вершина  $w \neq v$ , что турнир  $G-w$  сильно связан.
  - Так как  $3 \leq k \leq v(G)-1 = v(G-w)$ , по индукционному предположению в турнире  $G-w$  есть простой цикл длины  $k$ , проходящий через  $v$ . Этот же цикл есть и в турнире  $G$ .
2. • Пусть  $v(G) > k$ . Тогда по [Теореме 5](#) существует такая вершина  $w$ , что турнир  $G-w$  сильно связан.
  - В турнире  $G-w$  существует не менее  $v(G-w) + 1-k = v(G)-k$  простых циклов длины  $k$ .
  - По пункту 1 в турнире  $G$  существует простой цикл длины  $k$ , проходящий через вершину  $w$ , следовательно, в турнире  $G$  не менее чем  $v(G)-k + 1$  простых циклов длины  $k$ .

## Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе

---

- Пусть  $G$  – орграф. Как и в неориентированном случае,  $\alpha(G)$  – количество вершин в максимальном независимом множестве вершин орграфа  $G$  (то есть, максимальном множестве вершин, никакие две из которых не соединены стрелкой).

# Теорема 7

(V.Chvatal; L.Lovasz, 1974.) В любом орграфе  $G$  существует такое независимое множество  $S \subset V(G)$ , что для любой вершины  $v \in V(G) \setminus S$  существует путь длины не более 2 с началом в  $S$  и концом  $v$ .

## Доказательство.

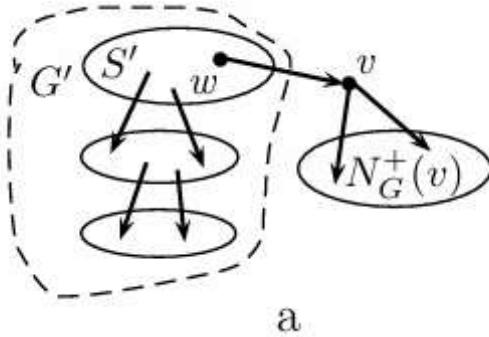
Доказательство будет индукцией по количеству вершин в орграфе.

**База** при  $v(G) = 1$  очевидна.

• **Индукционный переход.** Пусть для меньших орграфов утверждение доказано.

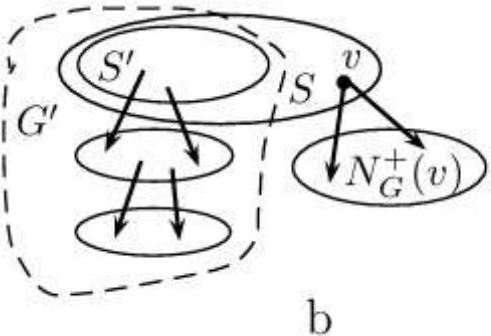
Рассмотрим любую вершину  $v \in V(G)$ . Если  $V(G) = \{v\} \cup N_G^+(v)$ , то утверждение теоремы очевидно, нам подходит  $S = \{v\}$ .

- Пусть  $V(G) \neq \{v\} \cup N_G^+(v)$ . Для орграфа  $G' = G - (v \cup N_G^+(v))$  утверждение доказано, возьмем соответствующее этому графу независимое множество  $S'$ .
- Если существует такая вершина  $w \in S'$ , что  $v \in N_G^+(w)$ , то множество  $S'$  подходит и для графа  $G$  (см. рис.а).



a

- Если такой вершины  $w$  нет, положим  $S = S' \cup \{v\}$ . Так как  $S' \cap N_G^+(v) = \emptyset$ , в этом случае множество  $S$  независимо, и любая вершина  $x \in V(G) \setminus S$  достижима из  $S$  по пути длины не более 2 (см. рис.б).



b

## Следствие 3

---

В любом турнире  $G$  существует такая вершина  $v$ , что для любой вершины  $w \in V(G)$  существует  $vw$ -путь длины не более 2.

## Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях.

---

### Теорема 8

---

(B.Roy, 1967; T.Gallai, 1968) Пусть  $G$  – неориентированный граф,  $\vec{G}$  – его ориентация. Тогда орграф  $\vec{G}$  содержит путь длины не менее  $\chi(G) - 1$ .

### Доказательство.

---

- Пусть  $A \subset A(\vec{G})$  – минимальное по включению такое множество стрелок, что орграф  $G' = \vec{G} - A$  – ациклический.
- Для любой вершины  $v \in V(G)$  положим  $\rho(v)$  равным длине наибольшего простого пути в орграфе  $G'$  с началом в  $v$ . Покажем, что  $\rho$  – правильная раскраска вершин графа  $G$ .

### Утверждение

Пусть вершины  $a, b \in V(G)$  соединены простым путём  $P$  в орграфе  $G'$ . Тогда  $\rho(a) > \rho(b)$ .

### Доказательство.

Рассмотрим путь  $P_b$  длины  $\rho(b)$  в орграфе  $G'$ . Так как  $G'$  – ациклический, то любой путь в орграфе  $G'$  – простой. В частности, равный объединению  $P$  и  $P_b$  путь  $P_a$  с началом в  $a$  – простой. Так как  $|P_a| > |P_b|$ , то  $\rho(a) > \rho(b)$

- Вернемся к доказательству теоремы 8.
- Пусть  $x, y \in V(G)$  и  $xy \in E(G)$ . НУО  $xy \in A(\vec{G})$ . Если  $xy \in A(G')$ , то, как доказано выше,  $\rho(x) \neq \rho(y)$ .
- Если  $xy \notin A(G')$ , то  $xy \in A$ . Из минимальности  $A$  следует, что в орграфе  $G' + xy$  есть цикл, но тогда в орграфе  $G'$  есть  $yx$ -путь, а следовательно,  $\rho(x) \neq \rho(y)$ .
- Мы доказали правильность раскраски  $\rho$ . Пусть  $k$  – номер наибольшего цвета в  $\rho$ . Тогда в орграфе  $G'$  (а значит, и в  $\vec{G}$ ) есть простой путь длины  $k$ . Поскольку раскраска  $\rho$  красит вершины в цвета  $0, 1, \dots, k$ , то  $\chi(G) \leq k + 1$ .

## Ядро орграфа. Критерий раскрашиваемости графа в терминах ядер ориентаций.

---

### Ядро орграфа и списочные раскраски рёбер.

---

#### Определение

---

Пусть  $H$  – орграф. Независимое множество вершин  $U \subset V(H)$  называется **ядром**, если для любой вершины  $v \in V(H) \setminus U$  существует хотя бы одна стрелка  $vu \in A(H)$ , где  $u \in U$ .

#### Лемма 7

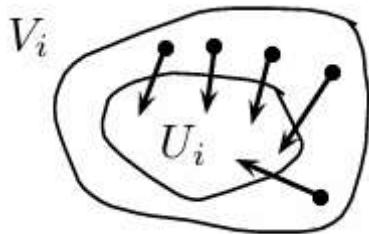
---

Пусть  $H$  – орграф, каждой вершине  $v \in V(H)$  соответствует список цветов  $L(v)$ , причём  $d_H^+(v) < \ell(v)$ . Предположим, что каждый индуцированный подграф орграфа  $H$  имеет ядро. Тогда существует правильная раскраска вершин  $H$  в соответствии с данными списками.

#### Доказательство.

---

- Индукция по  $v(H)$ , база для пустого орграфа очевидна.
- Предположим, что для меньших орграфов лемма доказана. Пусть  $i$  — цвет, присутствующий в списках,  $V_i \subset V(H)$  — множество из всех вершин, чьи списки содержат цвет  $i$ ,  $H_i = H(V_i)$ .
- По условию, орграф  $H_i$  имеет ядро  $U_i$ . Покрасим все вершины из  $U_i$  в цвет  $i$  (это не нарушит правильности раскраски, так как ядро является независимым множеством), после чего исключим цвет  $i$  из списков всех вершин  $v \in V_i \setminus U_i$  и получим новые списки  $L'(v)$ .



- Пусть  $H' = H - U_i$ . Поскольку  $U_i$  — ядро орграфа  $H_i = H(V_i)$ , то для любой вершины  $v \in V_i \setminus U_i$  выполняется  $d_{H'}^+(v) \leq d_H^+(v) - 1 < \ell(v) - 1 = \ell'(v)$ .
- По индукционному предположению, вершины орграфа  $H'$  можно покрасить правильным образом по новым спискам, в которых нет цвета  $i$ . В результате получится правильная раскраска всех вершин орграфа  $H$  по спискам.

## Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа.

---

**(F. Galvin, 1995.)** Для любого двудольного графа  $G$  выполняется  $ch'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$ .

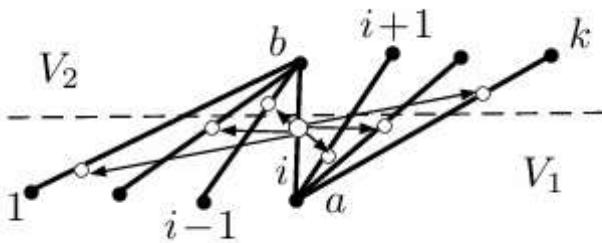
### Доказательство.

---

- Пусть  $G = (V_1, V_2, E)$ ,  $k = \Delta(G)$ . По теореме 4.9 (теорема Кёнигга) мы имеем  $\chi'(G) = k$ , то есть, существует правильная раскраска  $\rho$  рёбер графа  $G$  в  $k$  цветов (пусть это цвета  $1, \dots, k$ ).
- Обозначим через  $G'$  рёберный граф двудольного графа  $G$ . (Вершины  $G'$  соответствуют рёбрам  $G$ . Две вершины  $G'$  смежны, если и только если смежны

соответствующие рёбра.)

- Пусть каждому ребру  $e$  графа  $G$  (а значит, и каждой вершине графа  $G'$ ) соответствует список  $L(e)$  из  $k$  цветов. Наша цель — построить правильную раскраску вершин графа  $G'$  по данным спискам. Для этого мы хотим применить к рёберному графу  $G'$  [Лемму 7](#).
- Введём множество предпочтений для вершин исходного графа  $G$ . Для вершины  $a \in V_1$  предпочтение  $<_a$  строго упорядочивает инцидентные  $a$  рёбра по возрастанию их цветов в раскраске  $\rho$ , а для вершины  $b \in V_2$ , предпочтение  $<_b$  строго упорядочивает инцидентные  $b$  рёбра по убыванию их цветов в раскраске  $\rho$
- Мы ориентируем каждое ребро  $ef$  рёберного графа  $G'$  от  $e$  к  $f$ , если для их общей вершины  $v$  рёбер  $e$  и  $f$  имеет место  $e <_v f$ . Тем самым, мы получим ориентацию  $\vec{G}'$  графа  $G'$ .
- По построению множества предпочтений мы имеем  $d_{\vec{G}'}^+(e) \leq k-1 < \ell(e)$ . (Если  $e = ab$ ,  $a \in V_1$ ,  $b \in V_2$  и  $\rho(e) = i$ , то из  $e$  могут выходить стрелки к инцидентным  $a$  рёбрам цветов  $i+1, \dots, k$  и к инцидентным  $b$  рёбрам цветов  $1, \dots, i-1$ , всего не более  $k-1$  стрелки, см. рис.)



- Остаётся доказать, что у любого индуцированного подграфа  $\vec{H}'$  орграфа  $\vec{G}'$  есть ядро. Для этого мы воспользуемся теоремой Гэйла-Шепли (Stable Marriage Theorem).
- Пусть  $F$  — множество всех рёбер графа  $G$ , соответствующих вершинам из  $\vec{H}'$ , а  $H = G(F)$ . Для введённого выше множества предпочтений существует стабильное паросочетание  $M$  графа  $H$ . Рёбра из  $M$  образуют независимое множество вершин орграфа  $\vec{H}'$ .
- По определению стабильного паросочетания и по построению ориентации  $\vec{H}'$ , для любого ребра  $f \in F \setminus M$  существует такое ребро  $e \in M$  и общая вершина  $v$  рёбер  $e$  и  $f$ , что  $f <_v e$ , то есть,  $fe \in A(\vec{H}')$ . Таким образом,  $M$  — ядро  $\vec{H}'$ .
- Теперь воспользуемся [Леммой 7](#) и получим, что существует правильная раскраска вершин графа  $G'$  (и, соответственно, рёбер графа  $G$ ) по заданным спискам. Таким образом,  $ch'(G) = k$ .

# Теорема Галлаи-Мильграма о покрытии орграфа путями.

---

## Теорема 10

---

(T.Gallai; A.Milgram, 1960.) Вершины орграфа  $G$  можно покрыть не более, чем  $\alpha(G)$  попарно непересекающимися простыми путями.

## Доказательство.

---

- Для каждого простого пути  $P$  обозначим его конец через  $t(P)$ .
- Будем называть **покрытием** орграфа  $G$  множество из нескольких попарно непересекающихся простых путей в  $G$ , покрывающих все его вершины. Для каждого покрытия  $\mathcal{P}$  обозначим через  $T(\mathcal{P})$  множество концов всех путей из  $\mathcal{P}$ .
- На множестве покрытий орграфа  $G$  мы введём отношение порядка: будем считать, что  $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$ , если  $|\mathcal{P}_1| < |\mathcal{P}_2|$  и  $T(\mathcal{P}_1) \subset T(\mathcal{P}_2)$ .

## Утверждение

Пусть  $\mathcal{P}$  – минимальное по введённому отношению порядка покрытие орграфа  $G$ . Тогда на каждом пути из  $\mathcal{P}$  можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым.

## Доказательство.

- Будем считать, что для меньших орграфов утверждение доказано.
- Пусть  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ ,  $u_i = t(P_i)$ . Если множество  $\{u_1, \dots, u_n\}$  – независимое, то утверждение доказано.
- Предположим, что  $u_i u_j \in A(G)$ . Пусть путь  $Q_i$  получен из  $P_i$  добавлением стрелки  $u_i u_j$ .
- Если  $V(P_j) = \{u_j\}$ , то заменой  $P_i$  и  $P_j$  на  $Q_i$  получаем строго меньшее в нашем порядке чем  $\mathcal{P}$ , покрытие, что невозможно.
- Значит,  $V(P_j) \neq \{u_j\}$ . Тогда рассмотрим орграф  $G' = G - u_j$  и его покрытие

$\mathcal{P}'$ , полученное заменой пути  $P_j$  на  $P'_j = P_j - u_j$ .

- Докажем, что  $\mathcal{P}'$  – минимальное покрытие орграфа  $G'$ .
- Если это не так, рассмотрим строго меньшее в нашем порядке покрытие  $\mathcal{Q}'$  орграфа  $G'$ .
- Пусть  $u'_j = t(P'_j)$ , ясно, что  $u'_j u_j \in A(G)$ . Отметим, что единственная вершина, которая может входить в  $T(\mathcal{Q}')$  и не входит в  $T(\mathcal{P})$  – это  $u'_j$ . Рассмотрим три случая.

**Случай 1: Существует путь  $Q' \in \mathcal{Q}'$  с  $t(Q') = u'_j$ .**

- Пусть  $Q = Q' u'_j u_j$ , тогда  $t(Q) = u_j$ .
- Рассмотрим покрытие  $\mathcal{Q}$  орграфа  $G$ , полученное из  $\mathcal{Q}'$  заменой пути  $Q'$  на  $Q$ . Очевидно  $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$ : мы имеем  $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$  и  $|Q| = |Q'| < |P'| = |P|$ . Противоречие с выбором  $\mathcal{P}$ .

**Случай 2: В  $\mathcal{Q}'$  нет пути с концом в  $u'_j$ , но существует путь  $Q' \in \mathcal{Q}'$  с  $t(Q') = u_i$ .**

- Пусть путь  $Q$  получен из  $Q'$  добавлением ребра  $u_i u_j$ , тогда  $t(Q) = u_j$ .
- Рассмотрим покрытие  $\mathcal{Q}$  орграфа  $G$ , полученное из  $\mathcal{Q}'$  заменой пути  $Q'$  на  $Q$ . Очевидно  $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$ : мы имеем  $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$  и  $|Q| = |Q'| < |\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$ . Противоречие с выбором  $\mathcal{P}$ .

**Случай 3: В покрытии  $\mathcal{Q}'$  нет ни пути с концом в  $u'_j$ , ни пути с концом в  $u_i$ .**

- Тогда  $|T(\mathcal{Q}')| \leq |T(\mathcal{P}')| - 2$ , следовательно,  $|\mathcal{Q}'| \leq |\mathcal{P}'| - 2$ .
- Дополним  $\mathcal{Q}'$  до покрытия  $\mathcal{Q}$  орграфа  $G$ , добавив путь  $\{u_j\}$ . И на этот раз оказывается, что  $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$ , противоречие
- Таким образом,  $\mathcal{P}'$  – минимальное покрытие орграфа  $G'$ .
- Так как  $v(G') < v(G)$ , по индукционному предположению на путях покрытия  $\mathcal{P}'$  можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым. По построению покрытия  $\mathcal{P}'$ , выбранные вершины подходят и для покрытия  $\mathcal{P}$  орграфа  $G$ .
- Теперь легко доказать теорему. Рассмотрим любое минимальное покрытие  $\mathcal{P}$  орграфа  $G$ . На путях покрытия  $\mathcal{P}$  можно выбрать по вершине так, чтобы эти вершины образовывали независимое множество, следовательно,  $|\mathcal{P}| \leq \alpha(G)$ .

# Теорема Дилворса

---

## Определение

---

Пусть  $V$  – частично упорядоченное множество с порядком  $<$ . Подмножество  $U \subset V$  – **цепь**, если любые два его элемента сравнимы и **антицепь**, если никакие два его элемента несравнимы.

(R.P.Dilworth, 1950.) Пусть  $V$  – конечное частично упорядоченное множество.

Тогда минимальное количество цепей, покрывающих  $V$ , равно количеству вершин в максимальной антицепи множества  $V$ .

## Доказательство.

---

- Построим орграф  $G$  на элементах множества  $V$ , как на вершинах: для любых  $x, y \in V$  мы положим  $xy \in A(G)$ , если и только если  $x < y$ .
- Очевидно,  $\alpha(G)$  равно количеству вершин в максимальной антицепи множества  $V$ , а путь в орграфе  $G$  проходит по вершинам цепи множества  $V$ .
- По [Теореме 10](#) вершины орграфа  $G$  можно покрыть не более, чем  $\alpha(G)$  путями, то есть, множество  $V$  можно покрыть не более, чем  $\alpha(G)$  цепями.
- Остаётся лишь добавить, что две вершины антицепи не могут оказаться в одной цепи, поэтому покрывающее множество  $V$  цепей будет ровно  $\alpha(G)$ .