

# Теория Рамсея

---

В графе на достаточно большом количестве вершин без больших клик обязательно есть большое независимое множество вершин.

## Числа Рамсея

---

- Основным объектом изучения в этом разделе будут полные графы, рёбра которых покрашены в несколько цветов. Напомним, что множество вершин, образующих полный подграф, а также сам этот подграф мы называем кликой.

## Определение числа Рамсея

---

- Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ . **Число Рамсея**  $r(m, n)$  — это наименьшее из всех таких чисел  $x \in \mathbb{N}$ , что при любой раскраске рёбер полного графа на  $x$  вершинах в два цвета обязательно найдётся клика на  $n$  вершинах с рёбрами цвета 1 или клика на  $m$  вершинах с рёбрами цвета 2.
- Рамсей доказал, что число  $r(m, n)$  существует (то есть, конечно).
- Очевидно,
  - $r(n, 1) = r(1, n) = 1$ ,
  - $r(n, 2) = r(2, n) = n$ ,
  - $r(m, n) = r(n, m)$ .

## Двумерные числа Рамсея: оценки сверху для случая двух цветов.

---

### Теорема 1

---

\*(P. Erdos, G. Szekeres, 1935.) Пусть  $n, m \geq 2$  — натуральные числа. Тогда выполнены следующие утверждения.

- $r(n, m) \leq r(n, m-1) + r(n-1, m)$ .
- Если оба числа  $r(n, m-1)$  и  $r(n-1, m)$  — чётные, то  $r(n, m) \leq r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$ .

## Доказательство.

---

1. • Рассмотрим клику на  $r(n, m-1) + r(n-1, m)$  вершинах с рёбрами цветов 1 и 2 и её произвольную вершину  $a$ . От вершины  $a$  отходит  $r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$  рёбер цветов 1 и 2.
  - Предположим, что от вершины  $a$  отходит хотя бы  $r(n, m-1)$  рёбер цвета 2. Рассмотрим концы этих рёбер. Среди них есть либо клика на  $n$  вершинах с рёбрами цвета 1, либо клика на  $m-1$  вершинах с рёбрами цвета 2. В первом случае теорема доказана, а во втором случае добавим вершину  $a$  и получим клику на  $m$  вершинах с рёбрами цвета 2.
  - Предположим, что от вершины  $a$  отходит не более  $r(n, m-1) - 1$  рёбер цвета 2. Тогда  $a$  инцидентна хотя бы  $r(n-1, m)$  рёбрам цвета 1. Аналогично получаем, что в графе есть искомая клика.
2. • Рассмотрим клику на  $r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$  вершинах с рёбрами цветов 1 и 2 и её произвольную вершину  $a$ .
  - Если вершине  $a$  инцидентны хотя бы  $r(n, m-1)$  рёбер цвета 2 или хотя бы  $r(n-1, m)$  рёбер цвета 1, то мы найдём в графе клику на  $n$  вершинах с рёбрами цвета 1 или клику на  $m$  вершинах с рёбрами цвета 2
  - Остаётся случай, когда вершине  $a$  инцидентны ровно  $r(n, m-1) - 1$  рёбер цвета 2 и ровно  $r(n-1, m) - 1$  рёбер цвета 1, то же самое для всех остальных вершин.
  - Это означает, что в графе из рёбер цвета 2 всего  $r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$  вершин и степень каждой вершины равна  $r(n, m-1) - 1$ . Однако, тогда в графе нечётное количество вершин нечётной степени.

## Оценка снизу на $r(k, k)$ .

---

### Теорема 2

---

(Р. Erdos, 1947.) Для любого натурального числа  $k \geq 2$  выполняется неравенство  $r(k, k) \geq 2^{k/2}$ .

## Доказательство.

---

- $r(2, 2) = 2 \geq 2^{2/2}$ . Далее  $k \geq 3$ .
- Зафиксируем множество различных помеченных вершин  $v_1, \dots, v_n$ . Пусть  $g(n, k)$  — доля среди всех графов на вершинах  $v_1, \dots, v_n$  тех графов, что содержат клику на  $k$  вершинах. Всего графов на наших вершинах, очевидно,  $2^{C_n^k}$  (каждое из возможных  $C_n^k = \frac{n(n-1)}{2}$  рёбер можно провести или не провести).  
Посчитаем графы с кликой на  $k$  вершинах так: существует

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} < \frac{n^k}{k!}$$

способов выбрать  $k$  вершин для клики в нашем множестве, после чего все рёбра между ними будем считать проведёнными, а остальные рёбра выбираются произвольным образом.

- Таким образом, каждый граф с кликой на  $k$  вершинах будет посчитан, причём некоторые даже более одного раза. Количество графов с кликой размера  $k$  оказывается не более,  $C_n^k * 2^{C_n^2 - C_k^2}$ . Следовательно,

$$g(n, k) \leq \frac{C_n^k * 2^{C_n^2 - C_k^2}}{2^{C_n^2}} = \frac{C_n^k}{2^{C_k^2}} < \frac{n^k}{k! * 2^{C_k^2}} \quad (1)$$

- Подставив  $n < 2^{k/2}$  в неравенство (1), мы получаем

$$\frac{2^{k^2/2} * 2^{-C_k^2}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$$

- Предположим, что  $r(k, k) = n < 2^{k/2}$  и разобьём все графы на  $n$  вершинах на пары  $G, \overline{G}$  (граф и его дополнение).
- Так как  $g(n, k) < \frac{1}{2}$ , то существует пара, в которой ни  $G$ , ни  $\overline{G}$  не содержат клики на  $k$  вершинах. Рассмотрим раскраску рёбер  $K_n$  в два цвета, в которой рёбра цвета 1 образуют граф  $G$ . В такой раскраске нет клики на  $k$  вершинах ни цвета 1, ни цвета 2, противоречие.
- Следовательно,  $r(k, k) \geq 2^{k/2}$ .

## Следствие 1

---

Для любых  $k, m \in \mathbb{N}$  таких, что  $2 \leq k \leq m$ , выполняется неравенство  $r(k, m) \geq 2^{k/2}$ .

# Двумерные числа Рамсея: оценка сверху для случая более чем двух цветов.

---

## Числа Рамсея для раскрасок в несколько цветов

- Естественным обобщением классических чисел Рамсея является случай, когда рёбра полного графа красятся не в два, а в произвольное число цветов.

## Определение

---

Пусть  $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ . Число Рамсея  $r(k; n_1, \dots, n_k)$  — это наименьшее из всех таких чисел  $x \in \mathbb{N}$ , что при любой раскраске рёбер полного графа на  $x$  вершинах в  $k$  цветов для некоторого  $i \in [1..k]$  обязательно найдётся клика на  $n_i$  вершинах с рёбрами цвета  $i$ .

- Отметим, что  $r(2; n, m)$  — это определённое ранее число Рамсея  $r(n, m)$ .

## Теорема 3

---

(P. Erdos, G.Szekeres, 1935.) Пусть  $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$  — натуральные числа. Тогда

$$r(k; n_1, \dots, n_k) \leq r(k; n_1-1, n_2, \dots, n_k) + r(k; n_1, n_2-1, \dots, n_k) + \dots + r(k; n_1, n_2, \dots, n_k-1) - k + 2.$$

### Доказательство.

---

- Рассмотрим клику на  $p = r(k; n_1-1, n_2, \dots, n_k) + r(k; n_1, n_2-1, \dots, n_k) + \dots + r(k; n_1, n_2, \dots, n_k-1) - k + 2$  вершинах с рёбрами цветов  $1, \dots, k$  и ее произвольную вершину  $a$ . От вершины  $a$  отходит  $p-1$  рёбер цветов  $1, \dots, k$ .
- Мы хотим доказать, что существует такое  $j \in \{1, \dots, k\}$ , для которого найдется клика на  $n_j$  вершинах с рёбрами цвета  $j$ .
- Предположим, что от вершины  $a$  отходит хотя бы  $r(k; n_1, \dots, n_i-1, \dots, n_k)$  рёбер цвета  $i$ . Рассмотрим концы этих ребер. Среди них есть либо клика на  $n_i$  вершинах с рёбрами цвета  $s \neq i$ , либо клика на  $n_i-1$  вершинах с рёбрами цвета  $i$ . В последнем случае добавим вершину  $a$  и получим клику на  $m$  вершинах с рёбрами цвета  $i$ .
- Остается случай, когда для каждого  $i$  вершине  $a$  инцидентно не более  $r(k; n_1, \dots, n_i-1, \dots, n_k) - 1$  рёбер цвета  $i$ . Тогда  $a$  инцидентна не более чем  $r(k; n_1-1, n_2, \dots, n_k) - 1 + r(k; n_1, n_2-1, \dots, n_k) - 1 + \dots + r(k; n_1, n_2, \dots, n_k-1) - 1 = p-2$  рёбрам, противоречие.

## Многомерные числа Рамсея: доказательство конечности.

---

- Результат этого раздела не относится к классической теории графов, но тесно с ней связан. Даже формулировать определения и результаты мы будем не на языке графов.

### Определение

---

Пусть  $m, k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ , причём  $n_1, \dots, n_k \geq m$ . Число Рамсея  $r_m(k; n_1, \dots, n_k)$  — это наименьшее из всех таких чисел  $x \in \mathbb{N}$ , что при любой раскраске  $m$ -элементных подмножеств  $x$ -элементного множества  $M$  в  $k$  цветов для некоторого  $i \in [1..k]$  обязательно найдётся такое множество  $W_i$ , что  $|W_i| = n_i$  и все  $m$ -элементные подмножества множества  $W_i$  имеют цвет  $i$ . Число  $m$  называется размерностью числа Рамсея  $r_m(k; n_1, \dots, n_k)$ .

- Нетрудно понять, что числа Рамсея размерности 2 — это определённые выше числа Рамсея для

клик.

- При количестве цветов, равном 2, этот параметр мы будем опускать и писать  $r_m(n_1, n_2)$  вместо  $r_m(2; n_1, n_2)$ .
- Для каждого множества  $M$  через  $M^k$  мы будем обозначать множество всех  $k$ -элементных подмножеств  $M$ .

## Теорема 4

---

(F. Ramsey, 1930.) Пусть  $m, k, n_1, \dots, n_k$  — натуральные числа, причём  $k \geq 2$ , а  $n_1, \dots, n_k \geq m$ . Тогда число Рамсея  $r_m(k; n_1, \dots, n_k)$  существует (то есть, конечно).

### Доказательство.

---

1. • Мы будем доказывать теорему **по индукции**. Начнем со случая  $k = 2$ . Приступая к доказательству для числа  $r_m(n_1, n_2)$  мы будем считать доказанным утверждение теоремы для чисел Рамсея всех меньших размерностей и чисел Рамсея размерности  $m$  с меньшей суммой  $n_1 + n_2$ . В качестве базы будем использовать случай чисел Рамсея размерности 2, разобранный в [Теореме 1](#).
  - Мы докажем, что

$$r_m(n_1, n_2) - 1 \leq p = r_{m-1}(r_m(n_1 - 1, n_2), r_m(n_1, n_2 - 1)).$$

- Рассмотрим  $(p + 1)$ -элементное множество  $M$  и выделим в нём элемент  $a$ .
- Пусть  $M_0 = M \setminus \{a\}$ , а  $\rho : M^m \rightarrow \{1, 2\}$  — произвольная раскраска в два цвета. Определим раскраску  $\rho' : M_0^{m-1} \rightarrow \{1, 2\}$ : для каждого множества  $B \in M_0^{m-1}$  положим  $\rho'(B) := \rho(B \cup \{a\})$ .
- Так как  $|M_0| = p = r_{m-1}(r_m(n_1 - 1, n_2), r_m(n_1, n_2 - 1))$ , либо существует  $r_m(n_1 - 1, n_2)$ -элементное подмножество  $M_1 \subset M_0$ , для которого  $\rho'(B) = 1$  на всех  $B \in M_1^{m-1}$ , либо существует  $r_m(n_1, n_2 - 1)$ -элементное подмножество  $M_2 \subset M_0$ , для которого  $\rho'(B) = 2$  на всех  $B \in M_2^{m-1}$ . Случаи аналогичны, рассмотрим первый случай и множество  $M_1$ .
- По индукционному предположению из  $|M_1| = r_m(n_1 - 1, n_2)$  следует, что либо существует  $n_1 - 1$ -элементное подмножество  $N_1 \subset M_1$ , для которого  $\rho(A) = 1$  на всех  $A \in N_1^m$ , либо существует  $n_2$ -элементное подмножество  $N_2 \subset M_1$ , для которого  $\rho(A) = 2$  на всех  $A \in N_2^m$ .
- Во втором случае искомое подмножество найдено (это  $N_2$ ).
- Рассмотрим первый случай и множество  $N = N_1 \cup \{a\}$ . Пусть  $A \in N_m$ . Если  $A \not\ni a$ , то  $A \in N_1^m$  и, следовательно,  $\rho(A) = 1$ . Если же  $A \ni a$ , то множество  $A \setminus \{a\} \in N_1^{m-1} \subset M_1^{m-1}$  и потому  $\rho(A) = \rho'(A \setminus \{a\}) = 1$ . Учитывая, что  $|N| = n_1$ , мы нашли искомое подмножество и в этом случае.

2. • При  $k > 2$  будем вести индукцию по  $k$  с доказанной выше базой  $k = 2$ .

- Докажем неравенство

$$r_m(k; n_1, \dots, n_k) \leq q = r_m(r_m(k-1; n_1, \dots, n_{k-1}), n_k).$$

- Рассмотрим множество  $M$  на  $q$  вершинах и произвольную раскраску  $\rho : M^m \rightarrow [1..k]$  в  $k$  цветов.

- Рассмотрим раскраску  $\rho' : M^m \rightarrow 0, k$ , в которой цвета  $1, \dots, k-1$  раскраски  $\rho$  склеены в цвет  $0$ .

- Тогда существует либо такое подмножество  $M_0 \subset M$ , что  $|M_0| = r_m(k-1; n_1, \dots, n_{k-1})$  и  $\rho'(A) = 0$  на всех  $A \in M_0^m$ , либо существует такое  $n_k$ -элементное подмножество  $M_k \subset M$ , что  $\rho(A) = \rho'(A) = k$  на всех  $A \in M_k^m$ .

- Во втором случае  $M_k$  — искомое подмножество, а в первом случае заметим, что на любом подмноестве  $A \in M_0^m$  из  $\rho'(A) = 0$  следует  $\rho(A) \in [1..k-1]$ . Исходя из размера множества  $M_0$ , по индукционному предположению получаем, что найдётся искомое подмножество множества  $M$  для одного из цветов  $1, \dots, k-1$ .

## Применение теории Рамсея: задача о выпуклом $n$ -угольнике.

---

- Для любого  $m \geq 3$  мы докажем, что если взять на плоскости очень много точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой), среди них найдется  $m$ , образующих выпуклый  $m$ -угольник
- Выпуклая оболочка  $k$  точек — минимальный по включению выпуклый многоугольник, все их содержащий. Известно, что вершины выпуклой оболочки — всегда некоторые из наших точек.
- Если все  $k$  точек являются вершинами своей выпуклой оболочки, то они образуют выпуклый  $k$ -угольник.

### Лемма 1

---

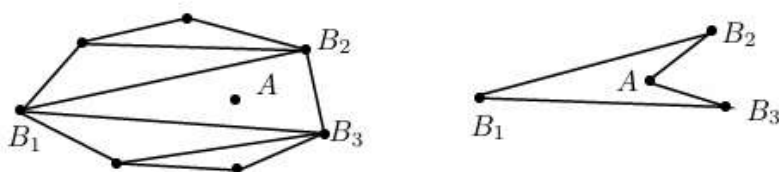
На плоскости дано множество  $M$  из  $k$  точек общего положения на плоскости таких, что любой 4-угольник с вершинами в 4 из этих точек выпуклый. Тогда точки из  $M$  образуют выпуклый  $k$ -угольник.

### Доказательство.

---

- Предположим противное и рассмотрим выпуклую оболочку точек множества  $M$ , тогда в ней  $s < k$  вершин.
- Триангулируем этот  $s$ -угольник диагоналями и рассмотрим точку  $A \in M$ , не являющуюся вершиной  $M$ .
- Точка  $A$  попала внутрь одного из треугольников триангуляции — скажем, в  $B_1 B_2 B_3$  (см.

рисунок). Тогда  $B_1B_2AB_3$  — невыпуклый четырёхугольник, противоречие.



## Лемма 2

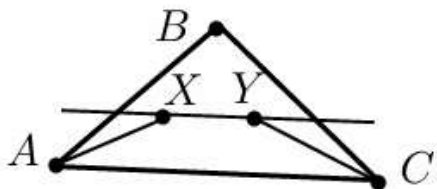
---

Из любых 5 точек общего положения на плоскости можно выбрать 4, образующие выпуклый 4-угольник.

## Доказательство

---

- Рассмотрим выпуклую оболочку наших 5 точек. Если это 4- или 5-угольник, Лемма доказана.
- Пусть выпуклая оболочка — треугольник  $ABC$ . Внутри него расположены еще оставшиеся точки — скажем,  $X$  и  $Y$ .
- Прямая  $XY$  не может проходить через вершину треугольника  $ABC$  (точки в общем положении), а значит,  $XY$  пересекает две стороны треугольника — скажем,  $AB$  и  $BC$  (см. рисунок).
- Тогда 4-угольник  $AXYC$  — выпуклый.



## Теорема 5

---

Для любого  $m \geq 3$  существует такое  $k_m \in \mathbb{N}$ , что среди любых  $k_m$  точек общего положения на плоскости есть  $m$ , образующих выпуклый  $m$ -угольник.

## Доказательство

---

- Пусть  $k_m = r_4(m, 5)$
- Рассмотрим любые  $k_m$  точек общего положения на плоскости и покрасим четверки этих точек в цвет 1, если они образуют выпуклый 4-угольник, и в цвет 2—если не выпуклый.
- Тогда найдутся либо  $m$  точек, все четверки среди которых цвета 1, либо 5 точек, все четверки

среди которых цвета 2.

- В первом случае по [Лемме 1](#) мы нашли  $m$  точек, образующих выпуклый  $m$ -угольник.
- Второй случай невозможен по [Лемме 2](#).

## Применение теории Рамсея: теорема Шура об одноцветном решении уравнения $x + y = z$ .

---

### Теорема 6

---

(I. Schur, 1917.) Пусть  $n \in \mathbb{N}$ , а натуральные числа от 1 до  $n$  покрашены в  $k$  цветов. Тогда при любом достаточно большом  $n$  найдется одноцветное решение уравнения  $x + y = z$  в числах  $\{1, \dots, n\}$ .

### Доказательство

---

- Пусть  $n \geq r(k; 3, \dots, 3)$  (здесь  $k$  троек)
- Соединим каждые два числа  $s, t \in \{1, \dots, n\}$  ребром, покрашенным в цвет  $|s - t|$ .
- Тогда найдется треугольник с одноцветными рёбрами — скажем, из чисел  $a > b > c$ .
- Это означает, что  $a - b, b - c, a - c$  — одноцветное решение уравнения  $x + y = z$ , так как  $(a - b) + (b - c) = a - c$ .

## Лемма о произвольном дереве-подграфе

---

- Ещё один способ обобщения классической теории Рамсея — замена клик на произвольные графы-шаблоны.

### Определение

---

Пусть  $H_1, H_2$  — два данных графа. Число Рамсея  $r(H_1, H_2)$  — это наименьшее из всех таких чисел  $x \in \mathbb{N}$ , что при любой раскраске рёбер полного графа на  $x$  вершинах в два цвета обязательно найдётся подграф с рёбрами цвета 1, изоморфный  $H_1$ , или подграф с рёбрами цвета 2, изоморфный  $H_2$ .

- Из результатов классической теории Рамсея понятно, что числа  $r(H_1, H_2)$  обязательно существуют (то есть, конечны). Интересно, что иногда их можно точно вычислить.



## Лемма 3

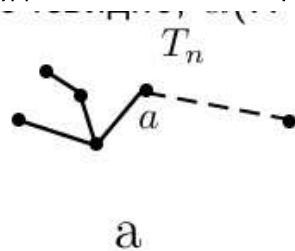
Пусть  $m > 1$ , а граф  $H$  таков, что  $v(H) \geq (m-1)(n-1) + 1$  и  $\alpha(H) \leq m-1$ . Тогда граф  $H$  содержит в качестве подграфа любое дерево на  $n$  вершинах.

### Доказательство.

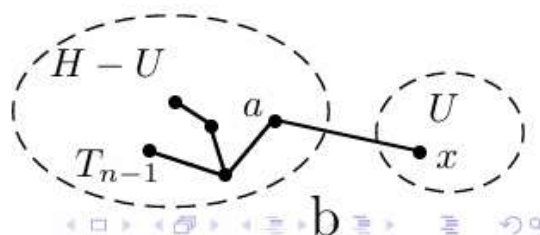
- Зафиксируем  $m$  и проведём индукцию по  $n$ . База для  $n = 1$  очевидна.

**Индукционный переход  $n-1 \rightarrow n$  ( $n > 1$ ).**

- Рассмотрим произвольное дерево  $T_n$  на  $n$  вершинах, пусть дерево  $T_{n-1}$  получено из  $T_n$  удалением висячей вершины (см. рис.а).



- Пусть  $U$  — максимальное независимое множество вершин графа  $H$ . Тогда  $|U| = \alpha(H) \leq m-1$ , следовательно,  $v(H-U) \geq (m-1)(n-2) + 1$  и, очевидно,  $\alpha(H-U) \leq m-1$ .
- По индукционному предположению граф  $H-U$  содержит в качестве подграфа дерево  $T_{n-1}$ . Пусть  $a$  — вершина этого дерева, присоединив к которой висячую вершину, мы получим дерево  $T_n$ .
- Заметим, что множество  $U \cup \{a\}$  не является независимым ввиду максимальной  $U$ , следовательно, вершина  $a$  смежна хотя бы с одной вершиной  $x \in U$ .
- Так как  $x \notin V(T_{n-1})$ , можно присоединить вершину  $x$  к вершине  $a$  дерева  $T_{n-1}$ . В результате мы получим дерево  $T_n$  в качестве подграфа графа  $H$ .



## Числа Рамсея для произвольных графов. Теорема Хватала

### Теорема 7

(V.Chvatal, 1977.) Пусть  $T_n$  — дерево на  $n$  вершинах. Тогда  $r(T_n, K_m) = (m-1)(n-1) + 1$ .

Доказательство.

1. • Докажем, что  $r(T_n, K_m) \geq (m-1)(n-1) + 1$

- Для этого предъявим раскраску рёбер графа  $K_{(m-1)(n-1)+1}$ , в которой нет ни одного связного подграфа на  $n$  вершинах с рёбрами цвета 1 и нет клики на  $m$  вершинах с рёбрами цвета 2.

Разобьём вершины графа на  $m-1$  клику по  $n-1$  вершине и покрасим все рёбра этих клик в цвет 1, а остальные рёбра — в цвет 2.

- Тогда любой связный подграф с рёбрами цвета 1 содержит не более  $n-1$  вершины, в частности, нет подграфа с рёбрами цвета 1, изоморфного  $T_n$ . Рёбра цвета 2 (то есть, все оставшиеся рёбра) образуют  $(m-1)$ -дольный граф, в котором, очевидно, нет клики на  $m$  вершинах.

2. • Рассмотрим произвольную раскраску рёбер полного графа  $K_{(m-1)(n-1)+1}$  в два цвета и его остовный подграф  $G_1$  с рёбрами первого цвета.

- Предположим, что не существует клики на  $m$  вершинах с рёбрами цвета 2. Тогда  $m > 1$  и  $\alpha(G_1) \leq m-1$ . По [Лемме 3](#) граф  $G_1$  содержит в качестве подграфа любое дерево на  $n$  вершинах, в частности, дерево, изоморфное  $T_n$

## Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству.

### Наследственное свойство

#### Определение

- Назовем свойство  $P$  графа наследственным, если для любого графа  $G$ , удовлетворяющего свойству  $P$ , любой индуцированный подграф  $H$  графа  $G$  также удовлетворяет свойству  $P$ .
- Обозначим через  $P(n)$  наибольшее возможное количество рёбер в графе на  $n$  вершинах, удовлетворяющем свойству  $P$ .
- Наследственных свойств довольно много. Например, свойства “граф не содержит подграфа, изоморфного данному” или “хроматическое число графа не превосходит  $k$ ” являются наследственными.

#### Теорема 8

Пусть  $P$  — наследственное свойство графов и  $n \geq 3$ . Тогда  $P(n) \leq \frac{n}{n-2}P(n-1)$

## Доказательство

---

- Рассмотрим удовлетворяющий свойству  $P$  граф  $G$  на  $n$  вершинах с  $e(G) = P(n)$ . Пусть  $V(G) = v_1, \dots, v_n$ .
- Так как граф  $G_i = G - v_i$  — индуцированный подграф  $G$  — также удовлетворяет свойству  $P$ , мы имеем неравенство  $e(G) - d_G(v_i) = e(G_i) \leq P(n-1)$ .
- Сложив такие неравенства для всех  $i \in [1..n]$ , мы получим

$$(n-2)P(n) = (n-2)e(G) = ne(G) - \sum_{i=1}^n d_G(v_i) \leq n \cdot P(n-1),$$

тк

$$\sum_{i=1}^n d_G(v_i) = 2e(G)$$

откуда немедленно следует утверждение теоремы.

## Задача о запрещенном подграфе

---

**Определение.** Пусть  $H$  — некоторый фиксированный граф. Через  $ex(v, H)$  мы обозначим наибольшее возможное количество рёбер в графе на  $v$  вершинах, не содержащем подграфа, изоморфного  $H$ .

- Мы рассмотрим самый простой случай задачи о запрещенном подграфе — это задача о максимальном числе рёбер в графе без полного подграфа  $K_n$
- $(n-1)$ -дольный граф — это граф, вершины которого разбиты на  $n-1$  долю так, что внутри долей нет ребер.
- Полный  $(n-1)$ -дольный граф имеет все рёбра между долями.
- Очевидно, полный  $s$ -дольный граф при  $s \geq n$  содержит  $K_n$ , а при  $s \leq n-1$  не содержит  $K_n$
- Пусть  $v = q(n-1) + r$ , где  $r$  — остаток от деления  $v$  на  $n-1$ . Обозначим через  $T_{v,n}$  полный  $(n-1)$ -дольный граф на  $v$  вершинах с  $r$  долями размера  $q+1$  и  $n-1-r$  долями размера  $q$ .

## Лемма 4

---

Среди всех  $s$ -дольных графов на  $v$  вершинах, где  $s \leq n-1$ , наибольшее число ребер имеет  $T_{v,n}$

## Доказательство.

---

- Пусть  $H$  — подходящий под условие граф с максимальным числом ребер. Понятно, что он является полным  $s$ -дольным для некоторого  $s \leq n-1$ .
- Можно считать  $H$  полным  $(n-1)$ -дольным графом с долями размеров  $k_1, \dots, k_{n-1}$  (при  $s < n-1$  добавим доли размера 0), где  $k_1 + \dots + k_{n-1} = v$ .
- Количество ребер полного графа на  $v$  вершинах равно  $\frac{v(v-1)}{2}$ , а количество ребер полного графа на  $k_i$  вершинах равно  $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ .
- Следовательно,

$$e(H) = \frac{v(v-1)}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i(k_i-1)}{2} = \frac{v(v-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i^2}{2}$$

- Значит,  $e(H)$  максимально, когда  $\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2$  минимально
- При  $\sum_{i=1}^{n-1} k_i = v$  минимум суммы квадратов достигается на “почти равных”  $k_1, \dots, k_{n-1}$  — случае графа  $T_{v,n}$
- В самом деле, пусть для  $k_1, \dots, k_{n-1}$  сумма их квадратов минимальна. Рассмотрим наибольшее и наименьшее числа — скажем,  $k_i$  и  $k_j$ . Если  $k_i - k_j \geq 2$ , то  $k_i^2 + k_j^2 > (k_i-1)^2 + (k_j+1)^2$ , что противоречит выбору  $k_1, \dots, k_{n-1}$ .
- Значит, при минимальной  $\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2$  минимум и максимум из чисел  $k_1, \dots, k_{n-1}$  отличаются не более чем на 1. Так как они целые числа, то при  $v = q(n-1) + r$ , где  $r$  — остаток от деления  $v$  на  $n-1$  это как раз  $r$  чисел  $q+1$  и  $n-1-r$  чисел  $q$ . Это случай графа  $T_{v,n}$ .
- Количество ребер графа  $T_{v,n}$  Нетрудно подсчитать:

$$e(T_{v,n}) = \frac{(n-2)(v^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$$

где  $r$  — остаток от деления  $v$  на  $n-1$ .

## Графы без $K_n$ : теорема Турана.

### Теорема 9

(P. Turán, 1941.) При  $n \geq 3$

$$ex(v, K_n) = e(T_{v,n}) = \frac{(n-2)(v^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$$

где  $r$  — остаток от деления  $v$  на  $n-1$ .

### Доказательство

- Пусть  $H$  — граф без  $K_n$  на  $v$  вершинах.
- Для  $a, b \in V(H)$  будем писать  $a \sim b$ , если  $N_H(a) = N_H(b)$
- Если  $a \sim b$ , то очевидно, что  $a$  и  $b$  несмежны. Следовательно,  $a$  и  $b$  не могут входить в одну клику  $K_n$ .
- Понятно, что  $a \sim b$  — отношение эквивалентности. Значит,  $V(H)$  разбито на классы эквивалентности по  $\sim$ .
- Пусть  $a \not\sim b$  и эти вершины несмежны. НУО  $d_H(a) \geq d_H(b)$ . Тогда заменим весь класс эквивалентности вершины  $b$  на вершины, эквивалентные  $a$ . Количество ребер не уменьшится, но станет меньше классов эквивалентности. Так как эквивалентные вершины не могут входить вместе в  $K_n$ , в полученном графе также нет  $K_n$ .
- Будем выполнять такие операции, пока это возможно. Процесс конечен (уменьшается число классов эквивалентности), значит, он закончится, и в результате получится граф  $G$  без  $K_n$ , в котором  $e(G) \geq e(H)$  и любые две неэквивалентные вершины смежны.
- Пусть в  $G$  ровно  $s$  классов эквивалентности. Тогда  $G$  — Полный  $s$ -дольный граф, в котором доли — именно эти классы. Так как  $G$  не содержит  $K_n$ ,  $s \leq n-1$ .
- По Лемме 4 мы имеем  $e(G) \leq e(T_{v,n})$