Алгебра. Глава 8. Линейные отображения

Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения.

Линейные отображения

- Далее везде U и V — линейные пространства над одним и тем же полем K.

Определение

1. Отображение $\varphi : U \to V$ называется линейным отображением, если оно является гомоморфизмом линейных пространств, то есть,

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

   для всех $\alpha, \beta \in K$ и $x, y \in U$.
2. Ядро линейного отображения φ — это

$$\ker(\varphi) = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}.$$

3. Образ линейного отображения φ — это

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \in V : \exists x \in U \ \varphi(x) = y\}.$$

Лемма 1

- Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение. Тогда:
  1. $\ker(\varphi)$ — линейное подпространство U;
  2. $\mathrm{Im}(\varphi)$ — линейное подпространство V.

Доказательство

1. $\ker(\varphi)$ **— линейное подпространство** U**:**

   - Достаточно доказать, что $\ker(\varphi)$ замкнуто по взятию линейной комбинации.
   - Пусть $x, x' \in \ker(\varphi)$ и $\alpha, \beta \in K$.
   - Тогда

$$\varphi(\alpha x + \beta x') = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x') = 0,$$

     а значит, $\alpha x + \beta x' \in \ker(\varphi)$.

2. $\mathrm{Im}(\varphi)$ **— линейное подпространство** V**:**

   - Достаточно доказать, что $\mathrm{Im}(\varphi)$ замкнуто по взятию линейной комбинации.
   - Пусть $y, y' \in \mathrm{Im}(\varphi)$ и $\alpha, \beta \in K$.
   - Тогда существуют такие $x, x' \in U$, что $y = \varphi(x)$ и $y' = \varphi(x')$.
   - Следовательно,

$$\varphi(\alpha x + \beta x') = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x') = \alpha y + \beta y',$$

     а значит, $\alpha y + \beta y' \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

Соответствие линейных отображений и матриц.

Соответствие линейных отображений и матриц

- Пусть U и V — линейные пространства над полем K, в которых зафиксированы базисы $u_1, \dots, u_m$ и $v_1, \dots, v_n$ соответственно.
- Тогда любой $x \in U$ представляется как столбец:

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

(столбец координат в разложении по базису, здесь $x_1, \dots, x_m \in K$).
- Аналогично, $y \in V$ представляется в виде:

$$y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение.
- Подставим в φ базисные вектора пространства U и разложим результаты по базису V:

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = A^{(1)}, \quad \dots, \quad \varphi(u_i) = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} = A^{(i)}, \quad \dots, \quad \varphi(u_m) = \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} = A^{(m)}.$$

- Тогда $A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(m)} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(K)$ (матрица с указанными столбцами) — матрица отображения φ в фиксированных нами базисах.
- Смысл этой матрицы в том, что если:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in U \quad (\text{координаты в базисе } u_1, \dots, u_m),$$

то:

$$\varphi(x) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (\text{координаты } \varphi(x) \text{ в базисе } v_1, \dots, v_n).$$

- Проверим это:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 u_1 + \dots + x_m u_m) = x_1 \varphi(u_1) + \dots + x_m \varphi(u_m) = A^{(1)} x_1 + \dots + A^{(m)} x_m = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

- Таким образом, при фиксированных базисах линейное отображение — это просто умножение на матрицу.
- Как правило, оно записывается в виде $Ax = y$, где вектора $x \in U$ и $y \in V$ — столбцы коэффициентов в разложении по фиксированным нами базисам.
- Наоборот, представим вектора из U и V как столбцы координат, пусть $A \in M_{m,n}(K)$.
- Несложно понять, что отображение $\varphi : U \to V$, заданное формулой $\varphi(x) = Ax$, является линейным и в данных базисах будет иметь как раз матрицу A.
- Линейность проверяется тривиально, а, подставив $x = u_i$ — столбец из нулей и одной единицы на i месте, мы получим, что i-й столбец матрицы отображения должен быть как раз $A^{(i)}$.
- Таким образом, при фиксации базисов U и V существует биекция между линейными отображениями из U в V и матрицами из $M_{m,n}(K)$ (каждому отображению соответствует его матрица).

Композиция линейных отображений и умножение матриц

Композиция линейных отображений. Связь с умножением матриц

Теорема 1

Пусть U, V, W — конечномерные линейные пространства над полем K, а $\varphi : U \to V$ и $\psi : V \to W$ — линейные отображения, имеющие в фиксированных базисах пространств матрицы A_φ и A_ψ соответственно. Тогда композиция $\psi \cdot \varphi$ имеет в этих же базисах матрицу $A_\psi \cdot A_\varphi$.

- Пусть $\dim(U) = m, \dim(V) = n, \dim(W) = \ell$. Тогда:

$$A_\psi \in M_{\ell,n}(K) \quad \text{и} \quad A_\varphi \in M_{n,m}(K),$$

  то есть, произведение матриц $A_\psi \cdot A_\varphi$ определено корректно.

Доказательство Теоремы 1

- Все вектора в нашем доказательстве записаны как столбцы координат в соответствующем фиксированном базисе.
- Тогда для $x \in U$ имеем:

$$(\psi \cdot \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(A_\varphi x) = (A_\psi \cdot A_\varphi)x,$$

  откуда следует утверждение теоремы.

Сумма размерностей ядра и образа линейного отображения.

Теорема 2

Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение, U — конечномерное линейное пространство. Тогда:

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(U).$$

Доказательство

- Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис $\ker(\varphi)$.
- Дополним его до базиса U: $e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_m$.
- Тогда любой вектор $x \in U$ единственным образом представляется в виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m,$$

  а значит:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(e_i) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi(u_i).$$

- Таким образом, $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ — порождающая система векторов в $\mathrm{Im}(\varphi)$.
- Докажем, что вектора $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ линейно независимы.
  - Пусть:

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi(u_i) = 0.$$

- Пусть $x = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i$. Тогда:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi(u_i) = 0.$$

- Следовательно, $x \in \ker(\varphi)$, а значит, вектор x можно разложить по базису $\ker(\varphi)$: пусть:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i.$$

- Таким образом, мы имеем два разложения вектора x по базису $e_1, \ldots, e_k, u_1, \ldots, u_m$ пространства U:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i.$$

- Но эти два разложения должны совпадать! Следовательно:

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0.$$

- Таким образом, вектора $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_m)$ линейно независимы, то есть, это базис $\mathrm{Im}(\varphi)$.

- Следовательно:

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = k + m = \dim(U).$$

Размерности ядра и образа линейного отображения: связь с рангом матрицы отображения.

Теорема 3

Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над полем K, в которых фиксированы базисы, а $\varphi : U \to V$ — линейное отображение с матрицей A. Тогда:

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rk}(A).$$

Доказательство

- Как обычно, пусть $\dim(U) = m$, а $u_1, \ldots, u_m$ — базис U. Тогда:

$$\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Lin}(A^{(1)}, \ldots, A^{(m)})) = \dim(\mathrm{Lin}(\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_m))).$$

- А теперь заметим, что:

$$\mathrm{Lin}(\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_m)) = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(u_i) \ : \ \alpha_1, ..., \alpha_m \in K\} =$$
$$\{\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\right) : \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K\} = \{\varphi(x) : x \in U\} = \mathrm{Im}(\varphi),$$

так как U — множество всевозможных линейных комбинаций векторов своего базиса.

• Непосредственно из Теорем 2 и 3 можно сделать следующее заключение.

Следствие 1

Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над полем K, в которых фиксированы базисы, $\dim(U) = m$, а $\varphi : U \to V$ — линейное отображение с матрицей A. Тогда:

$$\dim(\ker(\varphi)) = m - \mathrm{rk}(A).$$

- Покажем, как применять соответствие матриц и линейных отображений для доказательства утверждения “чисто про матрицы”.

Определение

Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение, а W — линейное подпространство U. Тогда $\varphi|_W : W \to V$ — сужение φ на подпространство W (то же самое отображение, применяемое только для элементов W).

- Очевидно, $\varphi|_W$ — линейное отображение и $\mathrm{Im}(\varphi|_W) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$.

Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножиетелей

Теорема 4

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,\ell}(K)$. Тогда:

$$\mathrm{rk}(AB) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)).$$

Доказательство

- Рассмотрим линейные отображения:
    - $\varphi : K^n \to K^m$, заданное формулой $\varphi(x) = Ax$,
    - $\psi : K^\ell \to K^n$, заданное формулой $\psi(y) = By$.
- Как мы знаем, эти отображения имеют в стандартных базисах пространств матрицы A и B соответственно.
- По Теореме 1 композиция $\varphi \cdot \psi : K^\ell \to K^m$ — линейное отображение с матрицей AB.
- По Теореме 3 мы имеем:

$$\mathrm{rk}(B) = \dim(\mathrm{Im}(\psi)), \quad \mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)), \quad \mathrm{rk}(AB) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi)).$$

- Нам достаточно доказать два неравенства:
    - $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A)$,
    - $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(B)$.

Утверждение 1: $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A)$

- Отметим, что $\varphi \cdot \psi = \varphi|_{\mathrm{Im}(\psi)}$.
- Поэтому $\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$, а значит:

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi)) \leq \dim(\mathrm{Im}(\varphi)).$$

Утверждение 2: $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(B)$

- Так как $\varphi \cdot \psi = \varphi|_{\mathrm{Im}(\psi)} : \mathrm{Im}(\psi) \to K^m$, мы по Теореме 2 имеем:

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi)) + \dim(\ker(\varphi \cdot \psi)) = \dim(\mathrm{Im}(\psi)).$$

- Откуда:

$$\mathrm{rk}(AB) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi)) \leq \dim(\mathrm{Im}(\psi)) = \mathrm{rk}(B).$$

- Теорема 4 доказана.

Кольцо линейных операторов End(V), связь с кольцом матриц.

Кольцо линейных операторов $End(V)$, связь с кольцом матриц

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем K. Тогда $End(V)$ — множество всех линейных отображений из V в себя, которые мы будем называть линейными операторами на V.

- В $End(V)$ мы определим сложение (поэлементное: $(\varphi+\psi)(x) := \varphi(x)+\psi(x)$) и умножение — композицию.
- Пусть $\dim(V) = n$. Зафиксируем базис V, каждому линейному оператору $\varphi \in End(V)$, как мы знаем, соответствует матрица $A_\varphi \in M_n(K)$ в этом базисе.
- Далее мы не будем говорить про базис, все матрицы в этом разделе именно в нем.
- Опишем несколько свойств биекции оператор — матрица. Первые два свойства очевидны.

Свойство 1

Пусть $\varphi \in End(V)$ и $k \in K$. Тогда $k\varphi \in End(V)$ (это отображение, заданное формулой $(k\varphi)(x) := k\varphi(x)$) и $A_{k\varphi} = k \cdot A_\varphi$ (все элементы матрицы A_φ умножаются на k).

Свойство 2

Пусть $\varphi, \psi \in End(V)$. Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.

- Третье свойство следует из Теоремы 1 (о матрице композиции линейных отображений).

Свойство 3

Пусть $\varphi, \psi \in End(V)$. Тогда $A_{\varphi\cdot\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

Теорема 5

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$. Тогда $End(V)$ — кольцо с единицей, причем $End(V) \cong M_n(K)$.

Доказательство

- Мы знаем, что отображение $f : End(V) \to M_n(K)$, заданное формулой $f(\varphi) := A_\varphi$, является биекцией и согласовано с операциями $+$ и $\cdot$ в кольцах.
- Очевидно, f^{-1} также согласовано с операциями в кольцах.
- Следовательно, все нужные нам свойства сложения (коммутативность, ассоциативность, 0 и обратный элемент) в $End(V)$ следуют из аналогичных свойств в $M_n(K)$.
- Так, 0 в $End(V)$ — это отображение с нулевой матрицей, которое отображает все элементы V в 0, а $-\varphi$ задается в каждой точке формулой $(-\varphi)(x) := -(\varphi(x))$.
- Аналогично, дистрибутивность и все нужные нам свойства умножения в $End(V)$ следуют из аналогичных свойств в $M_n(K)$.
- Отметим, что единицей в $End(V)$ будет, как и положено, тождественное отображение id с матрицей $A_{id} = E_n$.
- Теперь понятно, что f — изоморфизм колец $End(V)$ и $M_n(K)$.

Обратимые линейные операторы и их свойства.

Определение

Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем K, в котором зафиксирован базис. Тогда каждому линейному оператору $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ соответствует матрица $A_\varphi \in M_n(K)$, и это соответствие — биекция.

Определение обратимого оператора

Линейный оператор $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ называется обратимым, если существует φ^{-1} (то есть, если φ — биекция).

Лемма 2

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ таковы, что $A_\psi = (A_\varphi)^{-1}$. Тогда φ — обратимый и $\psi = \varphi^{-1}$.

Доказательство

- По Теореме 1 оператор $\varphi \cdot \psi \in \mathrm{End}(V)$ имеет матрицу:

$$A_{\varphi \cdot \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi = E_n.$$

- Следовательно, $\varphi \cdot \psi = \mathrm{id}$. Аналогично, $\psi \cdot \varphi = \mathrm{id}$.
- Значит, $\psi = \varphi^{-1}$.

Теорема 6

Если $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ — обратимый, то $\varphi^{-1} \in \mathrm{End}(V)$ и $A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}$.

Доказательство

- Для доказательства линейности φ^{-1} достаточно проверить, что для любых $a, b \in K$ и $x, y \in V$ выполняется:

$$\varphi^{-1}(ax + by) = a\varphi^{-1}(x) + b\varphi^{-1}(y).$$

- Так как φ — биекция, для этого достаточно доказать, что, применив к левой и правой частям этого равенства оператор φ, мы получим одно и то же:

$$\varphi(\varphi^{-1}(ax + by)) = ax + by,$$

$$\varphi(a\varphi^{-1}(x) + b\varphi^{-1}(y)) = a\varphi(\varphi^{-1}(x)) + b\varphi(\varphi^{-1}(y)) = ax + by.$$

- Остается заметить, что:

$$A_\varphi \cdot A_{\varphi^{-1}} = A_{\varphi \cdot \varphi^{-1}} = A_{\mathrm{id}} = E_n,$$

  и аналогично:

$$A_{\varphi^{-1}} \cdot A_\varphi = E_n,$$

  откуда следует, что:

$$A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}.$$

Координаты вектора в разных базисах. Матрицы перехода и их свойства

Координаты вектора в разных базисах

- Пусть V — линейное пространство над полем K, а $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ — два его базиса.
- Каждый вектор $x \in V$ единственным образом представляется в виде столбцов координат по каждому из базисов — скажем, $(x_1, \ldots, x_n)^T$ и $(x'_1, \ldots, x'_n)^T$.
- Мы покажем, как из столбца координат вектора по одному базису получить столбец координат по другому базису.
- Разложим базисные векторы второго базиса по первому:

$$e'_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + \cdots + c_{n,1}e_n, \ldots,$$

$$e'_i = c_{1,i}e_1 + c_{2,i}e_2 + \cdots + c_{n,i}e_n, \ldots,$$

$$e'_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + \cdots + c_{n,n}e_n.$$

- Напишем цепочку преобразований:

$$x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = x = x'_1e'_1 + \cdots + x'_ne'_n =$$

$$x'_1(c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + \cdots + c_{n,1}e_n) + \cdots + x'_n(c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + \cdots + c_{n,n}e_n) =$$

$$(x'_1c_{1,1} + \cdots + x'_nc_{1,n})e_1 + \cdots + (x'_1c_{n,1} + \cdots + x'_nc_{n,n})e_n,$$

  откуда, ввиду единственности разложения по базису, делаем вывод $x_i = (c_{i,1}x'_1 + \cdots + c_{i,n}x'_n)$.
- Вспомнив про правила умножения матриц, получаем формулу:

$$(x_1, \ldots, x_n)^T = C(x'_1, \ldots, x'_n)^T, \text{ где } C = (c_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}.$$

- Матрица C называется матрицей перехода от базиса $e'_1, \ldots, e'_n$ к базису $e_1, \ldots, e_n$. Докажем ряд свойств матриц перехода.

Свойство 1

- Матрица перехода невырождена. Если C — матрица перехода от базиса $e'_1, \ldots, e'_n$ к базису $e_1, \ldots, e_n$, то матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, \ldots, e'_n$ — это C^{-1}.

Доказательство

- Обозначим матрицу перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, \ldots, e'_n$ через D.
- Тогда для любого $x \in V$ мы можем записать его координаты в этих базисах, как выше, и заметить, что:

$$(x_1, \ldots, x_n)^T = C(x'_1, \ldots, x'_n)^T \text{ и } (x'_1, \ldots, x'_n)^T = D(x_1, \ldots, x_n)^T,$$

  откуда:

$$(x_1, \ldots, x_n)^T = C(x'_1, \ldots, x'_n)^T = CD(x_1, \ldots, x_n)^T,$$

$$(x'_1, \ldots, x'_n)^T = D(x_1, \ldots, x_n)^T = DC(x'_1, \ldots, x'_n)^T.$$

- Так как это верно для любых столбцов координат, $DC = CD = E_n$ (умножение на CD или DC — это id), откуда следует, что $D = C^{-1}$.

Свойство 2

- Пусть V — линейное пространство над полем $K, \dim(V) = n$. Тогда для любого фиксированного базиса $e_1, \dots, e_n$, любая невырожденная матрица $C \in M_n(K)$ является матрицей перехода от какого-то базиса к $e_1, \dots, e_n$.

Доказательство

- Рассмотрим базис $e'_1, \dots, e'_n$, координаты векторов которого в исходном базисе $e_1, \dots, e_n$ — столбцы матрицы C (то есть, $e'_1 = C^{(1)}, \dots, e'_n = C^{(n)}$).
- Эти вектора линейно независимы: так как C — невырожденная матрица, то:

$$\dim(V) = n = \text{rk}(C) = \dim(\text{Lin}(C^{(1)}, \dots, C^{(n)})).$$

- Любые n линейно независимых векторов в n-мерном пространстве V образуют его базис, в частности, $e'_1, \dots, e'_n$ — базис V .
- По построению матрицы перехода понятно, что матрица перехода от базиса $e'_1, \dots, e'_n$ к базису $e_1, \dots, e_n$ будет в точности C.

Матрицы оператора в разных базисах. Свойства подобных матриц

Матрицы оператора в разных базисах

- Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$, где V — линейное пространство над полем $K, \dim(V) = n$.

- Мы знаем, что при каждом фиксированном базисе оператору φ соответствует его матрица. Как связаны матрицы одного оператора в разных базисах?

- Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ — два базиса V, а векторам соответствуют столбцы координат (без штрихов — по первому базису, со штрихами — по второму).

- Пусть A и A' — матрицы φ в этих базисах. Тогда равенство $y = \varphi(x)$ можно переписать в двух видах:

$$(y_1, \dots, y_n)^T = A \cdot (x_1, \dots, x_n)^T,$$

$$(y'_1, \dots, y'_n)^T = A' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T.$$

- Пусть C — матрица перехода от $e'_1, \dots, e'_n$ к $e_1, \dots, e_n$.

- Тогда C^{-1} — матрица перехода от $e_1, \dots, e_n$ к $e'_1, \dots, e'_n$.

- Поэтому:

$$(y'_1, \dots, y'_n)^T = A'C^{-1}(x_1, \dots, x_n)^T,$$

$$(y_1, \dots, y_n)^T = C(y'_1, \dots, y'_n)^T = CA'C^{-1}(x_1, \dots, x_n)^T.$$

- Ввиду единственности матрицы отображения φ в базисе $e_1, \dots, e_n$ следует, что:

$$A = CA'C^{-1}, \quad A' = C^{-1}AC.$$

Определение

- Матрицы $A, A' \in M_n(K)$ называются **подобными**, если существует такая невырожденная матрица $C \in M_n(K)$, что:

$$A = CA'C^{-1}.$$

- Несложно понять, что подобие матриц — отношение эквивалентности. Таким образом, все матрицы из $M_n(K)$ разбиваются на классы эквивалентности, состоящие из попарно подобных матриц.

Теорема 7

- Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, где V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$. Тогда матрицы φ во всех возможных базисах образуют класс попарно подобных матриц из $M_n(K)$.

Доказательство

- Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ и матрицу A отображения φ в этом базисе.
- Уже доказано, что матрицы φ в других базисах подобны A.
- Рассмотрим произвольную матрицу, подобную A — скажем, $C^{-1}AC$, где $C \in M_n(K)$ — невырожденная матрица.
- Тогда C — это матрица перехода от нашего фиксированного базиса к другому, и в этом базисе φ имеет матрицу как раз $C^{-1}AC$.

Многочлен от оператора и от матрицы, соответствие между ними

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, базис считаем фиксированным.
- Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, а $A \in M_n(K)$ — матрица φ.
- Рассмотрим многочлен $f(t) \in K[t]$, пусть

$$f(t) = c_m t^m + \dots + c_0.$$

- Мы научимся подставлять в многочлен f матрицу A и линейный оператор φ:

$$f(A) := c_m A^m + \dots + c_1 A + c_0 E_n,$$

$$f(\varphi) := c_m \varphi^m + \dots + c_1 \varphi + c_0 \mathrm{id}.$$

- $f(A)$ — матрица из $M_n(K)$. Умножение матрицы на число (выражение типа $c_1 A$) — это умножение всех её коэффициентов на это число.
- $f(\varphi)$ — это линейный оператор из $\mathrm{End}(V)$. Результат умножения оператора на число (выражение типа $c_1\varphi$) — это оператор, значения которого во всех точках умножены на это число.

Лемма 3

Оператор $f(\varphi)$ в нашем фиксированном базисе имеет матрицу $f(A)$.

Доказательство

- При сложении линейных отображений матрицы складываются, при композиции — перемножаются.

- При умножении линейного отображения на число $c \in K$ все его значения умножаются на это число, а значит, и значения на базисных векторах, но тогда и матрица отображения умножится на c.

- Умножение в $M_n(K)$ и в $End(V)$ не коммутативно. Но многочлены от одного и того же оператора (матрицы) — коммутируют.

Лемма 4

- Пусть $f, g \in K[t]$.
  1. Для любого $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ выполнено:
  $$f(\varphi) \cdot g(\varphi) = g(\varphi) \cdot f(\varphi).$$
  2. Для любой $A \in M_n(K)$ выполнено:
  $$f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A).$$

Доказательство

- Ввиду Леммы 3 достаточно доказать пункт 2.
- Пусть $f(t) = c_m t^m + \cdots + c_0$ и $g(t) = d_k t^k + \cdots + d_0$.
- Так как
$$(c_i A^i) \cdot (d_j A^j) = c_i d_j A^{i+j} = d_j c_i A^{i+j} = (d_j A^j) \cdot (c_i A^i),$$

  можно написать цепочку преобразований (везде считаем, что $A^0 = E_n$):
$$f(A)g(A) = \left(\sum_{i=0}^{m} c_i A^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} d_j A^j\right) =$$
$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} (c_i A^i)(d_j A^j) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{m} (d_j A^j)(c_i A^i) =$$
$$\left(\sum_{j=0}^{k} d_j A^j\right) \cdot \sum_{i=0}^{m} c_i A^i = g(A)f(A).$$

Инвариантные подпространства.

- Пусть V – линейное пространство над полем K, а $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Определение

- Подпространство $W < V$ называется φ-инвариантным, если
$$\varphi(W) = \{\varphi(x) : x \in W\} \subset W.$$
- Вскоре мы увидим много примеров инвариантных подпространств и поймем, насколько это важное понятие. Начнем с простого свойства.

Свойство

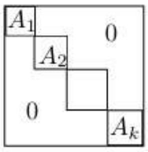
- Если W – φ-инвариантное подпространство, то $\varphi|_W \in \mathrm{End}(W)$.

Доказательство

- По определению φ-инвариантного подпространства, $\varphi|_W : W \to W$.
- Условие линейности наследуется от φ.

Определение

Пусть K — поле, $A_1, \ldots, A_m$ — квадратные матрицы, $A_i \in M_{n_i}(K)$. Обозначим через $\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_m)$ квадратную матрицу из $M_{n_1+\cdots+n_m}(K)$, в которой по главной диагонали последовательно стоят квадратные блоки $A_1, \ldots, A_m$, а все остальные элементы равны 0.



Лемма 5

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\varphi \in \operatorname{End}(V)$, а $V_1, \ldots, V_m$ — φ-инвариантные подпространства V, причем

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i.$$

Зафиксируем в каждом подпространстве V_i базис $e_1^i, \ldots, e_{k_i}^i$, пусть A_i — матрица отображения $\varphi_i = \varphi|_{V_i}$ в этом базисе. Тогда в базисе $e_1^1, \ldots, e_{k_1}^1, \ldots, e_1^m, \ldots, e_{k_m}^m$ матрица φ имеет вид $\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_m)$.

Доказательство

- Как строится матрица A отображения φ в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$? Её j-й столбец будет $A^{(j)} = \varphi(e_j)$.
- Пусть j^i — номер базисного вектора e_j^i, входящего в базис φ-инвариантного подпространства V_i. Подставим его и получим:

$$A^{(j^i)} = \varphi(e_j^i) \in V_i.$$

- Элемент из V_i раскладывается по его базису $e_1^i, \ldots, e_{k_i}^i$, а значит, в разложении по объединенному базису пространства V мы получим коэффициенты 0 при всех векторах, кроме этих (так как разложение по базису единственно!).
- Следовательно:

$$A^{(j^i)} = \varphi(e_j^i) = \sum_{s=1}^{k_i} a_{s^i,j^i} e_{s^i} = (0, \ldots, 0, a_{1,j_i}^i, \ldots, a_{k_i,j_i}^i, 0, \ldots, 0)^T.$$

- Так как $\varphi(e_j^i) = \varphi_i(e_j^i)$, на места столбцов, соответствующих векторам из базиса $e_1^i, \ldots, e_{k_i}^i$, будут вписаны соответствующие столбцы матрицы A_i (эти столбцы как раз и образованы коэффициентами в разложении векторов $\varphi(e_j^i)$ по указанному базису пространства V_i), а все остальные коэффициенты матрицы A в указанных столбцах — нули.

Характеристический многочлен оператора. Корректность определения, свойства.

Характеристический многочлен оператора

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, а $\varphi \in \operatorname{End}(V)$.

Определение

- Пусть A — любая матрица оператора φ.
- **Характеристический многочлен** оператора φ — это

$$\chi_\varphi(t) := \det(A - tE_n),$$

где t — переменная из поля K, $\chi_\varphi \in K[t]$.

Свойство 1

- Определение характеристического многочлена оператора корректно, то есть, не зависит от выбора матрицы оператора.

Доказательство

- Пусть A' — другая матрица оператора φ.
- Тогда $A' = C^{-1}AC$ для некоторой невырожденной матрицы $C \in M_n(K)$, следовательно:

  $$\det(A' - tE_n) = \det(C^{-1}AC - tE_n) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}(tE_n)C) = \det(C^{-1}(A - tE_n)C) = \det(C^{-1})\det(A - tE_n)\,\mathrm{de}$$

Свойство 2

- $\deg(\chi_\varphi) = n$, старший коэффициент равен $(-1)^n$, а свободный член равен $\det(A)$.

Доказательство

- По диагонали матрицы $A - tE_n$ стоят коэффициенты $a_{i,i} - t$, остальные коэффициенты t не содержат.
- Следовательно, t может быть максимум в степени n, и в такой степени получается ровно в одном случае — в произведении диагональных элементов, с коэффициентом $(-1)^n$.
- Для вычисления свободного члена подставим $t = 0$ и получим $\det(A)$.
- Итак:

  $$\chi_\varphi(t) = (-1)^n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1 t + \det(A).$$

Определение

- След матрицы $A \in M_n(K)$ – это $\mathrm{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$ (сумма элементов на главной диагонали).

Свойство 3

- $c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$.

Доказательство

- Пусть $B = A - tE_n$, а элементы этой матрицы обозначим через $b_{i,j}$.
- Рассмотрим любое произведение $b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$, входящее в $\det(B) = \chi_\varphi(t)$ (здесь $\sigma \in S_n$).
- В этом произведении не может быть ровно один элемент, не лежащий на главной диагонали, так как σ не может оставлять на месте все числа от 1 до n, кроме одного.
- Следовательно, если $\sigma = \mathrm{id}$, то произведение содержит переменную t в степени не более $n - 2$.
- Значит, вклад в $c_{n-1}t^{n-1}$ дает только произведение диагональных элементов, равное:

  $$(a_{1,1} - t)(a_{2,2} - t) \cdots (a_{n,n} - t),$$

  откуда ясно, что $c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$.

Свойство 4

- Если матрицы A и A' подобны, то $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$.

Доказательство

- Выше доказано (см. Свойство 1), что тогда:

  $$\det(A - tE_n) = \det(A' - tE_n),$$

  откуда ввиду Свойства 3 следует, что $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$.

Теорема Гамильтона-Кэли.

Теорема Гамильтона-Кэли

- Пусть V – конечномерное линейное пространство над полем $K, \dim(V) = n, \varphi \in \mathrm{End}(V)$. Тогда:

$$\chi_\varphi(\varphi) = 0.$$

Доказательство Теоремы 8

- Обозначим через $B(t)$ взаимную матрицу к $A - tE_n$ (здесь t – переменная, принимающая значения из поля K).

- Тогда $b(t)_{i,j} = (A - tE_n)_{j,i}$ – минор порядка $n-1$ матрицы $A - tE_n$, который, очевидно, является многочленом от t степени не более чем $n-1$ (в подматрице $A - tE_n$, полученной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, остается не более чем $n-1$ элемент вида $a_{l,l} - t$, остальные не содержат переменную t).

- Поэтому существуют такие матрицы $B_0, \dots, B_{n-1} \in M_n(K)$, что:

$$B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0.$$

- Пусть $\chi_\varphi(t) = c_n t^n + \cdots + c_1 t + c_0$ (нам известно, что $\deg(\chi_\varphi) = \dim(V) = n$). Тогда:

$$(c_n t^n + \cdots + c_1 t + c_0)E_n = \chi_\varphi(t) \cdot E_n = \det(A - tE_n) \cdot E_n = B(t) \cdot (A - tE_n).$$

- Подставляя $B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0$ и раскрывая произведение, получаем:

$$B(t) \cdot (A - tE_n) = (B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0) \cdot (A - tE_n).$$

- В левой и правой частях равенства:

$$(c_n t^n + \cdots + c_1 t + c_0)E_n = (B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0) \cdot (A - tE_n),$$

  коэффициенты при каждой степени t должны совпадать:

$$\begin{gathered} c_n E_n = -B_{n-1}, \to c_n A^n = -B_{n-1}A^n \\ c_{n-1}E_n = B_{n-1}A - B_{n-2}, \to c_{n-1}A^{n-1} = B_{n-1}A^n - B_{n-2}A^{n-1} \\ \dots, \\ c_1 E_n = B_1 A - B_0 \to c_1 A^1 = b_1 A^2 - B_0 A, \\ c_0 E_n = B_0 A. \end{gathered}$$

- Сложив равенства, получим:

$$\chi_\varphi(A) = c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E_n = -B_{n-1}A^n + (B_{n-1}A^n - B_{n-2}A^{n-1}) + \cdots + (B_1 A^2 - B_0 A) + B_0 A = 0.$$

- Таким образом, оператор $\chi_\varphi(\varphi)$ имеет нулевую матрицу, а значит, $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.

Минимальный многочлен оператора.

Минимальный многочлен оператора

- Пусть V – линейное пространство над полем $K, \dim(V) = n, \psi \in \mathrm{End}(V)$.
- Пусть $I(\psi)$ – множество всех таких многочленов $f \in K[t]$, что $f(\psi) = 0$.

Свойство 1

- $I(\psi)$ – идеал в $K[t]$.

Доказательство

- Достаточно проверить замкнутость $I(\psi)$ по сложению и умножению на многочлены из $K[t]$.
- Пусть $f, g \in I(\psi)$. Тогда:

$$(f+g)(\psi) = f(\psi) + g(\psi) = 0 + 0 = 0,$$

  а значит, $f + g \in I(\psi)$.
- Пусть $f \in I(\psi), h \in K[t]$. Тогда:

$$(fh)(\psi) = f(\psi) \cdot h(\psi) = 0 \cdot h(\psi) = 0,$$

  а значит, $fh \in I(\psi)$.
- Как мы знаем, любой идеал в $K[t]$ — главный. Рассмотрим любой многочлен f такой, что $I(\psi) = f \cdot K[t]$ (то есть, порождающий $I(\psi)$).
- Тогда для любого другого многочлена $g \in K[t]$, порождающего $I(\psi)$, очевидно, выполнено $f \mid g$ и $g \mid f$, то есть, эти два многочлена ассоциированы (отличаются умножением на константу).
- Следовательно, многочлены, порождающие $I(\psi)$ — это в точности многочлены вида cf. Ровно один из них имеет единичный старший коэффициент, мы обозначим его через Irr_ψ и будем называть **минимальным многочленом** оператора ψ .

Свойство 2

- $\chi_\psi \vdots \mathrm{Irr}_\psi$.

Доказательство

- По теореме Гамильтона-Кэли мы знаем, что:

$$\chi_\psi(\psi) = 0,$$

  то есть, $\chi_\psi \in I(\psi)$.
- Все многочлены из идеала $I(\psi)$ делятся на Irr_ψ.

Собственные числа, векторы и подпространства. Связь с характеристическим многочленом.

Собственные числа, векторы и подпространства

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n, \psi \in \mathrm{End}(V)$.

Определение

1. Число $\lambda \in K$ называется **собственным числом** оператора ψ, если существует такой ненулевой вектор $x \in V$, что:

$$\psi(x) = \lambda \cdot x.$$

   В этом случае говорят, что x — **собственный вектор** числа λ.
2. Пусть λ — собственное число оператора ψ. Множество V_λ, состоящее из всех собственных векторов числа λ и вектора 0, называется **собственным подпространством** числа λ.
3. Множество всех собственных чисел оператора ψ называется его **спектром** и обозначается через $\mathrm{Spec}(\psi)$.

Лемма 6

- V_λ — линейное подпространство V.

Доказательство

- Пусть $x, y \in V_\lambda$, $\alpha, \beta \in K$.
- Нам достаточно проверить, что $\alpha x + \beta y \in V_\lambda$. Сделаем это:

$$\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y).$$

Теорема 9

- $\mathrm{Spec}(\psi)$ состоит в точности из корней характеристического многочлена $\chi_\psi(t)$.

Доказательство

- Зафиксируем базис V, пусть A — матрица ψ в этом базисе.
- Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}(\psi)$, $x \in V_\lambda$, $x \neq 0$. Тогда:

$$\psi(x) = \lambda x = \lambda \cdot \mathrm{id}(x).$$

- Следовательно:

$$(\psi - \lambda \cdot \mathrm{id})(x) = 0,$$

  то есть $x \in \ker(\psi - \lambda \cdot \mathrm{id})$.

- Значит, $\ker(\psi - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{0\}$ и $\dim(\ker(\psi - \lambda \cdot \mathrm{id})) > 0$.
- Оператор $\psi - \lambda \cdot \mathrm{id}$ имеет матрицу $A - \lambda E_n$, и по [Следствию 1](#):

$$\mathrm{rk}(A - \lambda E_n) = n - \dim(\ker(\psi - \lambda \cdot \mathrm{id})) < n.$$

- Тогда по Следствию 7.2 имеем:

$$\chi_\psi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0.$$

- Наоборот, пусть $\chi_\psi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0$.
- Тогда по Следствию 7.2:
-
  - Матрица $A \in M_n(K)$ обратима, если и только если $rk(A) = n$.

$$n > \mathrm{rk}(A - \lambda E_n) = n - \dim(\ker(\psi - \lambda \cdot \mathrm{id})) \implies \dim(\ker(\psi - \lambda \cdot \mathrm{id})) > 0.$$

- Следовательно, существует ненулевой вектор $x \in \ker(\psi - \lambda \cdot \mathrm{id})$.
- Это означает, что:

$$\psi(x) = \lambda x,$$

  то есть $\lambda \in \mathrm{Spec}(\psi)$.

Линейная независимость собственных векторов разных собственных чисел. Сумма собственных пространств — прямая.

Теорема 10

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\psi \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathrm{Spec}(\psi)$ — различные собственные числа, а x_i — собственный вектор λ_i. Тогда $x_1, \dots, x_k$ линейно независимы.

Доказательство

- Предположим противное и найдем из этих векторов нетривиальную нулевую линейную комбинацию с минимальным количеством ненулевых коэффициентов:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s = 0. \tag{*}$$

- Подействуем на левую и правую часть $(*)$ оператором ψ:

$$0 = \psi(0) = \psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s) = \alpha_1 \psi(x_1) + \dots + \alpha_s \psi(x_s) = \lambda_1 \alpha_1 x_1 + \dots + \lambda_s \alpha_s x_s . (**)$$

- Вычтем из $(**)$ умноженное на λ_s равенство $(*)$ и получим:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s) x_1 + \dots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) x_{s-1} = 0.$$

- Так как собственные числа различны, все коэффициенты в этой линейной комбинации отличны от 0, но тогда ее существование противоречит выбору $(*)$.

Следствие 2

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\psi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Тогда:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}.$$

Доказательство

- На этот раз нам понадобится определение прямой суммы: нужно доказать, что равенство

$$0 = \sum_{i=1}^{k} x_i, \quad x_i \in V_{\lambda_i},$$

  возможно только при $x_1 = \dots = x_k = 0$.
- Это очевидно следует из Теоремы 10: в противном случае, несколько ненулевых векторов из разных собственных пространств были бы линейно зависимы.

Диагонализируемые операторы и матрицы.

Диагонализируемые операторы и матрицы

Определение

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\psi \in \mathrm{End}(V)$.
- Оператор ψ — диагонализируемый, если в некотором базисе он имеет диагональную матрицу (то есть матрицу, в которой все элементы не на главной диагонали равны 0).
- Матрица $A \in M_n(K)$ называется диагонализируемой, если она имеет подобную диагональную матрицу.
- Матрица $A \in M_n(K)$ является диагонализируемой, если и только если оператор умножения на A в каком-либо базисе является диагонализируемым.

Теорема 11

- Пусть V — линейное пространство над полем $K, \psi \in \mathrm{End}(V), \mathrm{Spec}(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:
  1. Оператор ψ — диагонализируемый.
  2. $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$.
  3. V имеет базис, состоящий из собственных векторов ψ.

Доказательство

$3^\circ \implies 1^\circ$

- Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V, причем e_i — собственный вектор числа λ_i (возможно, не все эти собственные числа различны).
- Тогда $\psi(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$, поэтому матрица ψ в этом базисе имеет вид $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$1^\circ \implies 3^\circ$

- Пусть матрица ψ в базисе $e_1, \dots, e_n$ — это $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
- Тогда $\psi(e_i) = \lambda_i e_i$, причем, очевидно, $e_i \neq 0$. Следовательно, λ_i — собственное число, а e_i — его собственный вектор.

$2^\circ \implies 3^\circ$

- Пусть $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$.
- Выделим базис в каждом из пространств $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$, тогда каждый из этих базисов состоит из собственных векторов ψ, а объединение всех этих k базисов по свойствам прямой суммы дает базис V.

$3^\circ \implies 2^\circ$

- Мы знаем, что $W = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$ — линейное подпространство V (эта сумма прямая по Следствию 2).
- Пусть $m_i = \dim(V_{\lambda_i})$. Тогда:

$$\dim(V) \geq \dim(W) = \sum_{i=1}^k \dim(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^k m_i.$$

- С другой стороны, пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V, состоящий из собственных векторов.
- Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ в V_{λ_i} лежит не более чем m_i векторов из базиса (так как они линейно независимы).
- Значит:

$$\dim(V) \leq \sum_{i=1}^k m_i,$$

  откуда следует, что $\dim(V) = \dim(W)$, а значит, $V = W$.

Корневые подпространства. Свойства.

Корневые подпространства

- Пусть V — линейное пространство над полем $K, \dim(V) = n, \varphi \in \mathrm{End}(V)$.
- Если прямая сумма собственных пространств оператора φ равна V, в некотором базисе этот оператор имеет диагональную матрицу, с которой очень удобно иметь дело.
- А что же делать, когда эта сумма меньше V? Нам придется определить понятие, расширяющее собственное пространство.

Определение

- Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)$. Тогда:

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^k(x) = 0\}$$

— корневое пространство собственного числа λ оператора φ.

- В этом определении много сложного и неудобного — например, есть квантор существования, от которого мы вскоре избавимся.

Свойство 0

- $V(\lambda)$ – подпространство V.

Доказательство

- Пусть $x, y \in V(\lambda)$, $\alpha, \beta \in K$.
- Нам надо доказать, что $\alpha x + \beta y \in V(\lambda)$.
- По определению, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что:

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^k(x) = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^k(y) = 0,$$

тогда:

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^k(\alpha x + \beta y) = \alpha(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^k(x) + \beta(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^k(y) = 0,$$

откуда следует, что $\alpha x + \beta y \in V(\lambda)$.

Свойство 1

- Собственное пространство V_λ – подпространство корневого пространства $V(\lambda)$.

Доказательство

- Достаточно доказать, что $V_\lambda \subset V(\lambda)$.
- Пусть $x \in V_\lambda$. Тогда $\varphi(x) = \lambda x$, откуда следует, что:

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(x) = 0,$$

то есть, подходит $k = 1$.

Лемма 7

- Пусть $\psi \in \mathrm{End}(V)$, $x \in V$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ – минимальное такое число, что $\psi^k(x) = 0$. Тогда $x, \psi(x), \ldots, \psi^{k-1}(x)$ – линейно независимые векторы. В частности, $k \leq n$.

Доказательство

- Пусть $x, \psi(x), \ldots, \psi^{k-1}(x)$ линейно зависимы, то есть:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \psi^i(x) = 0, \quad \text{не все } \alpha_i = 0. \tag{*}$$

- Пусть ℓ — минимальный такой индекс, что $\alpha_\ell \neq 0$. Тогда сумму в $(*)$ можно начинать с индекса ℓ.
- Применим к обеим частям равенства $(*)$ оператор $\psi^{k-1-\ell}$ и получим:

$$0 = \psi^{k-1-\ell}(0) = \psi^{k-1-\ell}\left(\sum_{i=\ell}^{k-1} \alpha_i \psi^i(x)\right) = \alpha_\ell \psi^{k-1}(x) + \sum_{i=\ell+1}^{k-1} \alpha_i \psi^{k-1-\ell+i}(x).$$

- Последний переход верен, так как $k - 1 - \ell + i \geq k$ при $i \geq \ell + 1$, а значит, $\psi^{k-1-\ell+i}(x) = 0$.
- Полученное равенство не может быть верным, так как $\alpha_\ell \neq 0$ и $\psi^{k-1}(x) = 0$.

- Поскольку в n-мерном линейном пространстве V нельзя выбрать более n линейно независимых векторов, $k \le n$.

Свойство 2

- Теперь мы готовы избавиться от квантора существования в определении корневого пространства:

$$V(\lambda) = \{x \in V : (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^n(x) = 0\}.$$

Доказательство

- Из определения следует, что:

$$V(\lambda) \supseteq \{x \in V : (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^n(x) = 0\}.$$

- Наоборот, пусть $x \in V(\lambda)$.
- Рассмотрим минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что:

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^k(x) = 0$$

  (такое k существует по определению).
- По Лемме 7 мы имеем $k \le n$.
- Значит, и:

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^n(x) = 0.$$

Лемма о двух взаимно простых операторных многочленах.

Лемма 8

- Пусть $f, g \in K[t]$ — взаимно простые многочлены. Пусть V — линейное пространство над полем K, а $x \in V$ и $\psi \in \mathrm{End}(V)$ таковы, что:

$$(f(\psi))(x) = 0 \quad \text{и} \quad (g(\psi))(x) = 0.$$

  Тогда $x = 0$.

Доказательство

- Вспомним, что НОД двух многочленов представляется в виде их линейной комбинации.
- Поэтому существуют такие многочлены $p, q \in K[t]$, что:

$$fp + qg = 1.$$

- Подставив в это равенство оператор ψ, получим:

$$(pf)(\psi) + (qg)(\psi) = \mathrm{id}.$$

- Применим обе части последнего операторного равенства к вектору x:

$$x = \mathrm{id}(x) = (pf)(\psi)(x) + (qg)(\psi)(x).$$

- Подставим условия:

$$(p(\psi))(f(\psi))(x) + (q(\psi))(g(\psi))(x) = (p(\psi))(0) + (q(\psi))(0) = 0.$$

- Следовательно, $x = 0$.

Сумма корневых пространств — прямая.

Теорема 12

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{k} V(\lambda_i) - \text{прямая сумма}$$

Доказательство

- Пусть $W_i = \sum_{j \neq i} V(\lambda_j)$.
- По критерию прямой суммы нам достаточно доказать, что $W_i \cap V(\lambda_i) = \{0\}$.
- Пусть $x \in W_i \cap V(\lambda_i)$. Тогда $(\varphi - \lambda_i id)^n(x) = 0$, так как $x \in V(\lambda_i)$.
- С другой стороны, $x = \sum_{j \neq i} x_j$, где $x_j \in V(\lambda_j)$.
- Следовательно:

$$(\varphi - \lambda_j \cdot \mathrm{id})^n(x_j) = 0.$$

Рассмотрим многочлен $f(t)$

$$f(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n.$$

- Тогда:

$$f(\varphi)(x) = \sum_{j \neq i} (f(\varphi))(x_j) =$$
$$\sum_{j \neq i} \left(\prod (\varphi - \lambda_s id)^n \right) ((\varphi - \lambda_j id)^n (x_j)) =$$
$$\sum_{j \neq i} \left(\prod_{s \notin \{i,j\}} (\varphi - \lambda_s id)^n \right) (0) = 0$$

- Многочлены $(t - \lambda_i)^n$ и $f(t)$ взаимно просты, так как в разложении $f(t)$ на линейные множители нет $t - \lambda_i$.

- По Лемме 8, из $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^n(x) = 0$ и $f(\varphi)(x) = 0$ следует, что $x = 0$.

- Таким образом, $W_i \cap V(\lambda_i) = \{0\}$, что завершает доказательство.

Разложении пространства в прямую сумму корневых. Инвариантность корневых подпространств.

Теорема 13

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ и:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

- Тогда выполнены следующие утверждения:
  1. $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$.
  2. Корневые пространства φ-инвариантны.

Доказательство

Утверждение 1

- Пусть $f_i(t) = \prod_{j \neq i}(t - \lambda_j)^{m_j}$.
- Понятно, что $(f_1, \ldots, f_k) = 1$ (мы знаем разложение каждого из этих многочленов на линейные множители, и ни один из них не является общим для всех k многочленов, значит, эти многочлены взаимно просты в совокупности).
- Тогда по теореме о линейном представлении НОД существуют такие многочлены $h_1, \ldots, h_k \in K[t]$, что:

$$h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k = 1.$$

- Подставив в это равенство оператор φ, мы получим:

$$(h_1 f_1)(\varphi) + \cdots + (h_k f_k)(\varphi) = \mathrm{id}.$$

- Для линейного отображения $\psi \in \mathrm{End}(V)$ и $X \subset V$ будем использовать обозначение $\psi(X) = \{\psi(x) : x \in X\}$.
- Пусть $W_i = ((h_i f_i)(\varphi))(V)$.
- Подставив в качестве аргумента в равенство пространство V, мы получим:

$$\begin{gathered} V = \mathrm{id}(V) = \sum_{i=1}^{k} (h_i f_i)(\varphi)(V) = \\ \sum_{i=1}^{k} \left((h_i f_i)(\varphi)\right)(V) = \sum_{i=1}^{k} W_i \end{gathered} \tag{2}$$

Утверждение $W_i \subset V(\lambda_i)$

- Пусть $y \in W_i$. Тогда $y = ((h_i f_i)(\varphi))(x)$, где $x \in V$. Следовательно:

$$\begin{gathered} (\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{m_i}(y) = (\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{m_i} \cdot h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi)(x). = \\ (h_i(\varphi))(((\varphi - \lambda_i id)^{m_i} \cdot f_i(\varphi))(x)) = \\ (h_i(\varphi))(\prod_{j=1}^{k}(\varphi - \lambda_j id)^{m_j}(x)) = \\ (h_i(\varphi))((-1)^n \cdot (\chi_\varphi(\varphi))(x)) = \\ (h_i(\varphi))(x) = 0 \end{gathered}$$

так как $\chi_\varphi(\varphi)$ — нулевой оператор по теореме Гамильтона-Кэли.

- Следовательно, $y \in V(\lambda_i)$.

Доказательство утверждения 1 теоремы

- По Теореме 12 сумма корневых подпространств оператора φ — прямая. Значит:

$$\bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i) < V.$$

- С другой стороны, мы знаем, что $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$.
- Но $\bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ – подмножество $\bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$, так как $W_i \subset V(\lambda_i)$.
- Это возможно лишь при:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i).$$

Утверждение 2

- Так как мы доказали, что $W_i = V(\lambda_i)$, нам достаточно доказать, что W_i — φ-инвариантно.
- Проверим это. Действительно, пусть $y \in W_i$, тогда $y = ((h_i f_i)(\varphi))(x)$, где $x \in V$.
- Следовательно:

$$\varphi(y) = \varphi((h_i f_i)(\varphi)(x)) = (h_i f_i)(\varphi)(\varphi(x)) \in W_i,$$

так как $\varphi(x) \in V$, а $W_i = ((h_i f_i)(\varphi))(V)$.

Размерность корневого подпространства.

Теорема 14

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \operatorname{End}(V)$, $\operatorname{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ и:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

- Тогда выполнены следующие утверждения:
    1. Пусть $\varphi_i = \varphi|_{V(\lambda_i)}$. Тогда оператор $\varphi_i \in \operatorname{End}(V(\lambda_i))$ имеет единственное собственное число — λ_i.
    2. $\dim(V(\lambda_i)) = m_i$.

Доказательство

Утверждение 1

- Подчеркнем, что формулировка пункта 1 корректна, так как $V(\lambda_i)$ — это φ-инвариантное пространство по Теореме 13.
- Предположим противное, пусть $\mu \in \operatorname{Spec}(\varphi_i)$, $\mu \neq \lambda_i$, а x — собственный вектор μ.
- Тогда:

$$(\varphi - \mu \cdot \mathrm{id})(x) = 0.$$

- С другой стороны, так как $x \in V(\lambda_i)$, мы имеем:

$$(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^n(x) = 0.$$

- Очевидно, многочлены $t - \mu$ и $(t - \lambda_i)^n$ взаимно просты, откуда по Лемме 8 имеем $x = 0$, что противоречит определению собственного вектора.

Утверждение 2

- По Теореме 13:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i).$$

- В каждом пространстве $V(\lambda_i)$ зафиксируем свой базис, пусть A_i — матрица отображения φ_i в этом базисе.
- По Лемме 5, тогда в базисе V, полученном объединением зафиксированных выше базисов, отображение φ имеет матрицу:

$$A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k).$$

- Пусть $n_i = \dim(V(\lambda_i))$. Тогда:

$$\begin{gathered}(-1)^n \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i} = \chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n) = \\ \det(\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k) - t \cdot \operatorname{diag}(E_{n_1}, \ldots, E_{n_k})) = \\ \det(\operatorname{diag}(A_1 - tE_{n_1}, \ldots, A_k - tE_{n_k}) = \\ \prod_{i=1}^{k} \det(A_i - tE_{n_i}) = \prod \chi(\varphi_i(t).\end{gathered} \tag{*}$$

- По пункту 1, $\operatorname{Spec}(\varphi_i) = \{\lambda_i\}$, следовательно:

$$\det(A_i - tE_{n_i}) = \chi_{\varphi_i}(t).$$

- Тогда по Теореме 9 многочлен $\chi_{\varphi_i}(t)$ имеет единственный корень λ_i
- По формуле $(*)$

$$(-1)^n \prod)i = 1^k (t - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{k} \chi_{\varphi_i}(t)$$

- Так как для каждого $i \in \{1, ..., k\}$ $\chi_{\varphi_i}(t)$ имеет единственный корень λ_i, остается единственная возможность:

$$\chi_{\varphi_i}(t) = (-1)^{m_i}(t-\lambda_i)^{m_i}.$$

- Подставим это в формулу:

$$(-1)^n \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{k}(-1)^{n_i}(t-\lambda_i)^{n_i}.$$

- Следовательно, $\dim(V(\lambda_i)) = m_i$.

Относительный базис.

Определение

- Пусть $U < V$.
- Вектора $e_1, \ldots, e_s$ из V линейно независимы над U, если никакая их нетривиальная линейная комбинация не лежит в U.
- Относительный базис V над U — это $\dim(V) - \dim(U)$ линейно независимых над U векторов.

Свойство 1

- $e_1, \ldots, e_r \in V$ линейно независимы над U, если и только если $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_r}$ линейно независимы в факторпространстве V/U.

Доказательство

- Очевидно ввиду того, что равенство нулю линейной комбинации $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_r}$ в V/U равносильно принадлежности U аналогичной линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_r$ в V.

Свойство 2

- $e_1, \ldots, e_r$ — относительный базис V над U, если и только если $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_r}$ — базис V/U.

Доказательство

- К Свойству 1 нужно лишь добавить, что по доказанному в главе “Линейные пространства” $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$.

Свойство 3

- Относительный базис V над U — максимальное множество векторов из V, линейно независимых над U.
- Если $e_1, \ldots, e_s \in V$ линейно независимы над U, то эти вектора можно дополнить до относительного базиса V над U.

Доказательство

- Воспользуемся Свойствами 1 и 2, а также тем, что любое линейно независимое множество в V/U можно дополнить до базиса.

Разбиение корневого пространства на ядра. Лемма о ЛНЗ векторов над W_{t-2}.

Разбиение корневого пространства на ядра

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \operatorname{End}(V)$, $\lambda \in \operatorname{Spec}(\varphi)$, а m — кратность корня λ в характеристическом многочлене $\chi_\varphi(t)$.
- Тогда $\dim(V(\lambda)) = m$ по Теореме 14.
- Пусть $\psi = \varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}$.
- Введем обозначения:

$$W_0 := \{0\}, \quad W_i := \ker(\psi^i) \text{ для } i \in \mathbb{N}.$$

- Понятно, что:

$$W_0 \leq W_1 \leq \cdots \leq W_n = V(\lambda),$$

  (последнее равенство следует из свойства корневых пространств).
- Пусть ℓ — минимальное такое натуральное число, что $W_\ell = V(\lambda)$.
- Так как $W_i \leq V(\lambda)$, мы имеем:

$$V(\lambda) = W_\ell = W_{\ell+1} = \cdots,$$

  поэтому все последующие ядра после W_ℓ не будут меняться.
- Введем обозначения:

$$p_i := \dim(W_i) \quad (\text{здесь } i \in \{0, \ldots, \ell\}),$$

$$r_i := p_i - p_{i-1} \quad (\text{здесь } i \in \{1, \ldots, \ell\}).$$

• Отметим, что количество векторов в относительном базисе W_ℓ по W_{t-1} равно

$$\dim(W_\ell) - \dim(W_{t-1}) = \sum_{i=1}^{l} (\dim(W_i) - \dim(W_{i-1})) = \sum_{i=t}^{j} r_i$$

Лемма 9

- Пусть $2 \leq t \leq \ell$ и у нас есть таблица, строки которой занумерованы числами от t до ℓ.
- В строке с номером s стоят вектора $e_1^s, \ldots, e_{r_s}^s \in W_s$.
- Предположим, что для каждого $s \in \{t, \ldots, \ell\}$ вектора в s-й строке линейно независимы над W_{s-1}.
- Тогда все записанные в таблице вектора, а также $\psi(e_1^t), \ldots, \psi(e_{r_t}^t)$ вместе линейно независимы над W_{t-2}.
- В частности, эти вектора можно дополнить до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2}.

Доказательство

- Предположим противное. Пусть:

$$\sum_{s=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_i^s e_i^s + \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi(e_j^t) = w, \quad w \in W_{t-2}, \tag{*}$$

  где не все коэффициенты α_i^s и β_j равны 0.

- Разберем два случая:

  1. Не все коэффициенты α_i^s равны 0.
  2. Все коэффициенты α_i^s равны 0.

Случай 1: не все α_s^i равны 0

- Пусть q — наибольшее такое число, что существует отличный от 0 индекс α_i^q.
- Тогда $\alpha_i^s = 0$ при $s > q$, и в первой сумме из $(*)$ можно вести суммирование до q вместо ℓ.
- Подействуем на обе части $(*)$ оператором ψ^{q-1} и получим:

$$\begin{aligned} 0 = \psi^{q-1}(w) &= \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi^q(e_j^t) + \sum_{s=t}^{q} \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_i^s \psi^{q-1}(e_i^s) \\ &= \sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q \psi^{q-1}(e_i^q) = \psi^{q-1}(\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q e_i^q), \end{aligned}$$

  откуда следует, что:
- Следовательно, $\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q e_i^q \in W_{q-1}$, что противоречит условию.

Случай 2: все α_i^s равны 0

- Тогда существует $\beta_j \neq 0$, а вся первая сумма из $(*)$ — нулевая, и $(*)$ превращается в:

$$w = \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi(e_j^t) = \psi\left(\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t\right).$$

- Тогда:

$$0 = \psi^{t-2}(w) = \psi^{t-1}\left(\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t\right).$$

- Следовательно:

$$\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t \in W_{t-1},$$

  что противоречит условию.

Следствие 3

- Для всех $t \in \{2, \dots, \ell\}$ выполнено $r_{t-1} \geq r_t$.

Доказательство

- Из Леммы 9 следует, что:

$$r_t + \sum_{j=t}^{\ell} r_j \leq \dim(W_\ell) - \dim(W_{t-2}) = \sum_{j=t-1}^{\ell} r_j$$

  откуда следует, что $r_{t-1} \geq r_t$.

Лемма о дополнении до относительного базиса.

Лемма 10

- Пусть $2 \le t \le \ell$ и у нас есть таблица, строки которой занумерованы числами от t до ℓ.
- В строке с номером i стоят вектора $e_1^i, \ldots, e_{r_i}^i \in W_i$.
- Предположим, что для каждого $i \in \{t, \ldots, \ell\}$ вектора в строках с i по ℓ образуют относительный базис W_ℓ над W_{i-1}.
- Пусть T — множество, состоящее из всех векторов в таблице, а также $\psi(e_1^t), \ldots, \psi(e_{r_t}^t)$.
- Тогда вектора из T можно дополнить до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2}, дописав $r_{t-1} - r_t$ векторов из W_{t-1}.

Доказательство

- Пусть $s = r_{t-1} - r_t$. По Следствию 3, $s \ge 0$.
- По Лемме 9, вектора из T линейно независимы над W_{t-2}, и их можно дополнить до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2} векторами $x_1, \ldots, x_s \in W_\ell$. (Нужно в точности s векторов, как видно из вычислений Следствия 3.)
- Так как $e_1^t, \ldots, e_{r_t}^t, \ldots, e_1^\ell, \ldots, e_{r_\ell}^\ell$ — относительный базис W_ℓ по W_{t-1}.
- Поэтому в факторпространстве W_ℓ / W_{t-1} для любого $q \in \{1, \ldots, s\}$ мы имеем:

$$\overline{x_q} = \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \beta_{i,q}^j e_i^j,$$

  где все $\beta_{i,q}^j \in K$.

Положим

- Пусть $y_q = x_q - \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \beta_{i,q}^j e_i^j$. $(*)$
- Тогда $\overline{y_q} = 0$ в W_ℓ / W_{t-1}, значит, $y_q \in W_{t-1}$.
- Докажем, что $y_1, \ldots, y_s \in W_{t-1}$ также дополняют вектора из T до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2}.
- Для этого достаточно показать, что все эти вектора линейно независимы (ЛНЗ) над W_{t-2}. Пусть это не так, и

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i y_i + \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \delta_i^j e_i^j + \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i \psi(e_i^t) = w \in W_{t-2},$$

  где все $\gamma_i, \alpha_i, \delta_i^j \in K$ и не все они равны 0.

- Из Леммы 9 следует, что не все $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ равны 0.
- Подставив для каждого y_i выражение $(*)$, после приведения подобных членов, получим:

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i x_i + \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \varepsilon_i^j e_i^j + \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i \psi(e_i^t) = w \in W_{t-2},$$

  где $\varepsilon_i^j = \delta_i^j + \sum_{q=1}^{s} \gamma_q \beta_{i,q}^j$.

- Но по выбору $x_1, \ldots, x_s$, тогда $\gamma_1 = \cdots = \gamma_s = 0$, что является противоречием.