

图23.3 (a) 高斯概率密度函数 (PDF)  $f_{\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{x}}(\mathbf{a})$  与二维 (六边形) ILS捕获区域。 (b) ILS估计器的相应概率质量函数 (PMF)  $P_{\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{L}\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{z}}$ 。 (c) 浮点解 (灰点) 和相应固定解 (绿点和红点) 的水平位置误差散点图。在此情况下, 93% 的解被正确固定 (绿点), 7% 的解被错误固定 (红点) (见 [23.18])

以及模糊度方差矩阵  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}$ , 即由整数估计器的选择和浮点模糊度的精度决定。

由于捕获区域的形状以及模糊度方差矩阵的非对角性, 模糊度成功率的计算并不简单。多元积分 (23.13) 的求解通常可通过蒙特卡洛积分 [23. 参见第 23.4.3 节。对于一些重要的整数估计器, 我们还拥有易于计算的表达式和/或其成功率的紧 (下界和上界) (第 23.2 节)。

3. 固定解质量  $\hat{\mathbf{a}}$  一旦获得整数解, 固定解即按 (23.5) 计算。该固定解具有多模态概率密度函数 [23. 21]

$$f_{\hat{\mathbf{b}}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n} f_{\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})}(\mathbf{x}) P(\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{z}) \quad (23.14)$$

其中  $f_{\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})}(\mathbf{x})$  表示条件最小二乘估计器的概率密度函数

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z}) = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z}),$$

服从均值和方差矩阵为的正态分布,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{z}) &= \mathbf{b} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z}), \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})} &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}^{-1} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}. \end{aligned} \quad (23.15)$$

由 (23.14) 可得

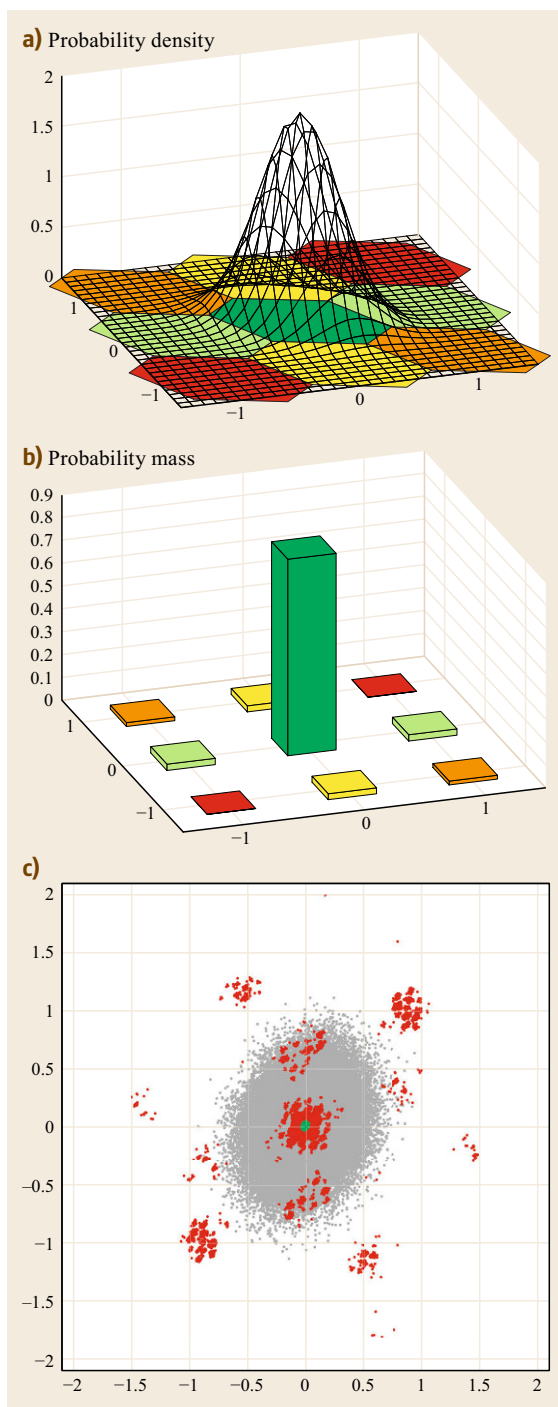
$$f_{\hat{\mathbf{b}}}(\mathbf{x}) \approx f_{\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{a})}(\mathbf{x}) \sim N(\mathbf{b}, \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})}) \quad (23.16)$$

if

$$P_s = P(\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}) \approx 1. \quad (23.17)$$

因此, 若成功率足够接近于 1, 则固定解  $\mathbf{b}$  的分布可近似为单峰正态分布  $N(\mathbf{b}; \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})})$ , 其精度优于浮点解  $\mathbf{O}\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})} < \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}}$ 。

fi



模糊度解算的相关性以及需要具有足够大的成功率, 如图23.3c所示。它展示了浮点位置 (灰色散点) 和相应固定位置 (绿色/红色散点) 的散点图。绿色散点的尺寸较小表明

如果模糊度被正确解算, 相对于浮点解可实现的改进。然而, 较大的红色散点表明, 此时的成功率不够高 ( $P_s \geq 93\%$ ), 无法

避免某些固定位置比浮点位置更差。这强调了仅使用足够高的成功率的重要性。

## 23.2 四舍五入与自举法

### 23.2.1 整数四舍五入

最简单的整数估计器是舍入到最近的整数。在标量情况下, 其捕获区域 (区间) 由下式给出

$$\mathcal{R}_z = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - z| \leq \frac{1}{2} \right\}, z \in \mathbb{Z}. \quad (23.18)$$

任何满足  $|Oa - z| \leq 1/2$  的  $Oa \sim N(a, 2Z; \sigma_a^2)$  结果, 都被拉向整数  $z$ 。我们将舍入估计器记为  $L_{aR}$ , 整数舍入操作记为  $d:c$ 。因此  $L_{aR} \geq dOac$  且  $L_{aR} \geq z$  当  $Oa \geq 2R_z$  时。

$L_{aR} \geq dOac$  的 PMF 为

$$\begin{aligned} P(\check{a}_R = z) \\ = \left[ \Phi \left( \frac{1 - 2(a - z)}{2\sigma_a} \right) + \Phi \left( \frac{1 + 2(a - z)}{2\sigma_a} \right) - 1 \right], \\ z \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (23.19)$$

其中  $\Phi(x)$  表示正态分布函数,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2}v^2 \right) dv.$$

当  $\sigma_a$  变小时, PMF 变得更加尖锐。标量四舍五入的成功率由 (23.19) 得出, 方法是将  $z$  设为  $a$ ,

$$P(\check{a}_R = a) = 2\Phi \left( \frac{1}{2\sigma_a} \right) - 1. \quad (23.20)$$

成功率随模糊度标准差  $\sigma_a$  变化的趋势如图 23.4 所示。结果表明, 要实现成功率高于 99%, 需满足  $\sigma_a < 0.20$  周期。

### 23.2.2 向量舍入

标量四舍五入可轻松推广至向量情形。其定义为分量四舍五入

$Oa \geq dOa1; \dots; Oan/\tau, L_{aR} \geq dOa1c; dOa2c; \dots; dOanc/\tau$ 。向量舍入的捕获区域是标量捕获区间的多变量版本,

$$\mathcal{R}_z = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{c}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{z})| \leq \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n \right\}, \quad (23.21)$$

其中  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_n$ , 且  $\mathbf{c}_i$  表示第  $i$  个元素为 1、其余元素为 0 的单位向量。因此, 舍入的捕获区域在二维 (2-D) 中为单位正方形, 在三维 (3-D) 中为单位立方体, 依此类推 (图 23.2)。

为了确定  $L_{aR}$  各分量的联合概率质量函数, 我们需要对  $Oa \sim N(a; Q_{aa})$  的概率密度函数在捕获区域  $\mathcal{R}_z$  上进行积分。除非方差矩阵  $Q_{aa}$  是对角的, 否则这些  $n$  重积分难以计算, 在这种情况下,  $L_{aR}$  的各分量相互独立, 其联合概率质量函数即为各分量一维概率质量函数的乘积。相应的成功率则由一维成功率  $n$  重乘积给出。

在 GNSS 情况下, 方差矩阵  $Q_{aa}$  将是完全填充的, 这意味着必须采用蒙特卡洛模拟方法来计算联合概率质量函数。对于成功率, 也可以采用以下界进行估算。

**定理 23.1** 舍入成功率的上下界 [23.22]

设浮点模糊度解服从  $Oa \sim N(a; Q_{aa})$ ,  $a \in \mathbb{Z}_n$ 。则舍入的成功率可从下界和上界进行限定, 即

$$LB \leq P(\check{a}_R = a) \leq UB, \quad (23.22)$$

其中

$$\begin{aligned} LB &= \prod_{i=1}^n \left[ 2\Phi \left( \frac{1}{2\sigma_{\hat{a}_i}} \right) - 1 \right], \\ UB &= \left[ 2\Phi \left( \frac{1}{2 \max_{i=1, \dots, n} \sigma_{\hat{a}_i}} \right) - 1 \right]^n. \end{aligned} \quad (23.23)$$

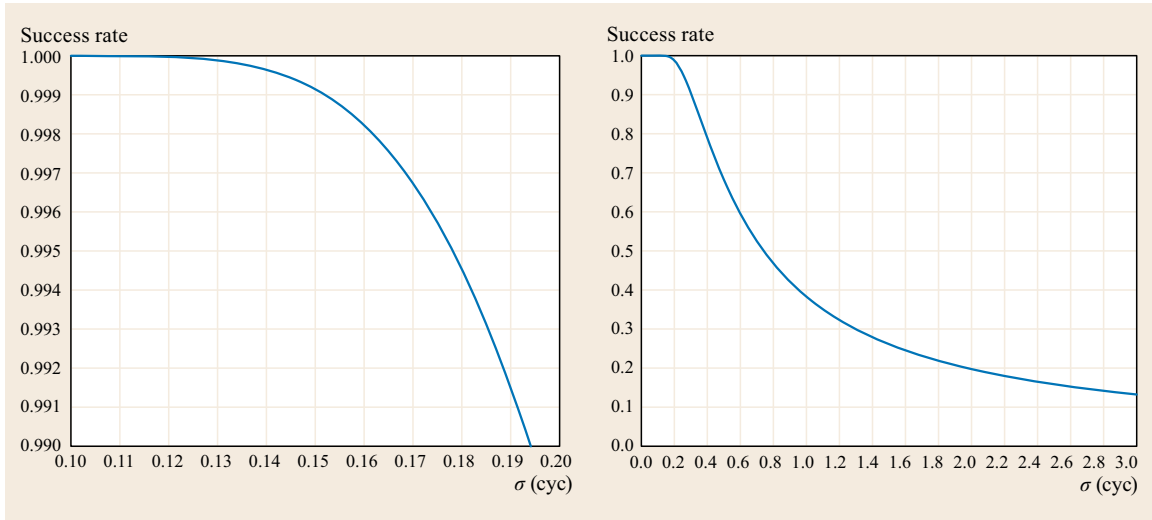


图23.4 标量舍入成功率与模糊度标准差  $\sigma$  (周期)

这些易于计算的上界在判断 GNSS 模糊度舍入的预期成功率方面非常有用。上界可用于快速决定是否放弃此类模糊度解算。它表明, 如果任一标量舍入的成功率过低, 则基于向量舍入的模糊度解算无法预期成功。

下界有助于快速决定是否采用向量舍入。如果下界足够接近1, 则可以确信向量舍入将产生正确的整数模糊度向量。注意, 这要求下界乘积中的每个单独概率都足够接近1。

fi

### 23.2.3 整数自助法

整数自助法是整数舍入的推广; 它将整数舍入与顺序条件最小二乘估计相结合, 从而在一定程度上考虑了浮点解各分量之间的相关性。该方法的步骤如下。若  $\mathbf{Oa} \in \mathbf{D} \cdot \mathbf{Oa}1; :: ::; \mathbf{Oa}n/\top$ , 则从  $\mathbf{Oa}1$  开始, 如前所述将其值舍入到最近的整数。获得第一个分量的整数值后, 其余所有分量的实值估计值将根据其与  $\mathbf{Oa}1$  的相关性进行修正。然后将第二个分量

(但此时已修正)的实值估计值舍入到最近的整数。获得该第二个分量的整数值后, 其余  $n-2$  个分量的实值估计值再次根据其第二个分量的相关性进行修正。此过程持续进行, 直到所有  $n$  个分量均被处理完毕。我们有如下定义。

fi

#### 定义23.2 整数自助法

设  $\mathbf{Oa} \in \mathbf{D} \cdot \mathbf{Oa}1; :: ::; \mathbf{Oa}n/\top \in \mathbf{R}_n$  为浮点解, 设  $\mathbf{La} \in \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{La}1; :: ::; \mathbf{La}n/\top \in \mathbf{Z}_n$  表示相应的整数自助法解。则

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B},1} &= \lceil \hat{\mathbf{a}}_1 \rceil, \\ \check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B},2} &= \lceil \hat{\mathbf{a}}_{2|1} \rceil = \lceil \hat{\mathbf{a}}_2 - \sigma_{21}\sigma_1^{-2}(\hat{\mathbf{a}}_1 - \check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B},1}) \rceil, \\ &\vdots \\ \check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B},n} &= \lceil \hat{\mathbf{a}}_{n|N} \rceil = \lceil \hat{\mathbf{a}}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{n,j}\sigma_{j|j}^{-2}(\hat{\mathbf{a}}_{j|j} - \check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B},j}) \rceil,\end{aligned}\quad (23.24)$$

其中  $\mathbf{Oa}i|l$  是在先前依次舍入的  $\mathbf{ID} \mathbf{f}1; :: ::; i-1/g$  个分量取值条件下,  $\mathbf{a}_i$  的最小二乘估计,  $\sigma_{i,j|j}$  是  $\mathbf{Oa}i$  与  $\mathbf{Oa}j|j$  之间的协方差,  $\sigma_{j|j}^2$  是  $\mathbf{Oa}j|j$  的方差。对于  $i \in \mathbf{D} 1$ , 有  $\mathbf{Oa}i|l \in \mathbf{D} \mathbf{Oa}1$ 。

正如定义所示, 自助估计量可被视为整数舍入的推广。当相关性不存在时, 即当方差矩阵  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}$  为对角的时, 自助估计量退化为整数舍入。

以向量-矩阵形式, 自助估计量 (23.24) 可表示为 [23, 23],

$$\check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B}} = \lceil \hat{\mathbf{a}} + (\mathbf{L}^{-1} - \mathbf{I}_n)(\hat{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B}}) \rceil, \quad (23.25)$$

其中  $\mathbf{L}$  为三角分解  $\mathbf{Q}_{\hat{a}\hat{a}} \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{D}^T$  的单位下三角矩阵。由于是对角矩阵

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_{a_1}^2, \dots, \sigma_{a_n}^2)$$

在自助估计量的构建中未使用，自助法仅考虑了方差矩阵的部分信息。尽管对角矩阵  $\mathbf{D}$  未用于 (23.25)，但它对于确定自助成功率是必需的。

### 23.2.4 自助成功率

为了确定自助概率质量函数，我们首先需要自助捕获区域。它们由下式给出

$$\mathcal{B}_z = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{c}_i^T \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{z})| \leq \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n \right\}, \quad (23.26)$$

其中  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ ，且  $\mathbf{c}_i$  表示第  $i$  个元素为 1、其余元素为 0 的单位向量。在二维情况下，它们是平行四边形（图 23.2）。

自助概率质量函数通过在自助捕获区域内对多元正态分布进行积分得到。与整数舍入的多元积分不同，自助法的多元积分可以大大简化。如以下定理所示，自助概率质量函数可表示为一元积分的乘积。

#### 定理 23.2 自助概率质量函数 [23.22]

设  $\mathbf{O}\mathbf{a} \sim \mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{Q}_{\hat{a}\hat{a}})$ ，且  $\mathbf{L}\mathbf{a}_B$  为  $\mathbf{a}$  的自助估计量。则

$$P(\check{\mathbf{a}}_B = \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^n \left[ \Phi \left( \frac{1 - 2\mathbf{l}_i^T (\mathbf{a} - \mathbf{z})}{2\sigma_{\hat{a}_{i|l}}} \right) + \Phi \left( \frac{1 + 2\mathbf{l}_i^T (\mathbf{a} - \mathbf{z})}{2\sigma_{\hat{a}_{i|l}}} \right) - 1 \right], \quad (23.27)$$

其中  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ ，且  $\mathbf{l}_i$  为单位上三角矩阵  $\mathbf{L}^{-1}$  的第  $i$  个列向量。

作为上述定理的直接推论，我们得到了自助法成功率的精确且易于计算的表达式。

#### 推论 23.1 自助成功率

设  $\mathbf{O}\mathbf{a} \sim \mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{Q}_{\hat{a}\hat{a}})$ 。则自助成功率由下式给出

$$P(\check{\mathbf{a}}_B = \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^n \left[ 2\Phi \left( \frac{1}{2\sigma_{\hat{a}_{i|l}}} \right) - 1 \right]. \quad (23.28)$$

这是一个重要结果，因为它提供了一种简单的方法来评估自助成功率。

在比较自助法与舍入的性能时，可以证明自助法的成功率永远不会小于舍入法成功率 [23.22]，

$$P(\check{\mathbf{a}}_B = \mathbf{a}) \geq P(\check{\mathbf{a}}_R = \mathbf{a}). \quad (23.29)$$

因此，自举法比舍入法是一种更好的整数估计器。

尽管我们已经有了上述关于自举成功率的精确且易于计算的公式，但如果能获得一个易于计算的、且具有  $\mathbf{Z}$ -不变性的上界，仍然会很有用。当利用  $\mathbf{Z}$ -不变的模糊度精度衰减因子 (模糊度精度衰减) 时，这样的上界是可以构造的。

#### 定理 23.3 自举成功率不变上界 [23.24]

设  $\mathbf{O}\mathbf{a} \sim \mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{Q}_{\hat{a}\hat{a}})$ ， $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ ， $\mathbf{O}\mathbf{z} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{D})$  且  $\text{ADOP} = \sqrt{\det(\mathbf{Q}_{\hat{a}\hat{a}}) / \det(\mathbf{D})}$ 。则

$$P(\check{\mathbf{z}}_B = \mathbf{z}) \leq \left[ 2\Phi \left( \frac{1}{2\text{ADOP}} \right) - 1 \right]^n \quad (23.30)$$

对于任何可接受的  $\mathbf{Z}$ -变换。

因此，如果上界过小，我们就可以立即得出结论：对于任何模糊度参数化，自举法和舍入法均不会成功。